Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Zbierka úloh z Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Júlia Pukancová, Martin Homola, Jozef Šiška

Letný semester 2017/18

Posledná aktualizácia: 9. mája 2018

Obsah

1 Úvod do logiky

Úloha 1.0.1. Stav sveta, v ktorom sú pravdivé všetky tvrdenia teórie, je jej

a) formalizácia,
b) dôkaz,
c) model,
d) logický dôsledok,
e) redukcia,
f) interpretácia.

Úloha 1.0.2. Tvrdenie, ktoré je pravdivé vo všetkých stavoch sveta, v ktorých je pravdivá teória, je jej

a) premisou,
b) logickým dôsledkom,
c) záverom,
d) implikáciou,
e) kontradikciou,
f) tautológiou.

Úloha 1.0.3. Usudzovacie pravidlo je vzorom

a) premís,
b) úsudkov,
c) záverov,
d) tautológií,
e) dôkazov,
f) dedukcií.

Úloha 1.0.4. Usudzovacie pravidlá, ktoré z pravdivých premís vždy odvodia pravdivé závery, nazývame

a) induktívne,
b) konkrétne,
c) deduktívne,
d) tautologické,
e) korektné,
f) úplné.

Úloha 1.0.5. Usudzovanie, pri ktorom používame iba také pravidlá, ktoré z pravdivých premís vždy odvodia pravdivé závery, sa nazýva:

a) interpretácia,
b) abdukcia,
c) formalizácia,
d) indukcia,
e) dedukcia,
f) inferencia.

Úloha 1.0.6. Usudzovanie, pri ktorom odvodzujeme možné príčiny z ich následkov, sa nazýva:

a) dedukcia,

b) analógia,

c) abdukcia,

d) indukcia.

2 Výroková logika

2.1 Syntax výrokovej logiky

Úloha 2.1.1. Rozhodnite, či nasledovné reťazce sú výrokovými formulami nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ a svoje rozhodnutie neformálne zdôvodnite:

a) $p_1 \rightarrow p_2$

b) $(p_1) \land (p_2)$

c) $(p_1 \lor (\neg p_2))$

d) $(p_1 \lor (p_1 \land p_2))$

e) $(p_1 \land p_2 \land p_3)$

f) $(p_1 \land (u_2 \rightarrow p_3))$

g) $((p_1 \land (p_2 \rightarrow p_3)) \lor p_1)$

h) $((p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (p_2 \land p_1))$

i) $((p_1 \lor p_2) \rightarrow (p_2 \land p_1))$

j) $((p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (u_2 \land p_1))$

Riešenie. a) Postupnosť symbolov $p_1 \rightarrow p_2$ nie je formula nad $\mathcal{V}$, pretože to nie je ani výroková premenná z $\mathcal{V}$, ani nie je v tvare $\neg A$ pre nejakú formulu A (lebo nezačína symbolom „$\neg$“), ani nie je v jednom z tvarov $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \rightarrow B)$ pre nejaké formuly A a B (lebo nezačína symbolom „(“).

d) Postupnosť symbolov $(p_1 \lor (p_1 \land p_2))$ je formula nad $\mathcal{V}$. Dokazuje to jej vytvárajúca postupnosť: p_1, p_2, $(p_1 \land p_2)$, $(p_1 \lor (p_1 \land p_2))$. ♮

Úloha 2.1.2. Rozhodnite, či nasledovné postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$. V prípade kladnej odpovede určte množinu $\mathcal{V}$ a nájdite vytvárajúcu postupnosť. Zápornú odpoveď stručne zdôvodnite.

a) $(a \land \neg a)$

b) $(\mathit{tweety\_is\_penguin} \rightarrow \neg \mathit{tweety\_flies})$

c) $(\mathit{happy}(\mathit{jack}) \land \mathit{loves}(\mathit{marry}, \mathit{jack}))$

d) $\neg\neg\neg \mathit{koľko\_je\_hodín?}$

e) $\neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q$

f) $(\forall x \lor \neg \exists y)$

g) $(\neg(\neg \mathit{wow}))$

h) $(\neg\neg a \neg \rightarrow \neg\neg(b \lor c))$

i) $\forall x\, \big((\mathit{student}(x) \land \neg \mathit{studies}(x)) \rightarrow \mathit{fails\_exam}(x)\big)$

j) $(\mathit{edo} = \mathit{vrátnik} \lor \mathit{edo} = \mathit{otec}(\mathit{ivana}))$

Riešenie. b) Postupnosť symbolov $(tweety\_is\_penguin \to \neg tweety\_flies)$ je formulou nad každou množinou $\mathcal{V}$, ktorá obsahuje výrokové premenné $tweety\_is\_penguin$, $tweety\_flies$. Jej vytvárajúcou postupnosťou je: $tweety\_is\_penguin$, $tweety\_flies$, $\neg tweety\_flies$, $(tweety\_is\_penguin \to \neg tweety\_flies)$.

c) Postupnosť symbolov $(happy(jack) \land loves(marry, jack))$ nie je formulou. Má tvar $(A \land B)$, kde A je postupnosť symbolov $happy(jack)$ a B je $loves(marry, jack)$. Avšak A nie je formula: Nezačína symbolom „¬“, takže nie je negáciou podľa bodu (ii) definície 2.6. Nezačína ani symbolom „(“, takže nie je ani formulou podľa bodu (iii). Musí teda byť výrokovou premennou. Ale výrokové premenné podľa definície 2.3 nemôžu obsahovať symboly zátvoriek ani logických spojok. ♮

Úloha 2.1.3. Napíšte po dve rôzne vytvárajúce postupnosti pre formuly:

a) $\neg(q \land p)$
b) $(\neg p \to q)$
c) $(((p \land q) \lor p) \to ((p \land q) \lor \neg p))$
d) $(((p \land p) \land (p \land q)) \land ((p \land p) \land (p \land p)))$

Riešenie. a) Dvoma rôznymi vytvárajúcimi postupnosťami pre formulu $\neg(q \land p)$ sú napríklad:

- $p, q, (q \land p), \neg(q \land p)$;
- $q, p, \neg q, \neg p, (q \land p), (q \lor p), \neg(q \land p)$. ♮

Úloha 2.1.4. Cieľom tejto úlohy je precvičiť si písanie induktívnych definícií, ktoré sme na prednáške použili na zadefinovanie výrokových formúl.

a) Zadefinujte výrokové formuly s binárnou *Shefferovou spojkou* (NAND, symbol $\uparrow$) nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$. Vo formulách sa nebudú vyskytovať žiadne ďalšie spojky (ani negácia).

   Napríklad postupnosti symbolov

   $$\top \qquad kim \qquad (kim \uparrow sarah) \qquad ((jim \uparrow (kim \uparrow jim)) \uparrow (sarah \uparrow sarah))$$

   by podľa vašej definície mali byť formulami nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V} = \{jim, kim, sarah\}$.

b) Zadefinujte aritmetické výrazy s operátormi súčtu, súčinu a opačného čísla („unárne mínus“) nad množinou premenných $\mathcal{V}$.

   Napríklad postupnosti symbolov

   $$x \qquad -z \qquad (x + x) \qquad (x \times -y) \qquad -(x \times -(-(z \times y) + -(x + y)))$$

   by podľa vašej definície mali byť aritmetickými výrazmi nad množinou premenných $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$.

c) Zadefinujte aritmetické výrazy s operátormi *rozdielu*, súčinu a opačného čísla („unárne mínus“) nad množinou premenných $\mathcal{V}$. Zamyslite sa nad tým, či vaša definícia umožňuje výrazy jednoznačne rozložiť nad podvýrazy.

d) Zadefinujte výrokové formuly nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ s ternárnou spojkou $(\ldots\ \mathbf{?}\ \ldots\ \mathbf{:}\ \ldots)$ (*ak-tak-inak*) a dvoma nulárnymi spojkami (výrokovými konštantami) $\top$ a $\bot$. Iné spojky sa v týchto formulách nemajú vyskytovať.

Príklady formúl nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V} = \{\mathit{jim}, \mathit{kim}, \mathit{sarah}, \mathit{mokro}, \mathit{slnečno}, \mathit{polievacie\_auto}, \mathit{prší}\}$:

$$\bot \quad \mathit{prší} \quad (\mathit{kim}\ ?\ \mathit{jim} : \mathit{sarah}) \quad (\mathit{mokro}\ ?\ (\mathit{slnečno}\ ?\ \mathit{polievacie\_auto} : \mathit{prší}) : \top)$$

Riešenie. a)
Definícia. *Symbolmi jazyka výrokovej logiky so Shefferovou spojkou* sú:

- *výrokové premenné* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{V}$, ktorej prvkami nie sú symboly $\uparrow$, (a), ani jej prvky tieto symboly neobsahujú;
- *logický* symbol: $\uparrow$ (*Shefferova spojka*);
- *pomocné* symboly: (a).

Spojka $\uparrow$ je binárna.
Definícia. Množina $\mathcal{E}$ *výrokových formúl so Shefferovou spojkou* nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ je najmenšia množina postupností symbolov, pre ktorú platí:

- Každá výroková premenná $p \in \mathcal{V}$ je formulou z $\mathcal{E}$.
- Ak A a B sú formulami z $\mathcal{E}$, tak aj postupnosť $(A \uparrow B)$ je formulou z $\mathcal{E}$. $\natural$

Úloha 2.1.5. Zakreslite vytvárajúce stromy pre formuly z úlohy 2.1.3.

Riešenie. a)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \neg(q \land p) \arrow[d, dash] & \\ & (q \land p) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ q & & p \end{tikzcd}$$

$\natural$

Úloha 2.1.6. Určte stupeň formúl z úlohy 2.1.3.

Riešenie. Stupeň formuly $\neg(q \land p)$ je $\deg(\neg(q \land p)) = 1 + \deg((q \land p)) = 1 + (1 + \deg(q) + \deg(p)) = 1 + (1 + 0 + 0) = 2$. $\natural$

Úloha 2.1.7. Zadefinujte výrokové „formuly“ so spojkami $\neg$ a $\rightarrow$ tak, aby pre ne *neplatila* veta o jednoznačnosti rozkladu. Nájdite príslušný kontrapríklad, teda „formulu“ X, ktorá sa dá rozložiť na priame „podformuly“ viacerými spôsobmi.

Úloha 2.1.8. Vypíšte všetky a) priame podformuly a b) podformuly pre formuly z úlohy 2.1.3.

Úloha 2.1.9. Zadefinujte:

a) $\mathrm{vars}(A)$ — množinu všetkých výrokových premenných formuly A;

b) $\mathrm{vcount}(A, p)$ — počet výskytov výrokovej premennej p vo formule A;

c) $\mathrm{subfs}(A)$ — množinu všetkých podformúl formuly A;

d) $\mathrm{pcount}(A)$ — počet výskytov zátvoriek vo formule A;

e) $\mathrm{cons}(A)$ — množina všetkých logických spojok vo formule A;

f) $\mathrm{ccount}(A)$ — počet výskytov logických spojok vo formule A.

Riešenie. e)

💡 Funkciu cons zadefinujeme induktívnou definíciou. Musíme *jednoznačne* určiť hodnotu funkcie pre *každý* z možných tvarov formúl. Smieme sa pritom odvolávať na hodnoty tej istej funkcie pre formuly *nižšieho* stupňa. Na začiatku definície musíme deklarovať, aké druhy objektov predstavujú jednotlivé metapremenné (podobne ako sa v mnohých programovacích jazykoch deklarujú typy argumentov funkcií, procedúr, metód).

Definícia. Pre každú výrokovú premennú $p \in \mathcal{V}$ a pre všetky formuly A, B nad $\mathcal{V}$ definujeme:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cons}(p) &= \emptyset \\
\mathrm{cons}(\neg A) &= \{\neg\} \cup \mathrm{cons}(A) \\
\mathrm{cons}((A \land B)) &= \{\land\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B) \\
\mathrm{cons}((A \lor B)) &= \{\lor\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B) \\
\mathrm{cons}((A \to B)) &= \{\to\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B)
\end{aligned}$$

💡 Ak sú prípady pre rôzne binárne výrokové spojky navzájom dostatočne podobné, môžeme ich spojiť napríklad takto:

Definícia. Pre všetky výrokové premenné $p \in \mathcal{V}$, všetky formuly A, B nad $\mathcal{V}$ a všetky binárne spojky $b \in \{\land, \lor, \to\}$ definujeme:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cons}(p) &= \emptyset \\
\mathrm{cons}(\neg A) &= \{\neg\} \cup \mathrm{cons}(A) \\
\mathrm{cons}((A\, b\, B)) &= \{b\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B)
\end{aligned}$$

♮

Úloha 2.1.10. Vybudujte teóriu syntaxe výrokovej logiky pre nasledujúce kombinácie spojok:

a) jediná binárna spojka $\uparrow$ (*Shefferova spojka*, NAND);

b) jediná binárna spojka $\downarrow$ (*Peircova spojka*, NOR);

c) unárna spojka $\neg$ a binárna spojka $\nrightarrow$ („a nie“);

d) binárne spojky $\nrightarrow$ („a nie“) a $\rightarrow$.

Teória syntaxe pre každú z týchto kombinácií pozostáva z definícií pojmov

i. *symboly* jazyka výrokovej logiky,

ii. *výroková formula* nad množinou výrokových premenných,

iii. *vytvárajúca postupnosť* a *vytvárajúca postupnosť pre formulu*,

iv. *vytvárajúci strom* pre formulu.

Formuly majú obsahovať *iba* spojky z príslušnej kombinácie.

Riešenie. a)

💡 Definície i. a ii. sme už uviedli v riešení úlohy 2.1.4 a). Pokračujeme teda bodmi iii. a iv.:

Definícia. *Vytvárajúcou postupnosťou* je ľubovoľná konečná postupnosť postupností symbolov, ktorej každý člen je výroková premenná z $\mathcal{V}$, alebo má tvar $(A \uparrow B)$, pričom A a B sú nejaké predchádzajúce členy tejto postupnosti.

Vytvárajúcou postupnosťou pre X je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je X.

Definícia. *Vytvárajúcim stromom* pre formulu X je binárny strom T obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni T je formula X;
- ak vrchol obsahuje formulu $(A \uparrow B)$, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu A a pravé formulu B;
- vrcholy obsahujúce výrokové premenné sú listami. ♮

Úloha 2.1.11. Rozhodnite: Podľa vety o jednoznačnosti rozkladu má každá formula práve jednu priamu podformulu.

Úloha 2.1.12. Výpis vytvárajúceho stromu formuly X v poradí:

a) preorder,

b) inorder,

c) postorder,

d) žiadnom z uvedených

je vytvárajúcou postupnosťou pre formulu X.

Úloha 2.1.13. Dokážte alebo vyvráťte nájdením kontrapríkladu nasledujúce tvrdenia:

a) počet výskytov pravých zátvoriek v A plus počet negácií v A je menší alebo rovný stupňu A;
b) ak A je podformulou B, tak sa nachádza v každej vytvárajúcej postupnosti pre B;
c) ak sa A nachádza vo vytvárajúcej postupnosti pre B, tak A je podformulou B;
d) ak sa A nachádza pred B vo vytvárajúcej postupnosti pre formulu X, tak A je podformulou B;
e) všetky vytvárajúce postupnosti pre formulu A majú rovnakú dĺžku;
f) ak T je vytvárajúci strom pre A a P je vytvárajúca postupnosť pre A, potom počet vrcholov T je rovnaký ako dĺžka P;
g) dĺžka vytvárajúcej postupnosti pre A je rovná stupňu A;
h) počet vrcholov vytvárajúceho stromu pre A je rovný stupňu A.
i) počet vnútorných vrcholov vytvárajúceho stromu pre A je rovný stupňu A.

2.2 Formalizácia vo výrokovej logike

Úloha 2.2.1. Sformalizujte nasledujúce tvrdenia (podľa Smullyana [4]) pomocou výrokovej logiky.

V prípade lúpeže v klenotníctve predviedli na políciu troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Počas vyšetrovania sa zistilo:

a) Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.
b) Doyle nikdy nepracuje sám.
c) Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.
d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

Riešenie.

Najprv prezrieme všetky tvrdenia, určíme množinu potrebných výrokových premenných a popíšeme ich význam. Významom každej premennej je *výrok*, teda tvrdenie, o ktorého pravdivosti má zmysel uvažovať. Navyše sú to *jednoduché* výroky — neobsahujú žiadne prvky, ktoré sa dajú vyjadriť výrokovými spojkami. Následne môžeme sformalizovať tvrdenia spájaním výrokových premenných do formúl.

Majme množinu výrokových premenných $\mathcal{V} = \{a, b, d\}$, kde význam jednotlivých premenných je nasledujúci: a — Adamsová je vinná, b — Mills je vinný, d — Doyle je vinný.

Zistenia z vyšetrovania potom sformalizujeme nasledovne:

a) $((a \wedge \neg b) \to d)$ b) $(d \to (a \vee b))$ c) $(a \to \neg d)$ d) $(a \vee (b \vee d))$ ♮

Úloha 2.2.2. Sformalizujte nasledujúce vety (podľa Ghidini a Serafiniho [1]) v jazyku výrokovej logiky. Zvoľte vhodnú spoločnú množinu výrokových premenných $\mathcal{V}$ a popíšte význam použitých premenných.

a) Aldo nie je Talian.

b) Aldo je Talian, ale Bob je Angličan.

c) Ak Aldo nie je Angličan, potom ani Bob nie je Angličan.

d) Aldo je Talian, alebo ak Aldo nie je Talian, tak Bob je Angličan.

e) Buď je Aldo Talian a Bob je Angličan, alebo ani Aldo nie je Talian, ani Bob nie je Angličan.

Úloha 2.2.3. Sformalizujte nasledujúce vety vo výrokovej logike nad vhodnou spoločnou množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ a popíšte význam použitých premenných:

a) Hanka príde na párty, ak Dávid nepríde, ale ak Dávid príde, potom Fero nepríde.

b) Môžeme si byť istí, že ak Eva príde na párty, tak ak Fero a Hanka neprídu, potom príde Dávid.

c) Ak ani Eva ani Fero neprídu na párty, potom Dávid príde, iba ak príde Hanka.

