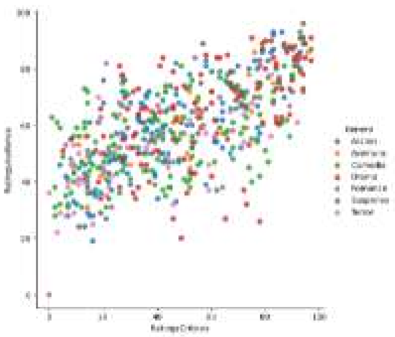
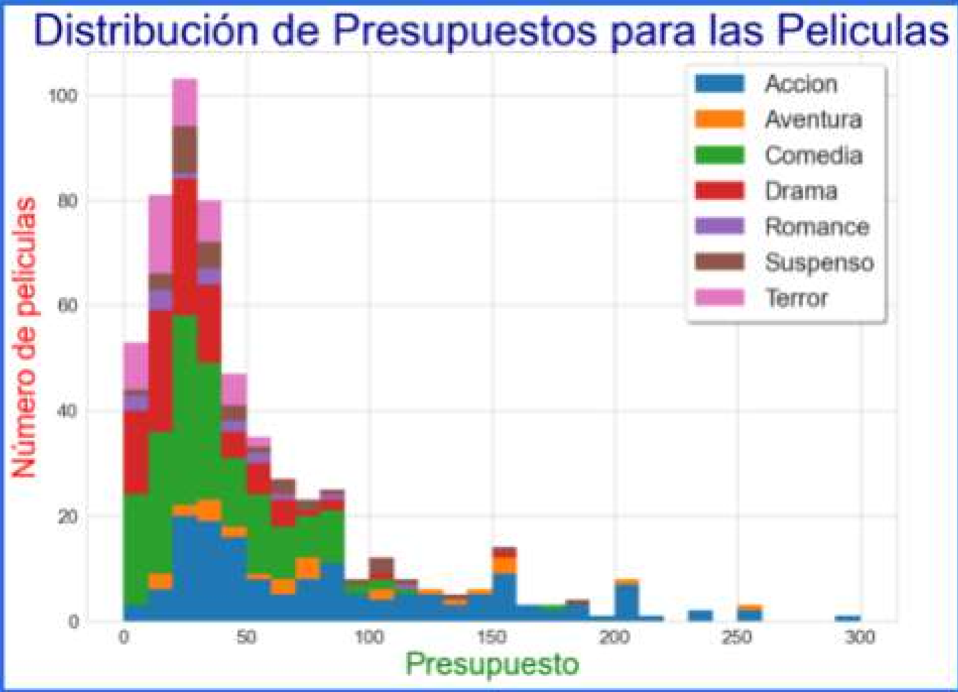
Informe

Álgebra, Geometría, Espacios Vectoriales y Sistemas de Ecuaciones en Ciencia de Datos

Índice





Introducción

La ciencia de datos se basa en principios matemáticos para extraer conocimiento de datos complejos. El álgebra lineal, la geometría, espacios vectoriales y los Sistemas de Ecuaciones juegan un papel crucial en esta área.

El álgebra lineal proporciona herramientas para trabajar con vectores, matrices y sistemas de ecuaciones lineales, esenciales para análisis de datos, aprendizaje automático y modelado.

La geometría nos ayuda a visualizar y comprender las relaciones entre datos multidimensionales, mientras que los espacios vectoriales proporcionan un marco para trabajar con datos como conjuntos de vectores.

Álgebra y Geometría

Vectores

Vectores Definición:

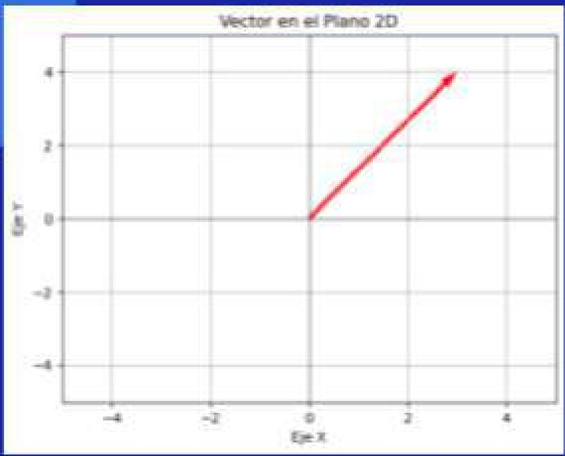
Un vector es una entidad que tiene magnitud y dirección.
Puede representarse en un espacio de dimensiones n, por ejemplo, en $R2$ o $R3$

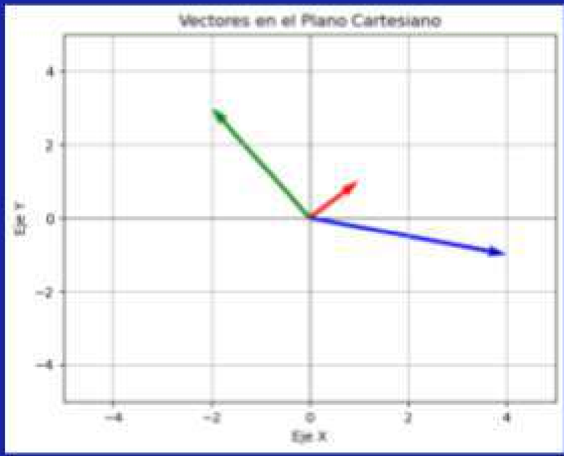
Operaciones Básicas:

Suma de Vectores:	$u + v$ = ($u1 + v1$,$u2$+$v2$, ...)
Producto Escalar:	$u{\cdot}v$ = $u1v1$ + $u2v2$ + ...
Producto Vectorial:	$u{\times}v$ (solo en $R3$)

Ejemplo:
Vectores a = (1, 2) y b = (3, 4)
Suma: a+b = (4, 6)
Producto Escalar: $a{\cdot}b$ = 1·3+ 2·4 = 3+8 = 11

Vectores





1. Vectores

- **Definición y Estructura**: Un vector $\vec{v}$ en R^n se define como:

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

  donde v_i son las **coordenadas** o componentes del vector.

- **Operaciones**:
  - **Suma de Vectores**: Dados dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, su suma es:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

  - **Multiplicación por un Escalar**: Si c es un escalar, el producto de c con $\vec{v}$ es:

$$c\vec{v} = (cv_1, cv_2, \ldots, cv_n)$$

- **Norma y Producto Escalar**:
  - **Norma** de un vector $\vec{v}$ es su magnitud, dada por:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

  - **Producto Escalar** entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

  Este valor mide la relación en dirección y magnitud entre los vectores.

