Prednášky z Matematiky (4) — Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2017/2018

11. prednáška

Rezolvencia v logike prvého rádu

7. mája 2018

Obsah 11. prednášky

Dobrovoľníci na testovanie dokazovacieho asistenta

- Hľadáme dobrovoľníkov na testovanie dokazovacieho asistenta
- Produkt bakalárskej práce Zoltána Onódyho
- Nie tablový, bližší prirodzeným dôkazom
- Testovanie vo **štvrtok 10. mája od 9:30**
- Zápis jednoduchých dôkazov vo výrokovej logike,
  logike prvého rádu (bez rovnosti)
- Prihláste sa mailom na lpi-zp{z@vin@č}lists.dai.fmph.uniba.sk

Bakalárske práce

- Ponúkame vedenie bakalárskych prác
- Ďalšie učebné pomôcky:
  - rezolvovač
  - ekvivalentné a ekvisplniteľné úpravy formúl

  ...
- Rozširovanie existujúcich pomôcok:
  - databázové a grafické editovanie štruktúry v prieskumníku
  - rovnosť v prvorádovom tablovači, dokazovacom asistentovi

  ...
- Vlastné nápady na užitočné nástroje

3.9

Rezolvencia

Výrokové pravidlo rezolvencie (opakovanie)

Výroková rezolvencia — odvodzovacie pravidlo pre výrokové klauzuly:

$$\frac{k_1 \lor \cdots \lor p \lor \cdots \lor k_m \qquad \ell_1 \lor \cdots \lor \neg p \lor \cdots \lor \ell_n}{k_1 \lor \cdots \lor k_m \lor \ell_1 \lor \cdots \lor \ell_n}$$

Rezolvenčné *odvodenie* z množiny klauzúl S je postupnosť klauzúl, z ktorých každá:

- je prvkom S, alebo
- vznikla pravidlom rezolvencie
  z niektorých dvoch predchádzajúcich klauzúl v postupnosti, alebo
- vznikla pravidlom idempotencie
  z niektorej z predchádzajúcej klauzuly v postupnosti.

Rezolvenčné *zamietnutie* množiny klauzúl S je rezolvenčné odvodenie z S, ktorého posledným prvkom je prázdna klauzula $\square$ (klauzula s 0 literálmi).

Prvorádové klauzuly a klauzálne teórie

Definícia 3.1

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk logiky prvého rádu.

Literál je atomická formula $P(t_1, \ldots, t_m)$ jazyka $\mathcal{L}$ alebo jej negácia $\neg P(t_1, \ldots, t_m)$.

Klauzula je všeobecný uzáver disjunkcie literálov, teda uzavretá formula jazyka $\mathcal{L}$ v tvare $\forall x_1 \cdots \forall x_k (L_1 \lor \cdots \lor L_n)$ (skrátene $\forall \vec{x} \bigvee_{i=1}^{n} L_i$), kde $L_1, \ldots, L_n$ sú literály a $x_1, \ldots, x_k$ sú *všetky* voľné premenné formuly $L_1 \lor \cdots \lor L_n$. Klauzula môže byť aj ***jednotková*** ($\forall \vec{x}\, L_1$) alebo ***prázdna*** ($\square$).

Klauzálna teória je množina klauzúl $\{C_1, \ldots, C_n\}$. Môže byť tvorená aj jedinou klauzulou alebo byť prázdna.

Dohoda 3.2

Všeobecné kvantifikátory v zápise klauzúl budeme zanedbávať.
Teda namiesto $\forall x_1 \cdots \forall x_n (L_1 \lor \cdots \lor L_m)$ píšeme iba $L_1 \lor \cdots \lor L_m$.

