# 差分方程

## 差分

$$y=f(t),\Delta y_t\triangleq y(t+1)-y(t)=f(t+1)-f(t),\text{一阶差分}$$
$$\Delta^2 y_t=\Delta y_{t+1}-\Delta y_t=f(t+2)-2f(t+1)+f(t),\text{二阶差分}$$

## 差分方程

$$y=y(t),\text{含}t,y(t),y(t+1),\ldots,y(t+n)\text{的方程,称}n\text{阶差分方程.}$$

## 一阶差分方程及解法

$$y_{t+1}+ay_t=0(*),\text{一阶齐次差分方程}$$
$$y_{t+1}+ay_t=f(t)(**),\text{一阶非齐差分方程}$$

### 一阶齐次差分方程

$$y_{t+1}+ay_t=0\text{通解}$$

---

$$y_t=C\cdot(-a)^t(C\text{为常数})$$

### 一阶非齐次差分方程

$$y_{t+1}+ay_t=f(t)$$

---

$$\begin{aligned}
&\text{case1}.f(t)=b\\
&①a\neq-1:\text{令}y_t^*=k,\text{代入}\\
&k+ak=b\Rightarrow k=\frac{b}{a+1},y_t=C(-a)^t+\frac{b}{a+1}\\
&②a=-1:\text{令}y_t^*=kt,\text{代入}\\
&k(t+1)-kt=b\Rightarrow k=b\\
&y_t=C+b
\end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned}
&y_{t+1}+2y_t=6\\
&y_{t+1}+2y_t=0\Rightarrow y_t=C(-2)^t\\
&\because a=2\neq-1,\therefore y_t^*=k\Rightarrow k=2\\
&\therefore y_t=C(-2)^t+2
\end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned}
&y_{t+1}-y_t=3\\
&y_{t+1}-y_t=0\Rightarrow y_t=C\\
&\text{令}y_t^*=kt,\text{代入},k(t+1)-kt=3,k=3\\
&\therefore y_t=C+3t
\end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned}
&\text{case2}.f(t)=(a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n)\cdot b^t\\
&①a\neq-b:y_t^*=(c_0+c_1t+\ldots+c_nt^n)\cdot b^t\\
&②a=-b:y_t^*=t(c_0+c_1t+\ldots+c_nt^n)\cdot b^t
\end{aligned}$$

---

$$
\begin{aligned}
&y_{t+1}+2yt=0 \Rightarrow y_t=C(-2)^t \\
&a=2, b=1, a \neq -b \\
&\text{令} y_t^*=C_0+C_1 t \text{代入} \\
&C_0+C_1(t+1)+2C_0+2C_1 t=t \\
&\Rightarrow \begin{cases} 3C_0+C_1=0 \\ C_1=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow C_0=-\frac{1}{9}, C_1=\frac{1}{3} \\
&\therefore y_t=C(-2)^t+\frac{t}{3}-\frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

---

求差分方程$y_{t+1}-y_t=(2t+1)2^t$的通解.

$$
\begin{aligned}
&y_{t+1}-y_t \Rightarrow y_t=C \\
&a=-1, b=2, a \neq -b \\
&\text{令} y_t^*=(C_0+C_1 t)2^t, \text{代入} \\
&[C_0+C_1(t+1)]2^{t+1}-(C_0+C_1 t)2^t=(2t+1)2^t \\
&2C_0+2C_1 t+2C_1-C_0-C_1 t=2t+1 \\
&\Rightarrow \begin{cases} 2C_1+C_0=1 \\ C_1=2 \end{cases} \Rightarrow C_0=-3, C_1=2 \\
&y_t=C+(2t-3)\cdot 2^t
\end{aligned}
$$

---

求差分方程$y_{t+1}-y_t=4t-3$的通解.

$$
\begin{aligned}
&y_{t+1}-y_t=0 \Rightarrow y_t=C \\
&a=-1, b=1, a=-b \\
&\text{令} y_t^*=(C_0+C_1 t)t=C_0 t+C_1 t^2, \text{代入} \\
&C_0(t+1)+C_1(t+1)^2-C_0 t-C_1 t^2=4t-3 \\
&\Rightarrow C_0+2C_1 t+C_1=4t-3 \\
&\Rightarrow \begin{cases} C_0+C_1=-3 \\ C_1=2 \end{cases}, C_0=-5 \\
&\therefore y_t=C+2t^2-5t
\end{aligned}
$$

# 经济函数

## 成本函数

$$C(Q)=C_0+C_1(Q)=\text{固定成本}+\text{可变成本}$$

## 收入函数

$$R(Q)=P\cdot Q=\text{价格}\cdot\text{数量}$$

## 利润函数

$$L(Q)=R(Q)-C(Q)$$

## 需求函数

$$
\begin{aligned}
&\text{主体：消费者} \\
&\text{消费者愿意购买且有支付能力的产品数量} \\
&Q=Q(P)\downarrow
\end{aligned}
$$

## 供给函数

主体：生产者
生产者愿意提供且有能力提供的产品数量
$Q=Q(P)\uparrow$

# 边际与弹性

## 边际函数

$$y=f(x),f'(x)\text{称为边际函数}$$

## 弹性函数

$$\begin{aligned}&y=f(x)\\&x=x_0\to x_0+\Delta x\\&y=f(x_0)\to f(x_0+\Delta x),\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\\&\overline{\eta}=\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\frac{\Delta y/\Delta x}{y/x}\\&\eta=\lim_{\Delta x\to 0}\overline{\eta}=\frac{dy/dx}{y/x}\end{aligned}$$

---

设某产品需求函数为$P=20-\dfrac{Q}{5}$，当销售量为$Q=15$时，求总收益及边际收益.

$$\begin{aligned}&R(Q)=P\cdot Q=20Q-\frac{Q^2}{5}\\&R'(Q)=20-\frac{2}{5}Q\\&Q=15\text{时},R(15)=300-\frac{15\times 15}{5}\\&R'(15)=20-6=14\end{aligned}$$

---

某商品需求量$Q$对价格$P$的弹性为$\eta=3P^3$，且该商品的最大需求量为1，求需求函数.

$$\begin{aligned}&\text{令}Q=Q(P)\\&\eta=-\frac{dQ/dP}{Q/P}=3p^3\Rightarrow\frac{dQ}{dP}+3P^2Q=0\\&Q=Ce^{-\int 3P^2dP}=Ce^{-P^3}(P\geq 0)\\&\because\max Q=1,\therefore C=1,\therefore Q=e^{-P^3}\end{aligned}$$

---

设某产品的需求函数为$Q=e^{-\frac{P}{5}}$.
(1)求需求对价格的弹性.
(2)求$P=3,P=5,P=6$时，需求对价格的弹性，并说明其经济意义.

$$\begin{aligned}&①\eta=-\frac{dQ/dP}{Q/P}=-\frac{P}{e^{-\frac{P}{5}}}\times e^{-\frac{P}{5}}\cdot(-\frac{1}{5})=\frac{P}{5}\\&②P=3,\eta=0.6,\text{价格上升}1\%,\text{需求下降}0.6\%\\&\quad P=5,\eta=1,\text{价格上升}1\%,\text{需求下降}1\%\\&\quad P=6,\eta=1.2,\text{价格上升}1\%,\text{需求下降}1.2\%\end{aligned}$$