Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

ИЗБРАННОЕ

VI СЕМЕСТР

Лектор: *Владимир Игоревич Богачёв*

Автор: *Зенков Евгений*

весна 2024

Содержание

С учётом наличия лекторского конспекта курса, тех лекций не имеет особого смысла. Поэтому данный конспект выполняет несколько другую задачу: сюда планируется добавлять либо очень небольшие фрагменты лекций, которые стоит описать несколько подробнее, либо разборы задач, оставленных в конспекте и разобранных на семинарах, либо другие семинарские задачи.

Ответственность за материал в этом конспекте несёт только его автор, ему можно и нужно сообщать о найденных багах.

Конспект до какого-то момента планируется обновлять. Актуальную версию можно найти по этой ссылке.

1 Задачи про компактные классы

Определение 1.1. Класс $\mathcal{K}$ подмножеств X называется компактным, если для всякой последовательности множеств из $\mathcal{K}$ с пустым пересечением есть конечный поднабор множеств с пустым пересечением, то есть:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing,\ K_n \in \mathcal{K} \ \Rightarrow\ \exists N\ \bigcap_{n=1}^{N} K_n = \varnothing$$

Задача.

1. *Доказать, что любой набор компактов в* $\mathbb{R}^n$ *– компактный класс.*
2. *Доказать, что совокупность всех цилиндров в* $\mathbb{R}^T$ *вида* $C_{t_1,\ldots,t_n,K}$*, где* K *– компакт в* $\mathbb{R}^n$*, есть компактный класс.*
3. *Пусть* P *– аддитивная неотрицательная функция на алгебре* $\mathcal{A}$*, причём имеется такой компактный класс* $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$*, что для всякого* $A \in \mathcal{A}$ *выполнено:*

$$P(A) = \sup_{K \subset A,\ K \in \mathcal{K}} P(K)$$

Доказать, что функция P *счётно-аддитивна.*

Решение.

1. Докажем двумя способами, доказательства будут ссылаться на различные эквивалентные определения компактности в $\mathbb{R}^n$ и будут иметь различные обобщения на случай произвольных топологических пространств.

   ▷ Пусть $X = \mathbb{R}^n$ – объемлющее пространство. Рассмотрим произвольную последовательность компактов K_n, имеющих пустое пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing$. С помощью теоретико-множественных фокусов получим:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing \ \Rightarrow\ \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{K_n} = X \ \Rightarrow\ K_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{K_n}$$

Вспомним, что компакт K является замкнутым множеством, следовательно, его дополнение $\overline{K}$ открыто. Воспользуемся определением компакта, что из любого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие:

$$K_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{K_n} \;\Rightarrow\; \exists N \; K_1 \subset \bigcup_{n=1}^{N} \overline{K_n}$$

И отсюда выведем требуемое:

$$K_1 \subset \bigcup_{n=1}^{N} \overline{K_n} \;\Rightarrow\; \bigcap_{n=1}^{N} K_n \subset \overline{K_1} \;\Rightarrow\; K_1 \cap \bigcap_{n=1}^{N} K_n = \bigcap_{n=1}^{N} K_n = \varnothing$$

Это рассуждение проходит для всех топологических пространств X, в которых из компактности следует замкнутость.

- ▷ Пусть $X = \mathbb{R}^n$ – объемлющее пространство. Рассмотрим произвольную последовательность компактов K_n, предположим, что для всех N $\bigcap_{n=1}^{N} K_n \neq \varnothing$, докажем, что в таком случае $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$.

  Так как $\bigcap_{n=1}^{N} K_n \neq \varnothing$, то существует $x_N \in \bigcap_{n=1}^{N} K_n$. Получим последовательность $\{x_N\}_{N=1}^{\infty}$, по построению она полностью лежит в компакте K_1. В силу компактности K_1 из неё можно выделить сходящуюся в K_1 подпоследовательность, то есть $\{x_{N_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_N\}_{N=1}^{\infty}$, $x_{N_k} \to x \in K_1$.

  Теперь зафиксируем произвольное $m \in \mathbb{N}$. Так как последовательность $\{x_{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$, по построению, начиная с некоторого номера, полностью лежит в компакте K_m, при этом она сходится $x_{N_k} \to x$, то предел тоже лежит в K_m, то есть $x \in K_m$. Отсюда следует, что $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, то есть это пересечение непусто, что и хотели доказать.

  Это рассуждение проходит для всех топологических пространств X, для класса секвенциально компактных множеств.

2. Сначала докажем, что конечное пересечение цилиндров с компактными основаниями является цилиндром с компактным основанием, достаточно доказать для двух. Действительно, пусть есть два цилиндра $C_{s_1,\dots,s_m,K_1}$, $C_{t_1,\dots,t_n,K_2}$, где K_1, K_2 – компакты в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно. Их и их пересечение можно записать в следующем виде, не важно, что среди моментов времени $s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n$ могут быть дублирующиеся:

$$C_{s_1,\dots,s_m,K_1} = \{x \in \mathbb{R}^T \colon (x(s_1), \dots, x(s_m), x(t_1), \dots, x(t_n)) \in K_1 \times \mathbb{R}^n\}$$
$$C_{t_1,\dots,t_n,K_2} = \{x \in \mathbb{R}^T \colon (x(s_1), \dots, x(s_m), x(t_1), \dots, x(t_n)) \in \mathbb{R}^m \times K_2\}$$
$$C_{s_1,\dots,s_m,K_1} \cap C_{t_1,\dots,t_n,K_2} = \{x \in \mathbb{R}^T \colon (x(s_1), \dots, x(s_m), x(t_1), \dots, x(t_n)) \in K_1 \times K_2\}$$

Изначально, моменты времени $s_1, \dots, s_m$ были различны, моменты времени $t_1, \dots, t_n$ тоже были различны. Теперь возможное дублирование моментов времени внутри набора $s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n$ придётся победить, для этого будет немного формализма. Выберем дублирования из s-ок и t-шек, обозначим через r-ки, при необходимости поменяем нумерацию s-ок и t-шек, чтобы r-ки шли в конце.

Иными словами, без ограничения общности, выполнено:

$$(s_1, \ldots, s_m, t_1, \ldots, t_n) = (s_1, \ldots, s_i, r_1, \ldots, r_k, t_1, \ldots, t_j, r_1, \ldots, r_k)$$
$$s_1, \ldots, s_i, t_1, \ldots, t_j, r_1, \ldots, r_k \text{ – различные элементы } T$$

Теперь хотим записать $K_1 \times K_2$ из пересечения цилиндров в другом виде для моментов времени без дублирования $s_1, \ldots, s_i, t_1, \ldots, t_j, r_1, \ldots, r_k$. Для этого рассмотрим следующее множество:

$$K = \{(S_1, \ldots, S_i, T_1, \ldots, T_j, R_1, \ldots, R_k) \in \mathbb{R}^{i+j+k} \colon \\ (S_1, \ldots, S_i, R_1, \ldots, R_k, T_1, \ldots, T_j, R_1, \ldots, R_k) \in K_1 \times K_2\}$$

Множество K ограничено, так как в силу ограниченности K_1 и K_2 все координаты произвольной точки из K ограничены. Множество K замкнуто, так как если есть предел у последовательности векторов вида $(S_1, \ldots, S_i, T_1, \ldots, T_j, R_1, \ldots, R_k)$, зависимость от порядкового номера в последовательности здесь не указана, то он даёт пределы для $(S_1, \ldots, S_i, R_1, \ldots, R_k)$ и $(T_1, \ldots, T_j, R_1, \ldots, R_k)$, а эти пределы не покидают компакты K_1 и K_2. Множество K замкнуто и ограничено, то есть компактно, так как мы живём в $\mathbb{R}^{i+j+k}$.

