进位计数制及其相互转换

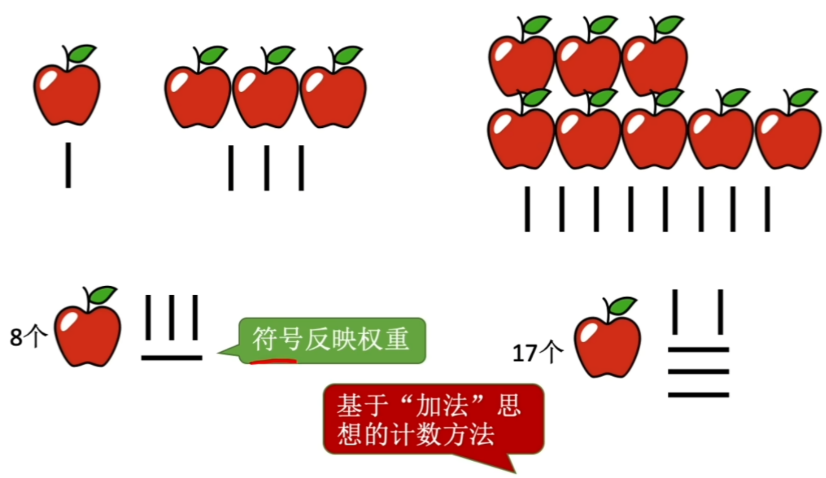
- **进位计数值**
  - r进制数
    - 基数=r，每个数码位可能出现r种字符。逢r进1
  - r进制数—>十进制
    - $K_n K_{n-1} \dots K_2 K_1 K_0 . K_{-1} K_{-2} \dots K_{-m}$
      $= K_n \times r^n + K_{n-1} \times r^{n-1} + \cdots + K_2 \times r^2 + K_1 \times r^1 + K_0 \times r^0$
      $+ K_{-1} \times r^{-1} + K_{-2} \times r^{-2} + \dots + K_{-m} \times r^{-m}$
    - r进制数的数值=各数码位与位权的乘积之和
  - 二进制<—>八进制
    - 每3个二进制位对应一个八进制位
  - 二进制<—>十六进制
    - 每4个二进制位对应一个十六进制位
    - （以上两项）注意“补位”
  - 十进制—>r进制
    - 整数部分：除基取余法，先取得的“余”是整数的低位
    - 小数部分：乘基取整法，先取得的“整”是小数的高位
  - 真值和机器数
    - 真值：实际的带正负号的数值（人类习惯的样子）
    - 机器数：把正负号数字化的数（存到机器里的样子）

注意：有的十进制小数无法用二进制精确表示，如：0.3

2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125

- **进位计数制**
  - 十进制、二进制、八进制、十六进制
  - ★ 其他进制 ——>十进制
  - ★ 二进制、八进制、十六进制之间的相互转换
  - ★ 十进制——>其他进制
  - 真值和机器数

最古老的计数方法

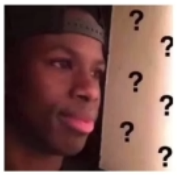


罗马数字的几种符号与对应权重

基本字符	I	V	X	L	C	D	M
相应的阿拉伯数字表示为	1	5	10	50	100	500	1000

I—1、II—2、III—3、IIII—4 (IV)、V—5
X—10、XI—11、XII—12、XIII—13
MDCLXVI—1666、MDCCCLXXXVIII—1888

十进制计数法



古印度人发明的阿拉伯数字：0，1，2，3，4，5，6，7，8，9

符号反映权重

十进制： 975.36

符号所在的位置也反映权重

$9\times100+7\times10+5\times1+3\times0.1+6\times0.01$

基于“乘法”思想的计数方法

$9\times10^2+7\times10^1+5\times10^0+3\times10^{-1}+3\times10^{-2}$

十进制： $K_n\,K_{n-1}\,\ldots\,K_2\,K_1\,K_0\,K_{-1}K_{-2}\ldots K_{-m}$

位权

$$=K_n\times\boxed{10^n}+K_{n-1}\times\boxed{10^{n-1}}+\cdots+K_2\times\boxed{10^2}+K_1\times\boxed{10^1}+K_0\times\boxed{10^0}$$
$$+K_{-1}\times\boxed{10^{-1}}+K_{-2}\times\boxed{10^{-2}}+\ldots+K_{-m}\times\boxed{10^{-m}}$$

“进位计数制”

有0~9，共十种符号。

逢十进一

推广：r进制计数法

推广：r 进制计数法

r 进制： $K_n\,K_{n-1}\,\ldots\,K_2\,K_1\,K_0\,K_{-1}K_{-2}\ldots K_{-m}$

位权

$$=K_n\times\boxed{r^n}+K_{n-1}\times\boxed{r^{n-1}}+\cdots+K_2\times\boxed{r^2}+K_1\times\boxed{r^1}+K_0\times\boxed{r^0}$$
$$+K_{-1}\times\boxed{r^{-1}}+K_{-2}\times\boxed{r^{-2}}+\ldots+K_{-m}\times\boxed{r^{-m}}$$

基数：每个数码位所用到的不同符号的个数，r 进制的基数为 r

六十进制

①可使用两个稳定状态的物理器件表示
②0，1 正好对应逻辑值 假、真。方便实现逻辑运算
③可很方便地使用逻辑门电路实现算术运算

二进制： 0,1	二进制： 101.1 —> $1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-1}=5.5$
八进制： 0,1,2,3,4,5,6,7	八进制： 5.4 —> $5\times8^0+4\times8^{-1}=5.5$
十进制： 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9	十进制： 5.5 —> $5\times10^0+5\times10^{-1}=5.5$
十六进制： 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F	十六进制： 5.8 —> $5\times16^0+8\times16^{-1}=5.5$

