Simulación de seguimiento de blancos aéreos

Pablo Alejandro Giorgi
pgiorgi@alu.itba.edu.ar
ITBA

Nicolás Magni
nmagni@alu.itba.edu.ar
ITBA

Santiago José Samra
ssamra@alu.itba.edu.ar
ITBA

Matías Williams
mwilliam@alu.itba.edu.ar
ITBA

Resumen

Palabras clave

1. INTRODUCCIÓN

2. PRIMERA PARTE

2.1 Generador de L'Ecuyer

El generador propuesto por L'Ecuyer en 1998 combina dos generadores lineales congruenciales (LCGs) para la generació de números pseudoaleatorios. El algoritmo se compone de cinco pasos, tal como se describe a continuación:

1. Seleccionar una semilla $X_{1,0}$ en el rango $[1, 2147483562]$ para el LCG1 y $X_{2,0}$ en el rango $[1, 2147483398]$ para el LCG2.

2. Evaluar cada generador individual

$$X_{1,n+1} = 40014\ X_{1,n}\ mod\ 2147483563 \tag{1}$$

$$X_{2,n+1} = 40692\ X_{2,n}\ mod\ 2147483399 \tag{2}$$

3. Computar

$$X_{n+1} = (X_{1,n+1} - X_{2,n+1})\ mod\ 2147483562 \tag{3}$$

4. Computar

$$U_{n+1} = \begin{cases} \frac{X_{n+1}}{2147483563}, X_{n+1} > 0 \\ \\ \frac{2147483562}{2147483563}, X_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

5. Hacer $n = n + 1$ e ir a 2.

A partir de este algoritmo se generan 10000 números pseudoaleatorios, usando como semillas $X_{1,0} = XXXXX$ y $X_{2,0} = XXXXX$ y sin reiniciar el algoritmo entre cada generación. Los resultados obtenidos son utilizados para construir una serie de gráficos que permitan apreciar algunas características de los números que genera el algoritmo. Por un lado se puede observar de forma gráfica la condición de pseudoaleatoriedad de los números, y por otro, que los mismos poseen una distribución uniforme, lo cual se prueba en las secciones 2.2 y 2.3 utilizandos los métodos descriptos en las mismas.

En primer lugar, los números obtenidos son divididos en 10 intervalos de clase del mismo ancho. Con las frecuencias obtenidas se construye el histograma que se muestra en la figura 1, el cual da un indicio de que los números generados por el algoritmo tienen una distribución uniforme. La decisión de elegir 10 intervalos de clase se basa en la proposición de Nuñes (1985): la cantidad necesaria para que el histograma se vea lindo.

Figura 1: Histograma realizado en base a 10000 números generados con el generador de L'Ecuyer divididos en 10 intervalos de clase

Figura 2: Duplas (U_i, U_{i+1}), construídas en base a 10000 números generados con el algoritmo de L'Ecuyer

Por otro lado, se analizan los numeros obtenidos para determinar la dependencia entre realizaciones. En la figura 2 se grafican las duplas (U_i, U_{i+1}), y en la figura 3 las ternas (U_i, U_{i+1}, U_{i+2}). Como se puede ver en ambas figuras, no se detecta a simple vista que las duplas o las ternas se dispongan en forma de hiperplanos (rectas en el caso de las duplas y planos en el caso de las ternas), sino que lo hacen de forma tal que la salida parezca aleatoria. Por otro lado, tampoco se evidencian áreas vacías, o áreas con mayor concentración de puntos que otras.

2.2 Test χ^2

En las figuras 2 y 3 se puede apreciar de forma gráfica que los números generados por el algoritmo de L'Ecuyer tienen una distribución uniforme. Para poder afirmar o refutal tal hipótesis, se puede utilizar el test χ^2, el cual determina con un nivel de significación α (fijado en 5 %), si es razonable suponer que la distribución observada de las 10000 muestras generadas en la sección 2.1 es consistente con que la variable tenga una distribución uniforme. Las hipótesis del test son:

- H_0: $\chi_0^2 < \chi_{n-1,\alpha}$ (Los números obtenidos mediante el método de L'Ecuyer están uniformemente distribuidos)

- H_1: $\chi_0^2 \geq \chi_{n-1,\alpha}$ (Los números obtenidos mediante el método de L'Ecuyer no están uniformemente distribuidos)

Para la prueba se toman 10 intervalos de clase, determinando así 9 grados de libertad. Para estos parámetros, se obtiene de tablas el valor crítico $\chi^2_{n-1,\alpha} = 16{,}919$. El estadístico χ_0^2 se computa mediante la fórmula de la ecuación 5.