Отсюда мгновенно следует, что пересечение двух данных цилиндров с компактными основаниями тоже есть цилиндр с компактным основанием:

$$C_{s_1,\ldots,s_m,K_1} \cap C_{t_1,\ldots,t_n,K_2} = \{x \in \mathbb{R}^T \colon (x(s_1), \ldots, x(s_m), x(t_1), \ldots, x(t_n)) \in K_1 \times K_2\} = \\ = \{x \in \mathbb{R}^T \colon (x(s_1), \ldots, x(s_i), x(t_1), \ldots, x(t_j), x(r_1), \ldots, x(r_k)) \in K\}$$

Таким образом, получили, что конечное пересечение цилиндров с компактными основаниями тоже есть цилиндр с компактным основанием. Хорошо, с этим справились.

Теперь обратим внимание на ещё один полезный факт, что из вложения цилиндров с компактными основаниями следует обратная вложенность соответствующих моментов времени, имеется в виду, что:

$$C_{s_1,\ldots,s_m,K_1} \subset C_{t_1,\ldots,t_n,K_2},\ K_1, K_2 \text{ – компакты в } \mathbb{R}^m \text{ и } \mathbb{R}^n$$
$$\Downarrow$$
$$\{t_1, \ldots, t_n\} \subset \{s_1, \ldots, s_m\}$$

Это логично, так как означает, что меньший цилиндр учитывает все ограничения большего цилиндра, возможно, добавляя к ним какие-то новые. Формально доказывается от противного: пусть $t_i \in \{t_1, \ldots, t_n\} \setminus \{s_1, \ldots, s_m\}$, возьмём $x \in C_{s_1,\ldots,s_m,K_1}$ и переопределим $x(t_i)$, получив функцию $y \in \mathbb{R}^T$, так, чтобы $(y(t_1), \ldots, y(t_n))$ гарантированно не попадала в компакт K_2, так можно сделать, ибо все координаты точек из компакта ограничены. Так как x и y отличаются только в точке $t_i \notin \{s_1, \ldots, s_m\}$ и $x \in C_{s_1,\ldots,s_m,K_1}$, то и $y \in C_{s_1,\ldots,s_m,K_1}$. При этом по выбору $y(t_i)$ выполнено $y \notin C_{t_1,\ldots,t_n,K_2}$. Противоречие с $C_{s_1,\ldots,s_m,K_1} \subset C_{t_1,\ldots,t_n,K_2}$.

Справились с двумя вспомогательными фактами, теперь уже можно приступить к основному доказательству.

Нужно доказать, что совокупность всех цилиндров с компактными основаниями есть компактный класс. Рассмотрим последовательность цилиндров с компактными основаниями $C_1, C_2, \ldots$, таких, что:

$$\forall n \in \mathbb{N} \bigcap_{k=1}^{n} C_k \neq \varnothing$$

Нужно доказать, что тогда пересечение всех этих цилиндров тоже не пусто. Для этого также рассмотрим последовательность $D_1, D_2, \ldots$, где $D_n = \bigcap_{k=1}^{n} C_k$, она является последовательностью непустых вложенных цилиндров с компактными основаниями, непустота по предположению, вложенность по построению, компактность основания в силу уже доказанного. Элементы этой последовательности можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&D_1 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon (x(t_1), \ldots, x(t_{d_1})) \in K_1\} \\
&D_2 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon (x(t_1), \ldots, x(t_{d_1}), \ldots, x(t_{d_2})) \in K_2\} \\
&D_3 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon (x(t_1), \ldots, x(t_{d_1}), \ldots, x(t_{d_2}), \ldots, x(t_{d_3})) \in K_3\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Здесь $K_1, K_2, \ldots$ – компакты, $t_1, t_2, \ldots$ – конечная или счётная последовательность моментов времени. То, что моменты времени можно записать именно в таком виде, следует из вложенности $D_1 \supset D_2 \supset \ldots$, влекущей обратную вложенность соответствующих моментов времени, говоря иначе, каждый следующий цилиндр D_{n+1} наследует все моменты времени предыдущего цилиндра D_n, возможно, добавляя к ним новые.

Теперь воспользуемся непустотой цилиндров D_n, а именно выберем последовательность точек, они будут иметь разную размерность, из компактов K_n:

$$\begin{aligned}
&y_1^{(0)} = (y_{1,1}^{(0)}, \ldots, y_{1,d_1}^{(0)}) \in K_1 \\
&y_2^{(0)} = (y_{2,1}^{(0)}, \ldots, y_{2,d_1}^{(0)}, y_{2,d_1+1}^{(0)}, \ldots, y_{2,d_2}^{(0)}) \in K_2 \\
&y_3^{(0)} = (y_{3,1}^{(0)}, \ldots, y_{3,d_1}^{(0)}, y_{3,d_1+1}^{(0)}, \ldots, y_{3,d_2}^{(0)}, y_{3,d_2+1}^{(0)}, \ldots, y_{3,d_3}^{(0)}) \in K_3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Посмотрим на первые префиксы этих точек $(y_{1,1}^{(0)}, \ldots, y_{1,d_1}^{(0)}), (y_{2,1}^{(0)}, \ldots, y_{2,d_1}^{(0)}), \ldots$. Так как можно определить функции $x_1, x_2, \cdots \in \mathbb{R}^T$, такие, что

$$(x_k(t_1), \ldots, x_k(t_{d_k})) = (y_{k,1}^{(0)}, \ldots, y_{k,d_k}^{(0)}) \;\Rightarrow\; x_k \in D_k$$

и есть вложенность $D_1 \supset D_2 \supset \ldots$, то выполнено $x_1, x_2, \cdots \in D_1$, откуда все первые префиксы $(y_{1,1}^{(0)}, \ldots, y_{1,d_1}^{(0)}), (y_{2,1}^{(0)}, \ldots, y_{2,d_1}^{(0)}), \ldots$ лежат в K_1. Так как K_1 является компактом, то из полученной последовательности первых префиксов можно выделить сходящуюся в K_1 подпоследовательность. Иными словами, из последовательности $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots$ можно выделить подпоследовательность $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots$, такую, что у неё существует предел по первому префиксу $\lim\limits_{k\to\infty}(y_{k,1}^{(1)}, \ldots, y_{k,d_1}^{(1)})$, который лежит в K_1.

Теперь смотрим на новую последовательность точек разной размерности $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots$, начиная с некоторого номера, у элементов этой последовательности определены вторые префиксы $(y_{k,1}^{(1)}, \dots, y_{k,d_2}^{(1)})$. По тем же причинам, что и раньше, все вторые префиксы лежат в компакте K_2. Опять выбираем подпоследовательность $y_1^{(2)}$, $y_2^{(2)}, \dots$ текущей последовательности $y_1^{(1)}$, $y_2^{(1)}, \dots$, такую, что у неё существует предел по второму префиксу $\lim\limits_{k\to\infty}(y_{k,1}^{(2)}, \dots, y_{k,d_2}^{(2)})$, который лежит в K_2.

