逆阵(矩阵理论一)

$$\begin{cases} ①\text{什么叫逆阵?} \\ ②\text{可逆否?} \\ ③\text{若可逆, 求}A^{-1}? \end{cases}$$

$A_{n\times n}$, 若$\exists B_{n\times n}$, 使$BA=E$(或$AB=E$)
称A可逆, $B\triangleq A^{-1}$

Nots:用定义法求A^{-1}方法为
$A\times(?)=E$

设A为n阶矩阵, 若$A^2+A-2E=0$, 求A^{-1}.

$$A(A+E)=2E\Rightarrow A\cdot\frac{1}{2}(A+E)=E$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}(A+E)$$

设A为n阶矩阵, 若$A^2+A-4E=O$, 求$(A-E)^{-1}$.

$$(A-E)\cdot(A+2E)-2E=0$$

$$\Rightarrow(A-E)\cdot\frac{1}{2}(A+2E)=E\Rightarrow(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2E)$$

设$A\neq 0$, 但$A^2=0$, 求$(E-A)^{-1}$.

$$(E-A)(E+A)=E-A^2=E$$

$$\Rightarrow(E-A)^{-1}=E+A$$

判别

Notes :

1.①$|A^T|=|A|$;②$|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$

③$|A^*|=|A|^{n-1}$;④$A_{n\times n}$, $|kA|=k^n|A|$

⑤$A_{n\times n},B_{n\times n}$, $|AB|=|A|\cdot|B|$(Laplace法则)

2.①$(A^{-1})^{-1}$;②$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

③$(A^{-1})^m=(A^m)^{-1}$;④$(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$

⑤$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

⑥$\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&\\&B^{-1}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}&A\\B&\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}&B^{-1}\\A^{-1}&\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}&\text{Th.}A_{n\times n}\text{可逆}\Leftrightarrow |A|\neq 0\\&\text{证}:\Rightarrow \exists B,\text{使}BA=E\Rightarrow |B||A|=E\Rightarrow |A|\neq 0\\&\Leftarrow\because AA^*=|A|E,\text{而}|A|\neq 0\\&\therefore A\cdot\frac{1}{|A|}A^*=E\\&\therefore A\text{可逆且}A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*(n\leq 3)\end{aligned}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&3&-1\\3&4&3\end{pmatrix},\text{问}A\text{可逆否?若可逆},A^{-1}=?$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&3&-1\\3&4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&-5\\0&1&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&-5\\0&0&2\end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow A\text{可逆}$$

$$\begin{cases}M_{11}=13,A_{11}=13\\M_{12}=9,A_{12}=-9\\M_{13}=-1,A_{13}=-1\end{cases},\begin{cases}M_{21}=-5,A_{21}=5\\M_{22}=-3,A_{22}=-3,\\M_{23}=1,A_{23}=-1\end{cases}\begin{cases}M_{31}=-7,A_{31}=-7\\M_{32}=-5,A_{32}=5\\M_{33}=1,A_{33}=1\end{cases}$$

$$A^*=\begin{pmatrix}13&5&-7\\-9&-3&5\\-1&-1&1\end{pmatrix},\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}13&5&-7\\-9&-3&5\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\text{Note:若}A\text{可逆},\text{则}A^*=|A|A^{-1}$$

$$\text{设}A\text{为}n\text{阶可逆矩阵},\text{且}k\neq 0,\text{求}(kA)^*.$$

$$(kA)^*=|kA|\cdot(kA)^{-1}=k^n|A|\cdot\frac{1}{k}A^{-1}=k^{n-1}A^*$$

$$A,B\text{为}n\text{阶可逆阵},(AB)^*?$$

$$\begin{aligned}&(AB)^*=|AB|\cdot(AB)^{-1}=|A|\cdot|B|\cdot B^{-1}A^{-1}\\&=|B|B^{-1}\cdot|A|A^{-1}=B^*A^*\end{aligned}$$

$$A,B\text{可逆},\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}^*?$$

$$\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix}A&\\&B\end{vmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}^{-1}=|A|\cdot|B|\cdot\begin{pmatrix}A^{-1}&\\&B^{-1}\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}|B|A^*&\\&|A|B^*\end{pmatrix}$$

