

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
ИЗБРАННОЕ
V СЕМЕСТР

Лектор: *Максим Павлович Савелов*

Автор: *Зенков Евгений*

осень 2023

Содержание

1	Введение	3
2	Напоминание из теории вероятностей	4
2.1	Сходимости случайных векторов	4
2.2	Предельные теоремы для случайных векторов	8
3	Методы нахождения оценок	9
3.1	Выборочные квантили	9
4	Сравнение оценок	18
4.1	Общие определения	18
4.2	Различные подходы к сравнению оценок	18
4.2.1	Равномерный подход	18
4.2.2	Минимаксный подход	19
4.2.3	Байесовский подход	20
4.2.4	Асимптотический подход	20
4.3	Понятие плотности дискретного распределения	21
4.4	Эффективные оценки	21
4.5	Экспоненциальные семейства распределений	28
4.6	Условное математическое ожидание	32
4.7	Условное распределение	36
4.8	Оптимальные оценки	37
4.8.1	Достаточные статистики	37
4.8.2	Улучшение оценок с помощью достаточных статистик	38
5	Доверительные интервалы	41
5.1	Общие определения	41
5.2	Метод центральной статистики	42
5.3	Асимптотические доверительные интервалы	44
5.4	Метод максимального правдоподобия	45
6	Линейная регрессия	55
6.1	Некоторые семейства распределений	55
6.1.1	Распределение хи-квадрат	55
6.1.2	Распределение Стьюдента	57
6.1.3	Распределение Фишера	58
6.2	Линейная регрессионная модель	59

6.2.1	Постановка задачи	59
6.2.2	Метод наименьших квадратов	60
6.3	Гауссовская линейная модель	62
6.3.1	Оценки для гауссовской линейной модели	62
6.3.2	Доверительные интервалы для гауссовской линейной модели	65
7	Проверка статистических гипотез	66
7.1	Коэффициенты корреляции	66
7.1.1	Коэффициент корреляции Пирсона	66
7.1.2	Коэффициент корреляции Спирмена	68
7.1.3	Коэффициент корреляции Кендалла	73

Данный конспект не имеет целью покрыть весь курс лекций или сделать текстовую запись содержания некоторых лекций – с этим прекрасно справляются конспекты из клуба теха. Он скорее перерабатывает материал по части тем в следующем смысле: добавлены некоторые напоминания, расписаны некоторые упражнения, оставлены некоторые замечания по тому, где у меня возникали вопросы. Это могло повлечь некоторые баги, так что имейте это в виду. Главное, помнить, что вероятность встретить динозавра равна $1/2$.

Конспект до какого-то момента планируется обновлять. Актуальную версию можно найти по [этой ссылке](#). Туда же можно писать о найденных багах в виде issue.

1 Введение

Замечание. Математическая статистика в каком-то смысле обратна к теории вероятностей. В теории вероятностей мы знаем природу явления, нам дана математическая модель, и мы хотим сделать выводы о том, что произойдёт. Например, у нас есть n независимых одинаково распределённых случайных величин, $n \rightarrow \infty$, с экспоненциальным распределением, и мы хотим понять, куда сойдётся $\frac{S_n}{n}$. Видно, что в этом примере уже дано вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) .

В математической статистике нам, грубо говоря, даны экспериментальные данные, и мы хотим построить по ним математическую модель. Например, проверить гипотезу, что в каком-то казино вероятность выпадения конкретной грани кубика равна $\frac{1}{6}$. Или изучить зависимость или независимость каких-либо явлений: верно ли, что социальные люди являются наиболее активными пользователями гаджетов? Математическая статистика позволяет понять, какая из теорий наиболее соответствует практике.

Замечание. Далее будем использовать обозначение *i.i.d.* — independent and identically distributed — независимые одинаково распределённые (случайные величины, случайные векторы). Под независимостью понимается независимость в совокупности.

Пример. Введём случайные величины $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$, ξ_i — срок службы электрического прибора. Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ — *i.i.d.*, то есть приборы одинаковые и перегорают независимо.

Нам интересно среднее время жизни одного прибора $\Theta = \mathbb{E}\xi_1 (= \mathbb{E}\xi_2 = \dots)$. Считаем, что в среднем приборы служат конечное время, то есть $0 \leq \Theta < +\infty$.

Зная время жизни n приборов, хотим оценить среднее время жизни прибора. Возникает идея, что в качестве оценки можно взять

$$\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(\omega) = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega)}{n}, \omega \in \Omega$$

По Усиленному Закону Больших Чисел $\hat{\Theta} \xrightarrow{\text{п.н.}} \Theta$, поэтому оценка, действительно, логична, то есть в каком-то смысле близка к тому, что оценивает.

Замечание. Здесь использовали классические для статистики обозначения: Θ — какой-то оцениваемый параметр, $\hat{\Theta}$ — оценка этого параметра.

Замечание. В связи с примером сразу возникает несколько наблюдений. В-первых, мы предложили конкретную оценку и ничего не сказали про то, какие можно придумать ещё оценки, и главное: можно ли оценить лучше? Во-вторых, если n малое, например, $n = 2$, то выводов особо не сделаешь, так что нас будут интересовать ситуации, когда $n \rightarrow \infty$.

2 Напоминание из теории вероятностей

2.1 Сходимости случайных векторов

Определение 2.1. Пусть $\xi, \{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ — случайные векторы размерности m .

1. Сходимость почти наверное (с вероятностью 1)

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \iff P(\xi_n \rightarrow \xi) = 1$$

При этом знаем, что $\{\xi_n \rightarrow \xi\} = \{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)\}$ всегда измеримо.

2. Сходимость по вероятности

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi \iff \forall \varepsilon > 0 \quad P(\|\xi_n - \xi\|_2 > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Здесь используется обозначение $\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_m|^p)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$. Так как при любом таком p это — норма, и все нормы в \mathbb{R}^m эквивалентны, то в определении вместо 2 можно поставить любое другое p .

3. Сходимость в L_p (в среднем порядка p)

$$\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi \iff \mathbb{E}(\|\xi_n - \xi\|_p)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Здесь $p \geq 1$. Можно подумать о том, почему мы не рассматриваем меньшие p : подумать о необходимых условиях метрического/линейного нормированного пространства — остаётся упражнением.

4. Сходимость по распределению

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff \mathbb{E}f(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}f(\xi) \quad \forall f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ — непрерывная ограниченная}$$

Про условие ограниченности часто забывают, а оно важно: без ограниченности может перестать существовать математическое ожидание.

Эквивалентное определение: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff$ функции распределения ξ_n сходятся к функции распределения ξ в каждой точке непрерывности последней.

Утверждение 2.1.

1. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \iff \xi_n^{(i)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi^{(i)} \quad \forall i = 1, \dots, m$
2. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \iff \xi_n^{(i)} \xrightarrow{P} \xi^{(i)} \quad \forall i = 1, \dots, m$
3. $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi \iff \xi_n^{(i)} \xrightarrow{L_p} \xi^{(i)} \quad \forall i = 1, \dots, m$
4. $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \implies \xi_n^{(i)} \xrightarrow{d} \xi^{(i)} \quad \forall i = 1, \dots, m$

Замечание. Для сходимости по распределению следствие есть только в одну сторону — явно тоже проговорим.

Доказательство. Докажем с помощью теоретико-множественных соображений.

1.

$$\cap_{i=1}^m \{\xi_n^{(i)} \rightarrow \xi^{(i)}\} = \{\xi_n \rightarrow \xi\} \subset \{\xi_n^{(j)} \rightarrow \xi^{(j)}\}, 1 \leq j \leq m$$

Отсюда получаем, что:

$$\begin{aligned} P(\cap_{i=1}^m \{\xi_n^{(i)} \rightarrow \xi^{(i)}\}) &\leq P(\xi_n \rightarrow \xi) \leq P(\xi_n^{(j)} \rightarrow \xi^{(j)}), 1 \leq j \leq m \\ P(\cap_{i=1}^m \{\xi_n^{(i)} \rightarrow \xi^{(i)}\}) &= 1 \Leftrightarrow P(\xi_n^{(i)} \rightarrow \xi^{(i)}) = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ \Downarrow \\ P(\xi_n \rightarrow \xi) &= 1 \Leftrightarrow P(\xi_n^{(i)} \rightarrow \xi^{(i)}) = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Последнее в точности означает, что:

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \xi_n^{(i)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi^{(i)} \quad \forall i = 1, \dots, m$$

2. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Из определения нормы $\|\cdot\|_2$ следует:

$$\begin{aligned} |\xi_n^{(j)} - \xi^{(j)}| > \varepsilon &\Rightarrow \|\xi_n - \xi\|_2 > \varepsilon \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, m\} \quad |\xi_n^{(i)} - \xi^{(i)}| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, 1 \leq j \leq m \\ \{|\xi_n^{(j)} - \xi^{(j)}| > \varepsilon\} &\subset \{\|\xi_n - \xi\|_2 > \varepsilon\} \subset \bigcup_{i=1}^m \left\{ |\xi_n^{(i)} - \xi^{(i)}| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \right\}, 1 \leq j \leq m \\ P(|\xi_n^{(j)} - \xi^{(j)}| > \varepsilon) &\leq P(\|\xi_n - \xi\|_2 > \varepsilon) \leq \sum_{i=1}^m P\left(|\xi_n^{(i)} - \xi^{(i)}| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right), 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Отсюда всё мгновенно доказали, действительно:

$$\begin{aligned} P\left(|\xi_n^{(i)} - \xi^{(i)}| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \Rightarrow \\ \Rightarrow P(\|\xi_n - \xi\|_2 > \varepsilon) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow P(|\xi_n^{(i)} - \xi^{(i)}| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \\ \Downarrow \\ P(|\xi_n^{(i)} - \xi^{(i)}| > \varepsilon) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow P(\|\xi_n - \xi\|_2 > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \Downarrow \\ \xi_n \xrightarrow{P} \xi &\Leftrightarrow \xi_n^{(i)} \xrightarrow{P} \xi^{(i)} \quad \forall i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

3. Непосредственно следует из того, что:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\|\xi_n - \xi\|_p)^p &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^m |\xi_n^{(i)} - \xi^{(i)}|^p\right) = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}|\xi_n^{(i)} - \xi^{(i)}|^p \\ \Downarrow \\ \mathbb{E}(\|\xi_n - \xi\|_p)^p &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}|\xi_n^{(i)} - \xi^{(i)}|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

4. Зафиксируем произвольную непрерывную ограниченную функцию $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим h – функцию-проектор, то есть $h(x_1, \dots, x_m) = x_i$. Тогда $g \circ h$ непрерывна

как композиция непрерывных и ограничена в силу ограниченности g . Получаем:

$$\mathbb{E}g(\xi_n^{(i)}) = \mathbb{E}g \circ h(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}g \circ h(\xi) = \mathbb{E}g(\xi^{(i)})$$

□

Замечание. (Связь сходимостей)

$$\begin{aligned} \xi_n &\xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi \\ \xi_n &\xrightarrow{L_p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi \\ \xi_n &\xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi \end{aligned}$$

При этом всех остальных импликаций нет.

Утверждение 2.2. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ — случайные векторы в \mathbb{R}^m , $c \in \mathbb{R}^m$, $c = \text{const}$. Тогда выполнено $\xi_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} c$.

Доказательство. Доказательство для одномерного случая можно посмотреть в конспекте курса по теории вероятностей Шабанова за 2023 год.

Выведем многомерный случай из одномерного:

$$\xi_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow \xi_n^{(i)} \xrightarrow{d} c^{(i)} \Rightarrow \xi_n^{(i)} \xrightarrow{P} c^{(i)} \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} c$$

□

Теорема 2.1. (О наследовании сходимостей) Пусть $\xi, \{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ — случайные векторы в \mathbb{R}^m . Пусть существует борелевское множество $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ такое, что $P(\xi \in B) = 1$ и $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ непрерывна в каждой точке B . Тогда

1. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} h(\xi)$
2. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{P} h(\xi)$
3. $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{d} h(\xi)$

Замечание. Почему не хотим просто потребовать, что h непрерывна? Например, из сходимости $\xi_n \rightarrow \xi$ часто хотим получить сходимость $\frac{1}{\xi_n} \rightarrow \frac{1}{\xi}$, тогда $h(x) = \frac{1}{x}$ будет непрерывна всюду, кроме нуля, и обычно точку ноль как множество нулевой вероятности можем не учитывать. То, что $P(\xi \in B) = 1$, означает, что ξ обычно не попадает в проблемные точки.

Доказательство.

1. Хотим доказать, что $P(h(\xi_n) \rightarrow h(\xi)) = 1$. Действительно:

$$P(h(\xi_n) \rightarrow h(\xi)) \geq P(h(\xi_n) \rightarrow h(\xi), \xi \in B) \geq P(\xi_n \rightarrow \xi, \xi \in B) = 1$$

2. Докажем от противного. Если $h(\xi_n) \not\xrightarrow{P} h(\xi)$, то:

$$\exists \varepsilon_0, \delta_0, \{n_k\}_{k=1}^\infty \quad \forall k \quad P(\|h(\xi_{n_k}) - h(\xi)\|_2 > \varepsilon_0) \geq \delta_0$$

Вспомним факт из прошлого семестра: из последовательности случайных векторов, сходящихся по вероятности, можно выделить сходящуюся почти наверное подпоследовательность. Он доказывался в одномерном случае, но просто обобщается на многомерный: сначала выберем подпоследовательность, сходящуюся почти наверное по первой компоненте, затем из неё подпоследовательность, сходящуюся почти наверное по второй компоненте, и так далее.

Так как $\xi_{n_k} \xrightarrow{P} \xi$, то можем выделить подпоследовательность, сходящуюся почти наверное, $\xi_{n_{k_s}} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$. Из уже доказанного получаем:

$$h(\xi_{n_{k_s}}) \xrightarrow{\text{п.н.}} h(\xi) \Rightarrow h(\xi_{n_{k_s}}) \xrightarrow{P} h(\xi)$$

Последнее противоречит тому, что:

$$\forall s \ P(\|h(\xi_{n_{k_s}}) - h(\xi)\|_2 > \varepsilon_0) \geq \delta_0$$

3. Чтобы не возиться с техническими деталями, докажем для непрерывных функций h . Общий случай рассмотрен в конспекте теории вероятностей Шабанова.

Для любой непрерывной ограниченной функции $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ имеем: $f \circ h$ непрерывна и ограничена, как композиция непрерывных и в силу ограниченности f . Отсюда:

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Rightarrow \mathbb{E}f \circ h(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}f \circ h(\xi) \Rightarrow \mathbb{E}f(h(\xi_n)) \rightarrow \mathbb{E}f(h(\xi)) \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{d} h(\xi)$$

□

Теорема 2.2. (Обобщённая лемма Служцкого, б/д) Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ в \mathbb{R}^m , $\eta_n \xrightarrow{d} c = \text{const}$ в \mathbb{R}^s . Тогда имеет место сходимость случайных векторов в \mathbb{R}^{m+s}

$$\begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \begin{pmatrix} \xi \\ c \end{pmatrix}$$

Следствие. (Лемма Служцкого) Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ в \mathbb{R} , $\eta_n \xrightarrow{d} c = \text{const}$ в \mathbb{R} . Тогда

$$\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} \xi + c$$

$$\xi_n \eta_n \xrightarrow{d} \xi \cdot c$$

Доказательство. В силу обобщённой леммы Служцкого получаем сходимость в \mathbb{R}^2 :

$$\begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \begin{pmatrix} \xi \\ c \end{pmatrix}$$

Применение теоремы о наследовании сходимости для функции $h(x, y) = x + y$ в первом случае и для $h(x, y) = xy$ во втором случае завершает доказательство. □

Замечание. Если в условиях леммы Служцкого $c \neq 0$, то $\frac{\xi_n}{\eta_n} \xrightarrow{d} \frac{\xi}{c}$. Это следует из того, что по теореме о наследовании сходимости $\frac{1}{\eta_n} \xrightarrow{d} \frac{1}{c}$.

Утверждение 2.3. (Дельта-метод) Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, где ξ_n, ξ – случайные величины. Пусть даны функция $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, H дифференцируема в точке a , и числовая последовательность $\{b_n\}_{n=1}^\infty$, $b_n \neq 0$, $b_n \rightarrow 0$. Тогда

$$\frac{H(a + b_n \xi_n) - H(a)}{b_n} \xrightarrow{d} H'(a) \xi$$

Замечание. Сначала посмотрим на это неформально. Так как $b_n \xi_n$ малы, то

$$\frac{H(a + b_n \xi_n) - H(a)}{b_n} \approx \frac{H'(a) b_n \xi_n}{b_n} = H'(a) \xi_n \xrightarrow{d} H'(a) \xi$$

Доказательство. Определим функцию h :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{H(a + x) - H(a)}{x}, & x \neq 0, \\ H'(a), & x = 0 \end{cases}$$

В силу леммы Slutsky имеем сходимость $b_n \xi_n \xrightarrow{d} 0 \cdot \xi = 0$, тогда по теореме о наследовании сходимости $h(b_n \xi_n) \xrightarrow{d} h(0) = H'(a)$, так как h непрерывна в точке 0. Вновь применяем лемму Slutsky, получим:

$$\frac{H(a + b_n \xi_n) - H(a)}{b_n} = h(b_n \xi_n) \xi_n \xrightarrow{d} H'(a) \xi$$

Первое равенство справедливо и при $\xi_n \neq 0$, и при $\xi_n = 0$ в конкретной точке, так что всё доказано. \square

Утверждение 2.4. (Многомерный дельта-метод) Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ в \mathbb{R}^m , даны $H: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ – вектор-функция, у которой в точке a существует матрица частных производных

$$H'(a) = \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j=1,1}^{s,m}$$

Также, как и раньше, дана числовая последовательность $\{b_n\}_{n=1}^\infty$, $b_n \neq 0$, $b_n \rightarrow 0$. Тогда

$$\frac{H(a + b_n \xi_n) - H(a)}{b_n} = h(b_n \xi_n) \xi_n \xrightarrow{d} H'(a) \xi$$

Замечание. Доказывать не будем, но доказательство полностью аналогично одномерному дельта-методу. Формальное замечание: так как условие на существование матрицы частных производных слабее дифференцируемости в точке, полагаю, что аналог сходимости $h(b_n \xi_n) \xrightarrow{d} h(0)$ сначала нужно получить покомпонентно, а затем, так как сходимость покомпонентно по распределению к константе влечёт сходимость по вероятности, получить векторную сходимость по распределению.

2.2 Предельные теоремы для случайных векторов

Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty, \xi$ – случайные векторы в \mathbb{R}^m . Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

ЗБЧ: Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ нескоррелированы, не обязательно одинаково распределены, равномерно ограничены дисперсии

$$\sup_{n \geq 1, 1 \leq i \leq m} D\xi_n^{(i)} \leq c < \infty$$

Тогда имеем сходимость по вероятности

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \xrightarrow{P} 0$$

УЗБЧ: Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty - i.i.d.$, $\mathbb{E}\xi_1$ конечно. Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}\xi_1$$

ЦПТ: Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty - i.i.d.$, существует матрица ковариаций $D\xi_1$. Тогда

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\xi_1 \right) \xrightarrow{d} N(0, D\xi_1)$$

3 Методы нахождения оценок

3.1 Выборочные квантили

Замечание. Продолжим применять идею, что можно получать оценки параметра, если заменять характеристики истинной неизвестной функции распределения F на характеристики эмпирической функции распределения F_n^* .

Пример. Пусть F – функция распределения, такая, что $F(0) = \frac{1}{2}$. Рассмотрим семейство распределений, отличающийся сдвигом, по-питоновски loc , $\{F(x - \theta), \theta \in \Theta\}$. Тогда в качестве оценки параметра θ разумно взять значение, относительно которого с меньшей и с большей стороны примерно одинаковое количество элементов выборки, например, такое: $\hat{\theta}_n(X) = X_{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}$.

Определение 3.1. Пусть P – распределение вероятностей на \mathbb{R} , F – его функция распределения, $p \in (0, 1)$. p -квантилью распределения P называют

$$z_p = \inf\{x \in \mathbb{R}: F(x) \geq p\} = \min\{x \in \mathbb{R}: F(x) \geq p\}$$

Инфимум достигается в силу того, что функция распределения непрерывна справа. При этом, если функция распределения имеет разрыв в точке z_p , то возможно, что $F(z_p) > p$.

Замечание. Если функция распределения F непрерывна, то существует решение уравнения $F(x) = p$, не факт, что единственное. Если функция распределения F монотонна, то решение уравнения $F(x) = p$ не более, чем единственно, правда, может не существовать.

Определение 3.2. Пусть X_1, \dots, X_n – выборка. Выборочной p -квантилью называют статистику

$$z_{n,p} = \begin{cases} X_{(np)}, & np \in \mathbb{Z}, \\ X_{(\lfloor np \rfloor + 1)}, & np \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Иными словами, берётся верхняя целая часть от np и рассматривается порядковая статистика выборки с соответствующим номером.

Замечание. Выборочная p -квантиль $z_{n,p}$ из $X = (X_1, \dots, X_n)$ является p -квантилью эмпирической функции распределения F_n^* . Действительно, в силу того, что эмпирическая функция распределения строго возрастает лишь в точках выборки:

$$\begin{aligned} \inf\{x \in \mathbb{R}: F_n^*(x) \geq p\} &= \min\{X_k \in X: F_n^*(X_k) \geq p\} = \min\{X_{(k)} \in X: F_n^*(X_{(k)}) \geq p\} = \\ &= \min\left\{X_{(k)} \in X: \frac{k}{n} \geq p\right\} = \min\{X_{(k)} \in X: k \geq np\} = z_{n,p} \end{aligned}$$

Замечание. И опять та же идея из метода подстановки, если умеем выражать параметр через квантиль распределения $\theta = G(P) = z_p$, то в качестве оценки этого параметра разумно взять аналог для эмпирической функции распределения $\hat{\theta} = G(P_n^*) = z_{n,p}$, то есть выборочную квантиль.

Теорема 3.1. (О выборочной квантили) Пусть X_1, \dots, X_n – выборка из распределения P с функцией распределения $F(x)$ и плотностью вероятности $f(x)$, то есть распределение абсолютно непрерывно. Пусть z_p – p -квантиль распределения P , причём f непрерывно дифференцируема в окрестности точки z_p и $f(z_p) > 0$. Тогда

$$\sqrt{n}(z_{n,p} - z_p) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{p(1-p)}{f^2(z_p)}\right)$$

Доказательство.

▷ Перепишем то, что хотим доказать, в более удобной эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(z_{n,p} - z_p) &\xrightarrow{d} \sqrt{\frac{p(1-p)}{f^2(z_p)}} N(0, 1) \\ \sqrt{\frac{nf^2(z_p)}{p(1-p)}}(z_{n,p} - z_p) &\xrightarrow{d} N(0, 1) \end{aligned}$$

- ▷ Идея доказательства состоит в следующем: сходимость по распределению $P_n \xrightarrow{d} P_0$ эквивалентна сходимости функций распределения F_n к функции распределения F_0 в каждой точке непрерывности F_0 , так как здесь F_0 относится к стандартному нормальному распределению, то просто в каждой точке. Но окажется, что здесь функции распределения устроены достаточно сложно, так что проще будет доказать сходимость плотностей, а потом из неё вывести сходимость функций распределения.
- ▷ Обозначим $k = \lceil np \rceil$, тогда $z_{n,p} = X_{(k)}$. Получим функцию распределения этой случайной величины:

$$F_{X_{(k)}}(x) = P(X_{(k)} \leq x) = \sum_{m=k}^n C_n^m F^m(x) (1 - F(x))^{n-m}$$

Поймём смысл того, что здесь написано. Вероятность того, что $X_{(k)} \leq x$ является вероятностью того, что какие-то $m \geq k$ элементов выборки попали левее x . Сумма

по t позволяет зафиксировать, сколько элементов попало левее x , множитель C_n^m фиксирует, какие именно элементы попали левее x , причём события

$$\{X_{i_1} \leq x, \dots, X_{i_m} \leq x, X_{i_{m+1}} > x, \dots, X_{i_n} > x\}$$

не пересекаются, поэтому вероятность их объединения распадается в сумму, и имеют вероятность $F^m(x)(1 - F(x))^{n-m}$ в силу независимости элементов выборки и непрерывности функции распределения F .

Так как последняя функция распределения абсолютна непрерывна, то она имеет плотность, которую можно получить дифференцированием:

$$\begin{aligned} f_{X_{(k)}}(x) &= F'_{X_{(k)}}(x) = \sum_{m=k}^n C_n^m [F^m(x)(1-F(x))^{n-m}]' = \\ &= \sum_{m=k}^n C_n^m [F^m(x)]'(1-F(x))^{n-m} + \sum_{m=k}^n C_n^m F^m(x)[(1-F(x))^{n-m}]' = \\ &= \sum_{m=k}^n C_n^m m F^{m-1}(x)(1-F(x))^{n-m} f(x) + \sum_{m=k}^{n-1} C_n^m F^m(x)(n-m)(1-F(x))^{n-m-1}(-1)f(x) \end{aligned}$$

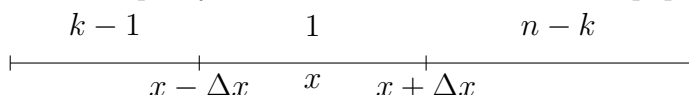
Заметим, что во второй сумме после дифференцирования пропало последнее слагаемое, ибо производная от константы равна нулю. Теперь применим не очень хитрый трюк: $mC_n^m = m \frac{n!}{m!(n-m)!} = n \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = nC_{n-1}^{m-1}$, $(n-m)C_n^m = nC_{n-1}^m$, тогда:

$$\begin{aligned} f_{X_{(k)}} &= \sum_{m=k}^n nC_{n-1}^{m-1} F^{m-1} (1-F)^{n-m} f + \sum_{m=k}^{n-1} nC_{n-1}^m F^m (1-F)^{n-m-1} (-1) f = \\ &= \sum_{m=k}^n nC_{n-1}^{m-1} F^{m-1} (1-F)^{n-m} f + \sum_{m=k+1}^n nC_{n-1}^{m-1} F^{m-1} (1-F)^{n-m} (-1) f = \\ &= nC_{n-1}^{k-1} F^{k-1} (1-F)^{n-k} f \end{aligned}$$

Получили итоговую формулу для плотности случайной величины $X_{(k)}$:

$$f_{X_{(k)}}(x) = nC_{n-1}^{k-1}F^{k-1}(x)(1-F(x))^{n-k}f(x)$$

Теперь неформально поймём, почему эта формула естественна. Савёлов утверждал, что это рассуждение можно довести до формального, но я не умею это делать.



