Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

ИЗБРАННОЕ

VI СЕМЕСТР

Лектор: *Владимир Игоревич Богачёв*

Автор: *Зенков Евгений*

весна 2024

Содержание

С учётом наличия лекторского конспекта курса, тех лекций не имеет особого смысла. Поэтому данный конспект выполняет несколько другую задачу: сюда планируется добавлять либо очень небольшие фрагменты лекций, которые стоит описать несколько подробнее, либо разборы задач, оставленных в конспекте и разобранных на семинарах, либо другие семинарские задачи.

Ответственность за материал в этом конспекте несёт только его автор, ему можно и нужно сообщать о найденных багах.

Конспект до какого-то момента планируется обновлять. Актуальную версию можно найти по этой ссылке.

1 Задачи про компактные классы

Определение 1.1. Класс $\mathcal{K}$ подмножеств X называется компактным, если для всякой последовательности множеств из $\mathcal{K}$ с пустым пересечением есть конечный поднабор множеств с пустым пересечением, то есть:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing,\ K_n \in \mathcal{K} \ \Rightarrow\ \exists N \ \bigcap_{n=1}^{N} K_n = \varnothing$$

Задача.

1. *Доказать, что любой набор компактов в $\mathbb{R}^n$ – компактный класс.*
2. *Доказать, что совокупность всех цилиндров в $\mathbb{R}^T$ вида $C_{t_1,\dots,t_n,K}$, где K – компакт в $\mathbb{R}^n$, есть компактный класс.*
3. *Пусть P – аддитивная неотрицательная функция на алгебре $\mathcal{A}$, причём имеется такой компактный класс $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$, что для всякого $A \in \mathcal{A}$ выполнено:*

$$P(A) = \sup_{K \subset A,\ K \in \mathcal{K}} P(K)$$

Доказать, что функция P счётно-аддитивна.

Решение.

1. Докажем двумя способами, доказательства будут ссылаться на различные эквивалентные определения компактности в $\mathbb{R}^n$ и будут иметь различные обобщения на случай произвольных топологических пространств.

   ▷ Пусть $X = \mathbb{R}^n$ – объемлющее пространство. Рассмотрим произвольную последовательность компактов K_n, имеющих пустое пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing$. С помощью теоретико-множественных фокусов получим:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing \ \Rightarrow\ \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{K_n} = X \ \Rightarrow\ K_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{K_n}$$

Вспомним, что компакт K является замкнутым множеством, следовательно, его дополнение $\overline{K}$ открыто. Воспользуемся определением компакта, что из любого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие:

$$K_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{K_n} \Rightarrow \exists N\ K_1 \subset \bigcup_{n=1}^{N} \overline{K_n}$$

И отсюда выведем требуемое:

$$K_1 \subset \bigcup_{n=1}^{N} \overline{K_n} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{N} K_n \subset \overline{K_1} \Rightarrow K_1 \cap \bigcap_{n=1}^{N} K_n = \bigcap_{n=1}^{N} K_n = \varnothing$$

Это рассуждение проходит для всех топологических пространств X, в которых из компактности следует замкнутость.

▷ Пусть $X = \mathbb{R}^n$ – объемлющее пространство. Рассмотрим произвольную последовательность компактов K_n, предположим, что для всех N $\bigcap_{n=1}^{N} K_n \neq \varnothing$, докажем, что в таком случае $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$.

Так как $\bigcap_{n=1}^{N} K_n \neq \varnothing$, то существует $x_N \in \bigcap_{n=1}^{N} K_n$. Получим последовательность $\{x_N\}_{N=1}^{\infty}$, по построению она полностью лежит в компакте K_1. В силу компактности K_1 из неё можно выделить сходящуюся в K_1 подпоследовательность, то есть $\{x_{N_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_N\}_{N=1}^{\infty}$, $x_{N_k} \to x \in K_1$.

Теперь зафиксируем произвольное $m \in \mathbb{N}$. Так как последовательность $\{x_{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$, по построению, начиная с некоторого номера, полностью лежит в компакте K_m, при этом она сходится $x_{N_k} \to x$, то предел тоже лежит в K_m, то есть $x \in K_m$. Отсюда следует, что $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, то есть это пересечение непусто, что и хотели доказать.

Это рассуждение проходит для всех топологических пространств X, для класса секвенциально компактных множеств.