逆阵求法

方法一：伴随矩阵法：$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*(n\le 3)$

方法二：初等变换法思想体系

1.方程组的同解变形：$\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3+2x_4=0\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0\\ \dots\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2+2x_3-x_4=0\\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_4=0\\ \dots\end{cases}$

①对调两个方程

②一方程 $\times C\ne 0$

③一方程 $\times k$加到另一方程

①到③称为同解变形

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3+2x_4=0\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&-2&1&2\\1&-1&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0,\text{一方程一行}$$

矩阵的三种初等行变换

①对调两行

②一行 $\times C\ne 0$

③一行 $\times k$加到另一行

称①到③为矩阵的初等行变换

Notes:

$$①\begin{cases}\text{对调两列}\\ \text{一列}\times C\ne 0 \qquad \text{称为矩阵的初等列变换}\\ \text{一列}\times k\text{加到另一列}\end{cases}$$

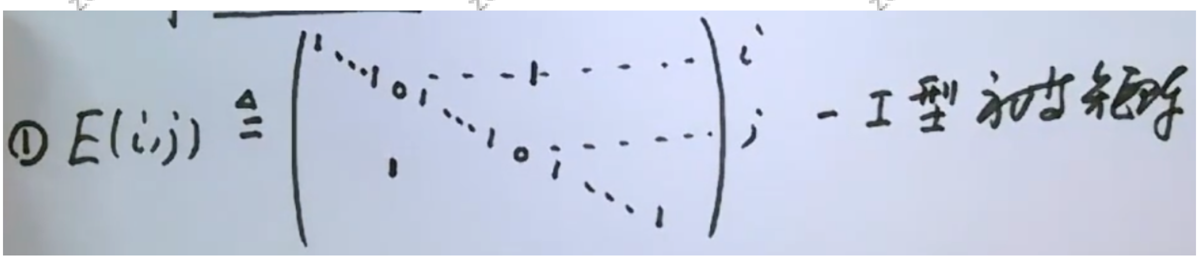
②解方程组禁止使用初等列变换

三种初等矩阵

I

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\triangleq E(2,3)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_3&b_3&c_3\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} E(i,j)A - A\text{的}i,j\text{行对调} \\ AE(i,j) - A\text{的}i,j\text{列对调} \\ |E(i,j)| = -1 \\ E^{-1}(i,j) = E(i,j), E(i,j)\cdot E(i,j) = E \Leftrightarrow E^2(i,j) = E \end{cases}$$

II

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \triangleq E_2(3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 3a_2 & 3b_2 & 3c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$② E_i(c) \triangleq \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \text{— II型初等矩阵.}$$

$(c \neq 0)$

$$E_i(C): \begin{cases} E_i(C)A - A\text{的}i\text{行} \times C \neq 0 \\ AE_i(C) - A\text{的}i\text{列} \times C \neq 0 \\ |E_i(C)| = C \neq 0 \\ E_i^{-1}(C) = E_i(\frac{1}{C}) \end{cases}$$

III

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \triangleq E_{31}(2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 2a_1 + a_3 & 2b_1 + b_3 & 2c_1 + c_3 \end{pmatrix}$$

$$③ E_{ij}(k) \triangleq \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & \cdots & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & \cdots & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Ⅲ型初等阵.

$$E_{ij}(k):\begin{cases} E_{ij}(k)A-A\text{的}j\text{行}k\text{倍加到}i\text{行} \\ AE_{ij}(k)-A\text{的}i\text{列}k\text{倍加到}j\text{列} \\ |E_{ij}(k)|=1\neq 0 \\ E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k) \end{cases}$$

Notes:
①A三种初等行变换 $\Leftrightarrow$ A左乘$E(i,j),E_i(C),E_{ij}(k)$
A的三种初等列变换 $\Leftrightarrow$ A右乘$E(i,j),E_i(C),E_{ij}(k)$
②方程组同解变形 $\Leftrightarrow$ 初等行变换 $\Leftrightarrow$ 左乘$E(i,j),E_i(C),E_{ij}(k)$
③$E^{-1}(i,j)=E(i,j),E_i^{-1}(C)=E_i(\frac{1}{C}),E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k)$
初等矩阵逆阵仍为初等阵且型不改

