Теорія груп і симетрія
Представлення груп (продовження). Алгебри Лі. Групи Лі.

Олександр Зенаєв

Еквівалентні представлення групи $\mathbb{Z}_4$

- $\mathbb{Z}_4$: група поворотів на $(0, \pi/2, \pi, 3\pi/2)$, або цілих чисел $(0, 1, 2, 3)$ з операцією додавання за модулем 4, що складається з 4 елементів $R_0 \equiv e, R_1, R_2, R_3$ з таблицею множення:

	R_0	R_1	R_2	R_3
R_0	R_0	R_1	R_2	R_3
R_1	R_1	R_2	R_3	R_0
R_2	R_2	R_3	R_0	R_1
R_3	R_3	R_0	R_1	R_2

- Наступні еквівалентні представлення D, D', D'' групи $\mathbb{Z}_4$ пов'язані матрицями $S_1 \equiv P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ та $S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

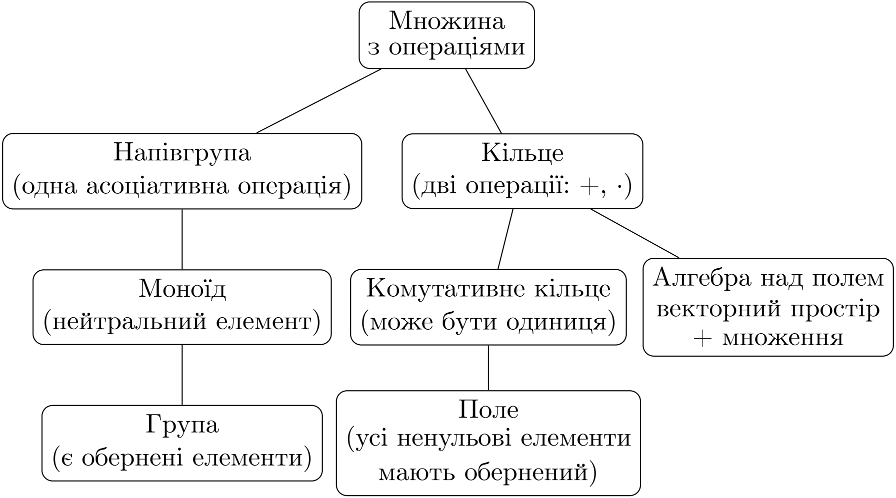
g	$D(g)$	$D'(g) = S_1^{-1} D(g) S_1$	$D''(g) = S_2^{-1} D(g) S_2$	$\chi(g)$
R_0	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2
R_1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$	0
R_2	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	-2
R_3	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$	0

$$S_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Якщо S це матриця повороту $\begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$, або масштабування $c \times \mathbb{I}$, то R_i залишаються такими самими (бо повороти комутують з поворотами та зміною масштабу)

Основні алгебраїчні структури (одна операція) [wikipedia]

Основні алгебраїчні структури (одна чи дві операції) [wikipedia]



Алгебра: означення і терміни ([3] 6.1)

- Алгебра над полем F — це векторний простір A з визначеною операцією множення

$$A \times A \to A$$

  - В лінійному просторі вже є операції додавання і множення на число (α)
  - Множення і додавання векторів підкоряються закону дистрибутивності:

$$x \cdot (\alpha y + \beta z) = x \cdot \alpha y + x \cdot \beta z, \quad \forall x, y, z \in A$$

  - Простір може бути дійсним або комплексним
- Властивості множення можуть відрізнятися:
  - комутативна чи некомутативна: $x \cdot y = y \cdot x$ або ні
  - асоціативна чи неасоціативна: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ або ні
  - з одиницею (e) чи без: $x \cdot e = e \cdot x = x, \quad \forall x \in A$
- Базис: довільний вектор можна подати як лінійну комбінацію елементів базису.
- Розмірність алгебри = розмірність векторного простору.
- Підалгебра: підпростір B алгебри A, який сам є алгеброю відносно заданої операції множення (добуток елементів із B належить B)
- Лівий (правий) ідеал: така підалгебра B алгебри A, що ab (ba) лежить в B для всіх $b \in B, a \in A$
  - одночасно лівий і правий ідеал є двостороннім ідеалом (або просто ідеалом)

Лі алгебра: визначення ([1] 2.4)