Figura 3: Ternas (U_i, U_{i+1}, U_{i+2}), construídas en base a 10000 números generados con el algoritmo de L'Ecuyer

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad (5)$$

y resulta $\chi_0^2 = XXXXXXXXXX$, razón por la cual se acepta la hipótesis nula H_0.

2.3 Test Kolmogorov-Smirnov

Dado que el test de la sección 2.2 no rechaza la hipótesis de que la muestra tiene distribución uniforme, se realiza el test Kolmogorov-Smirnov. Las hipótesis utilizadas para esta prueba son:

- H_0: $D < D_\alpha$ (Los números obtenidos mediante el método de L'Ecuyer están uniformemente distribuidos)
- H_1: $D \geq D_\alpha$ (Los números obtenidos mediante el método de L'Ecuyer no están uniformemente distribuidos)

Donde D es el resultado de la prueba y D_α es el valor crítico correspondiente a los parámetros de la misma. El valor D es computado con la fórmula de la ecuación 6.

$$D = max(D^+, D^-) \qquad (6)$$

siendo

$$D^+ = max(\frac{i}{n} - x_i) \qquad (7)$$

$$D^- = max(x_i - \frac{i-1}{n}) \qquad (8)$$

donde x_i es el i-ésimo valor de los calculados por el método de L'Ecuyer, y el índice i es la cantidad de realizaciones menores que x_i de la muestra de 10000 números obtenida en la sección 2.1. Realizando los cálculos, resulta: $D = XXXXXX$. El valor crítico, para una significación de $\alpha = 0{,}05$ y para 10 intervalos de clase, es $D_{0,05} = 0{,}4092$ [NEAVE,1981]. Luego como $D < D_{0,05}$, no se puede rechazar H_0 y se acepta que la muestra tiene distribución uniforme.

2.4 Distribución triangular

En los experimentos de simulación suele ser necesario generar secuencias de números pseudoaleatorios distribuídos de acuerdo a una función $F(x)$ arbitraria. A continuación se utiliza la técnica de la transformada inversa aplicada a la función de densidad triangular dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & a \leq x \leq b \\ \frac{2(c-x)}{(c-b)(c-a)}, & b < x \leq c \\ 0, & \text{en otro lado} \end{cases} \qquad (9)$$

Integrando la ecuación 9 se obtiene la función de distribución $F_X(x)$:

Figura 4: Histograma de una realización de una variable pseudoaleatoria con distribución de probabilidad triangular con parámetros $a = 0$, $b = 1$ y $c = 3$; obtenida a partir de una realización de una variable con distribución uniforme.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x^2-2ax+a^2}{(b-a)(c-a)}, & a \leq x \leq b \\ \frac{b-a}{c-a} + \frac{2cx-x^2-b(2c-b)}{(c-b)(c-a)}, & b < x \leq c \\ 1, & x > c \end{cases} \qquad (10)$$

Por último, la variable aleatoria X resulta:

$$X = \begin{cases} a + \sqrt{U(c-a)(b-a)}, 0 \leq U \leq \frac{b-a}{c-a} \\ c - \sqrt{(c-b)^2 - U(c-b)(c-a) + (b-a)(c-b)}, \\ \frac{b-a}{c-a} < U \leq 1 \end{cases} \qquad (11)$$

Aplicando esta función de transformación al set de 10000 valores obtenidos en la sección 2.1, se obtienen 10000 realizaciones de una variable pseudoaleatoria con distribución triangular. Dividiendo las realizaciones en 10 intervalos de clase, y graficando las frecuencias se obtiene el histograma que se muestra en la figura 4.