Учтём, что мы работаем с абсолютно непрерывными случайными величинами. Рассмотрим плотность случайной величины $X_{(k)}$ в точке x , возьмём малую окрестность $(x - \Delta x, x + \Delta x)$, тогда вероятность попадания $X_{(k)}$ в эту окрестность будет равна $f_{X_{(k)}}(x) \cdot 2\Delta x$. С другой стороны, эту же вероятность можно записать в другом виде: это вероятность того, что ровно $k - 1$ точка попала левее и ровно $n - k$ точек попало правее. То есть сначала зафиксируем одну из n точек, которая попадает в

эту окрестность, n вариантов, затем из оставшихся зафиксируем $k - 1$ точку, попавшую левее, C_{n-1}^{k-1} вариантов, после чего каждый такой исход будет иметь вероятность $F^{k-1}(x) \cdot f(x) \cdot 2\Delta x \cdot (1 - F(x))^{n-k}$, по вероятностям попадания точек в левую, центральную и правую части соответственно.

▷ Вспомним, что по итогу хотим доказать:

$$\sqrt{\frac{nf^2(z_p)}{p(1-p)}}(z_{n,p} - z_p) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

Уже вводили обозначения $k = \lceil np \rceil$, $z_{n,p} = X_{(k)}$. Введём ещё: $C(n) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{nf^2(z_p)}}$, и ещё: $\eta_n = \frac{1}{C(n)}(z_{n,p} - z_p)$, т.е. хотим доказать: $\eta_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$. Распишем функцию распределения и плотность абсолютно непрерывной случайной величины η_n :

$$\begin{aligned} F_{\eta_n}(x) &= P(\eta_n \leq x) = P\left(\frac{1}{C(n)}(z_{n,p} - z_p) \leq x\right) = P(z_{n,p} \leq z_p + C(n)x) = \\ &= P(X_{(k)} \leq z_p + C(n)x) = F_{X_{(k)}}(z_p + C(n)x) \\ f_{\eta_n}(x) &= F'_{\eta_n}(x) = (F_{X_{(k)}}(z_p + C(n)x))' = C(n)f_{X_{(k)}}(z_p + C(n)x) \end{aligned}$$

Теперь подставим полученную выше формулу для $f_{X_{(k)}}(x)$ и немного преобразуем результат, введя ещё обозначения $q = 1 - p$ и $t(n, x) = z_p + C(n)x$:

$$\begin{aligned} f_{\eta_n}(x) &= C(n)f_{X_{(k)}}(t(n, x)) = C(n)nC_{n-1}^{k-1}[F(t(n, x))]^k[1 - F(t(n, x))]^{n-k}f(t(n, x)) = \\ &= \sqrt{\frac{p(1-p)}{nf^2(z_p)}}nC_{n-1}^{k-1}[F(t(n, x))]^k[1 - F(t(n, x))]^{n-k}f(t(n, x)) = \\ &= \sqrt{\frac{pq}{nf^2(z_p)}}np^{k-1}q^{n-k}C_{n-1}^{k-1}\left(\frac{F(t(n, x))}{p}\right)^k\left(\frac{1 - F(t(n, x))}{q}\right)^{n-k}f(t(n, x)) = \\ &= \sqrt{npq}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-k} \cdot \frac{f(t(n, x))}{f(z_p)} \cdot \left(\frac{F(t(n, x))}{p}\right)^k\left(\frac{1 - F(t(n, x))}{q}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Специально подогнали формулу к последнему виду, чтобы было удобно разделить её на три части, и отдельно исследовать предел каждой из трёх частей:

$$\begin{aligned} f_{\eta_n}(x) &= A_1(n) \cdot A_2(n, x) \cdot A_3(n, x) \\ A_1(n) &= \sqrt{npq}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-k} \\ A_2(n, x) &= \frac{f(t(n, x))}{f(z_p)} \\ A_3(n, x) &= \left(\frac{F(t(n, x))}{p}\right)^k\left(\frac{1 - F(t(n, x))}{q}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Теперь наш план состоит в следующем, докажем, что:

$$\begin{aligned} A_1(n) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ A_2(n, x) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\ A_3(n, x) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

Теперь поймём, что $f_{N(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – в точности плотность стандартного нормального распределения, то есть в таком случае докажем, что $f_{\eta_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_{N(0,1)}(x)$. С тем, как от этого перейти к сходимости для функций распределения, разберёмся позже, после того, как это докажем.

▷ $A_1(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Утверждается, что здесь можно сослаться на результат из дискретного анализа, но так как я, во-первых, не помню этот результат и тем более его доказательство, во-вторых, видел не совсем аккуратные, а из-за этого совсем не корректные честные доказательства, проведём аккуратное рассуждение, посчитав предел. Воспользуемся только формулой Стирлинга $s! \sim \sqrt{2\pi s} \left(\frac{s}{e}\right)^s$ и навыками из курса математического анализа.

$$\begin{aligned} A_1(n) &= \sqrt{npq} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = \sqrt{npq} p^{k-1} q^{n-k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \sim \\ &\sim \sqrt{npq} p^{k-1} q^{n-k} \frac{\sqrt{2\pi(n-1)} \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{\sqrt{2\pi(k-1)} \left(\frac{k-1}{e}\right)^{k-1} \sqrt{2\pi(n-k)} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(n-1)^{n-1}}{(k-1)^{k-1} (n-k)^{n-k}} p^{k-1} q^{n-k} \sqrt{\frac{npq(n-1)}{(k-1)(n-k)}} \end{aligned}$$

Теперь вспомним обозначения: $k = \lceil np \rceil$, $q = 1 - p$, тогда $k \sim np$, $n - k \sim nq$, в таком случае получим:

$$\sqrt{\frac{npq(n-1)}{(k-1)(n-k)}} \sim \sqrt{\frac{npq \cdot n}{np \cdot nq}} = 1$$

То есть изначальное выражение можно переписать в следующем виде:

$$A_1(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(n-1)^{n-1}}{(k-1)^{k-1} (n-k)^{n-k}} p^{k-1} q^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{(n-1)p}{k-1}\right)^{k-1} \left(\frac{(n-1)q}{n-k}\right)^{n-k}$$

Внутри каждой из двух последних скобок стоит выражение, эквивалентное 1, и оно возводится в степень, стремящуюся к бесконечности. Как знаем, такой предел может быть как 1, так и, например, e , в формуле из его определения, так что просто заметить по эквивалентности не получится, и, как увидим из дальнейшего доказательства, сходимость здесь будет достаточно тонкой. Применим простое соображение: с пределом в произведении работать проще, чем с пределом в степени, поэтому перейдём к

экспоненте и логарифмам:

$$A_1(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{(n-1)p}{k-1} \right)^{k-1} \left(\frac{(n-1)q}{n-k} \right)^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(k-1)\ln\left(\frac{(n-1)p}{k-1}\right) + (n-k)\ln\left(\frac{(n-1)q}{n-k}\right)}$$

Распишем то, как асимптотически устроены выражения из последней формулы, учитывая, что любое число отличается от своей целой части не более, чем на 1:

$$\begin{aligned} k-1 &= [np] - 1 = np - (np - [np]) - 1 = np + O(1) \\ n-k &= n - [np] = nq + (np - [np]) = nq + O(1) \end{aligned}$$

И, самое главное, логарифмы:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{(n-1)p}{k-1} \right) &= \ln \left(\frac{np \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{np \left(1 - \frac{np - [np]}{np} - \frac{1}{np}\right)} \right) = \\ &= \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 - \frac{np - [np]}{np} - \frac{1}{np} \right) = -\frac{1}{n} + \frac{np - [np]}{np} + \frac{1}{np} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{(n-1)q}{n-k} \right) &= \ln \left(\frac{nq \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{nq \left(1 + \frac{np - [np]}{nq}\right)} \right) = \\ &= \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{np - [np]}{nq} \right) = -\frac{1}{n} - \frac{np - [np]}{nq} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Теперь заметим, что множитель перед логарифмом имеет порядок n , а сам логарифм имеет порядок $\frac{1}{n}$, поэтому то, что было вынесено в O -большие, в пределе уйдёт в ноль и не будет иметь значения, тогда имеем переход:

$$\begin{aligned} A_1(n) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{np\left(-\frac{1}{n} + \frac{np - [np]}{np} + \frac{1}{np}\right) + nq\left(-\frac{1}{n} - \frac{np - [np]}{nq}\right)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-p + np - [np] + 1 - q - np + [np]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-p + 1 - q} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

▷ $A_2(n, x) = \frac{f(t(n, x))}{f(z_p)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Так же, как долго мы расправлялись с предыдущим пределом, быстро справимся с этим. Действительно, раскроем обозначения:

$$t(n, x) = z_p + C(n)x = z_p + \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{f^2(z_p)}} x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_p$$

В силу непрерывности, и даже непрерывной дифференцируемости, функции плотности $f(x)$, числитель $f(t(n, x))$ дроби $A_2(n, x)$ сходится к знаменателю $f(z_p)$, в силу чего вся дробь $A_2(n, x)$ сходится к единице.

▷ $A_3(n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Здесь будет проще доказать в эквивалентном виде:

$$\ln A_3(n, x) = k \ln \left(\frac{F(t(n, x))}{p} \right) + (n - k) \ln \left(\frac{1 - F(t(n, x))}{q} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{x^2}{2}$$

Уже выяснили, что $t(n, x)$ стремится к z_p , то есть находится в малой окрестности точки z_p . Применим, в связи с этим, разложение по формуле Тейлора до второго порядка функции F , которая дважды непрерывно дифференцируема, в силу того, что $f = F'$ непрерывно дифференцируема.

$$F(t(n, x)) = F(z_p) + (t(n, x) - z_p)F'(z_p) + \frac{1}{2}(t(n, x) - z_p)^2 F''(z_p) + O(|t(n, x) - z_p|^3)$$

В силу обозначений $t(n, x) - z_p = C(n)x = \sqrt{\frac{p(1-p)}{nf^2(z_p)}}x$. В силу того, что z_p – p -квантиль, $F(z_p) = p$, в силу того, что плотность – производная функции распределения, получим $F'(z_p) = f(z_p)$, $F''(z_p) = f'(z_p)$, также $q = 1 - p$. Тогда перепишем разложение по формуле Тейлора:

$$\begin{aligned} F(t(n, x)) &= p + \sqrt{\frac{p(1-p)}{nf^2(z_p)}} x f(z_p) + \frac{1}{2} \frac{p(1-p)}{nf^2(z_p)} x^2 f'(z_p) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \\ &= p + \sqrt{\frac{pq}{n}} x + \frac{1}{2} \frac{pq}{n} x^2 \frac{f'(z_p)}{f^2(z_p)} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Введём фундаментальную константу $\alpha = \frac{1}{2} \frac{f'(z_p)}{f^2(z_p)} pq$, ещё раз вспомним, что $p = 1 - q$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{F(t(n, x))}{p} &= 1 + \frac{1}{p} \sqrt{\frac{pq}{n}} x + \frac{1}{p} \frac{\alpha x^2}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\ \frac{1 - F(t(n, x))}{q} &= 1 - \frac{1}{q} \sqrt{\frac{pq}{n}} x - \frac{1}{q} \frac{\alpha x^2}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Теперь разложим по формуле Тейлора логарифмы последних выражений, первого порядка не хватит, придётся залезть в квадраты:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{F(t(n, x))}{p} \right) &= \frac{1}{p} \sqrt{\frac{pq}{n}} x + \frac{1}{p} \frac{\alpha x^2}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} \sqrt{\frac{pq}{n}} x \right)^2 + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\ \ln \left(\frac{1 - F(t(n, x))}{q} \right) &= -\frac{1}{q} \sqrt{\frac{pq}{n}} x - \frac{1}{q} \frac{\alpha x^2}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{q} \sqrt{\frac{pq}{n}} x \right)^2 + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Ещё немного упростив, получим:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{F(t(n, x))}{p}\right) &= \frac{1}{p}\sqrt{\frac{pq}{n}}x + \frac{1}{p}\frac{\alpha x^2}{n} - \frac{1}{2}\frac{q}{np}x^2 + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\ \ln\left(\frac{1 - F(t(n, x))}{q}\right) &= -\frac{1}{q}\sqrt{\frac{pq}{n}}x - \frac{1}{q}\frac{\alpha x^2}{n} - \frac{1}{2}\frac{p}{nq}x^2 + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

Вспомним формулы, которые получали ранее: $k - 1 = np + O(1)$, $n - k = nq + O(1)$. В силу порядков множителей перед логарифмами и логарифмов в $\ln A_3(n, x)$, слагаемые с O -большим вновь никак не будут влиять на предел, тогда:

$$\begin{aligned}\ln A_3(n, x) &= k \ln\left(\frac{F(t(n, x))}{p}\right) + (n - k) \ln\left(\frac{1 - F(t(n, x))}{q}\right) = \\ &= np \left(\frac{1}{p} \sqrt{\frac{pq}{n}} x + \frac{1}{p} \frac{\alpha x^2}{n} - \frac{1}{2} \frac{q}{np} x^2 \right) + nq \left(-\frac{1}{q} \sqrt{\frac{pq}{n}} x - \frac{1}{q} \frac{\alpha x^2}{n} - \frac{1}{2} \frac{p}{nq} x^2 \right) + o(1) = \\ &= -\frac{1}{2} q x^2 - \frac{1}{2} p x^2 + o(1) = -\frac{1}{2} x^2 + o(1)\end{aligned}$$

- ▷ Теперь, пока ещё не прошла радость от того, что все пределы наконец-то сошлись, узнаем ещё одну вещь. Мы доказали сходимость плотностей $f_{\eta_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_{N(0,1)}(x)$ поточечно по x . Нам же понадобится сходимость чуть сильнее: равномерно на каждом отрезке $[-N, N]$. Что же, пойдём расписывать заново все пределы и проверять равномерную сходимость (нет). Формально расписывать это не будем, но понять, почему именно на отрезках и почему сходимость равномерная, не слишком сложно. Где вообще у нас появлялись сходимости, а не арифметические равенства – в O -больших, именно они отвечали за то, что уходило в ноль при $n \rightarrow \infty$, всё остальное сокращалось арифметически. Как при сходимостях у нас участвовал x – только в $A_2(n, x)$ и $A_3(n, x)$, вылезал как x^s для некоторого s . На отрезке $[-N, N]$ можно мажорировать $|x^s| = |x|^s \leq N^s$ и сохранить полученную сходимость, точнее, сделать её равномерной. И по-хорошему, чтобы написать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, нам достаточно просто дифференцируемости f , а для того, чтобы оценить его константой, для O -большого, мы как раз и используем непрерывную дифференцируемость f .
- ▷ Итак, знаем на текущий момент: $f_{\eta_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_{N(0,1)}(x)$ равномерно на любом компакте $[-N, N]$. Хотим отсюда получить поточечную сходимость функций распределения $F_{\eta_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_{N(0,1)}(x)$, тогда теорема будет доказана. Идейно понятно, что хочется сделать: взять большой компакт, что на хвостах плотности f_{η_n} и $f_{N(0,1)}$ будут малы, а на компакте устремить $n \rightarrow \infty$, тогда функции распределения, как интегралы от плотностей, тоже будут слабо отличаться. Вопрос лишь, как аккуратно выбрать компакт, чтобы выбор не зависел от n , то есть чтобы устремление $n \rightarrow \infty$ было корректным. Оказывается, что компакт можно выбрать лишь по плотности предела, то есть $f_{N(0,1)}$.

Подберём N так, что плотность $N(0, 1)$ на хвостах мала:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{[-N, N]} f_{N(0,1)}(x) d\mu(x) = 1 \Rightarrow \exists N \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} f_{N(0,1)}(x) d\mu(x) < \varepsilon$$

Тогда можем оценить и плотности на хвостах η_n :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} f_{\eta_n}(x) d\mu(x) &= \left| \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} f_{\eta_n}(x) d\mu(x) \right| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} f_{N(0,1)}(x) d\mu(x) - \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} f_{N(0,1)}(x) d\mu(x) + \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} f_{\eta_n}(x) d\mu(x) \right| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} f_{N(0,1)}(x) d\mu(x) - \mathbb{I} + \int_{[-N, N]} f_{N(0,1)}(x) d\mu(x) + \mathbb{I} - \int_{[-N, N]} f_{\eta_n}(x) d\mu(x) \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} f_{N(0,1)}(x) d\mu(x) + \int_{[-N, N]} |f_{\eta_n}(x) - f_{N(0,1)}(x)| d\mu(x) \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл меньше ε по выбору N , для второго возьмём n настолько большим, что равномерно $|f_{\eta_n}(x) - f_{N(0,1)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2N}$, можем так сделать, потому что компакт, тогда:

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} f_{\eta_n}(x) d\mu(x) \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2N} \cdot 2N = 2\varepsilon$$

Тогда оценим разность функций распределения в какой-то конкретной точке:

$$\begin{aligned} |F_{\eta_n}(x) - F_{N(0,1)}(x)| &= \left| \int_{(-\infty, x]} f_{\eta_n}(x) d\mu(x) - \int_{(-\infty, x]} f_{N(0,1)}(x) d\mu(x) \right| \leq \\ &\leq \int_{(-\infty, -N]} f_{\eta_n}(x) d\mu(x) + \int_{(-\infty, -N]} f_{N(0,1)}(x) d\mu(x) + \int_{[-N, x]} |f_{\eta_n}(x) - f_{N(0,1)}(x)| d\mu(x) \end{aligned}$$

Выберем n ещё больше, чтобы на компакте $[-N, x]$ интеграл тоже был меньше ε , получим:

$$|F_{\eta_n}(x) - F_{N(0,1)}(x)| \leq 2\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon$$

□

Замечание. Медианой называют 1/2-квантиль $z_{1/2}$. Выборочную медиану определим немного иначе, чем выборочную квантиль, но сути это не поменяет.

Определение 3.3. Пусть X_1, \dots, X_n – выборка. Выборочной медианой называют статистику

$$\hat{\mu} = \begin{cases} X_{(k)}, & n = 2k + 1, \\ \frac{X_{(k)} + X_{(k+1)}}{2}, & n = 2k \end{cases}$$

Теорема 3.2. (О выборочной медиане, б/д) Пусть X_1, \dots, X_n – выборка из распределения P с функцией распределения $F(x)$ и плотностью вероятности $f(x)$, то есть распределение абсолютно непрерывно. Пусть $z_{1/2}$ – 1/2-квантиль распределения P , причём

f непрерывно дифференцируема в окрестности точки $z_{1/2}$ и $f(z_{1/2}) > 0$. Тогда

$$\sqrt{n}(\hat{\mu} - z_{1/2}) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{4f^2(z_{1/2})}\right)$$

4 Сравнение оценок

4.1 Общие определения

Определение 4.1. Функцией потерь называется любая борелевская неотрицательная функция $g(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Замечание. Мне не очень нравится это определение на самом деле. В таком случае мы считаем функцией потерь $g(x, y) \equiv 1$, но не считаем функцией потерь $g(x, y) = \|x - y\|_2 - 1$, хотя вторая функция для потерь подходит лучше.

Определение 4.2. Если $\theta^*(X)$ – оценка параметра θ , то функция $g(\theta^*(X), \theta)$, где g – функция потерь, называется величиной потерь.

Пример.

1. $g(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$
2. $g(x, y) = (x - y)^2$, $x, y \in \mathbb{R}$ – квадратичная функция потерь
3. $g(x, y) = \langle A(x - y), x - y \rangle = (x - y)^T A^T (x - y) = (x - y)^T A (x - y)$, где A – неотрицательно определённая (симметричная) матрица, $x, y \in \mathbb{R}^n$

Определение 4.3. Если задана функция потерь g , то функцией риска оценки $\theta^*(X)$ называется функция $R(\theta^*, \theta) = \mathbb{E}_\theta g(\theta^*(X), \theta)$.

Замечание. Для того, чтобы можно было брать математическое ожидание, в определении функции потерь и требовали борелевость.

Замечание. Если оценки $\theta^*(X)$ и $\hat{\theta}(X)$ совпадают P_θ -почти наверное для всех θ , например, отличаются в одной точке в случае семейства абсолютно непрерывных распределений, то они имеют одинаковую функцию риска. Такие оценки различать не будем, будем считать одной и той же оценкой в рамках подходов, которые используют функцию риска.

4.2 Различные подходы к сравнению оценок

4.2.1 Равномерный подход

Определение 4.4. Оценка $\hat{\theta}(X)$ лучше оценки $\theta^*(X)$ в равномерном подходе, если у неё меньше риск $R(\hat{\theta}, \theta) \leq R(\theta^*, \theta) \forall \theta \in \Theta$, и для некоторого θ неравенство строгое.

Определение 4.5. Оценка $\hat{\theta}$ называется наилучшей в равномерном подходе в классе оценок K , если она лучше любой другой оценки $\theta^* \in K$. Если оценка одна в своём классе, то она, разумеется, наилучшая.

Замечание. Наилучшая оценка существует не всегда. Например, рассмотрим квадратичную функцию потерь $g(x, y) = (x - y)^2$ и $K = \{\text{всевозможные оценки}\}$. Рассмотрим тождественные оценки $\hat{\theta}_0(X) \equiv \theta_0$, $\theta_0 \in \Theta$, они удовлетворяют соотношению $R(\hat{\theta}_0, \theta_0) \equiv 0$. Если θ^* – наилучшая оценка, то она при любом $\theta \in \Theta$ лучше тождественной оценки, в частности, имеет нулевой риск $R(\theta^*, \theta) \equiv 0$. Это означает, что её величина потерь, в силу неотрицательности функции потерь, почти наверное равна нулю при каждом θ . В общем случае так хорошо оценивать мы не умеем.

Тем не менее, такая хорошая оценка может существовать в вырожденных случаях. Например, рассмотрим семейство распределений $\{U[\theta, \theta + \frac{1}{2}], \theta \in \mathbb{N}\}$. Тогда следующая оценка $\theta^*(x) = [x]$, $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ – целая часть, однозначно определяет параметр θ , поэтому имеет нулевую величину потерь в случае адекватной функции потерь.

Замечание. Точно так же можем сравнивать в равномерном подходе оценки $\tau(\theta)$.

Замечание. Если g – квадратичная функция потерь, K – класс несмещённых оценок для некоторой $\tau(\theta)$, то задача поиска наилучшей оценки, то есть оценки с наименьшим риском, сводится к поиску оценки с наименьшей дисперсией.

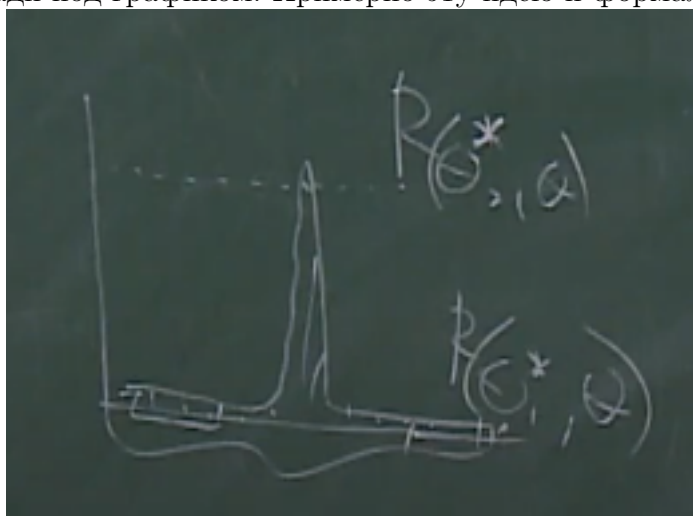
4.2.2 Минимаксный подход

Замечание. Идея в том, что смотрим на самые «страшные» потери и пытаемся их сделать как можно меньше.

Определение 4.6. Оценка θ^* называется наилучшей в минимаксном подходе в классе оценок K , если она имеет наименьшую функцию риска, то есть

$$\sup_{\theta \in \Theta} R(\theta^*, \theta) = \inf_{\hat{\theta} \in K} \sup_{\theta \in \Theta} R(\hat{\theta}, \theta)$$

Замечание. Минимаксный подход плох, если одна оценка сильно лучше другой для большинства θ , но немного хуже на небольшом участке, на котором и получаем супремум. На картинке ниже хочется сказать, что оценка, написанная ниже, лучше с точки зрения площади под графиком. Примерно эту идею и формализует байесовский подход.



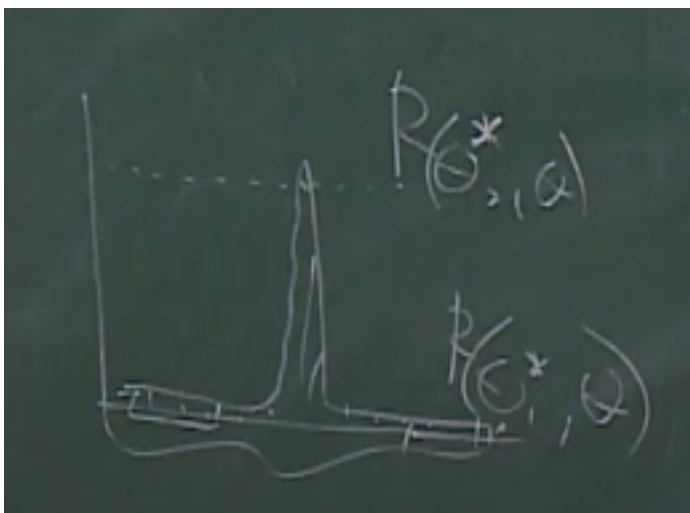
4.2.3 Байесовский подход

Предположим, что на Θ задано некоторое (априорное) распределение вероятности Q , и θ выбирается случайно в соответствии с распределением Q .

Идея заключается в том, что уже имеем некоторые предположения о том, какие θ более вероятны.

Обозначим $R(\hat{\theta}) = \int_{\Theta} R(\hat{\theta}, \theta) Q(d\theta)$, где $\hat{\theta}$ – оценка, $R(\hat{\theta}, \theta)$ – её функция риска.

Определение 4.7. Оценка θ^* называется наилучшей в байесовском подходе в классе оценок K , если $R(\theta^*) = \inf_{\hat{\theta} \in K} R(\hat{\theta})$.



Пример.

На этой картинке оценка, написанная выше, лучше в минимаксном подходе, оценка, написанная ниже, лучше в байесовском подходе с априорным распределением $U[0, 1]$, где $[0, 1]$ – отрезок на рисунке, в равномерном подходе эти оценки не сравнимы.

4.2.4 Асимптотический подход

Определение 4.8. Пусть $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ – две асимптотически нормальные оценки параметра θ с асимптотическими дисперсиями $\sigma_1^2(\theta)$ и $\sigma_2^2(\theta)$. $\hat{\theta}_1$ лучше $\hat{\theta}_2$ в асимптотическом подходе, если

$$\sigma_1^2(\theta) \leq \sigma_2^2(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta$$

Пример. Пусть X_1, \dots, X_n – выборка из $N(\theta, 1)$. Сравним в асимптотическом подходе оценки среднее \bar{X} и выборочную медиану $\hat{\mu}$.

В силу ЦПТ:

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

В силу теоремы о выборочной медиане:

$$\sqrt{n}(\hat{\mu} - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{4f^2(\theta)}\right) = N\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Здесь использовали, что плотность нормального распределения $N(\theta, 1)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$$

То есть в асимптотическом подходе среднее лучше, но медиана на практике тоже полезна, так как более устойчива к выбросам.