Formalizácia do klauzálnych teórií

Príklad 3.3

Klauzálnymi teóriami sa dajú formalizovať mnohé tvrdenia:

- Implikácie vieme vyjadriť disjunkciami a negáciami, konjunkciu v konzekvente viacerými klauzulami,
  - Každý, kto má rád Ciri, má rád Bibu a Edo ho tiež má rád:
    $\forall x(\neg \mathtt{má\_rád}(x, \mathtt{Ciri}) \lor \mathtt{má\_rád}(x, \mathtt{Biba}))$,
    $\forall x(\neg \mathtt{má\_rád}(x, \mathtt{Ciri}) \lor \mathtt{má\_rád}(\mathtt{Edo}, x))$

  konjunkciu v antecedente viacerými literálmi v klauzule
  - Každý, kto má rád Bibu a Dadu, má rád aj Aďu:
    $\forall x(\neg \mathtt{má\_rád}(x, \mathtt{Biba}) \lor \neg \mathtt{má\_rád}(x, \mathtt{Dada}) \lor \mathtt{má\_rád}(x, \mathtt{Aďa}))$
- Namiesto existenčného kvantifikátora môžeme *pomenovať* objekt konštantou
  - Niekto má rád všetkých: $\forall y\, \mathtt{má\_rád}(\mathbf{\mathtt{filantrop}}, y)$

  alebo funkciou, ktorej dáme ako argumenty súvisiace objekty
  - Každého má niekto rád: $\forall y\, \mathtt{má\_rád}(\mathbf{\mathtt{obdivovateľ}(y)}, y)$

Úsudky s klauzulami

Príklad 3.4

- Každého má niekto rád: $\forall y\, \text{má\_rád}(\text{obdivovateľ}(y), y)$,
  teda aj Ciri má niekto rád: $\text{má\_rád}(\text{obdivovateľ}(\text{Ciri}), \text{Ciri})$
- Kto má rád Ciri, toho má rád Edo:

  $$\forall x(\neg\text{má\_rád}(x, \text{Ciri}) \lor \text{má\_rád}(\text{Edo}, x)),$$

  ak Cirin obdivovateľ má rád Ciri, tak ho Edo má rád:

  $$\neg\text{má\_rád}(\text{obdivovateľ}(\text{Ciri}), \text{Ciri}) \lor \text{má\_rád}(\text{Edo}, \text{obdivovateľ}(\text{Ciri})).$$

- Preto (výrokovou rezolvenciou):

  $$\frac{\begin{array}{c}\text{má\_rád}(\text{obdivovateľ}(\text{Ciri}), \text{Ciri}) \\ \neg\,\text{má\_rád}(\text{obdivovateľ}(\text{Ciri}), \text{Ciri}) \lor \text{má\_rád}(\text{Edo}, \text{obdivovateľ}(\text{Ciri}))\end{array}}{\text{má\_rád}(\text{Edo}, \text{obdivovateľ}(\text{Ciri}))}$$

Úsudky s klauzulami

- Celý úsudok z príkladu aj s dosadeniami:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall y\, \text{má\_rád}(\text{obdivovateľ}(y), y) \\ \forall x(\neg\text{má\_rád}(x, \text{Ciri}) \lor \text{má\_rád}(\text{Edo}, x))\end{array}}{\text{má\_rád}(\text{Edo}, \text{obdivovateľ}(\text{Ciri}))}$$

- Aby sme klauzuly mohli rezolvovať, potrebovali sme substitúciu:

$$\sigma = \{x \mapsto \text{obdivovateľ}(\text{Ciri}), y \mapsto \text{Ciri}\}$$

- Po substitúcii σ majú komplementárne literály rovnaké argumenty predikátu:

$$\begin{aligned} \text{má\_rád}(\text{obdivovateľ}(y), y)\sigma &= \text{má\_rád}(\text{obdivovateľ}(\text{Ciri}), \text{Ciri}) \\ \neg\text{má\_rád}(x, \text{Ciri})\sigma &= \neg\text{má\_rád}(\text{obdivovateľ}(\text{Ciri}), \text{Ciri}) \end{aligned}$$

Unifikátory

Definícia 3.5

Nech A, B sú postupnosti symbolov, σ je substitúcia.
Substitúcia σ je ***unifikátorom*** A a B vtt $A\sigma = B\sigma$.

