

# Chương 4&5: QUAN HỆ VÀ ĐẠI SỐ BOOL

- Quan hệ
- Đại số Bool
- Hàm Bool
- Hệ phương trình Bool
- Đơn giản công thức

# Quan hệ

- Cho hai tập hợp  $A$  và  $B$ , một **quan hệ hai ngôi** giữa  $A$  và  $B$  là **tập con**  $\mathfrak{R}$  của  $A \times B$ . Với  $(a, b) \in \mathfrak{R}$ , ta viết  $a\mathfrak{R}b$
- VD: Cho  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  và  $B = \{11, 12, 13\}$ . Một quan hệ  $\mathfrak{R}$  được định nghĩa như sau: Với  $a \in A, b \in B, a\mathfrak{R}b \Leftrightarrow a|b$ . Hãy xác định  $\mathfrak{R}$ 
  - $\mathfrak{R} = \{(1, 11), (1, 12), (1, 13), (2, 12), (3, 12), (4, 12)\}$
- Tính chất của quan hệ: Cho  $\mathfrak{R}$  là quan hệ của tập  $A$  và chính nó
  - Tính phản xạ:  $a \in A, a\mathfrak{R}a$
  - Tính đối xứng:  $a, b \in A, a\mathfrak{R}b \Rightarrow b\mathfrak{R}a$
  - Tính phản đối xứng:  $a, b \in A, a\mathfrak{R}b \wedge b\mathfrak{R}a \Rightarrow a = b$
  - Tính bắc cầu:  $a, b, c \in A, a\mathfrak{R}b \wedge b\mathfrak{R}c \Rightarrow a\mathfrak{R}c$

# Quan hệ

- Quan hệ **tương đương**: Là quan hệ hai ngôi  $\mathcal{R}$  trên  $A$  thỏa các tính chất **phản xạ, đối xứng và bắc cầu**
- VD: Cho  $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ , quan hệ  $\mathcal{R}$  trên  $A$  được định nghĩa: Với  $a, b \in A, a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a - b : 3$ . CMR  $\mathcal{R}$  là một quan hệ tương đương trên  $A$ .
- Thật vậy:
  - Với  $a \in A, a - a = 0 : 3 \Leftrightarrow a\mathcal{R}a$ . Suy ra  $\mathcal{R}$  phản xạ
  - Với  $a, b \in A, a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a - b = 3q \Leftrightarrow b - a = 3(-q) : 3 \Leftrightarrow b\mathcal{R}a$ . Suy ra  $\mathcal{R}$  đối xứng
  - Với  $a, b, c \in A, a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a - b = 3q$  và  $b\mathcal{R}c \Leftrightarrow b - c = 3p$ . Ta có  $a - c = (a - b) + (b - c) = 3q + 3p = 3(p + q) : 3 \Leftrightarrow a\mathcal{R}c$ . Vậy  $\mathcal{R}$  có tính bắc cầu

# Quan hệ

- Cho  $\mathcal{R}$  là một quan hệ tương đương trên  $A$ , với  $a \in A$ , lớp tương đương của  $A$  chứa  $a$ , ký hiệu là  $\bar{a}$  hoặc  $\tilde{a}$  được định nghĩa bởi:

$$\bar{a} = \{b \in A | a\mathcal{R}b\}$$

- VD: Cho  $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ , với  $a, b \in A$ ,  $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a - b : 3$ . Khi đó  $\mathcal{R}$  là hệ tương đương. Xác định các lớp tương đương  $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{9}$ :

$$\bar{1} = \{1, 4, 7\}, \quad \bar{2} = \{2, 5, 8\}, \quad \bar{3} = \{3, 6, 9\},$$

$$\bar{4} = \{1, 4, 7\}, \quad \bar{5} = \{2, 5, 8\}, \quad \bar{6} = \{3, 6, 9\},$$

$$\bar{7} = \{1, 4, 7\}, \quad \bar{8} = \{2, 5, 8\}, \quad \bar{9} = \{3, 6, 9\}.$$

- Thực chất chỉ có 3 lớp tương đương rời nhau

$$\bar{1} = \{1, 4, 7\}, \quad \bar{2} = \{2, 5, 8\}, \quad \bar{3} = \{3, 6, 9\}.$$

- Nếu  $\mathcal{R}$  là quan hệ tương đương trên  $A$  thì có một phép phân hoạch là tập hợp tất cả các lớp tương đương rời nhau của  $A$

# Quan hệ

- Quan hệ **thứ tự**: Là quan hệ hai ngôi  $\mathcal{R}$  trên  $A$  thỏa các tính chất **phản xạ**, **phản đối xứng** và **bắc cầu**
- VD: Cho  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , quan hệ  $\mathcal{R}$  trên  $A$  được định nghĩa: Với  $a, b \in A$ ,  $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a|b$ . CMR  $\mathcal{R}$  là một quan hệ thứ tự trên  $A$ .
- Thật vậy:
  - Với  $a \in A$ ,  $a|a \Leftrightarrow a\mathcal{R}a$ . Suy ra  $\mathcal{R}$  phản xạ
  - Với  $a, b \in A$ ,  $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \Leftrightarrow a|b \wedge b|a \Leftrightarrow a = b$