Продолжая далее эту процедуру, выбираем последовательность $y_1^{(n)}$, $y_2^{(n)}, \dots$, такую, что у неё существует предел по n-му префиксу $\lim\limits_{k\to\infty}(y_{k,1}^{(n)}, \dots, y_{k,d_n}^{(n)})$, лежащий в K_n.

Теперь применим классический диагональный метод и рассмотрим последовательность точек разной размерности $y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, y_3^{(3)}, \dots$. У неё существует предел по n-му префиксу для всех натуральных n. Более того, если $\lim\limits_{k\to\infty}(y_{k,1}^{(n)}, \dots, y_{k,d_n}^{(n)}) = (z_1, \dots, z_{d_n})$, то для всех $m \leqslant n$ предел $\lim\limits_{k\to\infty}(y_{k,1}^{(m)}, \dots, y_{k,d_m}^{(m)}) = (z_1, \dots, z_{d_m})$, в силу того, что векторная сходимость влечёт покомпонентную.

Отсюда получаем конечную или счётную последовательность точек $z_1, z_2, \dots$ из $\mathbb{R}$, такую, что при всех n выполнено $(z_1, \dots, z_{d_n}) \in K_n$, так как этот префикс является пределом $\lim\limits_{k\to\infty}(y_{k,1}^{(n)}, \dots, y_{k,d_n}^{(n)}) = \lim\limits_{k\to\infty}(y_{k,1}^{(k)}, \dots, y_{k,d_n}^{(k)})$, который, как было замечено ранее, лежит в K_n.

Остался последний шаг: определим $x \in \mathbb{R}^T$ как $x(t_1) = z_1$, $x(t_2) = z_2, \dots$, в оставшихся точках из T доопределим произвольным образом. Тогда по построению и формуле для множеств D_n выполнено $x \in D_1$, $x \in D_2, \dots$, иными словами:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{n} C_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

В частности, доказали непустоту пересечения $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ всех цилиндров C_n, а ровно это мы и хотели доказать.

3. Нужно доказать, что функция P счётно-аддитивна. В условиях задачи это эквивалентно непрерывности в нуле, то есть, что для любой убывающей к нулю последовательности множеств из $\mathcal{A}$

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots, \ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing, \forall n \ A_n \in \mathcal{A}$$

выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Знаем, что значения P на множествах из $\mathcal{A}$ приближаются с помощью компактного класса $\mathcal{K}$, выберем для множеств A_n приближение с увеличивающейся точностью, то есть выберем K_n так, что $K_n \subset A_n$, $K_n \in \mathcal{K}$ и $P(K_n) > P(A_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$, что эквивалентно $P(A_n \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Так как $K_n \subset A_n$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing$. В силу компактности класса $\mathcal{K}$ есть m для которого $\bigcap_{n=1}^{m} K_n = \varnothing$. Осталось применить не очень хитрый теоретико-множественный трюк, помня, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$:

$$A_m = A_m \setminus \varnothing = A_m \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{m} K_n\right) = \bigcup_{n=1}^{m}(A_m \setminus K_n) \subset \bigcup_{n=1}^{m}(A_n \setminus K_n)$$

И воспользоваться тем, что мы брали приближение с увеличивающейся точностью:

$$P(A_m) \leqslant \sum_{n=1}^{m} P(A_n \setminus K_n) \leqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

Это и означает, что интересующий нас предел равен нулю.

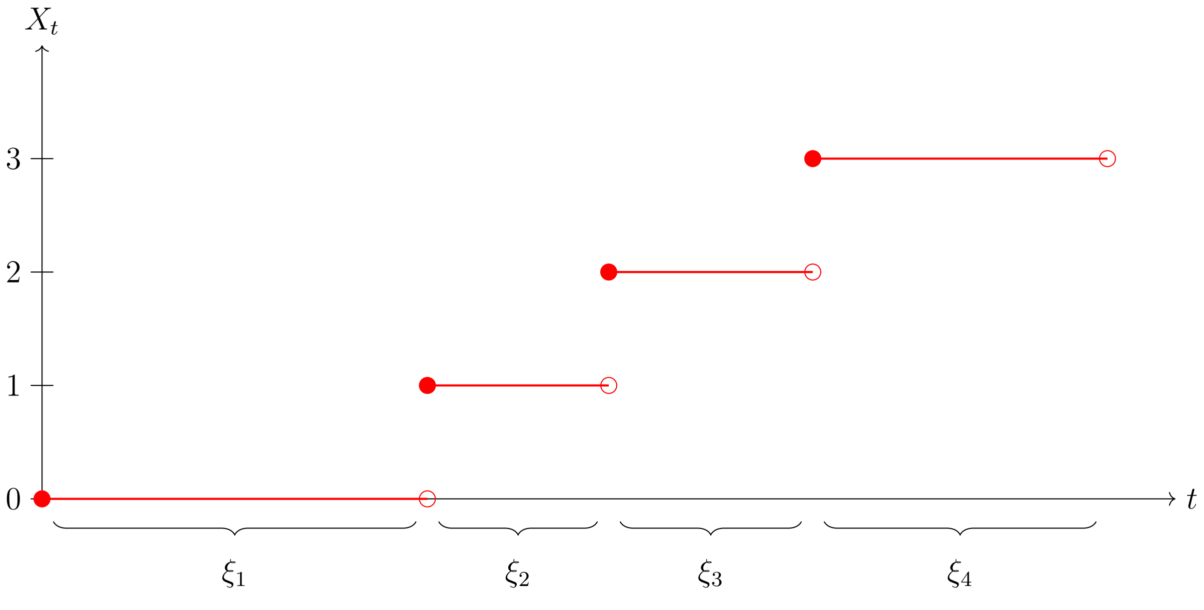
2 Процесс восстановления

Определение 2.1. Пусть $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – независимые одинаково распределённые случайные величины, $\xi_n \geqslant 0$. Процессом восстановления называется случайный процесс

$$X_t = \sup\left\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \colon \sum_{k=1}^{n} \xi_k \leqslant t\right\}, \ t \in [0, +\infty)$$

Здесь можно разрешить и ξ_n, и X_t принимать значение $+\infty$.

Замечание. Это определение имеет физическую интерпретацию. Пусть есть некоторый прибор, ξ – случайная величина его времени работы, ξ неотрицательна. Каждый раз, когда прибор ломается, мы его чиним и запускаем заново, таким образом, появляется последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин его времени работы, разумно предположить, что $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены. Тогда процесс восстановления X_t показывает, сколько раз мы чинили прибор к моменту времени t.



Задача. *Пусть $(X_t,\ t \geqslant 0)$ – процесс восстановления, построенный по н.о.р.с.в. $\xi_n \geqslant 0$, пусть $\xi_n < +\infty$ почти наверное. Доказать, что:*

$$P\left(\omega\colon \lim_{t\to+\infty} X_t = +\infty\right) = 1$$

Доказательство.