Определение 4.9. Оценка $\hat{\theta}$ называется наилучшей в асимптотическом подходе в классе K , содержащем асимптотически нормальные оценки, если она лучше любой другой оценки $\theta^* \in K$.

4.3 Понятие плотности дискретного распределения

Не очень к теме, не очень интересно, было на теории вероятностей и можно посмотреть в конспекте лекций Савёлова за 2023 год.

4.4 Эффективные оценки

Определение 4.10. Среднеквадратичный подход к сравнению оценок – это равномерный подход с квадратичной функцией потерь.

Утверждение 4.1. Пусть K – класс несмещённых оценок для $\tau(\theta)$. Если $T_1, T_2 \in K$, такие, что

$$\mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))^2 = \mathbb{E}_\theta(T_2 - \tau(\theta))^2 = \inf_{T \in K} \mathbb{E}_\theta(T - \tau(\theta))^2 \quad \forall \theta \in \Theta$$

то $T_1 = T_2$ P_θ -п.н. $\forall \theta \in \Theta$. То есть наилучшая оценка в среднеквадратичном подходе единственна с точностью до множеств нулевой вероятности.

Замечание. Кажется, что нужно ещё потребовать $\mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))^2 < \infty \quad \forall \theta \in \Theta$, иначе ни это доказательство, ни доказательство из конспекта лекций Савёлова 2023 года не проходят.

Доказательство. Рассмотрим $\frac{T_1 + T_2}{2}$. Так как приняли наиболее общее определение оценки, в котором не требуем, что её множество значений вложено в $\tau(\theta)$, то $\frac{T_1 + T_2}{2}$ тоже является оценкой параметра $\tau(\theta)$, причём несмещённой, то есть $\frac{T_1 + T_2}{2} \in K$. Тогда получим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - \tau(\theta) \right)^2 &= \mathbb{E}_\theta \left(\frac{T_1 - \tau(\theta)}{2} + \frac{T_2 - \tau(\theta)}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} \mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))^2 + \frac{1}{4} \mathbb{E}_\theta(T_2 - \tau(\theta))^2 + \frac{1}{2} \mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))(T_2 - \tau(\theta)) \end{aligned}$$

В силу неравенства Коши-Буняковского-Шварца:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))(T_2 - \tau(\theta)) &\leq |\mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))(T_2 - \tau(\theta))| \leq \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))^2 \mathbb{E}_\theta(T_2 - \tau(\theta))^2} = \mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))^2 \end{aligned}$$

Таким образом, с учётом условия, получаем:

$$\mathbb{E}_\theta \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - \tau(\theta) \right)^2 \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))^2 \leq \mathbb{E}_\theta \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - \tau(\theta) \right)^2$$

Тогда во всех неравенствах достигается равенство, в частности:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))(T_2 - \tau(\theta)) &\geq 0 \\ |\mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))(T_2 - \tau(\theta))| &= \sqrt{\mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))^2 \mathbb{E}_\theta(T_2 - \tau(\theta))^2}\end{aligned}$$

Напомним, что равенство в КБШ достигается тогда и только тогда, когда векторы линейно зависимы, то есть:

$$a(\theta)(T_1 - \tau(\theta)) = b(\theta)(T_2 - \tau(\theta)) \text{ } P_{\theta}\text{-п.н.}$$

Попробуем извлечь отсюда выводы про $a(\theta)$ и $b(\theta)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))(T_2 - \tau(\theta)) &\geq 0 \\ a(\theta)^2 \mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))^2 &= b(\theta)^2 \mathbb{E}_\theta(T_2 - \tau(\theta))^2 = b(\theta)^2 \mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))^2 \\ a(\theta)b(\theta) \mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))(T_2 - \tau(\theta)) &= \mathbb{E}_\theta(a(\theta)(T_1 - \tau(\theta)))^2 \geq 0\end{aligned}$$

Если $\mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))^2 = \mathbb{E}_\theta(T_2 - \tau(\theta))^2 = 0$, то $T_1 = T_2 = \tau(\theta)$ P_{θ} -п.н., и всё доказано, далее считаем, что $\mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))^2 > 0$. Тогда $a(\theta)^2 = b(\theta)^2$, причём, так как эти коэффициенты появились из линейной зависимости, то они не оба нулевые, следовательно, оба ненулевые. Тогда $a(\theta)b(\theta)\mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))(T_2 - \tau(\theta)) = a(\theta)^2\mathbb{E}_\theta(T_1 - \tau(\theta))(T_2 - \tau(\theta)) > 0$, с учётом первого из неравенств выше $a(\theta)b(\theta) > 0$. Тогда

$$a(\theta)^2 = b(\theta)^2 \text{ и } a(\theta)b(\theta) > 0 \Rightarrow a(\theta) = b(\theta) \neq 0$$

Отсюда вытекает:

$$T_1 - \tau(\theta) = T_2 - \tau(\theta) \text{ } P_{\theta}\text{-п.н.} \Rightarrow T_1 = T_2 \text{ } P_{\theta}\text{-п.н.}$$

□

Определение 4.11. Семейство распределений $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ называется доминируемым относительно меры μ , если $\forall \theta \in \Theta$ P_θ имеет плотность по одной и той же мере μ .

Замечание. Далее рассматриваем $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ – доминируемое семейство распределений относительно меры μ , работаем в одномерном случае, то есть $\Theta \subset \mathbb{R}$, дана X – выборка из неизвестного распределения P_θ , $p_\theta(X)$ есть функция правдоподобия.

Определение 4.12. Случайная величина $U_\theta(X) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X)$ называется вкладом выборки X , функция $I_X(\theta) = \mathbb{E}_\theta U_\theta^2(X)$ называется количеством информации о параметре θ , содержащейся в X (информацией Фишера).

Замечание. Информация Фишера $I_X(\theta)$ зависит от X только через размер выборки. Если X – выборка размера 1, то информация Фишера обозначается как $i(\theta)$.

Замечание. Почему такая терминология?

$$U_\theta(X) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_\theta(X_i)} \frac{\partial}{\partial \theta} p_\theta(X_i)$$

Для каждого i слагаемое является относительной скоростью изменения плотности по θ , чем в среднем больше квадрат суммарной скорости, тем проще отличить θ_1 и θ_2 .

Конкретные детали определения зависят от хороших свойств, которые скоро сформулируем. Но прежде сформулируем некоторые требования, в рамках которых со всем этим будет осмыслено работать.

Определение 4.13. Будем считать, что выполнены условия регулярности:

- (R1) $\Theta \subset \mathbb{R}$, Θ – открытый интервал, возможно, бесконечный.
- (R2) Множество $A = \{x \in \mathcal{X} : p_\theta(x) > 0\}$ не зависит от θ , A называется носителем. Здесь x одномерный, то есть соответствует выборке размера 1.
- (R3) Для любой статистики $S(X)$ с условием $\mathbb{E}S^2(X) < \infty$ выполнено равенство, в частности, его левая и правая части существуют:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}_\theta S(X) = \mathbb{E}_\theta S(X) U_\theta(X)$$

- (R4) $0 < I_X(\theta) < \infty \quad \forall \theta \in \Theta$

Замечание. Теперь поймём смысл того, что здесь написано.

- (R1) Открытость нам нужна для того, чтобы дифференцировать, интервал, то есть связность, требуем для того, чтобы, например, из тождественно нулевой производной следовала постоянность функции.
- (R2) Во-первых, по сути, A – это разрешённое множество значений для выборки X , то есть запрещаем ситуацию, когда какому-то из распределений нельзя принимать некоторые значения, допустимые для других распределений. Во-вторых, это будет нужно для того, чтобы аккуратно расписать интеграл в (R3).
- (R3) Будет ниже.
- (R4) Так как по определению информация Фишера неотрицательна, такое требование разумно и нужно, чтобы на информацию Фишера можно было делить.

Напоминание. (Теорема о дифференцируемости собственного интеграла по параметру) Пусть даны $f: E \times (c; d) \rightarrow \mathbb{R}$, где $E \subseteq \mathbb{R}^m$ — измеримое множество. Если выполнены следующие условия :

1. Для любого $\alpha \in (c; d)$ функция $f(x, \alpha)$ суммируема на E
2. Для любого $\alpha \in (c; d)$ почти всюду на E верно неравенство $\left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \right| \leq \varphi(x)$, где $\varphi \in L_1(E)$

Тогда взятие производной по параметру коммутирует с интегралом по E (ну или можно сказать, что оператор производной вносится под знак интеграла):

$$\forall \alpha \in (c; d) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\int_E f(x, \alpha) d\mu(x) \right) = \int_E \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) d\mu(x)$$

Замечание.

(R3) Перепишем требование в немного другом виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}_\theta S(X) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{A^n} S(X) p_\theta(X) \mu(dX) \stackrel{?}{=} \int_{A^n} \frac{\partial}{\partial \theta} [S(X) p_\theta(X)] \mu(dX) = \\ &= \int_{A^n} S(X) \frac{\partial}{\partial \theta} p_\theta(X) \mu(dX) = \int_{A^n} S(X) U_\theta(X) p_\theta(X) \mu(dX) = E_\theta S(X) U_\theta(X)\end{aligned}$$

То есть вопрос в том, можем ли внести производную под интеграл. Так как A^n измеримо, а Θ – интервал, по теореме выше достаточно проверить суммируемость подинтегральной функции и то, что её можно продифференцировать, а результат мажорировать суммируемой функцией.

Теперь откуда взялось $S^2(X) < \infty$? Как я понимаю, оно унаследовалось из книги Боровкова по математической статистике, а там использовалось для доказательства корректности внесения производной под интеграл вместе с некоторыми дополнительными предположениями.

Утверждение 4.2.

1. $\mathbb{E}_\theta U_\theta(X) = 0$
2. $I_X(\theta) = ni(\theta)$

Доказательство.

1. Применим условие регулярности (R3) для статистики $S(X) \equiv 1$:

$$\mathbb{E}_\theta U_\theta(X) = \mathbb{E}_\theta S(X) U_\theta(X) = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}_\theta S(X) = \frac{\partial}{\partial \theta} 1 = 0$$

2. Распишем по определению, воспользуемся независимостью элементов выборки:

$$\begin{aligned}I_X(\theta) &= \mathbb{E}_\theta U_\theta^2(X) = \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X) \right)^2 = \mathbb{E}_\theta \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X_i) \right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X_i) \right)^2 + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X_i) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X_j) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X_i) \right)^2 + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X_i) \right) \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X_j) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n i(\theta) + \sum_{i \neq j} (\mathbb{E}_\theta U_\theta(X_1))^2 = ni(\theta)\end{aligned}$$

□

Теорема 4.1. (Неравенство Рао-Крамера) Пусть выполнены условия регулярности и $\hat{\theta}(X)$ – несмещённая оценка $\tau(\theta)$ с условием $\mathbb{E}_\theta (\hat{\theta}(X))^2 < \infty \forall \theta \in \Theta$. Тогда

$$D_\theta \hat{\theta}(X) \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{I_X(\theta)} = \frac{(\tau'(\theta))^2}{ni(\theta)}$$

Замечание. Смысл теоремы: в среднеквадратичном подходе для несмещённых оценок ищется оценка с наименьшей дисперсией. Здесь получаем оценку снизу на дисперсию.

Доказательство. Применим условие регулярности (R3) для статистики $S(X) = \hat{\theta}(X)$:

$$\mathbb{E}_\theta \hat{\theta}(X) U_\theta(X) = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}_\theta \hat{\theta}(X) = \frac{\partial}{\partial \theta} \tau(\theta) = \tau'(\theta)$$

Перепишем в немного другом виде:

$$\tau'(\theta) = \mathbb{E}_\theta \hat{\theta}(X) U_\theta(X) = \mathbb{E}_\theta \hat{\theta}(X) U_\theta(X) - \tau(\theta) \mathbb{E} U_\theta(X) = \mathbb{E}_\theta [\hat{\theta}(X) - \tau(\theta)] U_\theta(X)$$

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского-Шварца:

$$|\tau'(\theta)|^2 = |\mathbb{E}_\theta [\hat{\theta}(X) - \tau(\theta)] U_\theta(X)|^2 \leq \mathbb{E}_\theta [\hat{\theta}(X) - \tau(\theta)]^2 \mathbb{E}_\theta (U_\theta(X))^2 = \mathbb{E}_\theta [\hat{\theta}(X) - \tau(\theta)]^2 I_X(\theta)$$

В силу несмещённости оценки $\mathbb{E}_\theta (\hat{\theta}(X) - \tau(\theta))^2 = D_\theta \hat{\theta}(X)$, в силу (R4) $I_X(\theta) > 0$:

$$\frac{|\tau'(\theta)|^2}{I_X(\theta)} \leq D_\theta \hat{\theta}(X)$$

□

Следствие. Пусть выполнены условия регулярности и $\hat{\theta}(X)$ – несмещённая оценка θ с условием $\mathbb{E}_\theta (\hat{\theta}(X))^2 < \infty \forall \theta \in \Theta$. Тогда

$$D_\theta \hat{\theta}(X) \geq \frac{1}{I_X(\theta)} = \frac{1}{ni(\theta)}$$

Определение 4.14. Если в неравенстве Рао-Крамера для несмещённой оценки $\hat{\theta}(X)$ достигается равенство (отсюда следует конечность второго момента), то $\hat{\theta}(X)$ называется эффективной оценкой $\tau(\theta)$.

Теорема 4.2. (Критерий эффективности) В условиях регулярности следующие утверждения эквивалентны:

1. $\hat{\theta}(X)$ – эффективная оценка $\tau(\theta)$
2. $\hat{\theta}(X)$ – линейная функция от $U_\theta(X)$ вида:

$$\hat{\theta}(X) - \tau(\theta) = c(\theta) U_\theta(X) \text{ } P_{\theta}\text{-п.н.} - \text{ для некоторой } c(\theta)$$

При этом последнее равенство выполнено тогда и только тогда, когда $c(\theta) = \frac{\tau'(\theta)}{I_X(\theta)}$.

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, что неравенство Рао-Крамера вытекает из неравенства Коши-Буняковского-Шварца, значит, надо посмотреть, когда в последнем достигается равенство.

Сначала проверим, что для оценок из обоих пунктов выполнены условия теоремы о неравенстве Рао-Крамера. В первом случае это очевидно. Во втором случае: распишем математическое ожидание $\mathbb{E}_\theta \hat{\theta}(X) = c(\theta) \mathbb{E}_\theta U_\theta(X) + \tau(\theta) = \tau(\theta)$, откуда получили несмещённость, и дисперсию $D_\theta \hat{\theta}(X) = c(\theta)^2 \mathbb{E}_\theta U_\theta^2(X) = c(\theta)^2 I_X(\theta) < \infty$, откуда получили конечность второго момента.

Теперь посмотрим, когда в неравенстве КБШ

$$|\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}(X) - \tau(\theta)]U_\theta(X)|^2 \leq \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}(X) - \tau(\theta)]^2 \mathbb{E}_\theta(U_\theta(X))^2$$

достигается равенство. Тогда и только тогда, когда случайные величины линейно зависимы, то есть $a(\theta)[\hat{\theta}(X) - \tau(\theta)] = b(\theta)U_\theta(X)$ P_θ -п.н.. Если для некоторого θ $a(\theta) = 0$, то выполнено $0 = \mathbb{E}_\theta(b(\theta)U_\theta(X))^2 = b(\theta)^2 I_X(\theta)$, а из условий регулярности $I_X(\theta) > 0$, следовательно, $b(\theta) = 0$, что невозможно, так как $a(\theta)$ и $b(\theta)$ пришли из определения линейной зависимости. Тогда $a(\theta)$ не обращается в ноль, и можем переписать в виде $\hat{\theta}(X) - \tau(\theta) = c(\theta)U_\theta(X)$ P_θ -п.н.

Таким образом, доказали эквивалентность, потому что если оценка эффективная, то в КБШ есть равенство, тогда оценка линейно зависит от вклада выборки. Если оценка линейно зависит от вклада выборки в виде из условия, то проходя через доказательство неравенства Рао-Крамера, получим, что там достигнется равенство.

Осталось найти конкретный вид $c(\theta)$:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(X) - \tau(\theta) &= c(\theta)U_\theta(X) \text{ } P_\theta\text{-п.н.} \\ (\hat{\theta}(X) - \tau(\theta))U_\theta(X) &= c(\theta)U_\theta^2(X) \text{ } P_\theta\text{-п.н.} \\ \mathbb{E}(\hat{\theta}(X) - \tau(\theta))U_\theta(X) &= c(\theta)I_X(\theta)\end{aligned}$$

При доказательстве неравенства Рао-Крамера получили, что $\tau'(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}(X) - \tau(\theta)]U_\theta(X)$, так что $\tau'(\theta) = c(\theta)I_X(\theta)$ и всё доказано. \square

Замечание. В доказательстве на лекции этого критерия, кажется, была бага, так как утверждалось, что в КБШ есть равенство тогда и только тогда, когда $\alpha(\theta)[\hat{\theta}(X) - \tau(\theta)] + \beta(\theta)U_\theta(X) + \gamma(\theta) = 0$ P_θ -п.н., но линейная зависимость в пространстве Лебега $L_2(\mathbb{R})$ работает немного не так.

Следствие. Если θ^* и $\hat{\theta}$ – две эффективные оценки $\tau(\theta)$, то $\theta^* = \hat{\theta}$ P_θ -п.н. $\forall \theta \in \Theta$. Это следует не только из критерия эффективности, но и из утверждения про единственность наилучшей оценки среди несмещённых в среднеквадратичном подходе.

Замечание. Эффективная оценка $\tau(\theta)$ – наилучшая оценка $\tau(\theta)$ – наилучшая оценка $\tau(\theta)$ в классе несмещённых L_2 -оценок в равномерном подходе с квадратичной функцией потерь.

Кажется, что L_2 здесь можно не требовать, так как эффективная оценка имеет конечную дисперсию, а оценки не из L_2 имеют бесконечную дисперсию.

В обратную сторону неверно: наилучшая оценка $\tau(\theta)$ в классе несмещённых L_2 -оценок в равномерном подходе с квадратичной функцией потерь не обязательно является эффективной.

Замечание. На многомерный случай неравенство Рао-Крамера обобщается через неравенства через неотрицательную определённости матриц, но не будем на этом останавливаться.

Замечание. Теперь результат о том, что существование эффективной оценки является редкостью, но сначала вспомогательная лемма.

Лемма 4.1. Пусть $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ – доминируемое семейство распределений относительно меры μ , множество $A = \{x \in \mathcal{X} : p_\theta(x) > 0\}$ не зависит от θ . Тогда $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathcal{X})$ эквивалентно:

$$1. \exists \theta_0 \in \Theta \quad P_{\theta_0}(B) = 1$$

$$2. \forall \theta \in \Theta \quad P_{\theta}(B) = 1$$

Доказательство. Понятно, что интересна только импликация $1 \Rightarrow 2$. Пойдём от противного: предположим, что существует θ , для которого $P_{\theta}(B) < 1$.

Тогда получим:

$$P_{\theta_0}(\mathcal{X} \setminus B) = \int_{\mathcal{X} \setminus B} p_{\theta_0}(x) \mu(dx) = 0$$

$$P_{\theta}(\mathcal{X} \setminus B) = \int_{\mathcal{X} \setminus B} p_{\theta}(x) \mu(dx) > 0$$

Так как плотность неотрицательна, то множество $\{x \in \mathcal{X} \setminus B : p_{\theta_0}(x) > 0\}$ имеет нулевую меру, множество $\{x \in \mathcal{X} \setminus B : p_{\theta}(x) > 0\}$ имеет ненулевую меру. Противоречие с тем, что A не зависит от θ . \square

Теорема 4.3. Если в условиях регулярности есть эффективная оценка для $\tau(\theta) \neq \text{const}$, то множество функций, для которых существует эффективная оценка, можно записать в виде $\{a\tau(\theta) + b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b = \text{const}$.

Замечание. Случай $\tau(\theta) \equiv \text{const}$ в принципе не очень интересен, так как мы знаем $\tau(\theta)$, не обращая внимание на выборки.

Доказательство.

С Пусть $T(X)$ и $V(X)$ – эффективные оценки $\tau(\theta)$ и $v(\theta)$ соответственно, $\tau(\theta) \neq \text{const}$. По критерию эффективности:

$$T(X) = \tau(\theta) + c(\theta)U_{\theta}(X) \quad P_{\theta}\text{-п.н.}, \quad c(\theta) = \frac{\tau'(\theta)}{I_X(\theta)}$$

$$V(X) = v(\theta) + d(\theta)U_{\theta}(X) \quad P_{\theta}\text{-п.н.}, \quad d(\theta) = \frac{v'(\theta)}{I_X(\theta)}$$

Так как Θ – интервал, возможно, бесконечный, $\tau(\theta) \neq \text{const}$ на Θ , то существует параметр θ_0 такой, что $\tau'(\theta_0) \neq 0$. Ибо возьмём любой подотрезок, на концах которого τ различна, по теореме Лагранжа найдём точку с ненулевой производной. Тогда $c(\theta_0) \neq 0$. Тогда

$$U_{\theta_0}(X) = \frac{T(X) - \tau(\theta_0)}{c(\theta_0)} \quad P_{\theta_0}\text{-п.н.}$$

$$V(X) = v(\theta_0) + \frac{d(\theta_0)}{c(\theta_0)}(T(X) - \tau(\theta_0)) = aT(X) + b \quad P_{\theta_0}\text{-п.н.}$$

Рассмотрим множество $B = \{X : V(X) = aT(X) + b\}$. Для него $P_{\theta_0}(B) = 1$. В силу доказанной леммы $\forall \theta \in \Theta \quad P_{\theta}(B) = 1$. Тогда

$$V(X) = aT(X) + b \quad P_{\theta}\text{-п.н.}$$

$$\Downarrow$$

$$v(\theta) = \mathbb{E}_{\theta}V(X) = a\mathbb{E}_{\theta}T(X) + b = a\tau(\theta) + b$$

И a, b не зависят от θ , так что всё доказано.

⊃ $T(X)$ эффективна для $\tau(\theta)$, по критерию эффективности:

$$\begin{aligned} T(X) &= \tau(\theta) + c(\theta)U_\theta(X) \text{ } P_\theta\text{-п.н.} \\ \Downarrow \\ aT(X) + b &= (a\tau(\theta) + b) + (ac(\theta))U_\theta(X) \text{ } P_\theta\text{-п.н.} \end{aligned}$$

Вновь по критерию эффективности $aT(X) + b$ эффективна для $a\tau(\theta) + b$.

□

4.5 Экспоненциальные семейства распределений

Замечание. Можно ли найти эффективные оценки, просто внимательно посмотрев на семейство распределений? Оказывается, что да.

Определение 4.15. Пусть $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ – доминируемое семейство распределений относительно меры μ , $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$. Это семейство называется экспоненциальным, если обобщённая плотность его распределений имеет вид

$$p_\theta(x) = h(x) \exp \left(\sum_{i=1}^k a_i(\theta) T_i(x) + V(\theta) \right)$$

Здесь важно, что для суммы используется то же самое k , что и размерность θ .

Также, обозначив $a_0(\theta) \equiv 1$, требуем, что a_0, a_1, \dots, a_k линейно независимы на Θ .

Замечание. Требование линейной независимости разумно, так как в случае линейной зависимости a_1, \dots, a_k можно уменьшить число слагаемых в сумме, если a_1, \dots, a_k линейно зависимы с константой, то можно уменьшить число слагаемых, занеся $\exp(C \cdot S(x))$ в $h(x)$.

При этом, как по мне, странно, что мы не потребовали, например, что $T_i(x) \not\equiv \text{const}$, в таком случае $a_i(\theta)T_i(x)$ можно было бы занести в $V(\theta)$. Далее, когда будем работать в одномерном случае, мы это хитро обойдём, но тем не менее. Это определение унаследовалось из книги Боровкова по статистике, так что вопросы к ней.

И даже после таких требований неоднозначность записи плотности остаётся, например:

$$h(x)e^{V(\theta)} \dots = (h(x)e^{-5})e^{V(\theta)+5} \dots$$

Пример. Рассмотрим семейство распределений:

$$\Gamma(\alpha, \beta), \quad p(x) = \frac{\alpha^\beta x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x} I\{x > 0\}$$

Перепишем плотность в другом виде:

$$p(x) = \frac{1}{x} I\{x > 0\} \exp \left(\beta \ln x - \alpha x + \ln \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \right)$$

Обозначив через $h(x) = \frac{1}{x}I\{x > 0\}$, $a_1(\alpha, \beta) = \beta$, $a_2(\alpha, \beta) = -\alpha$, $T_1(x) = \ln x$, $T_2(x) = x$, $V(\alpha, \beta) = \ln \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}$, получим, что семейство гамма-распределений является экспоненциальным, линейная независимость из определения очевидна. Так как гамма-распределения включают все экспоненциальные распределения в обычном, не обобщённом, смысле, то есть распределения $Exp(\Lambda)$, то это разумно.

Замечание. Теперь переходим к тому, как связаны эффективные оценки и экспоненциальные семейства распределений. Будем работать в одномерном случае, то есть $\Theta \subset \mathbb{R}$, обобщённая плотность записывается в виде $p_\theta(x) = h(x) \exp(a(\theta)T(x) + V(\theta))$. Будем считать, что выполнены условия регулярности.

Замечание. Наша цель, доказать, что существование эффективной оценки в каком-то смысле эквивалентно тому, что семейство является экспоненциальным. Прямо в таком виде это неверно, например, для $\tau(\theta) \equiv \text{const}$ всегда существует эффективная оценка, легко понять, например, по критерию эффективности, но не каждое семейство распределений является экспоненциальным, что не то, чтобы очевидно, но следует ожидать.

Замечание. Для доказательства нам понадобится одно предположение: распределения семейства $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ существенно зависят от параметра θ , то есть $\exists \theta_1, \theta_2 P_{\theta_1} \neq P_{\theta_2}$. Действительно, если, например, имеем семейство распределений, в котором все $P_\theta \sim N(0, 1)$, то по выборке странно и не получится сделать предположение об истинном параметре θ . Несмотря на всю банальность этого предположения, оно возникнет и будет играть важную роль в доказательстве.

Теорема 4.4. Пусть выполнены условия регулярности, распределения семейства распределений $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ существенно зависят от θ , $\Theta \subset \mathbb{R}$. Следующие утверждения, с некоторыми оговорками, которые возникнут по ходу доказательства, эквивалентны:

1. Существует эффективная оценка для некоторой $\tau(\theta) \not\equiv \text{const}$
2. Семейство распределений является экспоненциальным

Доказательство.

$2 \Rightarrow 1$ Пусть семейство экспоненциальное. Тогда обобщённая плотность имеет вид:

$$p_\theta(x) = h(x) \exp(a(\theta)T(x) + V(\theta))$$

Покажем, что $T(x) \not\equiv \text{const}$ на носителе A . Действительно, если это не так, то:

$$\begin{aligned} p_\theta(x) &= h(x) \exp(a(\theta)T + V(\theta)), \quad x \in A \\ 1 &= \int_A h(x) \exp(a(\theta)T + V(\theta)) \mu(dx) = \exp(a(\theta)T + V(\theta)) \int_A h(x) \mu(dx) \\ &\Downarrow \\ \exp(a(\theta)T + V(\theta)) &\equiv \text{const} \end{aligned}$$

То есть распределения из семейства не зависят от параметра и одинаковы, что противоречит условию.

