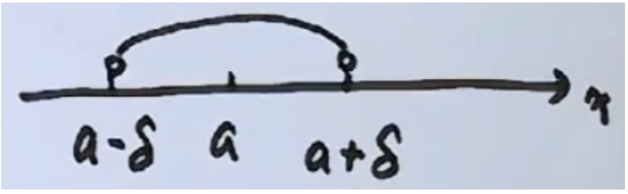
函数及函数的初等特性

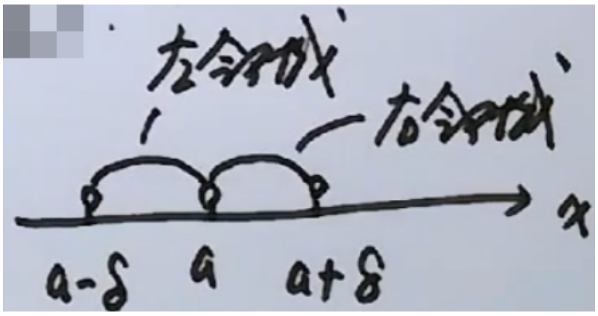
邻域



$$a\text{的}\delta\text{邻域}$$

$$a \in R, \delta > 0$$

$$U(a,\delta) = \{x||x-a|<\delta\} = (a-\delta, a+\delta)$$



$$a\text{的去心}\delta\text{邻域}$$

$$a \in R, \delta > 0$$

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x|0<|x-a|<\delta\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$$

函数

$$R = \{y|y=f(x), x \in D\} - \text{值域}$$

$$y = sgn\ x \begin{cases} -1, x<0 \\ 0, x=0 \\ 1, x>0 \end{cases}$$

$$|a| = a\ sgn\ a$$

$$Dirichlet\text{函数}$$

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\text{取整函数}$$

$$y = [x] - \text{值为不超过}x\text{的最大整数}$$

$$[-3] = -3, [0] = 0, [2] = 2$$

$$[-3.2] = -4, [\sqrt{3}] = 1$$

$$\begin{cases} [x] \le x \\ [x+y] \ne [x]+[y], [-0.2+0.8] = [0.6] = 0, [-0.2]+[0.8] = -1 \\ [x+k] = [x]+k(k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

反函数

$$y=f(x)(x\in D),R=\{y|y=f(x),x\in D\}$$

$$若\forall y\in R,由y=f(x)确定唯一的x\in D与x对应$$

$$x称为y的函数,记x=f^{-1}(y)$$

$$\begin{aligned}&1.\quad y=f(x)(x\in D)严格单调\Rightarrow\exists反函数\\&2.\quad y=f(x)\Rightarrow x=\Phi(y)为y=f(x)的反函数\end{aligned}$$

$$求函数y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})的反函数.$$

$$x+\sqrt{x^2+1}=e^y$$

$$\because(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})=1$$

$$\therefore -x+\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=e^{-y}$$

$$\Rightarrow 反函数为x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

基本初等函数

$$\begin{aligned}&1.\quad y=x^a,y=x^3(-\infty<x<+\infty),y=\sqrt{x}(0\le x<+\infty)\\&2.\quad y=a^x(a>0且a\neq1)(-\infty<x<+\infty)\\&3.\quad y=\log_a x(a>0且a\neq1)(0<x<+\infty)\\&4.\quad\begin{cases}\sin x,\cos x:(-\infty<x<+\infty)\\\sec x=\frac{1}{\cos x},\tan x:\{x|x\in\mathbb{R},x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})\}\\\csc x=\frac{1}{\sin x},\cot x:\{x|x\in\mathbb{R},x\neq k\pi(k\in\mathbb{Z})\}\end{cases}\\&5.\quad\begin{cases}\arcsin x,\arccos x:(-1\le x\le1)\\\arctan x,arccot\ x:(-\infty<x<+\infty)\end{cases}\end{aligned}$$

初等函数

$$由\begin{cases}常数\\基本初等函数\end{cases}经过\begin{cases}四则\\复合\end{cases}而成的式子$$

$$称为初等函数$$

初等特性

有界性

$$对\{a_n\},若\exists M>0,使\forall n,有|a_n|\le M(-M\le a_n\le M),称\{a_n\}有界$$

$$若\exists M_1,\forall n,a_n\ge M_1,\{a_n\}有下界$$

$$若\exists M_2,\forall n,a_n\le M_2,\{a_n\}有上界$$

$$|a_n|\le2\Rightarrow\begin{cases}a_n\ge-2\\a_n\le2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_n\ge-3\\a_n\le5\end{cases}\Rightarrow|a_n|\le5$$

$$\{a_n\}有界\Leftrightarrow\{a_n\}有上、下界$$

$$y=f(x)(x\in D)$$

$$\text{若}\exists M>0,\text{对}\forall x\in D,|f(x)|\le M$$
$$\text{称}f(x)\text{在}D\text{上有界}$$
$$\text{若}\exists M_1,\text{对}\forall x\in D,|f(x)|\ge M_1$$
$$\text{称}f(x)\text{在}D\text{上有下界}$$
$$\text{若}\exists M_2,\text{对}\forall x\in D,|f(x)|\le M_2$$
$$\text{称}f(x)\text{在}D\text{上有上界}$$

$$f(x)\text{在}D\text{上有界}\Leftrightarrow f(x)\text{在}D\text{上有上、下界}$$

奇偶性

$$y=f(x)(x\in D),D\text{关于原点对称}$$

$$\text{讨论函数}f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\text{的奇偶性.}$$
$$x\in(-\infty,+\infty)$$
$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$
$$\therefore f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\text{为奇函数}$$

设函数$f(x)$在D上有定义，且D关于原点对称，证明：函数$f(x)$可表示为一个奇函数和一个偶函数之和.

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=F(x)+G(x)$$
$$F(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=F(x)$$
$$G(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-G(x)$$

单调性

周期性