

2017 年杜春光量统期中 (from 马源)

一、填空 (15 分)

1. (4 分) 一个电子的能量为  $E$ , 质量为  $m$ , Planck 常数为  $h$ , 求电子的德布罗意波长 ( $\lambda$ );
2. (3 分) 若氢原子电子处于 ( $n=2$ ) 的定态, 则波函数除了  $\psi_{200}$  外, 还有 ( $\psi_{210}$ );
3. (4 分) 设氢原子波函数为  $\Psi(r, \theta, \phi) = \frac{\sqrt{3}}{2} R_{21}(r) Y_{1-1}(\theta, \phi) - \frac{1}{2} R_{21}(r) Y_{10}(\theta, \phi)$ ; 则  $L^2$  的可能取值有 ( $2\hbar^2$ ),  $L_z$  的平均值为 ( $-\hbar$ );
4. (4 分) 下列说法正确的是 ( $(1)(2)(3)$ ) (少选按比例给分, 错选不得分)
  - (1)  $s_x, s_y, s_z$  有共同的本征波函数;
  - (2)  $s_z, L_z$  有共同的本征波函数;
  - (3)  $p_x$  与  $x$  一定没有共同的本征波函数;
  - (4)  $L_x, L_y, L_z$  有个别本征波函数但不构成完全系。

二、大题 (85 分)

2. (10 分) 求算符  $L_z$  ( $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$ ) 的本征值和本征波函数 (归一化);
3. (10 分) 证明厄米算符的本征值为实数;
4. (20 分) 根据 Pauli 矩阵
  - (1) (10 分) 若电子处于  $S_x$  本征态且本征值为  $\frac{\hbar}{2}$ , 求  $S_z$  的平均值;
  - (2) (10 分) 将自旋角动量  $S$  在任意方向  $\vec{n}$  投影  $S_n = \vec{S} \cdot \vec{n} = S_x n_x + S_y n_y + S_z n_z$ , 求  $S_n$  的本征值。
5. (20 分) 求解一维无限深势阱 (阱内  $U=0$ , ( $0 < x < a$ ))
  - (1) 求本征值  $E_n$  和本征波函数  $\psi_n$  (归一化);
  - (2) 处于基态波函数时 ( $n=1$ ), 求坐标平均值和动量平均值;
  - (3) 若  $t < 0$  时, 处于基态, 在  $t=0$  时势阱突然撤销, 坐标的平均值是否随时间变化;
  - (4) 求一维无限深势阱中 3 个 Bose 子的能量的最小值 (不考虑粒子间相互作用);
  - (5) 若考虑自旋, 求一维无限深势阱中 3 个 Fermi 子能量的最小值 (不考虑粒子间相互作用)。
6. (10 分) 考虑一个能级体系, Hamilton 量是  $H_0$ , 能量的本征值是  $E_n$ , 本征函数为  $\psi_n$ ,  $t=0$  时刻受到微扰  $H'$ , 在  $H_0$  表象下的矩阵元为  $H'_{nk} = A e^{-\gamma t} \cdot (\delta_{n,k-1} + \delta_{n,k+1})$  ( $A, \gamma$  为常数), 若初始状态为  $\psi_2$ , 请写出所有可能的跃迁路径, 分别求跃迁几率, 并讨论足够长时间 ( $t \gg \frac{1}{\gamma}$ ) 的极限情况;
7. (8 分) 证明电偶极跃迁的选择定则,  $\hat{H}' = e \vec{E}(t) \cdot \vec{r}$ , 证明宇称相同的态之间不发生跃迁;
8. (7 分) 厄米算符  $\hat{F}, \hat{G}$ ,  $\hat{C} = -i[\hat{F}, \hat{G}]$ , 求证  $\hat{C}$  是实数。