▷ Так как $X_t = X_t(\omega)$ – монотонная по t функция, то при всех ω существует $\lim\limits_{t\to+\infty} X_t$, конечный или бесконечный. В таком случае рассмотрим множество:

$$\left\{\omega\colon \lim_{t\to+\infty} X_t < +\infty\right\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{\omega\colon \lim_{t\to+\infty} X_t \leqslant k\right\}$$

В силу вложенности множеств из последнего объединения, а также непрерывности вероятностной меры:

$$P\left(\omega\colon \lim_{t\to+\infty} X_t < +\infty\right) = \lim_{k\to\infty} P\left(\omega\colon \lim_{t\to+\infty} X_t \leqslant k\right)$$

Таким образом, необходимо и достаточно доказать, что:

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\omega\colon \lim_{t\to+\infty} X_t \leqslant k\right) = 0$$

▷ Так как $\xi_n < +\infty$ п.н., то и $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k < +\infty$ п.н., отсюда получаем:

$$P\left(\omega\colon \lim_{t\to+\infty} X_t \leqslant k\right) = P\left(\omega\colon \forall t \geqslant 0\ X_t \leqslant k\right) =$$
$$= P\left(\omega\colon \forall t \geqslant 0\ \xi_1 + \dots + \xi_{k+1} > t\right) = P\left(\omega\colon \xi_1 + \dots + \xi_{k+1} = +\infty\right) = 0$$

□

Задача. *Пусть $(X_t,\ t \geqslant 0)$ – процесс восстановления, построенный по независимым, но не обязательно одинаково распределённым случайным величинам $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, здесь все $\xi_n \geqslant 0$. Привести пример такого процесса X_t, что:*

1. $P\left(\lim\limits_{t\to a} X_t = +\infty\right) > 0$, *то есть процесс X_t уходит на бесконечность за конечное время с положительной вероятностью*
2. $P\left(\lim\limits_{t\to+\infty} X_t < +\infty\right) > 0$, *то есть процесс X_t не уходит на бесконечность даже за бесконечное время с положительной вероятностью*

Решение.

1. Рассмотрим независимые случайные величины $\xi_k \sim U\left[0, \frac{1}{2^k}\right]$, построим на их основе процесс восстановления X_t. В таком случае:

$$P\left(\lim_{t\to 1} X_t = +\infty\right) = P\left(\sup\left\{n\colon \sum_{k=1}^{n} \xi_k < 1\right\} = +\infty\right) = P\left(\forall n\ \sum_{k=1}^{n} \xi_k < 1\right) = 1$$

2. Сначала заметим, что если $\xi_k < +\infty$ почти наверное, то такое невозможно. Действительно, тогда и $\sum_{k=1}^{n} \xi_k < +\infty$ почти наверное, и без каких-либо изменений проходит

рассуждение из предыдущей задачи:

$$P\left(\omega\colon \lim_{t\to+\infty} X_t < +\infty\right) = P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}\left\{\omega\colon \lim_{t\to+\infty} X_t \leqslant k\right\}\right) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} P\left(\omega\colon \lim_{t\to+\infty} X_t \leqslant k\right) = \lim_{k\to\infty} P\left(\omega\colon \forall t \geqslant 0\ X_t \leqslant k\right) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} P\left(\omega\colon \forall t \geqslant 0\ \xi_1 + \dots + \xi_{k+1} > t\right) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} P\left(\omega\colon \xi_1 + \dots + \xi_{k+1} = +\infty\right) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0$$

Если же ограничения на конечность случайных величин нет, то возьмём независимые случайные величины ξ_k, такие, что $P(\xi_k = 1) = P(\xi_k = +\infty) = \frac{1}{2}$, в принципе, можно было бы взять и $\xi_k \equiv +\infty$, но некоторые определения процесса восстановления такие случаи запрещают. Построим процесс восстановления X_t, получим:

$$P\left(\omega\colon \lim_{t\to+\infty} X_t < +\infty\right) \geqslant P\left(\omega\colon \lim_{t\to+\infty} X_t = 0\right) = P\left(\omega\colon \forall t \geqslant 0\ X_t = 0\right) =$$
$$= P(\omega\colon \forall t \geqslant 0\ \xi_1 > t) = P(\omega\colon \xi_1 = +\infty) = \frac{1}{2}$$

Замечание. Для процесса восстановления $(X_t,\, t \geqslant 0)$ можно записать удобные теоретико-множественные равенства, которыми, на самом деле, уже пользовались:

$$\{\omega\colon X_t \geqslant n\} = \left\{\omega\colon \sum_{k=1}^{n} \xi_k \leqslant t\right\}$$
$$\{\omega\colon X_t = n\} = \left\{\omega\colon \sum_{k=1}^{n} \xi_k \leqslant t \text{ и } \sum_{k=1}^{n+1} \xi_k > t\right\}$$

Задача. *Пусть $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\xi_n \sim Exp(\lambda)$ – независимые одинаково распределённые случайные величины, обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Пусть $(N_t,\ t \geqslant 0)$ – процесс восстановления, построенный по этим случайным величинам. Обозначим также*

$U_t = t - S_{N_t}$ («недоскок», S_{N_t} – время последнего выхода из строя перед t)
$V_t = S_{N_t+1} - t$ («перескок», S_{N_t+1} – время первого выхода из строя после t)

В задаче требуется:

1. *Вычислить вероятность $P(V_t > v,\, U_t > u)$*
2. *Доказать независимость U_t и V_t, а также $V_t \sim Exp(\lambda)$*
3. *Вычислить функцию распределения U_t и $\mathbb{E}U_t$*

Решение. Начнём с того, что определение U_t и V_t корректно, то есть, что $P(N_t = +\infty) = 0$, в таком случае почти наверное N_t конечно, тогда определены S_{N_t} и S_{N_t+1}, а, следовательно, через них определены U_t и V_t.

Посмотрим, какое распределение имеет S_n, нам это ещё много где пригодится:

$$\begin{aligned}&\xi_1, \ldots, \xi_n \sim Exp(\lambda) = \Gamma(\lambda, 1)\\&\xi_1, \ldots, \xi_n \text{ независимы}\\&\Downarrow\\&S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n \sim \Gamma(\lambda, n)\end{aligned}$$

Теперь с помощью этого знания докажем корректность, зафиксируем $t \geqslant 0$:

$$P(N_t = +\infty) = P(\forall n\ S_n \leqslant t) \leqslant P(S_n \leqslant t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} I\{x > 0\} dx =$$

$$= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int\limits_0^t x^{n-1} e^{-\lambda x} dx \leqslant \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int\limits_0^t x^{n-1} \cdot 1 \cdot dx = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \frac{t^n}{n} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

После этого найдём вероятность $P(V_t > v,\, U_t > u)$. Сразу оговорим, что так как $U_t \geqslant 0$ и $V_t \geqslant 0$, то имеет смысл рассматривать только неотрицательные u и v. Помимо этого, так как $U_t \leqslant t$, то имеет смысл рассматривать только $u < t$.