任意进制->十进制

r 进制： $K_n K_{n-1} \ldots K_2 K_1 K_0 K_{-1} K_{-2} \ldots K_{-m}$ 位权

$$= K_n \times \boxed{r^n} + K_{n-1} \times \boxed{r^{n-1}} + \cdots + K_2 \times \boxed{r^2} + K_1 \times \boxed{r^1} + K_0 \times \boxed{r^0}$$
$$+ K_{-1} \times \boxed{r^{-1}} + K_{-2} \times \boxed{r^{-2}} + \ldots + K_{-m} \times \boxed{r^{-m}}$$

二进制：1 0 0 1 0 0 1 0 . 1 1 0 $1 * 2^7 + 1 * 2^4 + 1 * 2^1 + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2} = 146.75$

八进制：251.5 $2 * 8^2 + 5 * 8^1 + 1 * 8^0 + 5 * 8^{-1} = 168.625$

十六进制：AE86.1 $10 * 16^3 + 14 * 16^2 + 8 * 16^1 + 6 * 16^0 + 1 * 16^{-1} = 44678.0625$

2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125

二进制<->八进制、十六进制

如：1111000010.01101

二进制 —> 八进制

3位一组，每组转换成对应的八进制符号

001 111 000 010 . 011 010

1 7 0 2 . 3 2 八进制

八进制—> 二进制

每位八进制对应的3位二进制

$(251.5)_8$ → $(010\ 101\ 001.\ 101)_2$

二进制 —> 十六进制

4位一组，每组转换成对应的十六进制符号

0011 1100 0010 . 0110 1000

3 C 2 . 6 8 十六进制

十六进制—> 二进制

每位十六进制对应的4位二进制

$(AE86.1)_{16}$ → $(1010\ 1110\ 1000\ 0110.0001)_2$

各种进制的常见书写方式

二进制—— $(1010001010010)_2$　　　1010001010010B

八进制—— $(1652)_8$

十六进制—— $(1652)_{16}$　　　1652H　　　0x1652

十进制—— $(1652)_{10}$　　　1652D

十六进制

adj. hexadecimal ;

十进制

n. decimalism

十进制->任意进制

十进制 —> 任意进制

r 进制： $K_n K_{n-1} \ldots K_2 K_1 K_0 K_{-1} K_{-2} \ldots K_{-m}$

$$= K_n \times r^n + K_{n-1} \times r^{n-1} + \cdots + K_2 \times r^2 + K_1 \times r^1 + K_0 \times r^0 + K_{-1} \times r^{-1} + K_{-2} \times r^{-2} + \ldots + K_{-m} \times r^{-m}$$

如：75.3　　整数部分=75

任一数码位$K_i < r$

$$\frac{K_n \times r^n + K_{n-1} \times r^{n-1} + \cdots + K_2 \times r^2 + K_1 \times r^1 + K_0 \times r^0}{r} = \underbrace{K_n \times r^{n-1} + K_{n-1} \times r^{n-2} + \cdots + K_2 \times r^1 + K_1 \times r^0}_{商} \ldots \underbrace{K_0}_{余数}$$

如：十进制 —> 二进制　　r = 2

$75 \div 2 = 37 \ldots \boxed{1}\ K_0$

$37 \div 2 = 18 \ldots \boxed{1}\ K_1$

$18 \div 2 = 9 \ldots \boxed{0}\ K_2$

$9 \div 2 = 4 \ldots \boxed{1}\ K_3$

$4 \div 2 = 2 \ldots \boxed{0}\ K_4$

$2 \div 2 = 1 \ldots \boxed{0}\ K_5$

$1 \div 2 = 0 \ldots \boxed{1}\ K_6$

75D = 1001011B

$(75)_{10} = (1001011)_2$

除基	取余	
2 | 75	1	低位
2 | 37	1	
2 | 18	0	
2 | 9	1	
2 | 4	0	
2 | 2	0	
2 | 1	1	高位
0		

如：75.3　　小数部分=0.3

$$(K_{-1}\times r^{-1}+K_{-2}\times r^{-2}+\ \dots+K_{-m}\times r^{-m})\times r\ =\underbrace{K_{-1}\times r^{0}}_{整数}\ +\ \underbrace{K_{-2}\times r^{-1}+\ \dots+K_{-m}\times r^{-(m-1)}}_{小数}$$

如：十进制 —> 二进制　　r = 2

$0.3\times 2\ =\ 0.6\ =\boxed{0}+\ 0.6\quad K_{-1}$

$0.6\times 2\ =\ 1.2\ =\boxed{1}+\ 0.2\quad K_{-2}$

$0.2\times 2\ =\ 0.4\ =\boxed{0}+\ 0.4\quad K_{-3}$

$0.4\times 2\ =\ 0.8\ =\boxed{0}+\ 0.8\quad K_{-4}$

$0.8\times 2\ =\ 1.6\ =\boxed{1}+\ 0.6\quad K_{-5}$

……

0.3D = 0.01001… B

乘基	取整	
0.3		
× 2		
0.6	0	高位
× 2		
1.2	1	
0.2		
× 2		
0.4	0	低位
…		

十进制->二进制（拼凑法）

十进制：260.75、533.125

2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^{9}	2^{8}	2^{7}	2^{6}	2^{5}	2^{4}	2^{3}	2^{2}	2^{1}	2^{0}	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125

真值和机器数

15 → 1111　　　　+15 → 0 1111

8 → 1000　　　　- 8 → 1 1000

真值　　机器数

→ 原码、反码、补码、移码

真值：符合人类习惯的数字

机器数：数字实际存到机器里的形式，正负号需要被“数字化”