# Quan hệ

- Cho  $\mathcal{R}$  là quan hệ thứ tự trên  $A$ :
  - $(A, \mathcal{R})$  là tập hợp thứ tự
  - Nếu  $a\mathcal{R}b$  ta nói  $a$  bị trội bởi  $b$  hoặc  $b$  trội  $a$
  - $b$  là trội trực tiếp của  $a$  nếu  $a\mathcal{R}b \wedge (\neg \exists c \in A: a\mathcal{R}c \wedge c\mathcal{R}b)$
  - Phần tử  $a \in A$  được gọi là **tối đại** nếu  $a$  **không bị trội** bởi phần tử khác
  - Phần tử  $a \in A$  được gọi là **tối tiểu** nếu  $a$  **không trội** phần tử khác
  - Phần tử  $a \in A$  được gọi là **lớn nhất** nếu  $a$  **trội tất cả** phần tử khác:  $\max A$
  - Phần tử  $a \in A$  được gọi là **nhỏ nhất** nếu  $a$  **bị trội bởi tất cả** phần tử khác:  $\min A$
  - Phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của  $A$  (nếu có) là phần tử tối đại (tối tiểu) duy nhất

# Đại số Bool

- Một đại số Bool  $(B, \vee, \wedge)$  gồm tập  $B$  và hai phép toán  $\vee$  (*sup*) và  $\wedge$  (*inf*) thỏa mãn các tính chất: Với mọi  $x, y, z \in B$ :
- Tính giao hoán:  $x \wedge y = y \wedge x$  và  $x \vee y = y \vee x$
- Tính kết hợp:  $x \wedge y \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$   
 $x \vee y \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
- Tính phân phối:  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$   
 $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
- Phần tử trung hòa:  $\exists 0, 1 \in B: \forall x \in B$  ta có:  
$$x \vee 0 = x \text{ và } x \wedge 1 = x$$
- Phần tử bù:  $\forall x \in B, \exists \bar{x} \in B$ :  
$$x \vee \bar{x} = 1 \text{ và } x \wedge \bar{x} = 0$$

# Đại số Bool

- VD: Cho  $B^n$  là tập tất cả các dãy nhị phân chiều dài  $n$ , khi đó  $(B^n, \vee, \wedge)$  là một đại số Bool,  $\forall x, y \in B^n$  ta có  $x = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$  và  $y = \delta_1 \delta_2 \dots \delta_n$ , trong đó  $\gamma_i, \delta_i \in \{0, 1\}$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$  với các phép toán  $\vee$  (*sup*) và  $\wedge$  (*inf*) được định nghĩa:

$$x \vee y = (\gamma_1 \vee \delta_1)(\gamma_2 \vee \delta_2) \dots (\gamma_n \vee \delta_n)$$

$$x \wedge y = (\gamma_1 \wedge \delta_1)(\gamma_2 \wedge \delta_2) \dots (\gamma_n \wedge \delta_n)$$

Phần tử trung hòa:

