事件与概率

随机试验与随机事件

$$\begin{aligned}&E-\text{试验, 若}\\&\text{①相同条件下可重复}\\&\text{②结果多样且试验前所有可能的结果皆确定}\\&\text{③试验前不确定具体结果}\\&\text{称}E\text{为随机试验}\end{aligned}$$

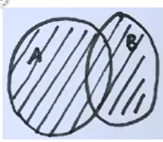
$$\begin{aligned}&E-\text{试验}, E\text{的一切可能的基本结果而成的集合}\\&\text{称为样本空间, 记}\Omega\end{aligned}$$

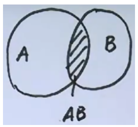
$$\begin{aligned}&\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}\\&A=\{2,4,6\}\end{aligned}$$

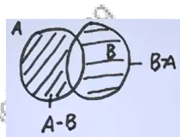
$$\begin{aligned}&\Omega\text{为}E\text{的样本空间}, \Omega\text{的子集称为随机事件}\\&\emptyset\subset\Omega, \emptyset-\text{不可能事件}; \Omega\subset\Omega, \Omega-\text{必然事件}\\\text{如}:&\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}\\&A=\{1,2,3\}=\{\text{朝上的数不超过}3\}\end{aligned}$$

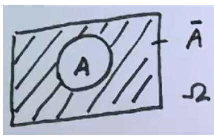
事件的运算与关系

运算



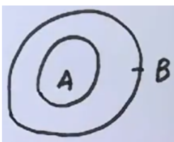


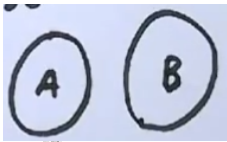


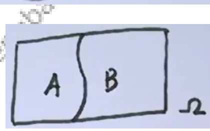


$$\begin{aligned}&1.\text{和}-A+B: A\text{或者}B\text{发生的事件}\\&2.\text{积}-AB: A, B\text{同时发生的事件}\\&3.\text{差}-A-B: A\text{发生且}B\text{不发生的事件}\\&4.\text{补}-\overline{A}: A\text{不发生的事件}\end{aligned}$$

关系

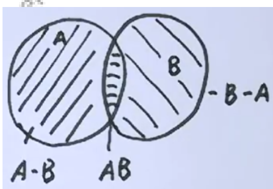






1.包含 $-$ 若A发生则B一定发生, 称$A \subset B$
2.互斥(不相容) $-$ A, B不能同时发生, 称A, B互斥
A, B互斥 $\Leftrightarrow AB = \emptyset$
3.对立 $-$ A, B不能同时发生且至少一个发生, 称A, B对立

$$A, B\text{对立} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = \emptyset \\ A + B = \Omega \end{cases} \Leftrightarrow B = \overline{A}$$



Notes:①$A = (A - B) + AB$且$(A - B)$与AB互斥;
②$A + B = (A - B) + AB + (B - A)$且
$A - B, AB, B - A$互斥

概率的公理化定义及基本性质

Ω为E的样本空间, 在Ω上定义一个函数, 若:
①$\forall A \subset \Omega$, 有$P(A) \geq 0$; (非负性)
②$P(\Omega) = 1$; (归一性)
③设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$两两互斥, 有
$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$. (可列可加性)
称$P(A)$为A的概率

概率的基本性质

1.$P(\emptyset) = 0$
证: 令$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = \cdots = \emptyset$
$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$两两互斥, 有
$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$
即$P(\emptyset) = P(\emptyset) + \cdots + P(\emptyset) + \cdots$
$\because P(\emptyset) \geq 0, \therefore P(\emptyset) = 0$
2.设$A_1, \cdots, A_n$两两互斥, 则
$P(A_1 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$
证: 取$A_{n+1} = \cdots = \emptyset$
$\because A_1, \cdots, A_n, \cdots$两两互斥
$\therefore P(A_1 + \cdots + A_n + \cdots) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) + \cdots$
即$P(A_1 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$
3.$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
证: $\because A, \overline{A}$互斥, $\therefore P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$
又$\because A + \overline{A} = \Omega, \therefore P(A) + P(\overline{A}) = 1$
$\Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

概率的四大基本公式

1.减法：

$\because A=(A-B)+AB$且$A-B,AB$互斥

$\therefore P(A)=P(A-B)+P(AB)\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(AB)$

$\because A=A\Omega=A(B+\overline{B})=AB+A\overline{B}$

又$\because AB\subset B,A\overline{B}\subset\overline{B}$且$B$与$\overline{B}$互斥

$\therefore AB,A\overline{B}$互斥

$\therefore P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})\Rightarrow P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$

$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$

2.加法：

$A+B=(A-B)+AB+(B-A)$且$A-B,AB,B-A$互斥

$\therefore P(A+B)=P(A-B)+P(AB)+P(B-A)$

$\because P(A-B)=P(A)-P(AB),P(B-A)=P(B)-P(AB)$

$\therefore$ ①$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

②$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

3.条件概率公式：$A,B-$事件，且$P(A)>0$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

4.乘法公式：

①$P(AB)=P(A)P(B|A)$

②$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$

事件的独立性

$$设P(A)>0,P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$若P(B|A)=P(B),则\frac{P(AB)}{P(A)}=P(B)\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$$

