Chương 3: Phép đếm

- **Nguyên lý Dirichlet**
- **Các phương pháp đếm cơ bản**
- **Các phương pháp đếm nâng cao**
  - *Phương pháp song ánh*
  - *Phương pháp quỹ đạo*
  - *Phương pháp đa thức và số phức*

L.T.D.

Nguyên lý Dirichlet

- **Nguyên lý:**

$\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$

$\frac{n}{k}$

- **VD**

$\left\lceil \frac{5}{3} \right\rceil = 2$

$\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2$

L.T.D.D.

Nguyên lý Dirichlet

$a_1 = 10q_1 + r$

$a_2 = 10q_2 + r$

$$
\begin{aligned}
a_1^2 - a_2^2 &= (10q_1 + r)^2 - (10q_2 + r)^2 \\
&= (10q_1)^2 + 20q_1 + r^2 - (10q_2)^2 - 20q_2 - r^2 \\
&= (10q_1)^2 + 20q_1 - (10q_2)^2 - 20q_2 \\
&= 20(5q_1^2 - 5q_2^2 + q_1 - q_2) \vdots 20
\end{aligned}
$$

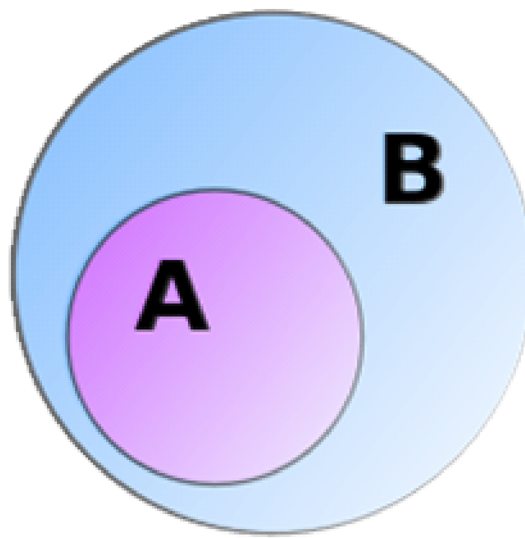
Các phương pháp đếm cơ bản

- **Các nguyên lý tính lực lượng tập hợp**
  - A A $|A|$

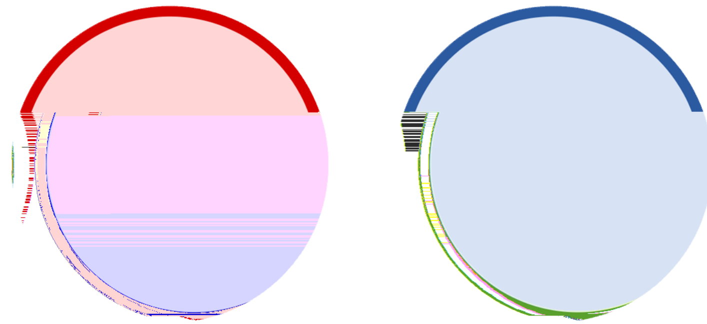
1. **Nguyên lý bù trừ:** $A \subset B$ $\bar{A} = B\setminus A$, ta có:

$$|\bar{\boldsymbol{A}}| = |\boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A}|$$

- $|\bar{A}|$?
- $|B| = 10$ $|A| = 4$
- $|\bar{A}| = |B| - |A| = 10 - 4 = 6$



Các phương pháp đếm cơ bản



2. **Nguyên lý cộng:**

$$|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$$

$$A_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq$$

$A_1,\ A_2,\ A_3$ $|A| = |A_1| + |A2| + |A3| = 4 + 4 + 4 = 12$

L.T.D.D.

Các phương ph [redacted]

2. **Nguyên lý cộng (thêm bớt** [redacted]

$$|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}$$ [redacted]

$A_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 12 \wedge (x$ [redacted]

$A_2 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 12 \wedge x$ [redacted]

$|A|$ $\quad A = A_1 \cup A_2$

- $A_1 = \{1, 4, 7, 10\}$, A_2 [redacted]

L.T.P.D.

Các phương pháp đếm cơ bản

2. **Nguyên lý thêm bớt:**

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$

$$|\cup_{i=1}^{n} A_i| = \Sigma_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} (-1)^{\mathrm{k}-1} \Sigma_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

L.T.P.D.