Для этого не очень умно распишем требуемую вероятность:

$$P(V_t > v,\, U_t > u) = P(S_{N_t+1} - t > v,\, t - S_{N_t} > u) = P\left(\sum_{i=1}^{N_t+1} \xi_i > t + v,\ \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i < t - u\right) =$$

$$= P\left(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} \left\{\sum_{i=1}^{k+1} \xi_i > t + v,\ \sum_{i=1}^{k} \xi_i < t - u,\, N_t = k\right\}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{k+1} \xi_i > t + v,\ \sum_{i=1}^{k} \xi_i < t - u,\, N_t = k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(S_{k+1} > t + v,\, S_k < t - u,\, N_t = k\right)$$

Так как $N_t = k \Leftrightarrow S_k \leqslant t$ и $S_{k+1} > t$, то можем переписать вероятность в виде:

$$P(V_t > v,\, U_t > u) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(S_{k+1} > t + v,\, S_k < t - u,\, S_{k+1} > t,\, S_k \leqslant t\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(S_{k+1} > t + v,\, S_k < t - u\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(S_k + \xi_{k+1} > t + v,\, S_k < t - u\right)$$

Сначала рассмотрим $k \geqslant 1$. Заметим, что мы много знаем о распределении S_k и ξ_{k+1}. Действительно, так как $S_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$, а $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, то S_k и ξ_{k+1} независимы. Помимо этого, мы знаем, что $S_k \sim \Gamma(\lambda, k)$, $\xi_{k+1} \sim Exp(\lambda)$.

Оба распределения имеют плотность, распределения независимы, тогда можем расписать совместную вероятность через двойной интеграл:

$$P\left(S_k+\xi_{k+1}>t+v,\, S_k<t-u\right)=\iint\limits_{\substack{x+y>t+v\\ x<t-u}}\frac{\lambda^k x^{k-1}}{\Gamma(k)}e^{-\lambda x}I\{x>0\}\lambda e^{-\lambda y}I\{y>0\}dxdy$$

Теперь применяем теорему Фубини, получаем повторный интеграл:

$$P\left(S_k+\xi_{k+1}>t+v,\, S_k<t-u\right)=\int\limits_{-\infty}^{t-u}dxI\{x>0\}\int\limits_{t+v-x}^{+\infty}dyI\{y>0\}\frac{\lambda^k x^{k-1}}{\Gamma(k)}e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}$$

После этого избавимся от индикаторов, $I\{x>0\}$ перенесём в пределы интегрирования, $I\{y>0\}$ не нужен, так как $x<t-u$, из-за чего $y>t+v-x\geqslant t-u-x>0$:

$$P\left(S_k+\xi_{k+1}>t+v,\, S_k<t-u\right)=\int\limits_{0}^{t-u}dx\int\limits_{t+v-x}^{+\infty}dy\frac{\lambda^k x^{k-1}}{\Gamma(k)}e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}$$

Осталось уверенно проинтегрировать:

$$P\left(S_k+\xi_{k+1}>t+v,\, S_k<t-u\right)=\frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k)}\int\limits_{0}^{t-u}dx\cdot x^{k-1}e^{-\lambda x}\int\limits_{t+v-x}^{+\infty}dy\cdot e^{-\lambda y}=$$

$$=\frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k)}\int\limits_{0}^{t-u}dx\cdot x^{k-1}e^{-\lambda x}\left(\frac{e^{-\lambda y}}{-\lambda}\right)\Bigg|_{t+v-x}^{+\infty}=\frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k)}\int\limits_{0}^{t-u}dx\cdot x^{k-1}e^{-\lambda x}\frac{e^{-\lambda(t+v-x)}}{\lambda}=$$

$$=\frac{\lambda^{k}}{\Gamma(k)}\int\limits_{0}^{t-u}x^{k-1}e^{-\lambda(t+v)}dx=\frac{\lambda^{k}}{\Gamma(k)}e^{-\lambda(t+v)}\left(\frac{x^k}{k}\right)\Bigg|_{0}^{t-u}=$$

$$=\frac{\lambda^{k}}{\Gamma(k)}e^{-\lambda(t+v)}\frac{(t-u)^k}{k}=e^{-\lambda(t+v)}\frac{(\lambda(t-u))^k}{k!}$$

Вывели формулу для $k\geqslant 1$. Теперь поймём, что при $k=0$ эта формула тоже верна. Действительно, так как $u<t$, получим:

$$P\left(S_k+\xi_{k+1}>t+v,\, S_k<t-u\right)=P\left(S_0+\xi_1>t+v,\, S_0<t-u\right)=$$

$$=P\left(\xi_1>t+v,\, u<t\right)=P\left(\xi_1>t+v\right)=\int\limits_{t+v}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}I\{x>0\}dx=\int\limits_{t+v}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=$$

$$=\lambda\left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right)\Bigg|_{t+v}^{+\infty}=\lambda\frac{e^{-\lambda(t+v)}}{\lambda}=e^{-\lambda(t+v)}=e^{-\lambda(t+v)}\frac{(\lambda(t-u))^k}{k!}$$

Теперь подставим полученные результаты в формулу для искомой вероятности:

$$P(V_t > v,\, U_t > u) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(S_k + \xi_{k+1} > t + v,\, S_k < t - u\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda(t+v)} \frac{(\lambda(t-u))^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda(t+v)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda(t-u))^k}{k!} = e^{-\lambda(\cancel{t}+v)} e^{\lambda(\cancel{t}-u)} = e^{-\lambda u} e^{-\lambda v}$$

Таким образом, получили, что при $0 \leqslant u < t$, $0 \leqslant v$ выполнено:

$$P(V_t > v,\, U_t > u) = e^{-\lambda u} e^{-\lambda v}$$

Иными словами, при $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ выполнено:

$$P(V_t > v,\, U_t > u) = e^{-\lambda u} I\{u < t\} \cdot e^{-\lambda v}$$

Так как экспоненциальное распределение абсолютно непрерывно, то при $t > 0$ выполнено $P(V_t = 0) = 0$, $P(U_t = 0) = 0$, поэтому, взяв $u = 0$ и $v = 0$, получим:

$$P(V_t > v) = e^{-\lambda v},\ v \geqslant 0$$
$$P(U_t > u) = e^{-\lambda u} I\{u < t\},\ u \geqslant 0$$

Отсюда понятно, почему U_t и V_t независимы, у нас был критерий, что случайные величины независимы тогда и только тогда, когда их совместная функция распределения распадается на произведение функций распределения самих случайных величин. Здесь знак больше вместо знака меньше, строгий вместо нестрогого, но понятно, что это не очень важно.

Отсюда также мгновенно получаются функции распределения случайных величин:

$$P(V_t \leqslant v) = (1 - e^{-\lambda v}) I\{v \geqslant 0\} \ \Rightarrow\ V_t \sim Exp(\lambda)$$

$$P(U_t \leqslant u) = \begin{cases} 0,\ u < 0, \\ 1 - e^{-\lambda u},\ 0 \leqslant u < t, \\ 1,\ u \geqslant t \end{cases}$$

Осталось посчитать $\mathbb{E}U_t$, это стандартная задача с теории вероятностей на смесь дискретного и абсолютно непрерывного распределения, нам для этого понадобятся два факта, $(1 - e^{-\lambda u})'_u = \lambda e^{-\lambda u}$ и $P(U_t = t) = e^{-\lambda t}$:

$$\mathbb{E}U_t = \int_0^t u\lambda e^{-\lambda u} du + te^{-\lambda t} = \int_0^t u \cdot d(-e^{-\lambda u}) + te^{-\lambda t} =$$

$$= (-ue^{-\lambda u})\Big|_0^t - \int_0^t (-e^{-\lambda u}) du + te^{-\lambda t} = (-ue^{-\lambda u})\Big|_0^t - \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda u}\right)\Bigg|_0^t + te^{-\lambda t} =$$

$$= -\cancel{te^{-\lambda t}} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} + \cancel{te^{-\lambda t}} = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$$

3 Пуассоновский процесс

Определение 3.1. Случайный процесс $(X_t,\, t \geqslant 0)$ называется процессом с независимыми приращениями, если $\forall n\ \forall 0 \leqslant t_1 < \dots < t_n\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1}$ – независимые в совокупности случайные величины.