Úloha 2.2.4. Sformalizujte nasledujúci logický problém (podľa Voronkova [5]) v jazyku výrokovej logiky:

> Máme tri osoby, ktoré sa volajú Stirlitz, Müller a Eismann. Vieme, že práve jeden z nich je Rus, kým ostatní dvaja sú Nemci. Navyše každý Rus musí byť špión.
>
> Keď Stirlitz stretne Müllera na chodbe, zavtipkuje: „Vieš, Müller, ty si taký Nemec, ako som ja Rus." Je všeobecne známe, že Stirlitz vždy hovorí pravdu, keď vtipkuje.
>
> Máme rozhodnúť, že Eismann nie je ruský špión.

Zvoľte takú množinu výrokových premenných, aby ste tvrdenia sformalizovali verne, nezjednodušujte príliš (napríklad byť Rusom a byť špiónom nie je to isté). Popíšte význam použitých premenných.

Zároveň ale dajte pozor, aby formalizácia nepripúšťala nejaké nečakané možnosti (napríklad „Eismann nie je Rus ani Nemec" či „Stirlitz je zároveň Rus aj Nemec").

Úloha 2.2.5. Uvažujme nasledovné tvrdenia o problémoch so štartovaním auta. Navrhnite vhodné výrokové premenné a popíšte ich význam. Následne sformalizujte tvrdenia vo výrokovej logike:

a) Ak je batéria pokazená alebo ak je vybitá, je to príčinou toho, že nepočujeme zvuk štartéra.

b) To, že počujeme zvuk štartéra, ale auto nenaštartuje, môže byť (okrem iného) zapríčinené tým, že batéria je takmer vybitá, alebo tým, že je nádrž prázdna.

c) Ak sa minulo palivo alebo ak je nádrž deravá, tak je nádrž prázdna.

d) Auto nenaštartuje vtedy, keď je nádrž prázdna alebo keď je batéria takmer vybitá.

e) Rovnako platí, že ak sme nepočuli zvuk štartéra, auto nemôže naštartovať.

Úloha 2.2.6. V pobočke banky zmizli peniaze zo sejfu. Vo výrokovej logike sformalizujte zistené fakty týkajúce sa viny alebo neviny podozrivých:

a) V čase krádeže bola pobočka zavretá a prístup do nej mali len traja zamestnanci — Atem, Bersičová a Citrák.

b) Ak Atem má alibi, tak má aj Bersičová alibi.

c) Atem nemá kľúč od sejfu, takže sa doň dostal, len ak mu pomohol niekto z dvojice Bersičová a Citrák.

d) Atem bol v čase lúpeže na obede.

2.3 Sémantika výrokovej logiky

Úloha 2.3.1. Majme danú množinu výrokových premenných $\mathcal{V} = \{p, q, r\}$ a jej ohodnotenie $v = \{p \mapsto t, q \mapsto f, r \mapsto f\}$. Zistite, či ohodnotenie v spĺňa nasledovné formuly:

a) $(p \land (\neg q \to r))$

b) $((r \land q) \to \neg p)$

c) $((\neg p \lor \neg q) \lor \neg r)$

d) $((\neg p \to q) \land \neg(\neg q \lor p))$

e) $\neg(q \to q)$

f) $(p \land p)$

g) $\neg\neg\neg p$

h) $(\neg(p \land p) \lor \neg q)$

i) $(\neg q \to \neg q)$

j) $\big(r \to ((p \lor \neg p) \land \neg(q \to r))\big)$

k) $\big((\neg p \to q) \land \big(\neg q \to (q \lor \neg(q \to r))\big)\big)$

Riešenie. a) 1. spôsob — zhora nadol: Podľa definície spĺňania výrokových formúl:

$$
\begin{aligned}
v \models (p \land (\neg q \to r)) \quad &\text{vtt} \quad v \models p \quad \text{a súčasne} \quad v \models (\neg q \to r)\\
&\text{vtt} \quad v(p) = t, \text{ čo platí,} \quad \text{a súčasne} \quad v \not\models \neg q \quad \text{alebo} \quad v \models r\\
&\text{vtt} \quad v \not\models \neg q \quad \text{alebo} \quad v \models r\\
&\text{vtt} \quad v \models q \quad \text{alebo} \quad v(r) = t\\
&\text{vtt} \quad v(q) = t \quad \text{alebo} \quad v(r) = t\\
&\text{vtt} \quad f = t, \text{ čo neplatí,} \quad \text{alebo} \quad f = t, \text{ čo neplatí.}
\end{aligned}
$$

Konštatujeme teda, že $v \not\models (p \land (\neg q \to r))$.

2. spôsob — zdola nahor: Vyhodnotíme splnenie formuly $F = (p \land (\neg q \to r))$ podľa definície spĺňania pre všetky prvky jej vytvárajúcej postupnosti: $p, q, r, \neg q, (\neg q \to r), (p \land (\neg q \to r))$:

1. $v(p) = t$, teda $v \models p$.
2. $v(q) = f$, teda $v \not\models q$.
3. $v(r) = f$, teda $v \not\models r$.
4. $v \not\models q$, teda $v \models \neg q$.
5. Neplatí ani $v \not\models \neg q$, ani $v \models r$, teda $v \not\models (\neg q \to r)$.
6. Keďže neplatí $v \models (\neg q \to r)$, tak $v \not\models (p \land (\neg q \to r))$.

Tento postup sa dá stručnejšie zapísať do tabuľky, kde v záhlaví si zapíšeme jednotlivé podformuly, ktoré budeme k určeniu splnenia našej formuly potrebovať, a do riadku v poznačíme, či v príslušnú podformulu spĺňa ($\models$) alebo nespĺňa ($\not\models$):

	p	q	r	$\neg q$	$(\neg q \to r)$	$(p \land (\neg q \to r))$
v	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$

$\natural$

Úloha 2.3.2. O každej z nasledujúcich formúl nad $\mathcal{V} = \{p, q, r\}$ rozhodnite, či je (i) tautológia, (ii) splniteľná, (iii) falzifikovateľná, alebo (iv) nesplniteľná:

a) $(\neg(p \land q) \to (\neg p \land \neg q))$
b) $((p \lor \neg p) \land \neg(q \lor \neg q))$
c) $(p \to (p \to (p \to p)))$
d) $(p \land (q \lor \neg(p \to r)))$
e) $(((p \to p) \to p) \to \neg p)$
f) $\neg(p \leftrightarrow \neg p)$
g) $((p \land \neg p) \lor (p \lor \neg p))$
h) $(p \land \neg p)$
i) $\neg\neg\neg(p \lor p)$
j) $((p \land q) \to (\neg p \land q))$
k) $\big(((q \lor \neg r) \land (p \to \neg r)) \to (\neg r \to (\neg p \land q))\big)$
l) $\big((p \to (\neg r \to q)) \land ((\neg p \lor \neg q) \land \neg(p \to r))\big)$

Riešenie. a) Aby sme rozhodli, akého druhu je formula $F = (\neg(p \wedge q) \to (\neg p \wedge \neg q))$, preskúmame všetky rôzne ohodnotenia výrokových premenných, ktoré sa vyskytujú v F:

Keďže v F sa vyskytujú dve premenné, takéto ohodnotenia sú štyri. Podobne ako v predchádzajúcej úlohe výsledok nášho skúmania, ako aj čiastkové výsledky, zapíšeme do tabuľky.

	v_i									
	p	q	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p \wedge \neg q)$	$(\neg(p \wedge q) \to (\neg p \wedge \neg q))$
v_1	f	f	$\not\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\models$
v_2	t	f	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$
v_3	f	t	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$
v_4	t	t	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$

Keďže máme rozhodnúť o vlastnostiach formuly F, nezabudneme vysloviť závery a zdôvodniť ich:

i. Keďže $v_2 \not\models F$, teda *nie všetky* ohodnotenia spĺňajú F, tak F *nie je* tautológiou.

ii. Keďže $v_1 \models F$, teda *aspoň jedno* ohodnotenie spĺňa F, tak F *je* splniteľná.

iii. Keďže $v_2 \not\models F$, teda *aspoň jedno* ohodnotenie nespĺňa F, tak F *je* aj falzifikovateľná.

iv. Keďže $v_1 \models F$, teda *nie je pravda*, že *všetky* ohodnotenia *nespĺňajú* F, tak F *nie je* nesplniteľná. $\natural$

Úloha 2.3.3. Zadefinujte vzťah *ohodnotenie v spĺňa formulu X* ($v \models X$) pre výrokovú logiku s nasledujúcimi kombináciami spojok:

a) jediná binárna spojka $\uparrow$ (*Shefferova spojka*, NAND) s neformálnym významom: $(A \uparrow B)$ je pravdivé práve vtedy, keď nie je súčasne pravdivé A aj B;

b) jediná binárna spojka $\downarrow$ (*Peircova spojka*, NOR) s neformálnym významom: $(A \downarrow B)$ je pravdivé práve vtedy, keď nie je pravda, že je pravdivé A alebo je pravdivé B;

c) unárna spojka $\neg$ a binárna spojka $\nrightarrow$ („a nie“) s neformálnym významom: $(A \nrightarrow B)$ je pravdivé práve vtedy, keď je pravdivé A a nie je pravdivé B;

d) binárne spojky $\to$ a $\nrightarrow$ („a nie“, viď predchádzajúci variant).

Definícia syntaxe pre tieto logiky bola predmetom úlohy 2.1.10.

Riešenie. a)

Definícia. Nech $\mathcal{V}$ je množina výrokových premenných. Nech v je ohodnotenie množiny $\mathcal{V}$. Pre všetky výrokové premenné p z $\mathcal{V}$ a všetky formuly A, B nad $\mathcal{V}$ definujeme:

- $v \models p$ vtt $v(p) = t$;

- $v \models (A \uparrow B)$ vtt $v \not\models A$ alebo $v \not\models B$. $\natural$

Úloha 2.3.4. Sformalizujte vo výrokovej logike a naprogramujte riešenie využívajúce SAT solver a vašu formalizáciu pre problém n dám (n queens) pre každé $n \in \mathbb{N}$:

> Ako je možné na šachovnici s rozmermi $n \times n$ políčok rozmiestniť n dám tak, aby sa vzájomne neohrozovali?

Každá dáma ohrozuje na šachovnici všetky ostatné figúrky vo svojom riadku, vo svojom stĺpci a na oboch uhlopriečkach pretínajúcich sa na jej pozícii.

Pomôcka. Použite výrokové premenné $q_{i,j}$, $0 \leq i, j < n$, ktorých pravdivostná hodnota bude hovoriť, či je alebo nie je na pozícii (i, j) umiestnená dáma.

Obmedzenia na umiestnenie dám sa dajú sformalizovať jednoduchými implikáciami $(q_{i,j} \rightarrow \neg q_{k,\ell})$, kde (i, j) a (k, ℓ) sú navzájom sa ohrozujúce pozície dám.

Nemusíme počítať počet dám. Stačí požadovať, že v každom riadku musí byť nejaká dáma (určite nemôžu byť dve dámy v tom istom riadku, keďže ich má byť n, musí byť v každom riadku práve jedna).

Úloha 2.3.5. Sformalizujte vo výrokovej logike a naprogramujte riešenie využívajúce SAT solver a vašu formalizáciu pre každý vstupný hlavolam Sudoku popísaný maticou 9×9 čísel $0, 1, \ldots, 9$, pričom 0 predstavuje prázdne políčko.

Riešenie hlavolamu doplní čísla $1, \ldots, 9$ do prázdnych políčok tak, aby sa všetky tieto čísla vyskytovali v každom riadku, v každom stĺpci a vo všetkých 9 vzájomne sa neprekrývajúcich podmaticiach 3×3.

Pomôcka. Pomocou výrokových premenných $s_{i,j,n}$, $0 \leq i, j \leq 8, 1 \leq n \leq 9$, môžeme sformalizovať, že na súradniciach (i, j) je vpísané číslo n. Musíme však sformalizovať obmedzenie, že na každej pozícii musí byť *práve* jedno číslo (teda súčasne najviac jedno a nie dve rôzne). Dá sa to podobne ako pri probléme n dám.

2.4 Vyplývanie

Úloha 2.4.1. Uvažujme nasledovnú teóriu nad $\mathcal{V} = \{p, r, s\}$:

$$T = \left\{\begin{array}{l} p, \\ ((p \land r) \rightarrow s), \\ (s \lor (r \rightarrow p)) \end{array}\right\}$$

Zistite, či z T vyplývajú nasledovné formuly:

a) $(r \wedge s)$

b) $(r \rightarrow s)$

c) $((r \rightarrow s) \rightarrow \neg p)$

d) $(\neg s \rightarrow (\neg r \vee p))$

Riešenie. Úlohu vyriešime pre formuly (a) a (b). Urobíme analýzu všetkých možných ohodnotení v výrokových premenných z teórie T, ktoré si zapíšeme do tabuľky. Zistíme, ktoré z týchto ohodnotení sú modely T. Potom preveríme vyplývanie podľa definície: zistíme, či vo všetkých modeloch T sú formuly (a) a (b) splnené:

	v_i			T			(a)	(b)
	p	r	s	p	$((p \wedge r) \rightarrow s)$	$(s \vee (r \rightarrow p))$	$(r \wedge s)$	$(r \rightarrow s)$
v_1	f	f	f	$\not\models$	—	—	—	—
v_2	f	f	t	$\not\models$	—	—	—	—
v_3	f	t	f	$\not\models$	—	—	—	—
v_4	f	t	t	$\not\models$	—	—	—	—
v_5	t	f	f	$\models$	$\not\models$	—	—	—
v_6	t	f	t	$\models$	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$
v_7	t	t	f	$\models$	$\not\models$	—	—	—
v_8	t	t	t	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$

Analýza ohodnotení ukázala, že teória T má dva modely, v tabuľke sú uvedené ako v_6 a v_8. V prípade (a) konštatujeme, že $T \not\models (r \wedge s)$, pretože $v_6 \not\models (r \wedge s)$. V prípade (b) naopak $T \models (r \rightarrow s)$ keďže $v_6 \models (r \rightarrow s)$ aj $v_8 \models (r \rightarrow s)$.

Všimnime si tiež, že pokiaľ pre niektoré ohodnotenie v_i zistíme, že $v_i \not\models A$, pre hociktorú formulu $A \in T$, tak v_i už modelom T byť podľa definície nemôže. Preto splnenie ostatných formúl v danom riadku už vyhodnocovať netreba. Tieto prípady sme označili znakom „ — “. Toto nám ušetrí množstvo práce. ♮

Úloha 2.4.2. Nech $\mathcal{V} = \{p, r\}$. Zistite, či z teórie S_i vyplýva formula X_i, pre nasledujúce dvojice S_i a X_i, $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$S_1 = \big\{(r \rightarrow p),\ (\neg r \rightarrow (\neg p \vee p))\big\} \qquad X_1 = ((p \rightarrow r) \rightarrow r);$$

$$S_2 = \big\{(\neg r \rightarrow (\neg p \vee r)),\ (p \vee \neg r)\big\} \qquad X_2 = ((p \vee r) \rightarrow p);$$

$$S_3 = \big\{((p \rightarrow r) \rightarrow p),\ (p \vee \neg r)\big\} \qquad X_3 = (\neg p \rightarrow (r \wedge p)).$$

Úloha 2.4.3. Je daná teória T nad $\mathcal{V} = \{a, b, \ldots, z\}^+$:

$$T = \left\{ \begin{array}{c} (p \rightarrow (q \wedge r)), \\ ((q \rightarrow p) \vee (s \rightarrow r)), \\ (\neg p \rightarrow (\neg r \wedge s)) \end{array} \right\}$$

Zistite, či z T vyplývajú nasledovné formuly:

a) p,

b) $((p \land q) \to r)$,

c) $((s \land r) \to \neg p)$,

d) $((\neg p \land s) \to (\neg r \land \neg q))$,

e) $((p \land q) \to s)$,

f) $\neg r$,

g) $((s \lor p) \to r)$,

h) $((p \to r) \land (r \to p))$.

Úloha 2.4.4. V prípade bankovej lúpeže inšpektor Nick Fishtrawn zaistil štyroch podozrivých Browna, Smitha, Taylora, a McDonnalda, pričom zistil nasledujúce skutočnosti:

(A_1) Brown a Smith sú súčasne vinní, iba ak je Taylor ich spolupáchateľom.

(A_2) Ak je Brown vinný, tak aspoň jeden z Smith, Taylor je jeho spolupáchateľom.

(A_3) Taylor nikdy nepracuje bez McDonnalda.

(A_4) McDonnald je vinný, ak je Brown nevinný.

Pomôžte inšpektorovi Fishtrawnovi zistiť, kto z podozrivých je určite vinný a má ho obviniť, kto je naopak určite nevinný a má ho oslobodiť, a o koho vine či nevine nemožno rozhodnúť. Svoje odpovede dokážte.

Pomôcka. Sformalizujte zistené skutočnosti ako teóriu T nad množinou vhodne zvolených výrokových premenných $\mathcal{V}$. Zistite, či je teória T konzistentná. Následne rozhodnite, koho *vina* ale aj koho *nevina* z T *vyplýva*. Zistite, koho vina a nevina je od T *nezávislá*. Vyvoďte z toho závery o tom, koho je možné obviniť, koho je možné oslobodiť, a o koho vine ani nevine nemožno rozhodnúť.

Úloha 2.4.5. V prípade lúpeže v klenotníctve predviedli na políciu troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Inšpektorka Fishcousová počas vyšetrovania zistila tieto skutočnosti:

(A_1) Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.

(A_2) Doyle nikdy nepracuje sám.

(A_3) Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.

(A_4) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

Podobne ako v predchádzajúcej úlohe zistite, koho z podozrivých má inšpektorka obviniť, kto je určite nevinný a o koho vine či nevine nemožno rozhodnúť. Svoje odpovede dokážte.