Các phương pháp đếm cơ bản

3. **Nguyên lý nhân (tích Descartes):**

$$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|.|\boldsymbol{B}|$$

$A_1 = \{1, 2, 3\}$

$A_2 = \{a, b, c$

$A = A_1 \times A_2,\qquad |A| = |A_1 \times A_2| = |A_1|.|A_2| = 3.3 = 9$

Các phương pháp đếm cơ bản

- **Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp**

  1. **Hoán vị, hoán vị lặp, hoán vị vòng**

Hoán vị lặp:

$P(n_1, n_2, \dots, n_k)$

n_i $i \in \{1,2, \dots, k\}$

$$\boldsymbol{P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}}$$

ạ	ố ượ
V	1
I	3
S	1
T	2
N	1
G	1

$$\frac{9!}{1!3!1!2!1!1!} = 30240$$

L.T.D.D.

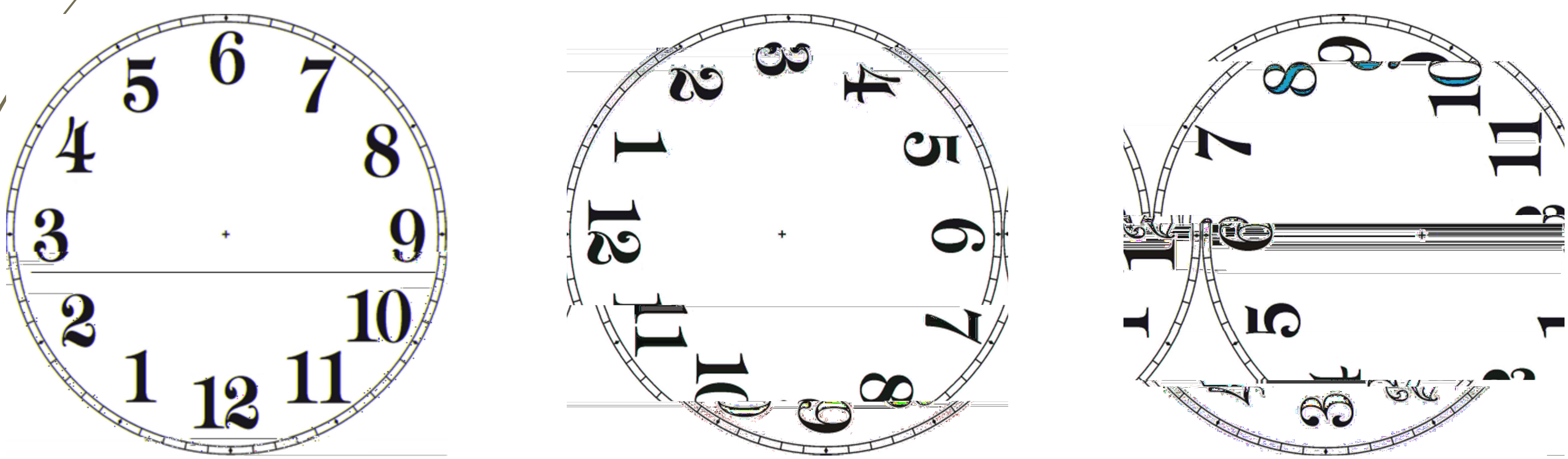
Các phương pháp đếm cơ bản

- **Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp**

  1. **Hoán vị, hoán vị lặp, hoán vị vòng**

Hoán vị vòng:

$$Q_n = (n-1)!$$



Các phương pháp đếm cơ bản

- **Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp**

  1. **Hoán vị, hoán vị lặp, hoán vị vòng**

Hoán vị vòng:

$$Q_n = (n-1)!$$

VD:

Các phương pháp đếm cơ bản

- **Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp**

  2. Tổ hợp, tổ hợp lặp

  Tổ hợp:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, k \in \{1,2,\ldots,n\}$$

- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

L.T.D.D.

Các phương pháp đếm cơ bản

- **Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp**

  2. Tổ hợp, tổ hợp lặp

  Tổ hợp:

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

VD:

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

L.T.D.D.

Các phương pháp đếm cơ bản

- **Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp**

2. Tổ hợp, tổ hợp lặp

Tổ hợp lặp:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!}$$

VD:

$$\overline{C}_3^{12} = C_{3+12-1}^{12} = \frac{(3+12-1)!}{12!(3-1)!} = \frac{14!}{12!2!} = \frac{14.13}{2} = 91$$

L.T.D.D.