Matrices

Matrices Definición:

Una matriz es una disposición rectangular de números en filas y columnas.

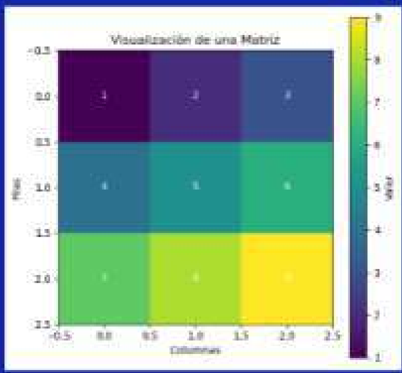
Operaciones Básicas:

- **Suma de Matrices**: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$
- **Multiplicación de Matrices**: $(AB)_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk}$
- **Transposición**: A^T
- **Determinante**: Un valor que puede calcularse a partir de una matriz cuadrada y que proporciona información sobre la matriz.

Ejemplo:

- Matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$
- Suma: $A + B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$
- Multiplicación: $AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$

Matrices



2. Matrices

- **Definición y Estructura**: Una matriz A en $\mathbb{R}^{n \times m}$ se expresa como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

  donde cada a_{ij} representa una entrada de la matriz en la fila i y columna j.

- **Operaciones**:
  - **Suma de Matrices**: Si A y B son matrices de igual dimensión, su suma es:

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

  - **Multiplicación por un Escalar**: Si c es un escalar, entonces:

$$(cA)_{ij} = c \cdot a_{ij}$$

  - **Multiplicación de Matrices**: Si A es una matriz $n \times m$ y B es una matriz $m \times p$, el producto AB es una matriz $n \times p$ definida como:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

Matrices

Puntos en R^2

- **Dimensión**: El espacio R^2 es bidimensional.
- **Coordenadas**: Un punto en R^2 se representa con dos coordenadas: (x,y).
- **Visualización**: Se puede visualizar fácilmente en un plano cartesiano con un eje x (horizontal) y un eje y (vertical).

Por ejemplo, el punto (2,3) en R^2 está 2 unidades a la derecha del origen y 3 unidades arriba del origen.

Puntos en R^3

- **Dimensión**: El espacio R^3 es tridimensional.
- **Coordenadas**: Un punto en R^3 se representa con tres coordenadas: (x,y,z).
- **Visualización**: Se visualiza en un espacio tridimensional con tres ejes perpendiculares entre sí: x (horizontal), y (vertical) y z (profundidad).

Por ejemplo, el punto (2,3,5) en R^3
está 2 unidades a la derecha del origen, 3 unidades arriba del origen y 5 unidades hacia adelante (o hacia fuera) del plano xy.

Resumen de Diferencias

Aspecto	R^2	R^3
Dimensión	2D (bidimensional)	3D (tridimensional)
Coordenadas	(x,y)	(x,y,z)
Ejes	x y y	x, y y z
Visualización	Plano cartesiano	Espacio tridimensional

Suma de Matrices

La suma de matrices se realiza sumando los elementos correspondientes de cada matriz. Para poder sumar dos matrices, estas deben tener las

Si tenemos dos matrices A y B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ y \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces, la suma $C = A + B$ es:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Multiplicación de Matrices

La multiplicación de matrices implica multiplicar filas por columnas. Para multiplicar dos matrices, el número de columnas de la primera matriz

Si tenemos dos matrices A y B donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ y \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces, el producto $C = A \cdot B$ es:

$$C = \begin{pmatrix} (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}) & (a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}) \\ (a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}) & (a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}) \end{pmatrix}$$

Transposición de Matrices

La transposición de una matriz implica intercambiar sus filas por columnas. La transposición de una matriz A se denota como A^T.

Si tenemos una matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces, la traspuesta A^T es:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Vectores Colineares

Dos vectores son colineares si están en la misma línea recta o si son paralelos entre sí, lo que significa que uno es un múltiplo escalar del otro. M $\vec{a}$ y $\vec{b}$, entonces son colineares si existe un número escalar k tal que: $\vec{b} = k\vec{a}$
Esto significa que ambos vectores tienen la misma dirección, aunque pueden tener diferentes magnitudes (longitudes).

Propiedades y aplicaciones

Espacios Vectoriales

Conjuntos de vectores que pueden ser sumados y multiplicados por escalares

Ortogonalidad

Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero

Proyecciones

La proyección de un vector sobre otro es el componente del primer vector en la dirección del segundo vector

Determinantes

Utilizados en álgebra lineal para determinar invertibilidad y otras propiedades de matrices

Transformaciones Lineales

Las matrices representan transformciones lineales que pueden aplicarse a vectores para cambiar su posición

Espacios Vectoriales

Un espacio vectorial, también conocido como espacio lineal, es una estructura fundamental en el álgebra lineal y las matemáticas en general. U

Propiedades de un Espacio Vectorial

1. **Cerradura bajo la adición**: Si u y v son vectores en el espacio vectorial V, entonces $u + v$ también está en V.
2. **Cerradura bajo la multiplicación escalar**: Si u es un vector en V y c es un escalar, entonces $c \cdot u$ está en V.
3. **Asociatividad de la adición**: Para todos los vectores u, v, w en V, $(u + v) + w = u + (v + w)$.
4. **Elemento neutro de la adición**: Existe un vector 0 en V tal que $u + 0 = u$ para cualquier vector u en V.
5. **Elemento inverso aditivo**: Para cada vector u en V, existe un vector $-u$ en V tal que $u + (-u) = 0$.
6. **Conmutatividad de la adición**: Para todos los vectores u y v en V, $u + v = v + u$.
7. **Compatibilidad de la multiplicación escalar con la multiplicación de escalares**: Para todos los escalares a, b y todos los vectores u en V, $a(b \cdot u) = (ab) \cdot u$.
8. **Elemento neutro de la multiplicación escalar**: Para todo vector u en V, $1 \cdot u = u$.
9. **Distribución de la multiplicación escalar sobre la suma de vectores**: Para todos los escalares a y todos los vectores u, v en V, $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$.
10. **Distribución de la multiplicación escalar sobre la suma de escalares**: Para todos los escalares a, b y todos los vectores u en V, $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$.

Ejemplos de Espacios Vectoriales

- **Espacio Euclidiano**: El conjunto de todos los vectores de n-dimensiones, denotado R^n, donde n es un número entero positivo.
- **Polinomios**: El conjunto de todos los polinomios de grado n o menor, con coeficientes reales o complejos.
- **Matriz**: El conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$.

Aplicaciones

- **Geometría Analítica**: Para representar puntos, líneas y planos en el espacio.
- **Física**: Para describir estados y cambios en sistemas físicos.
- **Informática**: Para gráficos por computadora y procesamiento de imágenes.
- **Economía**: Para modelar sistemas económicos y resolver problemas de optimización.