Определение 3.2. Случайный процесс $(N_t,\, t \geqslant 0)$ называется пуассоновским процессом интенсивности $\lambda > 0$, если выполнены три условия:

1. $N_0 = 0$ п.н.
2. N_t имеет независимые приращения
3. $N_t - N_s \sim Pois(\lambda(t-s))\ \forall t > s \geqslant 0$

Теорема 3.1. *(без доказательства) Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\xi_n \sim Exp(\lambda)$ *– независимые одинаково распределённые случайные величины. Тогда процесс восстановления* $(N_t,\, t \geqslant 0)$*, построенный по этим случайным величинам, является пуассоновским процессом интенсивности* λ*.*

Задача. *Пусть* $(N_t,\, t \geqslant 0)$ *– пуассоновский процесс интенсивности* λ*. Найти*

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{\text{п.н.}} ?$$

Замечание. Здесь сходимость почти наверное понимается в следующем смысле, это стоит оговорить, так как тут более чем счётное семейство случайных величин:

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{\text{п.н.}} \xi \ \Leftrightarrow\ P\left(\omega\colon \frac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \xi\right) = 1$$

Решение. Начнём со счётной последовательности случайных величин $N_0, N_1, N_2, \dots$. По определению пуассоновского процесса случайные величины $N_1 - N_0, \dots, N_n - N_{n-1}$ независимы, следовательно, вся последовательность $N_1 - N_0, N_2 - N_1, \dots$ случайных величин независима. Также, $N_0 = 0$ п.н., а $N_n - N_{n-1} \sim Pois(\lambda(n-(n-1))) = Pois(\lambda)$. Тогда, применяя УЗБЧ, получим:

$$\frac{N_n}{n} = \frac{N_0 + (N_1 - N_0) + \dots (N_n - N_{n-1})}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}Pois(\lambda) = \lambda$$

Теперь заметим, что так как для $t > s$ выполнено $N_t - N_s \sim Pois(\lambda(t-s))$, а распределение Пуассона принимает только целые неотрицательные значения, то при всех ω функция $N_t(\omega)$ не убывает по t, тогда можем сделать оценки при всех ω и при всех t:

$$\frac{N_{[t]}}{[t]}\frac{[t]}{[t]+1} = \frac{N_{[t]}}{[t]+1} \leqslant \frac{N_t}{t} \leqslant \frac{N_{[t]+1}}{[t]} = \frac{N_{[t]+1}}{[t]+1}\frac{[t]+1}{[t]}$$

Зафиксируем ω, такое, что $\frac{N_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$, как уже выяснили, все подходящие ω образуют множество вероятности 1. При таком фиксированном ω в последнем неравенстве, так как $[t]$ и $[t]+1$ целые, можем применить счётный предел, помимо этого, воспользуемся простыми соображениями из курса математического анализа:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{N_{[t]}(\omega)}{[t]}=\lim_{t\to+\infty}\frac{N_{[t]+1}(\omega)}{[t]+1}=\lambda$$
$$\lim_{t\to+\infty}\frac{[t]}{[t]+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{[t]+1}{[t]}=1$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{N_t(\omega)}{t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}\lambda$$

Так как мы брали ω из множества единичной вероятности, то мы доказали, что:

$$\frac{N_t}{t}\xrightarrow[t\to+\infty]{\text{п.н.}}\lambda$$

Смысл полученного результата следующий: так как процесс восстановления для экспоненциальных случайных величин является пуассоновским процессом, а N_t в таком случае есть количество починок прибора за время t, то за большой промежуток времени мы будем чинить прибор со скоростью $\approx\lambda$ раз/ед.врем.

Определение 3.3. Случайный процесс $(Y_t,\, t\in T)$ называется модификацией случайного процесса $(X_t,\, t\in T)$, если $\forall t\in T$ выполнено $P(X_t=Y_t)=1$.

Пример. Пусть $(\Omega,\mathcal{F},P)=([0,1],\mathfrak{B}[0,1],\lambda)$, где λ – классическая мера Лебега на $[0,1]$, $T=[0,1]$. Рассмотрим случайные процессы:

$$X_t\equiv 0$$
$$Y_t=\begin{cases}0,\ t\neq\omega,\\ 1,\ t=\omega\end{cases}$$

Процессы X_t и Y_t являются модификациями друг друга, но при этом у них не совпадает ни одна траектория.

Задача. *Доказать, что у пуассоновского процесса $(N_t,\, t\geqslant 0)$ интенсивности λ не существует непрерывной модификации, то есть модификации $(X_t,\, t\geqslant 0)$, у которой все траектории X_t непрерывны по t.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $(X_t, t\geqslant 0)$ – непрерывная модификация пуассоновского процесса $(N_t, t\geqslant 0)$.

Рассмотрим счётное множество $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ как подмножество моментов времени. Возьмём момент времени $q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$, тогда $N_q\sim N_q-N_0\sim Pois(\lambda q)$ в силу свойств 1 и 3 из определения пуассоновского процесса, а так как $P(X_q=N_q)=1$, то $X_q\sim Pois(\lambda q)$. Здесь носитель X_q уже не обязательно целый, но так как распределение Пуассона принимает целые значения, то множество $A_q=\{\omega\colon X_q\in\mathbb{Z}\}$ имеет единичную вероятность $P(A_q)=1$.

В таком случае рассмотрим множество $A=\bigcap\limits_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}A_q$, так как это счётное пересечение множеств единичной вероятности, то $P(A) = 1$. При этом выполнено:

$$\forall \omega \in A \ \forall q \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \quad X_q = X_q(\omega) \in \mathbb{Z}$$

Зафиксируем $\omega \in A$. Знаем, что $X_t(\omega)$ непрерывна по t, при этом в точках из $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ $X_t(\omega)$ принимает только целые значения. Так как множество $\mathbb{Z}$ замкнуто, а по непрерывности $X_t(\omega)$ однозначно восстанавливается на $[0,1]$ по своим значениям в рациональных точках, то $X_t(\omega)$ на всём $[0,1]$ принимает только целые значения, значит, $X_t(\omega) \equiv const$ на $[0,1]$.

Так как $N_0 = 0$ п.н., $X_0 = N_0$ п.н., то $X_0 = 0$ п.н., тогда множество $\{\omega\colon X_0 = 0\} \cap A$ имеет вероятность 1, при этом, так как доказали постоянность траекторий на отрезке $[0,1]$ на множестве A:

$$\forall \omega \in \{\omega\colon X_0 = 0\} \cap A \ \forall t \in [0,1] \quad X_t = X_t(\omega) = 0$$

Отсюда следует, что $X_{1/2} = 0$ п.н., в то же время $X_{1/2} \sim Pois\left(\frac{1}{2}\lambda\right)$, получили противоречие, что нам и было нужно. $\square$

Задача. *Пусть* $X = (X_t,\ t \in [0,T])$ *– случайный процесс, для которого* $P(X_s \leqslant X_t) = 1$ *при* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. *Доказать, что у* X *существует модификация, имеющая почти наверное неубывающие траектории.*

Замечание. В частности, условие задачи выполнено для пуассоновского процесса.

