“板凳龙” 闹元宵

摘要

在“板凳龙”的舞龙过程中，舞龙队应当保持尽可能小的间距和较快的行进速度，以达到较好的观赏性。在题设要求下，通过对“板凳龙”问题的进行分析与适当建模，我们在等距螺线下求出了板凳龙的最小螺距和最大速度。

针对问题一，我们建立了合适的**极坐标系**用以刻画舞龙队的行进位置和速度。首先，基于已知的把手位置，通过不断对前一把手进行**二分查找**，我们迭代查找确定了舞龙队所有把手的初始物理位置。其次，通过建立等距螺线和速度间关系的**微分方程**，求解出了**舞龙队龙头的位置和行进时间的关系，再次运用二分查找**即可得到各把手在各个时间下的位置。接着，通过对舞龙队的各把手的位置使用**微元法**，我们得到了舞龙队在各个位置下的速度。最后，我们利用python将舞龙队的行进过程可视化表现出来，对我们的建模进行了验证，并将计算相关数值填入了表1和文件中。

针对问题二，我们

针对问题三，...

针对问题四，...

针对问题五，...

关键词： **关键词1　关键词2　关键词3　关键词4　关键词5**

一、问题背景与重述

1.1 问题背景

“板凳龙”是浙闽地区的传统民俗活动，其舞龙队能够将上百条板凳螺旋式盘绕形成巨龙。舞龙队的盘绕路线大致呈螺线状向内部盘绕。其中，螺距的最小化与速度的最大化不仅影响舞龙队形的紧凑度和动态美，也直接关系到表演的安全性。通过对这些参数的深入研究，可以优化舞龙表演的编排，确保参与者的安全，为传统文化的传承与发展提供科学支撑。

1.2 问题重述

问题一：在题目给定的 55cm 螺距的等距螺线作为行进路线的情形下，取龙头位置为第十六圈与 x 轴交点处为龙头的初始位置，且龙头以 1m/s 的速度向内顺时针盘绕，计算 0-300s 内每一秒舞龙队各把手的所在位置以及速度。

问题二：

问题三：

问题四：

问题五：

二、问题分析

2.1 问题一的分析

问题一要求我们在给定情景下分析从初始时刻到 300s 为止的时间中舞龙队各把手的中心位置和速度。首先，我们推导出了描述等距螺线路径与速度关系的微分方程，并解出了龙头位置与行进时间的函数关系。接着，利用已知的把手位置，我们采用了二分查找算法，迭代地确定了舞龙队所有把手的具体物理位置，从而计算出每一把手在不同时间点的位置。然后，我们应用微元法分析了舞龙队各把手的位置变化，从而得出了它们的速度。最终，我们使用Python编程语言对舞龙队的运动过程进行了可视化模拟，以验证模型的正确性。

2.2 问题二的分析

2.3 问题三的分析

2.4 问题四的分析

2.5 问题五的分析

三、模型假设

1. 假设板凳龙盘入与盘出时，龙头、各节龙身以及龙尾之间连接牢固，旋转润滑，运动连续不停顿
2. 假设不考虑板凳厚度对板凳龙整体运动产生的影响，
3. 假设板凳龙的各板凳均位于同一平面上

四、符号说明

符号	说明
ρ	极坐标下点的模长
θ	极坐标下点的辐角
D	等距螺线螺距
L_1	龙头板凳长
L_2	龙身龙尾板凳长
d	板凳宽
l	板凳板头长
R	掉头区域半径大小
r_1	前一掉头圆弧半径
r_2	后一掉头圆弧半径
t	舞龙队运动时间
A_0	龙头把手的中心点
A_i	第 i 节龙身靠前把手的中心点
A_{223}	龙尾后侧把手中心点
B	掉头曲线起始位置
B'	掉头曲线结束位置
l_B	掉头曲线起始位置切线