2. Сначала докажем, что конечное пересечение цилиндров с компактными основаниями является цилиндром с компактным основанием, достаточно доказать для двух. Действительно, пусть есть два цилиндра $C_{s_1,\dots,s_m,K_1}$, $C_{t_1,\dots,t_n,K_2}$, где K_1, K_2 – компакты в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно. Их и их пересечение можно записать в следующем виде, не важно, что среди моментов времени $s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n$ могут быть дублирующиеся:

$$C_{s_1,\dots,s_m,K_1} = \{x \in \mathbb{R}^T \colon (x(s_1), \dots, x(s_m), x(t_1), \dots, x(t_n)) \in K_1 \times \mathbb{R}^n\}$$
$$C_{t_1,\dots,t_n,K_2} = \{x \in \mathbb{R}^T \colon (x(s_1), \dots, x(s_m), x(t_1), \dots, x(t_n)) \in \mathbb{R}^m \times K_2\}$$
$$C_{s_1,\dots,s_m,K_1} \cap C_{t_1,\dots,t_n,K_2} = \{x \in \mathbb{R}^T \colon (x(s_1), \dots, x(s_m), x(t_1), \dots, x(t_n)) \in K_1 \times K_2\}$$

Изначально, моменты времени $s_1, \dots, s_m$ были различны, моменты времени $t_1, \dots, t_n$ тоже были различны. Теперь возможное дублирование моментов времени внутри набора $s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n$ придётся победить, для этого будет немного формализма. Выберем дублирования из s-ок и t-шек, обозначим через r-ки, при необходимости поменяем нумерацию s-ок и t-шек, чтобы r-ки шли в конце.

Иными словами, без ограничения общности, выполнено:

$$(s_1, \ldots, s_m, t_1, \ldots, t_n) = (s_1, \ldots, s_i, r_1, \ldots, r_k, t_1, \ldots, t_j, r_1, \ldots, r_k)$$
$$s_1, \ldots, s_i, t_1, \ldots, t_j, r_1, \ldots, r_k \text{ -- различные элементы } T$$

Теперь хотим записать $K_1 \times K_2$ из пересечения цилиндров в другом виде для моментов времени без дублирования $s_1, \ldots, s_i, t_1, \ldots, t_j, r_1, \ldots, r_k$. Для этого рассмотрим следующее множество:

$$K = \{(S_1, \ldots, S_i, T_1, \ldots, T_j, R_1, \ldots, R_k) \in \mathbb{R}^{i+j+k}\colon \\ (S_1, \ldots, S_i, R_1, \ldots, R_k, T_1, \ldots, T_j, R_1, \ldots, R_k) \in K_1 \times K_2\}$$

Множество K ограничено, так как в силу ограниченности K_1 и K_2 все координаты произвольной точки из K ограничены. Множество K замкнуто, так как если есть предел у последовательности векторов вида $(S_1, \ldots, S_i, T_1, \ldots, T_j, R_1, \ldots, R_k)$, зависимость от порядкового номера в последовательности здесь не указана, то он даёт пределы для $(S_1, \ldots, S_i, R_1, \ldots, R_k)$ и $(T_1, \ldots, T_j, R_1, \ldots, R_k)$, а эти пределы не покидают компакты K_1 и K_2. Множество K замкнуто и ограничено, то есть компактно, так как мы живём в $\mathbb{R}^{i+j+k}$.

Отсюда мгновенно следует, что пересечение двух данных цилиндров с компактными основаниями тоже есть цилиндр с компактным основанием:

$$C_{s_1,\ldots,s_m,K_1} \cap C_{t_1,\ldots,t_n,K_2} = \{x \in \mathbb{R}^T\colon (x(s_1), \ldots, x(s_m), x(t_1), \ldots, x(t_n)) \in K_1 \times K_2\} = \\ = \{x \in \mathbb{R}^T\colon (x(s_1), \ldots, x(s_i), x(t_1), \ldots, x(t_j), x(r_1), \ldots, x(r_k)) \in K\}$$

Таким образом, получили, что конечное пересечение цилиндров с компактными основаниями тоже есть цилиндр с компактным основанием. Хорошо, с этим справились.