Príklad 3.6

- $A_1 = \text{má\_rád}(\text{filantrop}, y)$, $B_1 = \text{má\_rád}(x, \text{Ciri})$,
  $\sigma_1 = \{x \mapsto \text{filantrop}, y \mapsto \text{Ciri}\}$
- $A_2 = \text{má\_rád}(\text{obdivovateľ}(y), y)$, $B_2 = \text{má\_rád}(x, \text{Ciri})$,
  $\sigma_2 = \{x \mapsto \text{obdivovateľ}(\text{Ciri}), y \mapsto \text{Ciri}\}$
- $A_3 = \text{má\_rád}(\text{obdivovateľ}(y), y)$, $B_3 = \text{má\_rád}(\text{Edo}, x)$,
  $\sigma_3 =$??? **neexistuje!**
- $A_4 = \text{má\_rád}(\text{obdivovateľ}(y), y)$, $B_4 = \text{má\_rád}(x, x)$,
  $\sigma_4 =$??? **neexistuje!**

Skladanie substitúcií, premenovanie premenných

Definícia 3.7

Nech $\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}$ a $\theta = \{y_1 \mapsto s_1, \dots, y_m \mapsto s_m\}$ sú substitúcie.

Zložením (kompozíciou) substitúcií σ a θ je substitúcia $\sigma\theta = \{x_1 \mapsto t_1\theta, \dots, x_n \mapsto t_n\theta, y_{i_1} \mapsto s_{i_1}, \dots, y_{i_k} \mapsto s_{i_k}\}$, kde $\{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}\} = \{y_1, \dots, y_m\} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$.

Príklad 3.8

$$\sigma = \{x \mapsto \mathtt{obdivovateľ}(y), z \mapsto y\}$$

$$\theta = \{y \mapsto \mathtt{filantrop}\}$$

$$\sigma\theta = \{x \mapsto \mathtt{obdivovateľ}(\mathtt{filantrop}), z \mapsto \mathtt{filantrop}, y \mapsto \mathtt{filantrop}\}$$

Unifikátory

Definícia 3.9

Nech A, B sú postupnosti symbolov, σ a θ sú substitúcie.

σ je ***všeobecnejšia*** ako θ vtt existuje subst. γ taká, že $\theta = \sigma\gamma$.

σ je ***najvšeobecnejším unifikátorom*** A a B vtt

- σ je unifikátorom A a B a zároveň
- pre každý unifikátor θ A a B je σ všeobecnejšia ako θ.

Príklad 3.10

$A_5 = \texttt{má\_rád}(\texttt{obdivovateľ}(x), y)$, $B_5 = \texttt{má\_rád}(u, v)$

- $\sigma_{51} = \{u \mapsto \texttt{obdivovateľ}(\texttt{Ciri}), v \mapsto y, x \mapsto \texttt{Ciri}\}$
  $\theta_{51} = \{u \mapsto \texttt{obdivovateľ}(\texttt{Ciri}), v \mapsto \texttt{Biba}, x \mapsto \texttt{Ciri}, y \mapsto \texttt{Biba}\}$
  $\gamma_{51} = \{y \mapsto \texttt{Biba}\}$
- $\sigma_{52} = \{u \mapsto \texttt{obdivovateľ}(x), v \mapsto y\}$
  $\theta_{52} = \{u \mapsto \texttt{obdivovateľ}(\texttt{Ciri}), v \mapsto y, x \mapsto \texttt{Ciri}\}$
  $\gamma_{52} = \{x \mapsto \texttt{Ciri}\}$

Unifikátory a rezolvencia

Príklad 3.11

$$\frac{\text{má\_rád}(\text{obdivovateľ}(y), y)\sigma \qquad (\neg\text{má\_rád}(x, \text{Ciri}) \lor \text{má\_rád}(\text{Edo}, x))\sigma}{\text{má\_rád}(\text{Edo}, x)\sigma}$$

$$\sigma = \{x \mapsto \text{obdivovateľ}(\text{Ciri}), y \mapsto \text{Ciri}\}$$

$$\frac{\text{má\_rád}(\text{obdivovateľ}(\text{Ciri}), \text{Ciri}) \qquad \neg\,\text{má\_rád}(\text{obdivovateľ}(\text{Ciri}), \text{Ciri}) \lor \text{má\_rád}(\text{Edo}, \text{obdivovateľ}(\text{Ciri}))}{\text{má\_rád}(\text{Edo}, \text{obdivovateľ}(\text{Ciri}))}$$