Ortogonalidad

La ortogonalidad es un concepto fundamental en álgebra lineal y geometría que se refiere a la relación entre dos vectores que son perpendicu

Definición

Dos vectores u y v en un espacio vectorial son ortogonales si su producto punto (o producto escalar) es cero:

$$u \cdot v = 0$$

Propiedades

1. **Perpendicularidad**: En términos geométricos, dos vectores ortogonales forman un ángulo recto (90 grados) entre ellos.
2. **Independencia Lineal**: Si dos vectores no nulos son ortogonales, también son linealmente independientes, lo que significa que ninguno pu
3. **Bases Ortogonales**: Un conjunto de vectores ortogonales puede usarse para formar una base de un espacio vectorial. Si además los vector
4. **Proyección**: La proyección de un vector a sobre un vector b es más sencilla de calcular si los vectores son ortogonales.

Ejemplos

- En el espacio euclidiano tridimensional (R^3), los vectores $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, y $k = (0,0,1)$ son ortogonales entre sí.
- En un plano, los vectores $u = (1,2)$ y $v = (-2,1)$ son ortogonales porque su producto punto es $1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -2 + 2 = 0$.

Aplicaciones

1. **Análisis de Datos**: La ortogonalidad es clave en técnicas como el análisis de componentes principales (PCA), que se utiliza para reducir la d
2. **Grafos y Redes**: En teoría de grafos, los vectores ortogonales se utilizan para representar conexiones no relacionadas.
3. **Física y Ingeniería**: En física, los vectores ortogonales se emplean para describir fuerzas y movimientos en diferentes direcciones.

Proyecciones

En álgebra lineal, las proyecciones son operaciones que mapean un vector en un espacio vectorial a otro vector en el mismo espacio, generalm

Definición

Una proyección de un vector v sobre un subespacio W de un espacio vectorial V es otro vector p en W tal que:

1. p es lo más cercano posible a v.
2. La diferencia $v - p$ es ortogonal a W.

Proyección Ortogonal

Si W es un subespacio y $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son vectores ortogonales en W, la proyección ortogonal de v sobre W se puede calcular como:

Ejemplo Práctico

Supongamos que queremos proyectar un vector v sobre una línea definida por el vector a:

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La proyección de v sobre a es:

$$\mathrm{proj}_a(v) = \frac{v \cdot a}{a \cdot a} a$$

$$\mathrm{proj}_a(v) = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2}{1^2 + 2^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3 + 8}{1 + 4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{11}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 4.4 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones

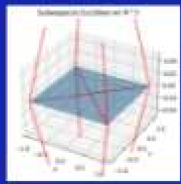
1. **Análisis de Componentes Principales (PCA)**: Utiliza proyecciones para reducir la dimensionalidad de los datos, manteniendo la mayor car
2. **Gráficos por Computadora**: Las proyecciones se utilizan para representar escenas 3D en una pantalla 2D.
3. **Optimización**: Las proyecciones ayudan a resolver problemas en los que se busca la solución óptima dentro de un subespacio factible.

La proyección de v en W se calcula sumando las proyecciones de v sobre cada uno de los vectores ortogonales w_i en W. Para cada vector w_i, calculamos el producto punto de v con w_i y lo dividimos por el producto punto de w_i consigo mismo, multiplicando el resultado por w_i.

Expresado de manera más sencilla:

$$\text{Proyección de } v \text{ en } W = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(v \cdot w_i)}{(w_i \cdot w_i)} \cdot w_i \right)$$

Determinante



1. Definición y Propósito

El determinante es una función matemática que asocia a cada matriz cuadrada un número, el cual contiene información clave sobre la matriz. E

2.Cálculo del Determinante

3. Propiedades del Determinante

Invertibilidad:

Una matriz A es invertible (tiene inversa) si y solo si $\det(A) \neq 0$. Producto de Matrices:

Para matrices A y B de igual dimensión, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. Transposición: $\det(AT) = \det(A)$.

Determinante de una matriz triangular:

Es el producto de los elementos de la diagonal.

4. Aplicaciones en Ciencia de Datos e Inteligencia Artificial Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales:

El método de Cramer utiliza determinantes para resolver sistemas de ecuacio-nes lineales,

Transformaciones Lineales:

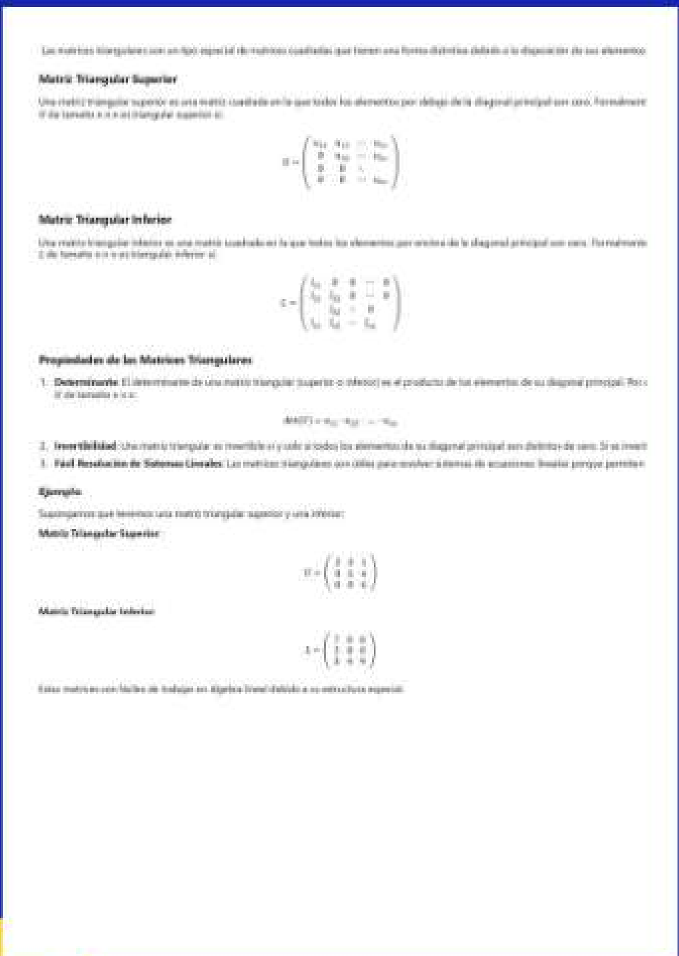
En aprendizaje automático, las transformaciones lineales se usan para cambi-ar de base o para aplicar transform

Análisis de Datos Multivariantes:

En técnicas como el análisis de componentes principales (PCA), los determin-antes se utilizan para calcula

Propiedades Geométricas:

Los determinantes permiten calcular áreas, volúmenes y cambios de variables en integrales múltiples, que son f S.



