

## 量子与统计 2020 期中考试

姓名:

班号:

学号:

地点: 6C300

### 第一部分 直接写出结果 (共 20 分)

填空题 (10 分):

1.1 氢原子基态的轨道角动量的平方  $L^2$  为 \_\_\_\_\_, (2 分)

总角动量 (轨道角动量+电子自旋角动量) 的平方  $J^2$  为 \_\_\_\_\_。(2 分)

1.2 假设氢原子归一化波函数是  $\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}[R_{21}(r)Y_{11}(\theta, \varphi) + R_{20}(r)Y_{00}(\theta, \varphi)]$ , 则  $L_z$  的平均值是 \_\_\_\_\_ (2 分)

1.3 考虑自旋: (1) 一维自由粒子的能级  $E(>0)$  的简并度是 \_\_\_\_\_, (2 分)  
(2) 氢原子基态的能级简并度是 \_\_\_\_\_ (2 分)。

单项选择题 (10 分):

1.4 以下说法正确的有: \_\_\_\_\_

(1) 电子自旋磁矩在恒定磁场中的能量与磁感应强度  $B$  的平方成正比。 (2) 电子自旋磁矩在恒定磁场中的能量与磁感应强度  $B$  的大小无关;

(3) 将坐标  $z$  轴反向, 则新的自旋旋量波函数等于原来的波函数乘-1; (4) 以上都不对  
(2 分)

1.5 以下说法正确的有: \_\_\_\_\_

(1) 薛定谔方程的解都可以取为实函数。

(2) 含时间薛定谔方程的解取复共轭后仍然满足该方程。

(3) 力学量算符满足交换律和结合律

(4) 一个自由粒子 (势能  $U=0$ ) 初始时刻处于动量本征态, 随后测量位置坐标、动量、能量中的任意一个力学量, 则平均值一定不随时间变化。

(2 分)

1.6 根据薛定谔方程, 如果某时刻  $t$  的波函数已经归一化, 则以后时刻波函数 \_\_\_\_\_

(a) 一定是归一化的; (b) 一定不是归一化的, 需要重新归一化; (c) 只有满足定态薛定谔方程时才可以归一化; (d) 一定不是归一化的, 无法做归一化处理。(2 分)

1.7 以下关于定态, 正确的是 \_\_\_\_\_

(a) 定态波函数是不含时间的; (b) 两个定态的相干叠加仍然是定态; (c) 定态相干叠加生成的态不一定是定态, 但这种叠加态下几率密度不含时间; (d) 定态是能量本征态, 一般不是动量本征态。

(2 分)

1.8 考虑电子自旋, 一个基态氢原子在非均匀恒定磁场中运动, 则随时间变化的物理量可能是 \_\_\_\_\_

(a) 氢原子动量的平均值和电子自旋角动量的平均值; (b) 电子自旋角动量的平方的取值; (c) 电子自旋角动量的本征值; (d) 电子自旋角动量  $z$  分量的本征值集合 (2 分)

第二部分：写在答题纸上（必须有推导过程才能得分）（共 80 分）

1 假设空间坐标和动量都是厄密算符，则下列算符是不是厄密算符？简要说明理由 （5 分）

(1)  $xp_y - yp_x$

(2)  $xp_x$

2 考虑三维运动的单个自由粒子，

(1) 写出动量本征函数；

(2) 证明该动量本征函数也是能量本征函数；

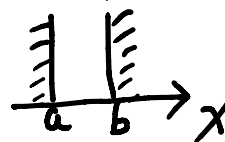
(3) 若  $t=0$  时刻粒子处于动量本征态，动量为  $p$ ，写出以后  $t$  时刻含时间的波函数。

(15 分)

3. 根据含时间的定态波函数的形式证明定态下动量的平均值和概率分布都不随时间变化 (10 分)

5. 考虑一维无限深势阱(在  $a < x < b$  区域  $U=0$ ; 其余区域  $U$  为正无穷大), 求能量本征值和本征函数并归一化;

(10 分)



6. 证明以下算符等式 (10 分)

(1)  $[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$

(2)  $\hat{p}U(x) - U(x)\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}U(x)$  ( $\hat{p}$  是一维动量算符,  $U$  是势函数)

7. 假设电子处于  $S_x$  本征态且自旋角动量为正，求此态下  $S_x$ 、 $S_y$ 、 $S_z$  的平均值和不确定度

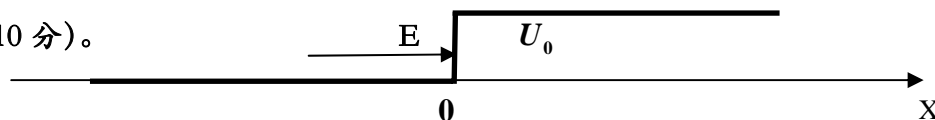
(10 分)

8. 由一维粒子的含时间薛定谔方程推导出几率流密度的表达式:  $J = \frac{i\hbar}{2m} \left( \psi \frac{d\psi^*}{dx} - \psi^* \frac{d\psi}{dx} \right)$

(10 分)

9. 考虑如图所示的半无限宽阶跃势垒的势能曲线,  $U_0 > E > 0$ , 根据定态薛定谔方程, 求几率流

密度  $J(x)$  (10 分)。



\*附加题 (10 分) (总分不满 100 分时才记入总分)

10 系统的哈密顿量为  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2 + \lambda x$ , 其中参数  $k$ 、 $\lambda$  都是正实数,

求这个系统的基态能级, 并求基态下动量  $p$  的平均值。 (5 分)

11 证明关于态的内积的不等式  $\langle \psi | \psi \rangle \langle \varphi | \varphi \rangle \geq |\langle \psi | \varphi \rangle|^2$  (5 分)