

# Informe

Álgebra, Geometría,  
Espacios Vectoriales y  
Sistemas de Ecuaciones en  
Ciencia de Datos



# Índice



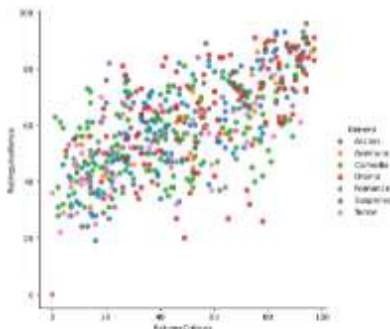
Introducción **01**

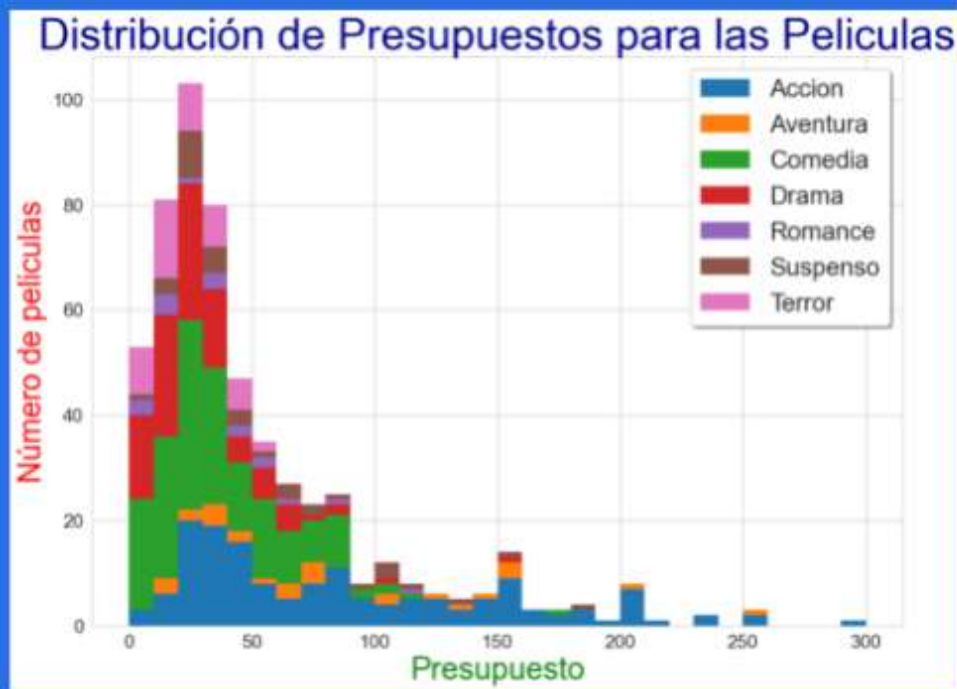
Álgebra y Geometría **02**

Espacios Vectoriales **03**

Sistemas de Ecuaciones **04**

Resumen **05**





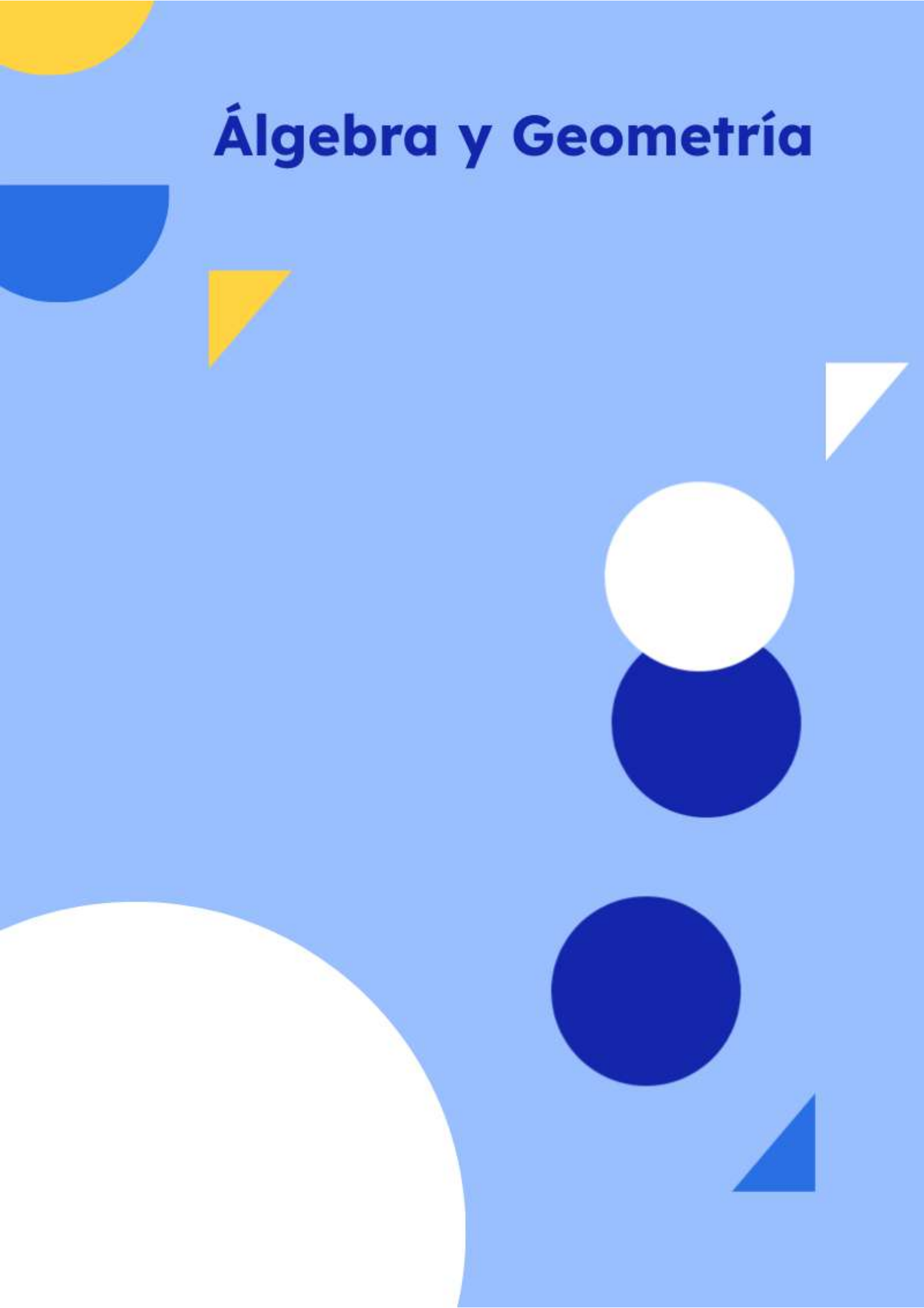
## Introducción

La ciencia de datos se basa en principios matemáticos para extraer conocimiento de datos complejos. El álgebra lineal, la geometría, espacios vectoriales y los Sistemas de Ecuaciones juegan un papel crucial en esta área.

El álgebra lineal proporciona herramientas para trabajar con vectores, matrices y sistemas de ecuaciones lineales, esenciales para análisis de datos, aprendizaje automático y modelado.

La geometría nos ayuda a visualizar y comprender las relaciones entre datos multidimensionales, mientras que los espacios vectoriales proporcionan un marco para trabajar con datos como conjuntos de vectores.

# Álgebra y Geometría





# Vectores

## Vectores Definición:

Un vector es una entidad que tiene magnitud y dirección.