Phần tử nhỏ nhất là  $00 \dots 0$

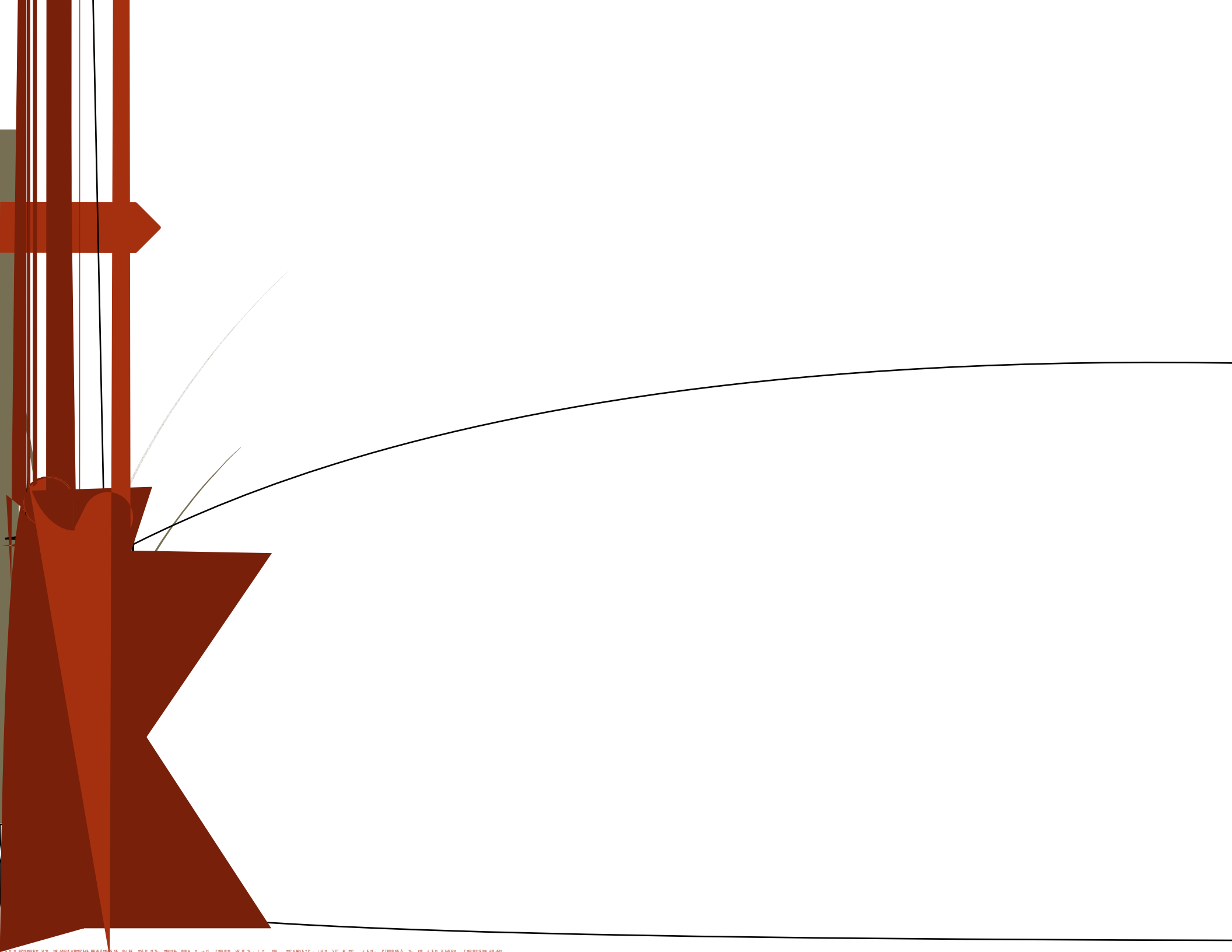
Phần tử lớn nhất là  $11 \dots 1$

Phần tử bù của  $x = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \in B^n$  là  $\bar{x} = \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \dots \bar{\gamma}_n \in B^n$ , trong đó:

$$\bar{1} = 0, \quad \bar{0} = 1$$

- Số phần tử của một đại số Bool hữu hạn là một lũy thừa của 2





# Hàm Bool

- Dạng **tuyển chuẩn tắc** của hàm Bool được biểu diễn bởi

$$f = f_1 \vee f_2 \vee \cdots \vee f_k$$

- Dạng **hội chuẩn tắc** của hàm Bool được biểu diễn bởi

$$f = f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k$$

- VD: Cho hàm  $f = 00110110$  hãy viết dạng tuyển chuẩn tắc và hội chuẩn tắc

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3$$

$$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$$

$$\overline{x_1} x_2 \overline{x_3}$$

$$\overline{x_1} x_2 x_3$$

$$\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$$

$$x_1 \overline{x_2} x_3$$

$$x_1 x_2 \overline{x_3}$$

$$\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

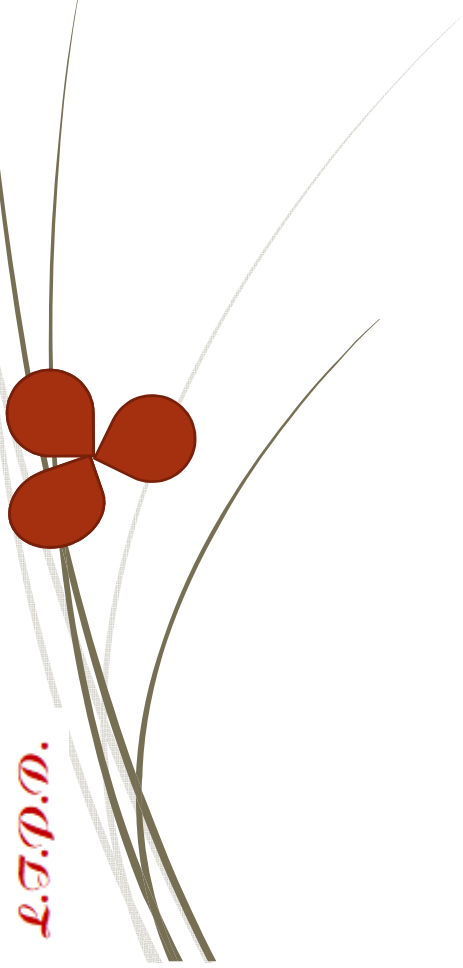
Tuyển chuẩn tắc:

$$f = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3}$$

Hội chuẩn tắc:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})$$
$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