1.若$P(AB)=P(A)P(B)$，称A,B独立

2.$A,B,C-$三个事件：

$$若\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B)\\P(AC)=P(A)P(C)\\P(BC)=P(B)P(C)\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{cases},称A,B,C独立$$

独立的性质

Th1.A,B、$A,\overline{B}$、$\overline{A},B$、$\overline{A},\overline{B}$一对独立其余独立

证：设A,B独立, 即$P(AB)=P(A)P(B)$

$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B})$, 即$A,\overline{B}$独立

同理$\overline{A},B$独立

$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$

$=[1-P(A)]\cdot[1-P(B)]=P(\overline{A})P(\overline{B})$, 即$\overline{A},\overline{B}$独立

Th2.若$P(A)=0$或$P(A)=1$, 则A,B独立

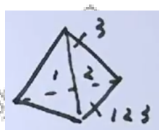
证：设$P(A)=0$

$\because AB\subset A, \therefore P(AB)\leq P(A)=0$

又$\because P(AB)\geq 0, \therefore P(AB)=0$

$\therefore P(AB)=P(A)P(B), \therefore A,B$独立

设$P(A)=1\Rightarrow P(\overline{A})=0\Rightarrow \overline{A},B$独立$\Rightarrow A,B$独立



Notes:

①A,B,C两两独立$\nRightarrow A,B,C$独立

$A=\{$朝下为1$\}, B=\{$朝下为2$\}, C=\{$朝下为3$\}$

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}, P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4}, P(ABC)=\frac{1}{4}$

$P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$

②设$P(A)>0, P(B)>0$

若A,B独立$\Rightarrow A,B$不互斥

$P(AB)=P(A)P(B)>0\Rightarrow AB\neq\emptyset$

若A,B互斥$\Rightarrow A,B$不独立

A,B互斥$\Rightarrow AB=\emptyset\Rightarrow P(AB)=0\neq P(A)P(B)\Rightarrow A,B$不独立

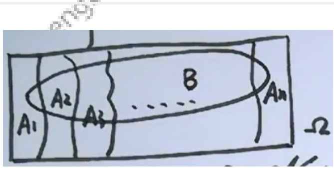
④独立的等价结论：

1.若$P(A)>0$, 则A,B独立$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$

2.若$0<P(A)<1$, 则A,B独立$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B|\overline{A})$

$P(B|A)=P(B|\overline{A})\Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$

全概率公式与贝叶斯公式



若①$A_1, \cdots, A_n$两两互斥;②$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$
称$A_1, \cdots, A_n$为完备事件但$(P(A_1) + \cdots + P(A_n) = 1)$
$\forall B$
$B = \Omega B = (A_1 + A_2 + \cdots + A_n)B = A_1B + A_2B + \cdots + A_nB$
$\because A_1B \subset A, A_2B \subset A_2, \cdots, A_nB \subset A_n$
且$A_1, A_2, \cdots, A_n$两两互斥
$\therefore A_1B, A_2B, \cdots, A_nB$两两互斥
$P(B) = P(A_1)B + P(A_2)B + \cdots + P(A_n)B$
$= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n) -$ 全概率公式

口袋中有10个球, 其中6个白球, 4个黑球, 先后不放回的取2个球.
(1)求第二次取黑球的概率; (2)已知第二次取黑球, 求第一次也取黑球的概率.

①1.$A_1 = \{$第一次取白$\}, A_2 = \{$第一次取黑$\}$

$$P(A_1) = \frac{3}{5}, P(A_2) = \frac{2}{5}$$

2.$B = \{$第二次取黑球$\}$

$$P(B|A_1) = \frac{4}{9}, P(B|A_2) = \frac{3}{9}$$

$$3.P(B) = P(\Omega B) = P(A_1B + A_2B) = P(A_1B) + P(A_2B)$$
$$= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{9} = \frac{18}{5 \times 9} = \frac{2}{5}$$

$$②P(A_2|B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{1}{3}$$

型一

设两两相互独立的事件A, B, C满足 : $ABC = \emptyset, P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$, 且 $P(A + B + C) = \frac{9}{16}$, 则$P(A) = \frac{1}{4}$.

解 :设$P(A) = P(B) = P(C) = p < \frac{1}{2}$

$$\because P(ABC) = 0, P(AB) = P(AC) = P(BC) = p^2$$
$$\therefore 3p - 3p^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow p^2 - p + \frac{3}{16} = 0$$
$$\Rightarrow (p - \frac{1}{4})(p - \frac{3}{4}) = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

设A, B为两个相互独立的随机事件, 且A, B都不发生的概率为$\frac{1}{9}$, A发生B不发生的概率与A不发生B发生的概率相等, 则$P(A) = \frac{2}{3}$.