Matriz Triangular Superior

Matriz Triangular Inferior

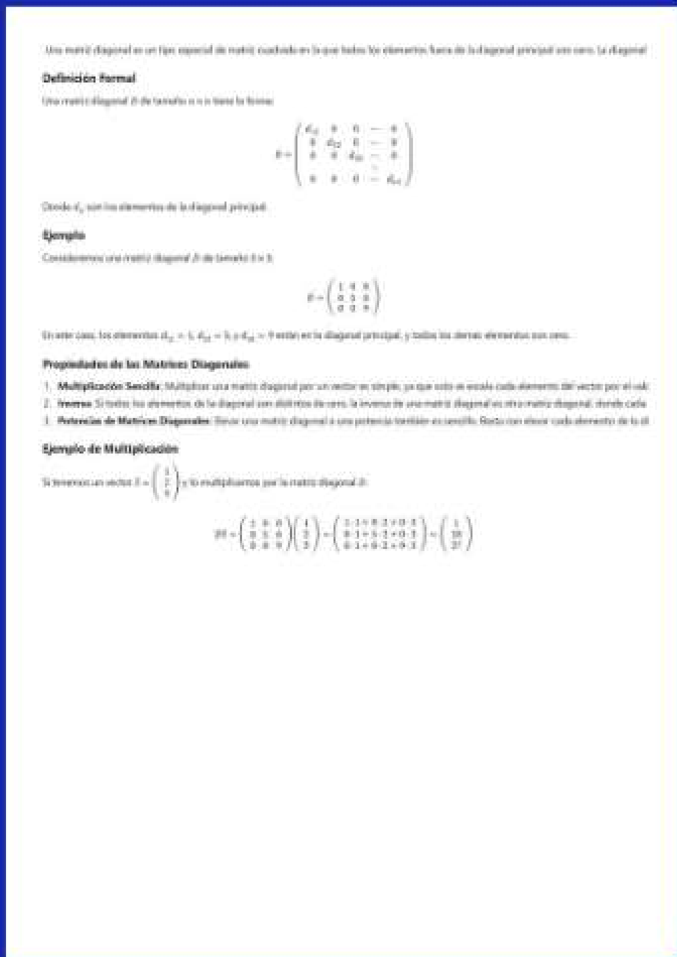
Propiedades de las Matrices Triangulares

1. **Determinante**
2. **Invertibilidad**
3. **Fácil Resolución de Sistemas Lineales**

Ejemplo

Matriz Triangular Superior

Matriz Triangular Inferior



Definición Formal

Ejemplo

Propiedades de las Matrices Diagonales

1. **Multiplicación Sencilla**
2. **Inversa**
3. **Potencias de Matrices Diagonales**

Ejemplo de Multiplicación

Transformaciones vectoriales

Las transformaciones lineales son funciones matemáticas que toman vectores de un espacio vectorial y los transforman en otros vectores en el

Definición

Una transformación T de un espacio vectorial V a un espacio vectorial W es lineal si para todos los vectores $u, v \in V$ y para cualquier escalar c, se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Aditividad**: $T(u+v) = T(u) + T(v)$
2. **Homogeneidad**: $T(c \cdot u) = c \cdot T(u)$

Representación Matricial

Las transformaciones lineales pueden representarse mediante matrices. Si T es una transformación lineal que mapea R^n a R^m, existe una matriz A de tamaño $m \times n$ tal que para cualquier vector $x \in R^n$, la transformación se puede expresar como:

$$T(x) = Ax$$

Ejemplos de Transformaciones Lineales

1. **Rotación**: Girar todos los vectores de un plano alrededor del origen.
2. **Escalamiento**: Multiplicar todos los vectores por un escalar.
3. **Reflexión**: Reflejar todos los vectores respecto a una línea o un plano.
4. **Traslación (no lineal)**: La traslación no es una transformación lineal, ya que no cumple con las propiedades de aditividad y homogeneidad.

Propiedades

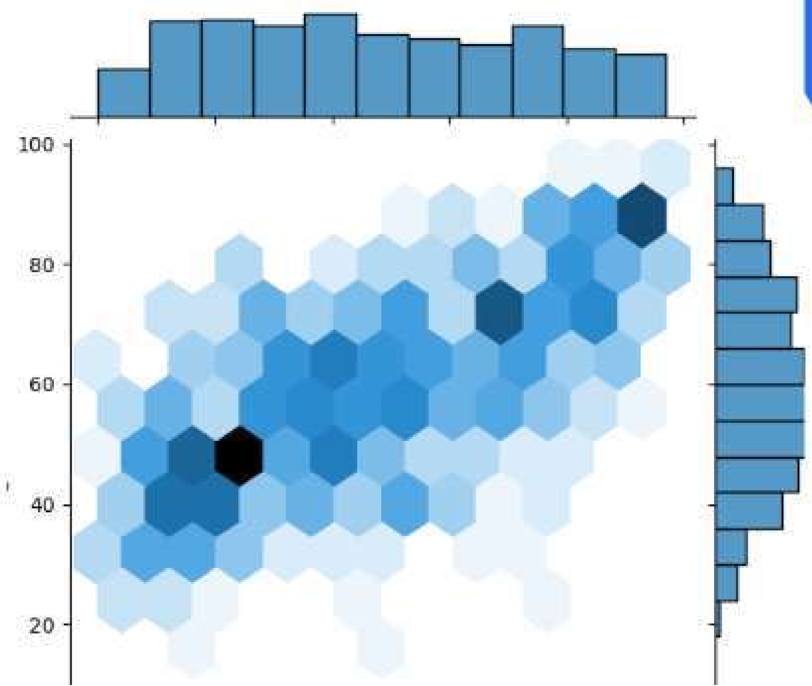
- **Composición**: La composición de dos transformaciones lineales es también una transformación lineal.
- **Inversas**: Si una transformación lineal es invertible, su inversa también es una transformación lineal.
- **Núcleo y Rango**: El núcleo (o kernel) de una transformación lineal es el conjunto de todos los vectores que se transforman en el vector cer

Aplicaciones

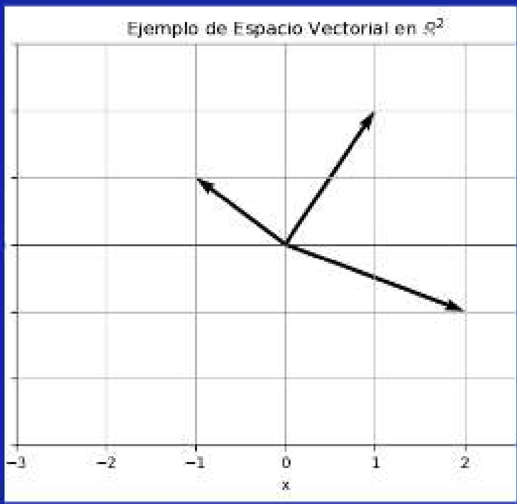
- **Gráficos por Computadora**: Para realizar operaciones como escalamiento, rotación y traslación de objetos en 3D.
- **Procesamiento de Señales**: Transformaciones lineales se utilizan en el análisis de señales y procesamiento de imágenes.
- **Análisis de Datos**: En técnicas como el Análisis de Componentes Principales (PCA) para reducir la dimensionalidad de datos.