Доказательство.

Шаг 1 Докажем, что $\forall t \in [0,T] \quad \exists P\text{-}\lim\limits_{s \to t-0} X_s$ и $P\text{-}\lim\limits_{s \to t+0} X_s$, то есть пределы слева и справа в точке t случайных величин X_s по вероятности, докажем для предела справа, для предела слева доказывается аналогично. То есть нужно доказать, что для фиксированного $t \in [0,T]$ существует случайная величина $X_{t+}(\omega)$, являющаяся пределом справа по вероятности, иными словами, выполнено:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_s - X_{t+}| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[s \to t+0]{} 0$$

Так как с последовательностью случайных величин работать проще, чем с их континуальным семейством, сначала разберёмся со счётным случаем. Пусть $t_n \downarrow t$, то есть возьмём произвольную последовательность t_n, такую, что t_n убывает и сходится к t. Так как, в силу условия, почти наверное $X_{t_1} \geqslant X_{t_2}$, почти наверное $X_{t_2} \geqslant X_{t_3}$ и так далее, то счётное пересечение этих событий тоже имеет вероятность 1, то есть почти наверное $X_{t_1} \geqslant X_{t_2} \geqslant X_{t_3} \geqslant \ldots$. Аналогично, почти наверное $X_{t_1} \geqslant X_t$, почти наверное $X_{t_2} \geqslant X_t$ и так далее, переходим к счётному пересечению, получаем, что почти наверное $X_{t_1} \geqslant X_{t_2} \geqslant X_{t_3} \geqslant \ldots \geqslant X_t$. В таком случае, почти наверное последовательность X_{t_n} убывает и ограничена снизу через X_t, следовательно, почти наверное существует и конечен предел $X_{t+} = \lim\limits_{n \to \infty} X_{t_n}$. Более того, X_{t+}, как предел счётной последовательности случайных величин, является случайной величиной. И так как сходимость почти наверное влечёт сходимость по вероятности, получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(|X_{t_n} - X_{t+}| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Теперь хотим от предела по последовательности t_n перейти к пределу по s. Для этого нам будет достаточно такой оценки:

$$\forall t < s_1 \leqslant s_2 \;\; P\left(|X_{s_2} - X_{t+}| \geqslant \varepsilon\right) \geqslant P\left(|X_{s_1} - X_{t+}| \geqslant \varepsilon\right)$$

Действительно, если такая оценка верна, то последовательность $P\left(|X_s - X_{t+}| \geqslant \varepsilon\right)$ при $s \to t+0$ убывает, конечно, ограничена снизу, поэтому сходится, и предел будет таким же, что и предел по последовательности t_n:

$$\lim_{s \to t+0} P\left(|X_s - X_{t+}| \geqslant \varepsilon\right) = \lim_{n \to \infty} P\left(|X_{t_n} - X_{t+}| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

Поняли, что такой оценки достаточно, теперь докажем эту самую оценку. Вспомним, что по условию при $s_1 \leqslant s_2$ выполнено $P(X_{s_1} \leqslant X_{s_2}) = 1$. Заметим ещё два факта, во-первых, $P(X_{t+} \geqslant X_t) = 1$, во-вторых, при $s > t$ выполнено $P(X_s \geqslant X_{t+}) = 1$. Первый факт следует из того, что почти наверное $X_{t_1} \geqslant X_{t_2} \geqslant \ldots \geqslant X_t$ и $X_{t+} = \lim\limits_{n \to \infty} X_{t_n}$. Второй факт следует из того, что имеем $t < s$, выберем $t_n \in (t, s)$, получим, что почти наверное $X_{t_n} \geqslant X_{t+}$ в силу определения X_{t+} и почти наверное $X_s \geqslant X_{t_n}$ в силу условия.

Теперь вернёмся к оценке, которую хотим доказать, пусть $t < s_1 \leqslant s_2$. Продолжим наблюдения, которые дадут итоговый результат:

$$\begin{aligned}
P(X_{s_1} \geqslant X_{t+}) = 1 \;\Rightarrow\; & P\left(|X_{s_1} - X_{t+}| \geqslant \varepsilon\right) = P\left(|X_{s_1} - X_{t+}| \geqslant \varepsilon,\, X_{s_1} \geqslant X_{t+}\right) = \\
& = P\left(X_{s_1} - X_{t+} \geqslant \varepsilon\right) \\
P(X_{s_2} \geqslant X_{t+}) = 1 \;\Rightarrow\; & P\left(|X_{s_2} - X_{t+}| \geqslant \varepsilon\right) = P\left(X_{s_2} - X_{t+} \geqslant \varepsilon\right) \\
P(X_{s_1} \leqslant X_{s_2}) = 1 \;\Rightarrow\; & P\left(X_{s_1} - X_{t+} \geqslant \varepsilon\right) = P\left(X_{s_1} - X_{t+} \geqslant \varepsilon,\, X_{s_1} \leqslant X_{s_2}\right) \leqslant \\
& \leqslant P\left(X_{s_2} - X_{t+} \geqslant \varepsilon\right)
\end{aligned}$$

Итоговый результат, действительно, получили:

$$P\left(|X_{s_1} - X_{t+}| \geqslant \varepsilon\right) = P\left(X_{s_1} - X_{t+} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant P\left(X_{s_2} - X_{t+} \geqslant \varepsilon\right) = P\left(|X_{s_2} - X_{t+}| \geqslant \varepsilon\right)$$

Хорошо, получили, что при всех $t \in [0, T]$ существуют пределы:

$$P\text{-}\lim_{s \to t-0} X_s = X_{t-} \text{ и } P\text{-}\lim_{s \to t+0} X_s = X_{t+}$$

Шаг 2 Докажем, что для всех $t \in [0, T]$, кроме, возможно, счётного числа, выполнено почти наверное равенство $P(X_{t-} = X_t = X_{t+}) = 1$. Сначала вспомним несколько фактов, полученных при доказательстве предыдущего шага, пусть $s < t$, возьмём $r \in (s, t)$:

$$\begin{aligned}
&\text{п.н. } X_{s-} \leqslant X_s \leqslant X_{s+} \\
&\text{п.н. } X_{t-} \leqslant X_t \leqslant X_{t+} \\
&\text{п.н. } X_{s+} \leqslant X_r \leqslant X_{t-} \\
&\Downarrow \\
&\text{п.н. } X_{s-} \leqslant X_s \leqslant X_{s+} \leqslant X_{t-} \leqslant X_t \leqslant X_{t+}
\end{aligned}$$

Пока предположим, что при всех $t \in [0, T]$ случайные величины X_t, X_{t+}, X_{t-} имеют математические ожидания. Для произвольных $s < t$, $s, t \in [0, T]$ в силу полученного только что факта:

$$X_{s-} \leqslant X_s \leqslant X_{s+} \leqslant X_{t-} \leqslant X_t \leqslant X_{t+} \text{ почти наверное}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbb{E}X_{s-} \leqslant \mathbb{E}X_s \leqslant \mathbb{E}X_{s+} \leqslant \mathbb{E}X_{t-} \leqslant \mathbb{E}X_t \leqslant \mathbb{E}X_{t+}$$