Có thể thay dấu  $\vee$  bởi dấu  $+$



# Hệ phương trình Bool

- Cho các hàm Bool  $n$  biến  $f_1, f_2, \dots, f_k$  và  $g_1, g_2, \dots, g_k$ . Hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

trong đó các biến Bool  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các ẩn, được gọi là hệ phương trình Bool

VD: Tìm giá trị các biến Bool  $x, y, z, u$  thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x(y \vee u) = 1 \\ \bar{x} \vee \bar{u} = yz \\ \bar{x}z \vee yu = 0. \end{cases}$$

Bằng cách thử trực tiếp ta nhận được nghiệm của hệ phương trình là:

$(1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 1)$

# Hệ phương trình Bool

## ➤ Các bước giải tổng quát:

- B1: Biến các vế của hpt thành dạng **tổng các tích**
- B2: Áp dụng  $f = g \Leftrightarrow 1 = fg \vee \bar{f} \bar{g}$  cho tất cả các phương trình
- B3: Biến hpt thành dạng  $1 = h_1 h_2 \dots h_k$ , trong đó  $h_i$  là vế phải của các phương trình  $\forall i = 1, 2, \dots, k$
- B4: Thu gọn biểu thức B3 thành dạng  $1 = v_1 \vee v_2 \vee \dots \vee v_l$ , trong đó  $v_i$  có dạng tích của các biến/bù của biến  $\forall i = 1, 2, \dots, l$
- B5: Pt B4 tương đương với
$$\begin{cases} 1 = v_1 \\ 1 = v_2 \\ \dots \\ 1 = v_l \end{cases}$$
- Suy ra nghiệm của hpt từ B5

# Hệ phương trình Bool

VD: Tìm các biến Bool  $x, y, z, u$  thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x(y \vee u) = 1 \\ \bar{x} \vee \bar{u} = yz \\ \bar{x}z \vee yu = 0. \end{cases}$$

➡ B1: Biến các vế của hpt thành dạng tổng các tích

$$\begin{cases} xy \vee xu = 1 \\ \bar{x} \vee \bar{u} = yz \\ \bar{x}z \vee yu = 0. \end{cases}$$

➡ B2: Áp dụng  $f = g \Leftrightarrow 1 = fg \vee \bar{f}\bar{g}$  cho tất cả các phương trình

$$\begin{cases} 1 = xy \vee xu \\ 1 = \bar{x}yz \vee yz\bar{u} \vee x\bar{y}u \vee x\bar{z}u \\ 1 = x\bar{y} \vee x\bar{u} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}\bar{u}. \end{cases}$$

# Hệ phương trình Bool

- B3: Biến hpt thành dạng  $1 = h_1 h_2 \dots h_k$ , trong đó  $h_i$  là vế phải của các phương trình  $\forall i = 1, 2, \dots, k$

$$1 = (xy \vee xu)(\bar{x}yz \vee yz\bar{u} \vee x\bar{y}u \vee x\bar{z}u)(x\bar{y} \vee x\bar{u} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}\bar{u}).$$

- B4: Thu gọn biểu thức B3 thành dạng  $1 = v_1 \vee v_2 \vee \dots \vee v_l$ , trong đó  $v_i$  có dạng tích của các biến/bù của biến  $\forall i = 1, 2, \dots, l$

$$1 = x\bar{y}u \vee xyz\bar{u}.$$

- B5: Pt B4 tương đương với

$$\begin{cases} 1 = x\bar{y}u \\ 1 = xyz\bar{u}. \end{cases}$$

Tức là

$$\begin{cases} x = 1 \\ \bar{y} = 1 \\ z \text{ tùy ý} \\ u = 1 \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \bar{u} = 1. \end{cases}$$

Suy ra nghiệm của hpt:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ u = 1 \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ u = 1 \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ u = 0. \end{cases}$$

Vậy các nghiệm của hpt là  $(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0)$





# Hệ phương trình Bool – Phủ tối thiểu

► Giải hpt Bool:

$$\begin{cases} 1 = x_1 \vee x_5 \\ 1 = x_2 \vee x_3 \vee x_4 \\ 1 = x_1 \vee x_4 \\ 1 = x_2 \vee x_3 \vee x_5 \\ 1 = x_1 \vee x_2 \\ 1 = x_3 \vee x_4 \\ 1 = x_2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 \vee x_5)(x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3 \vee x_5)(x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4)x_2 = 1.$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_2x_4x_5 = 1,$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2x_3 = 1 \text{ hoặc } x_1x_2x_4 = 1 \text{ hoặc } x_2x_4x_5 = 1.$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	Các phủ tối thiểu
1	1	1	0	0	$\{A_1, A_2, A_3\}$
1	1	0	1	0	$\{A_1, A_2, A_4\}$
0	1	0	1	1	$\{A_2, A_4, A_5\}$

