Prednášky z Matematiky (4) — Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2017/2018

8. prednáška

Definície predikátov.
Sémantika relačnej logiky prvého rádu

16. apríla 2018

Obsah 8. prednášky

Organizačné oznamy

Opravný/náhradný termín testu

bude vo **štvrtok 26. apríla o 18:10** v posluchárni **B**

- **Zapíšte sa na termín v AIS!**
- Kto získal < 5 bodov, už je zapísaný.

Náhrada teoretických cvičení 1. a 8. mája:

2AIN1: stredy 2. a 9. mája o 14:50 v M-I (Kľuka)
2AIN2: stredy 2. a 9. mája o 16:30 v M-IX (Homola)
2AIN3: stredy 2. a 9. mája o 16:30 v M-XI (Pukancová)
Tretiaci, ktorí majú TV aj Extrémne programovanie:
piatky 4. a 11. mája

o 8:10 v F1-328 (Kľuka) — zamietnuté
o 9:50 v F1-328 (Kľuka) — **dohodnuté**

3.2

Syntax (opakovanie)

Symboly jazyka relačnej logiky prvého rádu

Definícia 3.4

Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu sú:

symboly (indivíduových) premenných z nejakej nekonečnej spočítateľnej množiny $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ (označujeme ich x, y, …);

***mimologické* symboly:**

- ***symboly konštánt*** z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ (označované a, b, …);
- ***predikátové symboly*** z nejakej spočít. množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ (ozn. P, R, …);

***logické symboly*:**

- ***logické spojky*:** unárna $\neg$, binárne $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$,
- ***symbol rovnosti*** $\doteq$,
- ***kvantifikátory*:** ***existenčný kvantifikátor*** $\exists$ a ***všeobecný kvantifikátor*** $\forall$;

pomocné symboly $($, $)$ a **,** (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú vzájomne disjunktné.

Logické a pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ je priradená ***arita*** $\mathrm{ar}(P) \in \mathbb{N}^{+}$.

Atomické formuly relačnej logiky prvého rádu

Definícia 3.6 (Term)

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu.
Symboly premenných z $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ a konštánt z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ súhrnne nazývame ***termy***.

Definícia 3.7 (Atomické formuly)

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $t_1 \doteq t_2$,
kde t_1 a t_2 sú termy.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(t_1, \ldots, t_n)$,
kde P je predikátový symbol s aritou n a $t_1, \ldots, t_n$ sú termy.

Atomickými formulami (skrátene ***atómami***) jazyka $\mathcal{L}$
súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Formuly jazyka relačnej logiky prvého rádu

Definícia 3.8

Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ všetkých ***formúl*** jazyka relačnej logiky prvého rádu $\mathcal{L}$ je *najmenšia* množina postupností symbolov jazyka $\mathcal{L}$, pre ktorú platí:

- Všetky atomické formuly z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ sú formulami z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ (teda $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).
- Ak A je formula z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj $\neg A$ je formula z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ (***negácia*** A).
- Ak A a B sú formuly z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \rightarrow B)$ sú formuly z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ (***konjunkcia***, ***disjunkcia***, ***implikácia*** A a B).
- Ak x je indivíduová premenná a A je formula z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj $\exists x\, A$ a $\forall x\, A$ sú formuly z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ (***existenčná*** a ***všeobecná kvantifikácia*** formuly A vzhľadom na x).

Dohoda 3.9

Formuly označujeme písmenami $A, B, C, \ldots$ s prípadnými indexmi.
$(A \leftrightarrow B)$ je skratka postupnosti symbolov $((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A))$.

3.2
Formalizácia v logike prvého rádu

Formuly jazyka relačnej logiky prvého rádu

Otestujte sa VIII.1

Ktoré z nasledujúcich postupností symbolov sú formulami relačnej logiky prvého rádu, ak vhodne zvolíme jazyk?

a. $\forall x\, \mathtt{človek}(x) \land \mathtt{žena}(\mathtt{Eva})$
b. $\mathtt{chytá}(\mathtt{mačka}(\mathtt{Muro}), \mathtt{myš}(y))$
c. $(\neg\mathtt{prší} \lor \exists x(\mathtt{zmoknutý}(x)))$
d. $(\forall x \neg x \doteq \mathtt{Eva} \to \neg \exists x\, x \doteq x)$

Ak postupnosť nie je formulou,
ako sa dá správne vyjadriť pravdepodobne zamýšľaný význam?

