Vorbesprechung Serie 12

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

Integration durch Substitution

Bestimmt

$f: [a,b] \to \mathbb{R} \quad \in C^0$

$g: [c,d] \to \mathbb{R} \quad \in C^1$

$\operatorname{im} g = g([c,d]) \subseteq [a,b]$

Dann gilt: $\displaystyle\int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx$

$\overset{\text{"}}{\longrightarrow}$

Bsp $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \underbrace{\cos}_{f}(\underbrace{t^2}_{g})\,2t\,dt = \int_0^{\pi} \cos(x)\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi} = \underline{\underline{0}}$

Bsp $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\,dx$ subst: $u = 2+x^2 \quad \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2x}\,du = dx$

$u(0) = 2, \; u(1) = 3$

$\displaystyle\Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\,dx = \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int_2^3 u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\Big[2\sqrt{u}\Big]_2^3 = \underline{\underline{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$

Bsp $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{x+1}^{\,3}\,dx$

Wenn die Substitution-Funktion nicht offensichtlich ist, hilft es manchmal die Funktion geschickt umzuformen:

„Schulbuch-Substitution"

$$\boxed{\begin{array}{l} g(x) = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow g(x)^2 - 1 = x \quad (x > 0) \\ g'(x) = \dfrac{1}{2g(x)} \end{array}}$$

Dann gilt:

$$\int_0^2 x\sqrt{x+1}^{\,3}\,dx = \int_0^2 (g(x)^2-1)\,g(x)^3\,dx$$

$$= 2\int_0^2 (g(x)^2-1)\,g(x)^4\,\frac{1}{2g(x)}\,dx$$

$$= 2\int_0^2 (g(x^2)-1)\,g(x)^4\cdot g'(x)\,dx$$

$$\boxed{f(x) = (x^2-1)\,x^4} \; — \; = 2\int_0^2 f(g(x))\,g'(x)\,dx$$

$$= 2\int_{g(c)}^{g(2)} f(u)\,du = 2\int_0^{\sqrt{3}} f(u)\,du$$

$$= 2\left[\frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5}\right]_{u=1}^{u=\sqrt{3}} = \ldots$$

$$= 2\left[\frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5}\right]_{u=1}^{\dots} = \dots$$

„Pragmatische Methode"

$$\boxed{\begin{aligned} &u = \sqrt{1+x^2} \qquad x = u^2 - 1 \\ &\frac{du}{dx} = \frac{1}{2u} \iff dx = 2u\,du \end{aligned}}$$

Das obige Verfahren kann auch etwas effizienter notiert werden:

$$\int_0^2 x\sqrt{1+x^2}^{\,3}\,dx = \int_1^{\sqrt{5}} (u^2-1)u^3 \cdot 2u\,du = 2\int_1^{\sqrt{5}} f(u)\,du$$

„$\leftarrow$"

Wir können uns die Substitutionsregel auch in die andere Richtung vorstellen.
Falls z.B ein Integral der Form

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

vorliegt, welches schwer zu berechnen scheint, können wir versuchen x durch eine Funktion g(x) zu ersetzen, müssen dann aber g'(x) hinzumultiplizieren. Ausserdem brauchen wir ein Urbild von a und ein Urbild von b (bezüglich g):

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{Suche } g(t) \text{ mit } g(c) = a,\ g(d) = b$$

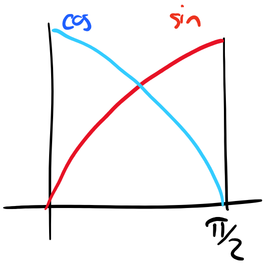
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

$$\int_{\pi/2}^{4\cdot 2\pi} \sqrt{1-\cos^2(t)}\,(-\sin t)\,dt = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du$$

Bsp: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ Subst: $x = \cos t$ $\quad \cos(t_1) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}$

$\cos(t_2) \overset{!}{=} 1 \Rightarrow t_2 = 0$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1-\cos^2 t}\cdot(-\sin t)\,dt = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt}_{=:I_1} = \underbrace{\int_0^{\pi/2} 1\,dt}_{=\pi/2} - \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt}_{=:I_2}$$



$$\Longrightarrow I_1 = I_2 \qquad \Longrightarrow I = \pi/2 - I \iff \underline{\underline{I = \pi/4}}$$

Unbestimmt

$$\int f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int f(u)\,du \,\Big|_{u=g(t)} \quad \text{(Rücksubstituieren!)}$$

Bsp: $\int x\cos(x^2+1)\,dx$ subst $u = x^2+1$, $\frac{du}{dx} = 2x \iff \frac{1}{2x}du = dx$

$$\Longrightarrow \int x\cos(x^2+1)\,dx = \int x\cos u \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u + C \overset{\text{Rücksubst}}{=} \frac{1}{2}\sin(x^2+1) + C$$

$$\Longrightarrow \int x\cos(x^2+1)\,dx = \int x\cos u \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin(x^2+1)+C$$

Tipps Serie 12

12.2 Nicht ganz einfach. Empfohlene Reihenfolge:
Löst zuerst die Aufgaben c), d), e)…
…und a), b) erst am Schluss (Knifflig).

a) Zeige zuerst: $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$

Danach P.I.

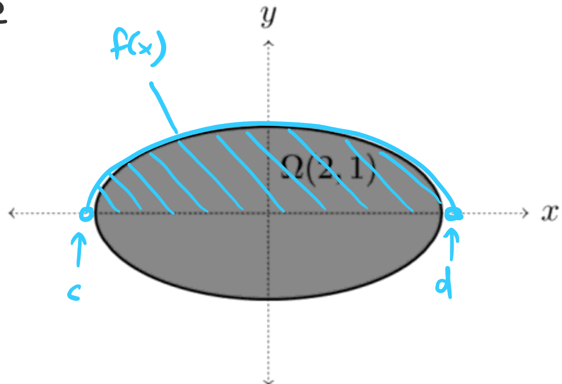
b) Beachte: $\tan\left(\frac{t}{2}\right) = u \iff 2\arctan(u)$

Zeige: $\cos t = \frac{1+u^2}{2}$ und $\frac{dt}{du} = \frac{2}{1+u^2}$.

Dann kannst du substituieren.

c), d), e) ✓

12.3



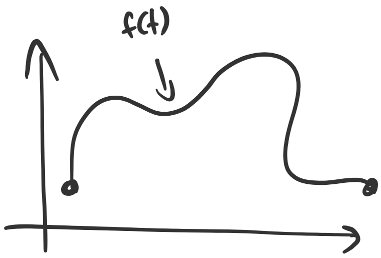
Bestimme $f:[c,d] \to \mathbb{R}$ und berechne:

$$I := \int_c^d f\,dx$$

Die Fläche ist dann $2 \cdot I$.

12.4

Formel für die Kurve: $\int_{-2}^{2} \|f'(t)\|_2\,dt$



wobei $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ (Euklidische Norm)

12.5

Betrachte $f,g,h:[0,\infty) \to [0,\infty)$

$f(t) = \lceil t \rceil^k \quad (k \in \mathbb{N}) \qquad \lceil t \rceil = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq t\}$

$f(t) = \lceil t \rceil^k \qquad (k \in \mathbb{N}) \qquad \lceil t \rceil = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq t\}$

$g(t) = t^k$

$h(t) = (t+1)^k$

und $\int_0^n f\,dt$, $\int_0^n g\,dt$, $\int_0^n h\,dt$.