Теперь обратим внимание на ещё один полезный факт, что из вложения цилиндров с компактными основаниями следует обратная вложенность соответствующих моментов времени, имеется в виду, что:

$$C_{s_1,\ldots,s_m,K_1} \subset C_{t_1,\ldots,t_n,K_2},\ K_1, K_2 \text{ -- компакты в } \mathbb{R}^m \text{ и } \mathbb{R}^n$$
$$\Downarrow$$
$$\{t_1, \ldots, t_n\} \subset \{s_1, \ldots, s_m\}$$

Это логично, так как означает, что меньший цилиндр учитывает все ограничения большего цилиндра, возможно, добавляя к ним какие-то новые. Формально доказывается от противного: пусть $t_i \in \{t_1, \ldots, t_n\} \setminus \{s_1, \ldots, s_m\}$, возьмём $x \in C_{s_1,\ldots,s_m,K_1}$ и переопределим $x(t_i)$, получив функцию $y \in \mathbb{R}^T$, так, чтобы $(y(t_1), \ldots, y(t_n))$ гарантированно не попадала в компакт K_2, так можно сделать, ибо все координаты точек из компакта ограничены. Так как x и y отличаются только в точке $t_i \notin \{s_1, \ldots, s_m\}$ и $x \in C_{s_1,\ldots,s_m,K_1}$, то и $y \in C_{s_1,\ldots,s_m,K_1}$. При этом по выбору $y(t_i)$ выполнено $y \notin C_{t_1,\ldots,t_n,K_2}$. Противоречие с $C_{s_1,\ldots,s_m,K_1} \subset C_{t_1,\ldots,t_n,K_2}$.

Справились с двумя вспомогательными фактами, теперь уже можно приступить к основному доказательству.

Нужно доказать, что совокупность всех цилиндров с компактными основаниями есть компактный класс. Рассмотрим последовательность цилиндров с компактными основаниями $C_1, C_2, \ldots$, таких, что:

$$\forall n \in \mathbb{N} \bigcap_{k=1}^{n} C_k \neq \varnothing$$

Нужно доказать, что тогда пересечение всех этих цилиндров тоже не пусто. Для этого также рассмотрим последовательность $D_1, D_2, \ldots$, где $D_n = \bigcap_{k=1}^n C_k$, она является последовательностью непустых вложенных цилиндров с компактными основаниями, непустота по предположению, вложенность по построению, компактность основания в силу уже доказанного. Элементы этой последовательности можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&D_1 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon (x(t_1), \ldots, x(t_{d_1})) \in K_1\} \\
&D_2 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon (x(t_1), \ldots, x(t_{d_1}), \ldots, x(t_{d_2})) \in K_2\} \\
&D_3 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon (x(t_1), \ldots, x(t_{d_1}), \ldots, x(t_{d_2}), \ldots, x(t_{d_3})) \in K_3\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Здесь $K_1, K_2, \ldots$ – компакты, $t_1, t_2, \ldots$ – конечная или счётная последовательность моментов времени. То, что моменты времени можно записать именно в таком виде, следует из вложенности $D_1 \supset D_2 \supset \ldots$, влекущей обратную вложенность соответствующих моментов времени, говоря иначе, каждый следующий цилиндр D_{n+1} наследует все моменты времени предыдущего цилиндра D_n, возможно, добавляя к ним новые.

Теперь воспользуемся непустотой цилиндров D_n, а именно выберем последовательность точек, они будут иметь разную размерность, из компактов K_n:

$$\begin{aligned}
&y_1^{(0)} = (y_{1,1}^{(0)}, \ldots, y_{1,d_1}^{(0)}) \in K_1 \\
&y_2^{(0)} = (y_{2,1}^{(0)}, \ldots, y_{2,d_1}^{(0)}, y_{2,d_1+1}^{(0)}, \ldots, y_{2,d_2}^{(0)}) \in K_2 \\
&y_3^{(0)} = (y_{3,1}^{(0)}, \ldots, y_{3,d_1}^{(0)}, y_{3,d_1+1}^{(0)}, \ldots, y_{3,d_2}^{(0)}, y_{3,d_2+1}^{(0)}, \ldots, y_{3,d_3}^{(0)}) \in K_3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Посмотрим на первые префиксы этих точек $(y_{1,1}^{(0)}, \ldots, y_{1,d_1}^{(0)}), (y_{2,1}^{(0)}, \ldots, y_{2,d_1}^{(0)}), \ldots$. Так как можно определить функции $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}^T$, такие, что

$$(x_k(t_1), \ldots, x_k(t_{d_k})) = (y_{k,1}^{(0)}, \ldots, y_{k,d_k}^{(0)}) \;\Rightarrow\; x_k \in D_k$$

и есть вложенность $D_1 \supset D_2 \supset \ldots$, то выполнено $x_1, x_2, \dots \in D_1$, откуда все первые префиксы $(y_{1,1}^{(0)}, \ldots, y_{1,d_1}^{(0)}), (y_{2,1}^{(0)}, \ldots, y_{2,d_1}^{(0)}), \ldots$ лежат в K_1. Так как K_1 является компактом, то из полученной последовательности первых префиксов можно выделить сходящуюся в K_1 подпоследовательность. Иными словами, из последовательности $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}, \ldots$ можно выделить подпоследовательность $y_1^{(1)}$, $y_2^{(1)}, \ldots$, такую, что у неё существует предел по первому префиксу $\lim\limits_{k\to\infty}(y_{k,1}^{(1)}, \ldots, y_{k,d_1}^{(1)})$, который лежит в K_1.