3.2.5

Definície predikátov

Pojmy

- V mnohých doménach sú zaujímavé komplikovanejšie **kombinácie** vlastností alebo vzťahov:
  - x má spoločného rodiča s y:
    $\exists z(\mathtt{rodič}(z, x) \land \mathtt{rodič}(z, y))$
  - x je živočích, ktorý konzumuje iba rastliny:
    $\big(\mathtt{živočích}(x) \land \forall y(\mathtt{konzumuje}(x, y) \to \mathtt{rastlina}(y))\big)$
- Často sa vyskytujúce kombinácie vzťahov a vlastností je výhodné:
  - **pomenovať**
  - a jasne **vyjadriť význam** nového mena
    pomocou doteraz známych vlastností a vzťahov,

teda ***zadefinovať pojem***

Definície pojmov

Definícia 3.10 (neformálna)

Definícia je tvrdenie, ktoré vyjadruje význam pojmu.

Explicitná definícia (najčastejší druh definície) je
ekvivalencia medzi pojmom a opisom jeho významu,
v ktorom sa definovaný pojem sám *nevyskytuje*.

Príklad 3.11

- x je *súrodencom* y práve vtedy, keď x má spoločného rodiča s y
  $\forall x \forall y \big(\mathtt{súrodenec}(x, y) \leftrightarrow \exists z(\mathtt{rodič}(z, x) \land \mathtt{rodič}(z, y))\big)$
- x je *bylinožravec* vtedy a len vtedy,
  keď x je živočích, ktorý konzumuje iba rastliny
  $\forall x \big(\mathtt{bylinožravec}(x) \leftrightarrow$
  $\big(\mathtt{živočích}(x) \land \forall y(\mathtt{konzumuje}(x, y) \rightarrow \mathtt{rastlina}(y))\big)\big)$

Explicitná def. a nutná a postačujúca podmienka

Poznámka 3.12

Všimnite si:

- Definícia pojmu *súrodenec* vyjadruje **nutnú aj postačujúcu** podmienku toho, aby medzi dvoma ľuďmi existoval súrodenecký vzťah
- Definícia pojmu *bylinožravec* vyjadruje nutnú aj postačujúcu podmienkou toho, aby niečo bolo bylinožravcom

Použitie pojmov

Využitím definovaného pojmu

- skracujeme tvrdenia:
  - králiky sú bylinožravce:
    $\forall x(\texttt{králik}(x) \to \texttt{bylinožravec}(x))$
- jednoduchšie definujeme ďalšie pojmy:
  - x je *sestrou* y práve vtedy, keď x je žena, ktorá je súrodencom y:
    $\forall x \forall y \big(\texttt{sestra}(x, y) \leftrightarrow (\texttt{žena}(x) \land \texttt{súrodenec}(x, y))\big)$

Vyskúšajte si VIII.2

Zadefinujte pojem *teta* (chápaný ako vzťah dvoch ľudí)
neformálne (v slovenčine) aj formálne (formulou logiky prvého rádu).

3.3
Sémantika relačnej logiky prvého rádu

Význam atomických formúl — výroková logika

Významom atomických formúl je pravdivostná hodnota
Vo výrokovej logike:

- Atomické formuly sú výrokové premenné — nemajú *žiadnu štruktúru*

$$\texttt{starší\_Howard\_Virginia}, \quad \texttt{otec\_George}$$

- Význam im **priamo** priraďuje **ohodnotenie**

$$v = \{\texttt{starší\_Howard\_Virginia} \mapsto f, \quad \texttt{otec\_George} \mapsto t\}$$

- Rôzne ohodnotenia — rôzne stavy sveta

Význam atomických formúl — logika prvého rádu

Významom atomických formúl je pravdivostná hodnota
Logika prvého rádu:

- Atomické formuly **majú štruktúru**:
  predikátový symbol/rovnosť a jeho argumenty (termy)

$$\mathtt{minister}(\mathtt{Hlohovsk\acute{y}}),\quad \mathtt{star\check{s}\acute{i}}(\mathtt{Dorothy}, x),\quad x \doteq \mathtt{George},$$
$$\mathtt{prijal}(\mathtt{Hlohovsk\acute{y}}, u, \mathtt{Veseli\check{c}}, \mathtt{rok2013})$$

- **Termy** (symboly konštánt a *indivíduových* premenných)

$$\mathtt{Dorothy},\quad \mathtt{George},\quad \mathtt{Hlohovsk\acute{y}},\quad \mathtt{\acute{u}platok250000€},\quad \ldots$$
$$u,\quad x,\quad \ldots$$

  označujú objekty

- **Predikátové symboly**

$$\mathtt{minister}^1,\quad \mathtt{star\check{s}\acute{i}}^1,\quad \mathtt{prijal}^4$$

  označujú vlastnosti alebo vzťahy objektov

Vlastnosti a vzťahy matematicky

- ❓ Aký matematický objekt predstavuje **vlastnosť** objektov?
  - Množina, napríklad pre vlastnosť byť ministrom môžeme vytvoriť množinu všetkých objektov s touto vlastnosťou:
    { Pšenová, Hlohovský, Zubáková, Žinčica, . . . }
- ❓ Aký matematický objekt predstavuje **vzťah** niekoľkých objektov?
  - Usporiadaná *n*-tica: (Dorothy, George)
- ❓ Aký matematický objekt predstavuje **mnoho vzťahov rovnakého druhu**?
  - Množina usporiadaných *n*-tíc, napríklad pre vzťah byť starší
    {(Dorothy, Virginia), (Howard, Virginia), (Dorothy, Howard), (Dorothy, George), (George, Virginia)}
- ❓ Odkiaľ vyberáme objekty do týchto množín?
  - Z množiny objektov existujúcich v časti sveta, ktorá nás zaujíma

Význam mimologických symbolov

Aby sme dali význam symbolom nejakého jazyka $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu:

- Vyberieme **doménu** M —
  množinu objektov v časti sveta, ktorá nás zaujíma
  $$M = \{{}_{\text{Pšenová}}, {}_{\text{Hlohovský}}, {}_{\text{Zubáková}}, {}_{\text{Žinčica}}, \dots, {}_{\text{Veselič}}, {}_{\text{Petržlen}}, \dots, {}_{50000}, {}_{250000}, \dots, {}_{\text{HD}}, \dots, {}_{2012}, {}_{2013}, \dots\}$$
- **Interpretujeme** mimologické symboly v tejto doméne:
  Symboly konštánt interpretujeme ako **objekty z domény**
  $$i(\mathtt{Hlohovský}) = {}_{\text{Hlohovský}}, \quad i(\mathtt{rok2013}) = {}_{2013},$$
  $$i(\mathtt{minister\_vnútra}) = {}_{\text{Hlohovský}}, \quad \dots$$
  Predikátové symboly interpretujeme ako množiny prvkov domény
  $$i(\mathtt{minister}) = \{{}_{\text{Pšenová}}, {}_{\text{Hlohovský}}, {}_{\text{Zubáková}}, {}_{\text{Žinčica}}, \dots\}$$
  alebo ich n-tíc
  $$i(\mathtt{prijal}) = \{({}_{\text{Hlohovský}}, {}_{250000}, {}_{\text{Veselič}}, {}_{2013}), ({}_{\text{Zubáková}}, {}_{\text{HD}}, {}_{\text{Petržlen}}, {}_{2012}), \dots\}$$
  v závislosti od arity symbolu

Dvojicu (M, i) nazveme **štruktúra** pre jazyk $\mathcal{L}$

Štruktúra

Definícia 3.13

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu.
Štruktúrou pre jazyk $\mathcal{L}$ nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (M, i)$, kde

M je **neprázdna** množina, ***doména*** štruktúry $\mathcal{M}$;

i je zobrazenie, ***interpretačná funkcia*** štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré

- každému symbolu konštanty c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in M$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje množinu $i(P) \subseteq M^n$.