Puede representarse en un espacio de dimensiones  $n$ , por ejemplo, en  $R^2$  o  $R^3$

## Operaciones Básicas:

Suma de Vectores:	$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots)$
Producto Escalar:	$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots$
Producto Vectorial:	$u \times v$ (solo en $R^3$ )

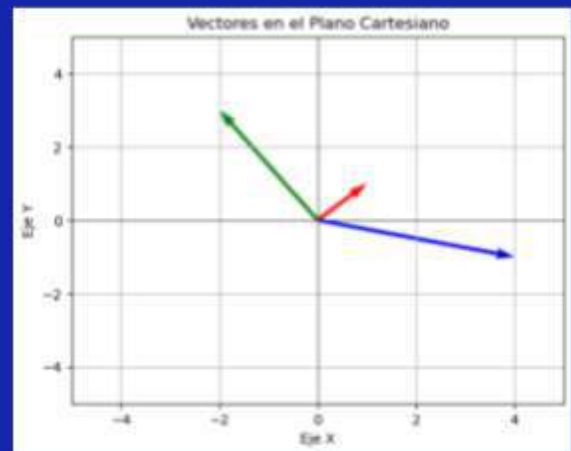
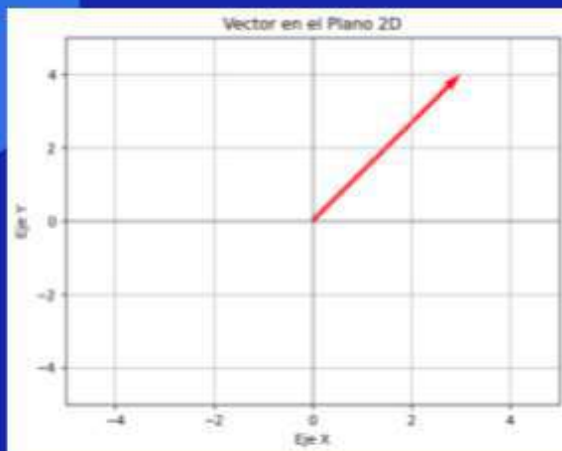
## Ejemplo:

Vectores  $a = (1, 2)$  y  $b = (3, 4)$

Suma:  $a + b = (4, 6)$

Producto Escalar:  $a \cdot b = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11$

# Vectores



## 1. Vectores

- Definición y Estructura: Un vector  $\vec{v}$  en  $\mathbb{R}^n$  se define como:

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

donde  $v_i$  son las **coordenadas** o componentes del vector.

- Operaciones:

- Suma de Vectores:** Dados dos vectores  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , su suma es:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

- Multiplicación por un Escalar:** Si  $c$  es un escalar, el producto de  $c$  con  $\vec{v}$  es:

$$c\vec{v} = (cv_1, cv_2, \dots, cv_n)$$

- Norma y Producto Escalar:**

- Norma** de un vector  $\vec{v}$  es su magnitud, dada por:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

- Producto Escalar** entre dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Este valor mide la relación en dirección y magnitud entre los vectores.

# Matrices

## Matrices Definición:

Una matriz es una disposición rectangular de números en filas y columnas.

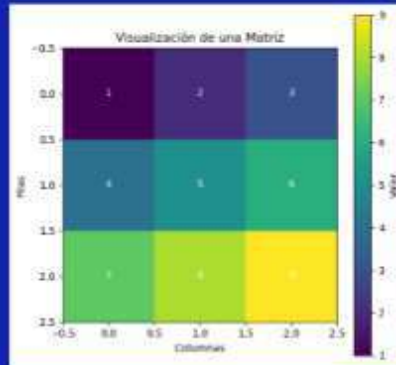
### Operaciones Básicas:

- **Suma de Matrices:**  $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$
- **Multiplicación de Matrices:**  $(AB)_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk}$
- **Transposición:**  $A^T$
- **Determinante:** Un valor que puede calcularse a partir de una matriz cuadrada y que proporciona información sobre la matriz.

### Ejemplo:

- Matrices  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$
- Suma:  $A + B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$
- Multiplicación:  $AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$

# Matrices



## 2. Matrices

- Definición y Estructura: Una matriz  $A$  en  $\mathbb{R}^{n \times m}$  se expresa como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

donde cada  $a_{ij}$  representa una entrada de la matriz en la fila  $i$  y columna  $j$ .

- Operaciones:

- Suma de Matrices: Si  $A$  y  $B$  son matrices de igual dimensión, su suma es:

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- Multiplicación por un Escalar: Si  $c$  es un escalar, entonces:

$$(cA)_{ij} = c \cdot a_{ij}$$

- Multiplicación de Matrices: Si  $A$  es una matriz  $n \times m$  y  $B$  es una matriz  $m \times p$ , el producto  $AB$  es una matriz  $n \times p$  definida como:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$



# Matrices

## Puntos en $\mathbb{R}^2$

- Dimensión:** El espacio  $\mathbb{R}^2$  es bidimensional.
  - Coordenadas:** Un punto en  $\mathbb{R}^2$  se representa con dos coordenadas:  $(x, y)$ .
  - Visualización:** Se puede visualizar fácilmente en un plano cartesiano con un eje  $x$  (horizontal) y un eje  $y$  (vertical).
- Por ejemplo, el punto  $(2, 3)$  en  $\mathbb{R}^2$  está 2 unidades a la derecha del origen y 3 unidades arriba del origen.

## Puntos en $\mathbb{R}^3$

- Dimensión:** El espacio  $\mathbb{R}^3$  es tridimensional.
  - Coordenadas:** Un punto en  $\mathbb{R}^3$  se representa con tres coordenadas:  $(x, y, z)$ .
  - Visualización:** Se visualiza en un espacio tridimensional con tres ejes perpendiculares entre sí:  $x$  (horizontal),  $y$  (vertical) y  $z$  (profundidad).
- Por ejemplo, el punto  $(2, 3, 5)$  en  $\mathbb{R}^3$  está 2 unidades a la derecha del origen, 3 unidades arriba del origen y 5 unidades hacia adelante (o hacia fuera) del plano  $xy$ .

## Resumen de Diferencias

Aparato	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$
Dimensión	2D (bidimensional)	3D (tridimensional)
Coordenadas	$(x, y)$	$(x, y, z)$
Ejes	$x$ y $y$	$x$ , $y$ y $z$
Visualización	Plano cartesiano	Espacio tridimensional

## Suma de Matrices

La suma de matrices se realiza sumando los elementos correspondientes de cada matriz. Para poder sumar dos matrices, estas deben tener las mismas dimensiones.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces, la suma  $C = A + B$  es:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

## Multiplicación de Matrices

La multiplicación de matrices implica multiplicar las filas por las columnas. Para multiplicar dos matrices, el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces, el producto  $C = A \cdot B$  es:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

## Transposición de Matrices

La transposición de una matriz implica intercambiar sus filas por columnas. La transpuesta de una matriz  $A$  se denota como  $A^T$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces, la transpuesta  $A^T$  es:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

## Vectores Colineares

Dos vectores son colineares si están en la misma línea recta o si son paralelos entre sí, lo que significa que uno es un múltiplo escalar del otro. Si  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , entonces son colineares si existe un número escalar  $k$  tal que:  $\vec{b} = k\vec{a}$ . Esto significa que ambos vectores tienen la misma dirección, aunque pueden tener diferentes magnitudes (longitudes).



# Propiedades y aplicaciones

## Espacios Vectoriales

Conjuntos de vectores que pueden ser sumados y multiplicados por escalares

## Ortogonalidad

Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero

## Proyecciones

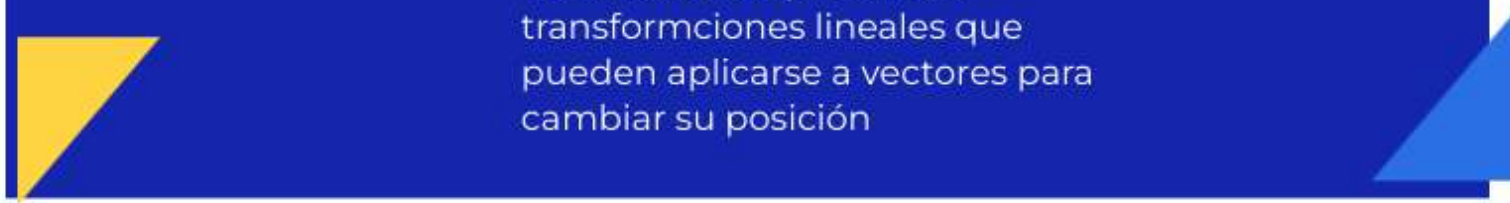
La proyección de un vector sobre otro es el componente del primer vector en la dirección del segundo vector

## Determinantes

Utilizados en álgebra lineal para determinar invertibilidad y otras propiedades de matrices

## Transformaciones Lineales

Las matrices representan transformaciones lineales que pueden aplicarse a vectores para cambiar su posición



# Espacios Vectoriales

Un espacio vectorial, también conocido como espacio lineal, es una estructura fundamental en el álgebra lineal y las matemáticas en general. U

