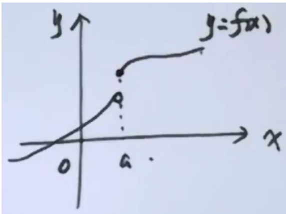
一维随机变量及分布

Ω为E的样本空间, 若$\forall\omega\in\Omega.\exists|X(\omega)$与$\omega$对应
称X为r.v.(random variable)
Notes:
①随机变量X的一定的取值范围即随机事件
如：$\{2<X\leq 3\}\triangleq A$
$\{-\infty<X<+\infty\}\triangleq\Omega$
②若X取不到所给范围的任何值, 即$\emptyset$

$$\text{分布函数}-F(X)=P\{X\leq x\}=P\{X\in(-\infty,x]\}$$

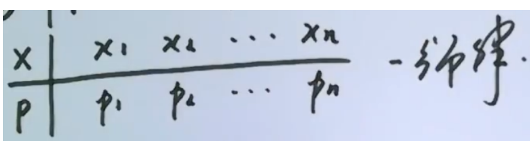


Notes:
1.若$F(x)$为分布函数, 则：
①$0\leq F(x)\leq 1$
②$F(x)$不减
③$F(x)$右连续
④$F(-\infty)=0,F(+\infty)=1$
反之, 若$F(x)$满足①到④, 则$F(x)$也为分布函数
2.用分布函数计算随机变量在特定范围的概率
设$X-$r.v.$F(x)$为分布函数
①$P\{X<a\}=F(a-0)$
②$P\{a\leq X\leq b\}=P\{X\leq b\}-P\{X<a\}=F(b)-F(a-0)$
③$P\{a<X\leq b\}=P\{X\leq b\}-P\{X\leq a\}=F(b)-F(a)$
④$P\{a\leq X<b\}=P\{X<b\}-P\{X<a\}=F(b-0)-F(a-0)$
⑤$P\{a<x<b\}=P\{X<b\}-P\{X\leq a\}=F(b-0)-F(a)$

常见随机变量类型及分布

离散型

设$X-$r.v., 若X的可能取值为有限个
或无限可列个, 称X为离散型随机变量
若$P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots,n)$, 或



①$p_i\geq 0(1\leq i\leq n)$;
②$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$

连续型

设$X-\text{r.v.}F(x)=P\{X\leq x\}$

若$\exists f(x)\geq 0$, 使$\int_{-\infty}^{t}f(t)dt=F(x)$, 称$X$为连续型r.v.

$f(x)$称为X的密度函数

Notes:

1.若$f(x)$为密度函数, 则

①$f(x)\geq 0$

②$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

反之, 若$f(x)$满足①②, 则$f(x)$也为密度函数

2.设X的密度函数$f(x)$, 分布函数$F(x)$, 则

①$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

②$f(x)=\begin{cases}F'(x), x\text{为}F(x)\text{的可导点}\\0, x\text{为}F(x)\text{的不可导点}\end{cases}$

③X为连续型r.v.$F(x)$连续, 但不一定可导

设随机变量X的概率密度函数为$f(x)$, 下列函数为概率密度函数的是(B).

$(A)f^2(x)$

$(B)f(-x)$

$(C)f(1-2x)$

$(D)f(x^2)$

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$$

$$f(x)\geq 0,\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x^0e^{-x}dx=1$$

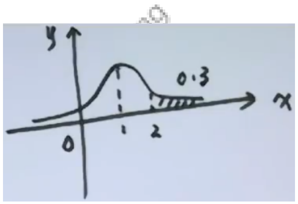
$$f(x^2)\geq 0,\int_{-\infty}^{+\infty}f(x^2)dx=\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt, x^2=t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\neq 1$$

$$f^2(x)\geq 0,\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)dx=\frac{1}{4}\int_{0}^{+\infty}(2x)^0e^{-2x}d(2x)=\frac{1}{4}\neq 1$$

$$f(1-2x)\geq 0,\int_{-\infty}^{+\infty}f(1-2x)dx=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(1-2x)d(1-2x)=-\frac{1}{2}\int_{+\infty}^{-\infty}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}\neq 1$$

设随机变量X的概率密度函数为$f(x)$, $f(1-x)=f(1+x)$, 且$P\{X\geq 2\}=0.3$, 则$P\{0\leq X<1\}=0.2$.