Espacios Vectoriales

Los espacios vectoriales proporcionan una base para representar y manipular datos.



Espacios Vectoriales



1. Espacios Vectoriales

Un **espacio vectorial** (o espacio lineal) es un conjunto de elementos llamados **vectores** que pueden sumarse y multiplicarse por un escalar, cumpliendo ciertas propiedades como cierre, asociatividad, conmutatividad, y la existencia de elementos neutros e inversos.

- **Definición**: Un espacio vectorial V sobre un campo F (generalmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) es un conjunto de vectores que cumple:
  1. **Suma**: Para cualesquiera vectores $u, v \in V$, $u + v \in V$.
  2. **Multiplicación por un escalar**: Para cualquier vector $v \in V$ y escalar $a \in F$, $a \cdot v \in V$.
- **Ejemplos**: $\mathbb{R}^2$, el espacio de los polinomios de grado n, y el conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$.
- **Propiedades Clave**:
  - **Elemento neutro**: Existe un vector $0 \in V$ tal que $v + 0 = v$ para todo $v \in V$.
  - **Elemento inverso**: Para cada $v \in V$, existe un vector $-v$ tal que $v + (-v) = 0$.

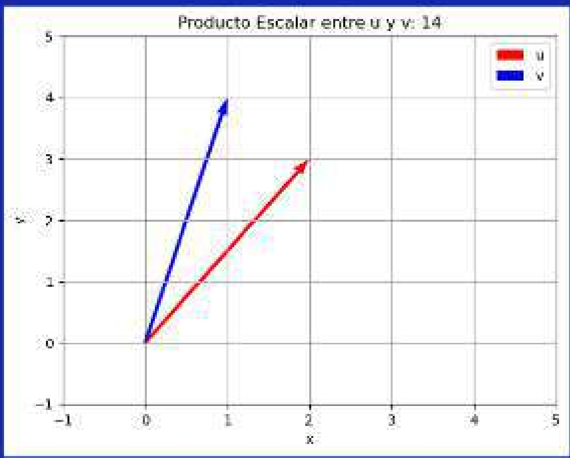
Subespacios Vectoriales

2. Subespacios Vectoriales

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto de un espacio vectorial que es, por sí mismo, un espacio vectorial bajo las mismas operaciones de suma y multiplicación por un escalar.

- **Condiciones para ser subespacio**:
  1. **Cierre bajo la suma**: Si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$.
  2. **Cierre bajo la multiplicación escalar**: Si $a \in F$ y $v \in W$, entonces $a \cdot v \in W$.
  3. **Contiene el vector cero**: $0 \in W$.
- **Ejemplo**: El conjunto de todas las soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales es un subespacio vectorial de R^n.

Producto Escalar y Espacios De Hilbert



3. Producto Escalar y Espacios de Hilbert

El **producto escalar** es una operación que toma dos vectores y devuelve un escalar, proporcionando una medida de la relación angular y la magnitud relativa entre ellos. Un **espacio de Hilbert** es un espacio vectorial completo con respecto a la norma inducida por el producto escalar.

- **Producto Escalar** en $\mathbb{R}^n$:

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

  donde $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

- **Norma Inducida**: La **norma** de un vector v se define como:

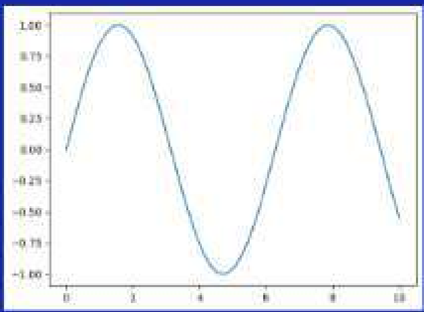
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

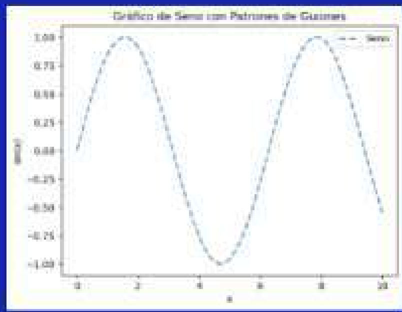
- **Distancia entre vectores**: La distancia entre dos vectores u y v en un espacio vectorial se define como:

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

- **Espacio de Hilbert**: Es un espacio vectorial con producto escalar que es completo, lo que significa que toda sucesión de Cauchy de vectores en el espacio converge a un vector en el espacio. Este concepto es fundamental en análisis funcional y en el estudio de funciones en espacios infinitamente dimensionales.

Ortogonalidad y Proyecciones





4. Ortogonalidad y Proyecciones

Dos vectores son **ortogonales** si su producto escalar es cero, lo que significa que forman un ángulo de 90 grados entre sí. La **proyección** de un vector u sobre otro vector v permite descomponer u en componentes paralelas y perpendiculares a v.

- **Condición de Ortogonalidad**: Dos vectores u y v son ortogonales si:

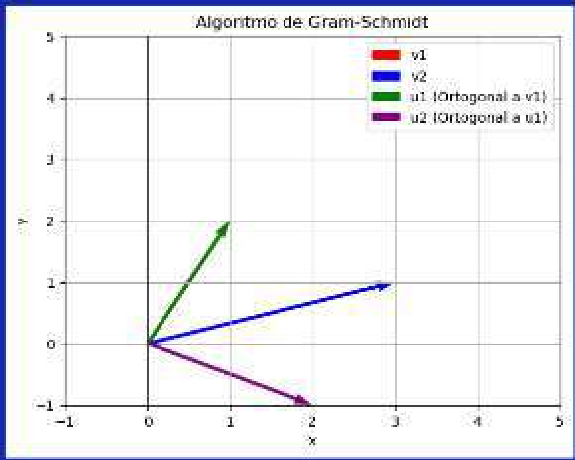
$$\langle u, v \rangle = 0$$

- **Proyección de un vector** u sobre otro vector v:

$$\text{proj}_v(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

  Esto descompone u en una parte que es múltiplo de v (la proyección) y una parte ortogonal a v.