В силу условий регулярности существует вклад выборки X , он нам нужен, так как захотим сослаться на критерий эффективности:

$$\begin{aligned} U_\theta(X) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X) = \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^n \ln p_\theta(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln h(X_i) + a(\theta)T(X_i) + V(\theta)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} (a(\theta)T(X_i) + V(\theta)) \end{aligned}$$

Теперь заметим простой факт из математического анализа: если дифференцируемы функции $f(x) + C_1 g(x)$ и $f(x) + C_2 g(x)$, $C_1 \neq C_2$, то $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы. Так как $a(\theta)T(x) + V(\theta)$ дифференцируема по θ при каждом x из носителя и $T(x) \not\equiv \text{const}$ на нём, то $a(\theta)$ и $V(\theta)$ дифференцируемы, тогда можем продолжить:

$$U_\theta(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} (a(\theta)T(X_i) + V(\theta)) = \sum_{i=1}^n (a'(\theta)T(X_i) + V'(\theta)) = a'(\theta) \sum_{i=1}^n T(X_i) + nV'(\theta)$$

Накладываем первое и единственное ограничение: $a'(\theta) \neq 0 \forall \theta \in \Theta$. Обоснования того, что иные случаи не интересны, тут не будет, просто хотим поделить. В таком случае получим:

$$\frac{1}{na'(\theta)} U_\theta(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T(X_i) - \frac{V'(\theta)}{a'(\theta)}$$

По критерию эффективности $T^*(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T(X_i)$ является эффективной оценкой для $\tau(\theta) = \frac{V'(\theta)}{a'(\theta)}$, причём $\tau(\theta) \not\equiv \text{const}$, так как в противном случае всё по тому же критерию эффективности $\frac{1}{na'(\theta)} = c(\theta) = \frac{\tau'(\theta)}{I_X(\theta)} = 0$, что невозможно.

1 \Rightarrow 2 Пусть существует эффективная оценка $T^*(X)$ для $\tau(\theta)$, тогда τ дифференцируема, уже выводили ранее из условий регулярности.

Покажем, что $\tau'(\theta) \neq 0 \forall \theta \in \Theta$. В противном случае $\tau'(\theta_0) = 0$, и в силу эффективности $D_{\theta_0} T^*(X) = \frac{(\tau'(\theta_0))^2}{I_X(\theta)} = 0$. В силу несмещённости оценки $T^*(X)$ выполнено $D_{\theta_0} T^*(X) = \mathbb{E}_{\theta_0} (T^*(X) - \tau(\theta_0))^2 = 0$, тогда $T^*(X) = \tau(\theta_0)$ P_{θ_0} -п.н.. Применим лемму от теоремы для общего вида множества функций, для которых существует эффективная оценка, получим $T^*(X) = \tau(\theta_0)$ P_θ -п.н. $\forall \theta \in \Theta$. Отсюда, в частности, следует, что $\tau(\theta) = \mathbb{E}_\theta T^*(X) = \tau(\theta_0) \forall \theta \in \Theta$. То есть $\tau(\theta) \equiv \text{const}$, что не является правдой. Это чуть более формальная запись следующего рассуждения: $D_{\theta_0} T^*(X) = 0$, то есть при некоторых θ_0 умеем абсолютно точно предсказывать $\tau(\theta_0)$, а в условиях регулярности выбирали носитель так, чтобы по выборке нельзя было однозначно исключить какие-то θ и $\tau(\theta) \not\equiv \text{const}$.

Вновь воспользуемся критерием эффективности:

$$\begin{aligned} T^*(X) - \tau(\theta) &= c(\theta)U_\theta(X) \text{ } P_\theta\text{-п.н.} \\ c(\theta) &= \frac{\tau'(\theta)}{I_X(\theta)} \neq 0 \\ U_\theta(X) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X) \\ \Downarrow \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X) &= \frac{T^*(X) - \tau(\theta)}{c(\theta)} \text{ } P_\theta\text{-п.н.} \end{aligned}$$

Далее хотим проинтегрировать последнее равенство, и из полученного равенства для функции правдоподобия получить требуемый вид плотности. Проблема в том, что хотим интегрировать по θ , но равенство P_θ -п.н. выполнено для разных множеств для каждого θ , поэтому после интегрирования получим тождество, которое точно будет выполнено лишь для тех X , которые входят в каждое множество из вышеперечисленных, совершенно не факт, что получится множество единичной вероятности.

Эта проблема решается следующим образом, доказывается, доказательство можно посмотреть в книге П. Бикел, К. Доксам Математическая статистика, что множество

$$A^* = \left\{ X : \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X) = \frac{T^*(X) - \tau(\theta)}{c(\theta)} \forall \theta \in \Theta \right\}$$

имеет единичную вероятность для каждого $\theta \in \Theta$.

Накладываем первое и тоже единственное ограничение: функция $\ln p_\theta(X)$ абсолютно непрерывна по θ при всех $X \in A$, нам это нужно, а выводить это из текущих предположений я не умею. Теперь проинтегрируем по θ то равенство, которое хотели проинтегрировать:

$$\ln p_\theta(X) = \int \frac{T^*(X) - \tau(\theta)}{c(\theta)} d\theta + g(X) = T^*(X) \int \frac{d\theta}{c(\theta)} - \int \frac{\tau(\theta)}{c(\theta)} d\theta + g(X), \quad X \in A^*$$

Здесь $g(X)$ – константа интегрирования.

Если нужно формальное обоснование того, что здесь произошло, читать серый текст.

Зафиксируем $\theta_0 \in \Theta$, возьмём интеграл Лебега от абсолютно непрерывной функции на $[\theta_0, \theta]$, получим:

$$\ln p_\theta(X) - \ln p_{\theta_0}(X) = \int_{[\theta_0, \theta]} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X) d\theta = \int_{[\theta_0, \theta]} \frac{T^*(X) - \tau(\theta)}{c(\theta)} d\theta, \quad X \in A^*$$

Дальше, так как оценка $T^*(X) \neq \text{const}$ на A^* , иначе она имела бы нулевую дисперсию, хотя выше оговорили, что $D_\theta T^*(X) \neq 0$, то существует интеграл

$$\int_{[\theta_0, \theta]} \frac{T^*(X^{(0)}) - T^*(X^{(1)})}{c(\theta)} d\theta = [T^*(X^{(0)}) - T^*(X^{(1)})] \int_{[\theta_0, \theta]} \frac{d\theta}{c(\theta)}$$

Тогда интеграл выше можно раскрыть по линейности:

$$\ln p_\theta(X) - \ln p_{\theta_0}(X) = T^*(X) \int_{[\theta_0, \theta]} \frac{d\theta}{c(\theta)} - \int_{[\theta_0, \theta]} \frac{\tau(\theta)}{c(\theta)} d\theta, \quad X \in A^*$$

Обозначив через $g(X) = \ln p_{\theta_0}(X)$, получим то, что хотели.

Введя обозначения для последних интегралов и помня, что $P_\theta(A^*) = 1$, получим:

$$\ln p_\theta(X) = T^*(X)B(\theta) + D(\theta) + g(X) \quad P_\theta\text{-п.н.}$$

Так как плотность определена с точностью до множества нулевой вероятности, то замечание P_θ -п.н. можно убрать. Тогда получим:

$$\prod_{i=1}^n p_\theta(X_i) = p_\theta(X) = e^{T^*(X)B(\theta)+D(\theta)+g(X)} = H(X)e^{T^*(X)B(\theta)+D(\theta)}$$

Теперь от правдоподобия хотим перейти к плотности конкретного x . Зафиксируем x_2^0, \dots, x_n^0 из носителя, тогда плотности в этих точках будут ненулевыми для всех θ , тогда получим:

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\prod_{i=2}^n p_\theta(x_i^0)} H(x, x_2^0, \dots, x_n^0) e^{T^*(x, x_2^0, \dots, x_n^0)B(\theta)+D(\theta)}$$

Введя ещё больше обозначений, придём к формуле:

$$p_\theta(x) = e^{k(\theta)} h(x) e^{t(x)B(\theta)+D(\theta)}$$

Так как плотность семейства распределений существенно зависит от θ , то аналогично одному из рассуждений выше можем утверждать, что $B(\theta) \not\equiv \text{const}$, то есть линейно независима с константой. Тогда доказали, что семейство распределений экспоненциальное.

□

4.6 Условное математическое ожидание

Замечание. Напоминание из курса теории вероятностей.

Определение 4.16. Пусть ξ – случайная величина (вектор) на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) . Тогда σ -алгеброй, порождённой ξ , называется объект:

$$\mathcal{F}_\xi = \{\xi^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)\}$$

То есть σ -алгебра, порождённая ξ – это прообразы всех борелевских множеств. Нетрудно показать, что это действительно σ -алгебра.

Определение 4.17. Пусть $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, \mathcal{C} – σ -алгебра. Случайная величина (вектор) ξ называется \mathcal{C} -измеримой, если $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{C}$. Иными словами, все интересные для ξ множества содержатся в σ -алгебре \mathcal{C} .

Определение 4.18. Пусть ξ, η – случайные величины (векторы) на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) . ξ называется η -измеримой, если $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}_\eta$.

Утверждение 4.3. Пусть ξ, η – случайные величины (векторы) на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) . Следующие утверждения эквивалентны:

1. ξ является η -измеримой
2. $\xi = \varphi(\eta)$, φ – борелевская функция

Доказательство.

$2 \Rightarrow 1$ Так как φ – борелевская функция, то $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$ $\varphi^{-1}(B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$, в таком случае:

$$\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k) \quad \xi^{-1}(B) = \eta^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \in \mathcal{F}_\eta \Rightarrow \mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}_\eta$$

$1 \Rightarrow 2$ Доказательство нетривиально, можно посмотреть в книге А. Н. Ширяева Вероятность, том 1, глава 1, параграф 4, теорема 3.

□

Определение 4.19. Пусть ξ – некоторая случайная величина на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) . Пусть $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, \mathcal{C} – тоже σ -алгебра. Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно σ -алгебры \mathcal{C} называется случайная величина $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})$, удовлетворяющая двум свойствам:

1. Свойство измеримости: $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})$ является \mathcal{C} -измеримой случайной величиной, то есть порождённая ей σ -алгебра $\mathcal{F}_{\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})} \subset \mathcal{C}$.
2. Интегральное свойство:

$$\forall A \in \mathcal{C} \quad \mathbb{E}(\xi I_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) I_A)$$

Или в терминах интегралов:

$$\forall A \in \mathcal{C} \quad \int_A \xi dP = \int_A \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) dP$$

Замечание. Грубо говоря, класс интересных для случайной величины ξ множеств сужается на σ -алгебру \mathcal{C} , при этом свойства случайной величины ξ относительно σ -алгебры \mathcal{C} сохраняются. Почему в общем случае $\xi \neq \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})$? Интегральное свойство, конечно, выполнено, но ξ не обязательно \mathcal{C} -измерима.

Теорема 4.5. (Теорема о существовании и единственности УМО, б/д) Если $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$, то для любой \mathcal{C} – под- σ -алгебры \mathcal{F} – условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})$ существует и единственно с точностью до равенства почти наверное.

Теорема 4.6. (Свойства условного математического ожидания)

1. Пусть $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$, \mathcal{C} – под- σ -алгебра в \mathcal{F} . Пусть ξ – \mathcal{C} -измеримая случайная величина. Тогда:

$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) = \xi$$

2. (Линейность) Пусть $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$, $\mathbb{E}|\eta| < +\infty$, \mathcal{C} – под- σ -алгебра в \mathcal{F} . Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\mathbb{E}(a\xi + b\eta|\mathcal{C}) = a\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) + b\mathbb{E}(\eta|\mathcal{C})$$

3. (Формула полной вероятности) Пусть $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$, \mathcal{C} – под- σ -алгебра в \mathcal{F} . Тогда:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})) = \mathbb{E}\xi$$

4. Пусть $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$, \mathcal{C} – под- σ -алгебра в \mathcal{F} . Пусть ξ независима с \mathcal{C} , то есть порождённая ей σ -алгебра \mathcal{F}_ξ независима с \mathcal{C} . Тогда:

$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) = \mathbb{E}\xi$$

5. (Сохранение отношения порядка) Пусть $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$, $\mathbb{E}|\eta| < +\infty$, \mathcal{C} – под- σ -алгебра в \mathcal{F} . Если $\xi \leq \eta$, то:

$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) \leq \mathbb{E}(\eta|\mathcal{C}) \text{ почти наверное}$$

6. Пусть $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$, \mathcal{C} – под- σ -алгебра в \mathcal{F} . Тогда:

$$|\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})| \leq \mathbb{E}(|\xi| | \mathcal{C}) \text{ почти наверное}$$

7. (Телескопическое свойство) Пусть $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$, $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ – под- σ -алгебры в \mathcal{F} . Если $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$, то:

$$(a) \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}_1)|\mathcal{C}_2) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}_1)$$

$$(b) \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}_2)|\mathcal{C}_1) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}_1)$$

8. Пусть $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$, $\mathbb{E}|\xi\eta| < +\infty$, \mathcal{C} – под- σ -алгебра в \mathcal{F} . Если η – \mathcal{C} -измеримая случайная величина, то:

$$\mathbb{E}(\xi\eta|\mathcal{C}) = \eta\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})$$

9. (Неравенство Йенсена) Пусть $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – выпуклая вниз борелевская функция, $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$, $\mathbb{E}|\varphi(\xi)| < +\infty$, \mathcal{C} – под- σ -алгебра в \mathcal{F} . Тогда:

$$\mathbb{E}(\varphi(\xi)|\mathcal{C}) \geq \varphi(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})) \text{ почти наверное}$$

Замечание. Докажем первые 7 свойств, доказательство остальных можно посмотреть в конспекте курса по теории вероятностей. Во всех свойствах для всех условных матожиданий выполнена теорема о существовании и единственности УМО, если это где-то неочевидно, то будет пояснено в доказательстве. Стоит отметить, что все равенства из свойств можно заменить на равенство почти наверное, так как в таком случае УМО определено однозначно с точностью до множества нулевой вероятности. Практически все свойства будут доказываться так: есть кандидат в условное матожидание, проверим для него выполнение свойств из определения УМО.

Доказательство.

1. Выполнены условия теоремы о существовании и единственности УМО. Проверим свойства из определения УМО.

Свойство измеримости выполнено по условию теоремы.

Интегральное свойство очевидно.

2. Так как $\mathbb{E}|a\xi + b\eta| \leq |a|\mathbb{E}|\xi| + |b|\mathbb{E}|\eta| < +\infty$, то для всех УМО выполнены условия теоремы о существовании и единственности УМО. Проверим для $a\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) + b\mathbb{E}(\eta|\mathcal{C})$ свойства из определения УМО $\mathbb{E}(a\xi + b\eta|\mathcal{C})$.

Свойство измеримости: \mathcal{C} -измерима как линейная комбинация \mathcal{C} -измеримых.

Интегральное свойство: пусть $A \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((a\xi + b\eta)I_A) &= a\mathbb{E}(\xi I_A) + b\mathbb{E}(\eta I_A) = [\text{инт. св-во}] = \\ &= a\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})I_A) + b\mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta|\mathcal{C})I_A) = \mathbb{E}((a\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) + b\mathbb{E}(\eta|\mathcal{C}))I_A)\end{aligned}$$

3. Для всех (которых одно) УМО выполнены условия теоремы о существовании и единственности УМО. Так как \mathcal{C} – σ -алгебра подмножеств Ω , то $\Omega \in \mathcal{C}$, поэтому в силу интегрального свойства:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})I_\Omega) = \mathbb{E}(\xi I_\Omega) = \mathbb{E}\xi$$

4. Выполнены условия теоремы о существовании и единственности УМО. Проверим свойства из определения УМО.

Свойство измеримости для константы $\mathbb{E}\xi$, конечно, выполнено.

Интегральное свойство: пусть $A \in \mathcal{C}$. Тогда так как $\mathcal{F}_{I_A} = \sigma(A) \subset \mathcal{C}$, то просто по условию теоремы и по определению I_A и ξ независимы. Тогда:

$$\mathbb{E}(\xi I_A) = [\text{нез-сть}] = \mathbb{E}\xi \mathbb{E}I_A = \mathbb{E}((\mathbb{E}\xi)I_A)$$

5. Для всех УМО выполнены условия теоремы о существовании и единственности УМО.

Возьмём произвольное $A \in \mathcal{C}$. Тогда:

$$\begin{aligned}\xi \leq \eta &\Rightarrow \xi I_A \leq \eta I_A \Rightarrow \mathbb{E}(\xi I_A) \leq \mathbb{E}(\eta I_A) \Rightarrow [\text{инт. св-во УМО}] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbb{E}(\xi I_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})I_A) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta|\mathcal{C})I_A) = \mathbb{E}(\eta I_A)\end{aligned}$$

Получили, что $\forall A \in \mathcal{C} \quad \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})I_A) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta|\mathcal{C})I_A)$.

По свойству измеримости УМО $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})$ и $\mathbb{E}(\eta|\mathcal{C})$ \mathcal{C} -измеримы, тогда случайная величина $\mathbb{E}(\eta|\mathcal{C}) - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})$ тоже \mathcal{C} -измерима. Тогда $A := \{\mathbb{E}(\eta|\mathcal{C}) - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) < 0\} \in \mathcal{C}$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((\mathbb{E}(\eta|\mathcal{C}) - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}))I_A) &\geq 0 \quad (\text{т.к. } A \in \mathcal{C}) \\ \mathbb{E}((\mathbb{E}(\eta|\mathcal{C}) - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}))I_A) &\leq 0 \quad (\text{из опр-я } A) \\ \Downarrow \\ \mathbb{E}((\mathbb{E}(\eta|\mathcal{C}) - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}))I_A) &= 0\end{aligned}$$

$(\mathbb{E}(\eta|\mathcal{C}) - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}))I_A$ – неотрицательная случайная величина, имеющая нулевое матожидание. Тогда она почти наверное равна нулю, то есть A имеет нулевую вероятность. А это и означает, что $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) \leq \mathbb{E}(\eta|\mathcal{C})$ почти наверное.

6. Опять для всех УМО выполнены условия теоремы о существовании и единственности УМО. Так как $\xi \leq |\xi|$ и $-\xi \leq |\xi|$, то в силу предыдущего свойства:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) &\leq \mathbb{E}(|\xi| | \mathcal{C}) \text{ почти наверное} \\ -\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) &\leq \mathbb{E}(|\xi| | \mathcal{C}) \text{ почти наверное} \\ \Downarrow \\ |\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})| &= \max(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}), -\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})) \leq \mathbb{E}(|\xi| | \mathcal{C}) \text{ почти наверное} \end{aligned}$$

7. По третьему свойству (формула полной вероятности) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}_1)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}_2)) = \mathbb{E}\xi$, поэтому все эти матожидания конечны. Тогда для всех УМО выполнены условия теоремы о существовании и единственности УМО. Осталось проверить равенства.

- (а) Так как по свойству измеримости УМО $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}_1)$ \mathcal{C}_1 -измерима, $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$, то $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}_1)$ \mathcal{C}_2 -измерима, после чего всё следует из первого свойства.
- (б) Покажем, что $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}_1)$ удовлетворяет определению УМО $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}_2)|\mathcal{C}_1)$. $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}_1)$, конечно, \mathcal{C}_1 -измерима, теперь пусть $A \in \mathcal{C}_1$, проверим интегральное свойство:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}_2)I_A) &= [\text{инт. св-во, } A \in \mathcal{C}_2 \supset \mathcal{C}_1] = \mathbb{E}(\xi I_A) = \\ &= \mathbb{E}(\xi I_A) = [\text{инт. св-во, } A \in \mathcal{C}_1] = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}_1)I_A) \end{aligned}$$

□

4.7 Условное распределение

Замечание. Напоминание из курса теории вероятностей.

Определение 4.20. $\mathbb{E}(\xi|\eta) := \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_\eta)$ — условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно случайной величины η . Здесь \mathcal{F}_η — порождённая σ -алгебра случайной величины η .

Замечание. Свойства условного математического ожидания случайной величины ξ относительно σ -алгебры \mathcal{C} очевидным образом переносятся на этот случай.

Определение 4.21. Условным распределением случайной величины ξ относительно случайной величины η называется функция $P(B, y)$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $y \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая трём свойствам:

1. При фиксированном B функция $P(B, y)$ является борелевской функцией от y
2. При фиксированном y функция $P(B, y)$ является вероятностной мерой на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$
3. $\forall A, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \quad P(\xi \in B, \eta \in A) = \int_A P(B, y)P_\eta(dy)$

Обозначение: $P(\xi \in B|\eta = y) := P(B, y)$.

Теорема 4.7. (Существование и единственность условного распределения, б/д) При $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$ условное распределение $P(\xi \in B|\eta = y)$ существует и единственно, единственность можем утверждать P_η -почти наверное при каждом фиксированном B .

4.8 Оптимальные оценки

4.8.1 Достаточные статистики

Замечание. Пусть имеем несимметричную монетку с распределением $Bern(p)$. Пусть сделали 100 бросков и 53 раза выпала 1. Тогда, чтобы сделать вывод о неизвестном параметре p , нам нет необходимости хранить данные о всей выборке, достаточно статистики $\sum_{i=1}^n X_i = 53$.

Определение 4.22. Пусть X – выборка из неизвестного распределения $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$. Тогда статистика $T(X)$ называется достаточной для параметра θ , если условное распределение $P_\theta(X \in B | T(X) = t)$ не зависит от параметра θ .

К этому определению можно формально придраться, ведь условное распределение $P(\xi \in B | \eta = y)$ единственно, при $E\xi < \infty$, лишь P_η -п.н. Формальный ответ такой: существует вариант условного распределения, который не зависит от θ .

Замечание. Если статистики S и T находятся во взаимно однозначном соответствии и T достаточная, то S тоже достаточная.

При всей очевидности утверждения я затрудняюсь его аккуратно доказать.

Замечание. Достаточная статистика всегда существует, так как вся выборка X является достаточной статистикой.

Это уже нетрудно доказать на основе определения.

Теорема 4.8. (Нейман, Фишер) Пусть $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ – доминируемое семейство распределений, т.е. есть обобщённая плотность по мере μ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Статистика $T(X)$ является достаточной для параметра θ
2. Функция правдоподобия $f_\theta(X)$ представима в виде

$$f_\theta(X) = \psi(T(X), \theta) \cdot h(X)$$

Здесь ψ, h – неотрицательные функции, ψ измерима по T , h измерима по X . Так как неотрицательность и измеримость – часть требований к плотности, то по сути эти условия отвечают за то, что разложение плотности адекватно.

И так как плотность тоже определена неоднозначно, опять, существует вариант плотности, который представим в таком виде.

Замечание. Разложение функции правдоподобия из теоремы неоднозначно, например, $f_\theta(X) = \psi h = \frac{\psi}{5}(5h)$.

Доказательство. Для простоты проведём доказательство в дискретном случае.

$2 \Rightarrow 1$ Пусть X – выборка, x – конкретное значение той же размерности. Тогда распишем условное распределение, достаточно проверить его независимость от θ в конкретной точке x :

$$P_\theta(X = x | T(X) = t) = \frac{P_\theta(X = x, T(X) = t)}{P_\theta(T(X) = t)} = \begin{cases} 0, & T(X) \neq t, \\ \frac{P_\theta(X = x)}{P_\theta(T(X) = t)}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Подробнее распишем нижний случай, то есть $T(X) = t$:

$$\begin{aligned} P_\theta(X = x|T(X) = t) &= \frac{P_\theta(X = x)}{P_\theta(T(X) = t)} = \frac{P_\theta(X = x)}{\sum_{y: T(y)=t} P_\theta(X = y)} = \frac{f_\theta(x)}{\sum_{y: T(y)=t} f_\theta(y)} = \\ &= \frac{\psi(T(x), \theta) \cdot h(x)}{\sum_{y: T(y)=t} \psi(T(y), \theta) \cdot h(y)} = \frac{\psi(t, \theta) \cdot h(x)}{\sum_{y: T(y)=t} \psi(t, \theta) \cdot h(y)} = \frac{h(x)}{\sum_{y: T(y)=t} h(y)} \end{aligned}$$

Таким образом, действительно, получили независимость от θ :

$$P_\theta(X = x|T(X) = t) = \begin{cases} 0, & T(X) \neq t, \\ \frac{h(x)}{\sum_{y: T(y)=t} h(y)}, & \text{иначе} \end{cases}$$

1 \Rightarrow 2 Пусть $T(X)$ – достаточная статистика, то есть условная вероятность не зависит от θ :

$$P_\theta(X = x|T(X) = t) = H(x, t)$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} f_\theta(x) &= P_\theta(X = x) = P_\theta(X = x, T(X) = T(x)) = \\ &= P_\theta(T(X) = T(x)) \cdot P_\theta(X = x|T(X) = T(x)) = \\ &= P_\theta(T(X) = T(x))H(x, T(x)) = \psi(T(x), \theta)h(x) \end{aligned}$$

□

4.8.2 Улучшение оценок с помощью достаточных статистик

Теорема 4.9. (Колмогоров, Блэквелл, Рао, об улучшении несмещённой оценки) Пусть $T(X)$ – достаточная статистика для θ , $d(X)$ – несмещённая оценка для $\tau(\theta)$. Тогда $\mathbb{E}_\theta(d(X)|T(X))$ зависит от выборки только через T и не зависит от θ , тогда обозначим $\varphi(T(X)) = \mathbb{E}_\theta(d(X)|T(X))$ – статистика, при этом:

1. $\mathbb{E}_\theta \varphi(T(X)) = \tau(\theta)$
2. $D_\theta \varphi(T(X)) \leq D_\theta d(X)$, здесь дисперсии могут быть бесконечными.

Если $D_\theta d(X) < \infty$, то эквивалентны условия:

1. $D_\theta \varphi(T(X)) = D_\theta d(X)$
2. $\varphi(T(X)) = d(X)$ P_θ -п.н. $\forall \theta$
3. $d(X)$ является $T(X)$ -измеримой

Замечание. Из эквивалентных равенству условий равносильность $2 \Leftrightarrow 3$ очевидна. Действительно, $\varphi(T(X)) = d(X)$ P_θ -п.н. $\Leftrightarrow \mathbb{E}_\theta(d(X)|T(X)) = d(X)$ P_θ -п.н. $\Leftrightarrow d(X)$ является $T(X)$ -измеримой в силу определения и свойств условного математического ожидания.

Для всего остального нам потребуется лемма.