五、模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 由龙头把手确定其余把手的位置

依据题意，舞龙队的行进路线由 $D = 55cm$ 的等距螺线确定。选用极坐标刻画行进路线时，该路线可以由以下方程确定：

$$\rho = \frac{D}{2\pi}\theta, \quad \theta \in [0, +\infty) \tag{1}$$

使用形如 (ρ, θ) 的方式表示点的坐标，因此初始点 A 点的坐标可以表示为 $(16 \cdot 0.55, 16 \cdot 2\pi)$。

题设给定的初始条件中，只有龙头把手的位置是已知信息，因此需要得到龙头把手的位置和其余所有把手的位置关系才能确定其余把手的位置。通过解析可以发现：该关系难以求出解析解。因此可以考虑**从龙头把手位置逐级递推到每一把手的位置**。

为了做到这一点，我们选用了二分查找算法，在任一把手 A_i 位置已知的情况下，查找下一把手所在位置。即给定 θ_i ，确定 θ_{i+1} 的大小。而 θ_{i+1} 合适当且仅当两把手的间距正好等于板凳两孔中心的距离。根据极坐标下的余弦定理，两点间的位置即为：

$$\Delta l = \sqrt{\rho_i^2 + \rho_{i+1}^2 - 2\rho_i\rho_{i+1}\cos(\theta_i - \theta_{i+1})}$$

代入 ρ 并令 Δl 分别减去龙头和龙身除去板头的长度，即分别减去 $L_1 - 2 \cdot l$ 和 $L_2 - 2 \cdot l$，即可得到二分查找的目标函数 f ，其零点即为 θ_{i+1} 的二分查找值：

$$f(\theta) = \frac{D}{2\pi}\sqrt{\theta^2 + \theta_i^2 - 2\theta\theta_i\cos(\theta - \theta_i)} - (L_j - 2l), \quad j = 1, 2 \tag{2}$$

目标函数 f 二分查找所得的零点即为 θ_{i+1} 的数值解。

二分求解代码见附录2

5.1.2 确定龙头把手的位置与时间关系

5.1.1 小节提供了由龙头把手计算其余各个把手位置的方法，因此只需要确定每一秒龙头把手的位置，利用上一小节的方法，即可得到每一秒钟各个把手的位置信息。

极坐标下，龙头把手位置可以由 θ 参数唯一确定。因此，只需要求解出龙头的辐角 θ 与时间 t 的关系即可。对等距螺线使用微元法，可以用 $d\theta$ 和 $d\rho$ 表示出螺线弧微元 ds：

$$ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2}$$

而微元 ds 等于龙头在 dt 时间内行进的距离，即：

$$\sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2} = vdt \tag{3}$$

联立 (1) 和 (3) 式消去 ρ 即可解得龙头的辐角 θ 和时间 t 满足以下关系：

$$\frac{D}{2\pi}(-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{\theta^2+1}-\theta)+\frac{1}{2}\theta\sqrt{\theta^2+1}) = vt + C \tag{4}$$

利用数值计算即可求得给定时刻下龙头把手的位置。

5.1.3 确定各把手的速度

5.1.2 小节计算出了各个把手的位置在给定时刻下的数值解，而速度是位置在时间尺度下的微元。因此，只需要取时间微元 Δt ，并计算在给定时间 t_1 两侧的 Δt 下的把手位置的位移模长 $|\vec{x}(t_1+\Delta t) - \vec{x}(t_1-\Delta t)|$ ，将其除以两倍的 Δt 即可得到速度大小。

具体来说，对于给定的时间 t_1 ，把手 A_i 此时的速度大小的数值解为：

$$v_{t1} = \frac{\sqrt{(x_i(t_1+\Delta t) - x_i(t_1-\Delta t))^2 + (y_i(t_1+\Delta t) - y_i(t_1-\Delta t))^2}}{2\Delta t} \tag{5}$$

利用这种方式计算出问题一中的各个把手的位置和速度见 result1.xlsx 文件。其中 0 s、60 s、120 s、180 s、240 s、300 s 时，龙头前把手、龙头后面第 1、51、101、151、201 节龙身前把手和龙尾后把手的位置和速度如下表所示：