Dohoda 3.14

Štruktúry označujeme veľkými *písanými* písmenami $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \ldots$.
Doménu označujeme *rovnakým*, ale *tlačeným* písmenom ako štruktúru.

Štruktúry

- Štruktúr pre daný jazyk je nekonečne veľa
- Doména môže mať ľubovoľné prvky, môže byť nekonečná
- Interpretácia symbolov vôbec nemusí zodpovedať intuícii
- Štruktúra nedefinuje význam jednej zložky atomických formúl — indivíduových premenných

Ohodnotenie premenných

Definícia 3.15

Nech $\mathcal{M} = (M, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$.
Ohodnotenie (indivíduových) premenných je ľubovoľná funkcia $e\colon \mathcal{V}_{\mathcal{L}} \to M$ (priraďuje premenným prvky domény).

Zápisom $\boldsymbol{e(x/v)}$ označíme ohodnotenie indivíduových premenných, ktoré priraďuje premennej x hodnotu v z domény M
a všetkým ostatným premenným rovnakú hodnotu ako im priraďuje e.

Majme $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{x, y\}$ a doménu

$$M = \{{}_{\text{Andrea K.}}, {}_{\text{Bibiána V.}}, {}_{\text{Alena H.}}, {}_{\text{Daniela L.}}, {}_{\text{Edo S.}}, {}_{\text{Fero Z.}}\}$$

Ohodnotením (indivíduových) premenných je napríklad

$$e = \{x \mapsto {}_{\text{Bibiána V.}}, y \mapsto {}_{\text{Daniela L.}}\}$$

Potom

$$e(y/{}_{\text{Edo S.}}) = \{x \mapsto {}_{\text{Bibiána V.}}, y \mapsto {}_{\text{Edo S.}}\}$$

Hodnota termov

Definícia 3.16

Nech $\mathcal{M} = (M, i)$ je štruktúra, e je ohodnotenie premenných.
Hodnotou termu t v štruktúre $\mathcal{M}$ pri ohodnotení premenných e je prvok $t^{\mathcal{M}}[e]$ z M určený nasledovne:

- $t^{\mathcal{M}}[e] = e(x)$, ak t je premenná $x \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}$,
- $t^{\mathcal{M}}[e] = i(a)$, ak t je konštanta $a \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Splnenie atomickej formuly v štruktúre

Konečne môžeme určiť význam atomickej formuly

- Zoberieme štruktúru $\mathcal{M} = (M, i)$

$$M = \{\text{Andrea K.}, \text{Bibiána V.}, \text{Alena H.}, \text{Daniela L.}, \text{Edo S.}, \text{Fero Z.}\}$$

$$i(\mathtt{Aďa}) = \text{Andrea K.}, \quad i(\mathtt{Biba}) = \text{Bibiána V.},$$

$$i(\mathtt{Ciri}) = \text{Alena G.}, \quad i(\mathtt{Dada}) = \text{Daniela L.}$$

$$i(\mathtt{má\_rada}) = \{(\text{Andrea K.}, \text{Daniela L.}), (\text{Bibiána V.}, \text{Andrea K.}), (\text{Bibiána V.}, \text{Edo S.}), (\text{Edo S.}, \text{Bibiána V.})\}$$

  a ohodnotenie premenných $e = \{x \mapsto \text{Fero Z.}\}$

- Pre formulu $\mathtt{má\_rada}(\mathtt{Biba}, x)$
  1. vyhodnotíme termy vo formule:
     $\mathtt{Biba}^{\mathcal{M}}[e] = i(\mathtt{Biba}) = \text{Bibiána V.}, \qquad x^{\mathcal{M}}[e] = e(x) = \text{Fero Z.}$
  2. zistíme, či $(\text{Bibiána V.}, \text{Fero Z.}) \in i(\mathtt{má\_rada})$ — v tomto prípade nie
- Takže štruktúra $\mathcal{M}$ ***nespĺňa*** formulu $\mathtt{má\_rada}(\mathtt{Biba}, x)$ pri ohodnotení e

