Vorbesprechung Serie 4

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

Tipps Serie 4

4.3 Die Aussage ist falsch. Finde ein Gegenbsp s.d.

$|a_n - a_{n+1}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ aber a_n divergiert.

(Bemerke dass für eine Folge a_n, die Folge der Teilsummen $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ ebenfalls eine Folge ist.)

4.5

a) Zeige für $k \geq n$ bel. dass $|s_{n+k} - s_n| \leq \frac{1}{n+1}$

Um dies zu tun zeige separat:

$$-\frac{1}{n+1} \underset{(1)}{\leq} (-1)^n (s_{n+k} - s_n) \underset{(2)}{\leq} \frac{1}{n+1}$$ daraus folgt dann: $|(-1)^n (s_{n+k} - s_n)| = |s_{n+k} - s_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

Verwende dass $$|a - s_n| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_n - \sum_{k=1}^{n} a_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_n\right| = \lim_{k\to\infty} |s_{n+k} - s_n|$$

b) Zeige für $m \geq n$ bel. dass

$$|s_{n+m} - s_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\right)$$

Beachte dass s_n mon. steigend $\Rightarrow |s_{n+m} - s_n| = s_{n+m} - s_n$

Verwende (analog zu a)) dass

$$e - s_n \leq \lim_{m\to\infty} (s_{n+m} - s_n) \leq \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\right)$$

Benutze dass $$\sum^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \sum^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4.2 MC

(1) <u>Beh</u> $\sum^{\infty} a_n$ und $\sum^{\infty} b_n$ konv abs. $\Rightarrow \sum^{\infty} a_n + b_n$ konv. abs.

<u>Bew.:</u>

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |b_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| + \sum_{k=1}^{n} |b_k| \xrightarrow{n\to\infty} \sum^{\infty} |a_n| + \sum^{\infty} |b_n|$$

$$\sum_{k=1} |a_k+b_k| \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-Ungl.}}}{\le} \sum_{k=1} |a_k|+|b_k| = \sum_{k=1} |a_k| + \sum_{k=1} |b_k| \longrightarrow \sum |a_n| + \sum |b_n|$$

$\underline{\text{Satz 3.3.2}} \Rightarrow \sum^{\infty} |a_n+b_n|$ existiert $\square$

② $\underline{\text{Beh}}$ $\sum^{\infty} a_n$ und $\sum^{\infty} b_n$ konv. abs. $\Rightarrow \sum^{\infty} a_n \cdot b_n$ konv. abs.

$\underline{\text{Bew:}}$

$\sum^{\infty} a_n$ konv. $\Rightarrow \lim |a_n| = 0 \Rightarrow \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; |a_n| < 1.$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| = \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0} |a_n||b_n|}_{=:C} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n||b_n| \leq C + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |b_n| < \infty \quad \square$$

③ $\underline{\text{Beh}}$ $\sum^{\infty} a_n < \infty \Rightarrow \sum (-1)^n a_n < \infty$

Die Beh. ist Falsch. Gegenbsp:

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \Longrightarrow \sum^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} < \infty$$

aber $\sum^{\infty} (-1)^n a_n = \sum^{\infty} (-1)^{2n} \cdot \frac{1}{n} = \sum^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \square$