1.$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2-x_3^2$, 标准二次型

$$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$$

A为对角阵

2.$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3-x_2^2+4x_2x_3-5x_3^2$, 非标准二次型

$$令A=\begin{pmatrix}2&-2&1\\-2&-1&2\\1&2&-5\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$$

$A^T=A$, 但A非对角阵

$$f=X^TAX\begin{cases}标准\Leftrightarrow A=(\ddots)\\ 非标准\Leftrightarrow A^T=A,但A\neq(\ddots)\end{cases}$$

非标准二次型X^TAX化为标准二次型 $\Leftrightarrow$ A对角化

特征值与特征向量

1.$A_{n\times n}$若$\exists\lambda$(数), $\exists\alpha(\neq 0)$, 使

$A\alpha=\lambda\alpha$

$\lambda-A$的特征值, α为λ对应的特征向量

Q1. $A_{n\times n},\lambda=?$

Q2. 若λ_0为特征值, 对应的特征向量何在?

设$A\alpha=\lambda\alpha(\alpha\neq 0)$

$\Leftrightarrow(\lambda E-A)\alpha=0$

$\because\alpha\neq 0,\therefore(\lambda E-A)X=0$有非零解

$\Leftrightarrow r(\lambda E-A)<n\Leftrightarrow|\lambda E-A|=0$

2.特征方程 $|\lambda E-A|=0$, 即

$$\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\dots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\dots&-a_{2n}\\\dots&&&\\-a_{n1}&-a_{n2}&\dots&\lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0或$$

$\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})\lambda^{n-1}+*=0$

$AX=\lambda_0X(X\neq 0)$

$\Leftrightarrow(\lambda_0E-A)X=0$

λ_0特征向量即$(\lambda_0E-A)X=0$非零解

Notes:

①λ不一定为实数.

$$如:A=\begin{pmatrix}2&-2\\1&0\end{pmatrix},|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2\\-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+2=0$$

$\Rightarrow\lambda_{1,2}=1\pm i$

②$|\lambda E-A|=0\Rightarrow\lambda_1,\dots,\lambda_n$, 则

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}\triangleq\mathrm{tr}(A)\\\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n=|A|\end{cases}$$

③$r(A)=n\Leftrightarrow|A|\neq 0\Rightarrow\lambda_1\neq 0,\lambda_2\neq 0,\dots,\lambda_n\neq 0$

$r(A)<n\Leftrightarrow|A=0|\Leftrightarrow\exists\lambda=0$

$$设A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix},求A的特征值及其对应的线性无关的特征向量.$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&1\\1&\lambda-1&1\\1&1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2=0$$

$\Rightarrow \lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$

$\lambda_1=-1$代入$(\lambda E-A)X=0$

$$E+A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-1&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1=-1$对应的线性无关的特征向量为$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=\lambda_3=2$代入$(\lambda E-A)X=0$

$$2E-A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_2=\lambda_3=2$对应的线性无关的特征向量为$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$设A=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&2&3\\0&0&-1\end{pmatrix},求A的特征值及其对应的线性无关的特征向量.$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-2\\1&\lambda-2&-3\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$$

$\Rightarrow \lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$

$\lambda_1=-1$代入$(\lambda E-A)X=0$

$$E+A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&3&3\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&4&5\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&\frac{5}{4}\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{4}\\0&1&\frac{5}{4}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1=-1$对应的线性无关特征向量为$\alpha_1=\begin{pmatrix}-3\\-5\\4\end{pmatrix}$

$\lambda_2=\lambda_3=1$代入$(\lambda E-A)X=0$

$$E-A=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\1&-1&-3\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&0&-1\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_2=\lambda_3=1$对应的线性无关特征向量为$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

矩阵相似

$A_{n\times n}, B_{n\times n}$, 若∃可逆阵$P$, 使

$P^{-1}AP=B$, 称$A\sim B$

Notes:

①$A\sim B \Rightarrow r(A)=r(B), \not\Leftarrow$

②$A\sim B \Rightarrow |\lambda E-A|=|\lambda E-B|, \not\Leftarrow$

$\Rightarrow, A\sim B \Rightarrow P^{-1}AP=B$

$|\lambda E-B|=|\lambda P^{-1}P-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|=|P^{-1}|\cdot|\lambda E-A|\cdot|P|=|\lambda E-A|$

$\not\Leftarrow, A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

$\because r(A)=1\neq r(B)=2, \therefore A\nsim B$

③$A\sim B \Rightarrow |\lambda E-A|=|\lambda E-B| \Rightarrow A, B$特征值同

$\Rightarrow \begin{cases}\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)\\|A|=|B|\end{cases}$

④$A\sim B \Rightarrow \begin{cases}A^T\sim B^T\\f(A)\sim f(B)\\\text{若}A,B\text{可逆}\Rightarrow\begin{cases}A^{-1}\sim B^{-1}\\A^*\sim A^*\end{cases}\end{cases}$

证 :$A\sim B \Rightarrow P^{-1}AP=B$

$\Rightarrow P^TA^T(P^T)^{-1}=B^T$

$\Rightarrow [(P^T)^{-1}]^{-1}A^T(P^T)^{-1}=B^T$

令$P_0=(P^T)^{-1} \Rightarrow P_0^{-1}A^TP_0=B^T \Rightarrow A^T\sim B^T$

若A, B可逆, 由$P^{-1}AP=B$

$\Rightarrow P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$

即$A^{-1}\sim B^{-1}$