Splnenie existenčne kvantifikovanej formuly

- Vyhodnotenie splnenia formuly s **výrokovými spojkami** v štruktúre pri ohodnotení si vieme ľahko predstaviť
- Ako vyhodnotíme splnenie formuly s **kvantifikátormi**?
- $\exists x\, \texttt{má\_rada}(\texttt{Biba}, x)$
  1. Vyskúšame všetky ohodnotenia, ktoré postupne priraďujú kvantifikovanej premennej jednotlivé prvky domény:

m	$\mathcal{M} \models \texttt{má\_rada}(\texttt{Biba}, x)\, [e(x/m)]$
Andrea K.	áno
Bibiána V.	nie
Alena H.	nie
Daniela L.	nie
Edo S.	áno
Fero Z.	nie

  2. $\mathcal{M} \models \exists x\, \texttt{má\_rada}(\texttt{Biba}, x)\, [e]$ vtt **v aspoň jednom prípade**, teda pre aspoň jedno $m \in M$, $\mathcal{M} \models \texttt{má\_rada}(\texttt{Biba}, x)\, [e(x/m)]$

Splnenie všeobecne kvantifikovanej formuly

- Nech $e = \{x \mapsto$ Andrea K.$, y \mapsto$ Daniela V.$\}$
- $\forall x \neg \mathtt{má\_rada}(y, x)$

1. Vyskúšame všetky ohodnotenia, ktoré postupne priraďujú kvantifikovanej premennej jednotlivé prvky domény:

m	$\mathcal{M} \models \neg \mathtt{má\_rada}(y, x)[e(x/m)]$	$\mathcal{M} \models \mathtt{má\_rada}(y, x)[e(x/m)]$
Andrea K.	áno	nie
Bibiána V.	áno	nie
Alena H.	áno	nie
Daniela L.	áno	nie
Edo S.	áno	nie
Fero Z.	áno	nie

2. $\mathcal{M} \models \forall x \neg \mathtt{má\_rada}(y, x)\,[e]$ vtt **vo všetkých prípadoch**, teda pre všetky $m \in M$, $\mathcal{M} \models \neg \mathtt{má\_rada}(y, x)\,[e(x/m)]$

Na pôvodnej hodnote $e(x)$ nezáleží ani pri jednom kvantifikátore

Splnenie formuly v štruktúre

Definícia 3.17

Nech $\mathcal{M} = (M, i)$ je štruktúra, e je ohodnotenie premenných.
Relácia ***štruktúra $\mathcal{M}$ spĺňa formulu A pri ohodnotení e*** (skrátene $\mathcal{M} \models A[e]$) má nasledovnú induktívnu definíciu:

- $\mathcal{M} \models t_1 \doteq t_2[e]$ vtt $t_1^{\mathcal{M}}[e] = t_2^{\mathcal{M}}[e]$,
- $\mathcal{M} \models P(t_1, \ldots, t_n)[e]$ vtt $\left(t_1^{\mathcal{M}}[e], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[e]\right) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ a zároveň $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models \exists x A[e]$ vtt pre nejaký prvok $m \in M$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$,
- $\mathcal{M} \models \forall x A[e]$ vtt pre každý prvok $m \in M$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$,

pre všetky arity $n > 0$, všetky predikátové symboly P s aritou n, všetky termy $t_1, t_2, \ldots, t_n$, všetky premenné x a všetky formuly A, B.

Splnenie množiny formúl

Definícia 3.18

Nech S je množina formúl jazyka $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$, nech e je ohodnotenie výrokových premenných.
Štruktúra $\mathcal{M}$ spĺňa množinu S pri ohodnotení e (skrátene $\mathcal{M} \models S[e]$) vtt pre všetky formuly X z S platí $\mathcal{M} \models X[e]$.