Unifikátory a rezolvencia

Príklad 3.12

Rovnaké premenné v klauzulách môžu zabrániť unifikácii literálov:

$$\mathtt{má\_rád}(\mathtt{obdivovateľ}(x), x) \qquad \neg\mathtt{má\_rád}(x, \mathtt{Ciri}) \lor \mathtt{má\_rád}(\mathtt{Edo}, x)$$

Klauzuly sú však všeobecne kvantifikované nezávisle od seba.
Premenovanie premenných v jednej z nich nezmení jej význam,
ale umožní unifikáciu (viď predchádzajúci príklad).

$$\mathtt{má\_rád}(\mathtt{obdivovateľ}(y), y) \qquad \neg\mathtt{má\_rád}(x, \mathtt{Ciri}) \lor \mathtt{má\_rád}(\mathtt{Edo}, x)$$

Definícia 3.13

Premenovaním premenných je každá substitúcia
$\sigma = \{x_1 \mapsto y_1, \dots, x_n \mapsto y_n\}$, kde $y_1, \dots, y_n$ sú premenné.

Prvorádová rezolvencia — pravidlá

Definícia 3.14

Nech C a D sú prvorádové klauzuly, nech A a B sú atómy, nech L a K sú literály.

Rezolvencia (angl. resolution) je odvodzovacie pravidlo

$$\frac{A \vee C \quad \neg B \vee D}{(C\theta \vee D)\sigma} \quad \begin{array}{l}\sigma \text{ je unifikátor } A\theta \text{ a } B,\\ \theta \text{ je premenovanie premenných.}\end{array}$$

Faktorizácia (angl. factoring) je odvodzovacie pravidlo

$$\frac{L \vee K \vee C}{(L \vee C)\sigma} \quad \sigma \text{ je unifikátor } L \text{ a } K.$$

Faktorizácia je zovšeobecnenie idempotencie pri výrokovej rezolvencii.

Rezolvenčné odvodenie a zamietnutie

Definícia 3.15

Nech T je klauzálna teória.

Rezolvenčným odvodením z T je každá konečná postupnosť klauzúl $\mathcal{Z} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$, kde každá klauzula C_i, $1 \leq i \leq n$, je:

- prvkom T, alebo
- odvodená pravidlom rezolvencie z klauzúl C_j a C_k, ktoré sa v $\mathcal{Z}$ nachádzajú pred C_i (teda $j, k < i$), alebo
- odvodená pravidlom faktorizácie z klauzuly C_j, ktorá sa v $\mathcal{Z}$ nachádza pred C_i (teda $j < i$).

Zamietnutím T (angl. refutation) je každé rezolvenčné odvodenie $\mathcal{Z} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$, kde $C_n = \square$.

Refutačná korektnosť a úplnosť rezolvencie

Veta 3.16 (Refutačná korektnosť a úplnosť rezolvencie)

Nech T je klauzálna teória.
Potom existuje zamietnutie $\{C_1, \ldots, C_n\}$ *vtt T je nesplniteľná.*

Príklad 3.17

Dokážme nesplniteľnosť:

$$\left\{\begin{array}{c} \forall x\, \mathtt{má\_rád}(\mathtt{obdivovateľ}(x), x), \\ \forall x\, \forall y\, \neg\mathtt{má\_rád}(x, \mathtt{obdivovateľ}(y)), \\ \forall x(\neg\mathtt{má\_rád}(x, \mathtt{Ciri}) \lor \mathtt{má\_rád}(\mathtt{Edo}, x)) \end{array}\right\}$$