表 1 问题一的位置结果

	0 s	60 s	120 s	180 s	240 s	300 s
龙头 x (m)	8.800000	5.799209	-4.084887	-2.963609	-0.818702	4.420274
龙头 y (m)	-0.000000	-5.771092	-6.304479	6.094780	5.590600	2.320429
第 1 节龙身 x (m)	8.363824	7.456758	-1.445473	-5.237118	-3.469210	2.459489
第 1 节龙身 y (m)	2.826544	-3.440399	-7.405883	4.359627	4.516167	4.402476
第 51 节龙身 x (m)	-9.518732	-8.686317	-5.543150	2.890455	-6.560125	-6.301346
第 51 节龙身 y (m)	1.341137	2.540108	6.377946	7.249289	1.969759	0.465829
第 101 节龙身 x (m)	2.913983	5.687116	5.361939	1.898794	0.218823	-6.237722
第 101 节龙身 y (m)	-9.918311	-8.001384	-7.557638	-8.471614	7.831999	3.936008
第 151 节龙身 x (m)	10.861726	6.682311	2.388757	1.005154	4.451294	7.040740
第 151 节龙身 y (m)	1.828753	8.134544	9.727411	9.424751	-7.486030	4.393013
第 201 节龙身 x (m)	4.555102	-6.619664	-10.627211	-9.287720	-1.731014	-7.458662
第 201 节龙身 y (m)	10.725118	9.025570	1.359847	-4.246673	9.344557	-5.263384
龙尾（后） x (m)	-5.305444	7.364557	10.974348	7.383896	7.057739	1.785033
龙尾（后） y (m)	-10.676584	-8.797992	0.843473	7.492370	-6.846021	9.301164

表 2 问题一的速度结果

	0 s	60 s	120 s	180 s	240 s	300 s
龙头 (m/s)	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
第 1 节龙身 (m/s)	0.999971	0.999961	0.999945	0.999917	0.999859	0.999709
第 51 节龙身 (m/s)	0.999742	0.999662	0.999540	0.999331	0.998940	0.998064
第 101 节龙身 (m/s)	0.999575	0.999455	0.999277	0.998971	0.998436	0.997302
第 151 节龙身 (m/s)	0.999451	0.999303	0.999082	0.998726	0.998121	0.996860
第 201 节龙身 (m/s)	0.999352	0.999190	0.998942	0.998552	0.997902	0.996575
龙尾（后） (m/s)	0.999317	0.999143	0.998889	0.998490	0.997827	0.996476

相关系数矩阵模版:

$$
\begin{bmatrix}
Variable & a & b & c & d & e & f \\
a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
b & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
c & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
d & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
e & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
f & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
$$

5.2 问题二模型的建立与求解

内容

目标规划函数示例：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad E_k = \frac{S_k \cdot Y_{i,y} - Z_k \cdot X_{i,y}}{\gamma} \\
&\text{s.t.} \quad \begin{cases}
Z_k = \frac{Y_{i,y} \cdot \beta_k}{1-\alpha_k} \\
S_k = X_{2,y}\left(1+V_k\right)\left(1+\beta_k\right) \\
\beta_k \in \{1, c\} \\
c > 1
\end{cases}
\end{aligned} \tag{6}
$$

5.3 问题三模型的建立与求解

5.4 问题四模型的建立与求解

依据题意，在满足各部分相切，且前一圆弧的半径是后一圆弧半径的两倍的条件下，两圆弧的位置仅由进入和离开掉头区域的位置及方向唯一确定。因此，**两圆弧的位置不能再优化**。下面将逐步**确定圆弧的位置**、建立舞龙队**行进路线的参数方程**，最终计算得到**舞龙队各把手的位置和速度**。