- Лі алгебра g — це векторний простір з операцією дужки Лі $[\,,\,] : g \times g \to g$.
- Це "спеціальне" множення із такими властивостями:
  - $[X, X] = 0$ (альтернативність)
  - $[X, Y] = -[Y, X]$ (антикомутативність)
  - $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (білінійність)
  - $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (тотожність Якобі)
- Абелева Лі алгебра: $[X, Y] = 0$ для всіх X, Y.
- Розмірність алгебри $\dim g$ дорівнює розмірності векторного простору
- Приклади Лі алгебр (операція дужки: звичайний комутатор матриць):
  - $gl(N, \mathbb{R})$: усі $N \times N$ дійсні матриці
  - $sl(N, \mathbb{R})$: $N \times N$ матриці з $\mathrm{tr} M = 0$
  - $so(N)$: дійсні антисиметричні матриці
  - $u(N)$: ермітові комплексні матриці
  - $su(N)$: ермітові комплексні матриці з нульовим трейсом

Генератори та структурні константи

- Вибираємо базис $\{T^a\}$ у Лі алгебрі g, $a = 1, \ldots, \dim g$
  - T^a: генератори алгебри Лі
- Комутатор в базисі:
$$[T^a, T^b] = i \sum_c f^{abc} T^c$$
- Фактор i зручно вводити для ермітовості генераторів у фізичних застосуваннях (або вводять фактор $i\hbar$ із $\hbar = 1$)
- f^{abc} — структурні константи алгебри, повністю антисиметричні:
$$f^{abc} = -f^{bac} = -f^{acb} = \ldots$$
- Прикладиі:
  - $su(2)$: $T^a = \frac{1}{2}\sigma^a$, $f^{abc} = \epsilon^{abc}$ (матриці Паулі)
  - $su(3)$: $T^a = \frac{1}{2}\lambda^a$, f^{abc} задаються через матриці Ґелл-Манна

Приєднане представлення (adjoint representation) та додаткові поняття

- Приєднане представлення задається як дія генераторів Лі-алгебри на саму алгебру через комутатор:

$$\mathrm{adjoint}_{T^a}(T^b) = [T^a, T^b].$$

- Матриці приєднаного представлення:

$$(F^a)_{bc} = -if^{abc}, \quad a = 1, \ldots, \dim(g),\ b, c = 1, \ldots, \dim(g).$$

- Розмірність приєднаного представлення = кількість генераторів = $\dim(g)$.
- Додаткові визначення:
  - Ізоморфні Лі алгебри: дві алгебри g_1 і g_2 ізоморфні, якщо існує взаємно однозначне лінійне відображення $\phi : g_1 \to g_2$, що зберігає комутатор: $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$.
  - Пряма сума алгебр: $g = g_1 \oplus g_2$ означає, що кожен елемент g можна записати як $X_1 + X_2$, $X_i \in g_i$, і комутатор між елементами різних компонентів дорівнює нулю.
  - Проста алгебра: $g \neq 0$, g не має ненульових ідеалів.
  - Напівпроста алгебра: g — пряма сума простих алгебр.

Лі групи: визначення ([1] 2.5)

- Лі група G — група, яка є одночасно гладким (аналітичним) многовидом:
  - елементи $g \in G$ залежать від параметрів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
  - групове множення та взяття оберненого елемента — гладкі (аналітичні) функції від параметрів
- Властивості:
  - Гладке відображення параметрів при множенні: якщо $g(\alpha), g(\beta) \in G$, то

$$g(\alpha)g(\beta) = g(\gamma(\alpha, \beta)), \quad \gamma(\alpha, \beta) \text{ гладка функція}$$

  - Гладке відображення для оберненого елемента:

$$g(\alpha)^{-1} = g(\gamma(\alpha)), \quad \gamma(\alpha) \text{ гладка функція}$$

- Приклади:
  - $O(N)$ — ортогональна група
  - $SO(N)$ — спеціальна ортогональна група (детермінант $= 1$)
  - $U(N)$ — унітарна група
  - $SU(N)$ — спеціальна унітарна група (детермінант $= 1$)

Зв'язок (і різниця) між Лі алгеброю і Лі групою

- Кожній Лі групі G відповідає Лі алгебра g
- Генератори T^a групи утворюють базис алгебри
- Елементи групи поблизу одиниці:

$$g(\alpha) = \exp\left(i\alpha_a T^a\right)$$

- Структурні константи f^{abc} не залежать від вибраного представлення
- Лі група G і Лі алгебра g пов'язані з неперервними симетріями
  - Лі група це многовид з груповою структурою та операцією множення; елементами є точки многовиду
  - Лі алгебра це векторний простір з комутатором $[X, Y]$; елементами є тангенційні вектори в одиничному елементі групи
    - ⋆ Лі алгебра описує локальну структуру Лі групи
- Глобальна vs локальна: Лі група описує повні симетрії; Лі алгебра — локальні "кроки" трансформації
  - експонента – груповий елемент, показник експоненти – локальний крок