3.10

Prevod do klauzálnej teórie a skolemizácia

Rezolvencia vs. prvorádové teórie

- Rezolvencia je teda refutačne korektná a úplná
- Pracuje však iba s klauzálnymi teóriami
- Vo výrokovej logike sa dala ľubovoľná teória *upraviť na ekvisplniteľnú* klauzálnu teóriu (resp. formulu v CNF)
- Na zistenie jej (ne)splniteľnosti sme potom mohli použiť výrokovú rezolvenciu (alebo výrokový SAT solver)
- Je podobná úprava možná aj v logike prvého rádu?

Prvorádová ekvivalencia a ekvisplniteľnosť

Definícia 3.18 (Prvorádová ekv*ivalencia*)

Množiny formúl S a T sú ***(prvorádovo) ekvivalentné*** ($S \Leftrightarrow T$) vtt
pre každú štruktúru $\mathcal{M}$ a každé ohodnotenie e platí
$\mathcal{M} \models S[e]$ vtt $\mathcal{M} \models T[e]$.

Definícia 3.19 (Prvorádová ekvi*splniteľnosť*)

Množiny formúl S a T
sú ***(prvorádovo) rovnako splniteľné*** (***ekvisplniteľné***, equisatisfiable) vtt
S má model vtt T má model.

Tvrdenie 3.20 (Ekvivalentná úprava)

Nech X, A, B sú formuly a nech $\mathrm{free}(A) = \mathrm{free}(B)$.
Ak $A \Leftrightarrow B$, tak $X \Leftrightarrow X[A \mid B]$.

Nahradenie implikácií

Rovnako ako vo výrokovej logike môžeme každú formulu $(A \rightarrow B)$ ekvivalentne nahradiť formulou $(\neg A \lor B)$.

Príklad 3.21

$$\forall x(\mathrm{dobr\acute{e}}(x) \land \mathrm{die\check{t}a}(x) \rightarrow \exists y(\mathrm{dostane}(x,y) \land \mathrm{dar\check{c}ek}(y)))$$
$$\Leftrightarrow \forall x(\neg(\mathrm{dobr\acute{e}}(x) \land \mathrm{die\check{t}a}(x)) \lor \exists y(\mathrm{dostane}(x,y) \land \mathrm{dar\check{c}ek}(y)))$$

$$\forall x(\neg\mathrm{dobr\acute{e}}(x) \rightarrow \neg\exists y\, \mathrm{dostane}(x,y))$$
$$\Leftrightarrow \forall x(\neg\neg\mathrm{dobr\acute{e}}(x) \lor \neg\exists y\, \mathrm{dostane}(x,y))$$

Konverzia do negačného normálneho tvaru (NNF)

Definícia 3.22

Formula X je v ***negačnom normálnom tvare*** (NNF) vtt
neobsahuje implikáciu
a pre každú jej podformulu $\neg A$ platí, že A je atomická formula.

Formulu bez implikácií do NNF upravíme pomocou

- de Morganovych zákonov:

$$\neg(A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B \qquad \neg(A \lor B) \Leftrightarrow \neg A \land \neg B$$

- pravidla dvojitej negácie:

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

- pravidiel pre negáciu kvantifikátorov:

$$\neg \exists x\, A \Leftrightarrow \forall x \neg A \qquad \neg \forall x\, A \Leftrightarrow \exists x \neg A$$

Konverzia do NNF

Tvrdenie 3.23

Pre každú formulu X existuje formula Y v NNF taká, že $X \Leftrightarrow Y$.

Príklad 3.24

$$
\begin{aligned}
& \forall x(\neg(\mathrm{dobré}(x) \land \mathrm{dieťa}(x)) \lor \exists y(\mathrm{dostane}(x, y) \land \mathrm{darček}(y)))\\
\Leftrightarrow\ & \forall x((\neg\mathrm{dobré}(x) \lor \neg\mathrm{dieťa}(x)) \lor \exists y(\mathrm{dostane}(x, y) \land \mathrm{darček}(y)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \forall x(\neg\neg\mathrm{dobré}(x) \lor \neg\exists y\, \mathrm{dostane}(x, y))\\
\Leftrightarrow\ & \forall x(\mathrm{dobré}(x) \lor \forall y\, \neg\mathrm{dostane}(x, y))
\end{aligned}
$$

Skolemizácia

Skolemizácia je úprava formuly X v NNF, pri ktorej:

- každý výskyt podformuly $\exists y\, A$, ktorý sa nachádza v X **mimo** všetkých oblastí platnosti všeobecných kvantifikátorov nahradíme formulou

$$A\{y \mapsto c\}$$

  pre **nový** symbol konštanty c, nazývaný ***Skolemova konštanta***;
- každý výskyt podformuly $\exists y\, A$, ktorý sa nachádza v X v oblasti platnosti všeobecných kvantifikátorov premenných $x_1, \dots, x_n$

$$X = \cdots \forall x_1 (\cdots \forall x_2 (\cdots \forall x_n (\cdots \exists y\, A \cdots) \cdots) \cdots) \cdots$$

  nahradíme formulou

$$A\{y \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

  pre **nový** funkčný symbol f, nazývaný ***Skolemova funkcia***.

Skolemove konštanty a funkcie **pomenúvajú** objekty, ktorých existenciu formula postuluje.

Skolemizácia

Tvrdenie 3.25

Pre každú formulu X v jazyku $\mathcal{L}$ existuje formula Y vo vhodnom rozšírení $\mathcal{L}'$ jazyka $\mathcal{L}$ taká, že Y neobsahuje existenčné kvantifikátory a X a Y sú ***ekvisplniteľné****.*

Príklad 3.26

$$\exists x(\mathtt{dobré}(x) \land \mathtt{dieťa}(x))$$

$$\rightsquigarrow \mathtt{dobré}(\mathtt{nejaké\_dobré\_dieťa}) \land \mathtt{dieťa}(\mathtt{nejaké\_dobré\_dieťa})$$

$$\forall x(\neg\mathtt{dobré}(x) \lor \neg\mathtt{dieťa}(x) \lor \exists y(\mathtt{dostane}(x, y) \land \mathtt{darček}(y)))$$

$$\rightsquigarrow \forall x(\neg\mathtt{dobré}(x) \lor \neg\mathtt{dieťa}(x) \lor (\mathtt{dostane}(x, \mathtt{darček\_pre}(x)) \land \mathtt{darček}(\mathtt{darček\_pre}(x))))$$

Skolemizácia

Príklad 3.27

$$\exists z\Big(R(z,z) \land \forall x\big(\neg R(x,z) \lor \exists u(R(x,u) \land R(u,z)) \lor \forall y \exists v(\neg R(y,v) \land R(x,v))\big)\Big)$$

$\rightsquigarrow \ldots ?$

Konverzia do PNF

Definícia 3.28

Formula X je v ***prenexnom normálnom tvare*** (PNF) vtt
má tvar $Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n\, A$, kde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, x_i je premenná
a A je formula bez kvantifikátorov (***matica*** formuly X).

Skolemizovanú formulu v NNF upravíme do PNF
opakovanou aplikáciou nasledujúcich transformácií:

- ak x **nemá voľný výskyt** v B,

$$\forall x\, A \land B \Leftrightarrow \forall x\,(A \land B) \qquad B \land \forall x\, A \Leftrightarrow \forall x\,(B \land A)$$

$$\forall x\, A \lor B \Leftrightarrow \forall x\,(A \lor B) \qquad B \lor \forall x\, A \Leftrightarrow \forall x\,(B \lor A)$$

- ak sa x má voľný výskyt v B a y je **nová** premenná,

$$\forall x\, A \land B \Leftrightarrow \forall y\, A\{x \mapsto y\} \land B \qquad B \land \forall x\, A \Leftrightarrow B \land \forall y\, A\{x \mapsto y\}$$

$$\forall x\, A \lor B \Leftrightarrow \forall y\, A\{x \mapsto y\} \lor B \qquad B \lor \forall x\, A \Leftrightarrow B \lor \forall y\, A\{x \mapsto y\}$$

Konverzia do PNF

Tvrdenie 3.29

Pre každú formulu X v NNF existuje ekvivalentná formula Y v PNF a NNF.

