Integrationskonstanten P.I

Montag, 14. Mai 2018 17:59

Integrationskonstanten bei unbestimmter partieller Integration

Wir interpretieren das unbestimmte Integral implizit als "die Menge aller Stammfunktionen":

$$\int f dx = \left\{ F(x) \mid \frac{d}{dx} F(x) = f(x) \right\}$$

Ein Ausdruck der Form:

$$\int f dx + C := \left\{ F(x) + C \mid \frac{d}{dx} F(x) = f(x) \right\}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Bezeichnet dann wieder eine Menge von Funktionen, wobei lediglich alle um C verschoben wurden. In der Tat gilt:

$$\int f dx = \int f dx + C \quad \text{(d.h. die Mengen sind gleich)}$$

<u>Beweis</u>:

„$\subseteq$"

Sei $\tilde{F} \in \left(\int f dx + C\right) \Rightarrow \exists F \in \int f dx : \tilde{F} = F + C$

$\frac{d}{dx} \tilde{F} = \frac{d}{dx}(F + C) = f \rightarrow \tilde{F} \in \int f dx$ ✓

„$\supseteq$"

Sei $F \in \int f dx \rightarrow \check{F} := F - C \in \int f dx$

da $F = \check{F} + C \Rightarrow F \in \int f dx + C$

Wir verwenden diese Tatsache um zu zeigen, dass es beim unbestimmten partiellen Integrieren keine Rolle spielt ob wir die Integrationskonstante am Ende, oder während dem Integrieren (von v' zu v) hinzufügen:

$$\int u v' dx = u(v + C) - \int u'(v + C) dx$$

$$\int uv'dx = u(v+C) - \int u'(v+C)dx$$
$$= uv + u\cdot C - \int u'v\,dx - C\int u'dx$$
$$= uv + u\cdot C - \int u'v\,dx - C(u+D)dx$$
$$= uv + uC - \int u'v\,dx - uC - CD$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{CD + \int uv'dx}_{= \int uv'dx \text{ (Siehe Beweis oben.)}} = uv - \int u'v\,dx$$
$$\Leftrightarrow \int uv'dx = uv - \int u'v\,dx$$

Wie wir sehen löschen sich alle neu auftretenden Terme (welche durch die Konstante C eingeführt wurden) gegenseitig auf.
Das heisst wir können uns das leben einfacher machen, indem wir die Integrationskonstante beim integrieren von v' auf v ignorieren und sie erst am Ende hinzuaddieren.