Лемма 4.2. *Далее используются обозначения L_1 и L_2 для пространств Лебега измеримых функций.*

$$1. \eta \in L_1 \Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta|\xi) - \mathbb{E}\eta)^2 \leq D\eta$$

$$2. \eta \in L_2 \Rightarrow (\text{Равенство достигается} \Leftrightarrow \eta = \mathbb{E}(\eta|\xi) \Leftrightarrow \eta - \xi\text{-измеримая})$$

Доказательство. Если $\eta \in L_1$, $\eta \notin L_2$, то $D\eta = \infty$ и доказывать нечего. Далее считаем, что $\eta \in L_2$. Равносильность $\eta = \mathbb{E}(\eta|\xi) \Leftrightarrow \eta - \xi$ -измеримая очевидна из свойств условного математического ожидания.

Обозначим $\zeta = \mathbb{E}(\eta|\xi)$. Запомним, что ζ ξ -измерима. Тогда, применяя неравенство Йенсена для выпуклой вниз функции $h(t) = t^2$, опуская слова почти наверное, получим:

$$\begin{aligned} \zeta^2 &= (\mathbb{E}(\eta|\xi))^2 = h(\mathbb{E}(\eta|\xi)) \leq \mathbb{E}(h(\eta)|\xi) = \mathbb{E}(\eta^2|\xi) \\ \mathbb{E}\zeta^2 &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta^2|\xi)) = \mathbb{E}\eta^2 \end{aligned}$$

Это нам нужно было только для того, чтобы понять, что $\zeta \in L_2$.

Далее идея состоит в следующем: добавим и вычтем в разность внутри дисперсии η случайную величину ζ , которая является частичным матожиданием η , потом раскроем, как сумму квадратов, и выясним, что удвоенное произведение занулится.

$$D\eta = \mathbb{E}(\eta - \mathbb{E}\eta)^2 = \mathbb{E}(\eta - \zeta + \zeta - \mathbb{E}\eta)^2 = \mathbb{E}(\eta - \zeta)^2 + \mathbb{E}(\zeta - \mathbb{E}\eta)^2 + 2\mathbb{E}(\eta - \zeta)(\zeta - \mathbb{E}\eta)$$

Заметим, что $\zeta - \mathbb{E}\eta$ ξ -измерима:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\eta - \zeta)(\zeta - \mathbb{E}\eta) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}[(\eta - \zeta)(\zeta - \mathbb{E}\eta)|\xi]) = \mathbb{E}((\zeta - \mathbb{E}\eta)\mathbb{E}(\eta - \zeta|\xi)) = \\ &= \mathbb{E}((\zeta - \mathbb{E}\eta)(\mathbb{E}(\eta|\xi) - \zeta)) = \mathbb{E}((\zeta - \mathbb{E}\eta)(\zeta - \zeta)) = 0 \end{aligned}$$

Получили, что $D\eta = \mathbb{E}(\eta - \zeta)^2 + \mathbb{E}(\zeta - \mathbb{E}\eta)^2$. Так как $\zeta = \mathbb{E}(\eta|\xi)$, то это мгновенно доказывает неравенство. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\mathbb{E}(\eta - \zeta)^2 = 0$, то есть $\eta = \zeta = \mathbb{E}(\eta|\xi)$. \square

Доказательство. Теорема об улучшении несмещённой оценки. $T(X)$ – достаточная статистика, то есть условное распределение $P_\theta(X \in B|T(X) = t)$ не зависит от θ . Тогда условное распределение $P_\theta(d(X) \in B|T(X) = t) = P_\theta(X \in d^{-1}(B)|T(X) = t)$, равенство проверяется непосредственно по определению, тоже не зависит от θ .

Теперь, во-первых, условное матожидание является функцией от статистики $T(X)$, $\mathbb{E}_\theta(d(X)|T(X)) = \varphi_\theta(T(X))$, что логично и следует из того, что условное матожидание $T(X)$ -измеримо. Так как условное распределение $P_\theta(d(X) \in B|T(X) = t)$ не зависит от θ , логично, что условное матожидание $\mathbb{E}_\theta(d(X)|T(X))$ не зависит от θ , формально, кажется, это совсем быстро не обосновывается, надо переходить к связям через индикаторы, которые я не включал в напоминалку, и доказывать равенство интегралов. Савёлов тут помахал руками, так что, полагаю, можно забить. Итог: $\mathbb{E}_\theta(d(X)|T(X)) = \varphi(T(X))$.

Далее проверим несмещённость:

$$\mathbb{E}_\theta d(X) = \tau(\theta) \Rightarrow \mathbb{E}_\theta \varphi(T(X)) = \mathbb{E}_\theta(\mathbb{E}_\theta(d(X)|T(X))) = \mathbb{E}_\theta d(X) = \tau(\theta)$$

Оставшиеся пункты непосредственно следуют из леммы, если взять в качестве случайных величин $\eta = d(X)$, $\xi = T(X)$. \square

Определение 4.23. Наилучшую оценку $\tau(\theta)$ в классе несмещённых оценок в равномерном подходе с квадратичной функцией потерь называют оптимальной оценкой.

Замечание. В одномерном случае поиск оптимальной оценки сводится к сравнению дисперсий, на многомерный случай обобщается через сравнение матриц ковариаций с помощью неотрицательной определённости, подробно не будем на этом останавливаться.

Определение 4.24. Статистика $S(X)$ называется полной для параметра θ , если для любой измеримой функции f выполнено следствие:

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \Theta \quad \mathbb{E}_\theta f(S(X)) &= 0 \\ \Downarrow \\ \forall \theta \in \Theta \quad f(S(X)) &= 0 \text{ } P_\theta\text{-п.н.} \end{aligned}$$

Здесь важно, что квантор по θ встречается до и после следствия.

Замечание. Грубо термин полнота появился из следующих соображений: если всегда $\int_{\mathcal{X}} f(S(X))p_\theta(X)dX = 0$, рассматриваем случай доминируемого семейства распределений, то есть $f(S(X))$ ортогональна всем плотностям, то она всегда нулевая. Но аналогия здесь далеко не абсолютная.

Теорема 4.10. (Лемана-Шеффера об оптимальной оценке) Пусть $T(X)$ – полная достаточная статистика для семейства распределений $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, $d(X)$ – несмещённая оценка для $\tau(\theta)$. Тогда $\varphi(T(X)) = \mathbb{E}_\theta(d(X)|T(X))$ – несмещённая оценка с равномерно наименьшей дисперсией для $\tau(\theta)$, про оптимальность пока не говорим, так как дисперсия может быть бесконечной. Если $D_\theta \varphi(T(X)) < \infty$, то $\varphi(T(X))$ – оптимальная оценка.

Замечание. То есть теорема Колмогорова-Блэквелла-Рао даёт не просто улучшение оценки, но ещё и её оптимальность.

Доказательство. Так как $\mathbb{E}_\theta \varphi(T(X)) = \mathbb{E}_\theta(\mathbb{E}_\theta(d(X)|T(X))) = \mathbb{E}d(X) = \tau(\theta)$, то оценка является несмещённой. Если $\tilde{d}(X)$ – другая несмещённая оценка, то по теореме Колмогорова-Блэквелла-Рао $\tilde{\varphi}(T(X)) = \mathbb{E}_\theta(\tilde{d}(X)|T(X))$ не хуже, а в случае конечной дисперсии строго лучше, оценки $\tilde{d}(X)$. То есть если докажем, что $\varphi(T(X)) = \tilde{\varphi}(T(X))$ P_θ -п.н. $\forall \theta \in \Theta$, то докажем теорему.

Обозначим $h(T(X)) = \varphi(T(X)) - \tilde{\varphi}(T(X))$, хотим доказать, что $h(T(X)) = 0$ P_θ -п.н.. Это является следствием полноты статистики $T(X)$, действительно:

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \Theta \quad \mathbb{E}_\theta h(X) &= \mathbb{E}_\theta \varphi(T(X)) - \mathbb{E}_\theta \tilde{\varphi}(T(X)) = \tau(\theta) - \tau(\theta) = 0 \\ \Downarrow \\ \forall \theta \in \Theta \quad h(T(X)) &= 0 \text{ } P_\theta\text{-п.н.} \end{aligned}$$

□

Следствие. Пусть $T(X)$ – полная достаточная статистика для семейства распределений $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, $\varphi(T(X))$ – несмещённая оценка для $\tau(\theta)$. Тогда $\varphi(T(X))$ – несмещённая оценка с равномерно наименьшей дисперсией для $\tau(\theta)$. Если $D_\theta \varphi(T(X)) < \infty$, то $\varphi(T(X))$ – оптимальная оценка.

Теорема 4.11. (Об экспоненциальном семействе, без доказательства) Пусть X – выборка из экспоненциального семейства распределений с обобщённой плотностью

$$p_{\theta}(x) = h(x) \exp \left(\sum_{i=1}^k a_i(\theta) T_i(x) + V(\theta) \right)$$

Если область значений вектор-функции $(a_1(\theta), \dots, a_k(\theta))$ содержит k -мерный параллелепипед в \mathbb{R}^k , то

$$T(X) = \left(\sum_{j=1}^n T_1(X_j), \dots, \sum_{j=1}^n T_k(X_j) \right)$$

является полной достаточной статистикой для параметра θ .

Замечание. k -мерный параллелепипед можно заменить на открытое множество, так как одно всегда содержит второе и наоборот.

Замечание. Алгоритм поиска оптимальной оценки:

1. Ищем достаточную статистику $T(X)$.
2. Проверяем на полноту, если экспоненциальное семейство распределений, то всё хорошо, иначе, кажется, грустить и проверять по определению.
3. Если полная, то решаем уравнение несмещённости, подбирая g :

$$\mathbb{E}_{\theta} g(T(X)) = \tau(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta$$

4. Если $D_{\theta} g(T(X)) < \infty$, то $g(T(X))$ – оптимальная оценка.

Замечание. Причём, по-хорошему, для конечности дисперсии достаточно одного θ , так как знаем, что при всех остальных θ оценка не хуже.

5 Доверительные интервалы

5.1 Общие определения

Определение 5.1. Пусть X – выборка из неизвестного распределения $P \in \{P_{\theta}, \theta \in \Theta\}$. Пара статистик $(T_1(X), T_2(X))$ называется доверительным интервалом уровня доверия γ для параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, если:

$$\forall \theta \in \Theta \quad P_{\theta}(T_1(X) < \theta < T_2(X)) \geq \gamma$$

Если равенство достигается при всех $\theta \in \Theta$, то доверительный интервал называется точным.

Замечание. На практике обычно используют $\gamma = 0.9, 0.95, 0.99$. Иногда удобно использовать односторонние доверительные интервалы $(-\infty, T_2(X))$ или $(T_1(X), +\infty)$. В случае многомерного $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ можно аналогично определить понятие доверительного интервала для компонент θ_i вектора $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$. И во всех случаях можно обобщить понятие доверительного интервала на скалярные (действующие в \mathbb{R}) функции $\tau(\theta)$.

Определение 5.2. Пусть X – выборка из неизвестного распределения $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$. Множество $S(X)$ называется доверительным множеством уровня доверия γ для параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$, если:

$$\forall \theta \in \Theta \quad P_\theta(\theta \in S(X)) \geq \gamma$$

5.2 Метод центральной статистики

Пример. Пусть X_1, \dots, X_n – выборка из нормального распределения $N(\theta, 1)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Хотим построить доверительный интервал для параметра θ уровня доверия γ . Заметим, что из свойств нормального распределения:

$$\bar{X} \sim N\left(\theta, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \sqrt{n}(\bar{X} - \theta) \sim N(0, 1)$$

Обозначим u_p – p -квантиль $N(0, 1)$. Тогда:

$$\forall \theta \in \Theta \quad P\left(u_{\frac{1-\gamma}{2}} < \sqrt{n}(\bar{X} - \theta) < u_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \gamma$$

$$\forall \theta \in \Theta \quad P\left(-u_{\frac{1+\gamma}{2}} < \sqrt{n}(\bar{X} - \theta) < u_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \gamma$$

$$\forall \theta \in \Theta \quad P\left(\bar{X} - \frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} + \frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

$$\left(\bar{X} - \frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\right) - \text{точный ДИ у.д. } \gamma$$

Эту конструкцию можно обобщить.

Определение 5.3. Пусть X – выборка из неизвестного распределения $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$. Пусть существует известная функция $G(X, \theta)$ такая, что её распределение не зависит от параметра θ . Такая функция G называется центральной статистикой.

Отметим, что G не является статистикой в обычном понимании слова, ибо зависит от параметра θ . Но название, видимо, устоялось. То есть центральная статистика не очень центральная и не очень статистика.

Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1)$ такие, что $\gamma_2 - \gamma_1 = \gamma$. Пусть g_1, g_2 – γ_1 и γ_2 -квантили распределения $G(X, \theta)$. Тогда, аккуратно поясним ниже, выполнено:

$$\forall \theta \in \Theta \quad P_\theta(g_1 \leq G(X, \theta) \leq g_2) \geq \gamma_2 - \gamma_1 = \gamma$$

Введём обозначение $S(X) = \{\theta \in \Theta : g_1 \leq G(X, \theta) \leq g_2\}$. Тогда для любого $\theta \in \Theta$ имеем $P_\theta(\theta \in S(X)) = P_\theta(g_1 \leq G(X, \theta) \leq g_2) \geq \gamma$, то есть $S(X)$ – доверительное множество уровня доверия γ .

Замечание. Поясним здесь неравенство для квантилей, в случае непрерывных распределений оно очевидно и вырождается в равенство, иначе вызывает вопросы. По определению квантилей:

$$g_\gamma = \inf\{x : F(x) \geq \gamma\} = \min\{x : F(x) \geq \gamma\}$$

Здесь F – функция распределения, инфимум достигается, так как F непрерывна справа.

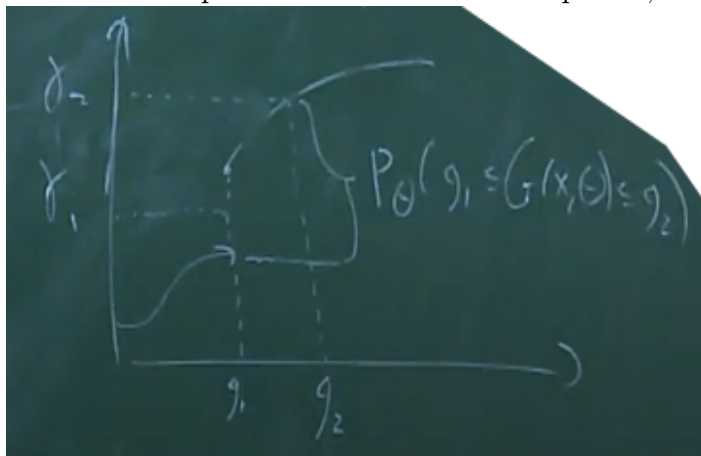
Тогда, используя обозначение $F(x-0)$ для предела слева в точке x , получим:

$$\begin{aligned} F(g_\gamma) &\geq \gamma \\ F(g_\gamma - \varepsilon) < \gamma &\Rightarrow F(g_\gamma - 0) \leq \gamma \end{aligned}$$

Отсюда уже выводим неравенство:

$$P_\theta(g_1 \leq G(X, \theta) \leq g_2) = P(G \leq g_2) - P(G < g_1) = F(g_2) - F(g_1 - 0) \geq \gamma_2 - \gamma_1$$

Замечание. Неравенство может быть строгим, например:



Замечание. Квантили g_1 и g_2 можно найти в статистических таблицах, либо с помощью функций из некоторых библиотек, их вычисляющих.

Замечание. Не всегда центральную статистику можно найти методом пристального взгляда. Для таких случаев есть полезный результат.

Лемма 5.1. Пусть X_1, \dots, X_n – независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения $F(x)$, $F(x)$ непрерывна. Тогда имеет место распределение:

$$G(X_1, \dots, X_n) = - \sum_{i=1}^n \ln F(X_i) \sim \Gamma(1, n)$$

Доказательство.

$$\triangleright F(X_i) \sim U[0, 1]$$

Если функция распределения строго монотонна, в таком случае, с учётом непрерывности, она биективно отображает \mathbb{R} на $(0, 1)$, то доказательство простое:

$$\forall y \in (0, 1) \quad P(F(X_i) \leq y) = P(X_i \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$$

И получилось, что функция распределения $F(X_i)$ совпадает с функцией распределения $U[0, 1]$. В общем случае это рассуждение нужно немного пофиксить:

$$\forall y \in (0, 1) \quad P(F(X_i) \leq y) = P(X_i \leq \max\{x : F(x) \leq y\}) = F(\max\{x : F(x) \leq y\}) = y$$

Максимум достигается в силу того, что функция распределения непрерывна.

▷ $-\ln U[0, 1] \sim \text{Exp}(1)$

Пусть $\xi \sim U[0, 1]$, тогда:

$$\begin{aligned} \forall y > 0 \quad P(-\ln \xi \leq y) &= P(\xi \geq e^{-y}) = 1 - P(\xi < e^{-y}) = [e^{-y} \in (0, 1)] = 1 - e^{-y} \\ P(-\ln \xi \leq y) &= (1 - e^{-y})I\{y > 0\} \end{aligned}$$

Получили в точности функцию распределения $\text{Exp}(1)$.

▷ $G(X_1, \dots, X_n) \sim \Gamma(1, n)$

Применим накопленные знания, воспользовавшись также формулой для суммы независимых гамма-распределений:

$$G(X_1, \dots, X_n) = -\sum_{i=1}^n \ln F(X_i) \sim -\sum_{i=1}^n \ln U[0, 1] \sim \sum_{i=1}^n \text{Exp}(1) \sim \sum_{i=1}^n \Gamma(1, 1) \sim \Gamma(1, n)$$

□

Следствие. Если X_1, \dots, X_n – выборка из неизвестного распределения $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, причём для всех $\theta \in \Theta$ функция распределения $F_\theta(x)$ непрерывна по x , то $G(X_1, \dots, X_n, \theta) = -\sum_{i=1}^n \ln F_\theta(X_i)$ является центральной статистикой.

5.3 Асимптотические доверительные интервалы

Определение 5.4. Пусть $(X_n, n \geq 1)$ – выборка неограниченного размера из неизвестного распределения $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$. Последовательность пар статистик

$$(T_n^{(1)}(X_1, \dots, X_n), T_n^{(2)}(X_1, \dots, X_n))$$

называется асимптотическим доверительным интервалом уровня доверия γ для неизвестного параметра θ , если

$$\forall \theta \in \Theta \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(T_n^{(1)}(\dots) < \theta < T_n^{(2)}(\dots)) \geq \gamma$$

Если при этом

$$\forall \theta \in \Theta \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(T_n^{(1)}(\dots) < \theta < T_n^{(2)}(\dots)) = \gamma$$

то асимптотический доверительный интервал называют точным.

Замечание. Нижний предел взяли из тех соображений, что обычный предел может не существовать, в том числе тогда, когда интервал с хорошей вероятностью оценивает параметр. В случае точного АДИ уже разумно брать обычный предел.

Замечание. Асимптотический доверительный интервал можно построить с помощью асимптотически нормальной оценки. Пусть $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ – асимптотически нормальная оценка θ с асимптотической дисперсией $\sigma^2(\theta) > 0$, то есть:

$$\begin{aligned} \forall \theta \quad \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) &\xrightarrow{d_\theta} N(0, \sigma^2(\theta)) \\ \forall \theta \quad \sqrt{n} \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\theta)} &\xrightarrow{d_\theta} N(0, 1) \end{aligned}$$

Стандартно обозначим u_γ – γ -квантиль $N(0, 1)$, тогда в силу сходимости по распределению и того, что у $N(0, 1)$ функция распределения всюду непрерывна, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta \left(-u_{\frac{1+\gamma}{2}} < \sqrt{n} \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\theta)} < u_{\frac{1+\gamma}{2}} \right) = P_\theta \left(-u_{\frac{1+\gamma}{2}} < N(0, 1) < u_{\frac{1+\gamma}{2}} \right) = \gamma$$

Отсюда хочется выразить асимптотический доверительный интервал для θ , но есть одна проблема: знаменатель $\sigma(\theta)$ зависит от θ , поэтому просто выразить не получится. Исправим это, заменив $\sigma(\theta)$ на что-то, зависящее от выборки.

Пусть $\sigma(\theta)$ непрерывна по θ . Из асимптотической нормальности оценки следует её состоятельность, поэтому $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P_\theta} \theta$ и в силу теоремы о наследовании сходимости $\sigma(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{P_\theta} \sigma(\theta)$. Тогда по лемме Slutsky:

$$\forall \theta \quad \sqrt{n} \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\hat{\theta}_n)} = \sqrt{n} \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\theta)} \cdot \frac{\sigma(\theta)}{\sigma(\hat{\theta}_n)} \xrightarrow{d_\theta} N(0, 1) \cdot 1 = N(0, 1)$$

В таком случае, в соответствии с рассуждениями выше, можем получить асимптотический доверительный интервал для θ уровня доверия γ :

$$\left(\hat{\theta}_n - u_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma(\hat{\theta}_n)}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n + u_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma(\hat{\theta}_n)}{\sqrt{n}} \right)$$

5.4 Метод максимального правдоподобия

Определение 5.5. Пусть X – выборка размера 1 из распределения $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, а семейство распределений $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ доминируемо относительно меры μ . Тогда функцией правдоподобия называется

$$f_\theta(X) = p_\theta(X)$$

Здесь $p_\theta(X)$ – плотность P_θ по мере μ . Важно, что функцию правдоподобия мы рассматриваем как функцию от θ при фиксированном X , а не наоборот. Функция правдоподобия, разумеется, не обязана быть вероятностной мерой на Θ , это просто какая-то функция.

Пример. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ – выборка из распределения $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, семейство распределений $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ доминируемо относительно меры μ . Тогда функцией правдоподобия является

$$f_\theta(X) = \prod_{i=1}^n p_\theta(X_i)$$

Действительно, если рассматривать X как случайный вектор из многомерного распределения, то именно функция $\prod_{i=1}^n p_\theta(x_i)$ будет плотностью этого распределения, что легко выводится из теоремы Фубини-Тонелли.

Определение 5.6. Пусть X – выборка с функцией правдоподобия $f_\theta(X)$. Оценкой параметра θ по методу максимального правдоподобия (ОМП) называется такая статистика $\hat{\theta}(X)$, что

$$\hat{\theta}(X) = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} f_\theta(X)$$

Замечание. Заметим, что в определении через термин статистика сразу закладываем

измеримость. Соответственно, проблемы могут заключаться в том, что $\arg\max$ может не существовать, быть не единственным, и не очевидна измеримость полученной функции.

Пример. Пусть есть монетка с распределением $Bern(p)$, причём известно что p является одним из двух значений $p_1 = \frac{1}{9}$ или $p_2 = \frac{7}{8}$. Пусть есть выборка из трёх бросков монетки, запишем в виде 110. Тогда посмотрим на вероятность такого события в случае разных p :

$$\begin{aligned} p_1: P_{p_1}(110) &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{9} \\ p_2: P_{p_2}(110) &= \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Во втором случае вероятность больше, то есть вторая модель более правдоподобна, гораздо лучше предсказывает то, что произошло в реальности. В этом и заключается идея оценки максимального правдоподобия.

Пример. Пусть есть выборка $X_1, \dots, X_n \sim U[0, \theta]$. Правдоподобие в таком случае имеет вид:

$$f_\theta(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^n I\{0 \leq X_i \leq \theta\} = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^n I\{0 \leq X_{(1)} \leq X_{(n)} \leq \theta\}$$

Тогда ОМП есть $\hat{\theta}(X) = X_{(n)}$.

Замечание. Ту теорию, которую будем дальше развивать в этом разделе, можно также посмотреть в книге: Леман Теория точечного оценивания.

Определение 5.7. Пусть $f_\theta(X)$ – функция правдоподобия, тогда $L_\theta(X) = \ln f_\theta(X)$ называется логарифмической функцией правдоподобия. Так как плотность принимает значение ноль на элементах выборки с нулевой вероятностью, ибо интеграл от нуля равен нулю, то можем брать логарифм.

Определение 5.8. Нам вновь понадобятся условия регулярности. На этот раз их будет больше. Опять, сначала сформулируем, потом дадим пояснения.

- (R0) $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ – параметрическое семейство распределений, доминируемое относительно меры μ , $P_{\theta_1} \neq P_{\theta_2}$ при $\theta_1 \neq \theta_2$. Для всех θ обозначим $p_\theta(x)$ – плотность P_θ относительно меры μ .
- (R1) Множество $A = \{x \in \mathcal{X}: p_\theta(x) > 0\}$ не зависит от θ , A называется носителем.
- (R2) X есть выборка из неизвестного распределения $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$.
- (R3) Θ – открытый интервал, возможно, бесконечный.
- (R4) Функция $p_\theta(x)$ непрерывно дифференцируема по θ при всех $x \in A$.
- (R5) Функция $p_\theta(x)$ трижды непрерывно дифференцируема по θ при всех $x \in A$.
- (R6) Интеграл $\int_A p_\theta(x) \mu(dx)$ трижды дифференцируем по θ под знаком интеграла.
- (R7) Информация Фишера $i(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X_1) \right)^2 \in (0, +\infty)$

(R8) $\forall \theta_0 \in \Theta \exists c > 0 \exists H(x) \forall \theta \in (\theta_0 - c, \theta_0 + c) \forall x \in A$ выполнено:

$$\left| \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \ln p_\theta(x) \right| \leq H(x)$$

$$\mathbb{E}_{\theta_0} H(X_1) < \infty$$

Замечание. Комментарии к некоторым условиям регулярности, те пояснения, которые были к условиям регулярности для эффективных оценок, дублировать не буду:

(R0) Требование $P_{\theta_1} \neq P_{\theta_2}$ при $\theta_1 \neq \theta_2$ важно в следующем смысле, например, имеем семейство распределений $Bern(\theta^2)$ и поняли, что $\theta^2 = \frac{1}{4}$, откуда никак не сможем сделать вывод о том, чему равно θ , $\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$.

(R2) Просто зафиксировали выборку.

(R5) Условие (R5), конечно, сильнее условия (R4), оба нужны, потому что в разных теоремах будут предполагаться разные условия регулярности. Сначала будут использоваться (R0)-(R2), как самые базовые, в которых осмыслено работать. Затем захотим дифференцировать по θ , будем жить в условиях (R0)-(R4). Затем потребуется раскладывать функцию по формуле Тейлора до некоторого порядка, будут использоваться все условия (R0)-(R8).

(R6) Полагаю, смысл следующий, дифференцируемость подинтегральных функций знаем из предыдущего пункта, здесь утверждение в том, что существуют конечные интегралы $\int_A p_\theta(x) \mu(dx)$, $\int_A \frac{\partial}{\partial \theta} p_\theta(x) \mu(dx)$, $\int_A \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p_\theta(x) \mu(dx)$, $\int_A \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} p_\theta(x) \mu(dx)$.

(R8) Здесь Савёлов сказал, что смысл станет понятен при доказательстве соответствующей теоремы, которую потом доказывать не стал. Тем не менее, сейчас некоторую интуицию для этого условия я приведу.