Úloha 2.4.6. Nech X a Y sú ľubovoľné výrokové formuly, nech T je ľubovoľná výroková teória.

Dokážte alebo vyvráťte:

a) $\{\} \models X$ vtt X je tautológia.

b) Formuly X a Y sú ekvivalentné vtt $(X \leftrightarrow Y)$ je tautológia.

c) Ak $T \models \neg X$, tak $T \not\models X$.

d) Ak $T \not\models X$, tak $T \models \neg X$.

e) $T \models (X \rightarrow Y)$ vtt $T \cup \{X\} \models Y$.

f) Ak $T \models (X \rightarrow Y)$, tak $T \not\models X$ alebo $T \models Y$.

g) Ak $T \not\models X$ alebo $T \models Y$, tak $T \models (X \rightarrow Y)$.

h) Ak $T \models (X \vee Y)$, tak $T \models X$ alebo $T \models Y$.

i) Ak $T \models X$ alebo $T \models Y$, tak $T \models (X \vee Y)$.

j) $T \models X$ a $T \models Y$ vtt $T \models (X \wedge Y)$.

k) Formula $(X \rightarrow Y)$ je nesplniteľná vtt X je tautológia a Y je nesplniteľná.

l) Formula X je nezávislá od $\{\}$ vtt X je splniteľná a falzifikovateľná.

m) Ak formula X logicky nevyplýva z T a ani nie je nezávislá od T, tak T je splniteľná a vyplýva z nej negácia X.

Riešenie. a)

💡 Tvrdenia, ktoré majú formu ekvivalencie, zvyčajne dokazujeme ako implikácie v oboch smeroch. Inak povedané, musíme dokázať, že $\{\} \models X$ je postačujúcou ($\Rightarrow$) aj nutnou ($\Leftarrow$) podmienkou toho, že X je tautológia, teda:

($\Rightarrow$) ak $\{\} \models X$, tak X je tautológia; ($\Leftarrow$) ak X je tautológia, $\{\} \models X$.

($\Rightarrow$) a ($\Leftarrow$) sú zvyčajné označenia dvoch implikácií, ktoré tvoria ekvivalenciu (*nezamieňajte* ich so symbolom implikácie $\rightarrow$). Obe dokážeme priamymi dôkazmi. Pri priamom dôkaze implikácie predpokladáme jej antecedent (ľavú stranu) a snažíme sa ukázať, že z jeho platnosti a z doteraz známych definícií a tvrdení vyplýva konzekvent (pravá strana).

($\Rightarrow$) Nech X je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že $\{\} \models X$. Chceme ukázať, že potom X je tautológia.

💡 Najprv si uvedomíme, ako sú definované pojmy, ktoré sa v tvrdení vyskytujú. Tým si vyjasníme, čo vlastne predpokladáme a čo dokazujeme.

Podľa definície vyplývania teda predpokladáme, že každé ohodnotenie v, ktoré spĺňa teóriu $\{\}$, spĺňa aj formulu X. Podľa definície tautológie chceme dokázať, že každé ohodnotenie v spĺňa X.

💡 Keď je cieľom dokázať, že *všetky* objekty nejakého typu (ohodnotenia) majú nejakú vlastnosť (spĺňajú X), zoberieme si hocijaký taký objekt a ukážeme, že keď poctivo preskúmame všetky možnosti, ktoré môžu nastať, tento objekt bude vždy mať požadovanú vlastnosť.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie v. Pretože teória $\{\}$ neobsahuje žiadne formuly, v spĺňa všetky formuly, ktoré do nej patria, a teda podľa definície splnenia teórie ohodnotením, $v \models \{\}$. Z predpokladu, že z $\{\}$ vyplýva X, potom máme, že $v \models X$. Na základe tohto zistenia a preto, že v bolo ľubovoľné, môžeme konštatovať, že každé ohodnotenie v spĺňa X, teda X je tautológia, čo bolo treba dokázať.

($\Leftarrow$) Nech X je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že X je tautológia, teda že (podľa definície) všetky ohodnotenia spĺňajú X. Chceme ukázať, že potom $\{\} \models X$, teda že (podľa definície) všetky ohodnotenia, ktoré spĺňajú $\{\}$, spĺňajú aj X.

💡 Jasnejšia formulácia tohto tvrdenia je: Pre všetky ohodnotenia v, ak $v \models \{\}$, tak $v \models X$. Ide opäť o všeobecne kvantifikovanú implikáciu. Postup na jej dôkaz bude teda: Zobrať ľubovoľný objekt požadovaného typu, predpokladať antecedent a dokázať konzekvent.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie v. Predpokladajme, že $v \models \{\}$, a ukážme, že $v \models X$. To však máme priamo z predpokladu, že X je tautológia. Teda konštatujeme, že každé ohodnotenie, ktoré spĺňa $\{\}$, spĺňa aj X, teda z $\{\}$ vyplýva X, čo bolo treba dokázať.

Dokázaním tvrdení ($\Rightarrow$) a ($\Leftarrow$) sme dokázali tvrdenie a). $\natural$

2.5 Ekvivalencia a konjunktívny normálny tvar

Úloha 2.5.1. Dokážte, že nasledujúce dvojice formúl, ktoré sa zvyčajne používajú na ekvivalentné úpravy formúl, sú (sémanticky) ekvivalentné ($\top$ je ľubovoľná tautológia, $\bot$ je ľubovoľná nesplniteľná formula):

a) asociatívnosť $\land$ a $\lor$:
$(p \land (q \land r))$ a $((p \land q) \land r)$,
$(p \lor (q \lor r))$ a $((p \lor q) \lor r)$;

b) distributívnosť $\land$ cez $\lor$ a $\lor$ cez $\land$:
$(p \land (q \lor r))$ a $((p \land q) \lor (p \land r))$,
$(p \lor (q \land r))$ a $((p \lor q) \land (p \lor r))$;

c) komutatívnosť $\land$ a $\lor$:
$(p \land r)$ a $(r \land p)$,
$(p \lor r)$ a $(r \lor p)$;

d) de Morganove pravidlá:
$\neg(p \land r)$ a $(\neg p \lor \neg r)$,
$\neg(p \lor r)$ a $(\neg p \land \neg r)$;

e) dvojitá negácia:
$\neg\neg p$ a p;

f) idempotencia:
$(p \land p)$ a p,
$(p \lor p)$ a p;

g) identita:
$(p \land \top)$ a p,
$(p \lor \bot)$ a p;

h) absorpcia:
$(p \lor (p \land r))$ a p,

$(p \wedge (p \vee r))$ a p;

i) vylúčenie tretieho: $(p \vee \neg p)$ a $\top$;

j) spor: $(p \wedge \neg p)$ a $\bot$;

k) nahradenie $\rightarrow$: $(p \rightarrow r)$ a $(\neg p \vee r)$.

Riešenie. d) Dokážme ekvivalentnosť formúl de Morganovo pravidla pre konjunkciu. Preverme splnenie formúl $\neg(p \wedge r)$ a $(\neg p \vee \neg r)$ vo všetkých rôznych ohodnotenia tých výrokových premenných, ktoré sa v skúmaných formulách vyskytujú:

	v_i								
	p	r	p	r	$\neg p$	$\neg r$	$(p \wedge r)$	$\neg(p \wedge r)$	$(\neg p \vee \neg r)$
v_1	f	f	$\not\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$
v_2	t	f	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$
v_3	f	t	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$
v_4	t	t	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$

Podobne ako pri skúmaní sémantických vlastností jednotlivých formúl či overovaní vyplývania, nezabudnime vysloviť záver, ktorý z preskúmania všetkých ohodnotení vyvodzujeme:

Z tabuľky vidíme, že skutočne pre každé ohodnotenie v_i, $i \in \{1, \ldots, 4\}$, platí $v_i \models \neg(p \wedge r)$ vtt $v_i \models (\neg p \vee \neg r)$. Z toho, z tvrdenia 2.25 z prednášky a z definície ekvivalencie vyplýva, že formuly $\neg(p \wedge r)$ a $(\neg p \vee \neg r)$ sú ekvivalentné. ♮

Úloha 2.5.2. Nájdite k nasledujúcim formulám ekvivalentné formuly v CNF:

a) $(\neg(q \vee r) \vee (\neg p \rightarrow s))$

b) $((q \wedge \neg s) \rightarrow (p \wedge r))$

c) $((p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r))$

d) $((\neg p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s))$

e) $(((r \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \neg p)) \rightarrow (\neg(q \wedge r) \wedge (p \vee s)))$

Riešenie. a)

1.	$(\neg(q \vee r) \vee (\neg p \rightarrow s))$	
2.	$(\neg(q \vee r) \vee (\neg\neg p \vee s))$	nahradenie implikácie
3.	$(\neg(q \vee r) \vee (p \vee s))$	odstránenie dvojitej negácie
4.	$((\neg q \wedge \neg r) \vee (p \vee s))$	de Morganovo pravidlo
5.	$(((\neg q \wedge \neg r) \vee p) \vee s)$	asociatívnosť $\vee$
6.	$(((\neg q \vee p) \wedge (\neg r \vee p)) \vee s)$	distributívnosť $\vee$ cez $\wedge$
7.	$(((\neg q \vee p) \vee s) \wedge ((\neg r \vee p) \vee s))$	distributívnosť $\vee$ cez $\wedge$

♮

Úloha 2.5.3. Pre každú CNF formulu z úlohy 2.5.2 určte množinu jej klauzúl a mohutnosť tejto množiny.

Úloha 2.5.4. Rozhodnite o nasledujúcich formulách, či sú literálmi, klauzulami, v disjunktívnom normálnom tvare, v konjunktívnom normálnom tvare. Pri formulách v konjunktívnom normálnom tvare určte, z koľkých klauzúl sa skladajú.

a) p
b) $\neg r$
c) $\neg\neg q$
d) $((p \lor q) \to r)$
e) $((p \lor q) \lor r)$
f) $((p \lor \neg q) \lor (q \lor \neg r))$
g) $((p \land q) \land \neg(q \land \neg r))$
h) $((p \lor q) \land (\neg p \land r))$
i) $\big(p \land (q \land (\neg q \land \neg r))\big)$
j) $\big(((p \land q) \lor (q \land \neg r)) \lor (\neg r \land \neg p)\big)$
k) $\big(((p \lor q) \land (q \lor \neg r)) \land (\neg r \lor \neg p)\big)$
l) $\big(((p\land q)\lor(q\lor\neg(r\land p))\big)\lor(\neg r\land\neg p)\big)$
m) $\big(((p \land q) \lor (q \lor (\neg r \land \neg p))\big) \lor (\neg r \land \neg p)\big)$
n) $\big(((p \land q) \lor (q \lor (\neg r \lor \neg p))\big) \lor (\neg r \land \neg p)\big)$
o) $\big(((p \land q) \lor (q \land (\neg r \lor \neg p))\big) \lor (\neg r \land \neg p)\big)$
p) $\big(((p \lor q) \land (q \lor (\neg r \lor \neg p))\big) \land (\neg r \lor \neg p)\big)$
q) $\big(((p \land q) \lor (q \land (\neg r \lor \neg p))\big) \lor \neg(r \land \neg p)\big)$
r) $\big(((p \lor q) \lor (q \lor (\neg r \lor \neg p))\big) \land (\neg r \land \neg p)\big)$

Úloha 2.5.5. Pre každú formulu X z úlohy 2.5.4, ktorá je v disjunktívnom normálnom tvare, nájdite všetky ohodnotenia výrokových premenných vyskytujúcich sa v X, ktoré spĺňajú X.

Úloha 2.5.6. Nech A, B, C a D sú formuly. Dokážte priamo z definície ekvivalentnosti formúl alebo vyvráťte:

a) Ak A je ekvivalentná s C a B je ekvivalentná s D, tak $(A \land B)$ je ekvivalentná s $(C \land D)$.
b) Ak $(A \land B)$ je ekvivalentná s $(C \land D)$, tak A je ekvivalentná s C a B je ekvivalentná s D.

2.6 Tablový kalkul

Úloha 2.6.1. Pripomeňme si prípad lúpeže v klenotníctve z úlohy 2.4.5: Na políciu predviedli troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Počas vyšetrovania sa zistilo:

a) Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.
b) Doyle nikdy nepracuje sám.

c) Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.

d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

Riešenie. Našim cieľom je zistiť, ktorého z podozrivých možno obviniť, a ktorý je naopak nevinný. Pri formalizácii sme v úlohe rozpoznali tri atomické výroky, ktoré reprezentujeme výrokovými premennými $\mathcal{V} = \{A, M, D\}$, pričom každá premenná znamená, že príslušný podozrivý je vinný. Zistenia (a–d) sme sformalizovali do nasledovnej teórie:

$$T = \left\{ \begin{array}{c} ((A \land \neg M) \to D)), \\ (D \to (A \lor M)), \\ (A \to \neg D), \\ (A \lor (M \lor D)) \end{array} \right\}.$$

Úlohu riešime tablovým kalkulom. Najprv preveríme, či je T splniteľná, a to tak, že sa v table pre $T^+ = \{\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)), \mathbf{T}(D \to (A \lor M)), \mathbf{T}(A \to \neg D), \mathbf{T}(A \lor (M \lor D))\}$ pokúsime nájsť aspoň jednu úplnú otvorenú vetvu:

1. $\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)$ T^+
2. $\mathbf{T}(D \to (A \lor M))$ T^+
3. $\mathbf{T}(A \to \neg D)$ T^+
4. $\mathbf{T}(A \lor (M \lor D))$ T^+

5. $\mathbf{F}(A \land \neg M)$ $\beta 1$	6. $\mathbf{T} D$ $\beta 1$

Vetva 6:

7. $\mathbf{F} D$ $\beta 2$ $*$ 6, 7	8. $\mathbf{T}(A \lor M)$ $\beta 2$

Vetva 8:

9. $\mathbf{T} A$ $\beta 8$	10. $\mathbf{T} M$ $\beta 8$

Vetva 10:

11. $\mathbf{F} A$ $\beta 3$	16. $\mathbf{T} \neg D$ $\beta 3$ 17. $\mathbf{F} D$ $\alpha 16$ $*$ 6, 17

Vetva 11:

12. $\mathbf{T} A$ $\beta 4$ $*$ 11, 12	13. $\mathbf{T}(M \lor D)$ $\beta 4$

Vetva 13:

14. $\mathbf{T} M$ $\beta 13$	15. $\mathbf{T} D$ $\beta 13$

Toto sa nám aj podarilo, keďže vetvy končiace v 14 a 15 sú obe úplné a otvorené. Teda T je konzistentná. Na otázku, ktorý z obvinených je vinný či nevinný, môžeme teda zmysluplne odpovedať pomocou vyplývania.

Následne je našou úlohou preveriť, kto z obvinených je vinný a kto nie. Pokúsime sa dokázať, že Mills je vinný, teda že $T \models M$. Platí to, ak sa nám v table pre $T^+_M = \{\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)), \mathbf{T}(D \to (A \lor M)), \mathbf{T}(A \to \neg D), \mathbf{T}(A \lor (M \lor D)), \mathbf{F} M\}$ podarí uzavrieť všetky vetvy.

1. $\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)$ T^+_M
2. $\mathbf{T}(D \to (A \lor M))$ T^+_M
3. $\mathbf{T}(A \to \neg D)$ T^+_M
4. $\mathbf{T}(A \lor (M \lor D))$ T^+_M
5. $\mathbf{F}M$ T^+_M

- 6. $\mathbf{T}A$ $\beta 4$
  - 7. $\mathbf{F}A$ $\beta 3$ — $*$ 6, 7
  - 8. $\mathbf{T}\neg D$ $\beta 3$; 9. $\mathbf{F}D$ $\alpha 8$
    - 10. $\mathbf{F}(A \land \neg M)$ $\beta 1$
      - 11. $\mathbf{F}A$ $\beta 10$ — $*$ 6, 11
      - 12. $\mathbf{F}\neg M$ $\beta 10$; 13. $\mathbf{T}M$ $\alpha 12$ — $*$ 5, 13
    - 14. $\mathbf{T}D$ $\beta 1$ — $*$ 9, 14
- 15. $\mathbf{T}(M \lor D)$ $\beta 4$
  - 16. $\mathbf{T}M$ $\beta 15$ — $*$ 5, 16
  - 17. $\mathbf{T}D$ $\beta 15$
    - 18. $\mathbf{F}D$ $\beta 2$ — $*$ 17, 18
    - 19. $\mathbf{T}(A \lor M)$ $\beta 2$
      - 20. $\mathbf{T}A$ $\beta 19$
        - 21. $\mathbf{F}A$ $\beta 3$ — $*$ 20, 21
        - 22. $\mathbf{T}\neg D$ $\beta 3$; 23. $\mathbf{F}D$ $\alpha 22$ — $*$ 17, 23
      - 24. $\mathbf{T}M$ $\beta 19$ — $*$ 5, 24

Podarilo sa nám uzavrieť všetky vetvy tabla, a teda sme dokázali, že $T \models M$. Keďže T je konzistentná teória, môžeme usúdiť, že Mills je vinný. O vine, či nevine Adamsovej a Doylea môžeme rozhodnúť obdobným postupom. $\natural$

Úloha 2.6.2. Pripomeňme si prípad bankovej lúpeže z úlohy 2.4.4: Inšpektor Nick Fishtrawn zaistil podozrivých Browna, Smitha, Taylora, a McDonnalda, pričom zistil, že:

(A_1) Brown a Smith sú súčasne vinní, iba ak je Taylor ich spolupáchateľom.

(A_2) Ak je Brown vinný, tak aspoň jeden z Smith, Taylor je jeho spolupáchateľom.

(A_3) Taylor nikdy nepracuje bez McDonnalda.

(A_4) McDonnald je vinný, ak je Brown nevinný.

Zistili sme, že vinný je McDonnald. Dokážte jeho vinu tablovým kalkulom. Podobne dokážte, že Browna nemožno obviniť, ani jeho vinu vyvrátiť. Svoje závery slovne zdôvodnite.