Príklad 3.30

$$\begin{aligned} & \forall x (\, \mathtt{dobré}(x) \lor \forall y\, \neg \mathtt{dostane}(x, y)\,) \\ \Leftrightarrow\ & \forall x\, \forall y\, (\, \mathtt{dobré}(x) \lor \neg \mathtt{dostane}(x, y)\,) \end{aligned}$$

Pozor! Pre ekvivalentnosť prenexovania je nutné,
aby boli premenné viazané rôznymi kvantifikátormi rôzne:

$$(\forall x\, A(x) \lor \forall x\, B(x)) \not\Leftrightarrow \forall x\, (A(x) \lor B(x)) \quad !!!$$

$$(\forall x\, A(x) \lor \forall x\, B(x)) \Leftrightarrow \forall x\, \forall y\, (A(x) \lor B(y))$$

Premenné je lepšie premenovať ešte pred skolemizáciou.

Konverzia do CNF

Maticu (najväčšiu podformulu bez kvantifikátorov) formuly v PNF upravíme do CNF pomocou distributívnosti a komutatívnosti disjunkcie:

$$(A \lor (X \land Y)) \Leftrightarrow ((A \lor X) \land (A \lor Y))$$
$$((X \land Y) \lor A) \Leftrightarrow ((X \lor A) \land (Y \lor A))$$

Príklad 3.31

$$\begin{aligned}
&\forall x(\neg\mathtt{dobré}(x) \lor \neg\mathtt{dieťa}(x) \lor \\
&\quad (\mathtt{dostane}(x, \mathtt{darček_pre}(x)) \land \mathtt{darček}(\mathtt{darček_pre}(x)))) \\
\Leftrightarrow\ &\forall x((\neg\mathtt{dobré}(x) \lor \neg\mathtt{dieťa}(x) \lor \mathtt{dostane}(x, \mathtt{darček_pre}(x))) \land \\
&\quad (\neg\mathtt{dobré}(x) \lor \neg\mathtt{dieťa}(x) \lor \mathtt{darček}(\mathtt{darček_pre}(x))))
\end{aligned}$$

Konverzia do klauzálnej teórie

Formula, ktorej matica je v CNF, je ekvivalentná s konjunkciou klauzúl:

$$\forall x(A \land B) \Leftrightarrow (\forall x\, A \land \forall x\, B)$$

a konjunkcia klauzúl je ekvivalentná s ich množinou:

$$\{(\forall x\, A \land \forall x\, B)\} \Leftrightarrow \{\forall x\, A, \forall x\, B\}$$

Príklad 3.32

$$\begin{aligned}
&\{\forall x((\neg \mathrm{dobré}(x) \lor \neg \mathrm{dieťa}(x) \lor \mathrm{dostane}(x, \mathrm{darček_pre}(x))) \land \\
&\qquad (\neg \mathrm{dobré}(x) \lor \neg \mathrm{dieťa}(x) \lor \mathrm{darček}(\mathrm{darček_pre}(x))))\} \\
\Leftrightarrow\ &\{(\forall x(\neg \mathrm{dobré}(x) \lor \neg \mathrm{dieťa}(x) \lor \mathrm{dostane}(x, \mathrm{darček_pre}(x))) \land \\
&\quad \forall x(\neg \mathrm{dobré}(x) \lor \neg \mathrm{dieťa}(x) \lor \mathrm{darček}(\mathrm{darček_pre}(x))))\} \\
\Leftrightarrow\ &\{\forall x(\neg \mathrm{dobré}(x) \lor \neg \mathrm{dieťa}(x) \lor \mathrm{dostane}(x, \mathrm{darček_pre}(x))), \\
&\ \forall x(\neg \mathrm{dobré}(x) \lor \neg \mathrm{dieťa}(x) \lor \mathrm{darček}(\mathrm{darček_pre}(x)))\}
\end{aligned}$$

Konverzia do klauzálnej teórie

Veta 3.33

Ku každej teórii T v jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$ existuje ekvisplniteľná klauzálna teória v nejakom rozšírení $\mathcal{L}'$ jazyka $\mathcal{L}$ o Skolemove konštanty a funkcie.