# Hệ phương trình Bool – Phủ tối thiểu

**Bài tập:** E là tập hợp các số nguyên từ 5 đến 15. Hãy tìm phủ tối thiểu của E từ các tập hợp con của nó được xác định như sau :

- A1 : tập hợp các số nguyên tố thuộc E.
- A2 : tập hợp các phần tử thuộc E và là ước của 140.
- A3 : tập hợp các phần tử của E và là bội của 3.
- A4 : tập hợp các phần tử của E và có dạng bình phương hoặc lập phương.
- A5 : tập hợp các phần tử của E từ 9 đến 12.
- A6 : tập hợp các phần tử của E mà tổng các chữ số của mỗi phần tử là từ 4 đến 6.

# Hệ phương trình Bool – Phủ tối thiểu

**Bài tập:** Hà cần đi siêu thị mua các mặt hàng: đậu xanh (1), đậu trắng (2), dừa khô (3), trứng (4), nếp (5), nha đam (6), bột mì (7), nước ngọt (8), táo (9), lê (10). Để mua được 10 mặt hàng này, Hà có thể đến các siêu thị A, B, C, D, E, F. Tuy nhiên, không siêu thị nào trong số 6 siêu thị này có đầy đủ tất cả các mặt hàng mà Hà cần, cụ thể các siêu thị có:

- Siêu thị A có trứng, nếp;
- Siêu thị B có đậu trắng, nếp, nước ngọt;
- Siêu thị C có đậu xanh, dừa khô, nha đam, lê;
- Siêu thị D có nếp, nha đam, bột mì, nước ngọt;
- Siêu thị E có đậu xanh, dừa khô, bột mì, táo;
- Siêu thị F có đậu xanh, đậu trắng, táo, lê.

Hãy xác định xem Hà phải đến **ít nhất bao nhiêu siêu thị** trong số 6 siêu thị kể trên để mua đủ 10 mặt hàng này, biết rằng lượng hàng có sẵn ở mỗi siêu thị là không thiếu, và **đó là những siêu thị nào?**

# Đơn giản công thức

**Từ đơn:** Là hàm Bool  $x$  hoặc  $\bar{x}$

**Đơn thức:** Là tích khác không của một số hữu hạn từ đơn. VD:  $xyz, \bar{x}y\bar{z}$

Trong đơn thức, từ đơn được gọi là **nhân tử nguyên tố**

**Từ tối thiểu:** Tích khác không của  $n$  từ đơn (với hàm Bool  $n$  biến)

**Công thức đa thức:** Là công thức dạng tổng của các đơn thức

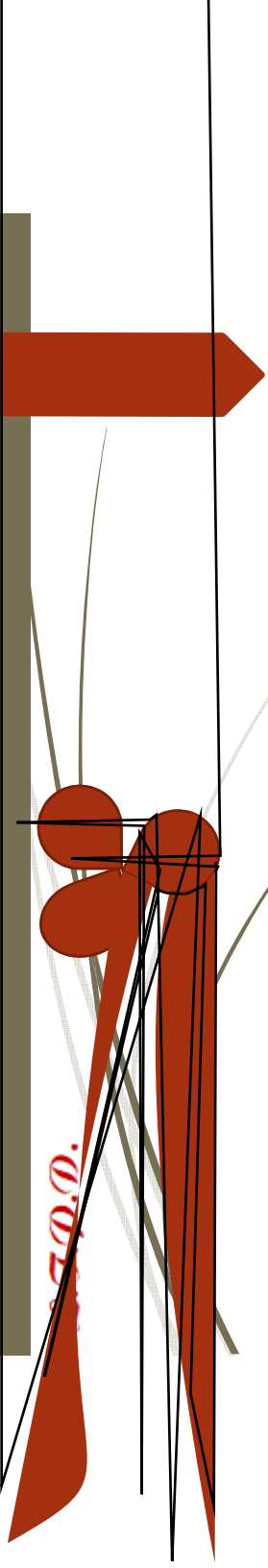
**Quan hệ “đơn giản hơn”:**

➤ Cho hai công thức đa thức của một hàm Bool:

$$➤ f = m_1 \vee m_2 \vee \dots \vee m_k \quad (F)$$

$$➤ f = M_1 \vee M_2 \vee \dots \vee M_l \quad (G)$$

➤ Ta nói rằng công thức  $F$  “đơn giản hơn” công thức  $G$  nếu tồn tại đơn ánh  $h: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, l\}$  sao cho với mọi  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  thì số từ đơn của  $m_i$  không nhiều hơn số từ đơn của  $M_{h(i)}$