5.4.1 确定掉头曲线

依据题意，为了确定掉头曲线的方程使得各部分相切，**需要先求出掉头曲线的起始、结束位置的坐标和切线斜率**。并在此基础上**求解两圆弧的圆心位置即半径**

由于盘出螺线和盘入螺线呈中心对称，盘入盘出螺线的极坐标方程可以表示为：

$$\rho = \frac{D}{2\pi}\theta \tag{7}$$

$$\rho = \frac{D}{2\pi}(\theta - \pi) \tag{8}$$

而掉头区域是直径为 $R = 9$ 米的圆形区域，其圆心为原点。其极坐标方程可以表示为：

$$\rho = R \tag{9}$$

分别联立两螺线方程和圆方程可以解得掉头区域的入口 B 和出口 B' 的极坐标分别为：

$$B(\rho,\theta) = (R,\theta_0) = (4.5, 16.631961)$$

$$B'(\rho,\theta) = (R,\theta_0+\pi) = (4.5, 19.773553)$$

换算成直角坐标即（单位：米）：

$$(x_0, y_0) = (-2.711855, -3.591077)$$

$$(x_0', y_0') = (2.711855, 3.591077)$$

确定了点 B 和点 B' 后，还需要确定进入掉头区域时的速度方向，用以计算相切条件。由盘入盘出螺线的中心对称性可知两点处的切线平行，斜率相同，因此只需要计算盘入曲线的切线斜率 k 。

盘入曲线的直角坐标表达式为：

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) = \dfrac{D}{2\pi}\theta\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) = \dfrac{D}{2\pi}\theta\sin(\theta) \end{cases} \tag{10}$$

在直角坐标系下取 y 对 x 的微分即可得到掉头曲线起始位置和结束为止的切线斜率：

$$k = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\theta_0} = \left.\frac{dy}{d\theta}\frac{1}{\frac{dx}{d\theta}}\right|_{\theta=\theta_0} = \frac{\sin\theta_0 + \theta_0\cos(\theta_0)}{\cos(\theta_0) - \theta_0\sin(\theta_0)} \tag{11}$$

如图所示设前一圆弧圆心为 O_1 后一圆弧圆心为 O_2 ，掉头曲线的起始位置和结束位置分别为点 B 和点 B' 。延长 BO_1 至点 O' 使得 $O_1O' = O_2B'$ 。设前一圆弧半

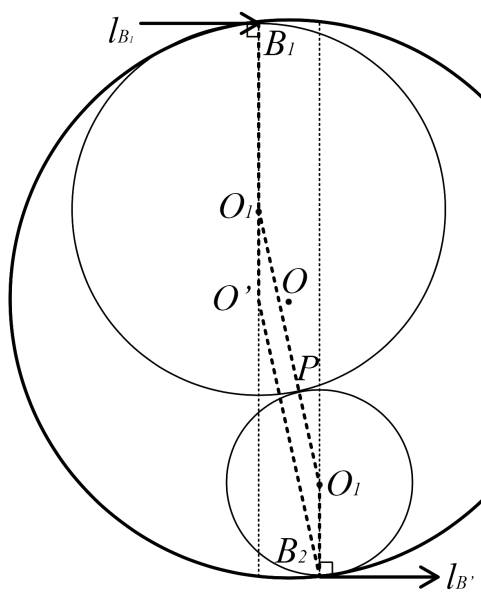

图 1 掉头曲线示意

径为 r_1 ，后一圆弧半径为 r_2 ，则有 $r_1 = 2r_2$ 。舞龙队的沿 $\overset{\frown}{B_1P}$, $\overset{\frown}{PB_2}$行进。连接 $O'B'$ 可知四边形 $O'B'O_2O1$ 为平行四边形，因此有：

$$O'B' = O_1O_2 = r_1 + r_2 = 3r_2 = BO_1 + O_1O' = O'B$$

同时，由于第一段圆弧是和盘入螺线相切的，因此设 B 点处的切线为 l_B 则有 $O'B \perp l_B$。而 l_B 的斜率为 k ，因此 $O'B$ 的斜率为 $-\frac{1}{k}$ 。联立：

$$\begin{cases} O'B' = O'B \\ \dfrac{x_{O'} - x_B}{y_{O'} - y_B} = -\dfrac{1}{k} \end{cases} \tag{12}$$

即可解得点 $O'(0.215914, -0.163050)$ 。然后，由 $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OB_1} + 2\overrightarrow{O_1O}$ ， $\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{O'O}$ 即可解得两圆弧的圆心坐标 $O_1(x_1, y_1)$ $O_2(x_2, y_2)$