Напоминание. (Теорема о непрерывности собственного интеграла по параметру) Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^m$ — измеримые множества и задана функция $f: E \times A \rightarrow \mathbb{R}$. Если наложены следующие условия:

1. Для любого $\alpha \in A$ функция $f(x, \alpha)$ измерима на E
2. Почти всюду на E выполнено $|f(x, \alpha)| \leq \varphi(x)$, где $\varphi \in L_1(E)$
3. Почти всюду на E имеет место сходимость $f(x, \alpha) \rightarrow f(x, \alpha_0)$ при $\alpha \rightarrow \alpha_0$, $\alpha \in A$

Тогда интеграл $\int_E f(x, \alpha) d\mu(x)$ непрерывен в точке α_0 , то есть имеется предел:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_E f(x, \alpha) d\mu(x) = \int_E f(x, \alpha_0) d\mu(x)$$

Замечание. Теперь поймём смысл (R8). Выведем из похожего условия (RR8), которое будет сформулировано ниже, в условиях регулярности (R0)-(R4) и (R7) непрерывность информации Фишера $i(\theta)$.

Рассмотрим произвольную точку $\theta_0 \in \Theta$, хотим в ней доказать непрерывность функции:

$$i(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X_1) \right)^2 = \int_A \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(x) \right)^2 p_\theta(x) d\mu(x)$$

Рассмотрим последний интеграл в некоторой окрестности $(\theta_0 - c, \theta_0 + c)$ точки θ_0 , чтобы доказать непрерывность в θ_0 , остальные θ нам не интересны. Хотим применить для множества $A \times (\theta_0 - c, \theta_0 + c)$, рассматривается $x \in A$, $\theta \in (\theta_0 - c, \theta_0 + c)$, и функции на нём $\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(x)\right)^2 p_\theta(x)$, теорему о непрерывности собственного интеграла по параметру, тогда получим в точности то, что хотим.

Измеримость функции $\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(x)\right)^2 p_\theta(x)$ как функции от x следует из того, что интеграл по ней, то есть информация Фишера, в силу (R7) существует и конечен. Непрерывность этой функции по θ следует из того, что в силу (R4) $p_\theta(x)$ непрерывно дифференцируема по θ . Осталось мажорировать интегрируемую функцию, для этого сформулируем условие (RR8):

(RR8) $\forall \theta_0 \in \Theta \exists c > 0 \exists H(x) \forall \theta \in (\theta_0 - c, \theta_0 + c) \forall x \in A$ выполнено:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(x)\right)^2 p_\theta(x) &\leq H(x) \\ \int_A H(x) \mu(dx) &< \infty \end{aligned}$$

Применяем теорему о непрерывности собственного интеграла по параметру, получаем, что информация Фишера $i(\theta)$ непрерывна в произвольной точке θ_0 , значит, непрерывна. Запомним этот факт, он нам ещё пригодится.

Теперь сравним условия (R8) и (RR8):

(R8) $\forall \theta_0 \in \Theta \exists c > 0 \exists H(x) \forall \theta \in (\theta_0 - c, \theta_0 + c) \forall x \in A$ выполнено:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \ln p_\theta(x) \right| &\leq H(x) \\ \mathbb{E}_{\theta_0} H(X_1) &< \infty \end{aligned}$$

(RR8) $\forall \theta_0 \in \Theta \exists c > 0 \exists H(x) \forall \theta \in (\theta_0 - c, \theta_0 + c) \forall x \in A$ выполнено:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(x)\right)^2 p_\theta(x) &\leq H(x) \\ \int_A H(x) \mu(dx) &< \infty \end{aligned}$$

В (R8) также мажорируется некоторая функция, конкретно, третья производная логарифмического правдоподобия, но рассматривается не интеграл от мажоранты, не зависящий от θ , а интеграл от мажоранты по конкретной плотности, плотности меры P_{θ_0} . Соответственно, беглый просмотр того доказательства, которое в этот раз не приводилось и в котором использовалось условие (R8) показал, что это условие там использовалось совершенно не так, как применялось здесь.

Теорема 5.1. (Экстремальное свойство правдоподобия) Пусть выполнены условия регулярности (R0)-(R2). Тогда

$$\forall \theta_0, \theta \in \Theta, \theta_0 \neq \theta \quad P_{\theta_0}(f_{\theta_0}(X_1, \dots, X_n) > f_\theta(X_1, \dots, X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Замечание. В чём смысл теоремы: настоящий параметр θ_0 становится правдоподобнее любого конкурента θ , если увеличивать размер выборки.

Лемма 5.2. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ – независимые одинаково распределённые случайные величины. Пусть $\mathbb{E}\xi_1 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}\xi_1.$$

Доказательство. Если $\mathbb{E}\xi_1$ конечно, то утверждение непосредственно следует из УЗБЧ. Рассмотрим случай $\mathbb{E}\xi_1 = +\infty$, случай $\mathbb{E}\xi_1 = -\infty$ рассматривается аналогично. Возьмём срезки от случайных величин $\xi_{n,[N]} = \min(\xi_n, N)$, тогда $\xi_{n,[N]}$ – независимые одинаково распределённые случайные величины, $-\infty < \mathbb{E}\xi_{1,[N]} \leq N < +\infty$. В силу УЗБЧ:

$$\frac{S_{n,[N]}}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}\xi_{1,[N]}$$

Теперь, применяя, что $\mathbb{E}\xi_{1,[N]} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$, так как $\mathbb{E}\xi_1 = +\infty$, получим:

$$\frac{S_n}{n} \geq \frac{S_{n,[N]}}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}\xi_{1,[N]} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$$

В целом, уже всё доказали, формально доводится следующим образом:

$$\begin{aligned} \forall K \in \mathbb{N} \quad P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \geq K\right) &= 1 \\ P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = +\infty\right) &= P\left(\bigcap_{K=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \geq K\right) = \lim_{K \rightarrow \infty} P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \geq K\right) = 1 \end{aligned}$$

Совсем просто сделать нельзя, так как множества для сходимости почти наверное могут отличаться для разных N . \square

Доказательство. (теоремы об экстремальном свойстве правдоподобия) Зафиксируем параметры $\theta_0 \neq \theta$. Можем считать, что все элементы выборки $X_1, \dots, X_n \in A$, т.е. имеют ненулевую плотность. Имеем на это право, ибо такое выполнено почти наверное для всех $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$:

$$P(\forall i \in \mathbb{N} \ X_i \in A) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \{X_i \in A\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in A\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Хотим доказать, что $P_{\theta_0}(f_{\theta_0}(X_1, \dots, X_n) > f_\theta(X_1, \dots, X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Можем переписать неравенство для функций правдоподобия в виде, к которому можно будет применить доказанную только что лемму об обобщённом УЗБЧ, здесь пользуемся тем, что плотность

не равна нулю:

$$\begin{aligned}
 f_{\theta_0}(X_1, \dots, X_n) &> f_{\theta}(X_1, \dots, X_n) \\
 \Updownarrow \\
 \ln \frac{f_{\theta}(X_1, \dots, X_n)}{f_{\theta_0}(X_1, \dots, X_n)} &< 0 \\
 \Updownarrow \\
 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{f_{\theta}(X_i)}{f_{\theta_0}(X_i)} &< 0
 \end{aligned}$$

Далее хотим показать, что $-\infty \leq \mathbb{E}_{\theta_0} \ln \frac{f_{\theta}(X_1)}{f_{\theta_0}(X_1)} < 0$. Если это так, то всё доказано, Савёлов это подробнее не обосновывал, мы распишем аккуратнo, действительно, по лемме:

$$\begin{aligned}
 P_{\theta_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{f_{\theta}(X_i)}{f_{\theta_0}(X_i)} = \mathbb{E}_{\theta_0} \ln \frac{f_{\theta}(X_1)}{f_{\theta_0}(X_1)} \right) &= 1 \\
 P_{\theta_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{f_{\theta}(X_i)}{f_{\theta_0}(X_i)} < 0 \right) &= 1 \\
 P_{\theta_0} \left(\exists N \forall n \geq N \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{f_{\theta}(X_i)}{f_{\theta_0}(X_i)} < 0 \right) &= 1 \\
 P_{\theta_0} \left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{f_{\theta}(X_i)}{f_{\theta_0}(X_i)} < 0 \right\} \right) &= 1
 \end{aligned}$$

И отсюда получаем требуемую предельную вероятность:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_0}(f_{\theta_0}(X_1, \dots, X_n) > f_{\theta}(X_1, \dots, X_n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_0} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{f_{\theta}(X_i)}{f_{\theta_0}(X_i)} < 0 \right) \geq \\
 \geq \lim_{N \rightarrow \infty} P_{\theta_0} \left(\bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{f_{\theta}(X_i)}{f_{\theta_0}(X_i)} < 0 \right\} \right) &= P_{\theta_0} \left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{f_{\theta}(X_i)}{f_{\theta_0}(X_i)} < 0 \right\} \right) = 1
 \end{aligned}$$

Осталось доказать, что $\mathbb{E}_{\theta_0} \ln \frac{f_{\theta}(X_1)}{f_{\theta_0}(X_1)} < 0$. Для этого вспомним факт из математического анализа: $\ln(1+x) \leq x$ при всех $x > -1$, равенство достигается только при $x = 0$. Дальнейшее доказательство будет состоять из серии хитрых и не очень преобразований:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\theta_0} \ln \frac{f_{\theta}(X_1)}{f_{\theta_0}(X_1)} &= \int_A \ln \frac{p_{\theta}(x)}{p_{\theta_0}(x)} p_{\theta_0}(x) \mu(dx) = \int_A \ln \left(1 + \frac{p_{\theta}(x)}{p_{\theta_0}(x)} - 1 \right) p_{\theta_0}(x) \mu(dx) \leq \\
 &\leq \int_A \left(\frac{p_{\theta}(x)}{p_{\theta_0}(x)} - 1 \right) p_{\theta_0}(x) \mu(dx) = \int_A (p_{\theta}(x) - p_{\theta_0}(x)) \mu(dx) = 1 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

Пока доказали нестрогую версию неравенства, $\mathbb{E}_{\theta_0} \ln \frac{f_{\theta}(X_1)}{f_{\theta_0}(X_1)} \leq 0$, но равенство может быть лишь в случае $\frac{p_{\theta}(x)}{p_{\theta_0}(x)} - 1 = 0$ μ -п.н. $\Leftrightarrow p_{\theta}(x) = p_{\theta_0}(x)$ μ -п.н., то есть $P_{\theta_0} = P_{\theta}$, тогда $\theta = \theta_0$ в силу одного из условий регулярности, что невозможно в силу выбора $\theta \neq \theta_0$. \square

Следствие. В условиях регулярности (R0)-(R2), если Θ – конечное множество, то есть $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_s\}$, то оценка максимального правдоподобия существует, единственна с вероятностью, стремящейся к 1, при этом она состоятельна.

Доказательство. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ – выборка из распределения P_{θ_k} , в силу теоремы об экстремальном свойстве правдоподобия и конечности множества Θ выполнено:

$$P_{\theta_k}(f_{\theta_k}(X) > f_{\theta_m}(X) \quad \forall m \neq k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Договоримся, что если на нескольких θ_i правдоподобие одинаково, то в качестве оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}(X)$ возьмём из них θ_i с наименьшим номером i . Докажем измеримость полученной функции от выборки, откуда получим существование ОМП. Для этого проверим измеримость множеств $\{X: \hat{\theta}(X) = \theta_i\}$. Действительно:

$$\{X: \hat{\theta}(X) = \theta_i\} = \bigcap_{j=1}^{i-1} \{X: f_{\theta_j}(X) < f_{\theta_i}(X)\} \cap \bigcap_{j=i+1}^s \{X: f_{\theta_j}(X) \leq f_{\theta_i}(X)\}$$

Так как функции правдоподобия измеримы, то все множества из пересечений справа измеримы, следовательно, множество слева тоже измеримо. Единственность с вероятностью, стремящейся к единице, следует из того, что со стремящейся к единице вероятностью правдоподобие для θ_k будет строго больше остальных.

Состоятельность тоже проверяется без особого труда:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\hat{\theta}(X) - \theta_k\right| > \varepsilon\right) \leq P\left(\hat{\theta}(X) \neq \theta_k\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

Определение 5.9. Пусть выполнены условия регулярности (R0)-(R4). Уравнением правдоподобия называется уравнение относительно θ в одной из двух следующих эквивалентных форм:

$$\frac{\partial \ln f_{\theta}(X)}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f_{\theta}(X)}{\partial \theta} = 0$$

Замечание. В формулировку следующей теоремы в деталях лучше вникнуть после того, как будет изучено её доказательство, она так воспринимается гораздо проще.

Замечание. В следующей теореме нам потребуется внешняя мера. Она нам будет нужна лишь как аналог меры, который гарантированно существует для всех множеств, не обязательно измеримых, но для общей картины напомним, что это.

Пусть \mathcal{A} – алгебра подмножеств X , μ – счётно-аддитивная мера на ней, тогда для всех множеств $E \subset X$ определим внешнюю меру μ^* как:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) : A_j \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\}$$

Напомним свойства внешней меры:

1. $\mu^*(E) = \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$
2. $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) \quad \forall A \subset B$

$$3. \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

Далее эта конструкция использовалась следующим образом: из свойств 1 и 3 следует, что $\mu(X) = \mu^*(X) \leq \mu^*(E) + \mu^*(X \setminus E)$, исходя из этого множество E называлось измеримым, если $\mu(X) = \mu^*(E) + \mu^*(X \setminus E)$, это давало продолжение меры μ на некоторую σ -алгебру подмножеств X .

Теорема 5.2. (Аналог состоятельности ОМП) Пусть выполнены условия регулярности (R0)-(R4). Пусть элементы выборки X имеют распределение P_{θ_0} . Тогда существует отображение $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n, \theta_0)$ со значениями в Θ , такое, что:

$$(P_{\theta_0})^*(\hat{\theta}_n \text{ не решение уравнения правдоподобия}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (P_{\theta_0})^*(|\hat{\theta}_n - \theta_0| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Доказательство.

- ▷ Сначала разберёмся с тем, что за зверь такой $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n, \theta_0)$. Идея состоит в следующем: решений уравнения правдоподобия может быть много, оценка максимального правдоподобия, если она есть, также является решением этого уравнения, но обратное неверно. Хотим посмотреть, есть ли среди решений что-то хорошее, если знаем ответ – истинное значение параметра θ_0 .

Определим $\hat{\theta}_n$. Зафиксируем выборку $X = (X_1, \dots, X_n)$ из множества A , можем так считать, так как то, что вся выборка попала во множество A выполнено с единичной вероятностью.

Если у уравнения правдоподобия $\frac{\partial \ln f_{\theta}(X)}{\partial \theta} = 0$ есть хотя бы один корень θ , то выберем ближайший к θ_0 корень и обзовём его $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n, \theta_0)$. Допускается, что этим корнем может быть сам θ_0 . Существование ближайшего осмыслено, ибо в силу непрерывной дифференцируемости $f_{\theta}(X)$ предел последовательности корней также является корнем, так что если ближайшего нет, то θ_0 сам является корнем, то есть ближайший всё-таки есть.

Если у уравнения правдоподобия нет корней, то определим $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n, \theta_0) = \theta_0$. Таким образом, получилась некоторая функция $\hat{\theta}_n$. Вообще не факт, что она измеримая, поэтому нам и понадобится внешняя мера $(P_{\theta_0})^*$.

- ▷ Теперь зафиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что $(\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon) \subset \Theta$, в силу открытости Θ можем так сделать. Рассмотрим $S_n(\theta_0, \varepsilon) = \{X: f_{\theta_0 - \varepsilon}(X) < f_{\theta_0}(X) > f_{\theta_0 + \varepsilon}(X)\}$. Чем это множество интересно: на нём во внутренней точке $(\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$ будет достигаться локальный максимум в силу непрерывности функции правдоподобия $f_{\theta}(X)$, тогда в окрестности $(\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$ точки θ_0 будет решение уравнения правдоподобия.



Итак, зафиксировали $\varepsilon > 0$ такое, что $(\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon) \subset \Theta$, рассматриваем множество $S_n(\theta_0, \varepsilon) = \{X: f_{\theta_0 - \varepsilon}(X) < f_{\theta_0}(X) > f_{\theta_0 + \varepsilon}(X)\}$. В силу условий регулярности (R0)-(R2) и результата теоремы об экстремальном свойстве правдоподобия выполнено $P_{\theta_0}(S_n(\theta_0, \varepsilon)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. При этом в силу уже проведённых рассуждений для $X \in S_n(\theta_0, \varepsilon)$ на $(\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$ существует локальный максимум, то есть корень уравнения правдоподобия, правда, не обязательно один и не обязательно там нет локальных минимумов. Но в любом случае выполнено:

$$\begin{aligned} \forall X \in S_n(\theta_0, \varepsilon) \quad \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n, \theta_0) &- \text{корень уравнения правдоподобия} \\ \forall X \in S_n(\theta_0, \varepsilon) \quad \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n, \theta_0) &\in (\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon) \\ P_{\theta_0}(S_n(\theta_0, \varepsilon)) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

Применим неравенство для внешних мер, переход к внешним мерам происходит потому, что не убеждены в измеримости соответствующих множеств, получим то, что требовалось.

□

Замечание. Для практики этот результат имеет несколько проблем. Во-первых, не убеждены в измеримости $\hat{\theta}_n$, во-вторых, если корней уравнения правдоподобия несколько, то не можем понять, какой из них брать, так как не знаем θ_0 , в-третьих, не факт, что корень уравнения правдоподобия максимум, тем более, даже если локальный максимум, не обязательно глобальный. Но в некоторых частных случаях таких проблем не возникает.

Следствие. Пусть выполнены условия регулярности (R0)-(R4) и для всех n для всех X_1, \dots, X_n существует и единственно решение $\hat{\theta}_n(X)$ уравнения правдоподобия, являющееся измеримой функцией от выборки X . Тогда $\hat{\theta}_n(X)$ – состоятельная оценка θ , и с вероятностью $\rightarrow 1$ $\hat{\theta}_n$ является ОМП.

Доказательство.

- ▷ В силу существования, единственности и измеримости решения уравнения правдоподобия, проблем с определением и измеримостью $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ при неизвестном параметре θ_0 не возникает. Тогда результат доказанной только что теоремы можно записать в виде, из которого мгновенно следует состоятельность:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P_{\theta_0}(|\hat{\theta}_n(X) - \theta_0| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

▷ Осталось обосновать ОМП. Как и в самой теореме, с вероятностью, стремящейся к единице, выполнено $f_{\theta_0-\varepsilon}(X) < f_{\theta_0}(X) > f_{\theta_0+\varepsilon}(X)$ для $(\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon) \subset \Theta$, тогда во внутренней точке $\theta_1 \in (\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$ достигается локальный максимум, и θ_1 является решением уравнения правдоподобия. Тогда выполнено $\hat{\theta}_n(X) = \theta_1$.

Если θ_1 не является глобальным максимумом $f_{\theta}(X)$, то есть существует $\theta_2 \in \Theta$ такая, что $f_{\theta_2}(X) \geq f_{\theta_1}(X)$, без ограничения общности $\theta_1 < \theta_2$, тогда, так как θ_1 – локальный максимум, то $\exists \theta_3 \in (\theta_1, \theta_2)$, в которой $f_{\theta_1}(X) \geq f_{\theta_3}(X) \leq f_{\theta_2}(X)$, тогда на (θ_1, θ_2) есть ещё одно решение уравнения правдоподобия, что противоречит его единственности.

□

Теорема 5.3. (б/д) В условиях регулярности (R0)-(R8) любая состоятельная последовательность оценок $\hat{\theta}_n(X)$, являющихся решениями уравнения правдоподобия, удовлетворяет соотношению:

$$\forall \theta \in \Theta \quad \sqrt{n}(\hat{\theta}_n(X) - \theta) \xrightarrow{d_{\theta}} N\left(0, \frac{1}{i(\theta)}\right)$$

Замечание. Здесь $i(\theta)$ – информация Фишера. То, что она стоит в знаменателе асимптотической дисперсии, логично, ибо, неформально, чем больше информации, тем меньше дисперсия.

Замечание. Неформально утверждение теоремы можем переписать в таком виде:

$$\forall \theta \in \Theta \quad \hat{\theta}_n(X) \approx N\left(\theta, \frac{1}{ni(\theta)}\right) = N\left(\theta, \frac{1}{I_X(\theta)}\right)$$

Отсюда можем увидеть аналогию эффективных оценок и оценок максимального правдоподобия: в обоих случаях дисперсия равна $\frac{1}{I_X(\theta)}$, в обоих случаях, для ОМП соответствующий результат скоро сформулируем, все остальные рассматриваемые оценки имеют дисперсию не лучше $\frac{1}{I_X(\theta)}$.

Следствие. (Асимптотическая нормальность ОМП) В условиях регулярности (R0)-(R8), если $\forall n \quad \forall X_1, \dots, X_n$ существует единственное решение $\hat{\theta}_n(X)$ уравнения правдоподобия, являющееся измеримой функцией выборки, то $\hat{\theta}_n(X)$ является асимптотически нормальной оценкой θ с асимптотической дисперсией $\frac{1}{i(\theta)}$.

Доказательство. Мгновенно получается из последней теоремы и следствия предпоследней теоремы. □

Теорема 5.4. (Бахадур, б/д) Пусть выполнены условия регулярности (R0)-(R8) и $\hat{\theta}_n(X)$ – асимптотически нормальная оценка параметра θ с асимптотической дисперсией $\sigma^2(\theta)$, причём $\sigma(\theta)$ – непрерывная функция. Тогда $\forall \theta \in \Theta \quad \sigma^2(\theta) \geq \frac{1}{i(\theta)}$.

Замечание. Это тот самый обещанный результат про то, что ОМП имеют наименьшую асимптотическую дисперсию.

Замечание. Если не требовать непрерывность $\sigma(\theta)$, то неравенство $\sigma^2(\theta) \geq \frac{1}{i(\theta)}$ будет выполнено с точностью до множества меры нуль. Хороший вопрос, что такое множество меры нуль по θ , как показал беглый просмотр статьи Бахадура, это классическая мера Лебега на $\Theta \subset \mathbb{R}$.

Следствие. В условиях регулярности (R0)-(R8), если $\forall n \forall X_1, \dots, X_n$ существует единственное решение $\hat{\theta}_n(X)$ уравнения правдоподобия, являющееся измеримой функцией выборки, то $\hat{\theta}_n(X)$ не хуже любой другой оценки в асимптотическом подходе в классе асимптотических оценок с непрерывной асимптотической дисперсией.

Замечание. В общем и целом, результат непосредственно следует из уже доказанного, за исключением одного факта: с чего мы взяли, что сама асимптотическая дисперсия ОМП $\frac{1}{i(\theta)}$ непрерывна? Беглый анализ показал, что я не умею это выводить без добавленного мною в одном замечании условия регулярности (RR8), а если его предполагать, то доказательство непрерывности есть в том же замечании.

Определение 5.10. Пусть выполнены условия регулярности (R0)-(R8). Если для оценки $\hat{\theta}(X)$ параметра θ выполнено

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n(X) - \theta) \xrightarrow{d_\theta} N\left(0, \frac{1}{i(\theta)}\right)$$

то $\hat{\theta}_n(X)$ называют асимптотически эффективной оценкой параметра θ .

Замечание. Теперь несложный факт про то, что эффективные оценки, именно эффективные, из неравенства Рао-Крамера, являются оценками максимального правдоподобия. Неформально, суть в том, что если эффективность была до предела, то и в пределе получится что-то хорошее.

Утверждение 5.1. Пусть выполнены условия регулярности из неравенства Рао-Крамера, $\hat{\theta}(X)$ – эффективная оценка параметра θ , и в критерии эффективности равенство $\hat{\theta}(X) - \tau(\theta) = c(\theta)U_\theta(X)$ выполнено для всех X из носителя A и для всех θ (а не P_θ -п.н., как там доказывалось). X из носителя A , имеется в виду, что все $X_i \in A$. Тогда $\hat{\theta}(X)$ – оценка максимального правдоподобия.

Доказательство. Из условий теоремы равенство из критерия эффективности выполнено всюду, вклад выборки распишем по определению:

$$\hat{\theta}(X) - \theta = c(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_\theta(X), \quad c(\theta) = \frac{1}{I_X(\theta)} > 0$$

Тогда при всех $\theta < \hat{\theta}(X)$ $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_\theta(X) > 0$, при $\theta > \hat{\theta}(X)$ $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_\theta(X) < 0$. То есть логарифм правдоподобия, как и само правдоподобие, $\ln f_\theta(X)$ возрастает до $\hat{\theta}(X)$ и убывает после $\hat{\theta}(X)$, то есть в точке $\hat{\theta}(X)$ достигается глобальный максимум, что и означает, что оценка является ОМП. \square

6 Линейная регрессия

6.1 Некоторые семейства распределений

6.1.1 Распределение хи-квадрат

Определение 6.1. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_k \sim N(0, 1)$ – независимые одинаково распределённые случайные величины. Распределением хи-квадрат с k степенями свободы называется распределение случайной величины $\xi = \xi_1^2 + \dots + \xi_k^2$, обозначается $\xi \sim \chi_k^2$.

Утверждение 6.1. *Распределение хи-квадрат с k степенями свободы можно эквивалентно определить как распределение случайной величины $\xi \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)$.*

Доказательство.

- ▷ Пусть $\xi_1, \dots, \xi_k \sim N(0, 1)$ – независимые одинаково распределённые случайные величины. Нужно доказать, что $\xi = \xi_1^2 + \dots + \xi_k^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)$.
- ▷ Начнём с одномерного случая: $\xi \sim N(0, 1)$, хотим доказать: $\xi^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Напомним плотности стандартных распределений:

$$N(a, \sigma^2): p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Gamma(\alpha, \beta): p(x) = \frac{\alpha^\beta x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x} I\{x > 0\}$$

Докажем с помощью метода характеристических функций. Напомним определение: если ξ – случайная величина, то $\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{i\xi t}$ – её характеристическая функция, и основное свойство: $\xi \stackrel{d}{=} \eta \Leftrightarrow \varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t) \forall t \in \mathbb{R}$.

Пусть $\xi \sim N(0, 1)$, $\eta \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, хотим доказать, что $\xi^2 \stackrel{d}{=} \eta$. Распишем характеристические функции:

$$\varphi_{\xi^2}(t) = \mathbb{E}e^{i\xi^2 t} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2 t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ix^2 t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\varphi_\eta(t) = \mathbb{E}e^{i\eta t} = \int_0^{+\infty} e^{ixt} \frac{(1/2)^{1/2} x^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} e^{-\frac{x}{2}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma(1/2)\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Во-первых, вспомним, что $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, во-вторых, для второго интеграла сделаем замену $y = \sqrt{x}$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, получим:

$$\varphi_{\xi^2}(t) = \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{ix^2 t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\varphi_\eta(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iy^2 t} e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} 2dy = \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{iy^2 t} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Характеристические функции равны, так что одинаковая распределённость доказана.

- ▷ Возвращаемся в общий случай: $\xi_1, \dots, \xi_k \sim N(0, 1)$ – независимые одинаково распределённые случайные величины, нужно доказать: $\xi = \xi_1^2 + \dots + \xi_k^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)$. В силу уже доказанного все $\xi_i^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, в силу независимости ξ_i^2 и свойств гамма-распределения их сумма $\xi \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)$.