## Propiedades de un Espacio Vectorial

1. **Cerradura bajo la adición:** Si  $u$  y  $v$  son vectores en el espacio vectorial  $V$ , entonces  $u + v$  también está en  $V$ .
2. **Cerradura bajo la multiplicación escalar:** Si  $u$  es un vector en  $V$  y  $c$  es un escalar, entonces  $c \cdot u$  está en  $V$ .
3. **Asociatividad de la adición:** Para todos los vectores  $u, v, w$  en  $V$ ,  $(u + v) + w = u + (v + w)$ .
4. **Elemento neutro de la adición:** Existe un vector  $0$  en  $V$  tal que  $u + 0 = u$  para cualquier vector  $u$  en  $V$ .
5. **Elemento inverso aditivo:** Para cada vector  $u$  en  $V$ , existe un vector  $-u$  en  $V$  tal que  $u + (-u) = 0$ .
6. **Conmutatividad de la adición:** Para todos los vectores  $u$  y  $v$  en  $V$ ,  $u + v = v + u$ .
7. **Compatibilidad de la multiplicación escalar con la multiplicación de escalares:** Para todos los escalares  $a, b$  y todos los vectores  $u$  en  $V$ ,  $a(b \cdot u) = (ab) \cdot u$ .
8. **Elemento neutro de la multiplicación escalar:** Para todo vector  $u$  en  $V$ ,  $1 \cdot u = u$ .
9. **Distribución de la multiplicación escalar sobre la suma de vectores:** Para todos los escalares  $a$  y todos los vectores  $u, v$  en  $V$ ,  $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ .
10. **Distribución de la multiplicación escalar sobre la suma de escalares:** Para todos los escalares  $a, b$  y todos los vectores  $u$  en  $V$ ,  $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$ .

## Ejemplos de Espacios Vectoriales

- **Espacio Euclidiano:** El conjunto de todos los vectores de  $n$ -dimensiones, denotado  $\mathbb{R}^n$ , donde  $n$  es un número entero positivo.
- **Polinomios:** El conjunto de todos los polinomios de grado  $n$  o menor, con coeficientes reales o complejos.
- **Matriz:** El conjunto de todas las matrices de tamaño  $m \times n$ .

## Aplicaciones

- **Geometría Analítica:** Para representar puntos, líneas y planos en el espacio.
- **Física:** Para describir estados y cambios en sistemas físicos.
- **Informática:** Para gráficos por computadora y procesamiento de imágenes.
- **Economía:** Para modelar sistemas económicos y resolver problemas de optimización.

# Ortogonalidad

La ortogonalidad es un concepto fundamental en álgebra lineal y geometría que se refiere a la relación entre dos vectores que son perpendicu

## Definición

Dos vectores  $u$  y  $v$  en un espacio vectorial son ortogonales si su producto punto (o producto escalar) es cero:

$$u \cdot v = 0$$

## Propiedades

1. **Perpendicularidad:** En términos geométricos, dos vectores ortogonales forman un ángulo recto (90 grados) entre ellos.
2. **Independencia Lineal:** Si dos vectores no nulos son ortogonales, también son linealmente independientes, lo que significa que ninguno p
3. **Bases Ortogonales:** Un conjunto de vectores ortogonales puede usarse para formar una base de un espacio vectorial. Si además los vector
4. **Proyección:** La proyección de un vector  $a$  sobre un vector  $b$  es más sencilla de calcular si los vectores son ortogonales.

## Ejemplos

- En el espacio euclidiano tridimensional ( $\mathbb{R}^3$ ), los vectores  $i = (1, 0, 0)$ ,  $j = (0, 1, 0)$ , y  $k = (0, 0, 1)$  son ortogonales entre sí.
- En un plano, los vectores  $u = (1, 2)$  y  $v = (-2, 1)$  son ortogonales porque su producto punto es  $1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -2 + 2 = 0$ .

## Aplicaciones

1. **Análisis de Datos:** La ortogonalidad es clave en técnicas como el análisis de componentes principales (PCA), que se utiliza para reducir la d
2. **Grafos y Redes:** En teoría de grafos, los vectores ortogonales se utilizan para representar conexiones no relacionadas.
3. **Física y Ingeniería:** En física, los vectores ortogonales se emplean para describir fuerzas y movimientos en diferentes direcciones.



# Proyecciones

En álgebra lineal, las proyecciones son operaciones que mapean un vector en un espacio vectorial a otro vector en el mismo espacio, generalmente

## Definición

Una proyección de un vector  $v$  sobre un subespacio  $W$  de un espacio vectorial  $V$  es otro vector  $p$  en  $W$  tal que:

1.  $p$  es lo más cercano posible a  $v$ .
2. La diferencia  $v - p$  es ortogonal a  $W$ .

## Proyección Ortogonal

Si  $W$  es un subespacio y  $w_1, w_2, \dots, w_n$  son vectores ortogonales en  $W$ , la proyección ortogonal de  $v$  sobre  $W$  se puede calcular como:

## Ejemplo Práctico

Supongamos que queremos proyectar un vector  $v$  sobre una línea definida por el vector  $a$ :

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La proyección de  $v$  sobre  $a$  es:

$$\text{proj}_a(v) = \frac{v \cdot a}{a \cdot a} a$$

$$\text{proj}_a(v) = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2}{1^2 + 2^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3 + 8}{1 + 4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{11}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 4.4 \end{pmatrix}$$

## Aplicaciones

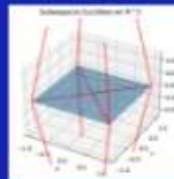
1. **Análisis de Componentes Principales (PCA):** Utiliza proyecciones para reducir la dimensionalidad de los datos, manteniendo la mayor varianza.
2. **Gráficos por Computadora:** Las proyecciones se utilizan para representar escenas 3D en una pantalla 2D.
3. **Optimización:** Las proyecciones ayudan a resolver problemas en los que se busca la solución óptima dentro de un subespacio factible.

La proyección de  $v$  en  $W$  se calcula sumando las proyecciones de  $v$  sobre cada uno de los vectores ortogonales  $w_i$  en  $W$ . Para cada vector  $w_i$ , calculamos el producto punto de  $v$  con  $w_i$  y lo dividimos por el producto punto de  $w_i$  consigo mismo, multiplicando el resultado por  $w_i$ .

Expresado de manera más sencilla:

$$\text{Proyección de } v \text{ en } W = \left( \sum_{i=1}^n \frac{(v \cdot w_i)}{(w_i \cdot w_i)} \cdot w_i \right)$$

# Determinante



## 1. Definición y Propósito

El determinante es una función matemática que asocia a cada matriz cuadrada un número, el cual contiene información clave sobre la matriz. E

## 2. Cálculo del Determinante

### 3. Propiedades del Determinante

Invertibilidad:

Una matriz  $A$  es invertible (tiene inversa) si y solo si  $\det(A) \neq 0$ . Producto de Matrices:

Para matrices  $A$  y  $B$  de igual dimensión,  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ . Transposición:  $\det(A^T) = \det(A)$ .

Determinante de una matriz triangular:

Es el producto de los elementos de la diagonal.

## 4. Aplicaciones en Ciencia de Datos e Inteligencia Artificial Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales:

El método de Cramer utiliza determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Transformaciones Lineales:

En aprendizaje automático, las transformaciones lineales se usan para cambiar de base o para aplicar transformaciones.

Análisis de Datos Multivariantes:

En técnicas como el análisis de componentes principales (PCA), los determinantes se utilizan para calcular volúmenes.

Propiedades Geométricas:

Los determinantes permiten calcular áreas, volúmenes y cambios de variables en integrales múltiples, que son fundamentales.

Las matrices triangulares son un tipo especial de matrices cuadradas que tienen una forma distintiva debido a la disposición de sus elementos.

