- Các quy tắc suy luận
- Các phương pháp chứng minh

L.T.D.D.

- Xét mệnh đề $P \rightarrow Q$, trong đó P là giả thiết Q là kết luận. Từ giả thiết P, chúng ta sử dụng các quy tắc suy luận/các phương pháp chứng minh để đưa ra kết luận Q
- Ví dụ:
  - “Nếu hôm nay trời mưa thì cô ấy không đến. Nếu cô ấy không đến thì ngày mai cô ấy đến. Vì vậy, nếu hôm nay trời mưa thì ngày mai cô ấy đến.” ⇒ Hai câu đầu tiên là giả thiết, câu cuối cùng là kết luận
  - “An giỏi toán. Do đó, An giỏi toán hoặc tin” ⇒ Câu đầu là giả thiết, câu cuối là kết luận

L.T.D.D.

$\dfrac{P}{\therefore P \vee Q}$	$P \rightarrow (P \vee Q)$	Cộng
$\dfrac{P \wedge Q}{\therefore P}$	$(P \wedge Q) \rightarrow P$	Rút gọn
$\dfrac{\begin{array}{l} P \\ P \rightarrow Q \end{array}}{\therefore Q}$	$[P \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow Q$	Khẳng định
$\dfrac{\begin{array}{l} \bar{Q} \\ P \rightarrow Q \end{array}}{\therefore \bar{P}}$	$[\bar{Q} \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow \bar{P}$	Phủ định
$\dfrac{\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ Q \rightarrow R \end{array}}{\therefore P \rightarrow R}$	$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$	Tam đoạn luận giả định
$\dfrac{\begin{array}{l} \bar{P} \\ P \vee Q \end{array}}{\therefore Q}$	$(\bar{P} \wedge (P \vee Q)) \rightarrow Q$	Tam đoạn luận tuyển

L.T.D.D.

- Ví dụ:
  - “Nếu hôm nay trời mưa thì cô ấy không đến. Nếu cô ấy không đến thì ngày mai cô ấy đến. Vì vậy, nếu hôm nay trời mưa thì ngày mai cô ấy đến.”

$\Rightarrow$ Quy tắc …

  - “An giỏi toán. Do đó, An giỏi toán hoặc tin”

$\Rightarrow$ Quy tắc …

  - “Nếu hôm nay tuyết rơi thì trường học đóng cửa. Hôm nay trường học không đóng cửa. Do đó, hôm nay đã không có tuyết rơi.”

$\Rightarrow$ Quy tắc …

$\dfrac{P}{\therefore P \vee Q}$	Cộng
$\dfrac{P \wedge Q}{\therefore P}$	Rút gọn
$\dfrac{P \quad P \rightarrow Q}{\therefore Q}$	Khẳng định
$\dfrac{\bar{Q} \quad P \rightarrow Q}{\therefore \bar{P}}$	Phủ định
$\dfrac{P \rightarrow Q \quad Q \rightarrow R}{\therefore P \rightarrow R}$	Tam đoạn luận giả định
$\dfrac{\bar{P} \quad P \vee Q}{\therefore Q}$	Tam đoạn luận tuyển

L.T.D.D.

- Ví dụ:
  - "An giỏi toán. Do đó, An giỏi toán hoặc tin"

Đặt:

P = "An giỏi toán"

Q = "An giỏi tin"

Biểu thức: $P \to (P \vee Q)$

$\Rightarrow$ Quy tắc Cộng

$\begin{array}{c} P \\ \hline \therefore P \vee Q \end{array}$	Cộng
$\begin{array}{l} P \wedge Q \\ \hline \therefore P \end{array}$	Rút gọn
$\begin{array}{l} P \\ P \to Q \\ \hline \therefore Q \end{array}$	Khẳng định
$\begin{array}{l} \bar{Q} \\ P \to Q \\ \hline \therefore \bar{P} \end{array}$	Phủ định
$\begin{array}{l} P \to Q \\ Q \to R \\ \hline \therefore P \to R \end{array}$	Tam đoạn luận giả định
$\begin{array}{l} \bar{P} \\ P \vee Q \\ \hline \therefore Q \end{array}$	Tam đoạn luận tuyển

L.T.D.D.

