# Теорія груп і симетрія
# Представлення груп

Олександр Зенаєв

# Представлення груп

Нехай $G$ — група, $V$ — векторний простір (див. [2] розділ 2.1). Представлення (representation) групи $G$ на $V$ — це гомоморфізм груп

$$\rho : G \rightarrow GL(V),$$

який кожному елементу $g \in G$ ставить у відповідність оборотний лінійний оператор $\rho(g)$ на $V$, так що

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

- Якщо у векторному просторі обрати базис, то лінійні оператори можна ототожнити з матрицями $D$ розміром $N \times N$. Тоді це $N$-розмірне матричне представлення групи.
- Це спосіб реалізувати абстрактну групу у вигляді матриць (лінійних операторів), які діють на вектори.
- Іншими словами: представлення – це гомоморфізм однієї групи в іншу групу (лінійних операторів, або матриць)
- $D(e) = \mathbb{I}$ (одиничний елемент групи представлений одиничною матрицею)
- Група може мати різні матричні представлення
- Якщо існує такий інваріантний підпростір $W \in V$ що $\rho(g)w \in W, \forall w \in W, \forall g \in G$, то це підпредставлення $G$ на $W$
- Приклад представлення діедричної групи $D_4$: див. [1], розділ 2.1.1

- Представлення називається точним (вірним, faithful), якщо це ізоморфізм, тобто різним елементам групи відповідають різні оператори
- Представлення називається унітарним, якщо $D(g)D(g)^\dagger = \mathbb{I}$ для будь-якого $g \in G$
  - $D^\dagger = (D^T)^*$
- Представлення $D(g) = \mathbb{I}$ для всіх $g \in G$ називається тривіальним
  - таке представлення є точним лише для групи з одним елементом $e$
- Представлення $D(g)$, $D'(g)$ називаються еквівалентними, якщо існує матриця $S$ така що $S^{-1}D(g)S = D'(g)$ для будь-якого $g \in G$
  - еквівалентні представлення пов'язані зі зміною базису
- Нехай $(\rho_1, V_1)$ та $(\rho_2, V_2)$ — два представлення групи $G$. Пряма сума цих представлень визначається на просторі $V_1 \oplus V_2$ так:

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) \; = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}, \quad \forall g \in G.$$

  - тобто дія групи на $V_1 \oplus V_2$ відбувається незалежно на кожному компоненті

# Звідні і незвідні представлення

- Незвідне представлення, або іррep (irreducible representation, irrep) – не має нетривіальних підпредставлень: єдині інваріантні підпростори – весь простір або нуль
- В іншому випадку представлення називається звідним (reducible): це представлення групи в просторі, для якого існує інваріантний підпростір щодо відповідних лінійних перетворень. Таке представлення можна привести до блочної форми:

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & * \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}, \quad \forall g \in G$$

  - $\rho_1(g)$ та $\rho_2(g)$ — представлення на підпросторах $V_1$ та $V_2$
  - $*$ — деякі елементи, що можуть бути ненульовими
  - нульовий блок гарантує, що $V_1$ є підпредставленням
  - для матричного представлення існує матриця $S$ така що

$$S^{-1}D(g)S = \begin{pmatrix} D_1(g) & D_{12}(g) \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}, \quad \forall g \in G$$

- Повністю звідне представлення (completely reducible / semisimple) – можна розкласти на пряму суму незвідних представлень
- Кожне незвідне представлення автоматично є повністю звідним
  - його неможливо розкласти на менші підпредставлення, тому розклад містить лише одну іррепу – саму себе
  - іншими словами: іррep – це атомарне представлення, яке вже є прямою сумою одного компоненту

- Характер представлення групи: для представлення $\rho : G \to GL(V)$

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g)), \quad g \in G.$$

- Незалежний від вибору базису.
- Два незвідних представлення мають різні характери.
- Використовується для побудови та аналізу таблиць характерів.
- Приклад для групи $\mathbb{Z}_N$ (додавання цілих чисел за модулем):
  - Для групи $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ всі незвідні представлення є одновимірними.
  - $m$-те представлення діє як

$$\rho_m(k) = e^{2\pi imk/N}, \quad m = 0, 1, \ldots, N-1.$$

  - Характер збігається з самим представленням:

$$\chi_m(k) = \mathrm{Tr}(\rho_m(k)) = e^{2\pi imk/N}.$$

  - Таблиця характерів $\mathbb{Z}_N$ складається з $N$ різних рядків для $m = 0, \ldots, N-1$.
  - Наприклад, для $\mathbb{Z}_4$ таблиця характерів:

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\chi_0$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_1$ | 1 | $i$ | $-1$ | $-i$ |
| $\chi_2$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| $\chi_3$ | 1 | $-i$ | $-1$ | $i$ |

- Для елемента $g \in G$ його клас спряженості визначається як (див. [1] розділ 1.5)

$$Cl(g) = \{\, h^{-1}gh \;\mid\; h \in G \,\}.$$

- Характер представлення групи є класовою функцією: $\chi_\rho(h^{-1}gh) = \chi_\rho(g)$. Для представлення $\rho : G \to GL(V)$ маємо

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g)).$$

  Тоді для будь-яких $g, h \in G$:

$$\chi_\rho(h^{-1}gh) = \mathrm{Tr}\big(\rho(h^{-1}gh)\big) = \mathrm{Tr}\big(\rho(h^{-1})\rho(g)\rho(h)\big).$$

  Використовуючи інваріантність сліду при циклічних перестановках:

$$\mathrm{Tr}\big(\rho(h^{-1})\rho(g)\rho(h)\big) = \mathrm{Tr}\big(\rho(g)\big) = \chi_\rho(g).$$

- Оскільки характер представлення групи залежить лише від класу спряженості елемента, таблиці характерів складаються по класах спряженості, а не по окремих елементах.