

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 量子与统计 (20430094) 闭卷 L 卷

考试时间: 2020 年 1 月 4 日 晚上 19:00-21:00

考试地点: 线上

姓名 _____ 班级 _____ 学号 _____

1. 单项选择题 (共 12 分, 每小题 1 分)

1. 以下正确的命题是_____
 - a. 当温度 T 趋于绝对零度时, 微观粒子运动的平均速率必然趋于零。
 - b. 宏观物体达到热平衡态时, 微观状态不再变化。
 - c. 非孤立系统也有可能达到热平衡态。
 - d. 宏观热力学系统在零温极限下压强必然趋于零。
2. 以下正确的命题是_____
 - a. 处于热平衡态的系统的各个可能的微观状态出现的几率相等。
 - b. 非孤立系统 S 与恒温热源 R 达到热平衡态时, 考虑系统 S 的微观状态, 则同一个能量值 E 对应的各个可能的微观状态出现的几率相等。
 - c. 非平衡态下也满足等概率原理。
 - d. 系统处于基态的概率大是因为系统基态的简并度高。
3. 以下正确的命题有_____
 - a. 熵总是增加的。
 - b. 熵总是减少的。
 - c. 对不可逆过程, 无法计算熵变化。
 - d. 绝热自由膨胀是不可逆过程, 但仍然可以计算出熵变化

4. 以下说法中正确的是_____
- a. 系统趋于平衡态时涨落趋于零。
 - b. 处于热力学平衡态的物体的各个组成部分的温度不一定相等。
 - c. 处于热力学平衡态的物体的各个组成部分的压强不一定相等。
 - d. 载有稳恒电流的铜导线中的自由电子气体处于热平衡态。
5. 关于量子力学和统计物理的关系是_____
- a. 从量子力学可以导出统计物理；
 - b. 从统计物理可以导出量子力学。
 - c. 统计物理中的波函数受热运动的影响，是一系列定态的相干叠加。
 - d. 统计物理中讨论的系统的微观状态是混合态，不能用一个确定的波函数描写
6. 以下说法正确的是_____
- a. 定域粒子系统与非简并条件 ($n_i \ll g_i$) 下的全同粒子系统在最可几分布对应的微观状态数 $W\{n_i\}$ 的表达式是相同的，所以熵相同。
 - b. 能级准连续的情况**不一定**满足玻尔兹曼分布。
 - c. 能级准连续条件满足时玻色与费米系统的宏观性质无差别。
 - d. 量子简并气体的能量一定是量子化的，而非简并条件下能量才趋于连续。
7. 以下说法正确的是_____
- a. N 个原子组成的固体的声子数有上限 ($3N$)。
 - b. 一个声波模式中只能有一个声子。
 - c. 两个声子可以具有不同的能量，但仍然是全同粒子。
 - d. 固体中声子总数是固定不变的。
8. 关于近独立费米气体，以下说法正确的是_____
- a. 大量粒子有可能都处于同一个单粒子态。
 - b. 零温极限下可以当作玻尔兹曼分布。
 - c. 零温极限下热容量趋于零，但内能不是零。
 - d. 能级准连续条件下可以用玻尔兹曼分布。

9. 以下说法正确的是_____
- 热力学第二定律适用于单个粒子的运动。
 - 自然界的過程都是可逆的。
 - 一个热力学系统在变化过程中经历了非平衡或摩擦，就一定是不可逆过程。
 - 可逆过程中熵不变，不可逆过程中熵增加。
10. 近独立粒子体系中将单粒子能级当作准连续，引入态密度，关于这一理论的适用范围，正确的说法是_____
- 该理论对常温下的转动能级适用，对振动能级一般不适用。
 - 态密度与系统的体积 V 无关。
 - 态密度与空间维数无关
 - 态密度方法不适用于 Bose 和 Fermi 分布。
 - 态密度方法适用于常温下的平动、转动及振动，低温条件下则不适用。
11. 一个容器中同一种理想气体被一个隔板分成两部分，假设两部分气体分子数 N 相等、温度 T 相等、体积 V 相等，则抽掉隔板后，容器中的气体的总熵变为（设 k 是玻尔兹曼常数）
- 0
 - $Nk \ln 2$
 - $2Nk \ln 2$
 - $k \ln N$
12. 氢原子的三个能量本征态 (a、b、c) 之间发生电偶极跃迁，以下正确的说法是：
- (a) 不可能发生 a-b-c 的跃迁 ; (b) 有可能发生 a-b-c-a 的跃迁 ; (c) a-b、a-c、b-c 这 3 个跃迁可能同时被禁止 ; (d) 只有宇称相同的态之间才可能发生跃迁。