- Ví dụ:
  - “Nếu hôm nay tuyết rơi thì trường học đóng cửa. Hôm nay trường học không đóng cửa. Do đó, hôm nay đã không có tuyết rơi.”

Đặt:

P = “Hôm nay tuyết rơi”

Q = “Trường học đóng cửa”

Biểu diễn: $[(P \rightarrow Q) \land \bar{Q}] \rightarrow \bar{P}$

$\Rightarrow$ Quy tắc Phủ định

$\dfrac{P}{\therefore P \lor Q}$	Cộng
$\dfrac{P \land Q}{\therefore P}$	Rút gọn
$\dfrac{P \quad P \rightarrow Q}{\therefore Q}$	Khẳng định
$\dfrac{\bar{Q} \quad P \rightarrow Q}{\therefore \bar{P}}$	Phủ định
$\dfrac{P \rightarrow Q \quad Q \rightarrow R}{\therefore P \rightarrow R}$	Tam đoạn luận giả định
$\dfrac{\bar{P} \quad P \lor Q}{\therefore Q}$	Tam đoạn luận tuyển

L.T.D.D.

- Ví dụ:
  - “Hôm nay trời nóng trên 100 độ hoặc sự ô nhiễm là nguy hại. Hôm nay nhiệt độ ngoài trời thấp hơn 100 độ. Do đó, sự ô nhiễm là nguy hại.”

$\Rightarrow$ Quy tắc Tam đoạn luận tuyển

$\dfrac{P}{\therefore P \vee Q}$	Cộng
$\dfrac{P \wedge Q}{\therefore P}$	Rút gọn
$\dfrac{\begin{array}{l}P \\ P \rightarrow Q\end{array}}{\therefore Q}$	Khẳng định
$\dfrac{\begin{array}{l}\bar{Q} \\ P \rightarrow Q\end{array}}{\therefore \bar{P}}$	Phủ định
$\dfrac{\begin{array}{l}P \rightarrow Q \\ Q \rightarrow R\end{array}}{\therefore P \rightarrow R}$	Tam đoạn luận giả định
$\dfrac{\begin{array}{l}\bar{P} \\ P \vee Q\end{array}}{\therefore Q}$	Tam đoạn luận tuyển

L.T.D.D.

- Ví dụ:
  - “Nếu tôi làm bài tập này cả đêm thì tôi có thể trả lời được tất cả các bài tập. Nếu tôi trả lời được tất cả các bài tập thì tôi sẽ hiểu được tài liệu này. Do đó, nếu tôi làm được bài tập này cả đêm thì tôi sẽ hiểu được tài liệu này.”

⇒ Quy tắc Tam đoạn luận giả định

$\dfrac{P}{\therefore P \vee Q}$	Cộng
$\dfrac{P \wedge Q}{\therefore P}$	Rút gọn
$\dfrac{P \quad P \to Q}{\therefore Q}$	Khẳng định
$\dfrac{\bar{Q} \quad P \to Q}{\therefore \bar{P}}$	Phủ định
$\dfrac{P \to Q \quad Q \to R}{\therefore P \to R}$	Tam đoạn luận giả định
$\dfrac{\bar{P} \quad P \vee Q}{\therefore Q}$	Tam đoạn luận tuyển

L.T.D.D.