Algoritmos de Gram - Schmidt



5. Algoritmo de Gram-Schmidt

El **algoritmo de Gram-Schmidt** transforma un conjunto de vectores linealmente independientes en un conjunto ortogonal (o ortonormal si se normalizan los vectores resultantes), manteniendo el mismo subespacio generado.

- **Algoritmo**: Dado un conjunto de vectores linealmente independientes $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, el algoritmo de Gram-Schmidt produce un conjunto ortogonal $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ mediante:

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$$

  y así sucesivamente.

- **Base Ortonormal**: Dividiendo cada vector u_i por su norma, se obtiene una base ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ tal que $\|e_i\| = 1$ y $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.

SVM

Máquinas de Soporte Vectorial (SVM)

Las SVM son un poderoso método de aprendizaje supervisado utilizado para la clasificación y la regresión. Su objetivo principal es encontrar el

Relación con el Álgebra Lineal

1. **Hiperplanos**: Un hiperplano en el álgebra lineal es una subespacio de una dimensión menos que el espacio en el que se encuentra. En el co

$$w \cdot x + b = 0$$

donde w es un vector normal al hiperplano, x es el vector de características y b es un sesgo.

2. **Vectores de Soporte**: Los vectores de soporte son los puntos de los datos que están más cercanos al hiperplano y son cruciales para la def

$$w \cdot x_i + b = \pm 1$$

3. **Maximización del Margen**: El objetivo de una SVM es maximizar el margen entre los vectores de soporte de diferentes clases. Matemática $\|w\|^2$ sujeta a las restricciones que los datos estén correctamente clasificados. Esto implica resolver un problema de optimización cuadrática.
4. **Transformaciones y Kernels**: Para datos no linealmente separables, las SVM utilizan funciones kernel para transformar los datos a un espa

Ejemplo de un Problema de SVM

Dado un conjunto de puntos en R^2 pertenecientes a dos clases, se puede encontrar un hiperplano que los separe de manera óptima mediante la resolución del problema:

$$\min \frac{1}{2}\|w\|^2$$

sujeto a:

$$y_i(w \cdot x_i + b) \geq 1, \quad \forall i$$

donde y_i es la etiqueta de clase (1 o -1) para el punto x_i.

Aplicaciones de SVM

1. **Clasificación de Imágenes**: Identificación de objetos en imágenes.
2. **Bioinformática**: Clasificación de secuencias de ADN.
3. **Detección de Fraude**: Identificación de transacciones fraudulentas.

El álgebra lineal proporciona las herramientas matemáticas fundamentales para comprender y resolver los problemas que abordan las SVM. De

SVM

Informe sobre Máquinas de Soporte Vectorial (SVM), Ciencia de Datos y Álgebra Lineal

Introducción

Descripción del Ejercicio

Metodología de Resolución y Ciencia de Datos

Interpretación de Resultados

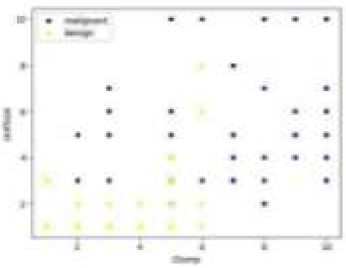
Conclusión

Ejemplo

Los datos de cáncer

Cargar datos desde un archivo CSV

El campo ID contiene los identificadores del paciente. Las características de las muestras de células de cada paciente se incluyen en los campos Clump a Mit. Los valores se clasifican de 1 a 10, siendo 1 el más cercano a benigno.



Preprocesamiento y selección de datos

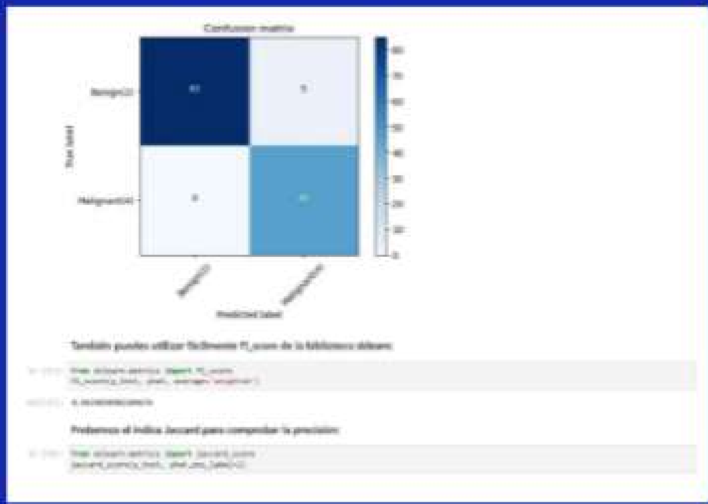
```
cell_df.dtypes
```

Parece que la columna BareNuc incluye algunos valores que no son numéricos. Podemos eliminar esas filas:

SVM

Conjunto de datos de prueba/entrenamiento
Modelado (SVM con Scikit-learn)

