洛必达法则

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$$
$$\frac{\infty}{\infty}$$
$$①\ln^a x(a>0)\to+\infty(x\to+\infty)$$
$$x^b(b>0)\to+\infty(x\to+\infty)$$
$$c^x(c>1)\to+\infty(x\to+\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{80}x}{\sqrt{x}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{60}}{2^x}=0$$

$$② \lim_{x\to+\infty}\frac{b_m x^m+\ldots}{a_n x^n+\ldots}\begin{cases}=0,m<n\\=\infty,m>n\\=\frac{b_m}{a_n},m=n\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2-4x+1}{x-1}-x)$$
$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+1}{x-1}=5$$

---

1. 若①$f(x),g(x)$在$x=a$的去心邻域可导且$f'(x)\neq 0$

   ② $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$

   ③ $\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=A\Rightarrow\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=A$

①若$\lim\frac{g'(x)}{f'(x)}$不存在，不代表$\lim\frac{g(x)}{f(x)}$不存在

仅仅代表洛氏法则无效

$g(x)=x^2\sin\frac{1}{x},f(x)=x,x=0,f'(x)=1\neq 0,$

$\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{f'(x)}=\lim_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})$不存在

而$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

求极限$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x^2\ln(1+2x)}$.

$$(1+\Delta)^a-1\sim a\Delta,\Delta\to 0$$

$$
\begin{aligned}
原式 &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - x}{x^3} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{3x^2} \\
&\because (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1 \sim (-\frac{1}{2})(-x^2) = \frac{1}{2}x^2 \\
&\therefore 原式 = \frac{1}{6} * \frac{1}{2} = \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

---

2. 若①$f(x),g(x)$在$x=a$的去心邻域可导且$f'(x)\neq 0$
   ②$f(x)\to\infty, g(x)\to\infty(x\to a)$
   ③$\lim\limits_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)} = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = A$

$$f(x)=x, g(x)=2x+\sin x, \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)} : \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{f'(x)} = \lim_{x\to\infty}(2+\cos x)不存在$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x}\sin x) = 2$$

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{2x^2+x+3}$.

$$原式 = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2+x+3} * \frac{\ln^2 x}{x^2} = 0$$