Lösung Serie 2

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

2.3

2.3. Fibonacci (schriftlich) Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv gegeben durch

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2.$$

(a) Beweisen Sie folgende explizite Formel durch vollständige Induktion.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

(b) Zeigen Sie, dass $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ gegen die goldene Zahl $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

(c) Finden Sie eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ sodass folgende Aussage gilt.

$$\forall m \in \mathbb{N},\ m \geq n: \quad \left|b_m - \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right| \leq \tfrac{1}{100}.$$

a) Durch Induktion:

Anker ($n=1, n=2$)

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \checkmark$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5-(1-2\sqrt{5}+5)}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{4} = 1 \checkmark$$

Annahme Sei $n \geq 2$ bel. und es gilt: $a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}_{=:A}^k - \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}_{=:B}^k\right)$ $(\forall k \leq n)$

Schritt ($n \mapsto n+1$)

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \overset{I.H}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}(A^n - B^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}(A^{n-1} - B^{n-1})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(A^{n-1}\cdot(A+1) - B^{n-1}(B+1)\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} A+1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}+1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = A^2 \\ B+1 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2}+1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = B^2 \end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(A^{n-1}A^2 - B^{n-1}B^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(A^{n+1} - B^{n+1}\right) \square$$

b) z.z: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \iff \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\geq n_0: \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - A\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - A\right| = \left|\frac{\frac{1}{\sqrt5}\cdot(A^{n+1}-B^{n+1})}{\frac{1}{\sqrt5}(A^n-B^n)} - A\right| = \left|\frac{A^{n+1}-B^{n+1}-A^{n+1}+AB^n}{A^n-B^n}\right|$$

$$= \left|\frac{B^n(A-B)}{A^n-B^n}\right| = \frac{|B^n\sqrt5|}{|A^n-B^n|} \leq \frac{|B|^n\sqrt5}{|A|^n-|B|^n} = \frac{\sqrt5}{\left(\frac{|A|}{|B|}\right)^n-1} \overset{(*)}{<} \varepsilon$$

$|A^n-B^n| \geq |A|^n-|B|^n$

D.h. wir müssen n_0 so wählen, dass $(*)$ gilt $\forall n\geq n_0$:

$$\underbrace{\frac{\sqrt5}{\left(\frac{|A|}{|B|}\right)^n-1}}_{>0} < \varepsilon \iff \sqrt5 < \varepsilon\left(\left(\frac{|A|}{|B|}\right)^n-1\right) \iff \frac{\sqrt5}{\varepsilon}+1 < \left(\frac{|A|}{|B|}\right)^n$$

$$\iff \log_{\frac{|A|}{|B|}}\left(\frac{\sqrt5}{\varepsilon}+1\right) < n$$

$$\boxed{\frac{|A|}{|B|} = \frac{|1+\sqrt5|}{2}\cdot\frac{2}{|1-\sqrt5|} = \frac{1+\sqrt5}{\sqrt5-1} \geq \frac{3}{2} \geq 1}$$

$\Rightarrow$ Setze $n_0(\varepsilon) := \left\lceil \log_{\frac{|A|}{|B|}}\left(\frac{\sqrt5}{\varepsilon}+1\right)\right\rceil$. Dann gilt $\forall \varepsilon>0: \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - A\right| < \varepsilon$ $\square$

c) Rechne $n_0\left(\frac{1}{100}\right)$ aus mit TR $\Rightarrow n_0 = 5$

2.2. Folgen Man untersuche folgende reelle Folgen jeweils auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n = \cos(\tfrac{\pi}{3}n), \qquad b_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n},$$

$$c_n = \sqrt{n(n+2)} - n, \qquad d_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2},$$

$$e_n = \frac{e_{n-1}+e_{n-2}}{2}, \quad e_1 = 0, \; e_2 = 1.$$

Hinweis. Finden Sie eine explizite Formel für die Differenzen $F_n := f_n - f_{n-1}$.