□

Утверждение 6.2. *(Свойства распределения хи-квадрат)*

1. $\xi \sim \chi_k^2$, $\eta \sim \chi_m^2$, $\xi \perp \eta \Rightarrow \xi + \eta \sim \chi_{k+m}^2$

$$2. \xi_k \sim \chi_k^2 \Rightarrow \frac{\xi_k}{k} \xrightarrow{d} 1$$

Доказательство.

1. Непосредственно следует из определения.
2. Рассмотрим $\eta_1, \eta_2, \dots \sim N(0, 1)$ – независимые одинаково распределённые случайные величины. Тогда $\mathbb{E}\eta_1^2 = D\eta_1 = 1$, обозначим $S_n = \eta_1^2 + \dots + \eta_n^2 \sim \chi_n^2$, в силу УЗБЧ получим:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 1 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{d} 1$$

Теперь рассмотрим произвольные случайные величины $\xi_k \sim \chi_k^2$. Так как сходимость по распределению в силу своего определения зависит только от распределения случайных величин, здесь тоже можем записать:

$$\frac{\xi_k}{k} \xrightarrow{d} 1$$

□

6.1.2 Распределение Стьюдента

Определение 6.2. Пусть случайные величины $\xi \sim N(0, 1)$, $\eta \sim \chi_k^2$, $\xi \perp \eta$. Распределением Стьюдента с k степенями свободы называется распределение случайной величины $\zeta = \frac{\xi}{\sqrt{\eta/k}}$, обозначается $\zeta \sim T_k$.

Утверждение 6.3. (*Свойства распределения Стьюдента*)

1. $\zeta \sim T_k \Rightarrow -\zeta \sim T_k$
2. $T_1 \sim \text{Cauchy}(1)$
3. $\zeta_k \sim T_k \Rightarrow \zeta_k \xrightarrow{d} N(0, 1)$

Доказательство.

1. Следует из факта: $\xi \sim N(0, 1) \Rightarrow -\xi \sim N(0, 1)$.
2. Пусть $\xi \sim N(0, 1)$, $\eta \sim N(0, 1)$, $\xi \perp \eta$. Тогда $\zeta = \frac{\xi}{\sqrt{\eta^2}} = \frac{\xi}{|\eta|} \sim T_1$. Плотность случайной величины $|\eta|$ записать не слишком трудно:

$$p_{|\eta|}(x) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} I\{x > 0\}$$

В силу независимости ξ и η можем записать функцию распределения $\frac{\xi}{|\eta|}$ в виде:

$$F_{\xi/|\eta|}(t) = \int_{x,y: x/y \leq t} p_{\xi}(x) p_{|\eta|}(y) dx dy$$

Так как $|\eta|$ принимает только положительные значения и по теореме Фубини:

$$\begin{aligned} F_{\xi/|\eta|}(t) &= \int_{x,y: x \leq yt} p_{\xi}(x)p_{|\eta|}(y)dx dy = \\ &= \int_0^{+\infty} dy \cdot p_{|\eta|}(y) \int_{x: x \leq yt} p_{\xi}(x)dx = \int_0^{+\infty} F_{\xi}(yt)p_{|\eta|}(y)dy \end{aligned}$$

Сначала продифференцируем по параметру t , потом обоснуем корректность:

$$\begin{aligned} p_{\xi/|\eta|}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} F_{\xi}(yt)p_{|\eta|}(y)dy = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} F_{\xi}(yt)p_{|\eta|}(y)dy = \\ &= \int_0^{+\infty} p_{\xi}(yt)yp_{|\eta|}(y)dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2 t^2}{2}} \cdot y \cdot 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2 t^2}{2}} \cdot y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2(t^2+1)}{2}} y dy \end{aligned}$$

Теперь нужно понять, почему имели право внести дифференцирование под знак интеграла. Применим теорему о дифференцируемости несобственного интеграла Римана по параметру: так как функция под интегралом справа, смотря на его последний вид, мажорируется как $\exp\left(-\frac{y^2(t^2+1)}{2}\right) y \leq \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) y$, а $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} y dy$ сходится, то интеграл справа сходится равномерно по t , функция под интегралом справа непрерывна, а интеграл слева под производной точно существует.

Осталось лишь досчитать полученный интеграл:

$$p_{\xi/|\eta|}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2(t^2+1)}{2}} d\frac{y^2}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x(t^2+1)} dx = \frac{1}{\pi} \frac{1 - e^{-x(t^2+1)}}{t^2+1} \Big|_{x=0}^{+\infty} = \frac{1}{\pi(t^2+1)}$$

Получилась в точности плотность распределения Коши *Cauchy*(1).

3. Пусть $\xi_k \sim N(0, 1)$, $\eta_k \sim \chi_k^2$, $\xi_k \perp \eta_k$, тогда имеем сходимости:

$$\xi_k \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad \frac{\eta_k}{k} \xrightarrow{d} 1$$

В силу теоремы о наследовании сходимости и леммы Слущкого:

$$\zeta_k = \frac{\xi_k}{\sqrt{\eta_k/k}} \sim T_k, \quad \zeta_k \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

□

6.1.3 Распределение Фишера

Определение 6.3. Пусть случайные величины $\xi \sim \chi_k^2$, $\eta \sim \chi_m^2$, $\xi \perp \eta$. Распределением Фишера с параметрами k, m называется распределение случайной величины $\zeta = \frac{\xi/k}{\eta/m}$, обозначается $\zeta \sim F_{k,m}$.

Утверждение 6.4. (Свойства распределения Фишера)

1. $\xi \sim T_m \Rightarrow \xi^2 \sim F_{1,m}$
2. $\xi \sim F_{k,m} \Rightarrow \frac{1}{\xi} \sim F_{m,k}$
3. $\xi_m \sim F_{k,m} \Rightarrow k\xi_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \chi_k^2$
4. $\xi_{k,m} \sim F_{k,m} \Rightarrow \xi_{k,m} \xrightarrow{k,m \rightarrow \infty} 1$

Доказательство.

1. Непосредственно следует из определения.
2. Непосредственно следует из определения.
3. Следует из того, что $\frac{1}{k}\chi_k^2 \xrightarrow{d} 1$.
4. Следует из того, что $\frac{1}{k}\chi_k^2 \xrightarrow{d} 1$.

□

6.2 Линейная регрессионная модель

6.2.1 Постановка задачи

Пример. Есть два яблока массами a и b соответственно. На весах провели 6 измерений: 3 раза взвесили первое яблоко, 2 раза взвесили второе яблоко, 1 раз взвесили оба яблока вместе, весы имели какие-то случайные ошибки измерений $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6$, которые, разумеется, не знаем. Хотим оценить массу каждого яблока, воспользовавшись всеми результатами измерений, иными словами, хотим найти a и b , когда есть данные:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

- ▷ Сформулируем задачу в общем виде. Пусть есть наблюдение, являющееся случайным вектором $X \in \mathbb{R}^n$, который представляется в виде $X = l + \varepsilon$, где l – неслучайный (детерминированный) неизвестный вектор, а ε – случайный вектор, иными словами, l – оцениваемая величина, а ε – ошибка измерений.
- ▷ Про ошибки ε известно, что они несмещены, нескоррелированы и имеют одинаковую дисперсию, то есть $\mathbb{E}\varepsilon = 0$, $D\varepsilon = \sigma^2 I_n$, где I_n – единичная матрица размера n , ошибка одного измерения имеет дисперсию $\sigma^2 > 0$, σ^2 – неизвестный параметр. Иными словами, измерительный прибор одинаково может ошибиться в обе стороны от реального значения, ошибки измерений не связаны между собой, погрешность прибора постоянна и неизвестна.

- ▷ Про параметры l известно, что $l \in L$ – линейное подпространство \mathbb{R}^n . В примере про яблоки L двумерно и является линейной оболочкой векторов $(1, 1, 1, 0, 0, 1)^T$ и $(0, 0, 0, 1, 1, 1)^T$.
- ▷ Задача состоит в том, чтобы оценить неизвестные параметры l, σ^2 , если подпространство L задано с помощью своего базиса $Z_1, \dots, Z_k, \dim L = k$.
- ▷ Неизвестный вектор $l \in L$ может быть выражен через базис Z_1, \dots, Z_k , составим матрицу из базисных векторов $Z = (Z_1, \dots, Z_k)$ – матрица размера $n \times k$, тогда можем записать в матричном виде $l = Z\theta$, где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)^T$ – неизвестные координаты l в базисе Z_1, \dots, Z_k . Таким образом, задача сводится к оценке неизвестных параметров θ, σ^2 , где $\theta \in \mathbb{R}^k$.

6.2.2 Метод наименьших квадратов

Определение 6.4. Оценка $\hat{\theta}(X) = \operatorname{argmin}_{\theta \in \mathbb{R}^k} \|X - Z\theta\|_2^2 = \operatorname{argmin}_{\theta \in \mathbb{R}^k} \langle X - Z\theta, X - Z\theta \rangle$ называется оценкой наименьших квадратов ОНК для неизвестного параметра θ .

Замечание. Геометрический смысл ОНК: $Z\hat{\theta}(X) = \operatorname{proj}_L X$ – проекция X на подпространство L . В частности, из геометрических соображений, ОНК $\hat{\theta}(X)$ существует и единственна.

Замечание. Матрица $Z^T Z$ – невырожденная квадратная матрица размера k . Действительно, её можно выразить через скалярные произведения векторов Z_1, \dots, Z_k :

$$Z^T Z = \begin{pmatrix} \langle Z_1, Z_1 \rangle & \langle Z_1, Z_2 \rangle & \dots & \langle Z_1, Z_k \rangle \\ \langle Z_2, Z_1 \rangle & \langle Z_2, Z_2 \rangle & \dots & \langle Z_2, Z_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Z_k, Z_1 \rangle & \langle Z_k, Z_2 \rangle & \dots & \langle Z_k, Z_k \rangle \end{pmatrix}$$

То есть $Z^T Z$ является матрицей Грама линейно независимых векторов Z_1, \dots, Z_k , тогда, как знаем из курса линейной алгебры, она невырождена.

Утверждение 6.5. $\hat{\theta}(X) = (Z^T Z)^{-1} Z^T X$

Доказательство. Уже выяснили, что $\hat{\theta}(X)$ существует и единственна. Так как в ней достигается минимум функции $\|X - Z\theta\|_2^2$, то в ней зануляется градиент $\nabla_{\theta} \|X - Z\theta\|_2^2$. Этих соображений нам хватит, чтобы получить формулу:

$$\begin{aligned} d\|X - Z\theta\|_2^2 &= d\langle X - Z\theta, X - Z\theta \rangle = 2\langle X - Z\theta, -Zd\theta \rangle = \langle -2Z^T(X - Z\theta), d\theta \rangle \\ \nabla_{\theta} \|X - Z\theta\|_2^2 &= -2Z^T(X - Z\theta) \\ -2Z^T(X - Z\hat{\theta}) &= 0 \Rightarrow Z^T X = Z^T Z\hat{\theta} \Rightarrow \hat{\theta} = (Z^T Z)^{-1} Z^T X \end{aligned}$$

□

Утверждение 6.6. $\mathbb{E}\hat{\theta}(X) = \theta, D\hat{\theta}(X) = \sigma^2(Z^T Z)^{-1}$

Доказательство.

- ▷ Начнём с простых свойств математического ожидания и дисперсии. Можно было бы сослаться на курс теории вероятностей, но так как они простые, мы поймём, откуда они берутся.

Математическое ожидание случайного вектора и случайной матрицы берётся покомпонентно. Дисперсию, т.е. матрицу ковариаций, можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 D\xi = D \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \text{cov}(\xi_1, \xi_1) & \text{cov}(\xi_1, \xi_2) & \dots & \text{cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \text{cov}(\xi_2, \xi_1) & \text{cov}(\xi_2, \xi_2) & \dots & \text{cov}(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\xi_n, \xi_1) & \text{cov}(\xi_n, \xi_2) & \dots & \text{cov}(\xi_n, \xi_n) \end{pmatrix} = \\
 &= \mathbb{E} \begin{pmatrix} (\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1) & (\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2) & \dots & (\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)(\xi_n - \mathbb{E}\xi_n) \\ (\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1) & (\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2) & \dots & (\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)(\xi_n - \mathbb{E}\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\xi_n - \mathbb{E}\xi_n)(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1) & (\xi_n - \mathbb{E}\xi_n)(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2) & \dots & (\xi_n - \mathbb{E}\xi_n)(\xi_n - \mathbb{E}\xi_n) \end{pmatrix} = \\
 &= \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} \xi_1 - \mathbb{E}\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n - \mathbb{E}\xi_n \end{pmatrix} (\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1 \quad \dots \quad \xi_n - \mathbb{E}\xi_n) \right] = \mathbb{E} [(\xi - \mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi)^T]
 \end{aligned}$$

И, для фиксированной матрицы A размера $m \times n$, воспользовавшись линейностью математического ожидания:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(A\xi) &= A \cdot \mathbb{E}\xi \\
 D(A\xi) &= \mathbb{E}[(A\xi - \mathbb{E}(A\xi))(A\xi - \mathbb{E}(A\xi))^T] = \mathbb{E}[A(\xi - \mathbb{E}\xi)(A(\xi - \mathbb{E}\xi))^T] = \\
 &= \mathbb{E}[A(\xi - \mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi)^T A^T] = A \cdot \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi)^T] \cdot A^T = A \cdot D\xi \cdot A^T
 \end{aligned}$$

- ▷ После этого, заметив также, что $(Z^T Z)^T = Z^T Z$, из-за чего $((Z^T Z)^{-1})^T = (Z^T Z)^{-1}$, мгновенно получим утверждение:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\hat{\theta} &= \mathbb{E}((Z^T Z)^{-1} Z^T X) = (Z^T Z)^{-1} Z^T \mathbb{E}X = (Z^T Z)^{-1} Z^T \mathbb{E}(Z\theta + \varepsilon) = (Z^T Z)^{-1} Z^T Z\theta = \theta \\
 D\hat{\theta} &= D((Z^T Z)^{-1} Z^T X) = (Z^T Z)^{-1} Z^T DX((Z^T Z)^{-1} Z^T)^T = \\
 &= (Z^T Z)^{-1} Z^T D(Z\theta + \varepsilon) Z(Z^T Z)^{-1} = (Z^T Z)^{-1} Z^T D\varepsilon Z(Z^T Z)^{-1} = \\
 &= \sigma^2 (Z^T Z)^{-1} Z^T I_n Z(Z^T Z)^{-1} = \sigma^2 (Z^T Z)^{-1}
 \end{aligned}$$

□

Следствие. $\hat{\theta}(X)$ – несмещённая оценка θ .

Утверждение 6.7. $\mathbb{E}\|X - Z\hat{\theta}\|_2^2 = \sigma^2(n - k)$

Доказательство.

- ▷ Сначала распишем математическое ожидание нормы вектора в матричном виде:

$$\mathbb{E}\|X - Z\hat{\theta}\|_2^2 = \mathbb{E} \langle X - Z\hat{\theta}, X - Z\hat{\theta} \rangle = \mathbb{E}[(X - Z\hat{\theta})^T (X - Z\hat{\theta})]$$

- ▷ Теперь заметим, что $\mathbb{E}(X - Z\hat{\theta}) = \mathbb{E}X - Z\mathbb{E}\hat{\theta} = Z\theta - Z\theta = 0$, из чего следует, что $D(X - Z\hat{\theta}) = \mathbb{E}[(X - Z\hat{\theta})(X - Z\hat{\theta})^T]$. Хотим выразить полученную выше формулу $\mathbb{E}[(X - Z\hat{\theta})^T(X - Z\hat{\theta})]$ через дисперсию $D(X - Z\hat{\theta})$, чтобы потом из дисперсии можно было выносить константные матрицы. Проблема в том, что в дисперсии матрицы $(X - Z\hat{\theta})^T$ и $(X - Z\hat{\theta})$ перемножаются в другом порядке. Менять порядок произведения матриц нам позволяет след, действительно, для матриц $A \in \text{Mat}_{s \times t}$ и $B \in \text{Mat}_{t \times s}$ выполнено $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, доказывается, тупо расписав по определению. Так как след без труда можно навесить на матрицу $(X - Z\hat{\theta})^T(X - Z\hat{\theta})$ размера 1×1 , получим:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|X - Z\hat{\theta}\|_2^2 &= \mathbb{E}[(X - Z\hat{\theta})^T(X - Z\hat{\theta})] = \mathbb{E}\text{tr}[(X - Z\hat{\theta})^T(X - Z\hat{\theta})] = \\ &= \mathbb{E}\text{tr}[(X - Z\hat{\theta})(X - Z\hat{\theta})^T] = \text{tr}\mathbb{E}[(X - Z\hat{\theta})(X - Z\hat{\theta})^T] = \text{tr}D(X - Z\hat{\theta})\end{aligned}$$

- ▷ Теперь посмотрим на $X - Z\hat{\theta} = X - Z(Z^T Z)^{-1}Z^T X = (I_n - A)X$, где обозначили через $A = Z(Z^T Z)^{-1}Z^T$. Заметим два свойства матрицы A :

$$\begin{aligned}A^T &= (Z(Z^T Z)^{-1}Z^T)^T = Z((Z^T Z)^{-1})^T Z^T = Z(Z^T Z)^{-1}Z^T = A \\ A^2 &= Z(Z^T Z)^{-1}Z^T Z(Z^T Z)^{-1}Z^T = Z(Z^T Z)^{-1}Z^T = A\end{aligned}$$

Продолжим цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|X - Z\hat{\theta}\|_2^2 &= \text{tr}D(X - Z\hat{\theta}) = \text{tr}D[(I_n - A)X] = \text{tr}[(I_n - A)DX(I_n - A)] = \\ &= \text{tr}[(I_n - A)D(Z\theta + \varepsilon)(I_n - A)] = \text{tr}[(I_n - A)D\varepsilon(I_n - A)] = \\ &= \sigma^2 \text{tr}[(I_n - A)I_n(I_n - A)] = \sigma^2 \text{tr}(I_n - 2A + A^2) = \sigma^2 \text{tr}(I_n - 2A + A) = \\ &= \sigma^2(\text{tr}(I_n) - \text{tr}(A)) = \sigma^2(n - \text{tr}(Z(Z^T Z)^{-1}Z^T)) = \sigma^2(n - \text{tr}(Z^T Z(Z^T Z)^{-1})) = \\ &= \sigma^2(n - \text{tr}(I_k)) = \sigma^2(n - k)\end{aligned}$$

□

Следствие. $\frac{\|X - Z\hat{\theta}\|_2^2}{n - k}$ – несмещённая оценка σ^2 .

Теорема 6.1. (б/д) Пусть $t = T\theta$ – линейная вектор-функция от θ , иными словами, $T \in \text{Mat}_{m \times k}$ – матрица размера $m \times k$. Тогда оценка $\hat{t} = T\hat{\theta}$ является оптимальной оценкой t в классе линейных несмещённых оценок, то есть в классе оценок вида BX , где $B \in \text{Mat}_{m \times n}$.

Напоминание. Оптимальная оценка – наилучшая оценка в равномерном подходе с квадратичной функцией потерь, рассматривается для классов, состоящих только из несмещённых оценок.

6.3 Гауссовская линейная модель

6.3.1 Оценки для гауссовской линейной модели

Определение 6.5. Рассматривается та же постановка задачи, что и в линейной регрессионной модели, $X = Z\theta + \varepsilon$, но с дополнительным предположением о нормальности ошибок $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$, $\sigma^2 > 0$. В частности, для нормальных ошибок из нескоррелированности следует независимость.

Теорема 6.2. (Об ортогональном разложении, б/д) Пусть $X \sim N(l, \sigma^2 I_n)$, в частности, такое выполнено в гауссовской линейной модели. Пусть L_1, \dots, L_r – попарно ортогональные подпространства \mathbb{R}^n , причём $L_1 \oplus \dots \oplus L_r = \mathbb{R}^n$. Тогда $\text{proj}_{L_1} X, \dots, \text{proj}_{L_r} X$ – независимые в совокупности нормальные случайные векторы, причём:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{proj}_{L_j} X) &= \text{proj}_{L_j} l, \quad j = 1, \dots, r \\ \frac{1}{\sigma^2} \|\text{proj}_{L_j} X - \text{proj}_{L_j} l\|_2^2 &\sim \chi_{\dim L_j}^2, \quad j = 1, \dots, r \end{aligned}$$

Утверждение 6.8. В гауссовской линейной модели $S(X) = (\text{proj}_L X, \|\text{proj}_{L^\perp} X\|_2^2)$ является достаточной статистикой для параметров l, σ^2 .

Доказательство. Напомним, что по критерию факторизации Неймана-Фишера достаточно проверить, что функция правдоподобия $f_{l, \sigma^2}(X)$ представляется в виде:

$$f_{l, \sigma^2}(X) = \psi(S(X), l, \sigma^2) \cdot h(X)$$

Здесь ψ, h – неотрицательные функции, ψ измерима по S , h измерима по X .

Так как ошибки $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ и, следовательно, случайные величины X_1, \dots, X_n независимы, то функция правдоподобия распадается в произведение:

$$\begin{aligned} f_{l, \sigma^2}(X) &= \prod_{i=1}^n f_{l, \sigma^2}(X_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(X_i - l_i)^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - l_i)^2}{2\sigma^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{\|X - l\|_2^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Воспользуемся теоремой Пифагора и тем, что $l \in L$:

$$\begin{aligned} \|X - l\|_2^2 &= \|\text{proj}_L(X - l)\|_2^2 + \|\text{proj}_{L^\perp}(X - l)\|_2^2 = \\ &= \|\text{proj}_L X - \text{proj}_L l\|_2^2 + \|\text{proj}_{L^\perp} X - \text{proj}_{L^\perp} l\|_2^2 = \|\text{proj}_L X - l\|_2^2 + \|\text{proj}_{L^\perp} X\|_2^2 \end{aligned}$$

Тогда выполнено:

$$f_{l, \sigma^2}(X) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{\|\text{proj}_L X - l\|_2^2 + \|\text{proj}_{L^\perp} X\|_2^2}{2\sigma^2}\right)$$

Возьмём $h \equiv 1$, $\psi = f_{l, \sigma^2}$, в силу последнего равенства это и будет требуемое разложение. \square

Теорема 6.3. (б/д) В гауссовской линейной модели $S(X) = (\text{proj}_L X, \|\text{proj}_{L^\perp} X\|_2^2)$ является полной достаточной статистикой для параметров l, σ^2 .

Следствие.

- ▷ $\hat{\theta}$ – оптимальная оценка для θ
- ▷ $Z\hat{\theta}$ – оптимальная оценка для l
- ▷ $\frac{\|X - Z\hat{\theta}\|_2^2}{n-k}$ – оптимальная оценка для σ^2

Доказательство. Напомним, что оптимальная оценка – наилучшая оценка в среднеквадратичном подходе в классе несмещённых оценок. Напомним также, что для оптимальности оценки достаточно, чтобы она была несмещённой, имела конечную дисперсию и являлась функцией от полной достаточной статистики.

Несмещённость всех оценок уже проверили. Конечность дисперсий для первых двух оценок тоже знаем, для первой даже явно считали дисперсию, вторая есть линейное преобразование первой, так что для неё тоже можно получить явную формулу. Для третьей: так как $X - Z\hat{\theta}$ является линейным преобразованием гауссовского вектора, то есть тоже гауссовским вектором, то $\|X - Z\hat{\theta}\|_2^2$ – сумма квадратов нормальных распределений, поэтому дисперсия конечна, так как у нормального распределения все моменты конечны.

Осталось понять, что эти оценки являются функциями от полной достаточной статистики ($\text{proj}_L X, \|\text{proj}_{L^\perp} X\|_2^2$). Действительно, так как:

$$\begin{aligned} Z\hat{\theta} &= \text{proj}_L X \\ X &= \text{proj}_L X + \text{proj}_{L^\perp} X \Rightarrow X - Z\hat{\theta} = \text{proj}_{L^\perp} X \end{aligned}$$

То можем записать:

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= (Z^T Z)^{-1} Z^T Z\theta = (Z^T Z)^{-1} Z^T \text{proj}_L X \\ Z\hat{\theta} &= \text{proj}_L X \\ \frac{\|X - Z\hat{\theta}\|_2^2}{n - k} &= \frac{\|\text{proj}_{L^\perp} X\|_2^2}{n - k} \end{aligned}$$

□

Утверждение 6.9. В гауссовской линейной модели:

- ▷ $\hat{\theta}$ и $X - Z\hat{\theta}$ независимы
- ▷ $\frac{1}{\sigma^2} \|Z\hat{\theta} - Z\theta\|_2^2 \sim \chi_k^2$
- ▷ $\frac{1}{\sigma^2} \|X - Z\hat{\theta}\|_2^2 \sim \chi_{n-k}^2$
- ▷ $\hat{\theta} \sim N(\theta, \sigma^2(Z^T Z)^{-1})$

Доказательство. Так как $\mathbb{R}^n = L \oplus L^\perp$, $Z\hat{\theta} = \text{proj}_L X$, $X - Z\hat{\theta} = \text{proj}_{L^\perp} X$, $l = Z\theta \in L$, $\dim L = k$, $\dim L^\perp = n - k$, то по теореме об ортогональном разложении:

- ▷ $Z\hat{\theta}$ и $X - Z\hat{\theta}$ независимы
- ▷ $\frac{1}{\sigma^2} \|Z\hat{\theta} - Z\theta\|_2^2 \sim \chi_k^2$
- ▷ $\frac{1}{\sigma^2} \|X - Z\hat{\theta}\|_2^2 \sim \chi_{n-k}^2$

Тогда, так как $\hat{\theta} = (Z^T Z)^{-1} Z^T (Z\theta)$, то $\hat{\theta}$ и $X - Z\hat{\theta}$ тоже независимы. Теперь, так как уже считали $\mathbb{E}\hat{\theta} = \theta$, $D\hat{\theta} = \sigma^2(Z^T Z)^{-1}$, а также $\hat{\theta}$ – линейная функция от гауссовского вектора X , то есть тоже гауссовский вектор, то $\hat{\theta} \sim N(\theta, \sigma^2(Z^T Z)^{-1})$. □

6.3.2 Доверительные интервалы для гауссовской линейной модели

1. Доверительный интервал для σ^2

Как только что выяснили, имеет место распределение:

$$\frac{1}{\sigma^2} \|X - Z\hat{\theta}\|_2^2 \sim \chi_{n-k}^2$$

Пусть u_γ — γ -квантиль χ_{n-k}^2 . Тогда:

$$P\left(\sigma^2 \in \left(0, \frac{\|X - Z\hat{\theta}\|_2^2}{u_{1-\gamma}}\right)\right) = P\left(\frac{1}{\sigma^2} \|X - Z\hat{\theta}\|_2^2 > u_{1-\gamma}\right) = \gamma$$

Получили точный доверительный интервал для σ^2 уровня доверия γ :

$$\left(0, \frac{\|X - Z\hat{\theta}\|_2^2}{u_{1-\gamma}}\right)$$

2. Доверительный интервал для θ_i , $1 \leq i \leq k$

Как только, что выяснили, имеет место распределение:

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &\sim N(\theta, \sigma^2(Z^T Z)^{-1}) = N(\theta, \sigma^2 A), \quad A = (Z^T Z)^{-1} \\ &\Downarrow \\ \hat{\theta}_i &\sim N(\theta_i, \sigma^2 A_{ii}) \end{aligned}$$

Если $A_{ii} = 0$, то $\hat{\theta}_i \equiv \text{const}$, тогда все ковариации $\text{cov}(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j) = 0$, $1 \leq j \leq k$, то есть $(Z^T Z)^{-1}$ имеет тождественно нулевую строку, что невозможно в силу невырожденности. Итак, выяснили, что $A_{ii} \neq 0$.