### Matriz Triangular Superior

Una matriz triangular superior es una matriz cuadrada en la que todos los elementos por debajo de la diagonal principal son cero. Formalmente, si  $A$  es una matriz  $n \times n$  (triangular superior):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

### Matriz Triangular Inferior

Una matriz triangular inferior es una matriz cuadrada en la que todos los elementos por encima de la diagonal principal son cero. Formalmente, si  $B$  es una matriz  $n \times n$  (triangular inferior):

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

### Propiedades de las Matrices Triangulares

1. **Determinante:** El determinante de una matriz triangular (superior o inferior) es el producto de los elementos de su diagonal principal. Para  $A$  de tamaño  $n \times n$ :

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

2. **Invertibilidad:** Una matriz triangular es invertible si y solo si todos los elementos de su diagonal principal son distintos de cero. Si es invertible:

3. **Rápida Resolución de Sistemas Lineales:** Las matrices triangulares son útiles para resolver sistemas de ecuaciones lineales porque permiten

### Ejemplo

Supongamos que tenemos una matriz triangular superior y una inferior:

**Matriz Triangular Superior:**

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

**Matriz Triangular Inferior:**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Estas matrices son fáciles de trabajar en álgebra lineal debido a su estructura especial.

Una matriz diagonal es un tipo especial de matriz cuadrada en la que todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero. La diagonal

### Definición Formal

Una matriz diagonal  $D$  de tamaño  $n \times n$  tiene la forma:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Donde  $d_{ii}$  son los elementos de la diagonal principal.

### Ejemplo

Consideremos una matriz diagonal  $D$  de tamaño  $3 \times 3$ :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

En este caso, los elementos  $d_{11} = 1$ ,  $d_{22} = 2$ , y  $d_{33} = 3$  están en la diagonal principal, y todos los demás elementos son cero.

### Propiedades de las Matrices Diagonales

1. **Multiplicación Escalar:** Multiplicar una matriz diagonal por un escalar es simple, ya que solo se escala cada elemento del vector por el escalar.  
2. **Inversa:** Si todos los elementos de la diagonal son distintos de cero, la inversa de una matriz diagonal es otra matriz diagonal, donde cada

3. **Potencia de Matrices Diagonales:** Elevar una matriz diagonal a una potencia también es sencillo. Basta con elevar cada elemento de la di

### Ejemplo de Multiplicación

Si tenemos un vector  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  y lo multiplicamos por la matriz diagonal  $D$ :

$$Dx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

# Transformaciones vectoriales

Las transformaciones lineales son funciones matemáticas que toman vectores de un espacio vectorial y los transforman en otros vectores en el

## Definición

Una transformación  $T$  de un espacio vectorial  $V$  a un espacio vectorial  $W$  es lineal si para todos los vectores  $u, v \in V$  y para cualquier escalar  $c$ , se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Aditividad:**  $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. **Homogeneidad:**  $T(c \cdot u) = c \cdot T(u)$

## Representación Matricial

Las transformaciones lineales pueden representarse mediante matrices. Si  $T$  es una transformación lineal que mapea  $R^n$  a  $R^m$ , existe una matriz  $A$  de tamaño  $m \times n$  tal que para cualquier vector  $x \in R^n$ , la transformación se puede expresar como:

$$T(x) = Ax$$

## Ejemplos de Transformaciones Lineales

1. **Rotación:** Girar todos los vectores de un plano alrededor del origen.
2. **Escalamiento:** Multiplicar todos los vectores por un escalar.
3. **Reflexión:** Reflejar todos los vectores respecto a una línea o un plano.
4. **Traslación (no lineal):** La traslación no es una transformación lineal, ya que no cumple con las propiedades de aditividad y homogeneidad.

## Propiedades

- **Composición:** La composición de dos transformaciones lineales es también una transformación lineal.
- **Inversas:** Si una transformación lineal es invertible, su inversa también es una transformación lineal.
- **Núcleo y Rango:** El núcleo (o kernel) de una transformación lineal es el conjunto de todos los vectores que se transforman en el vector cero.

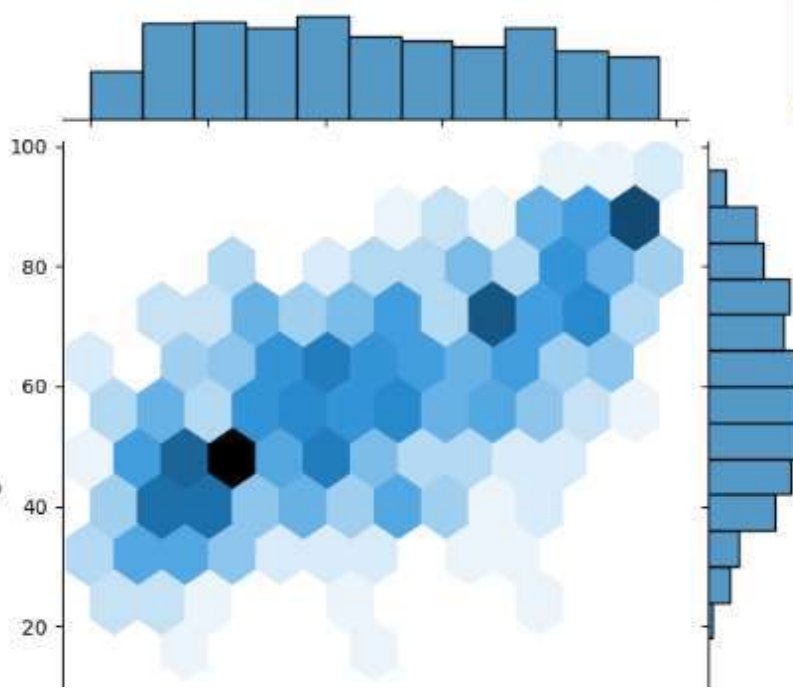
## Aplicaciones

- **Gráficos por Computadora:** Para realizar operaciones como escalamiento, rotación y traslación de objetos en 3D.
- **Procesamiento de Señales:** Transformaciones lineales se utilizan en el análisis de señales y procesamiento de imágenes.
- **Análisis de Datos:** En técnicas como el Análisis de Componentes Principales (PCA) para reducir la dimensionalidad de datos.

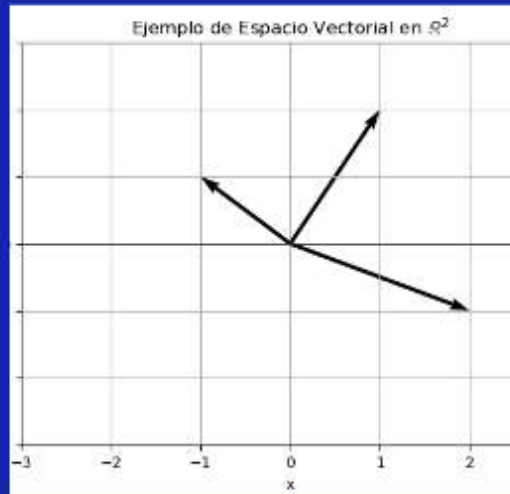


# Espacios Vectoriales

Los espacios vectoriales proporcionan una base para representar y manipular datos.



# Espacios Vectoriales



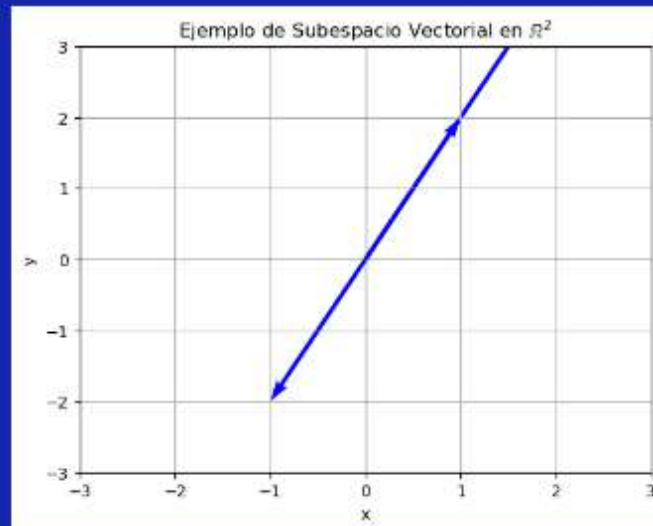
## 1. Espacios Vectoriales

Un **espacio vectorial** (o espacio lineal) es un conjunto de elementos llamados **vectores** que pueden sumarse y multiplicarse por un escalar, cumpliendo ciertas propiedades como cierre, asociatividad, conmutatividad, y la existencia de elementos neutros e inversos.