5.4.2　确定舞龙队行进路线的参数方程

5.4.1 节得到了舞龙队行进路线中各部分路线的具体位置、参数，但是却没有将各部分曲线合并在一起，给问题四的舞龙队的速度和位置计算带来的挑战。因此，需要建立合适的参数方程来刻画整一条行进路线，即给定现实的时间 t 作为参数，需要能够得到行进路线上点的参数。同时，由于龙头在任一时刻下位置就是这条曲线的参数方程，因此可以**使用龙头把手的位置与时间的函数关系作为舞龙队行进路线的参数方程**。

分析可知，舞龙队的行进路线可以分为四部分：盘入阶段、前圆弧阶段、后圆弧阶段和盘出阶段。前圆弧阶段和后圆弧阶段过渡的时间节点在 $t1$ 时刻，后圆弧阶段和盘出阶段过渡的时间节点在 $t2$ 时刻。类似问题一的求解过程可以得到盘入阶段的极坐标方程为：

$$(\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+\theta^2}-\theta)-\frac{1}{2}\theta\sqrt{\theta^2+1})\frac{D}{2\pi}-vt+C_0=0,\quad t\le 0 \tag{13}$$

在求出方程数值解后，只需要将极坐标换算成直角坐标，即可得到盘入阶段下，给定时刻 t 下龙头把手的位置。

对于前圆弧，只需要在直角坐标系下将圆弧转换为**圆的参数方程**即可。考虑到前圆弧的运动方向是顺时针，因此参数方程中的角速度应当为负数，即 $w=-\frac{v}{r_1}$

$$\begin{cases} x=x_1+r_1\cos(\theta_1-\frac{v}{r_1}t) \\ y=y_1+r_1\sin(\theta_1-\frac{v}{r_1}t) \end{cases},\quad 0<t\le t_1 \tag{14}$$

后圆弧的计算过程与前圆弧类似。考虑到后圆弧是逆时针运动，角速度应当为正，即 $w=\frac{v}{r_2}$：

$$\begin{cases} x=x_2+r_2\cos(\theta_2-\frac{v}{r_2}t) \\ y=y_2+r_2\sin(\theta_2-\frac{v}{r_2}t) \end{cases},\quad t_1<t\le t_2 \tag{15}$$

在给定初相下即可得到两圆弧的参数方程。利用解析几何可计算出前圆弧参数方程中初相 θ_1 以及后圆弧参数方程的初相 θ_2 即可确定两圆弧的参数方程。

对于盘出阶段，可以类似盘入阶段进行数值计算，得到盘出阶段在极坐标下位置和时间的关系：

$$(-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+\theta^2}-\theta)+\frac{1}{2}\theta\sqrt{\theta^2+1})\frac{D}{2\pi}-vt+C_3=0,\quad t>t_2 \tag{16}$$

综上，对舞龙队各部分路线参数方程进行汇总即可得到总的参数方程，记录在附件的 t_to_xy_q4() 函数中。对该函数进行绘制即可得到舞龙队的行进路线，如图所示。

5.4.3 求解舞龙队的速度和位置

利用舞龙队行进路线的参数方程，以及龙头把手位置与时间的关系后，结合问题一的**二分查找算法**和**微元法**即可得到舞龙队行进的速度和位置。其中， 100 s、 50 s、0 s、50 s、100 s 时，龙头前把手、龙头后面第 1、 51、101、151、201 节龙身前把手和龙尾后把手的位置和速度如表所示。