2.5 Distribución exponencial

Tal como se puede observar en la sección 2.4, se puede generar una serie de números pseudoaleatorios con una distribución elegida según la necesidad. En esta sección se muestra cómo generar una serie de números con distribución exponencial.

La función de la ecuación 12 corresponde a la función densidad de probabilidad de una variable aleatoria con distribución exponencial.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & 0 \leq x \\ 0 & Otro\ caso \end{cases} \qquad (12)$$

Se integra y se calcula la función inversa para obtener la expresión de la ecuación 13

$$x_i = \begin{cases} 0 & u_i = 0 \\ -ln(u_i) & Otro\ caso \end{cases} \qquad (13)$$

la cual corresponde a una variable aleatoria con distribución exponencial.

2.6 Distribución uniforme parametrizada

Para convertir una variable aleatoria con distribución uniforme $U[0,1]$ en otra variable aleatoria con distribución $U[a,b]$, se puede utilizar la expresión de la ecuación 14.

$$x_i = (b-a)u_i + a \qquad (14)$$

3. SEGUNDA PARTE

3.1 Propulsión WARP

La nave USS Enterprise posee un sistema de propulsión WARP que consiste en dos propulsores, que son alimentados mediante un *Núcleo WARP*. Dicho núcleo se encuentra en el interior de un reactor donde se producen las reacciones de aniquilicación materia-antimateria, moderadas por cristales de dilitio. Para procesar los cristales, se utiliza una cámara de controlada, llamada *Matriz de Dilitio*. Este subsistema posee redundancia para evitar fallas. Por último, todo el sistema está controlado por la *Computadora Central*, que posee un sistema operativo antiguo, de finales del siglo XX, el cual sufre fallos dado por caída conocidos como BSTF (*Blue Screen Threat Failure*).

El tiempo de propulsión WARP de la nave es una variable aleatoria T, definida en función de las variables aleatorias que representan las fallas de las componentes del sistema.

En primer lugar, cada propulsor posee un tiempo de operación que se puede representar utilizando una variable aleatoria con distribución exponencial con tiempo medio de 3 días. Entonces, se pueden definir las variables aleatorias X_1 y X_2 con distribución exponencial con $\lambda = 1/72$ horas.

En segundo lugar, el tiempo de operación entre fallos del núcleo WARP es de 72 horas, pudiendo variar linealmente hasta en 12 horas. Por lo tanto, se puede plantear como una variable aleatoria X_3 con distribución triangular con $a = 60$ horas, $b = 72$ horas y $c = 84$ horas.

En tercer lugar, las cámaras de Dilitio operán de forma tal que la Cámara Principal tiene un tiempo de operación entre 20 y 50 horas, uniformemente distribuido. Entonces, se la puede representar como una variable aleatoria X_4 con distribución uniforme, entre 20 y 50 horas ($U[20, 50]$). Además, de esta Cámara, el sistema cuenta con una Cámara Redundante que también puede fallar. La misma puede ser representada mediante una variable aleatoria X_5 uniformemente distribuida entre 5 y 30 horas ($U[5, 30]$).

Por último, la Computadora Central posee un sistema operativo antiguo y con fallas conocidas, que termina generando problemas en todo el sistema de propulsón, por lo cual es necesario representar mediante una variable aleatoria. ComoeEl intervalo de tiempo entre BSTF's (fallas del sistema operativo) es una variable aleatoria normalmente distribuida con media de 2 dias y varianza de 5 horas, se la puede representar utilizando una variable aleatoria X_6, con distribución normal con media 48 horas y varianza 5 horas. ($N[48, 5]$).

Una vez representadas todas las componentes del sistema como variables aleatorias, se puede definir la variable aleatoria T tiempo de operación del sistema como:

$$T = min\{max\{X_1, X_2\}, X_3, max\{X_4, X_5\}, X_6\} \tag{15}$$

Conociendo el modelo de las variables X_i, resulta que el tiempo medio de funcionamiento del sistema de propulsión es:

$$\mathcal{E}\{T\} = \int\int\int\int\int\int_{\mathcal{D}} min\{max\{x_1, x_2\}, x_3, max\{x_4, x_5\}, x_6\} * [ACAFALTANUNPARDECOSASDELASFILMINAS] \tag{16}$$