Теорія груп і симетрія
Основні поняття теорії груп

Олександр Зенаєв

Література

- Основна:
  1 Akash Jain. “Notes on symmetries in particle physics”. arXiv:2109.12087
  2 Кутовий, С.Ю. “Теорія груп в застосуванні до спектроскопії багатоатомних молекул”. Київський національний університет, 2012 р. - 146 с. посилання
  - Голод П. І., Клімик А. У. “Математичні основи теорії симетрій”. К. : Наукова думка, 1992. - 368 с.
- Додаткова:
  - Hamermesh M. “Group Theory and Its Application to Physical Problems”. New York: Dover Publications, 1989. – 509 p.
  - Landau L.D., Lifshitz E.M. “Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory”. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1981. – 689 p. (Course of Theoretical Physics, Vol. 3; 3rd edition).
  - Weinberg S. “The Quantum Theory of Fields. Vol. 1: Foundations”. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – 609 p.

Означення групи та основні властивості [2]

- Групою є сукупність елементів $g_1, g_2, \ldots$, для яких задано операцію множення, що задовольняє умовам:
    - $g_1 g_2 = g_3$ також належить групі
    - $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$ (асоціативність)
    - існує одиничний елемент e: $e g_1 = g_1$, $g_1 e = g_1$
    - для кожного g_1 існує обернений елемент: $g_1 g_1^{-1} = e$
- В загальному випадку $g_1 g_2 \neq g_2 g_1$. Якщо $g_1 g_2 = g_2 g_1$ для будь-яких двох елементів, група є комутативною (або абелевою), в іншому випадку група є некомутативною (неабелевою).
- Група задається таблицею множення:

	g_1	g_2	$\ldots$
g_1	$g_{\ldots}$	$g_{\ldots}$	$\ldots$
g_2	$g_{\ldots}$	$g_{\ldots}$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

- Групи можуть бути скінченими або нескінченими. Для скінчених груп порядком групи є кількість елементів.
    - Числа $1, -1$ з опреацією множення утворюють скінчену групу
    - Всі цілі числа з опреацією додавання утворюють нескінчену групу
- Розглянемо приклад діедричної групи D_4: див. [1]

Властивості груп [1,2]

- Якщо між елементами двох груп є взаємно-однозначна відповідність $g_a \leftrightarrow h_a$ і з $g_a g_b = g_c$ випливає $h_a h_b = h_c$, то такі групи називаються ізоморфними.
    - таблиці множень ізоморфних груп співпадають
    - приклад: група $1, -1$ та група обертань на кут $0, \pi$
- Якщо така відповідність існує, але не є взаємно однозначною, то такі групи називаються гомоморфними.
- Якщо серед елементів групи є сукупність, яка складає групу, то така сукупність елементів називається підгрупою.
    - Кожна група є своєю підгрупою.
    - Одиничний елемент є підгрупою.
    - Інший приклад: $1, -1$ є підгрупою $1, -1, i, -i$ (операція множення)
- Підгрупа H називається інваріантною (нормальною) підгрупою групи G, якщо для будь-яких елементів виконується $g^{-1}hg \in H$
    - Група з одиничного елемента та вся група є інваріантними підгрупами своєї групи
    - Будь-яка підгрупа абелевої групи є інваріантною

Властивості груп [1,2]

- Добуток груп G, G' задається сукупністю впорядкованих пар (g, g') таких що $(g_1 g'_1)(g_2 g'_2) = (g_1 g_2)(g'_1 g'_2)$
  - Підгрупа G є ізоморфною добутку $G \times \{e\}$
- Група G є простою, якщо її інваріантими підгрупами є лише $\{e\}$ та вся G.
- Група є напівпростою, якщо вона є добутком простих груп.
- Центром групи є сукупність елементів, що комутують з усіма елементами групи
  - центр групи утворює інваріантну підгрупу
  - центром абелевої групи є вся група