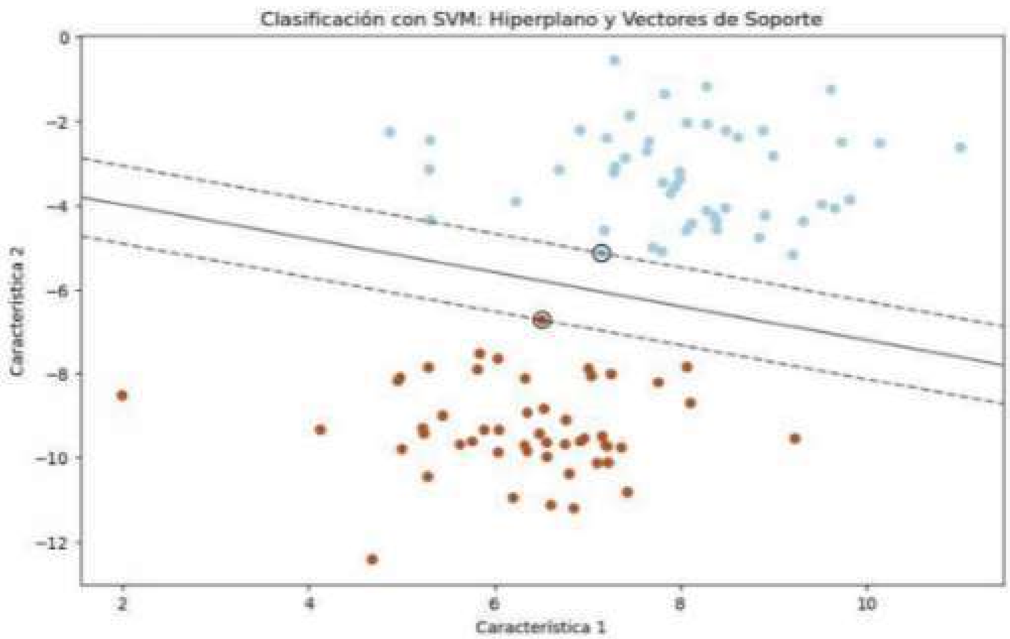
Evaluación



Confusion matrix

Otro Ejemplo

SVM



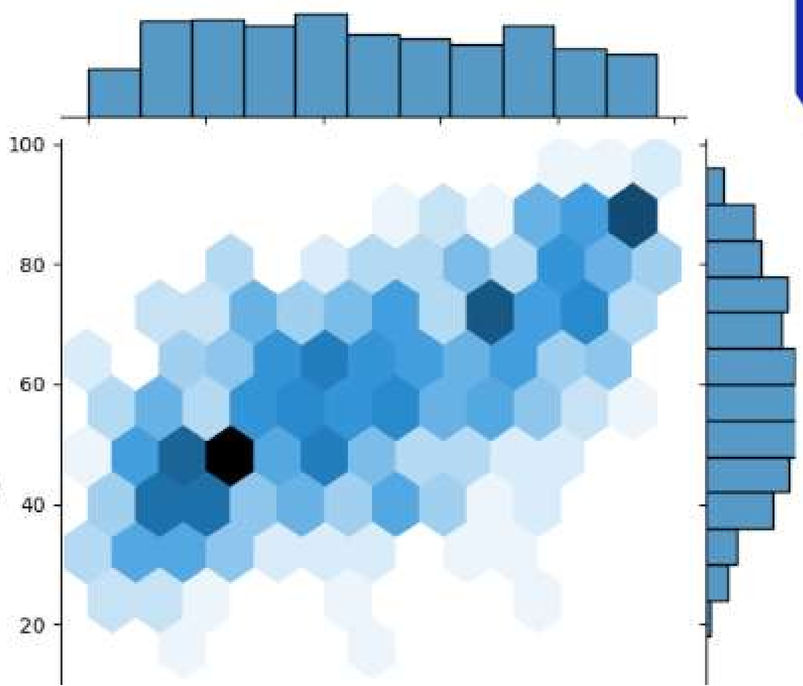
Clasificación con SVM: Hiperplano y Vectores de Soporte
Característica 1
Característica 2

Sistemas de Ecuaciones

Un espacio afín es una generalización del concepto de un espacio vectorial que permite describir de manera natural las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales. -

Los espacios afines se obtienen al trasladar un subespacio vectorial por un vector fijo.

En el contexto de sistemas de ecuaciones lineales, si el sistema es consistente, el conjunto de soluciones puede interpretarse como un espacio afín.



Sistemas de Ecuaciónes Lineales

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales que comparten las mismas variables. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Representación Matricial

Un sistema de ecuaciones lineales se puede representar en forma matricial como:

$$Ax = b$$

donde A es la matriz de coeficientes, x es el vector de variables y b es el vector de términos constantes. Para el sistema anterior, sería:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolución de Sistemas Matriciales

Los métodos comunes para resolver sistemas matriciales incluyen:

1. **Eliminación Gaussiana**: Procedimiento para transformar la matriz A en una matriz triangular superior y luego realizar sustitución hacia atrás.
2. **Descomposición LU**: Descomponer la matriz A en el producto de una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U, y luego resolver dos sistemas triangulares.
3. **Inversa de la Matriz**: Si A es invertible, se puede encontrar la solución como $x = A^{-1}b$.

Espacios Afines

Un espacio afín es similar a un espacio vectorial, pero no necesariamente incluye el origen. En un espacio afín, cualquier punto puede ser elegi

Definición

Si p_0 es un punto en el espacio afín A y v es un vector en el espacio vectorial asociado V, entonces cualquier punto p en el espacio afín puede representarse como:

$$p = p_0 + v$$

donde v es un vector de dirección.

Aplicaciones

- **Gráficos por Computadora**: Utilizado en transformaciones y modelado de objetos en 3D.
- **Geometría**: Modelado de líneas, planos y sus intersecciones.
- **Ingeniería**: Análisis de sistemas mecánicos y estructurales.

Sistemas de Ecuaciones

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un sistema de ecuaciones lineales puede representarse y resolverse gráficamente. Tomemos el siguiente sistema de ecuaciones como ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Paso 1: Representación Gráfica

Para resolver este sistema gráficamente, primero convertimos cada ecuación en la forma $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b es la intersección en el eje y.

1. **Primera ecuación:** $2x + 3y = 6$

$$3y = -2x + 6$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

2. **Segunda ecuación:** $x - y = 1$

$$y = x - 1$$

Ahora, dibujamos estas dos rectas en un plano cartesiano.

Paso 2: Intersección de Rectas

La solución al sistema de ecuaciones es el punto donde las dos rectas se intersectan. Al graficar las ecuaciones, obtenemos el siguiente resultado:

Las dos rectas se intersectan en el punto (3,2). Esto significa que la solución al sistema de ecuaciones es:

$$x = 3, \quad y = 2$$

Resolución de Sistemas Matriciales

Para resolver el sistema de manera algebraica usando matrices:

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 1: Inversión de Matrices

Si A es invertible, podemos encontrar la solución multiplicando ambos lados por A^{-1}:

$$x = A^{-1}b$$

Paso 2: Calcular la Inversa de A

La inversa de la matriz A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$$

Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -2 - 3 = -5$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$A^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Paso 3: Multiplicar por la Inversa

Multiplicamos A^{-1} por b:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6+3}{5} \\ \frac{6-2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Espacios Afines

Un espacio afín puede visualizarse como una colección de puntos desplazados desde un origen.

Ejemplo:

Considera el subespacio generado por el vector $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$p = p_0 + tu$$

Si $p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y t es un escalar:

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La línea afín a través del punto p_0 en la dirección de u se puede graficar.

Sistemas de Ecuaciones

En el contexto de **Sistemas de Ecuaciones Lineales**, una ecuación lineal se define como una ecuación que relaciona dos o más variables utiliza

Definición de una Ecuación Lineal

Una ecuación lineal en dos variables x y y tiene la forma general:

$$ax + by = c$$

- a **y** b: Coeficientes que representan las pendientes de las variables x y y.
- c: Constante que determina el punto de intersección con el eje y cuando $x = 0$.