# Phương pháp Karnaugh

**VD:** Biểu diễn sơ đồ Karnaugh của hàm Bool 4 biến sau đây:

$$f_j = \bar{a}\bar{b}cd \vee \bar{a}b\bar{c}d \vee \bar{a}bcd \vee a\bar{b}\bar{c}d \vee a\bar{b}cd \vee ab\bar{c}d \vee abcd$$

	$a$	$a$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	
$c$			$X$	$X$	$\bar{d}$
$c$		$X$	$X$	$X$	$d$
$\bar{c}$	$X$	$X$			$d$
$\bar{c}$	$X$				$\bar{d}$
	$\bar{b}$	$b$	$b$	$\bar{b}$	

# Phương pháp Karnaugh

**VD:** Biểu diễn sơ đồ Karnaugh của hàm Bool 4 biến sau đây:

$$f = \underbrace{\bar{a}\bar{b}c\bar{d}}_{0010} \vee \underbrace{\bar{a}\bar{b}cd}_{0011} \vee \underbrace{\bar{a}bcd\bar{d}}_{0110} \vee \underbrace{\bar{a}bcd}_{0111} \vee \underbrace{a\bar{b}c\bar{d}}_{1000} \vee \underbrace{a\bar{b}cd}_{1001} \vee \underbrace{ab\bar{c}d}_{1101} \vee \underbrace{abcd}_{1111}$$

**2          3          6          7          8          9          13          15**

	<i>a</i>	<i>a</i>	$\bar{a}$	$\bar{a}$	
<i>c</i>	10	14	6	2	$\bar{d}$
<i>c</i>	11	15	7	3	<i>d</i>
$\bar{c}$	9	13	5	1	<i>d</i>
$\bar{c}$	8	12	4	0	$\bar{d}$
	$\bar{b}$	<i>b</i>	<i>b</i>	$\bar{b}$	

	<i>a</i>	<i>a</i>	$\bar{a}$	$\bar{a}$	
<i>c</i>			<i>X</i>	<i>X</i>	$\bar{d}$
<i>c</i>		<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>d</i>
$\bar{c}$	<i>X</i>	<i>X</i>			<i>d</i>
$\bar{c}$	<i>X</i>				$\bar{d}$
	$\bar{b}$	<i>b</i>	<i>b</i>	$\bar{b}$	



# Phương pháp Karnaugh

**VD:** Biểu diễn sơ đồ Karnaugh của hàm Bool có dãy nhị phân tương ứng  
 $f = 1011\ 1100\ 1111\ 0111$

	$a$	$a$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	
$c$	10	14	6	2	$\bar{d}$
$c$	11	15	7	3	$d$
$\bar{c}$	9	13	5	1	$d$
$\bar{c}$	8	12	4	0	$\bar{d}$
	$\bar{b}$	$b$	$b$	$\bar{b}$	

X	X		X
X	X		X
X	X	X	
X		X	X

# Phương pháp Karnaugh

**Cell** là đơn thức do  $p$  nhân tử nguyên tố tạo thành được biểu diễn bởi một hình chữ nhật mở rộng gồm  $2^{n-p}$  ô

	$a$	$a$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	
$c$		$X$	$X$	$X$	$d$
$\bar{c}$	$X$	$X$			$d$
$\bar{c}$	$X$				$\bar{d}$
	$\bar{b}$	$b$	$b$	$\bar{b}$	

➤ **Bước 4.** Nếu sơ đồ phụ giống với sơ đồ Karnaugh thì sang **Bước 5**. Nếu không, trong số các Cell lớn còn lại, chọn ra Cell lớn chứa nhiều ô chưa được tô đen nhất. Tiếp tục chọn cho đến khi sơ đồ phụ giống sơ đồ Karnaugh

**Bước 5.** Vì **Bước 4** có thể có nhiều sự lựa chọn để tô các Cell lớn vào sơ đồ phụ nên thường có nhiều hơn một công thức. Loại trừ các công thức không tối thiểu và nhận được công thức tối thiểu của  $f$

# Phương pháp Karnaugh

**VD:** Xác định công thức tối thiểu của  $f$  từ sơ đồ Karnaugh:

	$a$	$a$	$\bar{a}$	$\bar{a}$
$c$			$X$	$X$
$c$		$X$	$X$	$X$
$\bar{c}$	$X$	$X$		
$\bar{c}$	$X$			
	$\bar{b}$	$b$	$b$	$\bar{b}$

Các cell lớn:

		$X$	$X$
		$X$	$X$

1.  $\bar{a}c$

$X$			
$X$			

2.  $a\bar{b}\bar{c}$

	$X$		
	$X$		

3.  $abd$

	$X$	$X$	

4.  $bcd$

$X$	$X$		

5.  $a\bar{c}d$

Sơ đồ phụ được tô đen bởi cell 1 và 2

		$X$	$X$
		$X$	$X$
$X$			
$X$			

# Phương pháp Karnaugh

**VD:** Xác định công thức tối thiểu của  $f$  từ sơ đồ Karnaugh:

$a \quad a \quad \bar{a} \quad \bar{a}$

Các cell lớn:

$c$			$X$	$X$
$c$		$X$	$X$	$X$
$\bar{c}$	$X$	$X$		
$\bar{c}$	$X$			
	$\bar{b}$	$b$	$b$	$\bar{b}$

$\bar{d}$   
 $d$   
 $d$   
 $\bar{d}$

		$X$	$X$
		$X$	$X$

1.  $\bar{a}c$

$X$			
$X$			

2.  $a\bar{b}\bar{c}$

	$X$		
	$X$		

3.  $abd$

	$X$	$X$	

4.  $bcd$

$X$	$X$		

5.  $a\bar{c}d$

Sơ đồ phụ được tô đen

bởi cell lớn 1 và 2

Vì sơ đồ phụ chưa giống

sơ đồ Karnaugh nên chọn thêm cell lớn 3 hoặc cell lớn 4 và 5.

		$X$	$X$
		$X$	$X$
$X$			
$X$			

# Phương pháp Karnaugh

**VD:** Xác định công thức tối thiểu của  $f$  từ sơ đồ Karnaugh:

	$a$	$a$	$\bar{a}$	$\bar{a}$
$c$			$X$	$X$
$c$		$X$	$X$	$X$
$\bar{c}$	$X$	$X$		
$\bar{c}$	$X$			
	$\bar{b}$	$b$	$b$	$\bar{b}$

Các cell lớn:

		$X$	$X$
		$X$	$X$
1. $\bar{a}c$			
2. $a\bar{b}\bar{c}$			
3. $abd$			

	$X$	$X$	
4. $bcd$			
5. $a\bar{c}d$			

Suy ra các công thức đa thức tối giản của  $f$  là:

$$f = \bar{a}c \vee a\bar{b}\bar{c} \vee abd$$

$$f = \bar{a}c \vee a\bar{b}\bar{c} \vee bcd \vee a\bar{c}d$$

Suy ra công thức tối thiểu

$$f = \bar{a}c \vee a\bar{b}\bar{c} \vee abd$$

# Bài tập

Tìm công thức tối thiểu bằng phương pháp Karnaugh của hàm bool  $f$  có dãy nhị phân tương ứng như sau

$$f = 1011 \ 1100 \ 1111 \ 0111$$



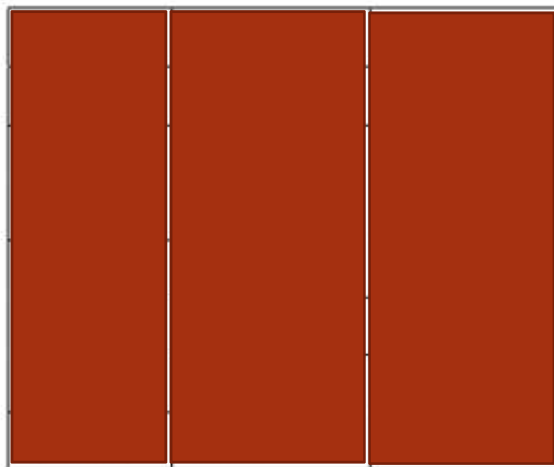


# Phương pháp Quine-Mc Cluskey

**VD:** Tìm công thức tối tiểu dạng đa thức của hàm Bool sau đây:

$$f = \bar{x}\bar{y}z\bar{u} \vee \bar{x}\bar{y}zu \vee x\bar{y}zu \vee xy\bar{z}\bar{u} \vee xy\bar{z}u \vee xyz\bar{u} \vee xyzu.$$

i) Tìm công thức tối giản dạng đa thức của  $f$



Công thức tối giản dạng đa thức của  $f$ :

$$f = xy \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{y}zu \vee xzu.$$

# Phương pháp Quine-Mc Cluskey

**VD:** Tìm CTTT dạng đa thức của hàm Bool:

$$f = \bar{x}\bar{y}z\bar{u} \vee \bar{x}\bar{y}zu \vee x\bar{y}zu \vee xy\bar{z}\bar{u} \vee xy\bar{z}u \vee xyz\bar{u}$$

ii) Tìm phủ tối thiểu của các đơn thức tối giản

$$f = xy \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{y}zu \vee xzu.$$

Chọn các cột chỉ có 1 ô được tô đen, các đơn thức nằm trên dòng tương ứng là các đơn thức cốt yếu

Suy ra đơn thức cốt yếu là  $xy$  và  $\bar{x}\bar{y}z$   
Xóa các các cột được phủ bởi đơn thức cốt yếu ta được