$P\{X\geq 2\}=0.3\Rightarrow P\{X\leq 0\}=0.3$

$P\{0<X<2\}=0.4$

$\because P\{0\leq X<1\}=P\{1\leq X<2\},\therefore P\{0\leq X<1\}=0.2$

设随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3},0<x<1\\ \frac{2}{9},3<x<6,\\ 0,\text{其他}\end{cases}$ 若$P\{X\geq k\}=\dfrac{2}{3}$,

求k的取值范围.

$$
\begin{aligned}
&P\{X\geq k\}=\int_k^{+\infty}f(x)dx\\
&k\geq 6\text{时},P\{X\geq k\}=0\\
&3<k<6,P\{X\geq k\}=\int_k^6\frac{2}{9}dx=\frac{2}{9}(6-k)<\frac{2}{9}\times 3=\frac{2}{3}\\
&1\leq k\leq 3\text{时},P\{X\geq k\}=\int_3^6\frac{2}{9}dx=\frac{2}{3}\\
&0<k<1\text{时},P\{X\geq k\}=\int_k^1\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}>\frac{2}{3}\\
&k\leq 0\text{时},P\{X\geq k\}=1,\therefore 1\leq k\leq 3
\end{aligned}
$$

设随机变量X的概率密度函数为$f(x)=ae^{-\frac{(x-1)^2}{2}}(-\infty<x<+\infty)$,求：
(1)常数a; (2)$P\{X>1\}$.

$$
\begin{aligned}
&①1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=a\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}d(x-1)\\
&=a\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2a\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2a\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}},\frac{x^2}{2}=t\\
&=\sqrt{2}a\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{2\pi}a\Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\\
&②\because f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\text{关于}x=1\text{对称}\\
&\therefore P\{X>1\}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

常见随机变量及分布

离散型

$$
\begin{aligned}
&\text{Note: }n\text{重贝努利试验}\\
&\quad\text{若①每次试验仅两个可能结果}A,\overline{A}\\
&\qquad\text{②每次试验}A,\overline{A}\text{发生的概率不变}\\
&\qquad\text{③试验}n\text{次}\\
&\qquad\text{令}P(A)=p,P(\overline{A})=1-p\\
&\qquad A_k=\{n\text{次中}A\text{发生}k\text{次}\}(k=0,1,2,\cdots,n)\\
&\qquad P(A_k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)\\
&\qquad\text{令}\{X=k\}=A_k(k=0,1,2,\cdots,n)
\end{aligned}
$$

二项分布

$$
\begin{aligned}
&X\text{随机变量,若}X\text{的分布律为}\\
&P\{X=k\}=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)\\
&\text{称}X\sim B(n,p)
\end{aligned}
$$

泊松分布 poisson

$$
\begin{aligned}
&X\text{随机变量,若}X\text{的分布律为}\\
&P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(\lambda>0,k=0,1,2,\cdots)\\
&\text{称}X\sim\pi(\lambda)\text{或}X\sim P(\lambda)
\end{aligned}
$$

$$\text{设随机变量}X\sim P(\lambda),\text{且}2P\{X=0\}=P\{X=1\},\text{求}P\{X\geq 2\}.$$

$$
\begin{aligned}
&X\sim P(\lambda)\Rightarrow P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,2,\cdots)\\
&P\{X=0\}=e^{-\lambda},P\{X=1\}=\lambda e^{-\lambda}\\
&\text{由}2P\{X=0\}=P\{X=1\}\Rightarrow\lambda=2\\
&P\{X\geq 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=1-e^{-2}-2e^{-2}=1-\frac{3}{e^2}
\end{aligned}
$$

几何分布

$$
\begin{aligned}
&X\text{随机变量,若}X\text{的分布律为}\\
&P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}(k=1,2,3,\cdots)\\
&\text{称}X\sim G(p),\text{geometry 几何}
\end{aligned}
$$

