秩(矩阵理论二)

$A_{m\times n}$, A中任取r行r列而成的r阶行列式
称为A的r阶子式($r \le \min\{m,n\}$)

$$如：A=\begin{pmatrix}1&2&1&4\\2&1&-1&5\\3&1&2&4\end{pmatrix}$$

$$A的3阶子式：\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\3&1&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&4\\2&1&5\\3&1&4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&4\\2&-1&5\\3&2&4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&1&4\\1&-1&5\\1&2&4\end{vmatrix}$$

若①$\exists r$阶子式 $\neq 0$
②$\forall r+1$阶子式或皆为0或不存在
称A的秩为r, 记$r(A)=r$

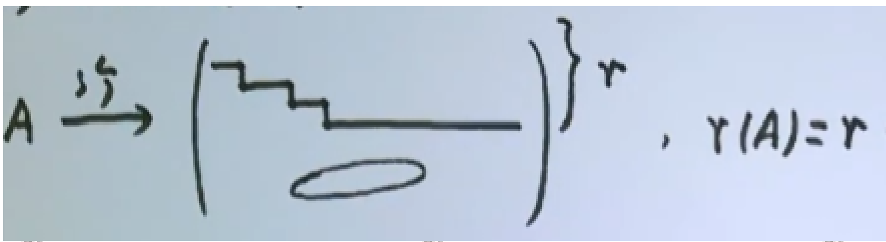
Notes:

①$A_{m\times n} \Rightarrow \begin{cases} r(A)\le m \\ r(A)\le n \end{cases} \Leftrightarrow r(A) \le \min\{m,n\}$

②$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}, r(\alpha)\le 1, r(\alpha)=\begin{cases}1, \alpha\neq 0\\ 0, \alpha=0\end{cases}$

③$A_{n\times n}$
case1 A可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow r(A)=n$(满秩)
case2 A不可逆 $\Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow r(A)<n$(降秩)

r(A)求法



Notes:
①$r(A)=0 \Leftrightarrow A=0$
②$A\neq 0 \Leftrightarrow r(A)\ge 1$
③A至少两行不成比例 $\Leftrightarrow r(A)\ge 2$

秩的性质

Notes: 设$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$

①$\alpha^T\beta=(a_1\ldots a_n)\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+\ldots+a_nb_n-$左转右不转为数

$\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)=a_1b_1+\ldots+a_nb_n$

②$\alpha\beta^T=\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1\ldots b_n)=\begin{pmatrix}a_1b_1 & \ldots & a_1b_n\\ a_2b_1 & \ldots & a_2b_n\\ \ldots & & \\ a_nb_1 & \ldots & a_nb_n\end{pmatrix}-$左不转右转为正

1

$$1.r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$$
Notes: 见A^TA,AA^T

$$A_{m\times n},A^TA=0,\text{证}:A=0$$

$$\begin{aligned}\text{证}:&A^TA=0\Rightarrow r(A^TA)=0\\ &\because r(A)=r(A^TA)\\ &\therefore r(A)=0\Rightarrow A=0\end{aligned}$$

2

$$2.①r(A)\text{或}r(B)\le r(A\vdots B)\le r(A)+r(B)$$

$$②r(A)\text{或}r(B)\le r\begin{pmatrix}A\\ \cdots\\ E\end{pmatrix}\le r(A)+r(B)$$

$$③r\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$$

3 4

3.$r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$

Note: 见$r(A+B),r(A-B),r(A)+r(B)$

4.$A_{m\times n},B_{n\times s}$,则

$$\begin{cases}r(AB)\le r(A)\\ r(AB)\le r(B)\end{cases}\Leftrightarrow r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$$

Notes: 见$r(AB)$

$$\alpha=\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\ne0,\beta=\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\ne0,A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T,\text{证}:r(A)\le2$$

$$\begin{aligned}\text{证}:&r(A)\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)\\ &\because r(\alpha\alpha^T)=r(\alpha)=1,r(\beta\beta^T)=r(\beta)=1\\ &\therefore r(A)\le2\end{aligned}$$

5

$$5.A_{m\times n}, B_{n\times s}, \text{且} AB=0, \text{则}$$
$$r(A)+r(B)\le n$$

Notes: 见$AB=0$

$A_{n\times n}$可逆, 证：其逆阵唯一.

证 :A可逆 $\Leftrightarrow r(A)=n$
(反)设$AB=E, AC=E$
$\Rightarrow AB-AC=0 \Rightarrow A(B-C)=0$
$\Rightarrow r(A)+r(B-C)\le n$
$\Rightarrow r(B-C)\le 0 \Rightarrow r(B-C)=0 \Rightarrow B-C=0$
$\therefore B=C$

证：$r(A\vdots AB)=r(A)$.

证 :$r(A\vdots AB)\ge r(A)$
$\because (A\vdots AB)=A(E\vdots B)$
$\therefore r(A\vdots AB)=r[A(E\vdots B)]\le r(A)$
$\therefore r(A\vdots AB)=r(A)$

$A_{n\times n}, A^2+A-2E=0$, 证：
$r(E-A)+r(2E+A)=n$

证 :$A^2+A-2E=0 \Rightarrow (A-E)(A+2E)=0 \Rightarrow (E-A)(2E+A)=0$
$r(E+A)+r(2E-A)\le n$
又$r(E+A)+r(2E-A)\ge r(3E)=n$
$\therefore r(E+A)+r(2E-A)=n$

6

6.P, Q可逆, 则
$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$
即初等变换秩不变
Notes:
①A进行初等行变换为$B \Leftrightarrow \exists$可逆阵$P$, 使$PA=B$
②A进行初等列变换为$C \Leftrightarrow \exists$可逆阵$Q$, 使$AQ=C$

证：$r(A\vdots AB)=r(A)$.

证 :$(A\vdots AB)$经过初等列变换$(A\vdots 0)$

$\therefore r(A\vdots AB)=r(A\vdots 0)=r(A)$

P可逆, 令$B=PA$
$r(B)=r(PA)\le r(A)$
$\because P$可逆,$\therefore A=P^{-1}B$
$r(A)=r(P^{-1}B)\le r(B) \Rightarrow r(A)=r(B)=r(PA)$

$$r(A^*)=\begin{cases}n, r(A)=n\\1, r(A)=n-1\\0, r(A)<n-1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\text{证}: ① r(A)=n: |A|\neq 0\\&\quad AA^*=|A|E\Rightarrow |A|\cdot|A^*|=|A|^n\\&\quad \because |A|\neq 0, \therefore |A^*|=|A|^{n-1}\neq 0\Rightarrow r(A^*)=n\\&② r(A)=n-1: |A|=0\\&\quad AA^*=|A|E=0\Rightarrow r(A)+r(A^*)\leq n\Rightarrow r(A^*)\leq 1\\&\quad \because r(A)=n-1, \therefore \exists M_{ij}\neq 0\Rightarrow \exists A_{ij}\neq 0\\&\quad \Rightarrow A^*\neq 0\Rightarrow r(A^*)\geq 1\Rightarrow r(A^*)=1\\&③ r(A)<n-1: \forall M_{ij}=0\Rightarrow \forall A_{ij}=0\\&\quad \therefore A^*=0\Rightarrow r(A^*)=0\end{aligned}$$

矩阵等价

A, B同型

若A经过初等变换为B(或$\exists$可逆的P, Q, 使得$PAQ=B$), 称A, B等价

判别法

$$\text{Th. } A, B\text{同型, 则}A, B\text{等价}\Leftrightarrow r(A)=r(B)$$