	$xyz\bar{u}$
$xy$	
$\bar{x}\bar{y}z$	
$\bar{y}zu$	$X$
$xzu$	$X$

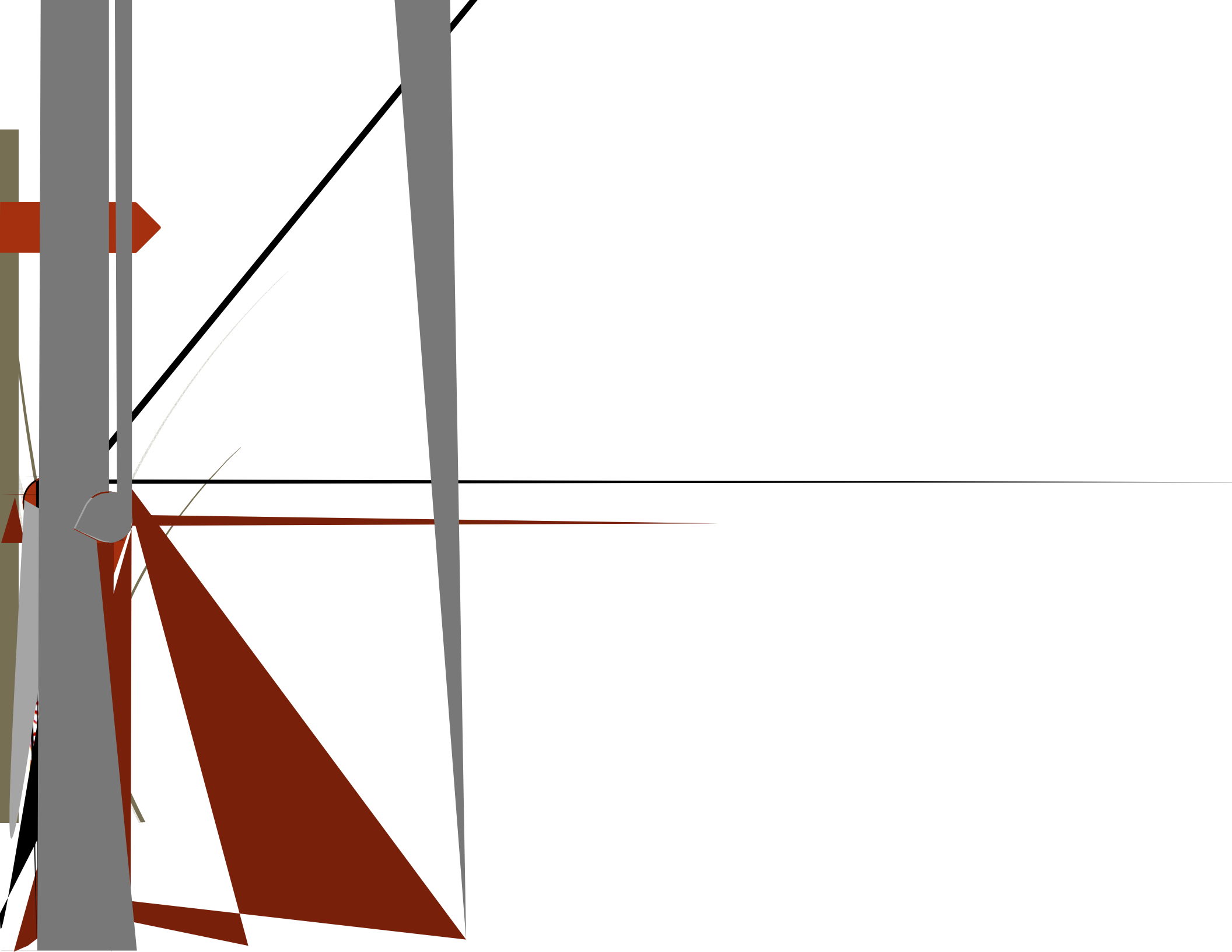
Xóa những dòng không được tô đen

	$xyz\bar{u}$
$\bar{y}zu$	$X$
$xzu$	$X$

Tìm hệ ít nhất các đơn thức có thể phủ hết các cột còn lại

Như vậy hệ ít nhất các đơn thức có thể phủ hết các cột còn lại là  $\bar{y}zu$  hoặc  $xzu$

	$\bar{x}\bar{y}z$			$xy$			
	$\bar{x}\bar{y}z\bar{u}$	$\bar{x}\bar{y}zu$	$x\bar{y}zu$	$xy\bar{z}\bar{u}$	$xy\bar{z}u$	$xyz\bar{u}$	$xyz u$
$xy$				$X$	$X$	$X$	$X$
$\bar{x}\bar{y}z$	$X$	$X$					
$\bar{y}zu$		$X$	$X$				
$xzu$			$X$				$X$



# Bài tập

Tìm công thức tối thiểu bằng phương pháp Quine-Mc Cluskey của hàm Bool

$$f = abc \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}bc \vee \bar{a}\bar{b}c \vee \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$