VD: Dùng các quy tắc suy luận chứng minh rằng

$$\big(p \to (q \to r)\big) \wedge (q \vee \bar{p}) \wedge p \Rightarrow r$$

1. $p \to (q \to r)$
2. $q \vee \bar{p}$
3. p

----

4. $q \to r$ — Khẳng định 1 và 3
5. q — Tam đoạn luận tuyển 2 và 3
6. r — Khẳng định 4 và 5

$\dfrac{P}{\therefore P \vee Q}$	Cộng
$\dfrac{P \wedge Q}{\therefore P}$	Rút gọn
$\dfrac{P \quad P \to Q}{\therefore Q}$	Khẳng định
$\dfrac{\bar{Q} \quad P \to Q}{\therefore \bar{P}}$	Phủ định
$\dfrac{P \to Q \quad Q \to R}{\therefore P \to R}$	Tam đoạn luận giả định
$\dfrac{\bar{P} \quad P \vee Q}{\therefore Q}$	Tam đoạn luận tuyển

L.T.D.D.

- VD: Dùng các quy tắc suy luận chứng minh rằng

$$p \wedge (p \to q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \to \bar{q}) \Rightarrow s$$

1. p
2. $p \to q$
3. $s \vee r$
4. $r \to \bar{q}$

----

5. q Từ 1 và 2
6. $\bar{r}$ Từ 4 và 5
7. s Từ 3 và 6

P $\overline{\therefore P \vee Q}$	Cộng
$P \wedge Q$ $\overline{\therefore P}$	Rút gọn
P $P \to Q$ $\overline{\therefore Q}$	Khẳng định
$\bar{Q}$ $P \to Q$ $\overline{\therefore \bar{P}}$	Phủ định
$P \to Q$ $Q \to R$ $\overline{\therefore P \to R}$	Tam đoạn luận giả định
$\bar{P}$ $P \vee Q$ $\overline{\therefore Q}$	Tam đoạn luận tuyển

L.T.D.D.

- VD: “Nếu bạn đã giải hết bài tập trong sách Toán rời rạc này thì bạn nắm vững logic. Bạn nắm vững logic. Vậy, bạn đã giải hết bài tập trong sách Toán rời rạc này.”

⇒ Quy tắc …

Đặt: P = “Bạn đã giải hết bài tập trong sách Toán rời rạc này”

Q = “Bạn nắm vững logic”

Biểu diễn: $[(P \to Q) \land Q] \to P$

⇒ Đây là một tiếp liên

⇒ Một suy diễn như trên được gọi là ngụy biện

- Ngụy biện hay ngộ nhận kết quả là phương pháp chứng minh sai, suy luận không dựa vào hằng đúng mà chỉ dựa vào một tiếp liên

L.T.D.D.

VD: Cho 2 giả thiết:

- Môn Logic là khó hoặc không có nhiều sinh viên thích môn Logic.
- Nếu môn Toán là dễ thì Logic là không khó.

Hãy xác định xem các khẳng định sau là có dựa trên cơ sở của các giả thiết đã cho hay không:

a/ Môn toán là không dễ nếu nhiều sinh viên thích môn logic.

b/ Không có nhiều sinh viên thích môn logic nếu môn toán là không dễ.

c/ Môn toán là dễ hoặc môn logic là khó.

d/ Môn logic là không khó hoặc môn toán là không dễ.

e/ Nếu không có nhiều sinh viên thích môn logic khi đó hoặc là môn toán không dễ hoặc là logic không khó.

VD: Cho 2 giả thiết:

- Môn logic là khó hoặc không có nhiều sinh viên thích môn logic.
- Nếu môn toán là dễ thì logic là không khó.

Đặt:

- P = "Môn logic là khó"
- Q = "Nhiều sinh viên thích môn logic"
- R = "Môn Toán là dễ"

Hai giả thiết được biểu diễn:

- $P \vee \bar{Q}$
- $R \rightarrow \bar{P}$ hoặc $\bar{R} \vee \bar{P}$

L.T.D.D.

a/ Môn toán là không dễ nếu nhiều sinh viên thích môn logic.