连续型

均匀分布

$$
\begin{aligned}
&X\text{随机变量,若}X\text{的密度函数为}\\
&f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a},a<x<b\\0,\text{其他}\end{cases}\\
&\text{称}X\text{在}(a,b)\text{内服从均匀分布,记}X\sim U(a,b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt\\
&x<a:F(x)=0;x\geq b:F(x)=1\\
&a\leq x<b:F(x)=\int_a^x\frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a}\\
&\therefore F(x)=\begin{cases}0,x<a\\\frac{x-a}{b-a},a\leq x<b\\1,x\geq b\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\text{设}X\sim U(-1,2),\text{对}X\text{独立观察4次,用}Y\text{表示4次中}X\leq 1\text{出现的次数,求}Y\text{的分布律}.$$

$$
\begin{aligned}
&1.X\sim U(-1,2)\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3},-1<x<2\\0.\text{其他}\end{cases}\\
&2.Y\sim B(4,p)\\
&3.p=P\{X\leq 1\}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{3}dx=\frac{2}{3},\therefore Y\sim B(4,\frac{2}{3})
\end{aligned}
$$

指数分布

X随机变量，若X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}(\lambda>0)$$

称X服从参数为λ的指数分布，记$X\sim E(\lambda)$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dt$$
$$x<0: F(x)=0$$
$$x\ge 0: F(x)=\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda t}dt=-e^{-\lambda t}\ |_0^x=1-e^{-\lambda x}$$
$$\therefore F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, x\ge 0\end{cases}$$

正态分布

X随机变量，若X的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(\mu\text{常数}, \sigma>0\text{常数}, -\infty<x<+\infty)$$

称X服从参数为μ,σ^2的正态分布，记$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

若$\mu=0,\sigma=1$：即

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

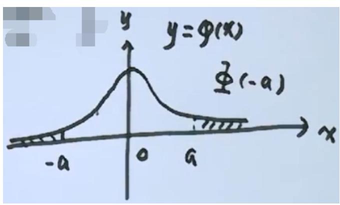
称X服从标准正态分布，记$X\sim N(0,1)$

若$X\sim N(0,1)$，则分布函数

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\phi(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$
$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}}d(\frac{t-\mu}{\sigma})$$
$$=\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2}}du=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$



Notes:

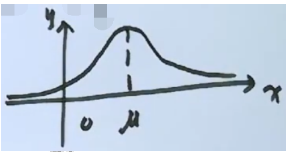
①若$X\sim N(0,1)$,则

$\Phi(0)=\dfrac{1}{2},\Phi(-a)=1-\Phi(a)$

②若$X\sim N(\mu,\sigma^2),f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,则

$P\{X\le\mu\}=P\{X>\mu\}=\dfrac{1}{2}$

③$X\sim N(\mu,\sigma^2)\begin{cases}F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})\\ \frac{x-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)\end{cases}$



$$X\sim N(\mu,\sigma^2),P\{\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma\}=2\Phi(2)-1$$

$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

原式$=P\{-2\sigma<X-\mu<2\sigma\}=P\{-2<\dfrac{X-\mu}{\sigma}\le 2\}$

$=P\{\dfrac{X-\mu}{\sigma}\le 2\}-P\{\dfrac{X-\mu}{\sigma}\le -2\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1$

$X\sim N(\mu,\sigma^2),t^2-4t+X=0$有实根的概率为$\dfrac{1}{2}$

求μ.

$t^2-4t+X=0$有实根$\Leftrightarrow 16-4X\le 0$,即$X\le 4$

$P\{X\le 4\}=\dfrac{1}{2}$

$\because X\sim N(\mu,\sigma^2),\therefore\mu=4$

$X\sim N(\mu,4^2),Y\sim N(\mu,5^2)$

$p=P\{X-\mu<-4\},q=P\{Y-\mu>5\},p,q$关系?