- **Definición:** Un espacio vectorial  $V$  sobre un campo  $F$  (generalmente  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) es un conjunto de vectores que cumple:
  1. **Suma:** Para cualesquiera vectores  $u, v \in V$ ,  $u + v \in V$ .
  2. **Multiplicación por un escalar:** Para cualquier vector  $v \in V$  y escalar  $a \in F$ ,  $a \cdot v \in V$ .
- **Ejemplos:**  $\mathbb{R}^2$ , el espacio de los polinomios de grado  $n$ , y el conjunto de todas las matrices de tamaño  $m \times n$ .
- **Propiedades Clave:**
  - **Elemento neutro:** Existe un vector  $0 \in V$  tal que  $v + 0 = v$  para todo  $v \in V$ .
  - **Elemento inverso:** Para cada  $v \in V$ , existe un vector  $-v$  tal que  $v + (-v) = 0$ .



# Subespacios Vectoriales

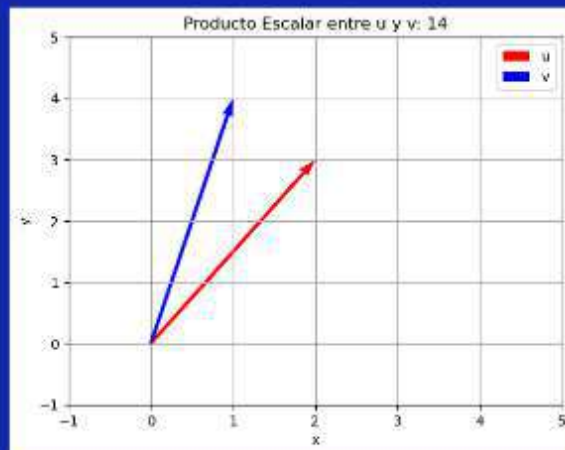


## 2. Subespacios Vectoriales

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto de un espacio vectorial que es, por sí mismo, un espacio vectorial bajo las mismas operaciones de suma y multiplicación por un escalar.

- **Condiciones para ser subespacio:**
  1. **Cierre bajo la suma:** Si  $u, v \in W$ , entonces  $u + v \in W$ .
  2. **Cierre bajo la multiplicación escalar:** Si  $a \in F$  y  $v \in W$ , entonces  $a \cdot v \in W$ .
  3. **Contiene el vector cero:**  $0 \in W$ .
- **Ejemplo:** El conjunto de todas las soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$ .

# Producto Escalar y Espacios De Hilbert



## 3. Producto Escalar y Espacios de Hilbert

El **producto escalar** es una operación que toma dos vectores y devuelve un escalar, proporcionando una medida de la relación angular y la magnitud relativa entre ellos. Un **espacio de Hilbert** es un espacio vectorial completo con respecto a la norma inducida por el producto escalar.

- **Producto Escalar en  $\mathbb{R}^n$ :**

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

donde  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

- **Norma Inducida:** La norma de un vector  $v$  se define como:

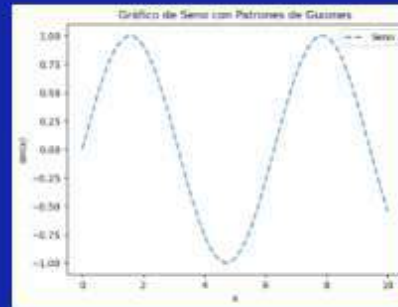
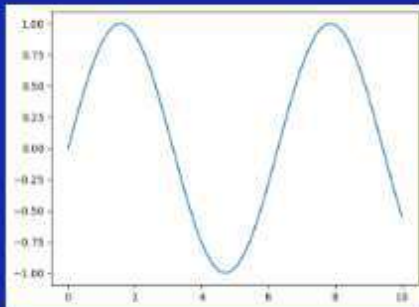
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

- **Distancia entre vectores:** La distancia entre dos vectores  $u$  y  $v$  en un espacio vectorial se define como:

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

- **Espacio de Hilbert:** Es un espacio vectorial con producto escalar que es completo, lo que significa que toda sucesión de Cauchy de vectores en el espacio converge a un vector en el espacio. Este concepto es fundamental en análisis funcional y en el estudio de funciones en espacios infinitamente dimensionales.

# Ortogonalidad y Proyecciones



## 4. Ortogonalidad y Proyecciones

Dos vectores son **ortogonales** si su producto escalar es cero, lo que significa que forman un ángulo de 90 grados entre sí. La **proyección** de un vector  $u$  sobre otro vector  $v$  permite descomponer  $u$  en componentes paralelas y perpendiculares a  $v$ .

- **Condición de Ortogonalidad:** Dos vectores  $u$  y  $v$  son ortogonales si:

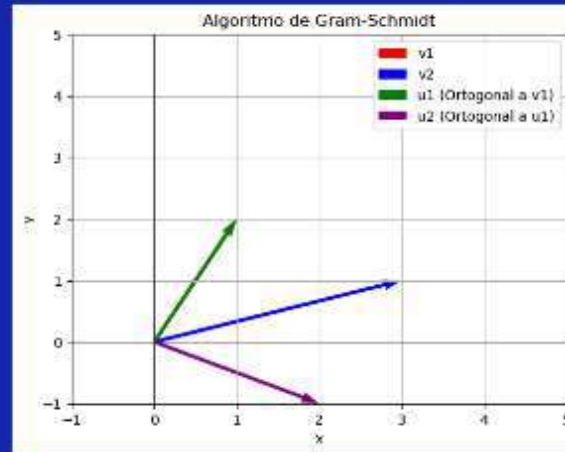
$$\langle u, v \rangle = 0$$

- **Proyección de un vector  $u$  sobre otro vector  $v$ :**

$$\text{proj}_v(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

Esto descompone  $u$  en una parte que es múltiplo de  $v$  (la proyección) y una parte ortogonal a  $v$ .

# Algoritmos de Gram - Schmidt



## 5. Algoritmo de Gram-Schmidt

El algoritmo de Gram-Schmidt transforma un conjunto de vectores linealmente independientes en un conjunto ortogonal (o ortonormal si se normalizan los vectores resultantes), manteniendo el mismo subespacio generado.

- **Algoritmo:** Dado un conjunto de vectores linealmente independientes  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , el algoritmo de Gram-Schmidt produce un conjunto ortogonal  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  mediante:

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$$

y así sucesivamente.

- **Base Ortonormal:** Dividiendo cada vector  $u_i$  por su norma, se obtiene una base ortonormal  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  tal que  $\|e_i\| = 1$  y  $\langle e_i, e_j \rangle = 0$  si  $i \neq j$ .

# SVM

## Máquinas de Soporte Vectorial (SVM)

Las SVM son un poderoso método de aprendizaje supervisado utilizado para la clasificación y la regresión. Su objetivo principal es encontrar el

### Relación con el Álgebra Lineal

1. **Hiperplanos:** Un hiperplano en el álgebra lineal es un subespacio de una dimensión menos que el espacio en el que se encuentra. En el caso de un espacio 2D, un hiperplano es una línea recta.

$$w \cdot x + b = 0$$

donde  $w$  es un vector normal al hiperplano,  $x$  es el vector de características y  $b$  es un sesgo.

2. **Vectores de Soporte:** Los vectores de soporte son los puntos de los datos que están más cercanos al hiperplano y son cruciales para la definición del hiperplano.

$$w \cdot x_i + b = \pm 1$$

3. **Maximización del Margen:** El objetivo de una SVM es maximizar el margen entre los vectores de soporte de diferentes clases. Matemáticamente, esto se formula como minimizar  $\frac{1}{2}\|w\|^2$  sujeta a las restricciones que los datos estén correctamente clasificados. Esto implica resolver un problema de optimización cuadrática.
4. **Transformaciones y Kernels:** Para datos no linealmente separables, las SVM utilizan funciones kernel para transformar los datos a un espacio de mayor dimensión donde pueden ser separados.

### Ejemplo de un Problema de SVM

Dado un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^2$  pertenecientes a dos clases, se puede encontrar un hiperplano que los separe de manera óptima mediante la resolución del problema:

$$\min_{\frac{1}{2}\|w\|^2}$$

sujeto a:

$$y_i (w \cdot x_i + b) \geq 1, \quad \forall i$$

donde  $y_i$  es la etiqueta de clase (1 o -1) para el punto  $x_i$ .

### Aplicaciones de SVM

1. **Clasificación de Imágenes:** Identificación de objetos en imágenes.
2. **Bioinformática:** Clasificación de secuencias de ADN.
3. **Detección de Fraude:** Identificación de transacciones fraudulentas.