Úloha 2.6.3. Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú tautológie:

a) $\big((p \to r) \to ((r \to s) \to (p \to s))\big)$,

b) $((\neg p \to \neg r) \leftrightarrow (r \to p))$,

c) $(p \leftrightarrow \neg\neg p)$,

d) $\big(((p \to r) \land (p \to \neg r)) \to \neg p\big)$,

e) $\big(p \to (\neg r \to \neg(p \to r))\big)$,

f) $\big((p \to (r \to s)) \to ((p \to r) \to (p \to s))\big)$,

g) $\big(p \to (r \to (p \land r))\big)$,

h) $\big(((p \to s) \land (r \to s)) \to ((p \lor r) \to s)\big)$,

i) $(p \to (r \to p))$,

j) $(p \to (p \lor r))$,

k) $(\neg p \rightarrow (p \rightarrow r))$,

l) $(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q))$,

m) $\big((p \wedge (r \vee s)) \leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (p \wedge s))\big)$,

n) $((p \vee (p \wedge r)) \leftrightarrow p)$.

o) $\big((p \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow r\big)$,

p) $\big((\neg r \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow \neg p\big)$.

Riešenie. b) Aby sme dokázali, že $((\neg p \rightarrow \neg r) \leftrightarrow (r \rightarrow p))$ je tautológia, stačí zistiť, či je množina $S^+ = \{\mathbf{F}((\neg p \rightarrow \neg r) \leftrightarrow (r \rightarrow p))\}$ nesplniteľná, teda či pre ňu existuje uzavreté tablo.

Pre formuly $(A \leftrightarrow B)$ nemáme špeciálne tablové pravidlá, pretože tieto formuly sú iba skratky za $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$. V table preto pracujeme s neskrátenou verziou.

$$
\begin{array}{c}
1.\ \ \mathbf{F}\big(((\neg p \rightarrow \neg r) \rightarrow (r \rightarrow p)) \wedge ((r \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg r))\big) \quad S^+ \\
\hline
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{lll}
2. & \mathbf{F}((\neg p \rightarrow \neg r) \rightarrow (r \rightarrow p)) & \beta 1 \\
3. & \mathbf{T}(\neg p \rightarrow \neg r) & \alpha 2 \\
4. & \mathbf{F}(r \rightarrow p) & \alpha 2 \\
5. & \mathbf{T}\,r & \alpha 4 \\
6. & \mathbf{F}\,p & \alpha 4
\end{array} \\
\hline
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{lll}
7. & \mathbf{F}\,\neg p & \beta 3 \\
8. & \mathbf{T}\,p & \alpha 7 \\
 & * & 6,8
\end{array} &
\begin{array}{lll}
9. & \mathbf{T}\,\neg r & \beta 3 \\
10. & \mathbf{F}\,r & \beta 9 \\
 & * & 6,10
\end{array}
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\begin{array}{lll}
11. & \mathbf{F}((r \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg r)) & \beta 1 \\
12. & \mathbf{T}(r \rightarrow p) & \alpha 11 \\
13. & \mathbf{F}(\neg p \rightarrow \neg r) & \alpha 11 \\
14. & \mathbf{T}\,\neg p & \alpha 13 \\
15. & \mathbf{F}\,\neg r & \alpha 13 \\
16. & \mathbf{F}\,p & \alpha 14 \\
17. & \mathbf{T}\,r & \alpha 15
\end{array} \\
\hline
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{lll}
18. & \mathbf{F}\,r & \beta 12 \\
 & * & 17,18
\end{array} &
\begin{array}{lll}
19. & \mathbf{T}\,p & \beta 12 \\
 & * & 19,16
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Našli sme uzavreté tablo pre množinu $S^+ = \{\mathbf{F}((\neg p \rightarrow \neg r) \leftrightarrow (r \rightarrow p))\}$, ktorá je teda nesplniteľná, a preto $((\neg p \rightarrow \neg r) \leftrightarrow (r \rightarrow p))$ je tautológia. $\natural$

Úloha 2.6.4. Dokážte, že z nasledujúcich tvrdení:

(A_1) Keď mám dáždnik, nikdy neprší.

(A_2) Cesta je mokrá, iba ak prší alebo prešlo umývacie auto.

(A_3) Umývacie auto nejazdí cez víkend.

vyplýva

(X) Ak mám dáždnik a je mokrá cesta, nie je víkend.

Tvrdenia sformalizujte a využite tablový kalkul.

Úloha 2.6.5. O nasledujúcich formulách zistite pomocou tablového kalkulu, či sú splniteľné, nesplniteľné, tautológie, alebo falzifikovateľné.

a) $((p \rightarrow q) \vee (\neg q \rightarrow r))$

b) $((p \to (p \lor r)) \to \neg(\neg p \lor (p \lor r)))$

c) $\big(\big((p \to s) \land (r \to s)\big) \land \neg \big((p \lor r) \to s\big)\big)$,

d) $\big(\big((\neg p \to (p \land q)) \lor ((p \land q) \land \neg q)\big) \lor \big((p \to s) \lor \neg p\big)\big)$

Riešenie. a) Aby sme preverili charakter formuly $((p \to q) \lor (q \to r))$, pokúsime sa najprv podobne ako v úlohe 2.6.3 dokázať, či je táto formula tautológia, teda pokúsime sa uzavrieť tablo pre $S^+ = \{\mathbf{F}((p \to q) \lor (q \to r))\}$. Ak sa tablo uzavrie v každej vetve, formula je tautológia. Naopak, ak nájdeme aspoň jednu úplnú otvorenú vetvu, vieme z nej vyčítať ohodnotenie, ktoré formulu nespĺňa:

1.	$\mathbf{F}\,((p \to q) \lor (q \to r))$	S^+
2.	$\mathbf{F}\,(p \to q)$	$\alpha 1$
3.	$\mathbf{F}\,(\neg q \to r)$	$\alpha 1$
4.	$\mathbf{T}\,p$	$\alpha 2$
5.	$\mathbf{F}\,q$	$\alpha 2$
6.	$\mathbf{T}\,\neg q$	$\alpha 3$
7.	$\mathbf{F}\,r$	$\alpha 3$

Zistili sme, že formula *nie je tautológia* — tablo má síce iba jednu vetvu, ale tá je úplná (viď definícia z prednášky) a nie je uzavretá. Z tejto vetvy môžeme vyčítať ohodnotenie $v_1 = \{p \mapsto t, q \mapsto f, r \mapsto f\}$, ktoré našu formulu nespĺňa, teda formula *je falzifikovateľná*.

Ďalej potrebujeme ešte preveriť, či existuje aj nejaké ohodnotenie, ktoré formulu spĺňa (a teda je splniteľná) alebo nie (a teda je to nesplniteľná formula). Aby sme to zistili, pokúsime sa v table pre množinu $S^+ = \{\mathbf{T}((p \to q) \lor (q \to r))\}$, nájsť aspoň jednu úplnú otvorenú vetvu, alebo naopak toto tablo uzavrieť:

<table>
<tr><td colspan="3">1. $\mathbf{T}\,((p \to q) \lor (q \to r))$ S^+</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. $\mathbf{T}\,(p \to q)$ $\beta 1$</td><td rowspan="2">5. $\mathbf{T}\,(\neg q \to r)$ $\beta 1$</td></tr>
<tr><td>3. $\mathbf{F}\,p$ $\beta 2$</td><td>4. $\mathbf{T}\,q$ $\beta 2$</td></tr>
</table>

Tablo sme ani nemuseli dokončiť, pretože po aplikovaní dvoch β-pravidiel (najprv pre disjunkciu, a potom pre implikáciu na ľavej strane) sme našli hneď dve úplné otvorené vetvy (s listami 3 a 4). Z nich vieme vyčítať, že všetky ohodnotenia v, pre ktoré $v(p) = f$ alebo $v(q) = t$ formulu spĺňajú, teda napr. ohodnotenie $v_2 = \{p \mapsto f, q \mapsto f, r \mapsto f\}$ formulu spĺňa. Formula teda *je splniteľná* (a nie je nesplniteľná).

Pokiaľ sa nám podarí správne uhádnuť, že je formula X tautológia, postačí, ak urobíme tablo pre $\{\mathbf{F}\,X\}$ (prvé) a všetky vetvy sa nám podarí uzavrieť. Keďže tým dokážeme, že všetky ohodnotenia formulu spĺňajú, nie je už potrebné hľadať nejaké konkrétne, formula je splniteľná, nie je falzifikovateľná ani nesplniteľná. Podobne, ak si myslíme, že je formula zrejme nesplniteľná, môžeme skúsiť šťastie a začať tablom pre $\{\mathbf{T}\,X\}$ (druhým). Ak sa nám ho podarí uzavrieť, nemusíme už robiť prvé tablo, vieme, že všetky ohodnotenia X nespĺňajú, teda je falzifikovateľná, nie je splniteľná ani tautológia.

$\natural$

Úloha 2.6.6. Inšpektorka Veszprémiová zistila, že lúpež v Budapeštianskej záložni spáchal niekto z dvoch podozrivých: Balogh alebo Cucz. Inšpektorka vie, že Balogh nikdy nepracuje sám. Svedok Nagy vypovedal, že Cucz bol v čase lúpeže spolu s ním v kine Uránia na filme *Čas sa zastaví*.

Koho môže inšpektorka na základe týchto informácií obviniť? Úlohu riešte tablovým kalkulom.

Úloha 2.6.7. Londýnsky obchodník, pán McConnor, telefonoval do Scotland Yardu, že sa stal obeťou lúpeže. Detektívi predviedli na výsluch troch podozrivých X, Y, Z a zistili nasledujúce fakty:

(A_1) Každý z podozrivých X, Y, Z bol v McConnorovom obchode v deň lúpeže a nik iný tam v ten deň nebol.

(A_2) X vždy pracuje s práve jedným spoločníkom.

(A_3) Z nie je vinný alebo je vinný Y.

(A_4) Ak sú vinní práve dvaja, tak X je jedným z nich.

(A_5) Y je vinný, iba ak je vinný aj Z.

Koho má inšpektorka Fishcousová obviniť?

Úloha 2.6.8. Pomocou formalizácie a tablového kalkulu vyriešte nasledujúce problémy nájdením dôkazu alebo kontrapríkladu.

a) Chceme na párty pozvať niekoho z trojice Jim, Kim a Sára, bohužiaľ každý z nich má nejaké svoje podmienky: Sára nepôjde na párty, ak pôjde Kim. Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim. Sára nepôjde bez Jima.

   Je pravda, že na párty pôjde Kim a nepôjde Sára?

b) Anka ide do práce autom vždy, keď prší. Ak neprší, ide do práce na bicykli. Keď ide do práce na bicykli, má celý deň dobrú náladu.

   Je pravda, že ak Anka nejde do práce autom, má celý deň dobrú náladu?

c) Ak by metalová kapela nemohla hrať alebo by občerstvenie nedodali načas, silvestrovská oslava by sa musela zrušiť a Rudy by zúril. Ak by sa oslava musela zrušiť, organizátori by vrátili vstupné. Organizátori vstupné nevrátili.

   Je pravda, že metalová kapela mohla hrať?

Úloha 2.6.9. Pomocou tablových dôkazov vyplývania v predchádzajúcich úlohách napíšte slovné dôkazy.

Riešenie pre 2.6.1. Pripomeňme si znenie úlohy o lúpeži v klenotníctve. Na políciu predviedli troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Počas vyšetrovania sa zistilo:

a) Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.

b) Doyle nikdy nepracuje sám.

c) Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.

d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

Tablovým kalkulom sme dokázali, že z týchto zistení vyplýva, že Mills je vinný, teda podarilo sa nám uzavrieť tablo pre $T_M^+ = \{\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)), \mathbf{T}(D \to (A \lor M)), \mathbf{T}(A \to \neg D), \mathbf{T}(A \lor (M \lor D)), \mathbf{F}\, M\}$:

1. $\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)$ T_M^+
2. $\mathbf{T}(D \to (A \lor M))$ T_M^+
3. $\mathbf{T}(A \to \neg D)$ T_M^+
4. $\mathbf{T}(A \lor (M \lor D))$ T_M^+
5. $\mathbf{F}\, M$ T_M^+

- 6. $\mathbf{T}\, A$ $\beta 4$
  - 7. $\mathbf{F}\, A$ $\beta 3$ — $*$ 6, 7
  - 8. $\mathbf{T}\, \neg D$ $\beta 3$; 9. $\mathbf{F}\, D$ $\alpha 8$
    - 10. $\mathbf{F}(A \land \neg M)$ $\beta 1$
      - 11. $\mathbf{F}\, A$ $\beta 10$ — $*$ 6, 11
      - 12. $\mathbf{F}\, \neg M$ $\beta 10$; 13. $\mathbf{T}\, M$ $\alpha 12$ — $*$ 5, 13
    - 14. $\mathbf{T}\, D$ $\beta 1$ — $*$ 9, 14
- 15. $\mathbf{T}(M \lor D)$ $\beta 4$
  - 16. $\mathbf{T}\, M$ $\beta 15$ — $*$ 5, 16
  - 17. $\mathbf{T}\, D$ $\beta 15$
    - 18. $\mathbf{F}\, D$ $\beta 2$ — $*$ 17, 18
    - 19. $\mathbf{T}(A \lor M)$ $\beta 2$
      - 20. $\mathbf{T}\, A$ $\beta 19$
        - 21. $\mathbf{F}\, A$ $\beta 3$ — $*$ 20, 21
        - 22. $\mathbf{T}\, \neg D$ $\beta 3$; 23. $\mathbf{F}\, D$ $\alpha 22$ — $*$ 17, 23
      - 24. $\mathbf{T}\, M$ $\beta 19$ — $*$ 5, 24

Napíšme teraz s pomocou tohto tabla slovný dôkaz toho, že zo zistení a)–d) vyplýva, že Mills je vinný.

1. prístup — dôkaz sporom: Predpokladajme, že zistenia a)–d) sú pravdivé, ale Mills je nevinný.

Použitie pravidla β na disjunkciu sa dá interpretovať ako rozbor možných prípadov. Viacero použití pravidla β na vnorené disjunkcie (napr. $(A \lor (M \lor D))$) spojíme v slovnom dôkaze do jedného rozboru:

Podľa d) vieme, že aspoň jeden z trojice Adamsová, Mills, Doyle je vinný — preskúmame teda všetky tri možnosti:

1. V prípade, že by bol Mills vinný, dospejeme k sporu s predpokladom.
2. V prípade, že by bola vinná Adamsová, nemôže byť vinný Doyle (podľa c)). Tvrdenie a) však určuje, že buď nie je vinná Adamsová a Mills nevinný, alebo je Doyle vinný. Druhá

časť je v spore s tým, že Doyle nemôže byť vinný. Musí teda platiť, že nie je pravda, že je Adamsová vinná a Mills nevinný. To znamená, že buď nie je Adamsová vinná, čo je spor s predpokladom tohto prípadu, alebo nie je Mills nevinný, teda Mills je vinný, čo je spor s predpokladom celého dôkazu.

3. Ostala nám posledná možnosť — Doyle je vinný. Podľa tvrdenia b) však buď nie je Doyle vinný (spor) alebo je vinná aj Adamsová alebo Mills. V prípade viny Millsa dostávame ihneď spor s predpokladom. V prípade viny Adamsovej musíme na základe tvrdenia c) uvažovať nevinu Doyla — v takom prípade opäť dostávame spor.

Preskúmali sme všetky možnosti toho, či by mohol byť Mills nevinný. Keďže neexistuje možnosť, v ktorej by bol Mills nevinný, musí byť zaručene vinný. Millsova vina teda vyplýva z teórie tvorenej zisteniami a)–d).

2. prístup — priamy dôkaz:

Aj keď tablo v princípe formalizuje dôkaz sporom, môžeme ho interpretovať aj ako priamy dôkaz. Stačí, keď sa na formuly označené znamienkom **T** pozeráme ako na *predpoklady* a na formuly označené znamienkom **F** pozeráme ako na *ciele*, ktoré chceme dokázať.

Priamy dôkaz je zvyčajne zrozumiteľnejší. V dlhších úvahách sa ale stáva, že čitateľ zneistie, prečo dôkaz postupuje práve vybraným smerom a či naozaj smeruje k cieľu.

Predpokladajme, že zistenia a)–d) sú pravdivé. Dokážme, že Mills je vinný. Podľa tvrdenia d) je vinný niekto z podozrivých Adamsová, Mills, alebo Doyle. Ak je vinný Mills, nie je čo dokazovať. Rozoberme teda zvyšné dva prípady:

Prepokladajme najprv, že je vinná Adamsová.

Použitie pravidla β na implikáciu, pri ktorom sa jedna vetva hneď uzavrie, sa dá interpretovať ako

- modus ponens: „ak $(X \rightarrow Y)$ a X, tak Y“, alebo
- modus tolens: „ak $(X \rightarrow Y)$ a nie Y, tak nie X“, alebo
- nahradenie doterajšieho cieľa jeho postačujúcou podmienkou: „ak $(X \rightarrow Y)$ a máme dokázať Y, postačí dokázať X“.

V tomto prípade sa hodí najprv prvá interpretácia pre c) a potom druhá interpretácia pre a).

Podľa c) teda nie je vinný Doyle. Preto podľa a) nie je pravda, že Adamsová je vinná a Mills je nevinný. Teda Adamsová nie je vinná alebo Mills nie je nevinný. Prvú možnosť vylučuje predpoklad tohto prípadu. Platí teda druhá možnosť, čiže Mills je vinný.

Teraz predpokladajme, že je vinný Doyle. Podľa b) je vinná Adamsová alebo je vinný Mills. Keby bola vinná Adamsová, podľa c) by bol Doyle nevinný, čo je však v spore s predpokladom tohto prípadu. Preto ostáva iba druhá možnosť: Mills je vinný.

Z predpokladu pravdivosti zistení a)–d) sme teda vo všetkých prípadoch dospeli k tomu, že Mills je vinný, čo bolo treba dokázať. ♮

Úloha 2.6.10. Pomocou formalizácie a tablového kalkulu overte správnosť úsudkov a ich zdôvodnení, pričom:

- ak je úsudok chybný, nájdite kontrapríklad;
- ak je chybné zdôvodnenie, vysvetlite, kde a aké sú v ňom chyby;
- ak je úsudok správny, ale zdôvodnenie chybné, napíšte podľa tablového dôkazu správne slovné zdôvodnenie.

Pracujte s nasledujúcimi úsudkami a zdôvodneniami. V prvom prípade sme premisy a záver úsudku a jeho zdôvodnenie vyznačili. V druhom prípade sami rozpoznajte tieto časti.

a) *Premisy:* Do laboratória sa dostanem, ak si nezabudnem čipovú kartu. Vždy, keď si zabudnem čipovú kartu, nemám ani peňaženku.

Záver: Takže ak nemám peňaženku, nedostanem sa do laboratória.

Zdôvodnenie: Je to tak preto, že keď nemám peňaženku, zabudol som si čipovú kartu, a teda sa nemám ako dostať do laboratória.

b) Ak by na protest neprišli desaťtisíce občanov alebo by boli jeho účastníci agresívni, protest by nebol úspešný a predseda vlády by neodstúpil. Ak by boli účastníci protestu agresívni, zasiahla by polícia. Polícia nezasiahla. Preto ak predseda vlády odstúpil, na protest prišli desaťtisíce občanov.

Pretože polícia nezasiahla, účastníci protestu neboli agresívni. Predpokladajme, že predseda vlády odstúpil. Protest bol teda úspešný, a preto naň prišli desaťtisíce občanov alebo jeho účastníci boli agresívni. Už sme však zistili, že druhá možnosť nenastala. Preto musí platiť prvá, teda na protest prišli desaťtisíce občanov, čo sme chceli dokázať.

Úloha 2.6.11. Pomocou tablového kalkulu nájdite aspoň dve ohodnotenia výrokových premenných súčasne spĺňajúce nasledujúce teórie. Vyznačte časť tabla, ktorá dokazuje vašu odpoveď a zdôvodnite ju.

$$T_A = \{(p \to (u \lor v)), (p \lor u)\}, \qquad T_C = \{(p \to (u \lor v)), (\neg u \lor \neg v)\}.$$
$$T_B = \{((u \land v) \to p), (p \lor u)\},$$

Úloha 2.6.12. Nech α, α_1, α_2 sú označené formuly podľa niektorého α pravidla. Nech β, β_1, β_2 sú označené formuly podľa niektorého β pravidla. Nech π je niektorá vetva tabla $\mathcal{T}$. Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

a) Ak α_1, $\alpha_2 \in \pi$ a π je úplná vetva, tak aj $\alpha \in \pi$.

b) Ak $\beta \in \pi$ a π je uzavretá vetva, tak aj $\beta_1, \beta_2 \in \pi$.

c) Ak $\alpha, \beta \in \pi$ a π je úplná uzavretá vetva, tak aspoň jedna z α_1, β_1 je tiež v π.

2.6.1 Korektné pravidlá

Úloha 2.6.13. Dokážte, že nasledujúce tablové pravidlá sú korektné:

$$\frac{\mathbf{T}(X \to Y) \quad \mathbf{T}\,X}{\mathbf{T}\,Y} \ \text{(MP)} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \to Y) \quad \mathbf{F}\,Y}{\mathbf{F}\,X} \ \text{(MT)}$$

$$\frac{\mathbf{T}(X \lor Y) \quad \mathbf{F}\,X}{\mathbf{T}\,Y} \ (\mathrm{DS}_1) \qquad \frac{\mathbf{T}(X \lor Y) \quad \mathbf{F}\,Y}{\mathbf{T}\,X} \ (\mathrm{DS}_2)$$

$$\frac{\mathbf{F}(X \land Y) \quad \mathbf{T}\,X}{\mathbf{F}\,Y} \ (\mathrm{NCS}_1) \qquad \frac{\mathbf{F}(X \land Y) \quad \mathbf{T}\,Y}{\mathbf{F}\,X} \ (\mathrm{NCS}_2)$$

$$\frac{}{\mathbf{T}\,X \mid \mathbf{F}\,X} \ \text{(cut)} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \to Y) \quad \mathbf{T}(Y \to Z)}{\mathbf{T}(X \to Z)} \ \text{(HS)}$$

$$\frac{\begin{matrix}\mathbf{T}(U \to V) \quad \mathbf{T}(X \to Y) \\ \mathbf{T}(U \lor X)\end{matrix}}{\mathbf{T}(V \to Y)} \ \text{(CD)} \qquad \frac{\begin{matrix}\mathbf{T}(U \to V) \quad \mathbf{T}(X \to Y) \\ \mathbf{T}(\neg V \lor \neg Y)\end{matrix}}{\mathbf{T}(\neg U \lor \neg X)} \ \text{(DD)}$$

Tieto pravidlá sa nazývajú: (MP) modus ponens, (MT) modus tolens, (DS_i) disjunktívny sylogizmus, (HS) hypotetický sylogizmus, (cut) rez, (CD) konštruktívna dilema, (DD) deštruktívna dilema. (NCS_i) je forma (DS_i) pre nesplnenú konjunkciu.

V nasledujúcich úlohách môžete použiť tablový kalkul rozšírený o vyššie uvedené pravidlá. Vzniknú tak pravdepodobne prehľadnejšie a menšie tablá, ktoré sa ľahšie interpretujú ako dôkaz v prirodzenom jazyku.

Úloha 2.6.14. Prechádzate sa v labyrinte a zrazu sa ocitnete na križovatke, z ktorej vedú tri možné cesty: cesta naľavo je vydláždená zlatom, cesta pred vami je vydláždená mramorom a cesta napravo je vysypaná kamienkami. Každú cestu stráži strážnik a každý z nich vám povie niečo o cestách:

Strážnik zlatej cesty: „Táto cesta vedie priamo do stredu labyrintu. Navyše, ak vás kamienky dovedú do stredu, tak vás do stredu dovedie aj mramor."

Strážnik mramorovej cesty: „Ani zlato, ani kamienky nevedú do stredu labyrintu."

Strážnik kamienkovej cesty: „Nasledujte zlato a dosiahnete stred, nasledujte mramor a stratíte sa."

Viete, že všetci strážnici stále klamú.

i. Môžete si byť istí, že niektoré z ciest vedú do stredu labyrintu? Ak áno, ktorú cestu si vyberiete?

ii. Viete o niektorých cestách s určitosťou povedať, že do stredu labyrintu nevedú? Ak áno, ktoré to sú?

iii. Je o niektorých cestách nemožné povedať, či do stredu labyrintu vedú alebo nevedú? Ak áno, o ktorých?

Vašou úlohou je:

a) Sformalizovať uvedené skutočnosti ako výrokovú teóriu nad vhodnou množinou výrokových premenných, ktorých význam stručne vysvetlíte.

b) Pojmami výrokovej logiky (napr. tautológia, splnenie, vyplývanie a pod.) vyjadriť otázky i–iii.

c) Zodpovedať otázky i–iii a odpovede dokázať *v rozšírenom tablovom kalkule* s pravidlami z predchádzajúcej úlohy a pravidlom (DS_1) z prednášky.

Úloha 2.6.15. Štyria spolužiaci sa dohadujú, kedy pôjdu na pivo do krčmy Pod Machnáčom:

- Do úvahy pripadajú tri večery, utorok až štvrtok.
- Fero povedal, že v utorok aj v stredu určite príde.
- Zuzka povedala, že vo štvrtok príde.
- Jožo povedal, že pôjde, len ak pôjde aspoň jedno dievča.
- Katka nepôjde, ak pôjde Fero.
- Zuzka pôjde, len ak pôjde Katka.
- Všetci vedia, že Fero chodí do krčmy len v utorok, lebo v stredu je v telke futbal a vo štvrtok má tréning.

Pomocou prostriedkov výrokovej logiky zistite, v ktoré večery a v akom zložení môžu spolužiaci ísť na pivo.

Úloha 2.6.16. Malá firma vyrába prístrojové skrinky z viacerých materiálov, s rôznymi povrchovými úpravami a v niekoľkých farbách. Aj keď je zdanlivo možných viac ako tisíc kombinácií, nie všetky sa dajú vyrobiť. Vybavenie firmy, vlastnosti materiálov a výrobné postupy kladú nasledujúce obmedzenia:

(X_1) Skrinky sa vyrábajú materiálov: hliník, oceľ, plast.

(X_2) Hliník a oceľ sú kovy.

(X_3) Iba oceľ sa dá lakovať.

(X_4) Brúsenú povrchovú úpravu môžu mať iba nelakované kovové skrinky.

(X_5) Lakované skrinky aj plastové skrinky sú čierne, biele, alebo zelené.

(X_6) Nelakované oceľové skrinky korodujú.

(X_7) Koróziu spôsobí aj kombinácia dvoch rôznych kovov.

(X_8) Eloxovať sa dajú iba hliníkové skrinky a po tejto úprave sú buď sivé alebo čierne.

(X_9) Korózia je neprípustná.

Zákazník požaduje eloxovanú čierno-bielu skrinku. Môže mu firma vyhovieť? Ak áno, z ktorých materiálov a z ktorých ich kombinácií môže byť taká skrinka vyhotovená?

Obchodný zástupca si chce ujasniť možné kombinácie. Domnieva sa, že skrinka s brúsenou povrchovou úpravou je sivá alebo čierna. Usúdil správne?

Vašou úlohou je:

a) Formalizovať uvedené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu a stručne popísať význam použitých výrokových premenných.

b) Pojmami výrokovej logiky (napr. tautológia, splnenie, vyplývanie a pod.) vyjadriť otázky z predloženého problému.

c) Zodpovedať otázky a odpovede dokázať *pomocou tablového kalkulu*.

2.7 Rezolvencia

Úloha 2.7.1. V rezolvenčnom kalkule dokážte nesplniteľnosť množín klauzúl:

a) $T = \{(a \lor b), (\neg b \lor \neg a), (c \lor \neg d), (\neg c \lor d)\}$

b) $T = \{(a \lor b \lor c), (b \lor \neg c), (\neg a \land \neg b)\}$

c) $T = \{(p \lor q), (\neg p \lor r), (\neg p \lor \neg r), (p \lor \neg q)\}$

d) $T = \{a, (b \lor \neg a), (\neg a \lor \neg b \lor c), (\neg a \lor \neg c)\}$

e) $T = \{(b \lor \neg c), (a \lor \neg b), (b \lor c), (\neg b \lor \neg a)\}$

f) $T = \{(c \lor b), (\neg c \lor a), (c \lor \neg b), (\neg a \lor \neg c)\}$

g) $T = \{(\neg a \lor c), (a \lor b), (\neg a \lor \neg c), (\neg b \lor a)\}$

Riešenie. d) Pokúsime sa nájsť rezolvenčné zamietnutie množiny klauzúl T:

Pri hľadaní zamietnutia môžeme do rezolvenčného odvodenia kedykoľvek pridávať klauzuly teórie T. Ak T nie je príliš veľká, môžeme všetky jej klauzuly pridať hneď na začiatku.

1. a $\quad$ T
2. $b \lor \neg a$ $\quad$ T
3. $\neg a \lor \neg b \lor c$ $\quad$ T
4. $\neg a \lor \neg c$ $\quad$ T

Následne aplikujeme pravidlá rezolvencie a idempotencie. Pretože cieľom je dospieť k prázdnej klauzule, preferujeme rezolvenciu, v ktorej jedna klauzula je jednotková (má iba jeden literál). Rezolventa bude vtedy skrátením druhej klauzuly o jeden literál. Teória T umožňuje takýto postup v každom kroku, ale nie je to tak pri každej teórii.

5. b $\quad$ rezolvencia 1 a 2 na a
6. $\neg a \lor c$ $\quad$ rezolvencia 3 a 5 na b
7. c $\quad$ rezolvencia 1 a 6 na a
8. $\neg a$ $\quad$ rezolvencia 4 a 7 na c
9. $\square$ $\quad$ rezolvencia 1 a 8 na a

Keďže sme pomocou rezolvencie dospeli k prázdnej klauzule, množina T je nesplniteľná. $\natural$

Úloha 2.7.2. Je daná teória T nad $\mathcal{V} = \{a, b, \ldots, z\}^+$:

$$T = \left\{ \begin{array}{c} (p \to q), \\ ((q \to p) \lor (s \to r)), \\ (\neg p \to (\neg r \land s)) \end{array} \right\}$$

Pomocou rezolvenčného kalkulu zistite, či z T vyplýva formula $((p \land q) \to r)$.

Úloha 2.7.3. Precvičte si rezolvenčný kalkul na ďalších úlohách o vyplývaní z častí 2.4 a 2.6.

Riešenie pre 2.6.1. Vráťme sa napríklad k úlohe 2.6.1. Naším cieľom bude dokázať Millsovu vinu pomocou rezolvenčného kalkulu. Pripomeňme si, že slovné znenie úlohy sme formalizovali do teórie:

$$T = \left\{ \begin{array}{c} ((A \land \neg M) \to D)), \\ (D \to (A \lor M)), \\ (A \to \neg D), \\ (A \lor (M \lor D)) \end{array} \right\}.$$

Pôjde nám teda o to, aby sme dokázali, že $T \models M$.

Vieme, že $T \models M$ práve vtedy, keď $T' = T \cup \{\neg M\}$ je nesplniteľná teória. Aby sme to dokázali rezolvenčným kalkulom, teóriu T' najprv upravíme na ekvivalentnú množinu klauzúl:

$$T'_c = \begin{Bmatrix} (\neg A \vee M \vee D), \\ (\neg D \vee A \vee M), \\ (\neg A \vee \neg D), \\ (A \vee M \vee D), \\ \neg M \end{Bmatrix}.$$

Teraz dokážme nesplniteľnosť T'_c rezolvenčným kalkulom:

1.	$\neg A \vee M \vee D$	T'_c
2.	$\neg D \vee A \vee M$	T'_c
3.	$\neg A \vee \neg D$	T'_c
4.	$A \vee M \vee D$	T'_c
5.	$\neg M$	T'_c
6.	$\neg A \vee D$	rezolvencia 1 a 5 na M
7.	$\neg A \vee \neg A$	rezolvencia 3 a 6 na D
8.	$\neg A$	idempotencia 7 na $\neg A$
9.	$\neg D \vee A$	rezolvencia 2 a 5 na M
10.	$\neg D$	rezolvencia 8 a 9 na A
11.	$M \vee D$	rezolvencia 4 a 8 na A
12.	D	rezolvencia 5 a 11 na M
13.	$\square$	rezolvencia 10 a 12 na D

Podarilo sa nám vyrezolvovať prázdnu klauzulu. Znamená to, že teória T'_c je nesplniteľná, teda aj s ňou ekvivalentná $T' = T \cup \{\neg M\}$ je nesplniteľná, a teda $T \models M$. $\natural$

2.8 Algoritmus DPLL

Úloha 2.8.1. Pomocou algoritmu DPLL rozhodnite o splniteľnosti alebo nesplniteľnosti nasledovnej množiny klauzúl T:

$$T = \left\{ \begin{array}{c} (\neg A \lor M \lor D), \\ (\neg D \lor A \lor M), \\ (\neg A \lor \neg D), \\ (A \lor M \lor D), \\ \neg M \end{array} \right\}.$$

Návod na riešenie nájdete v materiáloch z prednášok.

3 Logika prvého rádu

3.1 Formalizácia v relačnej logike

Úloha 3.1.1. Formalizujte nasledovné znalosti z oblasti univerzitného vzdelávania ako teóriu v logike prvého rádu:

a) Každý študent študuje nejaký študijný program.
b) Učiteľ, ktorý je profesorom, musí byť školiteľom aspoň jedného študenta.
c) Evka a Ferko sú študenti. Evka je dievča.
d) Študent absolvuje predmet, iba ak ho má zapísaný.
e) Každý študent má školiteľa.
f) Garantom študijného programu je iba profesor.
g) Každý predmet sa vyučuje v práve jednom semestri.
h) Evkina školiteľka je učiteľka, ale nie je profesorka.
i) Predmet je aktívny, ak sú naň zapísaní aspoň dvaja študenti, alebo ak je naň zapísaný hoc aj len jeden študent a je to dievča.
j) Nikto neučí ani si nezapíše neaktívny predmet.
k) Sú práve dva rôzne semestre – letný a zimný.
l) Študent môže byť hodnotený známkou „Fx“ najviac na dvoch predmetoch v tom istom semestri.
m) Pokiaľ má nejaký študent samé A-čka, učitelia sú spokojní.

Úloha 3.1.2. Zadefinujte nasledujúcej pojmy v logike prvého rádu

a) Hovoríme, že učiteľ učí študenta vtedy a len vtedy, keď učí predmet, ktorý má študent zapísaný, alebo je študentovým školiteľom.
b) Povinný predmet v danom študijnom programe je práve taký predmet, ktorý absolvuje každý študent tohto študijného programu.

Úloha 3.1.3. Nikto si nezapisuje ťažké predmety, ak nie sú povinné v ich študijnom programe.

Úloha 3.1.4. Pojmami prvorádovej logiky vyjadrite nasledujúce otázky. Otázky zodpovedzte a odpovede dokážte.

a) Môže byť profesorom niekto, kto nie je školiteľom žiadneho študenta?

b) Bude predmet Základy základov aktívny, ak sa naň zapíše Evka?

c) Sú všetci školitelia profesormi?

d) Profesor Šašo tvrdí, že jeho predmet sa vyučuje aj v letnom, aj v zimnom semestri. Môžeme mu veriť?

e) Je pravda, že nikto neabsolvuje neaktívny predmet?

Úloha 3.1.5. Formalizujte v naznačenom alebo vhodne zvolenom jazyku logiky prvého rádu nasledujúce tvrdenia:

a) Bez práce nie sú koláče. ($\texttt{má}(kto, čo)$, $\texttt{práca}(x)$, $\texttt{koláč}(x)$).

b) Pomôž iným, pomôžeš aj sebe.

c) Kto druhému jamu kope, sám do nej spadne.

d) Tí, čo iným jamy nekopú, nie sú intrigáni.

e) Aký otec, taký syn. ($\texttt{má\_vlastnosť}(kto, vlastnosť)$, $\texttt{je\_syn}(kto, koho)$).

f) Nepriatelia mojich nepriateľov sú mojimi priateľmi. ($\texttt{priateľ}(kto, koho)$)

Úloha 3.1.6. Zvoľte vhodný jazyk logiky prvého rádu a sformalizujte v ňom nasledujúci detektívny príbeh [3]:

> Someone in Dreadsbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadsbury Mansion, and are the only ones to live there. A killer always hates, and is no richer than his victim. Charles hates no one whom Agatha hates. Agatha hates everybody except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone whom Agatha hates. No one hates everyone. Who killed Agatha?
>
> Niekto v Dreadsburskom kaštieli zabil tetu Agátu. V Dreadsburskom kaštieli bývajú Agáta, komorník a Karol a nikto iný okrem nich tam nebýva. Vrah vždy nenávidí svoju obeť a nie je od nej bohatší. Karol neprechováva nenávisť k nikomu, koho nenávidí Agáta. Agáta nenávidí každého okrem komorníka. Komorník nenávidí každého, kto nie je bohatší ako Agáta. Komorník nenávidí každého, koho nenávidí Agáta. Niet toho, kto by nenávidel všetkých. Kto zabil Agátu?

Úloha 3.1.7. Sformalizujte v jazyku logiky prvého rádu. [2]

(A_1) Každý kojot naháňa nejakého roadrunnera.

(A_2) Každý roadrunner, ktorý robí „beep-beep“, je múdry.

(A_3) Žiadny kojot nechytí roadrunnera, ktorý je múdry.

(A_4) Kojot, ktorý naháňa roadrunnera, a nechytí ho, je frustrovaný

(X) Ak všetky roadrunnery robia „beep-beep“, tak všetky kojoty sú frustrované.

Úloha 3.1.8. Vyjadrite čo najprirodzenejšími slovenskými vetami nasledujúcu formalizáciu zistení o deťoch a Vianociach v jazyku $\mathcal{L}$ s množinami symbolov $\mathcal{V}_\mathcal{L} = \{u, v, w, x, y, z\}$, $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\texttt{Vianoce}, \texttt{Ježiško}, \texttt{Santa}, \texttt{Anička}\}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\texttt{autíčko}^1, \texttt{blud}^1, \texttt{dieťa}^1, \texttt{dobrý}^1, \texttt{dostane}^2, \texttt{chlapec}^1, \texttt{kriticky\_myslí}^1, \texttt{teší\_sa\_na}^2, \texttt{uhlie}^1, \texttt{verí\_v}^2\}$:

(V_1) $\forall x\Big(\big(\texttt{dieťa}(x) \land (\texttt{verí\_v}(x, \texttt{Ježiško}) \lor \texttt{verí\_v}(x, \texttt{Santa}))\big) \to \texttt{teší\_sa\_na}(x, \texttt{Vianoce})\Big)$,

(V_2) $\forall x\big(\texttt{dieťa}(x) \land \neg\texttt{verí\_v}(x, \texttt{Santa}) \to (\texttt{verí\_v}(x, \texttt{Ježiško}) \lor \texttt{kriticky\_myslí}(x))\big)$,

(V_3) $\forall x\big(\texttt{kriticky\_myslí}(x) \to \forall y(\texttt{blud}(y) \to \neg\texttt{verí\_v}(x, y))\big)$,

(V_4) $\forall x\Big(\neg\texttt{dobrý}(x) \to \big(\neg\exists y\, \texttt{dostane}(x, y) \lor (\texttt{verí\_v}(x, \texttt{Santa}) \to \exists y(\texttt{dostane}(x, y) \land \texttt{uhlie}(y)))\big)\Big)$,

(V_5) $\forall x\big(\texttt{dobrý}(x) \land \texttt{chlapec}(x) \to \exists y(\texttt{dostane}(x, y) \land \texttt{autíčko}(y))\big)$.

3.2 Definície pojmov

Úloha 3.2.1. Uvažujme doménu rodinných vzťahov, ktorá už obsahuje predikáty ako $\texttt{žena}^1$, $\texttt{muž}^1$, $\texttt{rodič}^2$, $\texttt{súrodenec}^2$, kde $\texttt{žena}(x)$ znamená, že x je žena, $\texttt{muž}(x)$ znamená, že x je muž, $\texttt{rodič}(x, y)$ znamená, že x je rodičom y. V prvorádovej logike napíšte definície nasledovných odvodených pojmov (tak, ako ich poznáte z prirodzeného jazyka):

(D_1) $\texttt{súrodenec}^2$

(D_2) $\texttt{starý\_rodič}^2$

(D_3) $\texttt{prastarý\_rodič}^2$

(D_4) $\texttt{bratranec}^2$

(D_5) $\texttt{prasesternica}^2$ (teda sesternica „z druhého kolena“)

(D_6) $\texttt{nevlastný\_súrodenec}^2$

(D_7) $\texttt{jedináčik}^1$

Riešenie. Napríklad prvé dve definície môžu byť nasledovné:

(D_1) $\forall x \forall y\big(\texttt{súrodenec}(x, y) \leftrightarrow \big(\neg\, x \doteq y \land \exists z(\texttt{rodič}(z, x) \land \texttt{rodič}(z, y))\big)\big)$,

(D_2) $\forall x \forall y\big(\texttt{starý\_rodič}(x, y) \leftrightarrow \big(\exists z(\texttt{rodič}(x, z) \land \texttt{rodič}(z, y))\big)\big)$.

♮

3.3 Sémantika relačnej logiky prvého rádu

Úloha 3.3.1. Zostrojte štruktúru $\mathcal{M} = (M, i)$ pre jazyk z predchádzajúcej úlohy tak, aby:

a) Štruktúra $\mathcal{M}$ splnila nasledujúce formuly v každom ohodnotení:

(A_1) $\exists x \exists y(\mathtt{rodič}(x, \mathtt{Andrea}) \land \mathtt{rodič}(y, \mathtt{Andrea}) \land \mathtt{rodič}(x, \mathtt{Boris}) \land \mathtt{rodič}(y, \mathtt{Boris}))$,

(A_2) $(\mathtt{rodič}(\mathtt{Andrea}, \mathtt{Cyril}) \land \mathtt{rodič}(\mathtt{Boris}, \mathtt{Diana}))$,

(A_3) $\forall x \neg\mathtt{rodič}(x, x)$,

(A_4) $\forall x\big((\mathtt{žena}(x) \lor \mathtt{muž}(x)) \land \neg(\mathtt{žena}(x) \land \mathtt{muž}(x))\big)$,

(A_5) $\forall p \forall q \forall r \forall x\big((\mathtt{rodič}(p, x) \land \mathtt{rodič}(q, x) \land \mathtt{žena}(p) \land \mathtt{žena}(q)) \to p \doteq q\big)$,

(A_6) $\forall p \forall q \forall r \forall x\big((\mathtt{rodič}(p, x) \land \mathtt{rodič}(q, x) \land \mathtt{muž}(p) \land \mathtt{muž}(q)) \to p \doteq q\big)$.

b) Štruktúra $\mathcal{M}$ *navyše* splnila nasledujúce formulu a definície v nich použitých pojmov z úlohy 3.2.1:

(B_1) $\exists x \exists y\ \mathtt{prastarý\_rodič}(x, y)$,

(B_2) $\exists x\big(\mathtt{jedináčik}(x) \land \forall y(\mathtt{rodič}(x, y) \to \mathtt{jedináčik}(y))\big)$,

(B_3) $\exists x \exists y(\mathtt{súrodenec}(x, y) \land \mathtt{nevlastný\_súrodenec}(x, y))$.

Úloha 3.3.2. Dokážte, že nasledujúce tvrdenia *nie sú* ani platné ani nesplniteľné:

a) $\neg\forall x\, P(x) \to \forall x \neg P(x)$,

b) $\exists x \neg P(x) \to \neg\exists x\, P(x)$,

c) $\forall x(P(x) \lor Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x))$,

d) $(\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$,

e) $(\neg\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$,

f) $(\exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x)) \to \exists x(P(x) \land Q(x))$,

g) $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \to \exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x)$,

h) $\neg\forall x(P(x) \land Q(x)) \to \neg\forall x\, P(x) \lor \neg\forall x\, Q(x)$,

i) $\neg\exists x(P(x) \land Q(x)) \to \neg\exists x\, P(x) \lor \neg\exists x\, Q(x)$.

Riešenie. Napríklad štruktúra $\mathcal{M}_1 = (M_1, i_1)$, pričom:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{1\} \\ i_1(P) &= \emptyset \\ i_1(Q) &= \{1\} \end{aligned}$$

spĺňa formulu c), ale štruktúra $\mathcal{M}_2 = (M_2, i_2)$, kde:

$$M_2 = \{1, 2\}$$
$$i_2(P) = \{2\}$$
$$i_2(Q) = \{1\}$$

ju nespĺňa. Formula c) teda nie je ani platná, ani nesplniteľná. $\natural$

3.4 Sémantika logiky prvého rádu

Úloha 3.4.1. Nájdite štruktúru, ktorá splní prvorádovú teóriu $T = \{A_1, \dots, A_6\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{V}_\mathcal{L} = \{u, v, w, x, y, z\}$,
$\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\mathtt{Andrea}, \mathtt{Danka}, \mathtt{Hanka}, \mathtt{Janka}, \mathtt{Max}, \mathtt{Nikita}\}$,
$\mathcal{F}_\mathcal{L} = \{\mathtt{manžel}^1, \mathtt{manželka}^1, \mathtt{prvorodené\_dieťa}^2\}$,
$\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\mathtt{Lekár}^1, \mathtt{Manželia}^2, \mathtt{Muž}^1, \mathtt{Právnik}^1, \mathtt{Žena}^1\}$.

(A_1) $\forall x \forall y (\mathtt{Manželia}(x, y) \to \mathtt{Manželia}(y, x))$

(A_2) $\forall x \forall y \big(\mathtt{Manželia}(x, y) \to (\mathtt{Muž}(x) \to x \doteq \mathtt{manžel}(y)) \land (\mathtt{Žena}(x) \to x \doteq \mathtt{manželka}(y))\big)$

(A_3) $\forall x \forall y \big(\mathtt{Manželia}(x, y) \land \mathtt{Muž}(x) \land \mathtt{Žena}(y) \to \mathtt{Lekár}(\mathtt{prvorodené\_dieťa}(x, y)) \lor \mathtt{Právnik}(\mathtt{prvorodené\_dieťa}(x, y))\big)$

(A_4) $\mathtt{Manželia}(\mathtt{Hanka}, \mathtt{Max}) \land \mathtt{Žena}(\mathtt{Hanka}) \land \mathtt{Muž}(\mathtt{Max})$

(A_5) $\mathtt{Manželia}(\mathtt{Danka}, \mathtt{Janka}) \land \mathtt{Žena}(\mathtt{Danka}) \land \mathtt{Žena}(\mathtt{Janka})$

(A_6) $\mathtt{Manželia}(\mathtt{Andrea}, \mathtt{Nikita}) \land \mathtt{Muž}(\mathtt{Andrea})$

3.5 Substitúcie, voľné a viazané premenné

Úloha 3.5.1. Uvažujme nasledujúce postupnosti symbolov:

(X_1) $\mathtt{matka}(\mathtt{matka}(x))$

(X_2) $y \doteq \mathtt{matka}(x)$

(X_3) $\forall x \forall y\, (y \doteq \mathtt{matka}(x) \to \mathtt{dieťa}(x, y))$

(X_4) $\exists x\, (\mathtt{ľúbi}(x, y) \lor \lnot \mathtt{ľúbi}(x, y))$

(X_5) $\forall x\, P(x) \land Q(x)$

(X_6) $\exists x \exists y\, R(x, y) \lor \forall y\, S(x, y)$

(X_7) $\exists x \big(P(f(x)) \land \forall x \forall y \big(Q(x, x) \to P(g(x)) \lor R(x, y)\big)\big)$

Pre každú z nich:

a) vyznačte oblasti platnosti kvantifikátorov, ktoré sa v nej vyskytujú;

b) vyznačte voľné a viazané výskyty premenných x, y;

c) zistite, či je premenná y voľná;

d) určte množinu voľných premenných.

Úloha 3.5.2. Zistite, či je v nasledujúcich prípadoch substitúcia aplikovateľná; ak áno, určte výsledok substitúcie:

a) $x\{x \mapsto f(y)\}$

b) $y\{x \mapsto f(y)\}$

c) $g(x, y)\{x \mapsto y\}$

d) $h(x, a, g(x, y))\{x \mapsto f(a)\}$

e) $\big(\neg P(x, y) \lor Q(x, y)\big)\{y \mapsto a\}$

f) $\big(\exists x \neg P(x, y) \lor Q(x, y)\big)\{y \mapsto a\}$

g) $\big(\exists x\, P(x, y) \lor Q(x, y)\big)\{x \mapsto g(b, y)\}$

h) $\big(\forall z\, (P(x, z) \land Q(x, g(y, z)))\big)\{x \mapsto f(z), z \mapsto g(x, y)\}$

i) $\big(P(x) \land \exists x\, (Q(x) \lor R(x)) \to S(x)\big)\{x \mapsto c\}$

j) $\big(\forall z\, (P(x, z) \land Q(x, g(y, z)))\big)\{x \mapsto f(y), y \mapsto g(x, y)\}$

3.6 Tablá pre logiku prvého rádu

Úloha 3.6.1. Dokážte v tablovom kalkule:

a) $\models \exists x\, \text{muž}(x) \land \exists x\, \text{žena}(x) \to \exists x(\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x))$

b) $\{\, \forall x\, \text{hračka}(\text{najhračka}(x)), \neg \exists x(\text{hračka}(x) \land \neg\text{jednorožec}(x))\} \models$
$\forall x\, \text{jednorožec}(\text{najhračka}(x))$

Riešenie. a) Máme dokázať, že formula zo zadania je platná. Vybudujeme preto tablo pre množinu označených formúl $S^+ = \{\mathbf{F}\, \exists x\, \text{muž}(x) \land \exists x\, \text{žena}(x) \to \exists x(\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x))\}$.

Zápis formuly je zjednodušený podľa pravidiel z prednášky. Jej plne uzátvorkovaný tvar je $\big((\exists x\, \text{muž}(x) \land \exists x\, \text{žena}(x)) \to \exists x(\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x))\big)$. Formula je teda **implikáciou**, ktorej antecedent je konjunkcia dvoch existenčne kvantifikovaných formúl a konzekvent je existenčná kvantifikácia disjunkcie. Tablové pravidlá musíme aplikovať **v súlade** s touto štruktúrou.

1.	$\mathbf{F}\, \exists x\, \text{muž}(x) \land \exists x\, \text{žena}(x) \rightarrow \exists x(\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x))$	S^+
2.	$\mathbf{T}\, \exists x\, \text{muž}(x) \land \exists x\, \text{žena}(x)$	$\alpha 1$
3.	$\mathbf{F}\, \exists x(\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x))$	$\alpha 1$
4.	$\mathbf{T}\, \exists x\, \text{muž}(x)$	$\alpha 2$
5.	$\mathbf{T}\, \exists x\, \text{žena}(x)$	$\alpha 2$
6.	$\mathbf{T}\, \text{muž}(y)$	$\delta 4\{x \mapsto y\}$
7.	$\mathbf{T}\, \text{žena}(z)$	$\delta 5\{x \mapsto z\}$
8.	$\mathbf{F}\, \text{muž}(z) \lor \text{žena}(z)$	$\gamma 3\{x \mapsto z\}$
9.	$\mathbf{F}\, \text{muž}(z)$	$\alpha 8$
10.	$\mathbf{F}\, \text{žena}(z)$	$\alpha 8$
	$*$	$7, 10$

Pravidlo $\boldsymbol{\delta}$ sme (aj keď to nebolo nutné) v table použili dvakrát (uzly 6 a 7). **Vždy** sme za pôvodne viazanú premennú x substituovali **novú** voľnú premennú (v 6 to bola y, potom v 7 to bola z, lebo v tej chvíli sa už y vo vetve vyskytovala voľná). Bolo by **chybou** použiť premennú, ktorá **sa už predtým** vo vetve tabla **vyskytla voľná**. Dôvod je nasledovný:

O objekte, ktorý existuje podľa formuly 4, je známe **iba** to, že má vlastnosť muž. Podobne o objekte, ktorý existuje podľa formuly 5, je známe **iba** to, že má vlastnosť žena. Tento objekt pravdepodobne **nebude rovnaký** ako objekt, ktorý má vlastnosť muž. **Nesmieme** ich preto označiť rovnakou premennou. Nemohli by sme použiť ani inú premennú, ktorá by sa už v table predtým vyskytla voľná, lebo aj o ňou označenom objekte by už boli známe nejaké ďalšie skutočnosti. Tento princíp platí pri všetkých formulách typu δ.

Formuly typu $\boldsymbol{\gamma}$ hovoria, že nimi opísanú vlastnosť (pozitívnu či negatívnu) majú **všetky** objekty. Preto pri ich použití (8) môžeme za pôvodne viazanú premennú dosadiť **ľubovoľnú premennú**, ale aj **ľubovoľný term** (konštantu, aplikáciu funkčného symbolu na ľubovoľné argumenty).

Tablo je uzavreté, takže množina S^+ je nesplniteľná. Neexistuje teda štruktúra, v ktorej by formula $\exists x\, \text{muž}(x) \land \exists x\, \text{žena}(x) \rightarrow \exists x(\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x))$ pri nejakom ohodnotení bola nesplnená, a preto je táto formula platná. ♮

Úloha 3.6.2. Dokážte v tablovom kalkule:

a) $\{\exists x\big(P(g(x)) \rightarrow \neg \exists y\, Q(y)\big)\} \models \forall x\, P(x) \rightarrow \forall y\, \neg Q(f(y))$

b) $\{\exists x\big(P(g(x)) \rightarrow \exists y\, Q(f(y))\big)\} \models \forall x\, P(x) \rightarrow \exists y\, Q(y)$

c) $\{\exists x\, \forall y\, Q(x,y), \exists x\, P(f(x))\} \models \exists x\, P(x) \land \forall y\, \exists x\, Q(x,y)$

d) $\{\forall x\big(P\big(g(x,x)\big) \rightarrow \exists y\, Q\big(g(x, f(y))\big)\big)\} \models \exists x\, \neg P(x) \lor \forall y\, \exists z\, Q\big(g(f(y), z)\big)$

e) $\{\forall x\big(P(x) \rightarrow \exists y\, R(x,y)\big), \forall x\, \forall y\big(\neg R(x,y) \lor Q(y)\big),$
$\exists x\, \neg \exists y\, \big(Q(y) \land S(y, f(x))\big)\} \models \forall x\, \exists y\big(P(x) \rightarrow R(x,y) \land \exists z\, \neg S(y,z)\big)$

Riešenie. a) Máme dokázať vyplývanie. Vybudujeme preto tablo pre množinu označených formúl $S^+ = \{\mathbf{T}\,\exists x\big(P(g(x)) \to \neg\,\exists y\, Q(y)\big), \mathbf{F}\,\forall x\, P(x) \to \forall y\, \neg Q(f(y))\}$, ktorá vyjadruje, že všetky formuly teórie sú splnené a formula, ktorej vyplývanie dokazujeme, je nesplnená.

1.	$\mathbf{T}\,\exists x\big(P(g(x)) \to \neg\,\exists y\, Q(y)\big)$	S^+
2.	$\mathbf{F}\,\forall x\, P(x) \to \forall y\, \neg Q(f(y))$	S^+
3.	$\mathbf{T}\,\forall x\, P(x)$	$\alpha 2$
4.	$\mathbf{F}\,\forall y\, \neg Q(f(y))$	$\alpha 2$
5.	$\mathbf{F}\,\neg Q(f(u))$	$\delta 4\{y \mapsto u\}$
6.	$\mathbf{T}\,Q(f(u))$	$\alpha 5$
7.	$\mathbf{T}\,P(g(v)) \to \neg\,\exists y\, Q(y)$	$\delta 1\{x \mapsto v\}$

8.	$\mathbf{F}\,P(g(v))$	$\beta 7$	10.	$\mathbf{T}\,\neg\,\exists y\, Q(y)$	$\beta 7$
9.	$\mathbf{T}\,P(g(v))$	$\gamma 3\{x \mapsto g(v)\}$	11.	$\mathbf{F}\,\exists y\, Q(y)$	$\alpha 10$
	$*$	$8, 9$	12.	$\mathbf{F}\,Q(f(u))$	$\gamma 11\{y \mapsto f(u)\}$
				$*$	$6, 12$

Znova pripomíname, že voľná premenná, ktorú dosádzame za viazanú premennú vo formule typu δ musí byť **nová** — teda nevyskytuje sa vo vetve voľná pred miestom použitia v δ pravidle. V prípade δ formuly $\mathbf{T}\,\exists x\, A$ označuje nová premenná *svedka* splnenia formuly $\exists x\, A$, v prípade δ formuly $\mathbf{F}\,\forall x\, A$ označuje nová premenná *kontrapríklad* splnenia formuly $\forall x\, A$.

Pozor na správne vykonanie substitúcie v γ aj v δ pravidlách. **Dosádzame vždy iba za premenné. Nesmieme** substituovať za konštantu ani za term s funkčným symbolom. Nesmieme ani zmeniť funkčný symbol v terme. Napríklad v 7. kroku nemožno odvodiť $\cancel{\mathbf{T}\,P(v) \to \exists y\, Q(f(y))}$ či $\cancel{\mathbf{T}\,P(f(v)) \to \exists y\, Q(f(y))}$.

V tomto table sme do oboch formúl typu γ potrebovali za premenné dosadiť termy s funkčnými symbolmi.

Tablo sa nám podarilo uzavrieť, preto je množina S^+ nesplniteľná. Neexistuje teda štruktúra, v ktorej by bola pri nejakom ohodnotení teória $\{\exists x\big(P(g(x)) \to \exists y\, Q(f(y))\big)\}$ splnená a formula $\forall x\, P(g(x)) \to \exists y\, Q(y)$ nesplnená. Preto $\{\exists x\big(P(g(x)) \to \exists y\, Q(f(y))\big)\} \models \forall x\, P(g(x)) \to \exists y\, Q(y)$. $\natural$

Úloha 3.6.3. Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú platné:

a) $\neg\exists y\, P(y) \to \forall y(\exists x\, P(x) \to P(y))$
b) $\forall x\, P(x) \to \forall x\, P(f(x))$
c) $\neg\exists x\, P(x) \to \forall x\, \neg P(x)$
d) $\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$
e) $\forall x\, P(x) \to \forall y\, P(y)$
f) $\exists x\, P(x) \to \exists y\, P(y)$
g) $\forall x\, P(x) \to \exists y\, P(y)$
h) $\forall y(\forall x\, P(x) \to P(y))$
i) $\exists y(P(y) \to \forall x\, P(x))$
j) $\neg\forall x\, P(x) \to \exists x\, \neg P(x)$

k) $\exists x(P(x) \land Q(x)) \to \exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x)$

l) $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x)$

m) $\forall x(P(x) \land Q(x)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x)$

n) $\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x) \to \forall x(P(x) \lor Q(x))$

o) $\neg\forall x\, P(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$

p) $\neg\exists x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg P(x)$

q) $\exists x(P(x) \lor R(y)) \leftrightarrow \exists x\, P(x) \lor R(y)$

r) $\forall x(P(x) \lor R(y)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \lor R(y)$

s) $\forall x(P(x) \land R(y)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \land R(y)$

t) $\exists x(P(x) \land R(y)) \leftrightarrow \exists x\, P(x) \land R(y)$

u) $\exists x\, R(y) \leftrightarrow R(y)$

v) $\forall x\, R(y) \leftrightarrow R(y)$

w) $\exists x(P(x) \to R(y)) \leftrightarrow (\forall x\, P(x) \to R(y))$

x) $\forall x(P(x) \to R(y)) \leftrightarrow (\exists x\, P(x) \to R(y))$

y) $\forall x(R(y) \to P(x)) \leftrightarrow (R(y) \to \forall x\, P(x))$

z) $\exists x(R(y) \to P(x)) \leftrightarrow (R(y) \to \exists x\, P(x))$

3.7 Tablové dôkazy s rovnosťou

Úloha 3.7.1. Prvorádovými tablami (teda tablami s pravidlami $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, pravidlom reflexivity a Eulerovým pravidlom) dokážte:

a) $\models \neg(\texttt{študent}(x) \to \neg\texttt{študent}(y)) \to x \neq y$

b) $\{x \doteq y, \texttt{rodič}(\texttt{matka}(v), x), \texttt{rodič}(\texttt{matka}(w), y)\} \models v \neq w$

c) $\{f(f(f(x))) \doteq x, f(f(f(x))) \doteq f(f(x))\} \models f(x) \doteq x$

Úloha 3.7.2. Nasledujúca úvaha [4] môže vyzerať prekvapujúco:

Každý sa bojí Drakulu. Drakula sa bojí iba mňa. Takže som Drakula.

Sformalizujte úvahu v jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\texttt{Drakula}, \texttt{ja}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\texttt{bojí\_sa}^2\}$ a dokážte, že je správna prvorádovým tablom.

Úloha 3.7.3. Pripomeňme si formalizáciu záhady vraždy tety Agáty:

(A_1) $\exists x(\texttt{vDreadbury}(x) \land \texttt{zabil}(x, \texttt{Agáta}))$

(A_2) $\forall x(\texttt{vDreadbury}(x) \leftrightarrow x \doteq \texttt{Agáta} \lor x \doteq \texttt{Komorník} \lor x \doteq \texttt{Charles})$

(A_3) $\forall x\,\forall y(\texttt{zabil}(x, y) \to \texttt{nenávidí}(x, y))$

(A_4) $\forall x\,\forall y(\texttt{zabil}(x, y) \to \neg\texttt{bohatší\_ako}(x, y))$

(A_5) $\forall x(\texttt{nenávidí}(\texttt{Agáta}, x) \to \neg\texttt{nenávidí}(\texttt{Charles}, x))$

(A_6) $\forall x(\neg x \doteq \texttt{Komorník} \to \texttt{nenávidí}(\texttt{Agáta}, x))$

(A_7) $\forall x(\neg\texttt{bohatší\_ako}(x, \texttt{Agáta}) \to \texttt{nenávidí}(\texttt{Komorník}, x))$

(A_8) $\forall x(\texttt{nenávidí}(\texttt{Agáta}, x) \to \texttt{nenávidí}(\texttt{Komorník}, x))$

(A_9) $\forall x\,\exists y(\texttt{vDreadbury}(y) \land \neg\texttt{nenávidí}(x, y))$

(A_{10}) $\neg\texttt{Agáta} \doteq \texttt{Komorník}$

Nech $T = \{A_1, \ldots, A_{10}\}$ (pozor na zmenu vo formulách A_2, A_9 a A_{10} oproti praktickým cvičeniam). Dokážte tablovým kalkulom, že teta Agáta spáchala samovraždu. Teda formálne zapísané, dokážte že platí $T \models \texttt{zabil}(\texttt{Agáta}, \texttt{Agáta})$.

Symboly predikátov a konštánt si vhodne skráťte. Použite prvorádové tablo rozšírené o pravidlá γ^* a δ^*, pravidlá pre ekvivalenciu, a pravidlá z úlohy 2.6.13.

Úloha 3.7.4. Dokážte nasledujúce tvrdenia pomocou prvorádových tabiel s pridanými pravidlami γ^* a δ^*:

a) Predpokladajme, že vieme iba o vlastnostiach sčítania +, ktoré popisuje teória $\{A_1, A_2, A_3\}$. Dokážte, že z nich vyplýva X.

   (A_1) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x + (y + z)) \doteq ((x + y) + z)$

   (A_2) $\exists o_1\,\forall x\,(o_1 + x) \doteq x$

   (A_3) $\exists o_2\,\forall x\,(x + o_2) \doteq x$

   (X) $\exists o\,\forall x\big((o + x) \doteq x \land (x + o) \doteq x\big)$

   A_1 hovorí, že sčítanie je asociatívne. A_2 a A_3 hovoria, že existuje „ľavá nula“ o_1 a „pravá nula“ o_2. X hovorí, že existuje nula o, ktorá je pravá aj ľavá.

   Pomôcka: Odvoďte, že $o_1 \doteq o_2$.

b) Predpokladajme, že vieme iba o vlastnostiach sčítania +, ktoré popisuje teória $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$. Dokážte, že z nich vyplýva Y.

   (B_1) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x + (y + z)) \doteq ((x + y) + z)$

   (B_2) $\forall x\,(x + 0) \doteq x$

   (B_3) $\forall y\,\exists i_1\,(i_1 + y) \doteq 0$

   (B_4) $\forall y\,\exists i_2\,(y + i_2) \doteq 0$

(Y) $\forall y \exists i\big((i + y) \doteq 0 \land (y + i) \doteq 0\big)$

B_1 hovorí, že sčítanie je asociatívne. B_2 hovorí, že 0 je pravá nula sčítania (nevieme, či je aj ľavou nulou). B_3 a B_4 hovoria, že ku každému číslu y existuje ľavé, resp. pravé opačné číslo (ako $-y$). Y hovorí, že ku každému číslu y existuje opačné číslo (je súčasne ľavým aj pravým opačným číslom pre y).

Pomôcka: Odvoďte najprv využitím asociativity (B_1), že pre zvolené číslo x, jeho ľavé opačné číslo u a pravé opačné číslo v platí $u \doteq (0 + v)$. Odtiaľ ľahko dostanete, že u je aj pravým opačným číslom k x.

c) Predpokladajme, že vieme iba o vlastnostiach sčítania +, ktoré popisuje teória $\{C_1, C_2, C_3\}$. Dokážte, že z nich vyplýva Z.

(C_1) $\forall x \, \forall y \, \forall z \, (x + (y + z)) \doteq ((x + y) + z)$

(C_2) $\forall x \, (x + 0) \doteq x$

(C_3) $\forall y \, \exists i((y + i) \doteq 0 \land (i + y) \doteq 0)$

(Z) $\forall x \, \forall y \, \forall z \big((x + z) \doteq (y + z) \to x \doteq y\big)$ (zákon pravého krátenia)

Pomôcka: Začnite tak, že odstránite kvantifikátory a zjednodušíte implikáciu v Z, reflexivitou pripočítate vhodný prvok k $(x + z)$, Eulerovým pravidlom nahradíte $(x + z)$ na pravej strane za $(y + z)$.

Úloha 3.7.5. V logike prvého rádu môžeme sformalizovať (axiomatizovať) teóriu množín. Úplná formalizácia je pomerne komplikovaná. Pre naše účely postačí nasledujúci fragment T_{set} so základnými vzťahmi a operáciami v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\in^2, \subseteq^2\}$ a $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\cup^2, \cap^2, \setminus^2, \mathsf{C}^1\}$.

$$\forall x \, \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x \doteq y)$$
$$\forall x \, \forall y (x \subseteq y \leftrightarrow \forall z (z \in x \to z \in y))$$
$$\forall z \, \exists x \, z \in x$$
$$\forall z \, \neg \, z \in \emptyset$$
$$\forall x \, \forall z (z \in \mathsf{C}(x) \leftrightarrow \neg \, z \in x)$$
$$\forall x \, \forall y \, \forall z (z \in (x \cap y) \leftrightarrow (z \in x \land z \in y))$$
$$\forall x \, \forall y \, \forall z (z \in (x \cup y) \leftrightarrow (z \in x \lor z \in y))$$
$$\forall x \, \forall y \, \forall z (z \in (x \setminus y) \leftrightarrow (z \in x \land \neg \, z \in y))$$

Prvorádovými tablami rozšírenými o pravidlá γ^* a δ^*, pravidlá pre ekvivalenciu, a pravidlá z úlohy 2.6.13 dokážte, že z T_{set} vyplývajú nasledujúce formuly:

(A_1) $\forall x\, x \subseteq x$

(A_2) $\forall x\, \forall y\, \forall z(x \subseteq y \land y \subseteq z \to x \subseteq z)$

(A_3) $\forall x\, \forall y(x \subseteq y \land y \subseteq x \to x \doteq y)$

(A_4) $\forall x\, \forall y((x \cup y) \doteq x \to y \subseteq x)$

(A_5) $\forall x\, \forall y((x \cap y) \doteq y \to y \subseteq x)$

(A_6) $\forall x\, \forall y((x \cap \mathsf{C}(y)) \doteq \emptyset \to x \subseteq y)$

(A_7) $\forall x\, \forall y((x \setminus y) \doteq \emptyset \to x \subseteq y)$

(A_8) $\forall x\, \forall y\, (x \cap y) \subseteq x$

(A_9) $\forall x\, \forall y\, x \subseteq (x \cup y)$

(A_{10}) $\forall x\, \forall y\, (x \cap y) \doteq (y \cap x)$

(A_{11}) $\forall x\, \forall y\, (x \cup y) \doteq (y \cup x)$

(A_{12}) $\forall x\, \forall y\, \mathsf{C}(x \cap y) \doteq (\mathsf{C}(x) \cup \mathsf{C}(y))$

(A_{13}) $\forall x\, \forall y\, \mathsf{C}(x \cup y) \doteq (\mathsf{C}(x) \cap \mathsf{C}(y))$

(A_{14}) $\forall x\, \forall y\, \mathsf{C}(x \setminus y) \doteq (x \cap \mathsf{C}(y))$

(A_{15}) $\forall x\, \forall y\, \forall z(x \subseteq y \lor x \subseteq z \to x \subseteq (y \cup z))$

(A_{16}) $\neg \forall x\, \forall y\, \forall z(x \subseteq (y \cup z) \to x \subseteq y \lor x \subseteq z)$

(A_{17}) $\neg \exists x\, \forall z(z \in x \leftrightarrow \neg z \in z)$

(A_{18}) $\exists x\, \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in z) \to \neg \forall x\, \exists y\, \forall z(z \in y \leftrightarrow \neg z \in x)$

Riešenie (A_4). Aby sme dokázali, že $T_{\text{set}} \models A_4$, vybudujeme tablo pre množinu označených formúl $S^+ = \{\, \mathbf{T}\, A \mid A \in T_{\text{set}} \,\} \cup \{\mathbf{F}\, A_4\}$.

⚠ Je dôležité uvedomovať si, čo máme dokázať, prečo by to mala byť to pravda a budovať tablo tak, aby zodpovedalo dôkazu tvrdenia v prirodzenom jazyku. Inak sa v ňom ľahko stratíme a urobíme chybu alebo dôkaz nikam nepovedie.

Tvrdenie A_4 hovorí, že ak je zjednotenie množín x a y rovné x, musí byť y podmnožinou x. Ak totiž $x \cup y = x$, tak v y nie sú žiadne prvky, ktoré by už neboli v x, teda každý prvok z y je v x, teda y je podmnožinou x.

Rovnako ľahko to dokážeme sporom: Nech $x \cup y = x$, ale $y \nsubseteq x$. Potom je nejaký prvok p, ktorý patrí do y ($p \in y$), ale $p \notin x$. Pretože ale $p \in y$, tak $p \in (x \cup y)$. Lenže $x \cup y = x$, teda $p \in x$, čo je spor s úvodným predpokladom.

Tento dôkaz sporom teraz podrobne a formálne zapíšeme ako tablo.