$\dfrac{X-\mu}{4}\sim N(0,1),\dfrac{Y-\mu}{5}\sim N(0,1)$

$p=P\{\dfrac{X-\mu}{4}\le -1\}=\Phi(-1)=1-\Phi(1)$

$q=P\{\dfrac{Y-\mu}{5}>1\}=1-P\{\dfrac{Y-\mu}{5}\le 1\}=1-\Phi(1)$

$\therefore p=q$

随机变量函数的分布

X分布已知,$Y=\phi(X)$,求Y的分布.

(一)X离散,$Y=\phi(X)$离散.

设随机变量$X\sim\begin{pmatrix}-2&0&1&2\\0.2&0.1&0.3&0.4\end{pmatrix},Y=X^2+1$,求$Y$的分布.

1.Y可能取值$1,2,5$

2.$P\{Y=1\}=P\{X=0\}=0.1$

$P\{Y=2\}=P\{X=1\}=0.3$

$P\{Y=5\}=P\{X=-2\}+P\{X=2\}=0.6$

Y	1	2	5
P	0.1	0.3	0.6

(二)X连续型, Y离散：

设随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}\sin x, 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 0, 其他\end{cases}$, 对$X$重复观察5次, 用$Y$表示5次观察中$\{X\le\dfrac{\pi}{3}\}$的次数, 求$P\{Y>1\}$.

1.$Y\sim B(5,p)$

2.$p=P\{X\le\dfrac{\pi}{3}\}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x dx=-\cos x\,|_0^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore Y\sim B(5,\dfrac{1}{2})$

3.$P\{Y>1\}=1-P\{Y\le 1\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}$

$=1-C_5^0(\dfrac{1}{2})^0\cdot(1-\dfrac{1}{2})^5-C_5^1(\dfrac{1}{2})^1\cdot(1-\dfrac{1}{2})^4$

$=1-\dfrac{6}{32}=\dfrac{13}{16}$

(三)X连续型, $Y=\phi(X)$连续型

$X\sim U(-2,2), Y=X^2$, 求$f_Y(y)$.

1.$X\sim U(-2,2)\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, -2<x<2 \\ 0, 其他\end{cases}$

2.$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$

$y<0: F_Y(y)=0, y\ge 4: F_Y(y)=1$

$0\le y<4: F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=-\displaystyle\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\dfrac{1}{4}dx=\dfrac{\sqrt{y}}{2}$

即$F_Y(y)=\begin{cases}0, y<0 \\ \frac{\sqrt{y}}{2}, 0\le y<4 \\ 1, y\ge 4\end{cases}$

3.$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}}, 0<y<4 \\ 0, 其他\end{cases}$

$X\sim E(2), Y=1-e^{-2x}$, 求$f_Y(y)$.

$1.X \sim E(2) \Rightarrow f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, x>0\\0, x\le 0\end{cases}$

$F(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}, x\ge 0\\0, x<0\end{cases}$

$2.F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

$y<0: F_Y(y)=0$

$y\ge 1: F_Y(y)=1$

$0\le y<1: F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-e^{-2x}\le y\}$

$=P\{X\le \frac{1}{2}\ln(1-y)\}=F[-\frac{1}{2}\ln(1-y)]=y$

$\therefore F_Y(y)=\begin{cases}0, y<0\\y, 0\le y<1\\1, y\ge 1\end{cases}$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}1, 0<y<1\\0, \text{其他}\end{cases}$, 即$Y\sim U(0,1)$

$$X\sim E(3), Y=\min\{x,2\}, \text{求}F_Y(y)$$

$1.X\sim E(3)\Rightarrow F(X)=\begin{cases}1-e^{-3x}, x\ge 0\\0, x<0\end{cases}$

$2.F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\min\{x,2\}\le y\}$

$=1-P\{\min\{x,2\}>y\}=1-P\{x>y, 2>y\}$

$=1-P\{x>y\}P\{2>y\}$

若$y\ge 2: F_Y(y)=1$

若$y<2: F_Y(y)=1-P\{X>y\}=P\{x\le y\}$

$=F(y)=\begin{cases}0, y<0\\1-e^{-3y}, 0\le y<2\end{cases}$

$\therefore F_Y(y)=\begin{cases}0, y<0\\1-e^{-3y}, 0\le y<2\\1, y\ge 2\end{cases}$