Теперь зачем всё это нужно: рассмотрим плохую точку t, в которой утверждение шага не выполнено, то есть $P(X_{t-} = X_t = X_{t+}) < 1$, мы знаем $P(X_{t-} \leqslant X_t \leqslant X_{t+}) = 1$, тогда возможно два варианта: либо $P(X_{t-} < X_t) > 0$, либо $P(X_t < X_{t+}) > 0$, отсюда следует:

$$P(X_{t-} \leqslant X_t) = 1,\ P(X_{t-} < X_t) > 0 \ \Rightarrow\ \mathbb{E}X_{t-} < \mathbb{E}X_t$$
$$\text{либо}$$
$$P(X_t \leqslant X_{t+}) = 1,\ P(X_t < X_{t+}) > 0 \ \Rightarrow\ \mathbb{E}X_t < \mathbb{E}X_{t+}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbb{E}X_{t-} < \mathbb{E}X_{t+}$$

Тогда проблемной точке t можно сопоставить рациональное число $q \in (\mathbb{E}X_{t-}, \mathbb{E}X_{t+})$, и в силу того, что при $s < t$ выполнено $\mathbb{E}X_{s-} \leqslant \mathbb{E}X_{s+} \leqslant \mathbb{E}X_{t-} \leqslant \mathbb{E}X_{t+}$, такое число будет уникальным для каждой проблемной точки. Это доказывает, что мы можем пересчитать все плохие точки, то есть их действительно счётное число.

Теперь поймём, что мир устроен немного сложнее, и конечные математические ожидания существуют далеко не всегда. Тем не менее, общий случай можно свести к только что рассмотренному частному, для этого нам понадобятся срезки случайных величин:

$$X_{t,[N]}(\omega) = \begin{cases} -N,\ X_t(\omega) \leqslant -N, \\ X_t(\omega),\ -N < X_t(\omega) < N, \\ N,\ X_t(\omega) \geqslant N \end{cases}$$

Для срезок тоже можем рассмотреть множество плохих точек:

$$T_N = \left\{t \in [0, T]\colon P(X_{t-,[N]} = X_{t,[N]} = X_{t+,[N]}) < 1\right\}$$

Срезки наследуют полученные выше неравенства вероятности 1, при этом в силу ограниченности они имеют конечные математические ожидания, поэтому для них работает последнее рассуждение, и множество проблемных точек T_N счётно. Счётное объединение счётных множеств счётно, поэтому $T_\infty = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} T_N$ тоже является счётным множеством. Оказывается, что T_∞ содержит все проблемные точки исходных случайных величин.

Действительно, возьмём $t \notin T_\infty$, то есть для t выполнено:

$$\forall N \in \mathbb{N} \ \ P(X_{t-,[N]} = X_{t,[N]} = X_{t+,[N]}) = 1$$

Можем записать теоретико-множественные равенства:

$$\{\omega : X_{t-} = X_t = X_{t+}\} = \{\omega\colon \forall N \in \mathbb{N} \;\; X_{t-,[N]} = X_{t,[N]} = X_{t+,[N]}\} = \\ = \bigcap_{N=1}^{\infty} \{\omega\colon X_{t-,[N]} = X_{t,[N]} = X_{t+,[N]}\}$$

В силу вложенности множеств из последнего пересечения можем применить непрерывность вероятностной меры:

$$P(X_{t-} = X_t = X_{t+}) = \lim_{N\to\infty} P(X_{t-,[N]} = X_{t,[N]} = X_{t+,[N]}) = \lim_{N\to\infty} 1 = 1$$

То есть получили, что если $t \notin T_\infty$, то она не является проблемной, следовательно, в T_∞ содержатся все проблемные точки, следовательно, множество проблемных точек счётно, а это в точности утверждение текущего шага.

Шаг 3 Рассмотрим множество $T_0 = T_\infty \cup (\mathbb{Q} \cap [0, T])$. Это множество, во-первых, счётно, как объединение двух счётных множеств, во-вторых, всюду плотно в $[0, T]$, так как содержит рациональные точки отрезка, в-третьих, $\forall t \notin T_0 \;\; P(X_{t-} = X_t = X_{t+}) = 1$.

Теперь наконец-то определим модификацию, то, что получится модификация, докажем ниже, случайного процесса X_t:

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega),\, t \in T_0, \\ \inf\limits_{s>t,\; s\in T_0} X_s(\omega),\, t \notin T_0 \end{cases}$$

Посмотрим, как устроен случайный процесс $(Y_t,\, t \in [0, T])$. Для этого посмотрим на случайный процесс $(X_t,\, t \in [0, T])$ в счётном множестве точек T_0:

$$P(X_s \leqslant X_t) = 1 \;\; \forall s \leqslant t,\, s, t \in T_0$$

$$\Downarrow$$

$$P(X_s \leqslant X_t \;\; \forall s \leqslant t,\, s, t \in T_0) = P\left(\bigcap_{s\leqslant t,\;\, s,t\in T_0} X_s \leqslant X_t\right) = 1,$$

так как пар $s \leqslant t,\, s, t \in T_0$ счётное число

При этом по построению на множестве $\{\omega\colon X_s \leqslant X_t \;\; \forall s \leqslant t,\, s, t \in T_0\}$ траектории случайного процесса Y_t являются неубывающими, то есть почти все траектории случайного процесса Y_t являются неубывающими.

Для завершения доказательства нам остаётся понять, почему случайный процесс Y_t является модификацией случайного процесса X_t.

Зафиксируем $t \in T$, нужно доказать, что $P(X_t = Y_t) = 1$. Если $t \in T_0$, то доказывать нечего, по построению $X_t \equiv Y_t$, таким образом, пусть $t \notin T_0$. Заметим, что для ω из множества $\{\omega\colon X_{s_1} \leqslant X_{s_2} \;\; \forall s_1 \leqslant s_2,\, s_1, s_2 \in T_0\}$, которое имеет единичную вероятность, в силу неубывания инфимум вырождается в предел справа:

$$Y_t(\omega) = \inf_{s>t,\; s\in T_0} X_s(\omega) = \lim_{s\to t+0,\; s\in T_0} X_s(\omega)$$

В частности, если выберем $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T_0$, $t_n \downarrow t$, то получим:

$$\begin{aligned}
&Y_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega) \ \ \forall\omega \in \{\omega\colon X_{s_1} \leqslant X_{s_2} \ \ \forall s_1 \leqslant s_2,\, s_1, s_2 \in T_0\}\\
&\Downarrow\\
&Y_t = \lim_{n\to\infty} X_{t_n} \text{ почти наверное}\\
&\Downarrow\\
&X_{t_n} \xrightarrow{P} Y_t
\end{aligned}$$

Но вспомним, что уже находили предел по вероятности $X_{t+} = P\text{-}\lim\limits_{s\to t+0} X_s$, который, в частности, является пределом по вероятности $X_{t_n} \xrightarrow{P} X_{t+}$. В силу теоремы Рисса, из последовательности, сходящейся по вероятности, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти наверное, что мгновенно означает, что предел по вероятности единственен с точностью до множества нулевой вероятности.

Отсюда и из того, что $t \notin T_0$, следует, что $Y_t = X_{t+} = X_t$ почти наверное. Последнее означает, что $P(X_t = Y_t) = 1$, а это ровно то, что нам оставалось доказать.

$\square$