$$b_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}} = \frac{n+4-n}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$d_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} i}{n^2} = \frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}{n^2} = \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$e_n = \frac{e_{n-1}+e_{n-2}}{2} \quad (\text{für } n \geq 2), \quad e_1 = 0, \; e_2 = 1.$$

Für $n \geq 3$: $E_n := e_n - e_{n-1} = \frac{1}{2}(e_{n-1}+e_{n-2}) - e_{n-1} = \frac{1}{2}(e_{n-2}-e_{n-1})$

$$= -\frac{1}{2}(e_{n-1}-e_{n-2}) = -\frac{1}{2}E_{n-1}$$

$\Rightarrow E_n = -\frac{1}{2}E_{n-1}$

$= (-\frac{1}{2})^2 E_{n-2}$ $\qquad E_2 = e_2 - e_1 = 1 - 0 = 1 = (-\frac{1}{2})^0$ $(**)$

$\vdots$

$= (-\frac{1}{2})^{n-3} E_{n-(n-3)} = (-\frac{1}{2})^{n-3} E_3 = (-\frac{1}{2})^{n-2} E_2 = (-\frac{1}{2})^{n-2}$ $(*)$

Wegen $(**)$ gilt $(*)$ sogar für $n \geq 2$.

$$e_n = (e_n + e_{n-1} + e_{n-2} + \ldots + e_2)$$
$$- (e_{n-1} + e_{n-2} + \ldots + e_2 + e_1) + e_1$$
$$= e_1 + \sum_{i=2}^{n}(e_i - e_{i-1}) = e_1 + \sum_{i=2}^{n} E_i = \sum_{i=2}^{n}(-\tfrac{1}{2})^{i-2} = \sum_{i=0}^{n-2}(-\tfrac{1}{2})^i$$

$$= \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{e_1} + \sum_{i=2}^{n} (e_i - e_{i-1}) = e_1 + \sum_{i=2}^{n} E_i = \sum_{i=2}^{n} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{i-2} = \sum_{i=0}^{n-2} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{i}$$

$$= \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\frac{3}{2}} \xrightarrow{n \to \infty} \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

2.4. Folgen und komplexe Zahlen Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1}$$

konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Hinweis. Bestimmen Sie ein Ausdruck für

$$1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n+1}.$$

<u>Beh</u>: $$\sum_{k=1}^{n} k \cdot q^{k-1} = \underbrace{\frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}}_{=: a_n} \qquad (*)$$

<u>Beweis</u> (Induktion):

<u>Anker</u> $(n = 1)$

$$\frac{1 - 2q^1 + 1q^2}{(1-q)^2} = \frac{1 - 2q + q^2}{(1-q)^2} = \frac{(1-q)^2}{(1-q)^2} = 1 = 1 \cdot q^0 \quad \checkmark$$

<u>Annahme</u>: Sei $n \in \mathbb{N}$ bel. und es gilt $(*)$

<u>Schritt</u>: $(n \mapsto n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot q^{k-1} = (n+1)q^n + \sum_{k=1}^{n} k \cdot q^{k-1} \overset{\text{I.H.}}{=} (n+1)q^n + \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

$$= \frac{(n+1)q^n(1-q)^2 + 1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

$$= \frac{(n+1)q^n(1 - 2q + q^2) + 1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{\;}$$

$$= \frac{(n+1)q^n(1-2q+q^2) + 1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)q^n} - (n+1)2q^{n+1} + (n+1)q^{n+2} + 1 - \cancel{(n+1)q^n} + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

$$= \frac{1 + (n - 2n - 2)q^{n+1} + (n+1)q^{n+2}}{(1-q)^2}$$

$$= \frac{1 - (n+2)q^{n+1} + (n+1)q^{n+2}}{(1-q)^2} \quad \square$$

$$a_n = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} = \frac{1 - \overset{\overset{0}{\uparrow}}{nq^n} - \overset{\overset{0}{\uparrow}}{q^n} + \overset{\overset{0}{\uparrow}}{nq^{n+1}}}{(1-q)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{(1-q)^2} \quad \square$$