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\2&3&2\end{pmatrix}.\ (|A|=2\neq 0).$$

$$A\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\0&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

$$E_{12}(-1)\cdot E_{13}(1)\cdot E_{23}(-2)\cdot E_3(\tfrac{1}{2})\cdot E_{32}(-1)\cdot E_{31}(-2)\cdot E_{21}(-1)\cdot A=E$$

4.①$A_{n\times n},|A|\neq 0,A\to E$行变换或列变换

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\2&3&2\end{pmatrix}(|A|=2\neq 0)$$

初等行变换与初等列变换合成初等变换

$$\text{初等变换}\begin{cases}\text{初等行变换}\begin{cases}\text{对调两行}\\ \text{一行}\times C\neq 0\\ \text{一行}\times k\text{加到另一行}\end{cases}\\ \text{初等列变换}\end{cases}$$

结论：
Th1 A可逆 $\Leftrightarrow$ A等于若干个初等矩阵之积
证明：$\Rightarrow$, 设A可逆, 则A可行变换为E
即$\exists$初等阵$P_1,P_2,\ldots,P_s$, 使
$P_s\ldots P_2P_1A=E$
$\Rightarrow A=(P_s\ldots P_2P_1)^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}\ldots P_s^{-1}$
$\because$ 初等阵逆阵仍为初等阵, $\therefore$ A等于若干初等阵之积
$\Leftarrow$, 设$A=Q_1\ldots Q_t$, 其中$Q_1\ldots Q_t$为初等阵
$\because |A|=|Q_1|\ldots|Q_t|\neq 0$
$\therefore$ A可逆

如：$A=(\alpha_1,\alpha_2),B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix},AB=(2\alpha_1+\alpha_2,3\alpha_1-2\alpha_2)$

$(A\vdots AB)=(\alpha_1,\alpha_2\vdots 2\alpha_1+\alpha_2,3\alpha_1-2\alpha_2)$

$\to(\alpha_1,\alpha_2\vdots 0,0)=(A\vdots 0)$

推论1$(A\vdots AB)\to(A\vdots 0)$

②$A_{n\times n},|A|=0,A$不能行变换为$\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 2 & -2 & 4\\ 2 & 3 & 0 & 5\end{pmatrix},|A|=0$$

$$A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

③$A_{n\times n},|A|=0,A$可以行列变换为$\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Th2 $A_{n\times n},|A|=0$,则存在可逆P,Q,使

$$PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

证 $\because A$通过行和列变换为$\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\therefore\exists$初等阵$P_1,\dots,P_s,Q_1,\dots,Q_t$

使$P_s\dots P_1AQ_1\dots Q_t=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

令$P=P_s\dots P_1,Q=Q_1\dots Q_t,P,Q$可逆

Th3 $A_{n\times n},|A|\neq 0$,则

①$(A\vdots E)$行变换为$(E\vdots A^{-1})$;② $\begin{pmatrix}A\\ \cdots\\ E\end{pmatrix}$列变换为$\begin{pmatrix}E\\ \cdots\\ A^{-1}\end{pmatrix}$

$\because|A|\neq 0,\therefore A$可行变换为$E$,即$\exists P_1,..,P_s$,使

A行变换为$P_s\dots P_1A=E,A^{-1}=P_s\dots P_2P_1$

E行变换为$P_s\dots P_1E=A^{-1}$

$\therefore(A\vdots E)$行变换为$(E\vdots A^{-1})$

$A_{3\times 3}$,2行4倍加到第三行,第一列-2倍加到第3列成

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix},求A$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&-1\\2&3&3\end{pmatrix}, 求A^{-1}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&-1\\2&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&-3\\0&0&2\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \text{可逆}$$

$$(A\vdots E)=\begin{pmatrix}1&1&2&1&0&0\\1&2&-1&0&1&0\\2&3&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&1&-3&-1&1&0\\0&1&-1&-2&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&1&-3&-1&1&0\\0&0&2&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&1&-3&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&2&1&-1\\0&1&0&-\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{9}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\0&1&0&-\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}9&3&-5\\-5&-1&3\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$