# Nachbesprechung Serie 7

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

**7.6. Konvergenzbereich** Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Aus der Vorlesung (oder Satz 3.7.4 in Struwes Skript) wissen wir, dass der Konvergenzbereich dieser Reihe gleich $(-1,1)$ ist. Wir wissen auch, dass die Reihe für gegebenes $r \in (0,1)$ gleichmässig auf $[-r,r]$ konvergiert. Beweisen Sie, dass die Reihe *nicht* gleichmässig auf dem ganze Interval $(-1,1)$ konvergiert.

Sei $p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ , $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$|p_n(x) - p(x)| = \frac{|1 - x^{n+1} - 1|}{|1-x|} = \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|}$$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} |p_n(x) - p(x)| = \infty$. $\Rightarrow$ Wähle $x_k \xrightarrow{k\to\infty} 1$ mit $x_k \in (-1,1)$ $(\forall k)$.

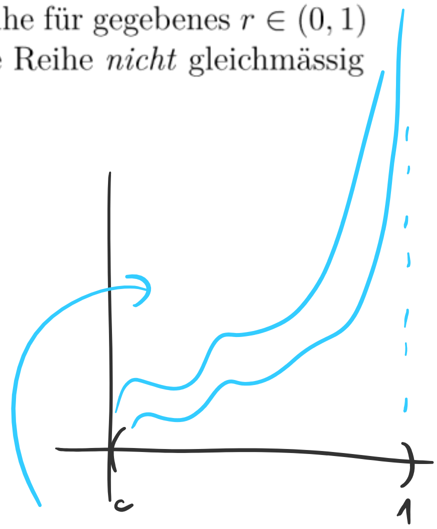
$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_k|}{|1-x_k|} = \infty \iff \forall c>0 \ \exists k_0 \ \forall k \geq k_0 \ \frac{|x_k|^{n+1}}{|1-x_k|} > c$ (*)

Wähle für jedes $n$ und fixes $c>0$ (z.B. $c:=1$) $\tilde{x}(n) := x_k$ s.d. (*).

Es gilt nun:

$$\sup_{x\in(-1,1)} |p_n(x) - p(x)| = \sup_{x\in(-1,1)} \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} \geq \frac{|\tilde{x}(n)|^{n+1}}{|1-\tilde{x}(n)|} > c \xrightarrow{n\to\infty} c > 0.$$

$\Rightarrow p_n \cancel{\xrightarrow{glm}} p$



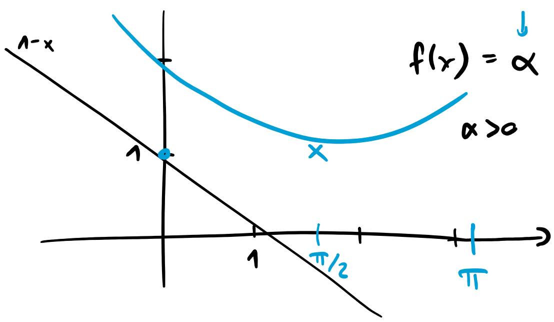

Für jedes $n$ wird $|p_n(x) - p(x)|$ bel. gross.
Finde eine Sequenz von Argumenten $x(n)$ abhängig von $n$, s.d. $\lim_{n\to\infty} |p_n(x(n)) - p(x(n))| > 0$.

**7.2. Mittelwertsatz I** Sei $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $]0,\pi[$ mit $f(0) \geq 1$ und $f'(x) \geq -1$ für alle $x \in ]0,\pi[$. Folgern Sie $f(x) \geq 1-x$ für alle $x \in [0,\pi]$ aus dem Mittelwertsatz. Folgt auch, dass $f$ monoton ist? Beweisen oder widerlegen Sie diese Behauptung.

Sei $x \in (0,\pi)$ bel. $\overset{MWS}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in (0,x): f(x) = f(0) + f'(x_0)\cdot(x-0)$
$\geq 1 + f'(x_0)\cdot x$

$f'(x_0) \geq -1 \overset{x>0}{\iff} f'(x_0)x \geq -x \longrightarrow \geq 1 - x$ $\square$

$f$ monoton? <u>NEIN!</u> Gegenbsp:




Öffnungswinkel

Versch. nach oben.

$$f(x) = \alpha\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \beta$$

$\alpha > 0$

Verschiebung nach rechts

$f(x) \geq \beta \overset{!}{\geq} 1 - x$ $(\forall x \in [0,\pi]) \Rightarrow \beta := 1$

$f'(x) = \alpha \cdot 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \overset{!}{\geq} -1$ $(\forall x \in (0,\pi))$

$2\alpha x - \alpha\pi \geq -\alpha\pi \overset{!}{\geq} -1$

$\Rightarrow \alpha\pi \leq 1 \Rightarrow \alpha := \frac{1}{\pi}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + 1$ erfüllt alle Bed. ist aber nicht monoton $\square$.

**7.3. Mittelwertsatz II** Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie folgenden Ungleichungen mit

**7.3. Mittelwertsatz II** Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie folgenden Ungleichungen mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

$$\sqrt{1+x} < 1 + \tfrac{x}{2} \qquad \text{für } x > 0, \tag{a}$$

$$e^x(y-x) < e^y - e^x < e^y(y-x) \quad \text{für } x < y, \tag{b}$$

$$1 - \tfrac{1}{x} \leq \log(x) \leq x - 1 \qquad \text{für } x > 0. \tag{c}$$

*Hinweis.* Unterscheidung Sie bei **(c)** die drei Fälle $0 < x < 1$, $x = 1$ und $x > 1$.

a) $\frac{d}{dx}\sqrt{1+x} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}} < \frac{1}{2}$ $\exists x_0 \in (0,x)$ $\sqrt{1+x} = 1 + f'(x_0)x \leq 1 + \frac{x}{2}$ $\square$

b) MWS $\Longrightarrow$ $\exists x_0 \in (x,y)$: $\frac{d}{dx}e^x\Big|_{x=x_0} = e^{x_0} = \frac{e^y - e^x}{y-x} \Longleftrightarrow \underbrace{e^{x_0}}_{>0}\underbrace{(y-x)}_{>0} = e^y - e^x$

$e^x$ ist streng mon. wachsend $\Longrightarrow e^x < e^{x_0} < e^y \Longrightarrow e^x(y-x) < e^y - e^x < e^y(y-x)$ $\square$

c)

Falls $x > 1 \overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in (1,x)$: $\frac{\log(x) - \log(1)}{x-1} = \log'(x_0) = \frac{1}{x_0}$

$\nearrow \log(x) = (x-1)\cdot\frac{1}{x_0} < x - 1$ ✓

$\searrow \log(x) = \frac{x-1}{x_0} > \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ ✓

Falls $x < 1 \overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in (x,1)$: $\frac{\log(1) - \log(x)}{1-x} = \frac{-\log(x)}{1-x} = \frac{\log(x)}{x-1} = \frac{1}{x_0} \Longleftrightarrow \log(x) = \frac{(x-1)}{x_0}$

$\nearrow$ $x_0 \underbrace{\log(x)}_{<0} = (x-1) \Longrightarrow \log(x) < x_0\log(x) = (x-1)$ ✓

$\searrow$ $\underbrace{(x-1)}_{<0}\cdot\underbrace{\frac{1}{x_0}}_{>x} > (x-1)\cdot\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \Longrightarrow \log(x) > 1 - \frac{1}{x}$ ✓

Falls $x = 1$ $1 - \frac{1}{1} = 0 = \log(1) = 1 - 1$ ✓ $\square$