Các phương pháp đếm cơ bản

Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

3. Chỉnh hợp, chỉnh hợp lặp

Chỉnh hợp: $(x_1, x_2, \dots, x_k)$

$$\boldsymbol{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

VD:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 3.4.5 = 60$$

L.T.D.D.

Các phương pháp đếm nâng cao

Phương pháp truy hồi

$f(n+k)$

$f(n), f(n+1), \dots, f(n+k-1)$

VD: $\{a_n\}$ $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

$n = 2,3, \dots$ $a_0 = 3, a_1 = 5$ $a_2, a_3?$

$$a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$$
$$a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$$

L.T.D.D.

Các phương pháp đếm nâng cao

VD: $\{a_n\}$ $a_n = 3n$ n $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ $n = 2,3,\ldots$

$n \geq 2$

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n-1)] - 3(n-2) = 3n$$

$\{a_n\}$ $a_n = 3n$ n

VD: $\{a_n\}$ $a_n = 2^n$ n $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ $n = 2,3,\ldots$

$a_n = 2^n$ $a_0 = 1, a_1 = 2$ $a_2 = 2^2 = 4$

$a_2 = 2a_1 - a_0 = 2.2 - 1 = 3 \neq 4$

$\{a_n\}$ $a_n = 2^n$ n

Các phương pháp đếm nâng cao

VD: $\{a_n\}$ $a_n = 5$ n

$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$

$n = 2,3, \ldots$

$n \geq 2$

$a_n = 2.5 - 5 = 5$

$\{a_n\}$ $a_n = 5$ n

Các phương pháp đếm nâng cao

VD:

P_n

$$P_n = P_{n-1} + 0.1P_{n-1} = 1.1P_{n-1}$$

$$P_0 = 10$$

$$P_1 = 1.1P_0;\ P_2 = 1.1P_1 = 1.1^2P_0;\ P_3 = 1.1P_2 = 1.1^3P_0;\ \ldots;\ P_n = 1.1^nP_0$$

$$P_{20} = 1.1^{20} \times 10 \approx 67.275$$

L.T.D.D.

Các phương pháp đếm nâng cao

Phương pháp song ánh:

$f : X \to Y$

- f $|X| \leq |Y|$
- f $|X| \geq |Y|$
- f $|X| = |Y|$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12 \qquad (*)$$

L.T.D.D.

Các phương pháp đếm nâng cao

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12 \qquad (*)$$

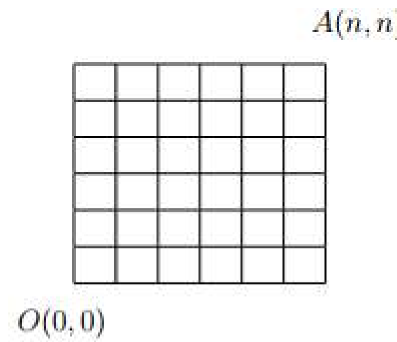
$$X = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}_+^3 | (a_1, a_2, a_3)\ thỏa (*)\}$$

$$f: X \to Y$$
$$(a_1, a_2, a_3) \mapsto \underbrace{11 \ldots 1}_{a_1}\ 0\ \underbrace{11 \ldots 1}_{a_2}\ 0\ \underbrace{11 \ldots 1}_{a_3}$$

f $\qquad |X| = |Y|$

$$\bar{C}_3^{12} = C_{3+12-}^{12} = \frac{(3+12-1)!}{12!\,(3-1)!} = \frac{14!}{12!\,2!} = \frac{14.13}{2} = 91$$

Các phương pháp đếm nâng cao



$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

$n \times n$

C_{2n}^n

$M_k(k, n-k)$ $\quad k = 0,1,2, \dots, n$ $\quad S_k$

$M_k(k, n-k)$

$M_k(k, n-k)$ $\quad C_n^{n-k}$

$M_k(k, n-k)$ $\quad C_{(n-k)+(n-(n-k))}^{m-(n-k)}$

$$S_k = C_n^{n-k}.C_{(n-k)+(n-(n-k))}^{m-(n-k)} = C_n^k.C_n^k = \left(C_n^k\right)^2$$

$$C_{2n}^n = \Sigma_{k=0}^n S_k = \Sigma_{k=0}^n \left(C_n^k\right)^2 = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2$$

Bài tập thêm về NL Dirichlet

L.T.D.D.