Ejemplo de Sistema de Ecuaciones Lineales

Consideremos un sistema de dos ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Este sistema puede resolverse de varias maneras: gráfica, algebraica o mediante matrices. Aquí te muestro el proceso gráfico y algebraico.

Resolución Gráfica

Cada ecuación representa una línea en el plano cartesiano. La solución del sistema es el punto donde ambas líneas se intersectan.

1. **Primera ecuación**: $2x + 3y = 6$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

2. **Segunda ecuación**: $x - y = 1$

$$y = x - 1$$

Al graficar estas dos ecuaciones en un plano cartesiano, las líneas se intersectan en el punto (3,2).

Resolución Algebraica

Podemos resolver el sistema usando el método de sustitución o el método de eliminación.

Método de Sustitución:

1. Despeja y en la segunda ecuación:

$$y = x - 1$$

2. Sustituye y en la primera ecuación:

$$2x + 3(x - 1) = 6$$

$$2x + 3x - 3 = 6$$

$$5x - 3 = 6$$

$$5x = 9$$

$$x = \frac{9}{5} = 1.8$$

3. Sustituye x de nuevo en la ecuación despejada:

$$y = 1.8 - 1$$

$$y = 0.8$$

Representación Matricial

El sistema puede escribirse en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución mediante Inversión de Matriz

Si A es la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Y b es el vector de términos constantes:

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podemos encontrar la solución x multiplicando por la inversa de A:

$$x = A^{-1}b$$

Sistemas de Ecuaciones

La solución de un sistema de ecuaciones lineales se puede visualizar como la intersección de las líneas (o planos, hiperplanos, etc.) que definen dimensional.

Explicación Detallada

1. **Espacio 2D**: En un espacio bidimensional, las ecuaciones lineales representan rectas. La solución del sistema es el punto de intersección de

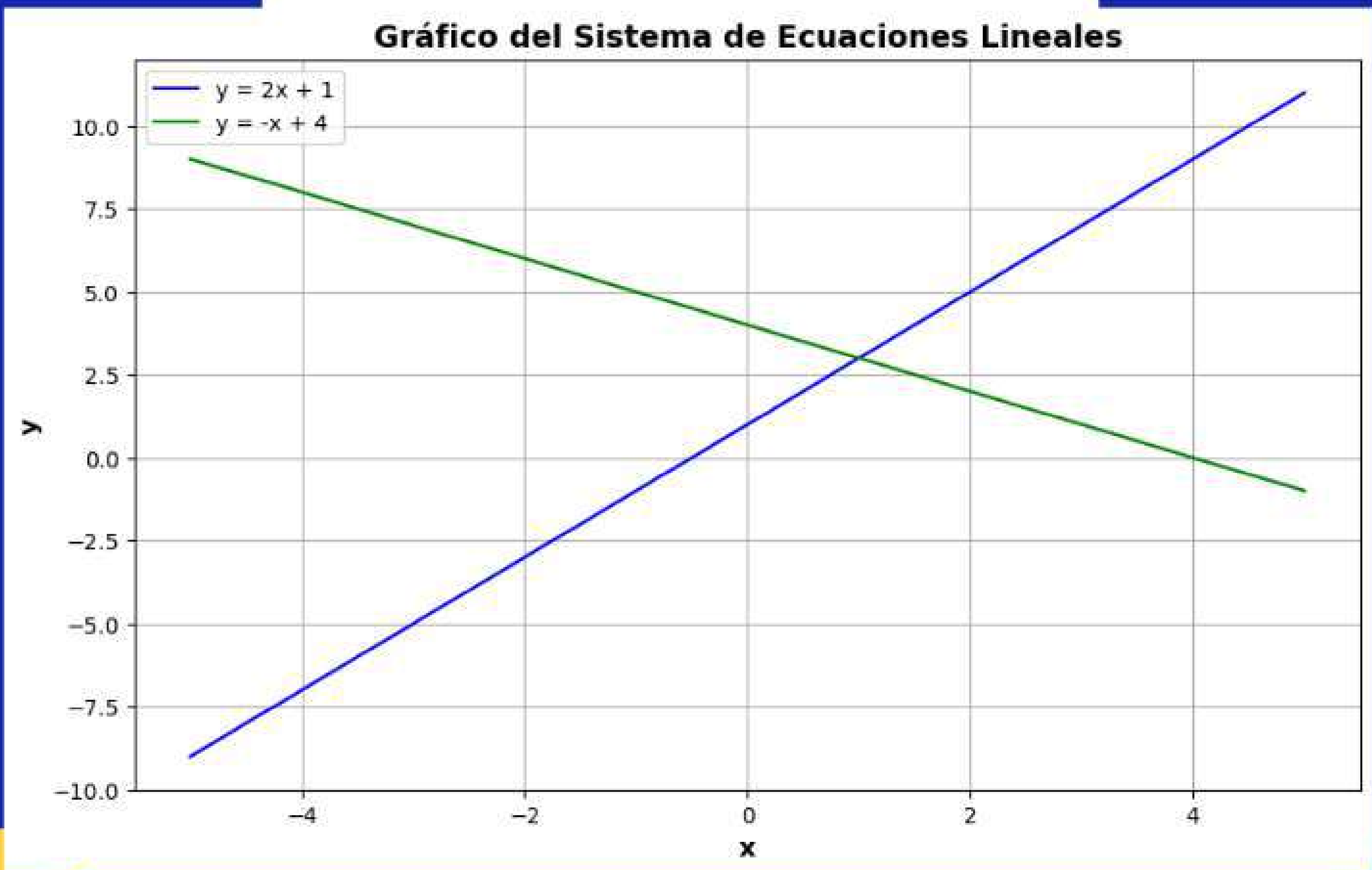
$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Estas dos rectas se intersectan en un punto, que es la solución del sistema.

2. **Espacio 3D**: En un espacio tridimensional, cada ecuación lineal representa un plano. La solución del sistema es la intersección de estos plan

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

3. **Espacio n-dimensional**: En dimensiones superiores, las ecuaciones lineales definen hiperplanos. La solución del sistema es la intersección de estos hip dimensional. Esta intersección podría ser un punto, una línea, un plano o alguna otra figura geométrica dependiendo de cómo se intersecta



Resumen

El álgebra lineal, la geometría, los espacios vectoriales y los sistemas de ecuaciones son conceptos fundamentales en la ciencia de datos. Proporcionan un lenguaje matemático para analizar, modelar y comprender datos complejos.

Las aplicaciones de estos conceptos son vastas, abarcando desde el análisis de grandes conjuntos de datos hasta el desarrollo de algoritmos de aprendizaje automático.

¡Gracias!