El álgebra lineal proporciona las herramientas matemáticas fundamentales para comprender y resolver los problemas que abordan las SVM. De



# SVM

## Informe sobre Máquinas de Soporte Vectorial (SVM), Ciencia de Datos y Álgebra Lineal

Dr. Javier Pérez de la Ciencia de Datos e Inteligencia Artificial 2023-2024

### Introducción

Las Máquinas de Soporte Vectorial (SVM) son un método de aprendizaje supervisado que se utiliza para la clasificación de datos, basado en el concepto de un hiperplano óptimo que maximiza la separación entre dos clases. En el contexto de ciencia de datos, un modelo SVM sigue un proceso estructurado de etapas, desde la recolección y preparación de datos hasta la evaluación del modelo. A lo largo de este proceso, el álgebra lineal proporciona las herramientas matemáticas fundamentales que sustentan operaciones de optimización, proyección y transformación de los datos en un espacio multidimensional.

### Descripción del Ejercicio

El ejercicio propuesto se enfoca en clasificar datos de diagnósticos médicos (por ejemplo, benigno y maligno), utilizando el modelo SVM. Cada observación tiene varias características clínicas, y el objetivo es usar un enfoque estadístico de ciencia de datos para aplicar principios de álgebra lineal para identificar el mejor hiperplano de separación.

### Metodología de Resolución y Ciencia de Datos

#### 1. Recolección y Exploración de Datos

- Método de Ciencia de Datos:** Se extraen los datos desde un archivo CSV y se analizan los datos disponibles, identificando características relevantes y posibles problemas. Se verifican valores nulos y la distribución general de las características para entender mejor la distribución y el sesgo en los datos.
- Álgebra Lineal:** Se aplican transformaciones lineales (como la normalización de los datos y el escalado) a una matriz de características para facilitar el procesamiento posterior. Estas transformaciones garantizan que cada variable contribuya de manera equitativa al modelo, evitando sesgos en la clasificación.

#### 2. Preprocesamiento de Datos y Gráficos

- Método de Ciencia de Datos:** Se usan herramientas para limpiar los datos, eliminando valores nulos y corrigiendo errores. También se crean gráficos para visualizar la efectividad del modelo y reducir el riesgo de sesgo.
- Álgebra Lineal:** Se aplican técnicas de proyección y ortogonalidad para reducir la dimensionalidad, eliminando redundancias sin perder información significativa. Las operaciones de proyección se utilizan para alinear datos en dimensiones que mejoran la separación de las clases, facilitando la clasificación.

El análisis de preprocesamiento y reducción de dimensionalidad se reflejan en la efectividad del modelo SVM en función de las métricas evaluadas. Los conceptos de álgebra lineal, como el producto interno y la proyección, permiten analizar la distancia de los puntos con respecto al hiperplano y ajustar la precisión de la clasificación. En casos más complejos, el uso de transformaciones matriciales como la normalización permite una clasificación precisa en un espacio de alta dimensión, asegurando una separación adecuada entre las clases, incluso cuando los datos presentan relaciones complejas.

### Conclusión

La combinación de ciencia de datos y álgebra lineal en el SVM permite desarrollar un modelo de clasificación robusto y preciso. El uso de métricas como el producto interno, la ortogonalidad, la proyección y el álgebra de Gram-Schmidt permiten optimizar el modelo, adaptándose a la naturaleza de los datos y facilitando la separación de las clases. En el ámbito del diagnóstico médico, un modelo SVM bien entrenado y optimizado puede servir como una herramienta de apoyo en la toma de decisiones, ofreciendo una clasificación confiable y precisa en contextos críticos.

Este informe detalla cada etapa de la ciencia de datos en el SVM y cómo el álgebra lineal fortalece cada paso, asegurando una solución óptima y bien fundamentada en la clasificación de datos complejos.

### Ejemplo

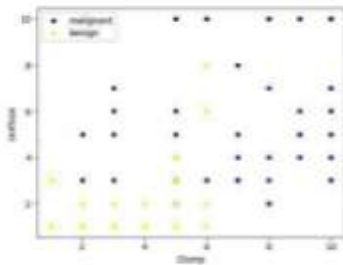
#### Los datos de cáncer

El ejemplo se basa en un conjunto de datos que está disponible públicamente en el repositorio de aprendizaje automático de la UCI. El conjunto de datos consiste de varios cientos de registros de muestras de células humanas, cada una de las cuales contiene los valores de un conjunto de características clínicas.

```
1 # Importar las librerías necesarias
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
from sklearn.preprocessing import StandardScaler
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.metrics import accuracy_score

2 # Cargar los datos
df = pd.read_csv('data/cancer_data.csv')

3 # Inspeccionar los datos
print(df.head())
print(df.info())
print(df.describe())
```



#### Preprocesamiento y selección de datos

Procesar y seleccionar los tipos de datos de los clústeres.

```
4 # Preprocesamiento de los datos
X = df[['Clump', 'Size', 'Shape', 'Texture', 'Margin', 'Area', 'Perimeter', 'Smoothness', 'Compactness', 'Convexity', 'Symmetry', 'Texture', 'Zeros', 'One', 'Two', 'Three', 'Four', 'Five', 'Six', 'Seven', 'Eight', 'Nine', 'Ten', 'Eleven', 'Twelve', 'Thirteen', 'Fourteen', 'Fifteen', 'Sixteen', 'Seventeen', 'Eighteen', 'Nineteen', 'Twenty']]
y = df['Class']
```

#### 3. Selección del Modelo y Transformación de Datos (Model Transform)

- Método de Ciencia de Datos:** Cuando los datos no son linealmente separables, el SVM utiliza funciones de kernel para transformar los datos a un espacio de mayor dimensionalidad, en el cual la separación es más fácil. Las funciones de kernel (lineal, polinómico, radial, etc.) dependen de las características del conjunto de datos y del patrón de separación esperado.
- Álgebra Lineal:** La transformación a espacios de mayor dimensionalidad se realiza utilizando funciones de kernel que actúan como operadores en un espacio de Hilbert. Esto permite trabajar en dimensiones altas sin calcular explícitamente la separación de los datos en el nuevo espacio. Los conceptos de producto interno y el producto escalar son esenciales para entender la distancia y la separación en este nuevo espacio, mejorando la precisión del modelo.

#### 4. Evaluación del Modelo y Entrenamiento

- Método de Ciencia de Datos:** El modelo SVM se entrena en el conjunto de datos de entrenamiento, optimizando el hiperplano de separación. Esto incluye ajustar los parámetros del modelo para maximizar la precisión de la clasificación.
- Álgebra Lineal:** El modelo SVM encuentra el hiperplano óptimo mediante el uso del producto escalar y el margen máximo, calculando la distancia de cada punto al hiperplano. Esta distancia se maximiza para obtener un margen claro entre las clases. La ortogonalidad asegura que el hiperplano sea perpendicular a la dirección que separa las clases, maximizando la distancia entre los puntos de frontera.

#### 5. Optimización del Modelo (Algoritmo de Optimización)

- Método de Ciencia de Datos:** Para mejorar la eficiencia y precisión del modelo, se utilizan técnicas de optimización y se ajustan los hiperparámetros mediante técnicas de validación de cruces para seleccionar la mejor configuración.
- Álgebra Lineal:** El algoritmo de optimización se utiliza para encontrar los valores de los hiperparámetros, asegurando que sean independientes entre sí. La optimización también se aplica en el espacio de características y se ajusta la precisión del hiperplano, reduciendo la distancia entre los puntos de frontera.

#### 6. Selección del Modelo y Evaluación

- Método de Ciencia de Datos:** Se evalúa el modelo en un conjunto de datos de validación para medir el rendimiento del modelo en diferentes subconjuntos de datos, evaluando la capacidad de generalización, la estabilidad y la especificidad de la solución para evaluar la efectividad del SVM en la clasificación.
- Álgebra Lineal:** La evaluación de la distancia y la proyección de puntos sobre el hiperplano permite verificar la precisión del modelo en función de su capacidad para clasificar correctamente nuevos datos. El cálculo de proyecciones en el espacio de características permite definir y ajustar el margen de clasificación, mejorando así la separación de las clases.