1.	$\mathbf{F}\,\forall x\,\forall y((x \cup y) \doteq x \to y \subseteq x)$	S^+
2.	$\mathbf{T}\,(v \cup w) \doteq v \to w \subseteq v$	$\delta^*\{x \mapsto v, y \mapsto w\}$
3.	$\mathbf{T}\,(v \cup w) \doteq v$	$\alpha 2$
4.	$\mathbf{F}\,w \subseteq v$	$\alpha 2$
5.	$\mathbf{T}\,\forall x\,\forall y(x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \to z \in y))$	S^+
6.	$\mathbf{T}\,w \subseteq v \leftrightarrow \forall z(z \in w \to z \in v)$	$\gamma^* 5\{x \mapsto w, w \mapsto v\}$
7.	$\mathbf{F}\,\forall z(z \in w \to z \in v)$	$\mathrm{ESTF}6, 4$
8.	$\mathbf{F}\,p \in w \to p \in v$	$\delta 7\{z \mapsto p\}$
9.	$\mathbf{T}\,p \in w$	$\alpha 8$
10.	$\mathbf{F}\,p \in v$	$\alpha 8$
11.	$\mathbf{T}\,(v \cup w) \doteq (v \cup w)$	Refl
12.	$\mathbf{T}\,v \doteq (v \cup w)$	Euler3, 11
13.	$\mathbf{F}\,p \in (v \cup w)$	Euler12, 10
14.	$\mathbf{T}\,\forall x\,\forall y\,\forall z(z \in (x \cup y) \leftrightarrow (z \in x \lor z \in y))$	S^+
15.	$\mathbf{T}\,p \in (v \cup w) \leftrightarrow (p \in v \lor p \in w)$	$\gamma^* 14\{x \mapsto v, y \mapsto w, z \mapsto p\}$
16.	$\mathbf{F}\,p \in v \lor p \in w$	$\mathrm{ESTF}15, 13$
17.	$\mathbf{F}\,p \in v$	$\alpha 16$
18.	$\mathbf{F}\,p \in w$	$\alpha 16$
	$*\,9, 18$	

Tablo začneme priamo formulou $\mathbf{F}\,A_4$, ktorej vyplývanie chceme (sporom) dokázať (1). Ostatné formuly z S^+, teda formuly z T_{set} označené $\mathbf{T}$ budeme pridávať podľa potreby, lebo ich je veľa a nie všetky využijeme.

Tvrdenie A_4 je všeobecne kvantifikovaná implikácia. Pretože predpokladáme, že nie je splnené, jeho bezkvantifikátorová podformula je nesplnená pre nejaké konkrétne, ale nie presne známe množiny v a w (2). Teda zjednotením v a w je v (3), ale pritom w nie je podmnožinou v (4).

Aby sme zistili, či sú tieto fakty sporné, potrebujeme vedieť, ako ich naša teória definuje. Väčšinou sa oplatí začať nesplneným faktom, teda faktom 4. Vyberieme si z teórie definíciu vzťahu *byť podmnožinou* (5) a aplikujeme ju na w a v (6). Musí byť nesplnené, že všetky prvky množiny w sú prvkami v (7). Teda niektoré, nie presne známe prvky w nie sú prvkami v. Označme niektorý z nich p (8). Teda p patrí do w (9), ale p nepatrí do v (10).

Pretože $(v \cup w)$ sa rovná v (3), zrejme p nepatrí ani do $(v \cup w)$. Odvodiť v table to vieme Eulerovým pravidlom, ktoré ale používa rovnosť iba smere zľava doprava. Odvodíme teda symetrickú rovnosť k rovnosti 3: Reflexivitou pridáme rovnosť $(v \cup w) \doteq (v \cup w)$ (11) a Eulerovým pravidlom podľa 3 jej ľavú stranu nahradíme v (12). Následne ďalším použitím Eulerovho pravidla dostaneme, že nie je splnené $p \in (v \cup w)$ (13).

Podľa definície zjednotenia z teórie (14), je p prvkom zjednotenia množín v a w práve vtedy, keď je prvkom niektorej z nich (15). V našom prípade p nie je prvkom zjednotenia, teda nie je prvkom ani jednej z týchto množín (16), teda ani w (18), čo je ale v spore s tým, že $p \in w$ (9).

Keďže tablo je uzavteté, množina S^+ je nesplniteľná, a teda z T_{set} vyplýva A_4. ♮

3.8 Rezolvencia v prvorádovej logike

Úloha 3.8.1. Zistite, či sú nasledujúce dvojice postupností symbolov unifikovateľné, a nájdite ich najvšeobecnejší unifikátor.

a) $\mathtt{Arabela}$ — $\mathtt{prvý\_majiteľ}(x)$

b) $\mathtt{kupujúci}(\mathtt{Kolobežka6259}, y)$ — $\mathtt{kupujúci}(t, \mathtt{prvý\_majiteľ}(t))$

c) $\mathtt{predaj}(x, \mathtt{prvý\_majiteľ}(t), t, p)$ — $\mathtt{predaj}(x, y, \mathtt{Kolobežka6259}, \mathtt{35eur})$

d) $\mathtt{predaj}(u, u, w, r)$ — $\mathtt{predaj}(\mathtt{kupujúci}(y, t), y, t, p)$

e) $\mathtt{predaj}(x, \mathtt{Ingrid}, t, \mathtt{cena}(t))$ — $\mathtt{predaj}(\mathtt{kupujúci}(y, t), y, t, p)$

Úloha 3.8.2. Sfaktorizujte klauzuly:

a) $\neg\mathtt{dáma}(x) \lor \mathtt{urazil}(y, x) \lor \neg\mathtt{dáma}(\mathtt{Milagros})$

b) $\neg\mathtt{chráni}(\mathtt{osobný\_strážca}(x), x) \lor \neg\mathtt{chráni}(x, y)$

Úloha 3.8.3. Zrezolvujte nasledujúce množiny klauzúl v logike prvého rádu:

a) Každý cvičiaci je buď doktorand alebo asistent. Profesor Krhlička nie je ani doktorand, ani asistent, ale je cvičiaci.

$\{\neg\mathtt{cvičiaci}(x) \lor \mathtt{doktorand}(x) \lor \mathtt{asistent}(x),$
$\neg\mathtt{doktorand}(\mathtt{Krhlička}), \quad \neg\mathtt{asistent}(\mathtt{Krhlička}), \quad \mathtt{cvičiaci}(\mathtt{Krhlička})\}$

b) Ak má Tom rád Jerryho, potom existuje mačka, ktorá neznáša Toma. Jerryho majú všetci radi.

$\{\neg\mathtt{má\_rád}(\mathtt{Tom}, \mathtt{Jerry}) \lor \mathtt{mačka}(\mathtt{M}_1),$
$\neg\mathtt{má\_rád}(\mathtt{Tom}, \mathtt{Jerry}) \lor \mathtt{neznáša}(\mathtt{M}_1, \mathtt{Tom}),$
$\mathtt{má\_rád}(x, \mathtt{Jerry})\}$

c) Kubkovi chutia všetky čokolády. Maťkovi nechutí Milka.

$\{\neg\mathtt{čokoláda}(x) \lor \mathtt{chutí}(x, \mathtt{Kubko}), \quad \neg\mathtt{chutí}(\mathtt{Milka}, \mathtt{Maťko})\}$

Úloha 3.8.4. Prvorádovou rezolvenciou dokážte správnosť nasledujúcich úsudkov:

a) Každý je chlapec alebo dievča. Každé dievča má nejakú bábiku. Janka nie je chlapec. Potom Janka má aspoň jednu bábiku.

Teda formálne: Nech

$$T = \left\{ \begin{array}{c} \forall x(\mathtt{chlapec}(x) \lor \mathtt{dievča}(x)), \\ \forall x(\mathtt{dievča}(x) \to \exists y(\mathtt{má}(x,y) \land \mathtt{bábika}(y))), \\ \neg\mathtt{chlapec}(\mathtt{Janka}) \end{array} \right\}$$

Dokážte, že $T \models \exists y(\mathtt{má}(\mathtt{Janka}, y) \land \mathtt{bábika}(y))$.

b) Predpokladajme, že všetko je pes alebo mačka, a že každý pes vlastní aspoň jednu pískaciu hračku. Z toho vyplýva, že ak Dunčo nie je mačka, vlastní nejakú pískaciu hračku.

c) Tí, čo nie sú maškrtníci, sú posadnutí štíhlou líniou. Kto nikdy nezjedol nejakú čokoládu, nie je maškrtník. Preto ak Garfield nie je posadnutý štíhlou líniou, tak niekedy zjedol aspoň jednu čokoládu.

d) Každého, kto urazí dámu, potrestá nejaký gentleman. Milagros je dáma. Takže ak Doña Angélica urazí Milagros, niekto ju (Doñu Angélicu) určite potrestá.

Riešenie. d) Najprv si sformalizujeme teóriu:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} \forall x\big(\text{dáma}(x) \to \forall y\big(\text{urazí}(y,x) \to \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big), \\ \text{dáma}(\text{Milagros}) \end{array} \right\}$$

Sformalizujeme tiež tvrdenie, ktorého vyplývanie chceme dokázať:

$$X = \text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \to \exists x\, \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}).$$

Keďže $T \models X$ vtt $T' = T \cup \{\neg X\}$ je nesplniteľné a dôkaz chceme vykonať pomocou rezolvenčného kalkulu, T' si postupne upravíme do ekvisplniteľnej klauzálnej teórie. Úprava formuly $\forall x\big(\text{dáma}(x) \to \forall y\big(\text{urazí}(y,x) \to \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big)$ je nasledujúca:

1. $\forall x\big(\text{dáma}(x) \to \forall y\big(\text{urazí}(y,x) \to \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big)$

2. $\forall x\big(\neg\text{dáma}(x) \lor \forall y\big(\text{urazí}(y,x) \to \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big)$
   (nahradenie implikácie)

3. $\forall x\big(\neg\text{dáma}(x) \lor \forall y\big(\neg\text{urazí}(y,x) \lor \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big)$
   (nahradenie implikácie)

4. $\forall x\big(\neg\text{dáma}(x) \lor \forall y\big(\neg\text{urazí}(y,x) \lor (\text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x,y),y)$
   $\land\ \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x,y)))\big)\big)$
   (skolemizácia)

5. $\forall x\, \forall y \big(\neg \text{dáma}(x) \lor \big(\neg \text{urazí}(y, x) \lor (\text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x, y), y)$
$\qquad \land \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x, y)))\big)\big)$
(konverzia do PNF)

6. $\forall x\, \forall y \big(\big(\neg \text{dáma}(x) \lor \neg \text{urazí}(y, x) \lor \text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x, y), y)\big) \land$
$\qquad \land \big(\neg \text{dáma}(x) \lor \neg \text{urazí}(y, x) \lor \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x, y))\big)\big)$
(distributívnosť)

7. $\{\neg \text{dáma}(x) \lor \neg \text{urazí}(y, x) \lor \text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x, y), y),$
$\neg \text{dáma}(x) \lor \neg \text{urazí}(y, x) \lor \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x, y))\}$
(vytvorenie množiny klauzúl)

Formula $\text{dáma}(\text{Milagros})$ už v CNF je. Ostalo nám teda upraviť do CNF $\neg X$:

1. $\neg(\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \to \exists x\, \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}))$
2. $\neg(\neg \text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \lor \exists x\, \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}))$
(nahradenie implikácie)
3. $(\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \land \forall x\, \neg \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}))$
(NNF)
4. $\forall x (\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \land \neg \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}))$
(PNF)
5. $\{\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}), \neg \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica})\}$
(vytvorenie množiny klauzúl)

Výsledná ekvisplniteľná teória T_c' je teda nasledujúca:

$$T_c' = \left\{\begin{array}{l} \neg \text{dáma}(x) \lor \neg \text{urazí}(y, x) \lor \text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x, y), y), \\ \neg \text{dáma}(x) \lor \neg \text{urazí}(y, x) \lor \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x, y)), \\ \text{dáma}(\text{Milagros}), \\ \text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}), \\ \neg \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}) \end{array}\right\}$$

Teraz dokážme nesplniteľnosť T_c' rezolvenčným kalkulom:

1.	$\neg \text{dáma}(x) \lor \neg \text{urazí}(y, x)$ $\lor \text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x, y), y)$	T_c'
2.	$\text{dáma}(\text{Milagros})$	T_c'
3.	$\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros})$	T_c'
4.	$\neg \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica})$	T_c'
5.	$\neg \text{dáma}(x) \lor \neg \text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, x)$	rezolvencia 1 a 4$\{x \mapsto z\}$ na potrestá, $\sigma_5 = \{y \mapsto \text{Doña\_Angélica}, z \mapsto \text{pomstiteľ}(x, \text{Doña\_Angélica})\}$
6.	$\neg \text{dáma}(\text{Milagros})$	rezolvencia 3 a 5 na urazí,

$\sigma_6 = \{x \mapsto \mathrm{Milagros}\}$

7. $\square$ rezolvencia 2 a 6 na dáma, $\sigma_7 = \{\}$

⚠ Pri rezolvovaní klauzúl 1 a 4 sme museli premenovať premennú x v jednej z nich na novú premennú z. Substitúciou σ_5 sme potom zunifikovali atómy $\mathrm{potrestá}(\mathrm{pomstiteľ}(x, y), y)$ z klauzuly 1 a $\mathrm{potrestá}(\boldsymbol{z}, \mathrm{Doña\_Angélica})$ z klauzuly $4\{x \mapsto z\}$ (teda 4 po premenovaní).

Takéto premenovanie je štandardnou súčasťou rezolvencie. Na význame klauzúl nič nemení, lebo premenné v rôznych klauzulách sú všeobecne kvantifikované nezávisle od seba a na konkrétnom mene premennej nezáleží (pokiaľ nie je rovné menu inej premennej).

Bez premenovania nie sú atómy $\mathrm{potrestá}(\mathrm{pomstiteľ}(x, y), y)$ a $\mathrm{potrestá}(\boldsymbol{x}, \mathrm{Doña\_Angélica})$ v klauzulách 1 a 4 unifikovateľné. Je to tak preto, lebo nie sú unifikovateľné prvé argumenty predikátového symbolu $\mathrm{potrestá}$. Termy x a $\mathrm{pomstiteľ}(x, \mathrm{Doña\_Angélica})$, kde je premenná x argumentom funkčného symbolu, by boli unifikovateľné, iba keby sme mali nekonečné termy.

Keďže sme pomocou rezolvencie našli zamietnutie pre T'_c, čo je ekvisplniteľná klauzálna teória pre teóriu $T \cup \{\neg X\}$, tak $T \models X$, čiže

$$T \models \mathrm{urazí}(\mathrm{Doña\_Angélica}, \mathrm{Milagros}) \rightarrow \exists x\, \mathrm{potrestá}(x, \mathrm{Doña\_Angélica}).$$

Teda z teórie T vyplýva, že ak Doña Angélica urazí Milagros, tak niekto Doñu Angélicu potrestá. $\natural$

Úloha 3.8.5. Sformalizujte nasledujúce tvrdenia v jazyku logiky prvého rádu *bez rovnosti*:

(A_1) Autíčka sú chlapčenské hračky a bábiky sú dievčenské hračky.

(A_2) Hanka má dve autíčka.

(A_3) Každá hračka bola zakúpená v hračkárstve.

(A_4) Každé dievča má aspoň jednu dievčenskú hračku.

(A_5) Hanka je dievča, ktoré má bábiku, ktorá má červené šaty.

(A_6) Každá mama kúpi svojmu dieťaťu nejakú hračku.

(A_7) Dievčatá, ktoré majú nejakú chlapčenskú hračku, sa stanú matfyzáčkami.

Zistite pomocou rezolvencie, či sa Hanka stane matfyzáčkou.

Úloha 3.8.6. Sformalizujte nasledujúce tvrdenia [2] a dokážte rezolvenčným kalkulom, že $\{A_1, \dots, A_4\} \models X$:

(A_1) Psy v noci zavýjajú.

(A_2) Kto má mačku, nemá myši.

(A_3) Tí, čo majú ľahký spánok, nemajú nič, čo v noci zavýja.

(A_4) Juro má mačku alebo psa.

(X) Ak má Juro ľahký spánok, tak nemá myši.

Úloha 3.8.7. Uvažujme nasledujúce tvrdenia [2]:

(V_1) Každý vták spí na nejakom strome.

(V_2) Potápky sú vtáky a sú tiež vodnými živočíchmi.

(V_3) Strom, na ktorom spí nejaký vodný vták, sa nachádza blízko jazera.

(V_4) Všetko, čo spí na niečom, čo sa nachádza blízko nejakého jazera, sa živí rybami.

Vyriešte nasledujúce úlohy:

a) Sformalizujte tvrdenia ako teóriu $T = \{V_1, \ldots, V_4\}$ vo vhodnom jazyku logiky prvého rádu.

   Zvoľte predikátové a funkčné symboly podľa potreby tak, aby formalizácia dávala zmysel, teda aby sformalizované pojmy neboli izolované a formalizácia bola splniteľná.

b) Upravte teóriu T na ekvisplniteľnú klauzálnu teóriu T'.

c) Sformulujte a zodpovedzte pomocou rezolvencie pre logiku prvého rádu nasledujúcu otázku:

   Je pravda, že každá potápka sa živí rybami?

Literatúra

[1] Chiara Ghidini and Luciano Serafini. *Mathematical Logic Exercises*. University of Trento, 2014. `http://disi.unitn.it/~ldkr/ml2014/ExercisesBooklet.pdf`.

[2] Gordon S. Novak Jr. Resolution example and exercises. [online]. `https://www.cs.utexas.edu/users/novak/reso.html`.

[3] Francis Jeffry Pelletier. Seventy-five problems for testing automatic theorem provers. *J. Autom. Reasoning*, 2(2):191–216, 1986.

[4] Raymond M. Smullyan. *What Is the Name of This Book?—The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*. Prentice-Hall, 1978.

[5] Andrei Voronkov. Logic and modeling 2014. [online]. `http://www.voronkov.com/lics.cgi`.