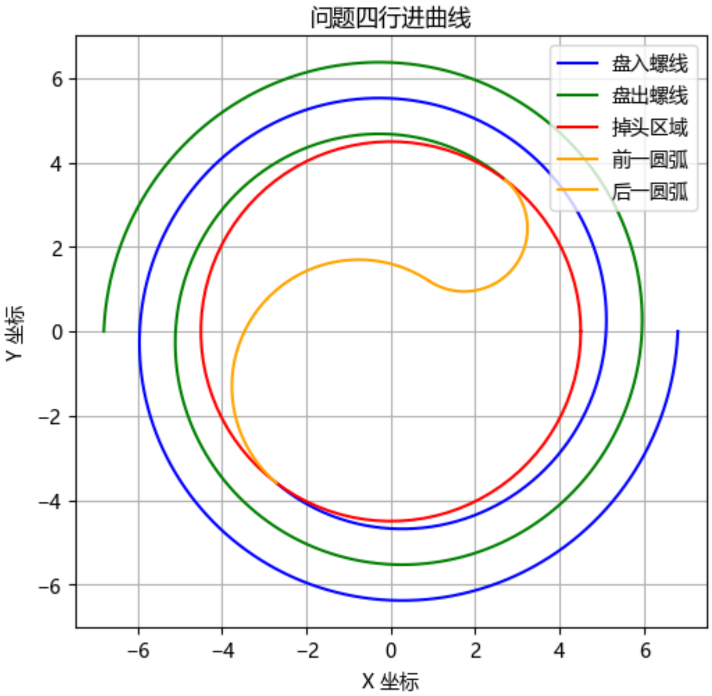

图 2 问题四舞龙队行进路线

表 3 问题一的位置结果

	-100 s	-50 s	0 s	50 s	100 s
龙头 x (m)	8.800000	5.799209	-4.084887	-2.963609	-0.818702
龙头 y (m)	-0.000000	-5.771092	-6.304479	6.094780	5.590600
第 1 节龙身 x (m)	8.363824	7.456758	-1.445473	-5.237118	-3.469210
第 1 节龙身 y (m)	2.826544	-3.440399	-7.405883	4.359627	4.516167
第 51 节龙身 x (m)	-9.518732	-8.686317	-5.543150	2.890455	-6.560125 301346
第 51 节龙身 y (m)	1.341137	2.540108	6.377946	7.249289	1.969759
第 101 节龙身 x (m)	2.913983	5.687116	5.361939	1.898794	0.218823
第 101 节龙身 y (m)	-9.918311	-8.001384	-7.557638	-8.471614	7.831999
第 151 节龙身 x (m)	10.861726	6.682311	2.388757	1.005154	4.451294
第 151 节龙身 y (m)	1.828753	8.134544	9.727411	9.424751	-7.486030
第 201 节龙身 x (m)	4.555102	-6.619664	-10.627211	-9.287720	-1.731014
第 201 节龙身 y (m)	10.725118	9.025570	1.359847	-4.246673	9.344557
龙尾（后） x (m)	-5.305444	7.364557	10.974348	7.383896	7.057739
龙尾（后） y (m)	-10.676584	-8.797992	0.843473	7.492370	-6.846021

表 4 问题一的速度结果

	-100 s	-50 s	0 s	50 s	100 s
龙头 (m/s)	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
第 1 节龙身 (m/s)	0.999971	0.999961	0.999945	0.999917	0.999859
第 51 节龙身 (m/s)	0.999742	0.999662	0.999540	0.999331	0.998940
第 101 节龙身 (m/s)	0.999575	0.999455	0.999277	0.998971	0.998436
第 151 节龙身 (m/s)	0.999451	0.999303	0.999082	0.998726	0.998121
第 201 节龙身 (m/s)	0.999352	0.999190	0.998942	0.998552	0.997902
龙尾（后） (m/s)	0.999317	0.999143	0.998889	0.998490	0.997827

5.5 问题五模型的建立与求解

六、模型的评价、改进与推广

6.1 模型优点

1.
2.
3.
4.

6.2 模型缺点

1.
2.
3.

6.3 模型的改进

1.
2.
3.

七、参考文献

[1]

[2]

[3]

[4]

附录

附录1：支撑材料的文件列表

附录2：初始化代码和数据处理代码

```python
import pandas as pd
import warnings
import xlwt
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pylab
import seaborn as sns
from pylab import mpl
from sklearn.preprocessing import PolynomialFeatures
from sklearn import linear_model
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.ensemble import RandomForestRegressor
from sklearn import metrics
import statsmodels.api as sm
import geatpy as ea
from scipy import optimize as opt
from scipy.optimize import minimize
```