Vorbesprechung Serie 3

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

Induktive Folgen

Sei (a_n) wie folgt definiert: $a_n = \begin{cases} 0 & , n=0 \\ \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2} & , n>0 \end{cases}$

Vorgehensweise:

Variante 1 Geschlossene Form finden:

$a_0 = 0$
$a_1 = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$a_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$
$a_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$
$a_4 = \dots = \frac{15}{16}$
$\vdots$
$a_n = \frac{2^n-1}{2^n}$ ⟵ Behauptung

Beweis: (Induktion)

Anker $(n=0)$ $a_0 = \frac{2^0-1}{2^0} = \frac{0}{1} = 0$ ✓

Annahme Sei $n\in\mathbb{N}$ beliebig und $a_n = \frac{2^n-1}{2^n}$

Schritt $a_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot a_n + \frac{1}{2} \overset{!}{=} \frac{1}{2}\,\frac{2^n-1}{2^n} + \frac{1}{2} = \frac{2^n-1}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$ □

$$\Rightarrow \lim a_n = \lim \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} = \lim \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1} = 1 \quad \square$$

Variante 2 (z.B. falls geschlossene Form schwierig zu finden)

1. Zeige $\exists a$ s.d. $\lim a_n = a$ (z.B. mit Hilfe von monotoner Konvergenz).
2. Nutze aus dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{k(n)}$ (Für bel. Teilfolge $k(n)$)

1. **Beh. 1:** (a_n) ist nach oben beschränkt durch 1.

   Bew:

   Anker: $a_0 = 0 \leq 1$ ✓

   Schritt: $a_{n+1} = \frac{1}{2}\underbrace{a_n}_{\overset{!}{\leq} 1} + \frac{1}{2} \overset{!}{\leq} \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2} \leq 1$ □

   Beh 2: (a_n) ist mon. wachsend.

   Bew:

Beh 2: (a_n) ist mon. wachsend.

Bew:

Sei $n \in \mathbb{N}$ bel. $\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}a_n = a_n \quad \square$

$$\boxed{1 \geq a_n \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}a_n}$$

a_n monoton wachsend und beschränkt $\Rightarrow \exists a \; \lim a_n = a$.

$$\Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1 \quad \square$$

Konvergenz von Reihen

Sei (a_n) eine Folge. $S_n := \sum_{n=1}^{n} a_n$. Wir suchen Grenzwert von S_n. Falls existent, schreiben wir $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ existiert

(Beachte • absolute konv. $\Longrightarrow$ konvergent)

• absolute konv: Summationsreihenfolge egal.

Kriterien für Konvergenz:

Nullfolgenkriterium

Notwendig: (Sanity-Check, immer zuerst prüfen)

Sei (a_n) eine Folge. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existiert $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

$\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert

Bsp:

$\forall \varepsilon > 0$ betrachte: $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \varepsilon\right)}_{=:a_n}$

Für welche ε konvergiert die Reihe? Offensichtlich: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \varepsilon > 0 \Longrightarrow$ Reihe divergiert

(es wird unendlich oft etwas beliebig kleines (aber festes) aufsummiert).

Aber ACHTUNG: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}\right| = 0$, aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (nicht hinreichend)

Bsp: $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n n^{1/n}}_{=:a_n}$

• $n^{1/n} \xrightarrow{n\to\infty}$

$$|a_n| = n^{1/n} = \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \to \infty} 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Reihe divergiert!} \ \square$$

Majorantenkriterium

z.z.: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Finde (b_n) s.d. $|a_n| \leq b_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert (absolut)!

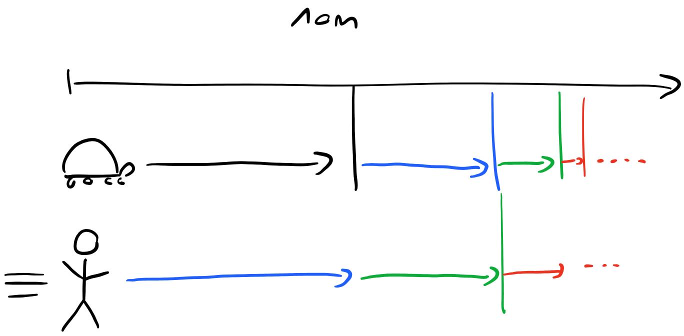
Wichtige konv. Reihen zum Abschätzen:

- Geom. Reihe $\quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad$ (für $|q| < 1$)
- Zeta-Funktion $\quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad$ (für $s > 1$)

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \qquad \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Wie kann mann unendlich oft positive Zahlen aufsummieren ohne dass die Summe "explodiert"? Folgendes Paradox veranschaulicht dieses Phänomen: Zeno hatte die Intuition dass eine unendliche Summe keinen endlichen Grenzwert haben kann.

ZENO's Paradox



Wenn die Aufsummierung der Teilstrecken der Schildkröte beliebig gross werden könnte, dann würde die Schildkröte gewinnen, da Archilles immer hinterher läuft.

Auflösung:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} t_i}_{\text{i-ter Zeitabschnitt}} = t^* \qquad \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} s_i}_{\text{i-te Teilstrecke}} = s^*$$

$\Rightarrow$ Wenn man das Spiel unendlich oft wiederholt erreichen wir eine zeit t* und eine Distanz s* an der Archilles die Schildkröte überholen wird.

Bsp: Majorantenkrit. $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^8+n^3-1}}}_{a_n}$

$$|a_n| = a_n \leq \frac{(n+1)^{1/2}}{n^{8/3}} \leq \frac{(4n)^{1/2}}{n^{8/3}} = 2\frac{n^{1/2}}{n^{8/3}} = \frac{2}{n^{13/6}} = 2\,\frac{1}{n^{13/6}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{1}{n^{13/6}} = 2\,\zeta(\underbrace{13/6}_{>1 \ \Rightarrow \text{ konv.}}) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv. absolut nach Majorantenkriterium.} \ \square$$

>1

$\Rightarrow$ konv.

Quotienten / Wurzel-Kriterium

Quotienten: betrachte $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$

Wurzel: betrachte $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$

falls gilt: $\begin{cases} q < 1 & \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ q = 1 & \Rightarrow \text{keine Aussage} \\ q > 1 & \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$

Bsp (Quotientenkriterium)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{5+n}{10^n}}_{=:a_n} \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(5+n+1)}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{(5+n)} = \frac{6+n}{10(5+n)} = \frac{1}{10} \cdot \frac{\frac{6}{n}+1}{\frac{5}{n}+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{10} < 1$$

$\Rightarrow$ konvergiert

Bsp:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n-5}}_{=:a_n}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n-5}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{1-\frac{5}{n}} = \frac{\left(\frac{n}{2n+1}\right)}{\left(\sqrt[n]{\frac{n}{2n+1}}\right)^5} = \frac{\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\right)}{\left(\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2n+1}}\right)^5} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2+0}\right)}{\left(\frac{1}{1}\right)} = \frac{1}{2} < 1$$

$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{2n+1} \leq \sqrt[n]{3n}$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert

Bsp: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{n!\,x^n}_{=:a_n}$ (Für welche x konvergiert die Reihe?)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = (n+1)\cdot x \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} \infty & \text{für } x>0 \\ -\infty & \text{für } x<0 \\ 0 & \text{für } x=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert für $x=0$