Тогда получаем распределение:

$$\frac{\hat{\theta}_i - \theta_i}{\sqrt{\sigma^2 A_{ii}}} \sim N(0, 1)$$

Для построения доверительного интервала хочется избавиться от σ^2 . Так как знаем, что $\frac{1}{\sigma^2} \|X - Z\hat{\theta}\|_2^2 \sim \chi_{n-k}^2$, и $\hat{\theta}$ и $X - Z\hat{\theta}$ независимы, то получим распределение Стьюдента:

$$\frac{\hat{\theta}_i - \theta_i}{\sqrt{\sigma^2 A_{ii}}} \frac{\sqrt{n-k}}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} \|X - Z\hat{\theta}\|_2^2}} = \sqrt{\frac{n-k}{A_{ii}}} \frac{\hat{\theta}_i - \theta_i}{\|X - Z\hat{\theta}\|_2} \sim T_{n-k}$$

Пусть u_γ — γ -квантиль T_{n-k} , знаем, что распределение Стьюдента симметрично относительно нуля. Тогда без труда получим точный доверительный интервал для θ_i уровня доверия γ :

$$\left(\hat{\theta}_i - \sqrt{\frac{A_{ii}}{n-k}} \|X - Z\hat{\theta}\|_2 \cdot u_{\frac{1+\gamma}{2}}, \quad \hat{\theta}_i + \sqrt{\frac{A_{ii}}{n-k}} \|X - Z\hat{\theta}\|_2 \cdot u_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

3. Доверительное множество для θ

Знаем, что:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma^2} \|Z\hat{\theta} - Z\theta\|_2^2 &\sim \chi_k^2 \\ \frac{1}{\sigma^2} \|X - Z\hat{\theta}\|_2^2 &\sim \chi_{n-k}^2 \\ Z\hat{\theta} \text{ и } X - Z\hat{\theta} &\text{ независимы}\end{aligned}$$

Тогда получим распределение Фишера:

$$\frac{n-k}{k} \frac{\|Z\hat{\theta} - Z\theta\|_2^2}{\|X - Z\hat{\theta}\|_2^2} \sim F_{k, n-k}$$

Пусть u_γ — γ -квантиль $F_{k, n-k}$, тогда строится точное доверительное множество (доверительный эллипсоид) для θ уровня доверия γ :

$$\left\{ \theta: \frac{n-k}{k} \frac{\|Z\hat{\theta} - Z\theta\|_2^2}{\|X - Z\hat{\theta}\|_2^2} < u_\gamma \right\}$$

7 Проверка статистических гипотез

7.1 Коэффициенты корреляции

Замечание. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ — две выборки одинакового размера, причём случайные векторы $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ независимы и одинаково распределены. Хотим проверить гипотезу $H_0: X_1 \perp Y_1$, то есть, что выборки независимы. Её можно переписать в эквивалентном виде: $H_0: F_{X_1, Y_1}(t, s) = F_{X_1}(t)F_{Y_1}(s) \forall t, s \in \mathbb{R}$. Так как независимость проверять достаточно тяжело, в основном будем проверять более слабое предположение о том, что выборки нескоррелированы, то есть $\text{cov}(X_1, Y_1) = 0$. Далее будем считать, что $0 < \mathbb{E}X_1^2 < \infty$, $0 < \mathbb{E}Y_1^2 < \infty$, это нужно для того, чтобы корректно насчитывать дисперсию, ковариацию и коэффициент корреляции.

7.1.1 Коэффициент корреляции Пирсона

Замечание. Идея состоит в следующем: хотим проверить нескоррелированность выборок X_1, \dots, X_n и Y_1, \dots, Y_n , то есть, что $\text{cov}(X_1, Y_1) = 0$. Посчитать реальное значение ковариации мы не можем, зато можем посчитать его выборочный аналог. Но так как $\text{cov}(X_1, Y_1)$ принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$, то насчитанное ненулевое значение на выборке даст мало информации, а ровно нулевое значение получится с очень небольшой вероятностью. Поэтому заменим ковариацию на её нормированный аналог — коэффициент корреляции $\text{corr}(X_1, Y_1)$, он уже принимает значения от -1 до 1 , так что такой проблемы не возникает.

Определение 7.1. Коэффициентом корреляции Пирсона называется величина

$$\hat{\rho} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

Замечание. Как видно из первого равенства, это выборочный аналог обычного коэффициента корреляции.

Утверждение 7.1.

$$\hat{\rho} \xrightarrow{n.n.} \text{corr}(X_1, Y_1) = \frac{\text{cov}(X_1, Y_1)}{\sqrt{DX_1 DY_1}}$$

Доказательство. Сначала приведём формулы к более удобному виду:

$$\begin{aligned} DX_1 &= \mathbb{E}(X_1 - \mathbb{E}X_1)^2 = \mathbb{E}X_1^2 - 2(\mathbb{E}X_1)^2 + (\mathbb{E}X_1)^2 = \mathbb{E}X_1^2 - (\mathbb{E}X_1)^2 \\ \text{cov}(X_1, Y_1) &= \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}X_1)(Y_1 - \mathbb{E}Y_1)] = \\ &= \mathbb{E}(X_1 Y_1) - 2\mathbb{E}X_1 \mathbb{E}Y_1 + \mathbb{E}X_1 \mathbb{E}Y_1 = \mathbb{E}(X_1 Y_1) - \mathbb{E}X_1 \mathbb{E}Y_1 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} 2\bar{X} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}^2 = \bar{X}^2 - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2 = \bar{X}^2 - \bar{X}^2 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{1}{n} \bar{X} \sum_{i=1}^n Y_i - \frac{1}{n} \bar{Y} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X} \cdot \bar{Y} = \\ &= \bar{X}\bar{Y} - 2\bar{X} \cdot \bar{Y} + \bar{X} \cdot \bar{Y} = \bar{X}\bar{Y} - \bar{X} \cdot \bar{Y} \end{aligned}$$

Осталось применить УЗБЧ и теорему о наследовании сходимости:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &\xrightarrow{n.n.} DX_1 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 &\xrightarrow{n.n.} DY_1 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) &\xrightarrow{n.n.} \text{cov}(X_1, Y_1) \\ \hat{\rho} &\xrightarrow{n.n.} \text{corr}(X_1, Y_1) \end{aligned}$$

□

Замечание. В общем случае из нескоррелированности не следует независимость, однако такое следствие есть, если выборки имеют нормальное распределение. Оказывается, что хороший теоретический результат для коэффициента корреляции Пирсона тоже связан с нормальными выборками.

Теорема 7.1. (б/д) Пусть $n > 2$, X, Y – две независимые выборки размера n , имеющие нормальное распределение. Тогда знаем, что следующая статистика имеет распределение Стьюдента:

$$T = \frac{\hat{\rho} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{\rho}^2}} \sim T_{n-2}$$

Замечание. Тогда для проверки гипотезы о независимости нормальных выборок размера хотя бы 2 разумно использовать критерий $S = \{|T| > u_{1-\gamma}\}$, где u_γ – γ -квантиль распределения Стьюдента T_{n-2} .

7.1.2 Коэффициент корреляции Спирмена

Замечание. Коэффициент корреляции Пирсона крайне неустойчив к наличию выбросов, что следует ожидать, так как выбросы могут сильно влиять на значение среднего, дисперсии и других насчитываемых величин. Одним из путей решения этой проблемы может быть замена значения элемента выборки на его ранг, то есть порядковый номер в отсортированной выборке.

Определение 7.2. Пусть X_1, \dots, X_n – выборка из непрерывного распределения. Упорядочим элементы выборки по возрастанию. Номера, которые получили элементы выборки при таком упорядочивании, назовём рангами R_1, \dots, R_n , то есть:

$$R(X_i) = R_i = j \Leftrightarrow X_{(j)} = X_i$$

Замечание. Требование непрерывности распределения нужно ровно по одной причине: чтобы с вероятностью 1 все элементы выборки были различны. В целом, с совпадением значений элементов выборки можно справиться: способ первый: среди совпадающих значений случайно распределить допустимые ранги, способ второй: совпадающим значениям присвоить средний ранг из допустимых, например:

Способ 1: 4 2 3 4 5 1 1 2 5 5 \rightarrow 7 3 5 6 8 2 1 4 9 10

Способ 2: 4 2 3 4 5 1 1 2 5 5 \rightarrow 6.5 3.5 5 6.5 9 1.5 1.5 3.5 9 9

Замечание. Отметим простые свойства введённых рангов:

1. $(R_1, \dots, R_n) \in S_n$ – перестановка множества $(1, \dots, n)$
2. $P(R_1 = r_1, \dots, R_n = r_n) = \frac{1}{n!} \quad \forall (r_1, \dots, r_n) \in S_n$

Действительно, в случае выборок из непрерывных распределений: если будем бороться с совпадающими значениями первым способом, то первое свойство будет выполнено автоматически, на второе свойство событие совпадения значений влияния не оказывает, так как имеет нулевую вероятность, второе свойство следует из того, что элементы выборки независимы и одинаково распределены.

Замечание. Пусть Y_1, \dots, Y_n – тоже выборка из непрерывного распределения, аналогично введём ранги S_1, \dots, S_n .

Определение 7.3. Коэффициентом корреляции Спирмена называется величина

$$\rho_S = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2 \sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2}}$$

Замечание. Заметим несколько фактов, которые позволят упростить запись коэффициента Спирмена. Для этого воспользуемся комбинаторной формулой $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Получим:

$$\begin{aligned}
 \bar{R} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \\
 \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2 &= \sum_{i=1}^n \left(R_i - \frac{n+1}{2} \right)^2 = \sum_{j=1}^n \left(j - \frac{n+1}{2} \right)^2 = \\
 &= \sum_{j=1}^n j^2 - 2 \frac{n+1}{2} \sum_{j=1}^n j + n \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)^2}{4} = \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2} \right) = \frac{n(n+1)}{2} \frac{n-1}{6} = \frac{n^3 - n}{12} \\
 \bar{S} &= \frac{n+1}{2}, \quad \sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2 = \frac{n^3 - n}{12}
 \end{aligned}$$

Определение 7.4. Введём ещё одно полезное обозначение. Рассмотрим пары рангов выборок $(R_1, S_1), \dots, (R_n, S_n)$ и упорядочим их по первой координате, получим отсортированный вид $(1, T_1), \dots, (n, T_n)$, иными словами, обозначим T_i как значение второго элемента i -й пары после сортировки. Можно также записать через $R_i = k \Leftrightarrow S_i = T_k$.

Замечание. $(T_1, \dots, T_n) \in S_n$, то есть перестановка элементов $(1, \dots, n)$. В случае справедливости гипотезы H_0 о том, что выборки X_1, \dots, X_n и Y_1, \dots, Y_n независимы, (T_1, \dots, T_n) является случайной перестановкой в смысле:

$$P(T_1 = r_1, \dots, T_n = r_n) = \frac{1}{n!} \quad \forall (r_1, \dots, r_n) \in S_n$$

Утверждение 7.2. Коэффициент корреляции Спирмена можно записать в следующих эквивалентных видах:

1. $\rho_S = \frac{12}{n^3 - n} \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2} \right) \left(T_k - \frac{n+1}{2} \right)$
2. $\rho_S = 1 - \frac{6}{n^3 - n} \sum_{k=1}^n (R_k - S_k)^2 = 1 - \frac{6}{n^3 - n} \sum_{k=1}^n (k - T_k)^2$
3. $\rho_S = 1 - \frac{12}{n^3 - n} \sum_{i < j} (j - i) I\{T_i > T_j\}$

Доказательство.

1. Воспользуемся формулами, полученными в одном из последних замечаний:

$$\begin{aligned}
 \rho_S &= \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2 \sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(R_i - \frac{n+1}{2} \right) \left(S_i - \frac{n+1}{2} \right)}{\sqrt{\frac{n^3 - n}{12} \cdot \frac{n^3 - n}{12}}} = \\
 &= \frac{\sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2} \right) \left(T_k - \frac{n+1}{2} \right)}{\frac{n^3 - n}{12}} = \frac{12}{n^3 - n} \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2} \right) \left(T_k - \frac{n+1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

2. Выведем из предыдущего пункта нехитрыми арифметическими преобразованиями:

$$\begin{aligned}
 \rho_S &= \frac{12}{n^3 - n} \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2} \right) \left(T_k - \frac{n+1}{2} \right) = \\
 &= \frac{12}{n^3 - n} \left(\sum_{k=1}^n k T_k - \frac{n+1}{2} \sum_{k=1}^n k - \frac{n+1}{2} \sum_{k=1}^n T_k + n \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \right) = \\
 &= \frac{12}{n^3 - n} \left(\sum_{k=1}^n k T_k - n \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 - \cancel{n \left(\frac{n+1}{2} \right)^2} + \cancel{n \left(\frac{n+1}{2} \right)^2} \right) = \\
 &= \frac{6}{n^3 - n} \left(2 \sum_{k=1}^n k T_k - \frac{n(n+1)^2}{2} - \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n T_k^2 + 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \\
 &= -\frac{6}{n^3 - n} \sum_{k=1}^n (k - T_k)^2 + \frac{6}{n^3 - n} n(n+1) \left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2} \right) = \\
 &= -\frac{6}{n^3 - n} \sum_{k=1}^n (k - T_k)^2 + \frac{6}{n^3 - n} \frac{n^3 - n}{6} = 1 - \frac{6}{n^3 - n} \sum_{k=1}^n (k - T_k)^2 = 1 - \frac{6}{n^3 - n} \sum_{i=1}^n (R_i - S_i)^2
 \end{aligned}$$

3. С учётом предыдущего пункта достаточно доказать:

$$2 \sum_{i < j} (j - i) I\{T_i > T_j\} = \sum_{k=1}^n (k - T_k)^2$$

Здесь уже будут хитрые арифметические трюки. Для начала заметим, что:

$$E := \sum_{i < j} i I\{T_i < T_j\} = \sum_{i > j} j I\{T_i > T_j\}$$

Теперь прибавим и вычтем одно и то же:

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{i < j} (j - i) I\{T_i > T_j\} &= 2 \sum_{i < j} (j - i) I\{T_i > T_j\} + 2E - 2E = \\
 &= 2 \sum_{i < j} (j - i) I\{T_i > T_j\} + 2 \sum_{i > j} j I\{T_i > T_j\} - 2 \sum_{i < j} i I\{T_i < T_j\} = \\
 &= 2 \sum_{i < j} j I\{T_i > T_j\} + 2 \sum_{i > j} j I\{T_i > T_j\} - 2 \sum_{i < j} i I\{T_i > T_j\} - 2 \sum_{i < j} i I\{T_i < T_j\} = \\
 &= 2 \sum_{i \neq j} j I\{T_i > T_j\} - 2 \sum_{i < j} i (I\{T_i > T_j\} + I\{T_i < T_j\})
 \end{aligned}$$

Если $i \neq j$, то $T_i \neq T_j$, отсюда $I\{T_i > T_j\} + I\{T_i < T_j\} = 1$, получаем:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i < j} (j - i) I\{T_i > T_j\} &= 2 \sum_{i \neq j} j I\{T_i > T_j\} - 2 \sum_{i < j} i = \\ &= 2 \sum_{j=1}^n j \sum_{i: i \neq j} I\{T_i > T_j\} - 2 \sum_{i=1}^n i \sum_{j=1}^n I\{j > i\} = \\ &= 2 \sum_{j=1}^n j \sum_{i=1}^n I\{T_i > T_j\} - 2 \sum_{j=1}^n j \sum_{i=1}^n I\{i > j\} \end{aligned}$$

Так как в первом слагаемом последнего выражения T_i просто пробегает все значения от 1 до n , а сумма индикаторов просто вырождается в то, сколько подходящих под условие чисел среди чисел от 1 до n , получим:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i < j} (j - i) I\{T_i > T_j\} &= 2 \sum_{j=1}^n j \sum_{k=1}^n I\{k > T_j\} - 2 \sum_{j=1}^n j \sum_{k=1}^n I\{k > j\} = \\ &= 2 \sum_{j=1}^n j(\mathcal{K} - T_j) - 2 \sum_{j=1}^n j(\mathcal{K} - j) = 2 \sum_{j=1}^n j^2 - 2 \sum_{j=1}^n jT_j = \\ &= \sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{j=1}^n T_j^2 - 2 \sum_{j=1}^n jT_j = \sum_{j=1}^n (j - T_j)^2 \end{aligned}$$

□

Утверждение 7.3. (Свойства коэффициента корреляции Спирмена)

1. Если верна гипотеза H_0 о независимости выборок X и Y , то:

$$\mathbb{E}\rho_S = 0, \quad D\rho_S = \frac{1}{n-1}$$

2. $\rho_S \in [-1, 1]$, причём крайние значения достигаются.

3. Если верна гипотеза H_0 о независимости выборок X и Y , то распределение ρ_S известно и не зависит от распределений X и Y .

4. Если верна гипотеза H_0 о независимости выборок X и Y , то:

$$\frac{\rho_S}{\sqrt{D\rho_S}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

Доказательство.

1. Получим только значение математического ожидания, значение дисперсии получается аналогично. Вспомним, что при справедливости гипотезы H_0 (T_1, \dots, T_k) является случайной перестановкой из S_n вероятности $\frac{1}{n!}$, тогда:

$$\mathbb{E}T_k = \sum_{j=1}^n jP(T_k = j) = \sum_{j=1}^n j \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$$

Применяя одну из формул для коэффициента Спирмена, получим:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\rho_S &= \mathbb{E}\left(\frac{12}{n^3 - n} \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2}\right) \left(T_k - \frac{n+1}{2}\right)\right) = \\ &= \frac{12}{n^3 - n} \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2}\right) \left(\mathbb{E}T_k - \frac{n+1}{2}\right) = \frac{12}{n^3 - n} \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2}\right) \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

2. Если обозначить через $\langle x, y \rangle$ скалярное произведение в \mathbb{R}^n , ввести также обозначения для векторов $R = (R_1 - \bar{R}, \dots, R_n - \bar{R})^T$, $S = (S_1 - \bar{S}, \dots, S_n - \bar{S})^T$, то определение коэффициента корреляции Спирмена можно записать в виде:

$$\rho_S = \frac{\langle R, S \rangle}{\sqrt{\langle R, R \rangle \langle S, S \rangle}}$$

В силу неравенства Коши-Буняковского-Шварца:

$$|\langle R, S \rangle| \leq \sqrt{\langle R, R \rangle \langle S, S \rangle} \Rightarrow \rho_S \in [-1, 1]$$

Причём границы достигаются: если $(R_1, \dots, R_n) = (1, \dots, n)$, $(S_1, \dots, S_n) = (1, \dots, n)$, то $\rho_S = 1$, если $(R_1, \dots, R_n) = (1, \dots, n)$, $(S_1, \dots, S_n) = (n, \dots, 1)$, то $\rho_S = -1$, это мгновенно следует из того факта, что $\bar{R} = \bar{S} = \frac{n+1}{2}$ и:

$$\left(1 - \frac{n+1}{2}, \dots, n - \frac{n+1}{2}\right) = \left(-\frac{n-1}{2}, \dots, \frac{n-1}{2}\right)$$

3. В случае справедливости гипотезы H_0 , распределение (T_1, \dots, T_n) не зависит от распределений X и Y , уже даже выписывали его явный вид, тогда и распределение ρ_S в силу, например, формулы ниже тоже не зависит:

$$\rho_S = 1 - \frac{6}{n^3 - n} \sum_{k=1}^n (k - T_k)^2$$

4. Без доказательства, сначала хочется применить в каком-то виде ЦПТ, но становится понятно, что вытащить сумму независимых одинаково распределённых случайных величин особенно неоткуда, R_1, \dots, R_n (как и S_1, \dots, S_n), разумеется, зависимы, хотя бы потому, что не могут принимать двух одинаковых значений. Доказательство можно найти в книге Кендалл Стьюарт «Статистические выводы и связи», по беглому просмотру там нетривиальный вывод на три страницы с использованием чисел Бернулли $B_k = -\frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^k C_{k+1}^{j+1} B_{k-j}$.

□

Замечание. Критерий проверки гипотезы H_0 с помощью коэффициента Спирмена строится в виде: $\{|\rho_S| > u_{1-\gamma}\}$, где u_γ — γ -квантиль распределения из пункта 3 последнего утверждения. Критерий можно также построить при помощи нормального приближения из пункта 4.

7.1.3 Коэффициент корреляции Кендалла

Замечание. Ещё один коэффициент корреляции, устойчивый к выбросам. Пусть, как и раньше, $X = (X_1, \dots, X_n)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ – две выборки одинакового размера из непрерывных распределений, H_0 – гипотеза о том, что выборки X и Y независимы.

Замечание. Пусть, как и в коэффициенте корреляции Спирмена, для выборок X и Y введены ранги, в основном нам понадобятся обозначения T_1, \dots, T_n .

Определение 7.5. Пары (X_i, Y_i) и (X_j, Y_j) , где $1 \leq i < j \leq n$, называются согласованными, если $\text{sign}(X_i - X_j) \text{sign}(Y_i - Y_j) = \text{sign}(R_i - R_j) \text{sign}(S_i - S_j) = 1$, то есть у них на обоих компонентах одинаковое отношение порядка.

Замечание. Идея состоит в следующем: если все пары согласованы или все пары несогласованы, то это не очень похоже на независимость. Обозначим M – число согласованных пар, N – число несогласованных пар, не трудно заметить, что $M + N = C_n^2$ – просто число всех пар. Интересно посмотреть на их разность:

$$T = M - N = \sum_{i < j} \text{sign}(X_i - X_j) \text{sign}(Y_i - Y_j) = \sum_{i < j} \text{sign}(R_i - R_j) \text{sign}(S_i - S_j)$$

Можно записать простые неравенства:

$$-C_n^2 = -M - N \leq T \leq M + N = C_n^2$$

Причём обе границы достигаются, левая – если все пары несогласованы, например, в случае $(R_1, \dots, R_n) = (1, \dots, n)$, $(S_1, \dots, S_n) = (n, \dots, 1)$, правая – если все пары согласованы, например, в случае $(R_1, \dots, R_n) = (1, \dots, n)$, $(S_1, \dots, S_n) = (1, \dots, n)$. Если, наоборот, T близко к нулю, то количество согласованных и несогласованных пар более-менее сбалансировано, что уже похоже на независимость. Поэтому в качестве коэффициента корреляции разумно взять отнормированную версию T .

Определение 7.6. Коэффициентом корреляции Кендалла называется величина

$$\tau = \frac{2}{n(n-1)} T = \frac{2}{n(n-1)} (M - N)$$

Утверждение 7.4. Коэффициент корреляции Кендалла можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\tau = 1 - \frac{4}{n(n-1)} \sum_{i < j} I\{T_i > T_j\}$$

Доказательство. Число несогласованных пар N равно числу пар $\{(i, j) : i < j, T_i > T_j\}$, поэтому можем записать:

$$\tau = \frac{2(M - N)}{n(n-1)} = \frac{2(M + N)}{n(n-1)} - \frac{4N}{n(n-1)} = 1 - \frac{4}{n(n-1)} \sum_{i < j} I\{T_i > T_j\}$$

□

Утверждение 7.5. (Свойства коэффициента корреляции Кендалла)

1. Если верна гипотеза H_0 о независимости выборок X и Y , то:

$$\mathbb{E}\tau = 0, \quad D\tau = \frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}$$

2. $\tau \in [-1, 1]$, причём крайние значения достигаются.

3. Если верна гипотеза H_0 о независимости выборок X и Y , то распределение τ известно и не зависит от распределений X и Y .

4. Если верна гипотеза H_0 о независимости выборок X и Y , то:

$$\frac{\tau}{\sqrt{D\tau}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

Доказательство.

1. Получим только значение математического ожидания, значение дисперсии получается аналогично. Воспользуемся тем, что знаем распределение (T_1, \dots, T_k) в случае справедливости гипотезы H_0 :

$$\mathbb{E}\tau = \mathbb{E} \left(1 - \frac{4}{n(n-1)} \sum_{i < j} I\{T_i > T_j\} \right) = 1 - \frac{4}{n(n-1)} \sum_{i < j} \mathbb{E}I\{T_i > T_j\}$$

Распишем последнее математическое ожидание:

$$\mathbb{E}I\{T_i > T_j\} = P(T_i > T_j) = \frac{|\{(r_1, \dots, r_n) \in S_n : r_i > r_j\}|}{|\{(r_1, \dots, r_n) \in S_n\}|} = \frac{\frac{1}{2}C_n^2}{C_n^2} = \frac{1}{2}$$

В результате получим:

$$\mathbb{E}\tau = 1 - \frac{4}{n(n-1)} \sum_{i < j} \frac{1}{2} = 1 - \frac{4}{n(n-1)} C_n^2 \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0$$

2. Мгновенно следует из того, что $-C_n^2 \leq T \leq C_n^2$, причём крайние значения достигаются, что поняли в одном из замечаний выше.

3. Следует из того, что в случае справедливости гипотезы H_0 знаем распределение (T_1, \dots, T_k) и формулы:

$$\tau = 1 - \frac{4}{n(n-1)} \sum_{i < j} I\{T_i > T_j\}$$

4. Без доказательства.

□

Замечание. Критерий проверки гипотезы H_0 с помощью коэффициента Кендалла строится в виде: $\{|\tau| > u_{1-\gamma}\}$, где u_γ — γ -квантиль распределения из пункта 3 последнего утверждения. Критерий можно также построить при помощи нормального приближения из пункта 4.

Замечание. Сравним ещё коэффициенты корреляции Спирмена и Кендалла, воспользовавшись формулами:

$$\rho_S = 1 - \frac{12}{n^3 - n} \sum_{i < j} (j - i) I\{T_i > T_j\}$$
$$\tau = 1 - \frac{4}{n(n-1)} \sum_{i < j} I\{T_i > T_j\}$$

Видим, что коэффициент Спирмена гораздо более чувствителен к различиям рангов в несогласованных парах, так как он считает не просто количество таких пар, а их взвешенное количество с весами $j - i$, то есть различия в рангах. Тем не менее, при справедливости гипотезы H_0 коэффициенты Спирмена и Кендалла очень сильно скоррелированы:

$$\text{corr}(\rho_S, \tau) = \frac{2(n+1)}{\sqrt{2n(2n+5)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$