2 (8 分)

一个系统的哈密顿量可以写成 $H = H_0 + H'$, H 和 H_0 的矩阵形式分别是

$$H = \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & A^* \\ A & E_2^{(0)} \end{pmatrix}, H_0 = \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & 0 \\ 0 & E_2^{(0)} \end{pmatrix}, A \text{ 为一级小量。}$$

- 1) 若 $E_1^{(0)} \neq E_2^{(0)}$, 试用非简并微扰法求能量本征值 (到二级近似)。(4 分)
- 2) 若 $E_1^{(0)} = E_2^{(0)} = E^{(0)}$ ($E^{(0)}$ 已知), 试用简并微扰法求能量本征值 (到一级近似) (4 分)

3. (10 分)

一个系统的哈密顿量可以写成 $H = H_0 + H'$ 。

设 $|m\rangle$ 态和 $|k\rangle$ 态都是 H_0 的本征态, 能量本征值分别为 E_m 和 E_k ,

微扰哈密顿量 H' 矩阵元为:

$$H'_{mk}(t) \equiv \langle m | H'_{mk}(t) | k \rangle = F_{mk} e^{-i\omega t - \gamma t} \quad (\omega > 0, \gamma > 0),$$

求 $t \rightarrow +\infty$ 时, 从 m 态到 k 态跃迁的几率, 并求 $\gamma \ll \omega$ 时的共振条件。

4 (共 20 分) 证明以下常用公式(要求给出简明的推导步骤):

$$(1) \text{ 根据定容热容量的定义 } C_V = \frac{dQ}{dT}, \text{ 证明 } C_V = \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \right)_V \quad (5 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 根据热力学基本公式 } d\bar{E} = Tds - PdV \text{ 及 } F = \bar{E} - TS,$$

$$\text{证明: } P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T, \text{ 其中 } \bar{E}、P \text{ 分别是内能和压强。} \quad (5 \text{ 分})$$

- (3) 考虑满足玻尔兹曼分布的热平衡系统, 假设粒子数为 N , 体积为 V , 温度为 T . 配分函数 Z 定义为: $Z = \sum_i g_i e^{-\beta \varepsilon_i}$. 请推导由 Z 计算内能 \bar{E} 和压强 P 的公式。 (10 分)

5. (15 分)

- (1) 光子气体和声子气体都没有粒子数 N 为恒定值的约束条件 (即粒子数都不守恒), 请根据此性质证明它们的拉格朗日乘子 $\alpha=0$ (对应化学势 $\mu=0$)。 (7 分)

- (2) 导出三维光子气体的 Planck 定律 ($\bar{E}(\nu)d\nu$), 并从结果分析为什么没有“紫外灾难” (即高频极限下频谱并不发散)? (8 分)

5. (10 分) 证明: 对近独立粒子组成的气体, 非简并条件 (即玻色或费米分布退化成玻尔兹曼分布的条件) 下, 有

$$N\lambda^3 \ll V,$$

其中 $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m\pi kT}}$, N 是粒子数, V 是气体的体积, T 是温度, m 是粒子的质量

提示: 可以用积分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$ 或 $\int_0^{\infty} e^{-\beta \varepsilon} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = \beta^{-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

6. (15 分) 一个体积为 V 的费米气体, 粒子数为 N , 假设温度相对很低, 满足条件 $T \ll \frac{\varepsilon_F}{k}$, 近似当作零温费米气体,

- (1) 求零温情况下的费米能级 ε_F ; (5 分)
- (2) 求零温情况下的内能 (5 分)
- (3) 求低温极限下定容热容量 C_V 与温度 T 的关系。(5 分)

7. (10 分) 以下 (1)和 (2) 任选一题

(1) 设重力沿着 z 方向, 考虑高为 h 的平行于 z 轴的气体柱中的所有气体分子, 假设分子数为 N 个, 温度为 T , 求这些气体分子在重力场中的平均内能 \bar{E} 。

(2) 考虑 N 个原子平面排列的石墨 (二维固体), 假设总面积为 S , 求低温 (实际温度远低于德拜温度) 下, 将它的定容热容 C_V 与温度 T 的关系表示为

$C_V = aT^n$ (a 为常系数), 求 a 和 n 的值。

提示: $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2.404$