Príklad 3.19

Nájdime štruktúru a ohodnotenie, ktoré spĺňajú množinu $S_{\text{spolubývajúce}} = \{A_1, \dots, A_6\}$ prvých 6 formúl o spolubývajúcich:

$$\begin{aligned}
A_1 &= (\text{má_rada}(\text{Biba}, \text{Ciri}) \lor \text{má_rada}(\text{Biba}, \text{Dada})),\\
A_2 &= \forall x(\text{má_rada}(\text{Biba}, x) \to \text{má_rada}(\text{Aďa}, x)),\\
A_3 &= \forall x(\text{má_rada}(x, \text{Ciri}) \to \text{má_rada}(\text{Ciri}, x)),\\
A_4 &= \exists x(\text{má_rada}(x, \text{Biba}) \land \text{má_rada}(\text{Biba}, x)),\\
A_5 &= \forall x \neg\text{má_rada}(x, x), \qquad A_6 = \forall x \exists y\, \text{má_rada}(x, y)
\end{aligned}$$

Splniteľnosť

Definícia 3.20

Nech X je formula jazyka $\mathcal{L}$ a nech S je množina formúl jazyka $\mathcal{L}$.

Formula X je *splniteľná* vtt aspoň jedna štruktúra $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ spĺňa X pri aspoň jednom ohodnotení e.

Množina formúl S je *splniteľná* vtt aspoň jedna štruktúra $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ spĺňa S pri aspoň jednom ohodnotení e.

Formula X (množina formúl S) je *nesplniteľná* vtt nie je splniteľná.

Príklad 3.21

Dokážme, že množina všetkých 7 formúl o spolubývajúcich, teda $S_{\text{spolubývajúce}} \cup \{\exists x \forall y\, \texttt{má\_rada}(y, x)\}$, je nesplniteľná.

Platné formuly a prvorádové vyplývanie

Definícia 3.22

Nech X je formula v jazyku $\mathcal{L}$.
Formula X je ***platná*** (skrátene $\models X$) vtt
každá štruktúra $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ spĺňa X pri každom ohodnotení e.

Platné formuly sú prvorádovou obdobou tautológií.
Keď rovnaké atomické alebo kvantifikované podformuly nahradíme rovnakými výrokovými premennými), tak

- formula, z ktorej vznikne tautológia, je platná; ale
- *nie z každej platnej formuly vznikne tautológia.*

Definícia 3.23

Nech X je formula v jazyku $\mathcal{L}$, nech S je množina formúl v jazyku $\mathcal{L}$.
Formula X ***(prvorádovo) vyplýva z S*** (skrátene $S \models X$) vtt
pre každú štruktúru $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ a každé ohodnotenie e platí, že
ak $\mathcal{M}$ spĺňa S pri e, tak $\mathcal{M}$ spĺňa X pri e.

Platné formuly a prvorádové vyplývanie

Tvrdenie 3.24

Nech X je formula v jazyku $\mathcal{L}$.
Potom X je platná ($\models X$) vtt
X prvorádovo vyplýva z prázdnej množiny formúl ($\{\} \models X$).

Tvrdenie 3.25

Nech X je formula a S je množina formúl v spoločnom jazyku $\mathcal{L}$.
Potom z S vyplýva X vtt $S \cup \{\neg X\}$ je nesplniteľná.

Dôkaz z testu

Cvičenie 3.26

Dokážte (priamo či sporom) alebo vyvráťte (nájdením kontrapríkladu) nasledujúce tvrdenia:

a. Nech T je ľubovoľná výroková teória,
nech X a Y sú ľubovoľné výrokové formuly.
Ak $T \models (X \rightarrow Y)$, tak $T \not\models X$ alebo $T \models Y$.

b. Nech T je ľubovoľná výroková teória,
nech X a Y sú ľubovoľné výrokové formuly.
Ak $T \not\models X$ alebo $T \models Y$, tak $T \models (X \rightarrow Y)$.

Literatúra

Martin Davis and Hillary Putnam. A computing procedure for quantification theory. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 7:201–215, 1960.

Martin Davis, George Logemann, and Donald Loveland. A machine program for theorem-proving. *Communications of the ACM*, 5(7):394–397, 1962.

Michael Genesereth and Eric Kao. *Introduction to Logic*. Morgan & Claypool, 2013. ISBN 9781627052481.

Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0-201-53082-7.

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost, nutnost*. Academia, 2002. Prístupné aj na http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf.