# Теорія груп і симетрія
# Представлення груп (2)

Олександр Зенаєв

# Еквівалентні представлення групи $\mathbb{Z}_4$

- $\mathbb{Z}_4$: група поворотів на $(0, \pi/2, \pi, 3\pi/2)$, або цілих чисел $(0, 1, 2, 3)$ з операцією додавання за модулем 4, що складається з 4 елементів $R_0 \equiv e, R_1, R_2, R_3$ з таблицею множення:

| | $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $R_0$ | $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ |
| $R_1$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_0$ |
| $R_2$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_0$ | $R_1$ |
| $R_3$ | $R_3$ | $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ |

- Наступні еквівалентні представлення групи $\mathbb{Z}_4$ пов'язані матрицею $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

| $g$ | $D(g)$ | $D'(g) = S^{-1} D(g) S$ | $\chi(g)$ |
|---|---|---|---|
| $R_0$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | 2 |
| $R_1$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ | 0 |
| $R_2$ | $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ | -2 |
| $R_3$ | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ | 0 |

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Якщо $S$ це матриця повороту $\begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$, або масштабування $c \times \mathbb{I}$, то $R_i$ залишаються такими самими (бо повороти комутують з поворотами та зміною масштабу)