Biểu thức kết luận: Q $\rightarrow \bar{R} = \bar{Q} \vee \bar{R}$

Nếu mệnh đề “giả thiết [redacted] → [redacted]ận” = T thì phát biểu trong câu a/ là có cơ sở

Ta xét:

$(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{P}) \rightarrow ($ [redacted] $\vee$ [redacted] $= ($ [redacted] $)$

P = “Môn logic là khó”
Q = “Nhiều sinh viên thích môn logic”
R = “Môn Toán là dễ”

-
- hoặc

b/ Không có nhiều sinh viên thích môn logic nếu môn toán là không dễ.

Biểu thức kết luận: $\bar{R} \to \bar{Q} = R \vee \bar{Q}$

Nếu mệnh đề “giả thiết → kết luận” = T thì phát biểu trong câu b/ là có cơ sở

Ta xét:

$$(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{P}) \to (R \vee \bar{Q}) = \overline{(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{P})} \vee R \vee \bar{Q}$$
$$= (\bar{P} \wedge Q) \vee (R \wedge P) \vee \bar{Q} \vee \bar{R} = (\bar{P} \wedge Q) \vee \bar{Q} \vee (R \wedge P) \vee R$$
$$= [(\bar{P} \vee \bar{Q}) \wedge (Q \vee \bar{Q})] \vee R$$
$$= [(\bar{P} \vee \bar{Q}) \wedge T] \vee R = \bar{P} \vee \bar{Q} \vee R$$

Đây là một tiếp liên. Vậy kết luận trong phát biểu b/ là không có cơ sở

c/ Môn toán là dễ hoặc môn logic là khó.

L.T.D.D.

P = “Môn logic là khó”
Q = “Nhiều sinh viên thích môn logic”
R = “Môn Toán là dễ”

-
- hoặc

c/ Môn toán là dễ hoặc môn logic là khó.

Biểu thức kết luận: $R \vee P$

Nếu mệnh đề “giả thiết → kết luận” = T thì phát biểu trong câu c/ là có cơ sở

Ta xét:

$$(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{P}) \rightarrow (R \vee P) = \overline{(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{P})} \vee R \vee P$$
$$= (\bar{P} \wedge Q) \vee (R \wedge P) \vee R \vee P = (\bar{P} \wedge Q) \vee P \vee (R \wedge P) \vee R$$
$$= [(\bar{P} \vee P) \wedge (Q \vee P)] \vee R$$
$$= [T \wedge (Q \vee P)] \vee R = Q \vee P \vee R$$

Đây là một tiếp liên. Vậy kết luận trong phát biểu c/ là không có cơ sở

d/ Môn logic là không khó hoặc môn toán là không dễ.

d/ Môn logic là không khó hoặc môn toán là không dễ.

Biểu thức kết luận: $\bar{R} \vee$

L.T.D.D.

P = “Môn logic là khó”
Q = “Nhiều sinh viên thích môn logic”
R = “Môn Toán là dễ”
•
•   hoặc

e/ Nếu không có nhiều sinh viên thích môn logic khi đó hoặc là môn toán không dễ hoặc là logic không khó.

Biểu thức kết luận: $\bar{Q} \rightarrow (\bar{R} \vee \bar{P}) = Q \vee \bar{R} \vee \bar{P}$

Nếu mệnh đề “giả thiết → kết luận” = T thì phát biểu trong câu e/ là có cơ sở

Ta xét:

$(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{P}) \rightarrow (Q \vee \bar{R} \vee \bar{P}) = \overline{(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{P})} \vee Q \vee \bar{R} \vee \bar{P}$
$= (\bar{P} \wedge Q) \vee (R \wedge P) \vee \bar{R} \vee \bar{P} = (\bar{P} \wedge Q) \vee Q \vee (R \wedge P) \vee (\overline{R \wedge P})$
$= Q \vee T = T$

Vậy kết luận trong phát biểu e/ là có cơ sở

L.T.D.D.