### Interpretación de Resultados

```
print(df.head())
# Verificar los primeros datos del conjunto de datos
```

#### Cargar datos desde un archivo CSV

```
1 # Cargar los datos desde un archivo CSV
df = pd.read_csv('data/cancer_data.csv')

2 # Inspeccionar los datos
print(df.head())
print(df.info())
print(df.describe())

3 # Verificar los tipos de datos
print(df.dtypes)
```

El campo ID contiene los identificadores de los pacientes. Las características de las muestras de células de cada paciente se indican en los campos Clump a Ten. Los valores de clasificación de 1 a 10, donde 1 es más benigno y 10 es más maligno.

El campo Class contiene el diagnóstico, confirmado por procedimientos médicos especiales, de si las muestras son benignas (benign = 0) o malignas (malign = 1). Muestra la distribución de los datos en función del género del paciente y la uniformidad del tamaño celular.

```
4 # Verificar la distribución de los datos
print(df.groupby('Class').size())
print(df.groupby('Class').mean())
```

```
5 # Verificar la distribución de los datos
print(df.groupby('Class').size())
print(df.groupby('Class').mean())
```

Parece que la columna SizeNan incluye algunos valores que no son numéricos. Podemos eliminar esos filas:

```
6 # Eliminar las filas con valores no numéricos en la columna SizeNan
df = df[df['SizeNan'].isna() == False]
```

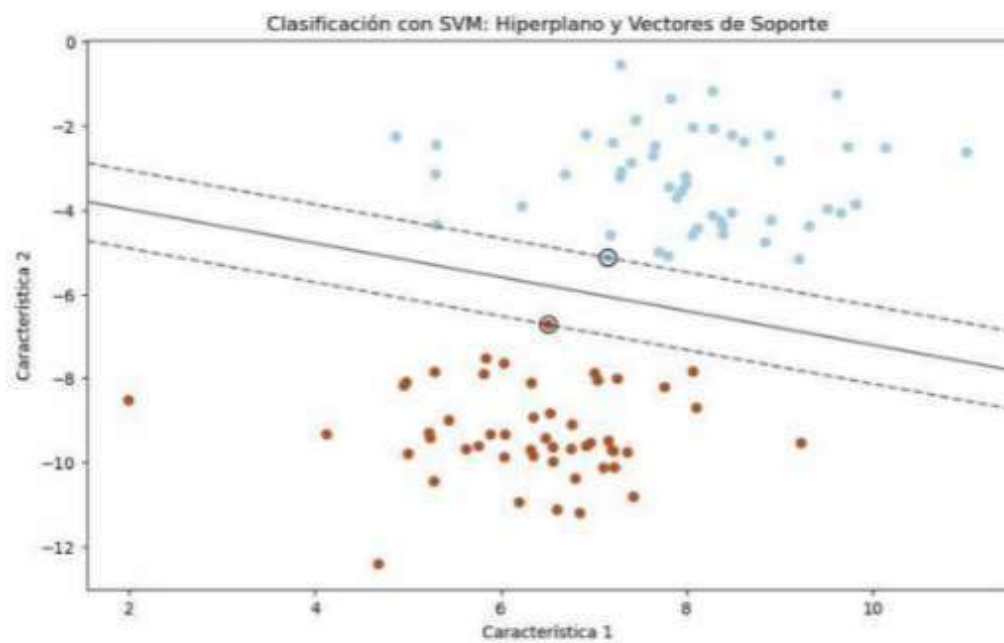
```
7 # Verificar la distribución de los datos
print(df.groupby('Class').size())
print(df.groupby('Class').mean())
```

```
8 # Verificar la distribución de los datos
print(df.groupby('Class').size())
print(df.groupby('Class').mean())
```

```
9 # Verificar la distribución de los datos
print(df.groupby('Class').size())
print(df.groupby('Class').mean())
```



# SVM



10 [ ]

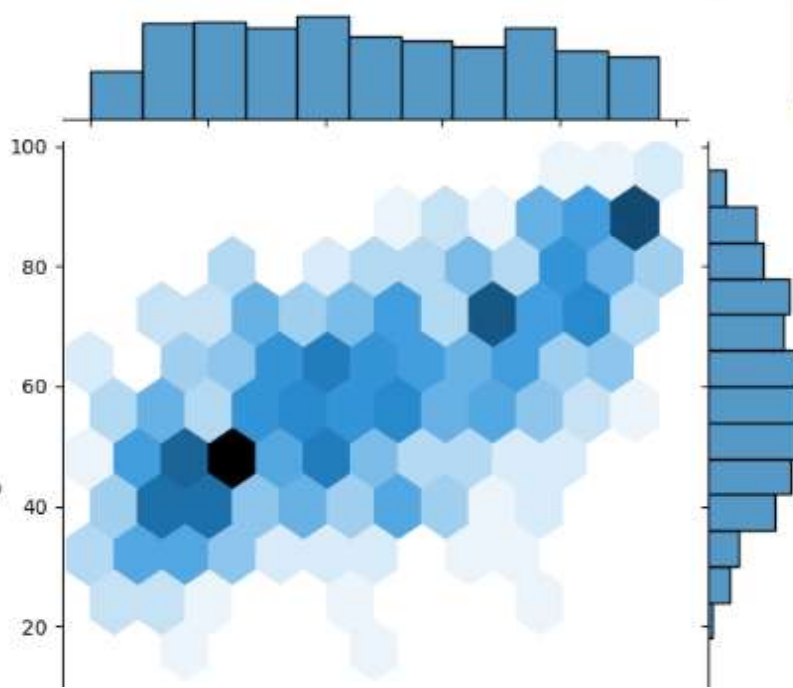


# Sistemas de Ecuaciones

Un espacio afín es una generalización del concepto de un espacio vectorial que permite describir de manera natural las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales. -

Los espacios afines se obtienen al trasladar un subespacio vectorial por un vector fijo.

En el contexto de sistemas de ecuaciones lineales, si el sistema es consistente, el conjunto de soluciones puede interpretarse como un espacio afín.



# Sistemas de Ecuaciones Lineales

## Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales que comparten las mismas variables. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

## Representación Matricial

Un sistema de ecuaciones lineales se puede representar en forma matricial como:

$$Ax = b$$

donde  $A$  es la matriz de coeficientes,  $x$  es el vector de variables y  $b$  es el vector de términos constantes. Para el sistema anterior, sería:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## Resolución de Sistemas Matriciales

Los métodos comunes para resolver sistemas matriciales incluyen:

1. **Eliminación Gaussiana:** Procedimiento para transformar la matriz  $A$  en una matriz triangular superior y luego realizar sustitución hacia atrás.
2. **Descomposición LU:** Descomponer la matriz  $A$  en el producto de una matriz triangular inferior  $L$  y una matriz triangular superior  $U$ , y luego resolver dos sistemas triangulares.
3. **Inversa de la Matriz:** Si  $A$  es invertible, se puede encontrar la solución como  $x = A^{-1}b$ .

## Espacios Afines

Un espacio afín es similar a un espacio vectorial, pero no necesariamente incluye el origen. En un espacio afín, cualquier punto puede ser elegido como origen.

### Definición

Si  $p_0$  es un punto en el espacio afín  $A$  y  $v$  es un vector en el espacio vectorial asociado  $V$ , entonces cualquier punto  $p$  en el espacio afín puede representarse como:

$$p = p_0 + v$$

donde  $v$  es un vector de dirección.

## Aplicaciones

- **Gráficos por Computadora:** Utilizado en transformaciones y modelado de objetos en 3D.
- **Geometría:** Modelado de líneas, planos y sus intersecciones.
- **Ingeniería:** Análisis de sistemas mecánicos y estructurales.



# Sistemas de Ecuaciones

## Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un sistema de ecuaciones lineales puede representarse y resolverse gráficamente. Soluciona el siguiente sistema de ecuaciones como ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

### Paso 1: Representación Gráfica

Para resolver este sistema gráficamente, primero convertimos cada ecuación en la forma  $y = mx + b$ , donde  $m$  es la pendiente y  $b$  es la intersección en el eje  $y$ .

1. **Primera ecuación:**  $2x + 3y = 6$

$$3y = -2x + 6$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

2. **Segunda ecuación:**  $x + y = 1$

$$y = 1 - x$$

Ahora, dibujamos estas dos rectas en un plano cartesiano.