解 :设$P(\overline{A}\overline{B}) = \frac{1}{9}, P(A\overline{B}) = P(\overline{A}B) \Rightarrow P(A) = P(B) = p$

$$P(A + B) = \frac{8}{9} \Rightarrow 2p - p^2 = \frac{8}{9}$$
$$\Rightarrow p^2 - 2p + \frac{8}{9} = 0 \Rightarrow (p - \frac{2}{3})(p - \frac{4}{3}) = 0$$
$$\Rightarrow p = \frac{2}{3}$$

设X,Y为随机变量,且$P\{X\geq 0\}=\frac{1}{2},P(Y\geq 0)=\frac{3}{5},P\{X\geq 0,Y\geq 0\}=\frac{1}{4}$,则

(1)$P\{\min\{X,Y\}<0\}=\frac{3}{4}$;

(2)$P\{\max\{X,Y\}\geq 0\}=\frac{17}{20}$.

解:令$\{X\geq 0\}=A,\{Y\geq 0\}=B$

$P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{3}{5},P(AB)=\frac{1}{4}$

①$P\{\min(X,Y)<0\}=1-P\{\min(X,Y)\geq 0\}$

$1-P\{X\geq 0,Y\geq 0\}=1-P(AB)=\frac{3}{4}$

②$P\{\max(X,Y)\geq 0\}=1-P\{\max(X,Y)<0\}$

$=1-P\{X<0,Y<0\}=1-P(\overline{A}\overline{B})=P(A+B)$

$=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{3}{5}-\frac{1}{4}=\frac{17}{20}$

Notes:

① max :$\leq$ 或 $<$

如 : $\max(a,b)\leq c\Leftrightarrow\begin{cases}a\leq c\\ b\leq c\end{cases}$

② min :$>$ 或 $\geq$

如 : $\min(a,b)>c\Leftrightarrow\begin{cases}a>c\\ b>c\end{cases}$

型四

设口袋中有a个白球,b个黑球.

(1)从口袋中取一个球,球取到黑球的概率.

(2)从口袋中先取一个球(不知道结果且不放回),求第二次取到黑球的概率;

(3)从口袋中先后取两次球,每次取一个不放回,已知第二个球为黑球,求第一个球为黑球的概率.

①第一次取黑球概率为$\frac{b}{a+b}$;

②1.$A_1=\{$第一次取白$\},A_2=\{$第一次取黑$\}$

$P(A_1)=\frac{a}{a+b},P(A_2)=\frac{b}{a+b}$

2.$B=\{$第二次取黑$\}$

$P(B|A_1)=\frac{b}{a+b-1},P(B|A_2)=\frac{b-1}{a+b-1}$

3.$P(B)=P(\Omega B)=P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

$=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{a}{a+b}\times\frac{b}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b-1}{a+b-1}=\frac{b}{a+b}$

③$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}$

$=\frac{b}{a+b}\times\frac{b-1}{a+b-1}/\frac{b}{a+b}=\frac{b-1}{a+b-1}$

甲,乙两人向同一目标射击,命中率分别为0.5和0.6.

(1)甲,乙两人同时向目标射击,求命中的概率;

(2)甲,乙两人同时向目标射击,已知目标命中,求是甲击中的概率;

(3)甲,乙两人先选一人,由此人射击,求目标被命中的概率;

(4)(3)中已知目标被击中,求是甲击中的概率.

①令$A=\{甲中\},B=\{乙中\},C=\{中\},C=A+B$

$P(A)=0.5,P(B)=0.6$

$P(C)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.5+0.6-0.3=0.8$

②$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(C)}=\frac{5}{8}$

③1.$A_1=\{选甲\},A_2=\{选乙\}$

$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$

2.$B=\{击中\},$

$P(B|A_1)=0.5,P(B|A_2)=0.6$

3.$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

$=\frac{1}{2}\times0.5+\frac{1}{2}\times0.6=0.55$

④$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times0.5}{0.55}=\frac{5}{11}$

已知甲口袋有2个白球4个黑球, 乙口袋有3个白球3个黑球, 从甲口袋中取2个球放入乙口袋, 再从乙口袋中任取1个球.

(1)求取出的球为黑球的概率;

(2)已知乙口袋取出的球为黑球, 求甲口袋取出的2个球是白球的概率.

①1.$A_1=\{取2个白\},A_2=\{取一白一黑\},A_3=\{取2个黑\}$

$P(A_1)=\frac{C_2^2C_4^0}{C_6^2}=\frac{1}{15},P(A_2)=\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\frac{8}{15},P(A_3)=\frac{C_2^0C_4^2}{C_6^2}=\frac{6}{15}$

2.$B=\{第二次取黑球\}$

$P(B|A_1)=\frac{3}{8},P(B|A_2)=\frac{4}{8},P(B|A_3)=\frac{5}{8}$

3.$P(B)=\frac{1}{15}\times\frac{3}{8}+\frac{8}{15}\times\frac{4}{8}+\frac{6}{15}\times\frac{5}{8}=\frac{65}{15\times8}=\frac{13}{24}$

②$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{1}{15}\times\frac{3}{8}/\frac{13}{24}=\frac{3}{65}$