- Cho mệnh đề $P \rightarrow Q$, trong đó P là giả thiết và Q là kết luận của bài toán, việc đi từ giả thiết đến kết luận là đi chứng minh mệnh đề $P \rightarrow Q = \mathrm{T}$

Rỗng	$P \rightarrow Q$	P sai
Tầm thường	$P \rightarrow Q$	Q đúng
Trực tiếp	$P \rightarrow Q$	Nếu $P = T$ thì $Q = T$
Gián tiếp	$P \rightarrow Q$	$\bar{Q} \rightarrow \bar{P}$
Phản chứng	P	Giả sử $P = F$ đi đến P $\rightarrow Q = T$, với $Q = F$
Quy nạp	$\forall n \geq n\ , P(n)$	Kiểm chứng $P(n\ ) = T$ Giả sử $P(k) = T,$ chứng minh $P(k+1) = T$

L.T.D.D.

- VD: Cho $P(n) =$"Nếu $n > 1$ thì $n \quad > n$". Chứng minh rằng $P(1) = T$

  Ta có $P(1) =$"Nếu $1 > 1$ thì $1 \quad > 1$"

  Vì giả thiết "$1 > 1$" $=$ F nên $P(1) = T$ (Không cần xét đến kết luận "$1 \quad > 1$")

⇒ Phương pháp chứng minh Rỗng

- VD: Cho $P(n) =$"Nếu $a, b \in \mathbb{Z} \quad$ và $a \geq b$ thì $a \quad \geq b \quad$". Chứng minh $P(0) = T$

  Ta có $\mathrm{a} \quad = \mathrm{b} \quad = 1$. Do đó "$\mathrm{a} \quad \geq \mathrm{b} \quad$" $= T$

  Vậy $P(0) = T$ bất chấp giả thiết là đúng hay sai

⇒ Phương pháp chứng minh Tầm thường

L.T.D.D.

- VD: Chứng minh rằng nếu n lẻ thì n lẻ

  Giả sử rằng giả thiết n lẻ là đúng. *Đặt* $n = 2k + 1$, với $k \in \mathbb{Z}$, ta có

  $n = (2k + 1) = (4k + 4k + 1) = 2(2k + 2k) + 1$ là lẻ

  Vậy nếu n lẻ thì n lẻ

$\Rightarrow$ Phương pháp chứng minh Trực tiếp

- VD: Cho $P(n)$ =“Nếu $n > 1$ thì $n > n$”. Chứng minh rằng $P(n)$ với mọi n $\in \mathbb{Z}$

  Giả sử $n > 1$, tức là: $n = 1 + k$, với $k \geq 1$. Ta có:

  $n = (1 + k) = 1 + 2k + k = (1 + k) + k + k > n$

  Vậy nếu $n > 1$ thì $n > n$

$\Rightarrow$ Phương pháp chứng minh Trực tiếp

L.T.D.D.

VD: Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.

$\Rightarrow$ Sử dụng phương pháp chứng minh Phản chứng

Gọi $a\ ,a\ ,\ldots,a$ là độ dài các đoạn thẳng được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

$\forall i = 1,2,\ldots,7$, ta có $10 < a < 100$. Ta cần tìm được ba đoạn liên tiếp sao cho tổng độ dài của hai đoạn đầu lớn hơn đoạn cuối

Giả sử không thể tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác, tức là ta có:

$$\begin{cases} a + a \leq a \\ a + a \leq a \\ a + a \leq a \\ a + a \leq a \\ a + a \leq a \end{cases} \quad \text{Vì} \quad \begin{cases} a > 20 \\ a > 30 \\ a > 50 \\ a > 80 \\ a > 130 \end{cases}$$

Mâu thuẫn với giả thiết

Vậy luôn tồn tại được 3 đoạn $a\ ,a\ \ ,a$ để $a\ + a\ \ > a$, tức là luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác

L.T.D.D.