### Paso 2: Intersección de Rectas

La solución al sistema de ecuaciones es el punto donde las dos rectas se intersectan. Al graficar las ecuaciones, observamos el siguiente resultado. Las dos rectas se intersectan en el punto  $(3, 2)$ . Esto significa que la solución al sistema de ecuaciones es:

$$x = 3, \quad y = 2$$

## Resolución de Sistemas Matriciales

Para resolver el sistema de manera algebraica usando matrices:

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### Paso 1: Inversión de Matrices

Si es conveniente, podemos encontrar la solución multiplicando ambas partes por  $A^{-1}$ :

$$x = A^{-1}b$$

### Paso 2: Calcular la Inversa de $A$

La inversa de la matriz  $A$  es:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

$$\text{Para } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2(1) - (3)(1) = 2 - 3 = -1$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

### Paso 3: Multiplicar por la Inversa

Multiplicamos  $A^{-1}$  por  $b$ :

$$x = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 3 \\ 6 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

### Espacios Afines

Un espacio afín puede visualizarse como una colección de puntos desplazados desde un origen.

### Ejemplo:

Considera el subespacio generado por el vector  $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$p = p_0 + t a$$

Si  $p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $t$  es un escalar:

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La línea afín va desde del punto  $p_0$  en la dirección de  $a$  si se puede graficar.

# Sistemas de Ecuaciones

En el contexto de **Sistemas de Ecuaciones Lineales**, una ecuación lineal se define como una ecuación que relaciona dos o más variables lineales.

## Definición de una Ecuación Lineal

Una ecuación lineal en dos variables  $x$  y  $y$  tiene la forma general:

$$ax + by = c$$

- $a$  y  $b$ : Coeficientes que representan las pendientes de las variables  $x$  y  $y$ .
- $c$ : Constante que determina el punto de intersección con el eje  $y$  cuando  $x = 0$ .

## Ejemplo de Sistema de Ecuaciones Lineales

Consideremos un sistema de dos ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Este sistema puede resolverse de varias maneras: gráfica, algebraica o mediante matrices. Aquí te muestro el proceso gráfico y algebraico.

### Resolución Gráfica

Cada ecuación representa una línea en el plano cartesiano. La solución del sistema es el punto donde ambas líneas se intersectan.

1. **Primera ecuación:**  $2x + 3y = 6$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

2. **Segunda ecuación:**  $x - y = 1$

$$y = x - 1$$

Al graficar estas dos ecuaciones en un plano cartesiano, las líneas se intersectan en el punto  $(3, 0)$ .

### Resolución Algebraica

Podemos resolver el sistema usando el método de sustitución o el método de eliminación.

#### Método de Sustitución

1. Despeja  $y$  en la segunda ecuación:

$$y = x - 1$$

2. Sustituye  $y$  en la primera ecuación:

$$2x + 3(x - 1) = 6$$

$$2x + 3x - 3 = 6$$

$$5x - 3 = 6$$

$$5x = 9$$

$$x = \frac{9}{5} = 1.8$$

3. Sustituye  $x$  de nuevo en la ecuación despejada:

$$y = 1.8 - 1$$

$$y = 0.8$$

#### Representación Matricial

El sistema puede escribirse en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Solución mediante Inversión de Matriz

Si  $A$  es la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$b$  es el vector de términos constantes:

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podemos encontrar la solución  $x$  multiplicando por la inversa de  $A$ :

$$x = A^{-1}b$$

# Sistemas de Ecuaciones

La solución de un sistema de ecuaciones lineales se puede visualizar como la intersección de las líneas (o planos, hiperplanos, etc.) que definen el sistema.

## Explicación Detallada

1. **Espacio 2D:** En un espacio bidimensional, las ecuaciones lineales representan rectas. La solución del sistema es el punto de intersección de

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

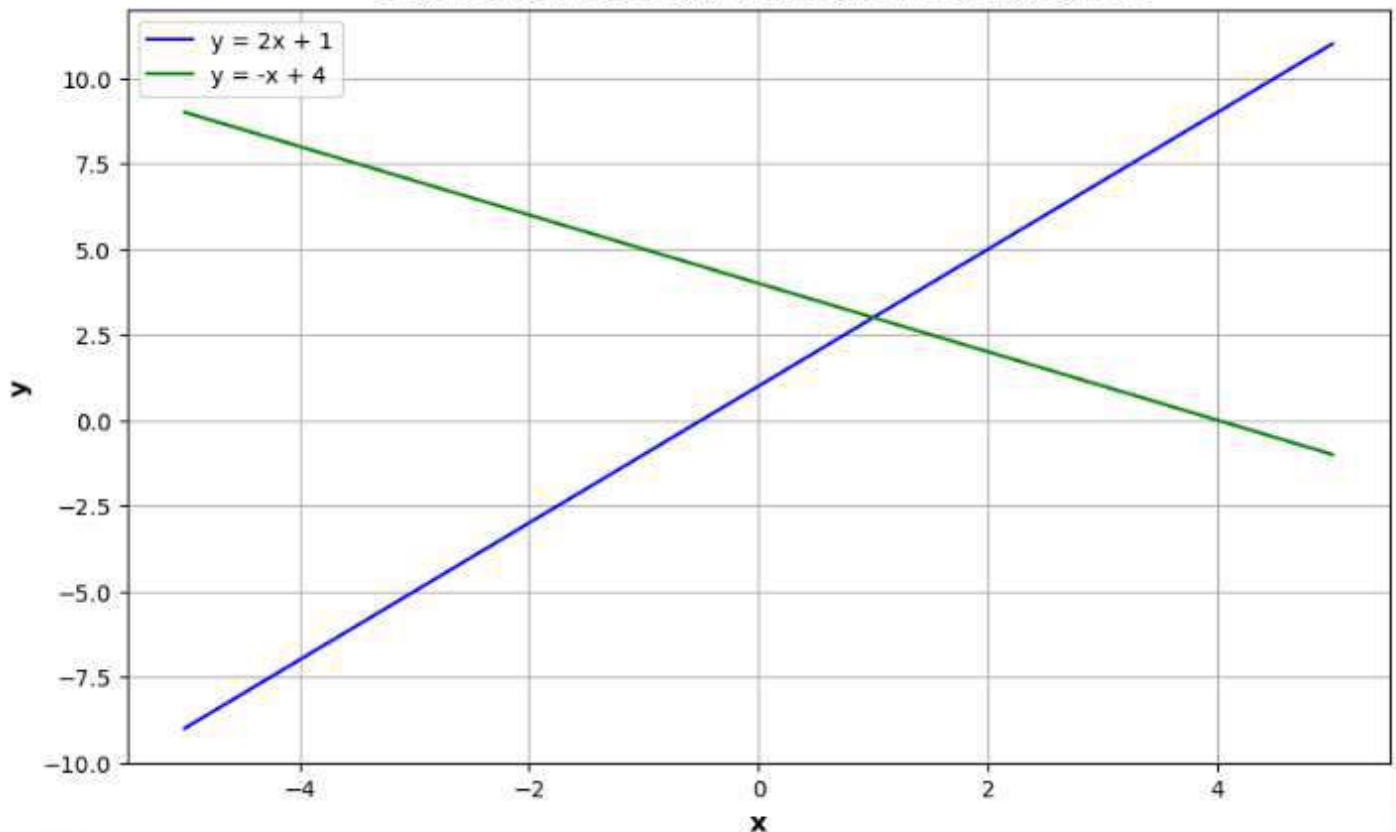
Estas dos rectas se intersectan en un punto, que es la solución del sistema.

2. **Espacio 3D:** En un espacio tridimensional, cada ecuación lineal representa un plano. La solución del sistema es la intersección de estos plan

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

3. **Espacio n-dimensional:** En dimensiones superiores, las ecuaciones lineales definen hiperplanos. La solución del sistema es la intersección de estos hiperplanos. Esta intersección podría ser un punto, una línea, un plano o alguna otra figura geométrica dependiendo de cómo se intersecten.

## Gráfico del Sistema de Ecuaciones Lineales





# Resumen

El álgebra lineal, la geometría, los espacios vectoriales y los sistemas de ecuaciones son conceptos fundamentales en la ciencia de datos. Proporcionan un lenguaje matemático para analizar, modelar y comprender datos complejos.

Las aplicaciones de estos conceptos son vastas, abarcando desde el análisis de grandes conjuntos de datos hasta el desarrollo de algoritmos de aprendizaje automático.



**¡Gracias!**