Теперь смотрим на новую последовательность точек разной размерности $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots$, начиная с некоторого номера, у элементов этой последовательности определены вторые префиксы $(y^{(1)}_{k,1}, \dots, y^{(1)}_{k,d_2})$. По тем же причинам, что и раньше, все вторые префиксы лежат в компакте K_2. Опять выбираем подпоследовательность $y^{(2)}_1$, $y^{(2)}_2, \dots$ текущей последовательности $y^{(1)}_1$, $y^{(1)}_2, \dots$, такую, что у неё существует предел по второму префиксу $\lim\limits_{k\to\infty}(y^{(2)}_{k,1}, \dots, y^{(2)}_{k,d_2})$, который лежит в K_2.

Продолжая далее эту процедуру, выбираем последовательность $y^{(n)}_1$, $y^{(n)}_2, \dots$, такую, что у неё существует предел по n-му префиксу $\lim\limits_{k\to\infty}(y^{(n)}_{k,1}, \dots, y^{(n)}_{k,d_n})$, лежащий в K_n.

Теперь применим классический диагональный метод и рассмотрим последовательность точек разной размерности $y^{(1)}_1, y^{(2)}_2, y^{(3)}_3, \dots$. У неё существует предел по n-му префиксу для всех натуральных n. Более того, если $\lim\limits_{k\to\infty}(y^{(n)}_{k,1}, \dots, y^{(n)}_{k,d_n}) = (z_1, \dots, z_{d_n})$, то для всех $m \leqslant n$ предел $\lim\limits_{k\to\infty}(y^{(m)}_{k,1}, \dots, y^{(m)}_{k,d_m}) = (z_1, \dots, z_{d_m})$, в силу того, что векторная сходимость влечёт покомпонентную.

Отсюда получаем конечную или счётную последовательность точек $z_1, z_2, \dots$ из $\mathbb{R}$, такую, что при всех n выполнено $(z_1, \dots, z_{d_n}) \in K_n$, так как этот префикс является пределом $\lim\limits_{k\to\infty}(y^{(n)}_{k,1}, \dots, y^{(n)}_{k,d_n}) = \lim\limits_{k\to\infty}(y^{(k)}_{k,1}, \dots, y^{(k)}_{k,d_n})$, который, как было замечено ранее, лежит в K_n.

Остался последний шаг: определим $x \in \mathbb{R}^T$ как $x(t_1) = z_1$, $x(t_2) = z_2, \dots$, в оставшихся точках из T доопределим произвольным образом. Тогда по построению и формуле для множеств D_n выполнено $x \in D_1$, $x \in D_2, \dots$, иными словами:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{n} C_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

В частности, доказали непустоту пересечения $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ всех цилиндров C_n, а ровно это мы и хотели доказать.

3. Нужно доказать, что функция P счётно-аддитивна. В условиях задачи это эквивалентно непрерывности в нуле, то есть, что для любой убывающей к нулю последовательности множеств из $\mathcal{A}$

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots, \ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing, \forall n \ A_n \in \mathcal{A}$$

выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Знаем, что значения P на множествах из $\mathcal{A}$ приближаются с помощью компактного класса $\mathcal{K}$, выберем для множеств A_n приближение с увеличивающейся точностью, то есть выберем K_n так, что $K_n \subset A_n$, $K_n \in \mathcal{K}$ и $P(K_n) > P(A_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$, что эквивалентно $P(A_n \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Так как $K_n \subset A_n$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing$. В силу компактности класса $\mathcal{K}$ есть m для которого $\bigcap_{n=1}^{m} K_n = \varnothing$. Осталось применить не очень хитрый теоретико-множественный трюк, помня, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$:

$$A_m = A_m \setminus \varnothing = A_m \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{m} K_n\right) = \bigcup_{n=1}^{m}(A_m \setminus K_n) \subset \bigcup_{n=1}^{m}(A_n \setminus K_n)$$

И воспользоваться тем, что мы брали приближение с увеличивающейся точностью:

$$P(A_m) \leqslant \sum_{n=1}^{m} P(A_n \setminus K_n) \leqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

Это и означает, что интересующий нас предел равен нулю.