VD: Với $n \geq 1$ là số nguyên. Chứng [redacted]inh mệnh đề $\forall n \geq 1, P(n)$, với

$$P(n): \sum i =$$ [redacted]

- Chứng minh từng trường hợp: Để chứng minh $\big((P \lor P \lor \cdots \lor P) \to Q\big)$, ta có thể sử dụng tương đương logic $\big((P \lor P \lor \cdots \lor P) \to Q\big) = \big((\mathrm{P} \to Q) \land (\mathrm{P} \to Q) \land \cdots \land (P \to Q)\big)$
- VD: Chứng minh rằng "Nếu n không chia hết cho 3 thì n không chia hết cho 3"

  Đặt: $P(n) =$"n không chia hết cho 3" và $\mathrm{Q}(n) =$"n không chia hết cho 3"

  $P(n) =$"n chia cho 3 dư 1" và $P(n) =$"n chia cho 3 dư 2"

Để chứng minh $P \to Q$, ta chứng minh $(P \to Q) \land (P \to Q)$

- VD: Chứng minh rằng "Nếu n không chia hết cho 3 thì n không chia hết cho 3"

  Đặt: $P(n)$ ="n không chia hết cho 3" và $Q(n)$ ="n không chia hết cho 3"

  $P\ (n)$ ="n chia cho 3 dư 1" và $P\ (n)$ ="n chia cho 3 dư 2"

Để chứng minh $P \rightarrow Q$, ta chứng minh $(P \rightarrow Q) \wedge (P\ \rightarrow Q)$

Giả sử P đúng, tức là $n = 3k + 1,$ với $k \in \mathbb{Z}.$ Khi đó:

$n\ = (3k+1)\ = 9k\ + 6k + 1 = 3(3k\ + 2k) + 1$ chia cho 3 dư 1

Do đó, $P\ \rightarrow Q = T$ (1)

Giả sử P đúng, tức là $n = 3k + 2,$ với $k \in \mathbb{Z}.$ Khi đó:

$n\ = (3k+1)\ = 9k\ + 12k + 4 = 3(3k\ + 4k + 1) + 1$ chia cho 3 dư 1

Do đó, $P\ \rightarrow Q = T$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra nếu n không chia hết cho 3 thì n không chia hết cho 3

VD: Một lớp học có 20 học sinh. Các học sinh tham gia vào 3 nhóm năng khiếu: nhóm Toán có 17 em, nhóm Văn có 13 em và Anh văn có 11 em. Chứng minh rằng trong lớp có em tham gia đồng thời cả 3 nhóm.

- Gọi

L.T.P.D.

VD: Chứng minh rằng $n \quad + 2n$ luôn chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

- Đặt $A = n \quad + 2n = n(n \quad + 2)$. Xét hai trường hợp:
  - Nếu $n \vdots 3$ thì A $\vdots$ 3
  - Ngược lại, đặt $n = 3k \pm 1$. Khi đó:

$n \quad + 2 = (3k \pm 1) \quad + 2 = 3(3k \quad \pm 2k + 1) \vdots 3$

Do đó A $\vdots$ 3

L.T.D.D.

1. Chứng minh các biểu thức sau

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i)! = (n+1)! - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i.2^i = 2 + (n-1).2^{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2.3^{i-1} = 3^n - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

L.T.D.D.

2. Cho $n \in \mathbb{Z}, n > 1$ và $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. Chứng minh rằng nếu $\left(x + -\right) \in \mathbb{Z}$ thì $\left(x \quad + —\right) \in \mathbb{Z}$.

3. Cho $n \in \mathbb{Z}, n > 1$. Tìm chữ số tận cùng của $\mathrm{A} = 2 \quad - 1$ và chứng minh kết luận đó là đúng.

4. Chứng minh rằng mọi bưu phí lớn hơn hay bằng 12 xu đều có thể tạo ra bằng các con tem 4 xu hay 5 xu