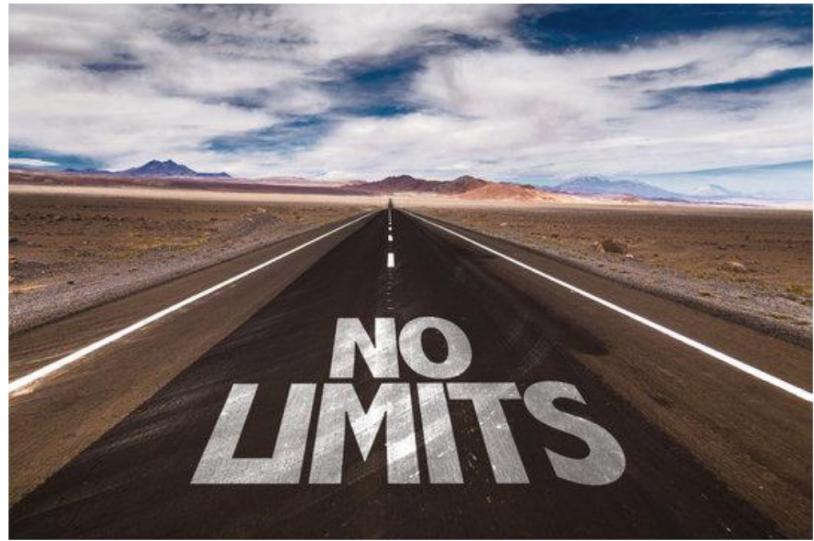


# Встановлення лімітів

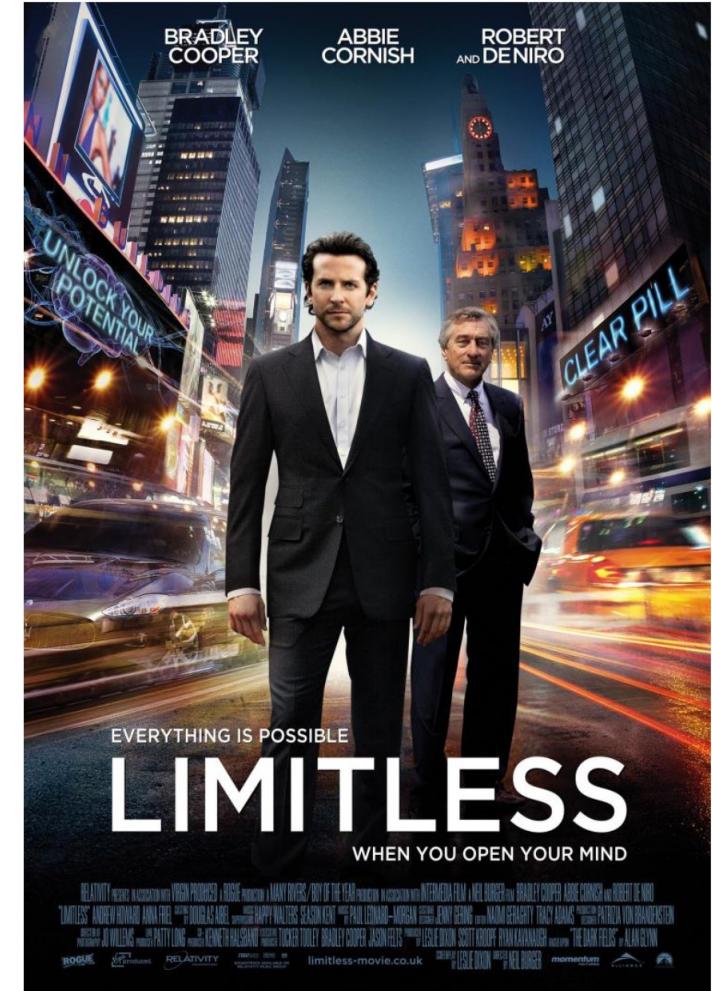


Ігор Прудєв

# <sup>2</sup>Ліміти в реальному світі

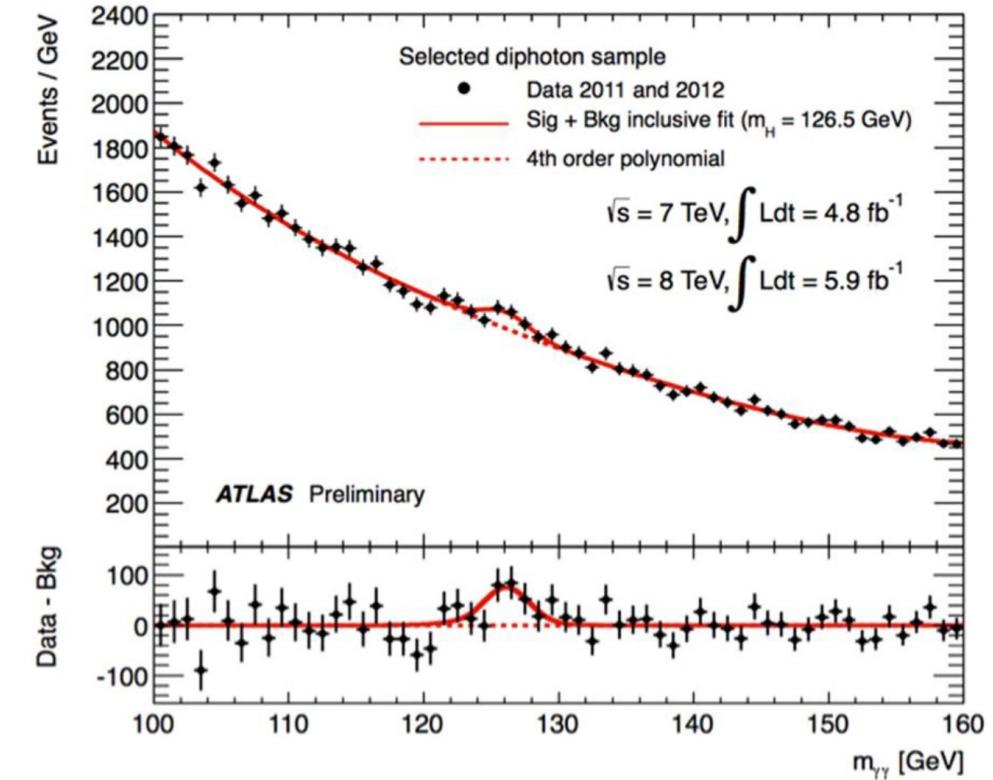
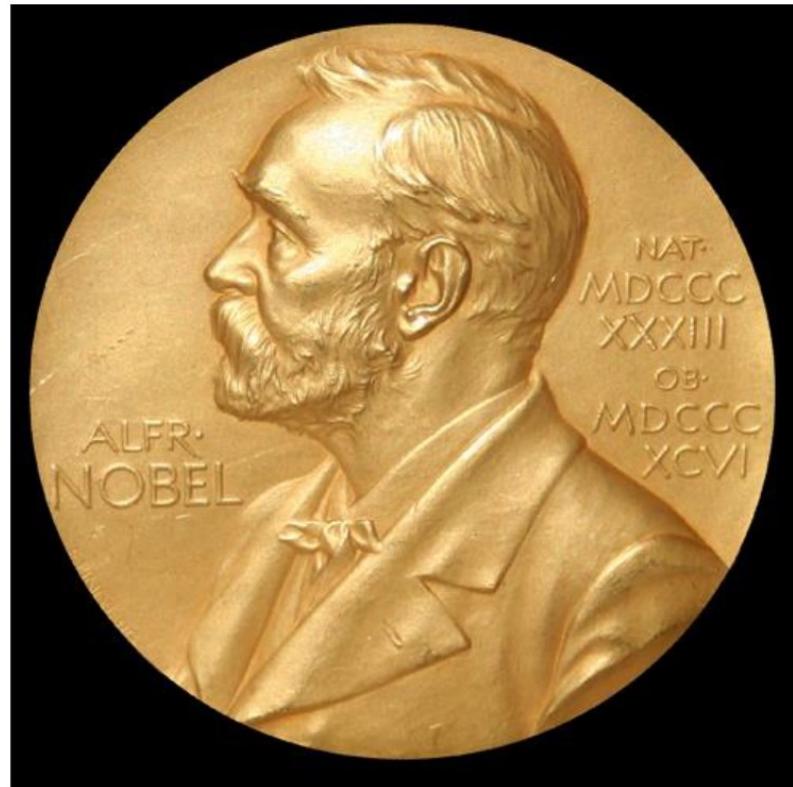


Пошук "limits"  
в інтернеті



# Ліміти в світі ФВЕ

- Вони на іншій стороні медалі, дуже рідко призводять до **відкриття**.



# Ліміти в світі ФВЕ

- Вони на іншій стороні медалі, дуже рідко призводять до відкриття.
- Ми робимо пошук, але нічого не знаходимо. Ми не можемо поїхати в Стокгольм, але можемо хоча б зробити публікацію в **PRL!**

PHYSICAL REVIEW LETTERS

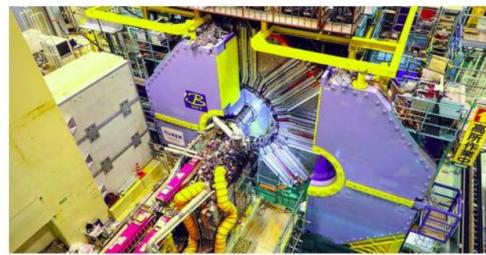
Highlights Recent Accepted Collections Authors Referees Search Press About Editorial Team

Featured in Physics Editors' Suggestion Open Access

Search for an Invisibly Decaying  $Z'$  Boson at Belle II in  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- (e^\pm\mu^\mp)$  Plus Missing Energy Final States

I. Adachi *et al.* (Belle II Collaboration)  
Phys. Rev. Lett. **124**, 141801 – Published 6 April 2020

Physics SYNOPSIS



Closing in on the  $Z'$  Boson

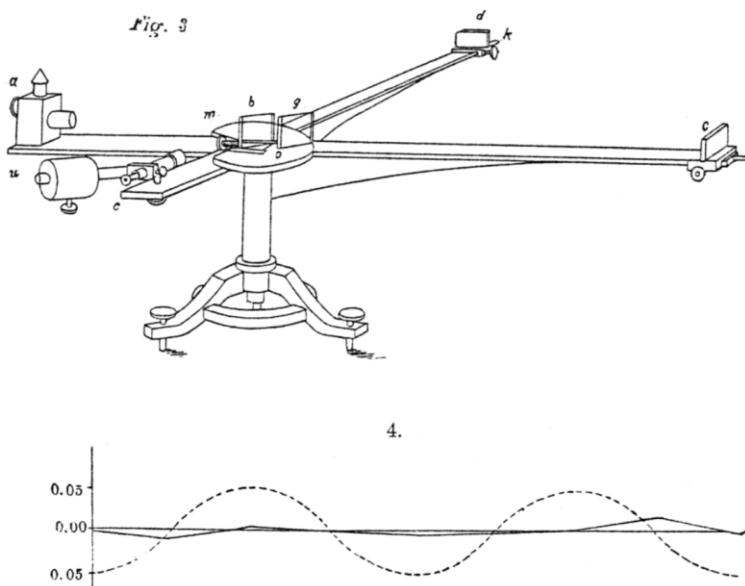
Published 6 April 2020

The Belle II experiment finds no  $Z'$  boson in its first results, but it does constrain how strongly the particle might interact with standard model particles.

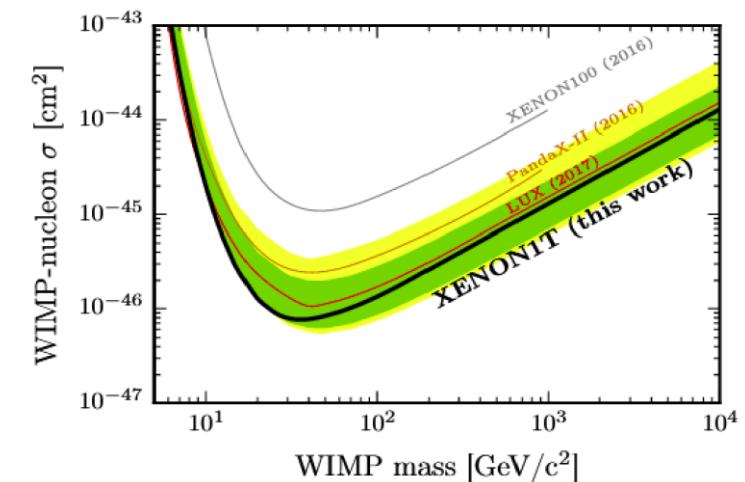
# 5 Ліміти

- Історія фізики сповнена нульових результатів, які, як виявилося:
    - свідчать про нові напрямки (**Michelson-Morley**),
    - зупиняють неправильні теорії (суперсиметрія? ☺),
    - формують шлях до нових пошуків (LEP проти LHC, **легка темна матерія**, ...)
- Ліміти важливі.

Michelson-Morley



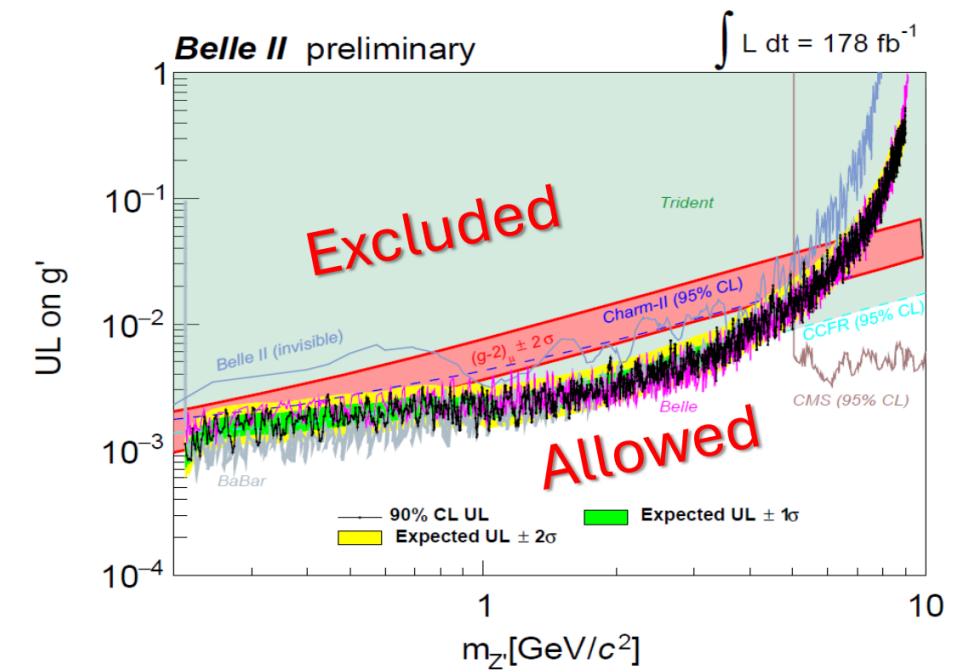
Xenon – DM search



# Ліміти

- Давайте повністю обмежимося тут нашим випадком: фізикою темного сектора (нові частинки BSM) або розпадами  $\tau$  LFV/BNV.
- Ми шукаємо позитивний сигнал на фоні, який може (і часто є) або не може бути близьким до нуля.

→ Ліміти завжди верхні ліміти



Ми хочемо заявити про найбільше можливе значення сигналу для певної цільової імовірності.

# Встановлення лімітів

- Це вступна лекція до встановлення лімітів
- Не вичерпна
  - Важливі методи не розглядаються (Feldman-Cousins, PCL, ...)
  - Інші лише намальовані (Bayesian priors, ...)
- Головна мета – дати вам відправну точку
  - Для подальшого поглиблення та дослідження теми, якщо це необхідно
  - Щоб відповідально поводитися з багатьма доступними інструментами, а не як з чорною скринькою



# Інтерпретація/визначення імовірності

## Frequentist

Відносна частота

$P(A)$  – частка разів, коли  $A$  відбувається при нескінченній кількості вимірювань.

Досить інтуїтивна

Добре підходить для повторюваних експериментів (наприклад, зіткнення на колайдерах)

Проблематично для унікальних явищ (наприклад, Великого вибуху)

## Bayesian

Суб'єктивна імовірність

$P(A)$  – рівень довіри, що  $A$  – правда. Ймовірність пов'язана з гіпотезою про міру ступеня віри.

Теж досить інтуїтивна (але не з поясненням зверху :\ )

Включає інтерпретацію відносної частоти (розглядаючи як гіпотезу твердження про те, що експеримент дасть певний результат певну частку разів)

# Інтерпретація/визначення імовірності

Frequentist



Bayesian



*Win probabilities*

78%

22%

# Більше про фреквентистско-байєссівську дуальність

## Frequentist, aka ‘classic’

- Ймовірність того, що експеримент дасть певний результат
- Frequentist підхід працює з  $P(\text{data}|\text{theory})$ : ймовірність спостерігати за даними з припущенням, що теорія правдива.
- Імовірність спостережень цитується як функція параметри теорії. Це НЕ ймовірність теорії.

Думайте про ймовірність спостерігати бозон Хігgsа, якщо він існує і якщо він має властивості SM.

R.Fisher



J.Neyman



E.Pearson



# Більше про фреквентистско-байєсівську дуальність

## Bayesian

- Bayes підхід теж починається з  $P(\text{data}|\text{theory})$ , але потім використовує теорему Баєса:  $P(\text{theory}|\text{data}) \propto P(\text{data}|\text{theory})P(\text{theory})$
- Posterior імовірність що теорія коректна після того, як ви подивились на дату: міра довіри теорії. Думайте про імовірність того, що SM бозон Хігgsа це правда, після того, як ви побачили пік.
- Сила теореми Баєса в тому, що вона пов'язує цікаву величину та імовірність, що гіпотеза правдива при відомих даних з більш доступною величиною: імовірністю що ми б побачили дані, якщо гіпотеза була правдива.
- Ціна, яку треба заплатити: введення  $P(\text{theory})$ : prior імовірність, що теорія правдива. Без однозначних рецептів для введення.

Bayes' theorem relates  $P(A|B)$  and  $P(B|A)$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Rev. Bayes



P.S. Laplace



Незважаючи на те, що Байєсу (посмертно) приписали цю теорему, загальновизнано, що Лаплас заново її відкрив і використав «серйозно» (celestial mechanics).

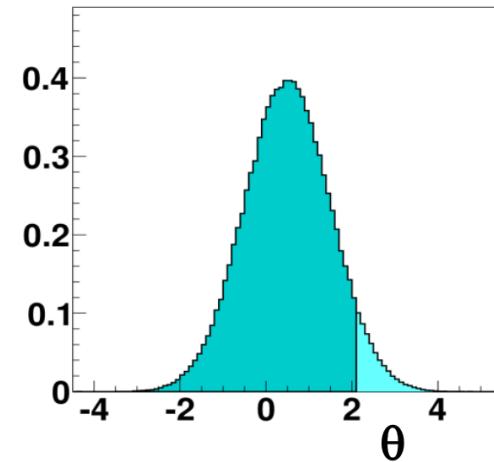
# Назад до лімітів

- Відкидання гіпотези про присутність сигналу має (набагато) м'якіші вимоги, ніж заява про йї відкриття
- Типовими значеннями є 5-10% для виключення ( $\alpha$ ) і  $\sim 10^{-7}$  для відкриття (p-value).

Ліміти – це однобічні інтервали

Confidence level → frequentist  
 ↗  
 Credibility level → Bayesian

Типова заява:  $s < s_{up}$  @ 90(95)% CL



Межі – це вимірювання, але не вимірювання високої точності:

- Ви можете орієнтовно думати з точністю ~15% на  $s_{up}$
- Часто використовується для апроксимацій

# Дуальність на ділі

дані

параметри моделі

- $L(x|\theta) = P(data|theory)$  – Правдоподібність (Likelyhood)

Байєсовці бачать правдоподібність як єдиний спосіб, яким експериментальні дані впливають на модель, забезпечуючи прямий зв'язок між прайором і постеріором. Дані – це завжди спостережувані дані, якими вони є, якими б вони не були.

Навпаки, більшість фреквентистських конструкцій вимагають не лише правдоподібність для фактичних даних, але й для всіх можливих даних, які б могли спостерігатися.

Баєсовські ліміти кажуть про імовірність моделі. Імовірність / міра віри що істинне значення параметра за межами зафіксованого інтервалу, поставленого за допомогою  $s_{up}$ .

Фреквентистські ліміти кажуть про імовірність повторених експериментів, припускаючи модель. Confidence interval, встановлений з  $s_{up}$  - рандомна величина і відрізняється від експерименту до експерименту.

# Nuisance параметри

- Параметри, які входять до нашої моделі, але ми не хочемо їх вимірювати.
- Ми відрізняємо цікаві параметри (**parameters of interest**) (POI) від нецікавих параметрів (**nuisance parameters**).

Приклад: ми шукаємо сигнал (як правило, пік розподілу маси) на фоні. Оцінка фону - необхідний етап пошуку сигналу, який часто надає корисну інформацію (точність MC, ...), але він нас не хвилює сам по собі. Фон є нецікавим параметром.

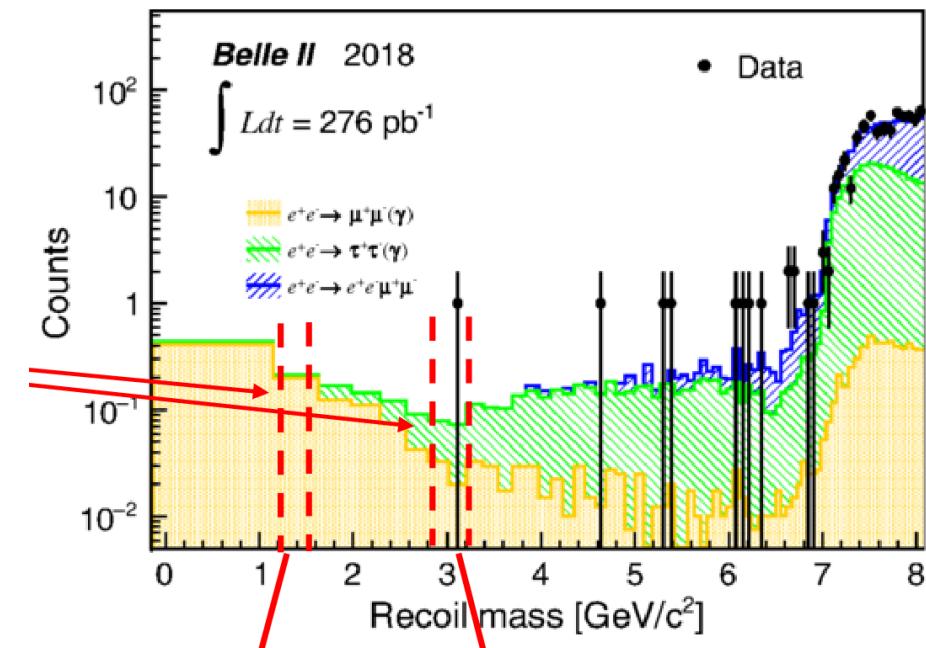
Список, звичайно, набагато довший: роздільна здатність детектора, моделювання форми, систематичні похибки, ...

- То що з цим робити?

# Встановлення лімітів на практиці: приклад

## Poissonian event counting

- Ми шукаємо сигнал на фоні
- Це часто лічильний експеримент з невеликою кількістю подій.
- Немає чіткого розділення між сигналом та фоном  
→ ми вимірюємо **сумарну кількість подій**
- Сигнал, фон і сигнал+фон мають Пуасонівський розподіл з очікуваними значеннями  $s$ ,  $b$  та  $s + b$ .
- Ми бачимо  $N_{obs}$  подій.
- На зараз припустимо, що відомо без похибки.
- Якщо  $N_{obs}$  приблизно збігається з  $b$ , наша мета знайти верхній ліміт  $s_{up}$  на  $s$  з 95% CL



$$\begin{aligned}N_{obs} &= 0 \\b &\approx 0.2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_{obs} &= 1 \\b &\approx 0.1\end{aligned}$$

# Встановлення лімітів на практиці: приклад

Poissonian event counting: **frequentist**

$$s + b \text{ гіпотеза} \longrightarrow P(n/s + b) = \frac{(s + b)^n e^{-(s+b)}}{n!}$$

Знайти значення  $s_{up}$  таке, що імовірність побачити  $N_{obs}$  подій чи менше =  $\alpha$

→ Inversion of the p-value test for the  $s + b$  hypothesis

$$\alpha = P(n \leq N_{obs}) = \sum_{n=0}^{N_{obs}} \frac{(s_{up} + b)^n e^{-(s_{up}+b)}}{n!} \quad \alpha = 1-CL=0.05$$

Аналітичний чи чисельний розв'язок для  $s_{up}$

# Встановлення лімітів на практиці: приклад

Poissonian event counting: frequentist

- Напів- аналітичний розв'язок доступний

$$s_{up} = \frac{1}{2} F_{\chi^2}^{-1}(1 - \alpha; 2(N_{obs} + 1)) - b$$

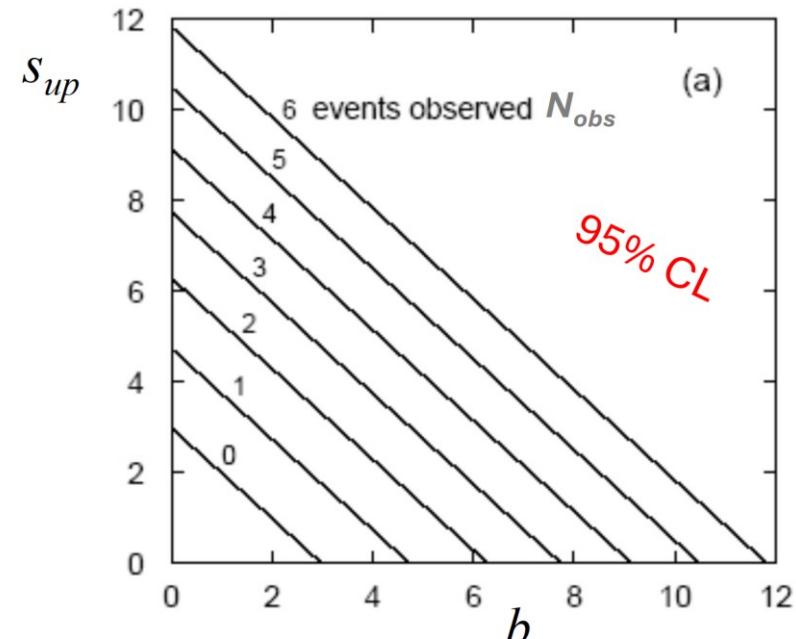
Quantile of  $\chi^2$  distribution

Окремий сценарій,  $b = 0, N_{obs} = 0$

$$\alpha = P(n \leq N_{obs}) = e^{-s_{up}}$$

$$s_{up} = -\ln \alpha \approx 3$$

В більш загальному випадку,  
для  $b \neq 0, N_{obs} \neq 0$



# Встановлення лімітів на практиці: приклад

- $s, s_{up}$  – це (очікувана) кількість сигнальних подій
- Рівняння  $N = \epsilon \sigma L_{int}$  поєднує кількість подій з перерізом  $\sigma$ , ефективністю  $\epsilon$  та інтегрованою світимістю  $L_{int}$ .

$$\sigma_{up} = \frac{s_{up}}{\epsilon \times L_{int}}$$

← Відкидаючи менші ефекти  
(кореляції, систематика, ...)

- Це верхня межа поперечного перерізу, яка, у свою чергу, визначає межу на зчеплення(?) coupling): зазвичай  $\sigma \propto g^2$

Зазвичай вводиться  $\mu = \sigma / \sigma_{ref}$  (strength factor) і використовується для встановлення лімітів, коли є  $\sigma_{ref}$  для порівняння з вимірюваним  $\sigma$ .  
(наприклад  $\sigma_{SM}$  для SM бозону Хіггса)

# Покриття (Coverage)

- Coverage is the fraction of intervals (probability) that the exclusion range set by the upper limit does not contain (cover) the parameter when the model is true.
- Очікується що це  $i \in CL$
- В такому випадку це фреквентистський концепт і автоматично включений в таку конструкцію. Через апроксимації чи відходження від чистого фреквентивізму, можуть бути випадки over чи under coverage.
- В Бассовському випадку покриття треба перевіряти.

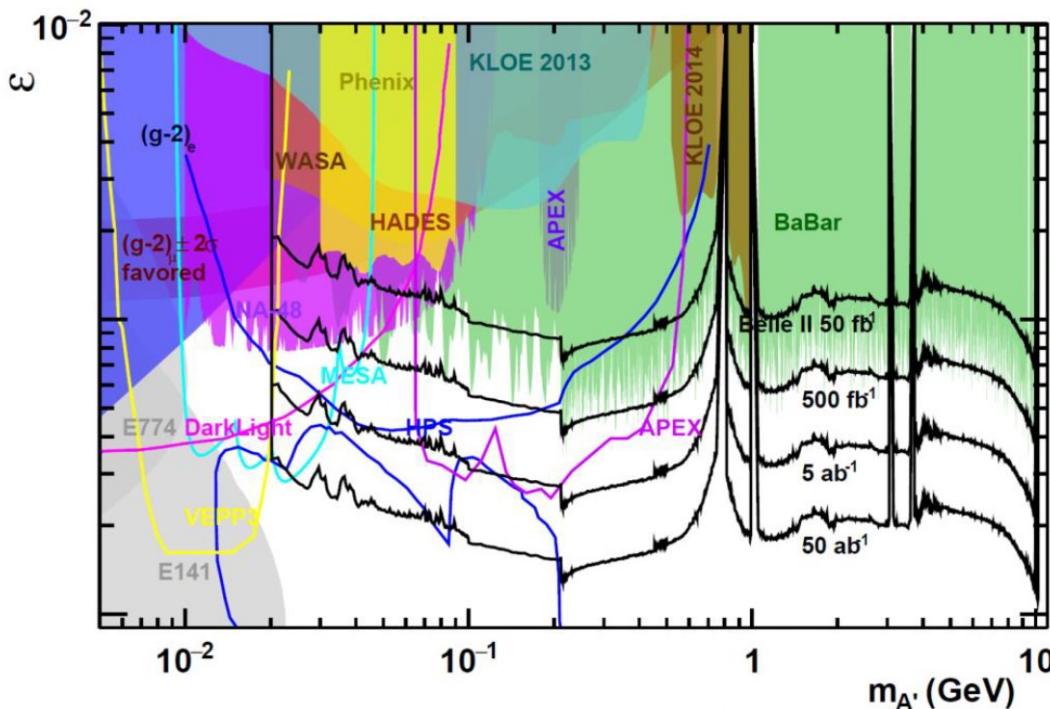
# Встановлення лімітів на практиці: приклад

Poissonian event counting: frequentist

- Через флуктуації  $N_{obs}$ ,  $s_{up}$  може бути негативним, confidence interval пустий
  - $N_{obs} = 0$ ,  $b = 3.2$        $\alpha = 0.05(95\%CL) \rightarrow s_{up} \approx -0.2$
  - Це не рідкість для лімітів поблизу фізичної межі.
- 
- Інтервал призначений для покриття справжнього значення у 95% випадків, і цей випадок належить до решти 5%.
  - Математично все нормально, але результат не фізичний.
  - У Бассівській конструкції це автоматично уникається через prior на  $s$ . Буде 0 для  $s < 0$ .

# Помилкові виключення

Poissonian event counting: frequentist

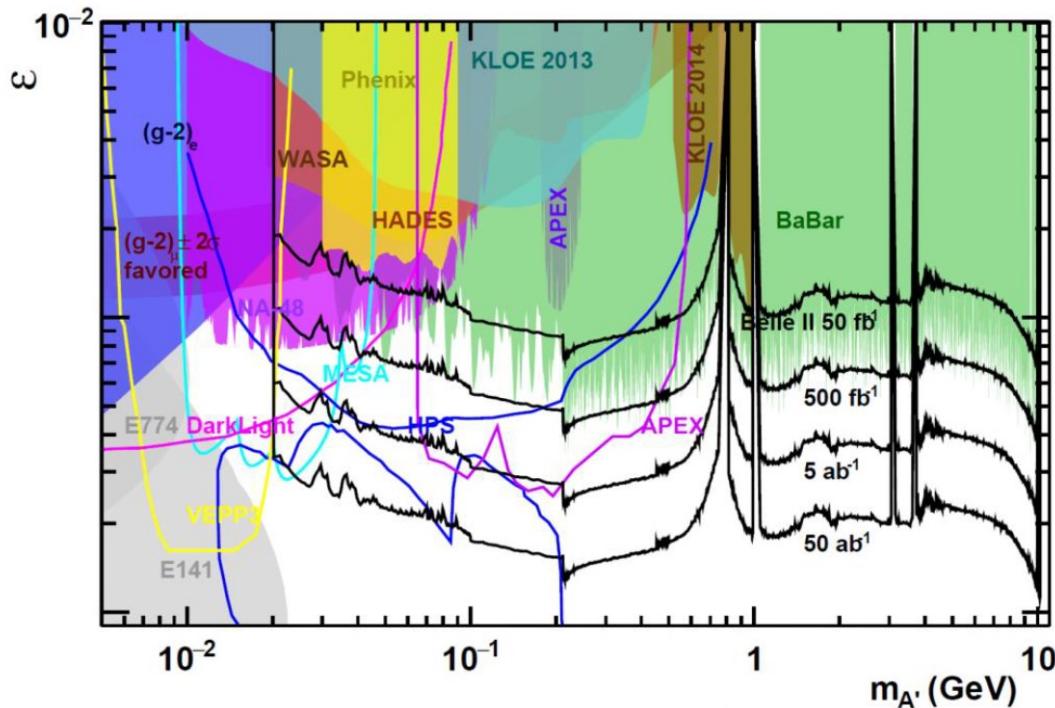


Уявіть, що ми маємо ліміт  $\varepsilon < 0$  на деяке  $m_{A'}$ .  
Закриємо очі на нефізичність.

- Чи маємо бути раді, що обмеження таке строго?
- Чи означає це, що для  $m_{A'}$  все скінчилось?
- Чи дійсно SM ( $\varepsilon = 0$ ) буде виключена в тому регіоні?
- Чи маємо ми довіряти такому результату?

# Помилкові виключення

Poissonian event counting: frequentist



Уявіть, що ми маємо ліміт  $\varepsilon < 0$  на деяке  $m_{A'}$ .  
Закриємо очі на нефізичність.

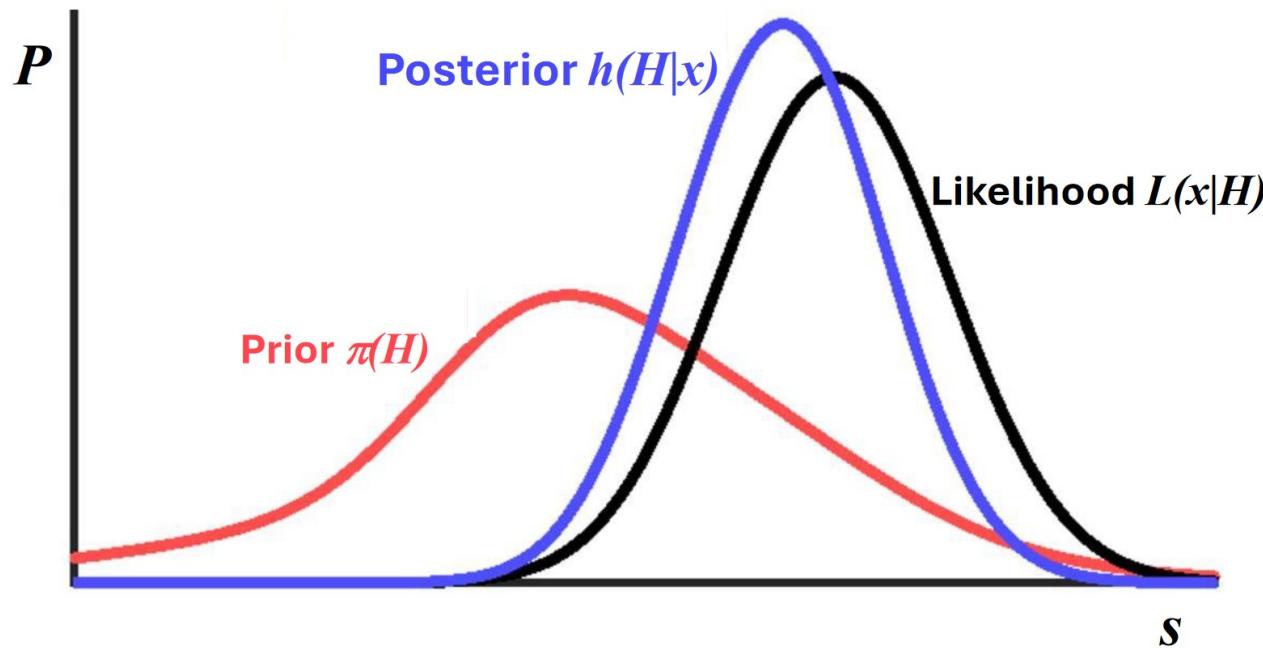
- Чи маємо бути раді, що обмеження таке строго?
- Чи означає це, що для  $m_{A'}$  все скінчилось?
- Чи дійсно SM ( $\varepsilon = 0$ ) буде виключена в тому регіоні?
- Чи маємо ми довіряти такому результату?

На всі ці запитання відповідь звичайно **Ні**.  
Це реальна проблема і ми спробуємо її вирішити.

# Баєсівські ліміти

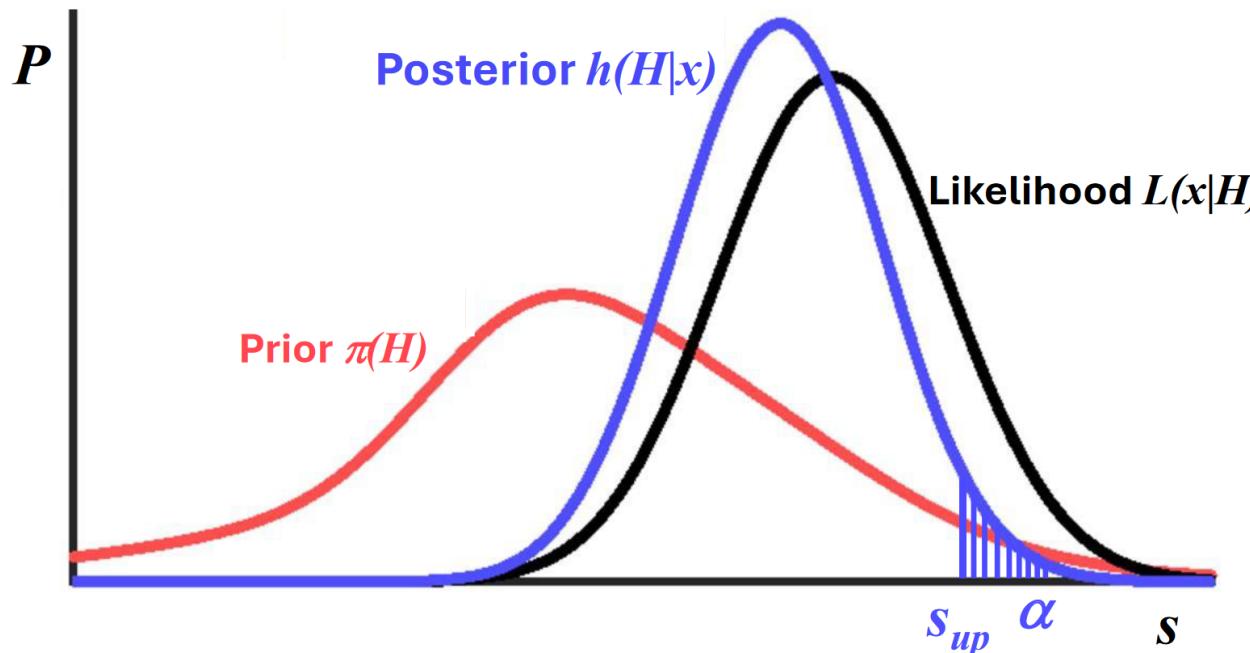
$$h(H|x) = \frac{L(x|H)\pi(H)}{\int L(x|H)\pi(H)dH} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hypothesis (model) } H=H(s) \\ \text{Prior model probability } \pi(H) \longrightarrow \\ \text{Likelihood } L(x|H) \end{array} \right.$$

Posterior probability  $h(H|x)$



# Бассівські ліміти

$$h(H|x) = \frac{L(x|H)\pi(H)}{\int L(x|H)\pi(H)dH} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hypothesis (model)} H=H(s) \\ \text{Prior model probability } \pi(H) \longrightarrow \text{Posterior probability } h(H|x) \\ \text{Likelihood } L(x|H) \end{array} \right.$$



Upper limit on  $s$  by integrating over models, with fixed data, such that the posterior probability of the excluded theories is  $CL=1-\alpha$

# Встановлення лімітів на практиці: приклад

Poissonian event counting: Bayesian

- $b$  відомо без похибки (на зараз)

$$h(s|N_{obs}) = \frac{\frac{(s+b)^{N_{obs}} e^{-(s+b)}}{N_{obs}!} \pi(s)}{\int_0^\infty \frac{(s'+b)^{N_{obs}} e^{-(s'+b)}}{N_{obs}!} \pi(s') ds'} \longrightarrow \text{Posterior probability with Poisson likelihood}$$

- Ліміт на  $s$  знаходиться шляхом інтегрування з зафікованим значенням  $N_{obs}$ , таким що posterior probability виключених теорій:  $CL=1-\alpha$

$$1 - \alpha = \frac{\int_0^{s_{up}} h(s') ds'}{\int_0^\infty h(s') ds'}$$

І розв'язується для  $s_{up}$

# Встановлення лімітів на практиці: приклад

Poissonian event counting: Bayesian

- Потрібно означити prior  $\pi(s)$  для сигналу

$$\pi(s) = \begin{cases} 1 & s \geq 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases} \quad \text{flat prior}$$

$$h(H|x) = \frac{L(x|H)\pi(H)}{\int L(x|H)\pi(H)dH}$$

Posterior  $\propto$  likelihood  $\rightarrow$  posterior peak coincides with maximum likelihood estimators.

- Not normalized ('improper prior'), but the Poissonian likelihood penalizes high  $s$  because of  $N_{obs}$ .
- Reasonable, **since it reflects our degree of belief** in the signal (non-negative), expresses ignorance about the rest, and is widely used as a reference for counting experiments.
- Criticized, because **it does not represent a degree of belief** and the probability of having  $s$  in any finite interval approaches zero.

# Встановлення лімітів на практиці: приклад

Poissonian event counting: Bayesian

Flat prior  $\pi(s) \longrightarrow \alpha = e^{-s_{up}} \frac{\sum_{m=0}^{N_{obs}} \frac{(s^{up}+b)^m}{m!}}{\sum_{m=0}^{N_{obs}} \frac{b^m}{m!}}$

Окремий сценарій,  $b = 0, N_{obs} = 0$

$$N_{obs} = 0 \rightarrow s_{up} = -\ln \alpha \approx 3$$

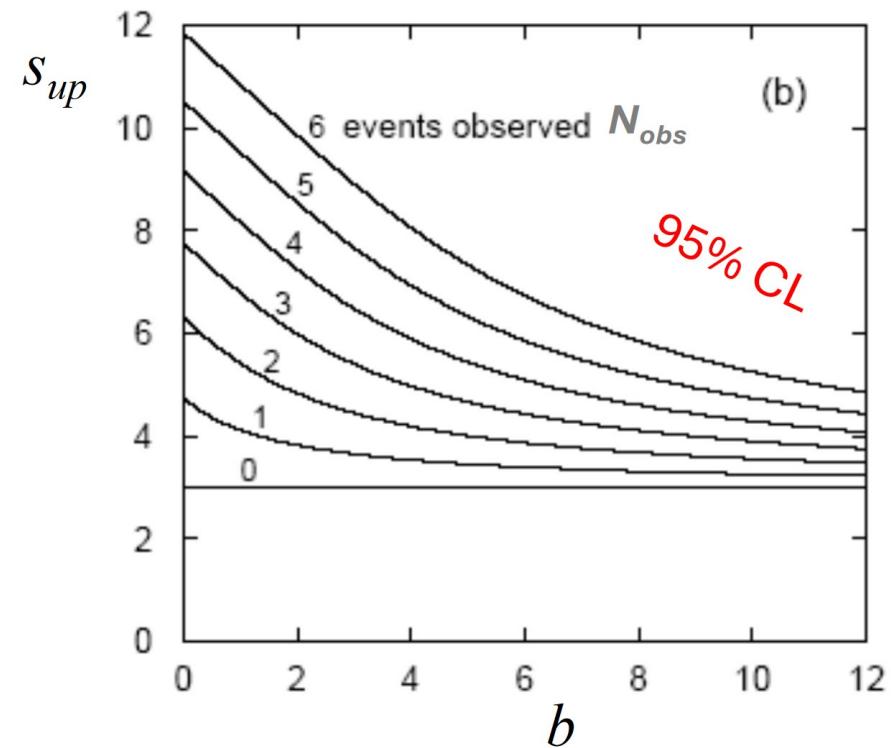
Не залежить від  $b$

$$\sigma_{up} = \frac{s_{up}}{\epsilon \times L_{int}}$$

$$b \propto L_{int}$$

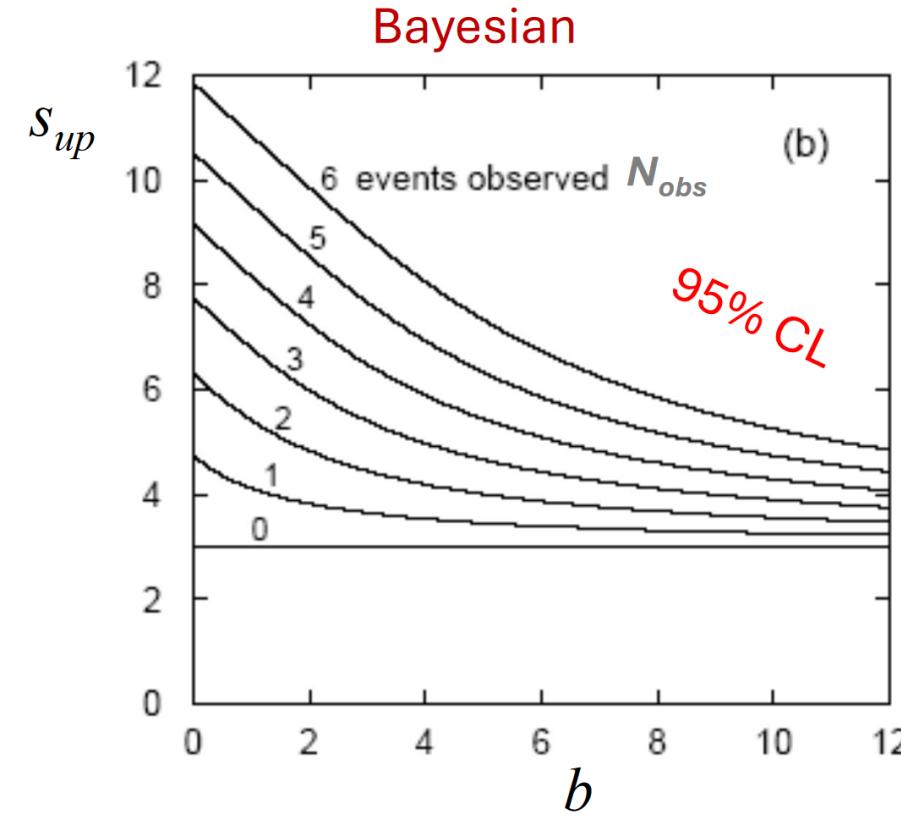
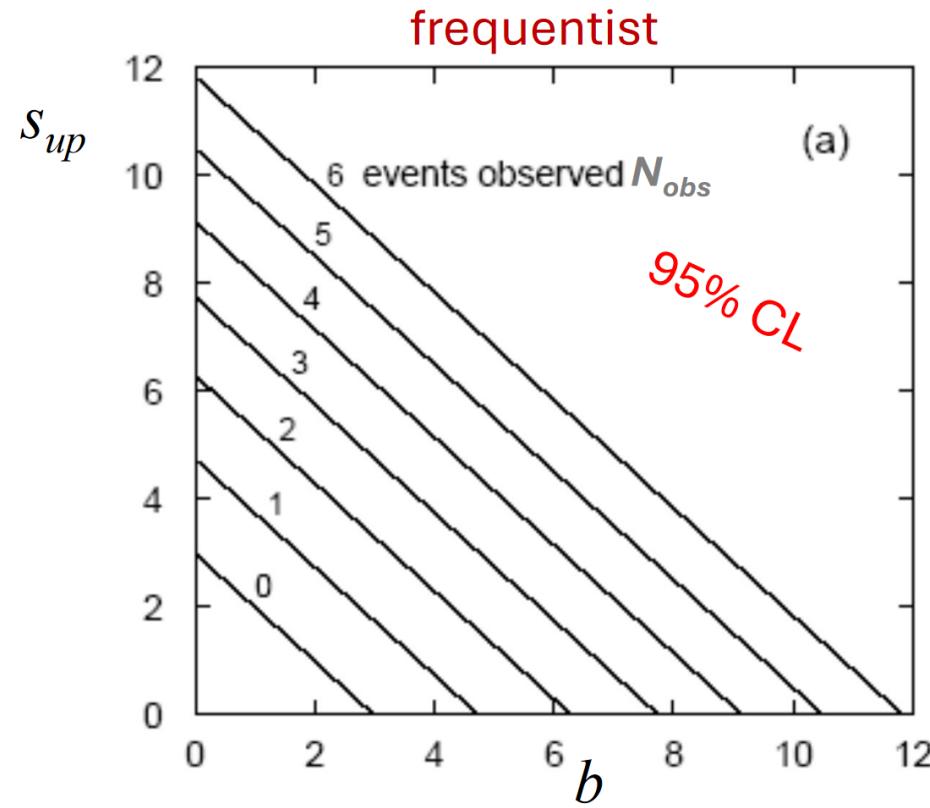
$N_{obs} = 0 \rightarrow$  Ліміти на переріз зростають лінійно зі світимістю

В більш загальному випадку,  
для  $b \neq 0, N_{obs} \neq 0$



# Встановлення лімітів на практиці: приклад

## Frequentist vs Bayesian



Баєсівські ліміти зазвичай більші (консервативні?) і ніколи не стають негативними.

# Bayesian priors

- Залежність від prior – одна з найбільших вразливостей Баєсівської конструкції.
- Часто використовується flat prior  $\pi(s)$ . Але flat в чому?
  - Flat in  $s \rightarrow$  flat in cross section  $\rightarrow$  not flat in coupling.
  - In general, not flat for functions of the parameter.
- Not the only possible choice. A log-flat prior would express our belief (wherever it comes from) that the probability of a non-zero signal extends uniformly over orders of magnitude:  $\pi(s) \propto 1/s$
- On the other hand, dependence of final results upon the assumed prior is often negligible or small (remember: limits are not precision measurements!)
  - This dependence have to be always checked: **sensitivity analysis**.

# More on Bayesian priors

- Attempts to subtract some degree of subjectivity by deriving the prior probabilities from formal rules: to satisfy certain invariance principles or to provide maximum information gain.
  - Often called ‘objective priors’ (not to be taken too literally), as opposed to ‘subjective priors’.
- They don’t fully express a degree of belief: useful in comparing results obtained with subjective priors, producing intervals whose (even frequentist) properties can be studied.

Jeffreys’ priors

$$\pi(\boldsymbol{\theta}) \propto \sqrt{\det(\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}))} \quad I_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = -E \left[ \frac{\partial^2 \ln L(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] = - \int \frac{\partial^2 \ln L(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} L(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x} \quad \text{Fisher information matrix}$$

- This is shown to lead to invariance under transformation of parameters. For Poisson( $\theta$ )  $\propto \frac{1}{\sqrt{\theta}}$

В нашему випадку  $\rightarrow \pi(s) \propto \frac{1}{\sqrt{s+b}}$

# Bayesian limits з нефіксованим фоном

- Концептуально (але не обов'язково обчислювально) тривіальне розширення на випадок нефіксованого  $b$ : введення невизначеностей, як статистичних, так і систематичних для фону.
- Ми додаєм prior  $\pi_b(b)$  для фону. Наприклад, розподіл Гаусса, щоб параметризувати систематичні похибки «розміру»  $\sigma_b$  на фоні  $b$ , взятої з Монте Карло симуляцій.

$$\pi_b(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} e^{\frac{-(b'-b)^2}{2\sigma_b^2}}$$

... and then we marginalize

$$h(s|N_{obs}) = \frac{\int_0^\infty \frac{(s+b)^{N_{obs}} e^{-(s+b)}}{N_{obs}!} \pi(s) \pi_b(b') db'}{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(s'+b)^{N_{obs}} e^{-(s'+b)}}{N_{obs}!} \pi(s') ds' \pi_b(b') db'}$$

As for the signal,  $b \geq 0$ . Not guaranteed by a Gaussian, unless  $\sigma_b$  is small compared to  $b$ . Otherwise, one is forced to truncate and renormalize. Does this still represent true uncertainty?

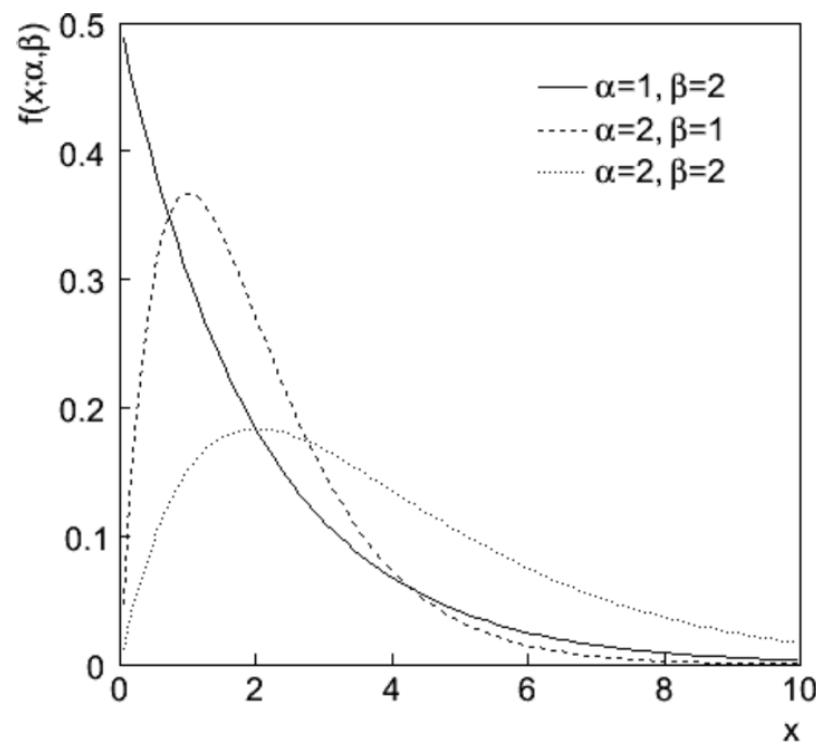
# More on Bayesian priors for background

- Є альтернатива.
- Оцінка фону робиться за допомогою control sample.
- Ми шукаємо сигнал у розподілі Пуассона ( $s + b$ ) і оцінюємо його фон у розподілі Пуассона ( $kb$ ) з (відомим) коефіцієнтом  $k$ .
- Posterior  $\pi(b)$  після того, як ми подивились на  $e\mu$  події

$$\pi(b) = \frac{kb^{N_{obs}^{e\mu}} e^{-kb}}{N_{obs}^{e\mu}!} \pi_0(b)$$

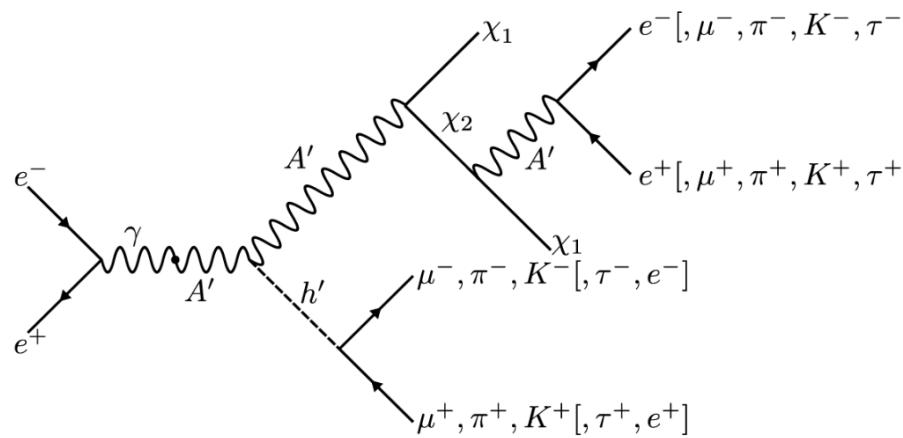
- Якщо «оригінальний» prior  $\pi_0(b)$  is assumed flat, тоді  $\pi(b)$ , which is the background prior for the  $\mu^+ \mu^-$  search, має розподіл Гамма функції, з кращими властивостями, ніж розподіл Гауса.

Example (simplified!): we search for a resonance that decays in  $\mu^+ \mu^-$ , we estimate the background looking at  $e^+ \mu + e^- \mu^+$  with  $k$  taking into account the different PID and combinatorial.



# Priors for the background: a Belle II example

- Inelastic dark matter + dark Higgs  $h'$



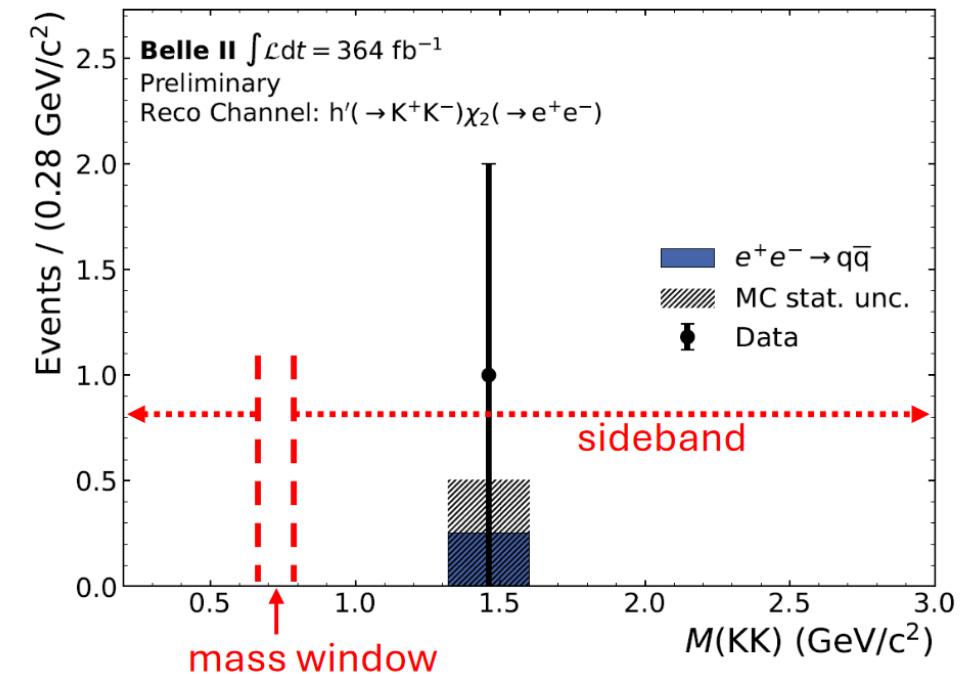
Expected background  $\sim 0$ .

Measured directly in data through sidebands.

Mass windows of width 1-5 MeV. Sideband is the full mass spectrum excluding the mass window.

Ratio of sideband width to mass window width  $f \sim 1000$ .

Search for a peak  $h' \rightarrow \mu^+ \mu^-, \pi^+ \pi^-, K^+ K^-$



# Priors for the background: a Belle II example

- Inelastic dark matter + dark Higgs  $h'$

Assume uniform background

Expected background in sideband  $b_{SB} \rightarrow$  nuisance parameter

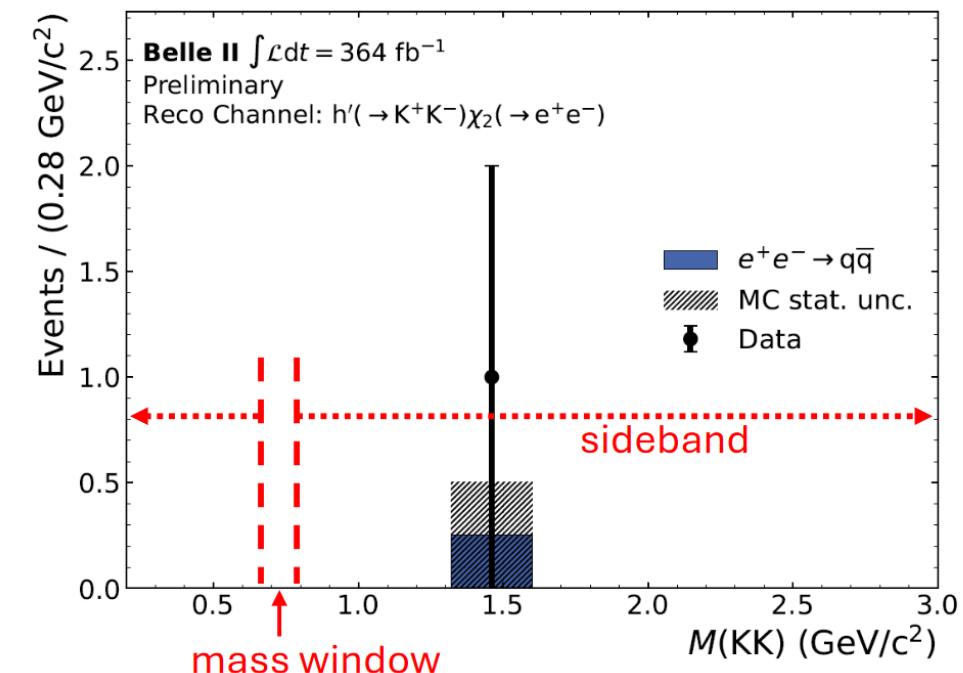
Expected background in mass window  $b_{SB}/f$

Count events  $N_{obs}$  and  $N_{obs}^{SB}$  in mass window and sideband

$$L(s, b_{SB}) = \frac{(s + b_{SB}/f)^{N_{obs}} e^{-(s+b_{SB}/f)}}{N_{obs}!} \times \frac{b_{SB}^{N_{obs}^{SB}} e^{-b_{SB}}}{N_{obs}^{SB}!}$$

$$L(s) = \int_0^\infty db_{SB} L(s, b_{SB})$$

Search for a peak  $h' \rightarrow \mu^+ \mu^- , \pi^+ \pi^- , K^+ K^-$



Even with 0 observed events in the sideband (in Monte Carlo too!) and in the signal window, this is perfectly manageable and accounts for all statistical fluctuations through the two Poissonians.

# Priors for the background: a Belle II example

- Inelastic dark matter + dark Higgs  $h'$

Assume uniform background, but add a systematic uncertainty  $\Delta$  to keep into account possible departures from uniformity.

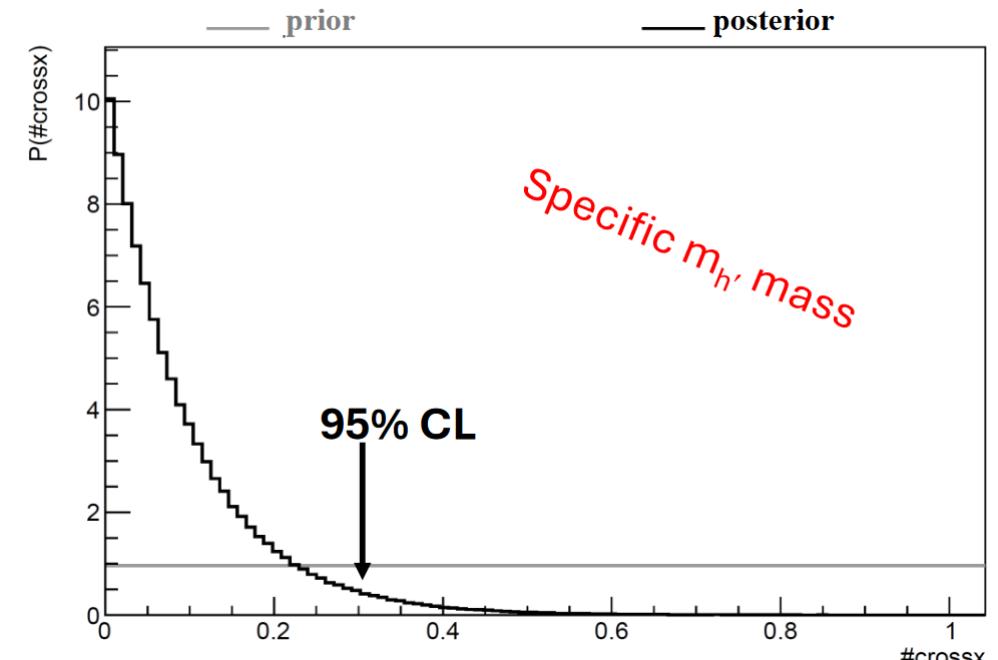
$$b_{SB}/f \rightarrow b_{SB}(1 + \Delta)/f \quad \pi(\Delta) \text{ Gaussian with width } \sigma_\Delta$$

Include in the model and marginalize



$$L(s, b_{SB}, \Delta) = \frac{(s + b_{SB}(1 + \Delta)/f)^{N_{obs}} e^{-(s + b_{SB}(1 + \Delta)/f)}}{N_{obs}!} \times \frac{b_{SB}^{N_{obs}^{SB}} e^{-b_{SB}}}{N_{obs}^{SB}!} \times g(\Delta, \sigma_\Delta)$$

$$L(s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \int_0^{\infty} db_{SB} L(s, b_{SB}, \Delta)$$



Simple, isn't it? ☺

# Bayesian limits: summary

- Дуже добре підходить для лічильних експериментів
- Чіткий фреймворк для включення нецікавих параметрів (і таким же чином, систематичних похибок).
  - Marginalize, marginalize, marginalize, ...
- Основна проблема: суб'єктивність у виборі prior
  - Використання flat prior
  - Порівняти результат з використанням іншого prior: log-flat, Jeffreys, ...
- Моделі (лайкліхуди) можуть ставати дуже складними
  - Дуже рідко (напів)аналітично розв'язуються
  - Потрібен інструмент для numerical multidimensional integrations, більшість базується на Monte Carlo Markov Chains aka MCMC: BAT (Bayesian Analysis Toolkit), BPULE (Bayesian Poissonian Upper Limit Estimator)
  - І потім ще весь світ ruhf..
- Покриття треба перевіряти (зазвичай toy MC)

# Помилкові виключення

- Ліміт  $s_{up} < 0$  при фізичному ліміті  $s \geq 0$ .
- Проблема полягає в недостатній інформації для розділення  $b$  та  $s + b$  гіпотез (слабкі сигнали, фон пропорційний сигналу, недостатньо дискримінуючих змінних через фізику або експериментальну роздільну здатність).
- В таких випадках ми б хотіли не виключати наявність сигналу.
- Щоб помітити проблему, ми можемо порівнювати «observed» ліміт з «expected» лімітом, побудованому з  $b$  і всіх можливих значень  $N$ . Якщо вони постійно відрізняються з  $s_{exp} \gg s_{obs}$ , проблема, дуже імовірно, є.
- На щастя, у нас є (принаймні) одне рішення:  
**modified frequentist CLs method**

# Modified frequentist CLs method

... or, following authors' words, 'frequentist-motivated' CLs method

«Excluding zero signal tends to say more about the probability of observing a similar or stronger exclusion in future experiments with the same expected signal and background than about the non-existence of the signal itself» (A. Read)

- Нас набагато більше цікавлять твердження про існування/неіснування сигналу, ніж отримання результатів, чутливих до коливань фону над (гіпотетичним) сигналом.
- Ідея у тому, щоб нормалізувати confidence level  $CL_{s+b}$  до confidence level  $CL_b$ , observed for the background-only hypothesis.

$$CL_s = \frac{CL_{s+b}}{CL_b} = \frac{p_{s+b}}{1 - p_b}$$

- І відкинути гіпотезу якщо  $CL_s < \alpha$

# Modified frequentist CLs method

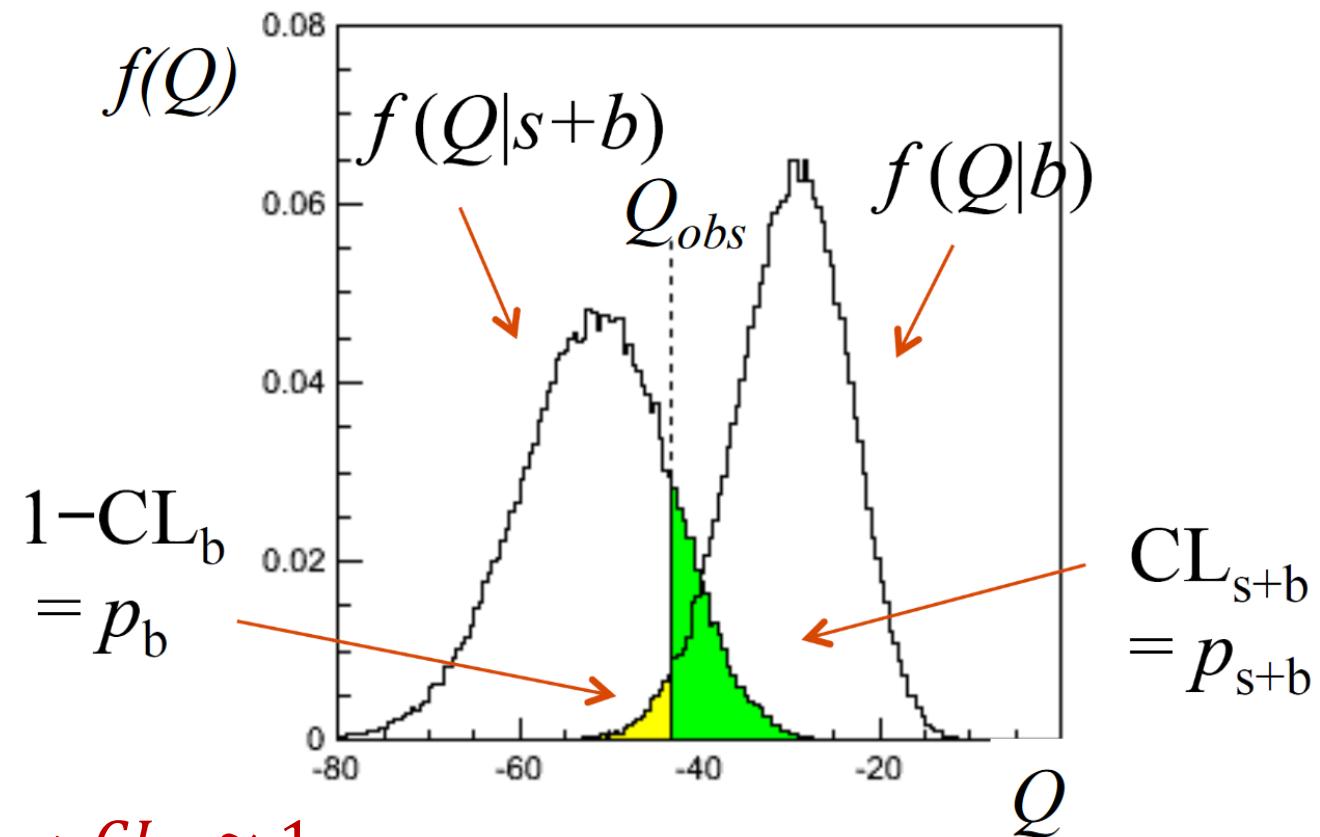
Formulated by A.Read et al  $\approx < 2000$ , at the time of the Higgs search at LEP

- $CL_{s+b}$  та  $CL_b$  це чисто фреквентистські імовірності, але не її відношення (тому “modified”).

- Базуючись на розподілах:

$$Q(s+b) = -2 \log L(s+b)$$

$$Q(b) = -2 \log L(b)$$



Дуже розділені розподіли  $\rightarrow 1-CL_b$  мале  $\rightarrow CL_b \approx 1$   
 $CL_s \sim CL_{s+b}$  звичайне p-value для  $s + b$  гіпотези

# Modified frequentist CLs method

Formulated by A.Read et al  $\approx < 2000$ , at the time of the Higgs search at LEP

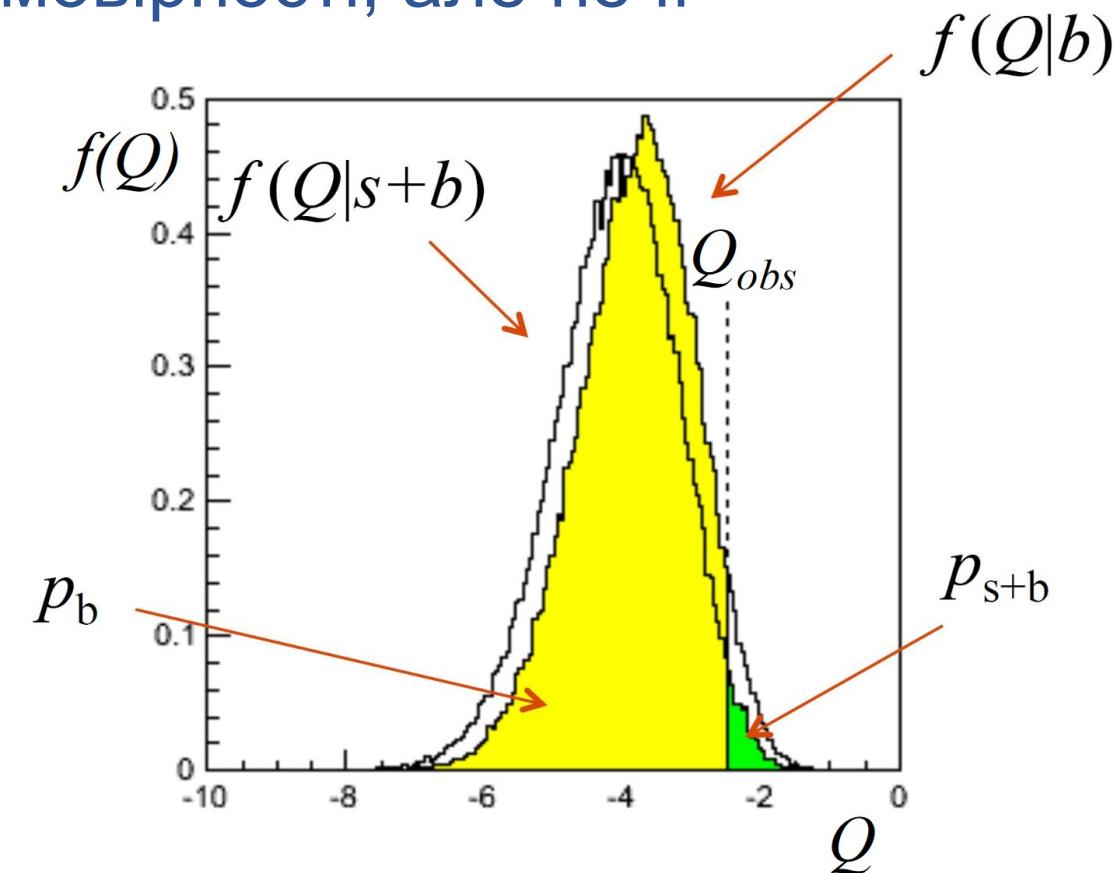
- $CL_{s+b}$  та  $CL_b$  це чисто фреквентистські імовірності, але не її відношення (тому “modified”).
- Базуючись на розподілах:

$$Q(s+b) = -2 \log L(s+b)$$

$$Q(b) = -2 \log L(b)$$

Близькі розподіли  $\rightarrow 1-CL_b$  велике  $\rightarrow CL_b$  мале

Відсікає малі  $CL_s$ , не відбувається виключення якщо чуттєвість до сигналу мала.



The price to pay is that results are more conservative

# Modified frequentist CLs method

Formulated by A.Read et al ≈ < 2000, at the time of the Higgs search at LEP

- Однією з початкових мотивацій для CLs було знаходження узагальнення фреквентистських верхніх меж для лічильних експериментів, які б відповідали Байєсовському результату з flat prior.
- Не дивно, що для фіксованого  $b$  ми отримуємо результат, ідентичний байєсовському випадку (адже ми вже сказали, що Байєсівські ліміти більш консервативні)
- Це заспокоює в обох напрямках  
Frequentist CLs → Bayesian  
Bayesian (flat prior) → frequentist
- Зокрема, у низькостатистичному (складному) випадку

$$1 - CL = e^{-s_{up}} \frac{\sum_{m=0}^{N_{obs}} \frac{(s_{up}+b)^m}{m!}}{\sum_{m=0}^{N_{obs}} \frac{b^m}{m!}}$$

Що з покриттям?

- Будучи модіфікованим фреквентистським методом, CLs не гарантує покриття.
- Насправді, відомо, що він призводить до over-coverage.
- Отримані ліміти все одно публікують з номінальним значенням CL.

# Modified frequentist CLs method

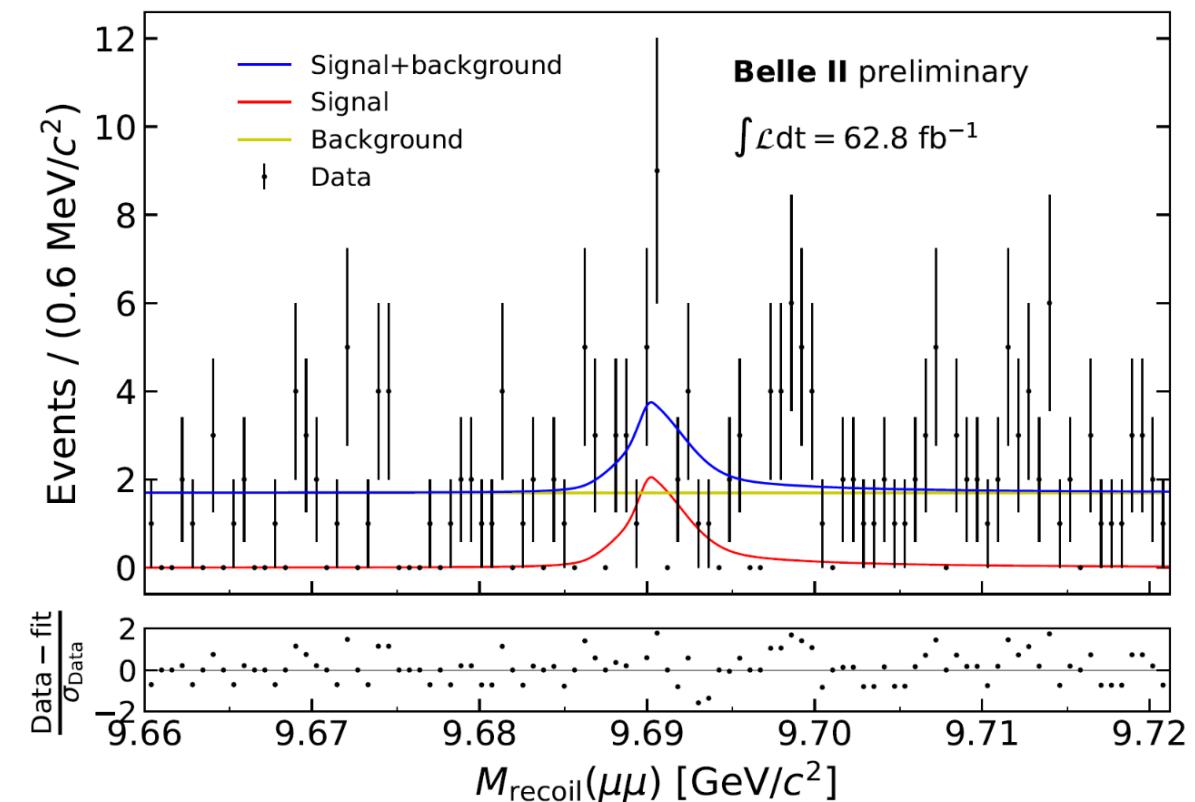
- Базуючись на розподілах:

$$Q(s+b) = -2 \log L(s+b)$$

$$Q(b) = -2 \log L(b)$$

- Можна миттєво зробити генералізацію за межі лічильного експерименту

- **Background fitted directly in data assuming smoothness**
- **Signal searched as an excess over background through fitting**

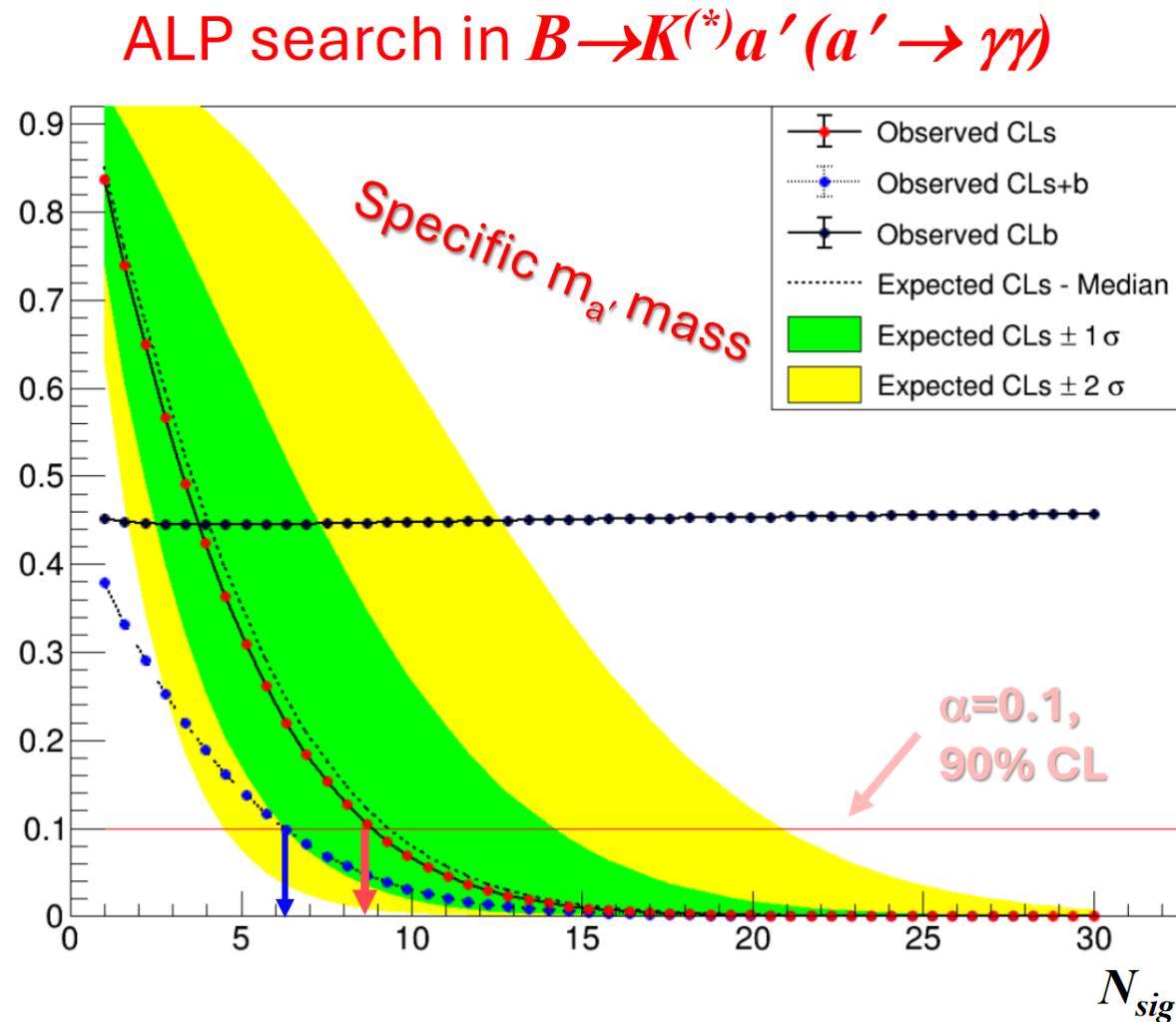


Пошук  $Z' \rightarrow \tau\tau$

Типові maximum-likelihood fits

# Modified frequentist CLs method

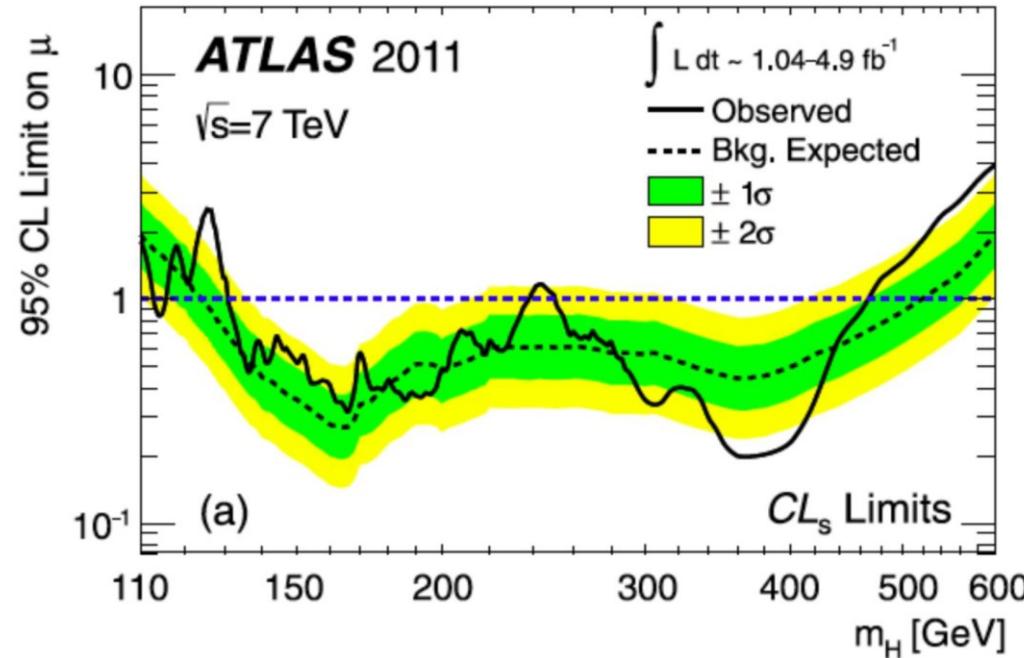
Як читати CLs ліміт: недавній приклад з Belle



На додачу до observed результатів, показані також медіана і  $\pm 1\sigma$  і  $\pm 2\sigma$  значення, очікувані для гіпотези лише з фоном.

# Modified frequentist CLs method

Мабуть найбільш відомий exclusion plot.



- For each  $m_H$  find the CLs upper limit on  $\mu$
- Add median and  $\pm 1\sigma$  (green) and  $\pm 2\sigma$  (yellow) bands for  $\mu = 0$  hypothesis

# Nuisance parameters: frequentist case

- На відміну від Байєсівського випадку, де обробка нецікавих параметрів дуже чітко визначена  
(маргіналізація лише з обчислювальними задачами, якщо такі є)
- У фреквентистському випадку не існує загального та кристально чіткого підходу для цього.

## Нецікаві параметри $\leftrightarrow$ систематика

- В ідеалі хотілося б додати ефект нецікавих параметрів до моделі правдоподібності та продовжити. Але модель стає складнішою і більш габаритною.
- Два основних підходи:
  - Hybrid frequentist – Bayesian
  - Likelihood profile

# Nuisance parameters: frequentist case

Hybrid frequentist – Bayesian approach (Cousins – Highlands)

- Спростити правдоподібність, інтегруючи (всі, чи частину) ненецікаві параметри  $\theta$ , і піти фреквентистським шляхом.

$$L_{hybrid}(s, b) = \int L(s, b, \theta) \pi(\theta) d\theta$$

- Очевидна проблема в тому, що такий маргіналізований лайкліхуд більше не «справжній» лайкліхуд в фреквентистському значенні, бо  $\theta$  будуть не змінені при повторенні експерименту.
- В будь якому випадку, чисельні обчислення з toy MC показують, що таких підходів дуже схожі результати.
- Такі перевірки завжди треба робити для валідації методів.
- Наприклад, p-value для  $b$ -only гіпотези має бути рівномірно розподілено.

# Nuisance parameters: frequentist case

## Likelihood profile

- Замінити правдоподібність «профільованою» правдоподібністю, використовуючи значення нецікавих параметрів, що максимізують  $L(s, \theta)$  для кожного  $s$ , і потім використовувати цю профільовану правдоподібність замість оригінальної.
- Зменшує розмірність проблеми. Знову, це не справжня правдоподібність, але працює як хороша апроксимація в багатьох випадках.
- Відношення профільованого лайкліхуда до лайкліхуда в його максимумі, зі значеннями, отриманими в maximum-likelihood fit.

$$\lambda(s) = \frac{L(s, \hat{\theta}(s))}{L(\hat{s}, \hat{\theta})}$$

← Fix  $s$ , fit  $\theta$   
 ← Fit both  $s$  and  $\theta$

- І тоді досліджується розподіл  $Q = -2 \ln \lambda(s)$

# Nuisance parameters: frequentist case

## Likelihood profile

- Розрахунок p-value для  $s + b$  та  $b$  гіпотез потребує складне інтегрування. Два підходи доступні:
  - Для досить великих масивів даних, розподіл  $f(Q)$  асимптотично відомий через теорему Вілка, і не залежить від нецікавих параметрів: Можна зразу інтегрувати.
    - Розподіли вже досить відрізняються від  $\chi^2$
    - Можна глянути [тут](#) для деталей (параметризація як функція сили сигналу  $\mu$ ): використовуються більш складні  $Q$  test statistics.
  - Альтернативно,  $Q$  можуть бути оцінені через ансамблі псевдо-експериментів, так звані toy Montecarlo experiments (чи просто toys). При цьому варіюються глобальні спостережувані параметри, включаючи нецікаві параметри.
    - Асимптотичні формули не припускаються. Але, дозволяється порахувати p-value для всіх  $\theta$ .

# CLs with nuisance parameters

CLs з асимптотичними формулами



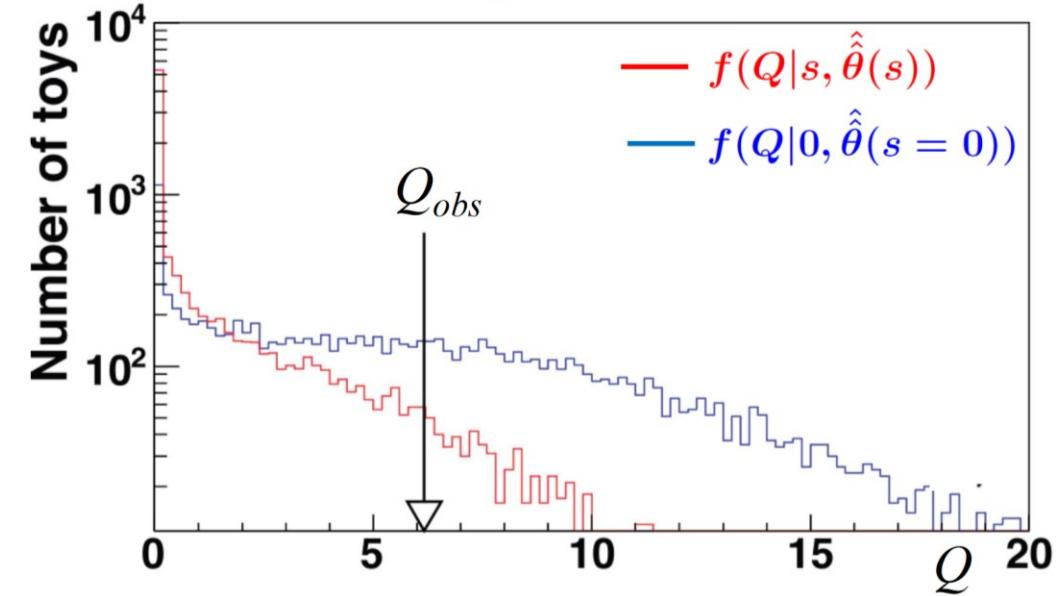
$$CL_s = \frac{CL_{s+b}}{CL_b} = \frac{p_{s+b}}{1 - p_b}$$

CLs з іграшками



$$p_{s+b} = \int_{Q_{obs}}^{\infty} f(Q|s, \hat{\theta}(s)) dQ$$

$$1 - p_b = \int_{Q_{obs}}^{\infty} f(Q|0, \hat{\theta}(s=0)) dQ$$



- Обидва варіанта імплементовані в HistFactory.
- Доступні в Roostat/RooFit та pyhf

# Встановлення лімітів: кінець

- Я сподіваюсь, що тут було достатньо інформації і вона була не дуже складною.
- Використання підходу (**frequentist/Bayesian**) залежить від аналізу/задачі.
- CLs – один з найбільш вживаних методів для встановлення лімітів.