Теорія груп і симетрія
Представлення груп (2)

Олександр Зенаєв

Еквівалентні представлення групи $\mathbb{Z}_4$

- $\mathbb{Z}_4$: група поворотів на $(0, \pi/2, \pi, 3\pi/2)$, або цілих чисел $(0, 1, 2, 3)$ з операцією додавання за модулем 4, що складається з 4 елементів $R_0 \equiv e, R_1, R_2, R_3$ з таблицею множення:

	R_0	R_1	R_2	R_3
R_0	R_0	R_1	R_2	R_3
R_1	R_1	R_2	R_3	R_0
R_2	R_2	R_3	R_0	R_1
R_3	R_3	R_0	R_1	R_2

- Наступні еквівалентні представлення D, D', D'' групи $\mathbb{Z}_4$ пов'язані матрицями $S_1 \equiv P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ та $S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

g	$D(g)$	$D'(g) = S_1^{-1} D(g) S_1$	$D''(g) = S_2^{-1} D(g) S_2$	$\chi(g)$
R_0	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2
R_1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$	0
R_2	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	-2
R_3	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$	0

$$S_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Якщо S це матриця повороту $\begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$, або масштабування $c \times \mathbb{I}$, то R_i залишаються такими самими (бо повороти комутують з поворотами та зміною масштабу)