Príklad 3.34

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x\,(\mathtt{dobr\acute{e}}(x) \land \mathtt{die\check{t}a}(x) \rightarrow \exists y(\mathtt{dostane}(x,y) \land \mathtt{dar\check{c}ek}(y))),\\ \exists x\,(\mathtt{dobr\acute{e}}(x) \land \mathtt{die\check{t}a}(x)),\\ \forall x\,(\neg\mathtt{dobr\acute{e}}(x) \rightarrow \neg\exists y\,\mathtt{dostane}(x,y)) \end{array}\right\} \rightsquigarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x_1(\neg\mathtt{dobr\acute{e}}(x_1) \lor \neg\mathtt{die\check{t}a}(x_1) \lor \mathtt{dostane}(x_1, \mathtt{dar\check{c}ek\_pre}(x_1))),\\ \forall x_2(\neg\mathtt{dobr\acute{e}}(x_2) \lor \neg\mathtt{die\check{t}a}(x_2) \lor \mathtt{dar\check{c}ek}(\mathtt{dar\check{c}ek\_pre}(x_2))),\\ \mathtt{dobr\acute{e}}(\mathtt{nejak\acute{e}\_dobr\acute{e}\_die\check{t}a}), \mathtt{die\check{t}a}(\mathtt{nejak\acute{e}\_dobr\acute{e}\_die\check{t}a}),\\ \forall x_3\,\forall y\,(\mathtt{dobr\acute{e}}(x_3) \lor \neg\mathtt{dostane}(x_3, y)) \end{array}\right\}$$

Konverzia do prvorádovej CNF

Dôkaz/algoritmus

T_{I}: Implikácie nahradíme disjunkciami.

T_{N}: ***Negačný normálny tvar*** (NNF): Presunieme negácie k atómom.

T_{V}: Premenujeme premenné tak,
aby každý kvantifikátor viazal inú premennú ako ostatné kvantifikátory.

T_{S}: ***Skolemizácia***: Existenčné kvantifikátory nahradíme substitúciou nimi viazaných premenných za Skolemove konštanty/aplikácie Skolemovych funkcií na všeobecne príslušné kvantifikované premenné.

T_{P}: ***Prenexný normálny tvar*** (PNF):
presunieme všeobecné kvantifikátory na začiatok formuly.

T_{D}: ***Konjunktívny normálny tvar*** (CNF): distribuujeme disjunkcie do konjunkcií.

T_{K}: Odstránime konjunkcie rozdelením konjunktov do samostatne kvantifikovaných klauzúl.

Skolemizácia vytvorí ekvisplniteľnú teóriu, ostatné úpravy sú ekvivalentné.

Rezolvencia a vyplývanie

Dôsledok 3.35 (Úplnosť rezolvencie)

Nech T je konečná teória, nech X je uzavretá formula.
Nech $T'_X = \{C_1, \dots, C_n\}$ je klauzálna teória ekvisplniteľná s $T \cup \{\neg X\}$.
Potom z T vyplýva X vtt existuje zamietnutie T'_X.

Literatúra

Martin Davis and Hillary Putnam. A computing procedure for quantification theory. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 7:201–215, 1960.

Martin Davis, George Logemann, and Donald Loveland. A machine program for theorem-proving. *Communications of the ACM*, 5(7):394–397, 1962.

Michael Genesereth and Eric Kao. *Introduction to Logic*. Morgan & Claypool, 2013. ISBN 9781627052481.

Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0-201-53082-7.

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost, nutnost*. Academia, 2002. Prístupné aj na http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf.