Vorbesprechung Serie 13

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

Partialbruchzerlegung

Theorem: (Fundamentalsatz d. Algebra):

$$\forall p \in \mathbb{C}[x]\ \exists b_1, \dots, b_L \in \mathbb{C},\ \exists n_1, \dots, n_L \in \mathbb{N}: p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \prod_{i=0}^{L} (x - b_i)^{n_i} \quad \text{wobei} \quad \sum_{i=0}^{L} n_i = \underbrace{n}_{= \deg(p)}$$

Für uns relevant:

Sei $H \in \mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$. p lässt sich darstellen als:

$$H(x) = \prod_{i=1}^{\overset{\#\text{lin. Faktoren}}{N}} \underbrace{l_i(x)}_{\text{linear}}^{\overset{\text{Vielfachheit}}{n_i}} \cdot \prod_{j=1}^{\overset{\#\text{quadr. Faktoren}}{M}} \underbrace{q_j(x)}_{\text{quadratisch}}^{m_j} \qquad l_i, q_i \in \mathbb{R}[x] \quad \deg(l_i) = 1,\ \deg(q_i) = 2$$

$$l_i(x) = x - \alpha_i \qquad q_j(x) = (x - \beta_j)^2 + \gamma_j^2$$

Sei $R(x) = \frac{P(x)}{H(x)}$ (H wie oben) und $\deg P < \deg H$

Dann gilt: $$R(x) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{L_i(x)}_{\text{lin. Nenner}} + \sum_{j=1}^{M} \underbrace{Q_j(x)}_{\text{quadr. Nenner}}$$

wobei

$$L_i(x) = \sum_{k=1}^{n_i} \frac{a_{ik}}{l_i(x)^k} \qquad Q_j(x) = \sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_{jk}x + c_{jk}}{q_j(x)^k} \qquad \text{für } a_{ik} \in \mathbb{R} \quad k = 1, \dots, n_i$$
$$b_{jk}, c_{jk} \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, m_j.$$

Ausgeschrieben: $$R(x) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\sum_{k=1}^{n_i} \frac{a_{ik}}{(x - \alpha_i)^k}}_{L_i(x)} + \sum_{j=1}^{M} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_{jk} \cdot x + c_{jk}}{((x - \beta_j)^2 + \gamma_j^2)^k}}_{Q_j(x)}$$

Was wenn $\deg(P) \geq \deg(H)$?

Polynomdivision: $P(x) : H(x) = A(x)$

$-\ (\quad\quad)$

$-\ (\quad\quad)$

$\vdots$

$r(x)$ mit $\deg(r) < \deg(H) \Rightarrow$ PBZ mit $\frac{r(x)}{H(x)}$

Vorgehen:

① Zerlegung von $\frac{P(x)}{H(x)}$:

1. $\deg(P) < \deg(H)$?

JA: PBZ von $\frac{P(x)}{H(x)}$

NEIN:

1. Polynomdivision: $\frac{P(x)}{H(x)} = A(x) + \frac{r(x)}{H(x)}$
2. PBZ von $\frac{r(x)}{H(x)}$ (wie links)
3. return $A(x) + PBZ\left(\frac{r(x)}{H(x)}\right)$

Für PBZ:

② $Q(x)$ faktorisieren (lineare und quadratische Faktoren. Hier bestimmst du N, M, die n_i, m_j, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$)

② Symbolische Koeff's einführen (a_{ik}, b_{jk}, c_{jk})

③ Koeff bestimmen mit Koeff Vergl.

Bsp
$$R(x) = \frac{x^2 - 5x + 8}{x^4 - 6x^2 + 8x - 3} \quad \begin{matrix} = P(x) \\ = H(x) \end{matrix}$$

① ✓ (keine Polyn. div. nötig) $(A(x) = 0)$

$H(x) = (x+3)(x-1)^3 \quad N = 2, n_1 = 1, n_2 = 3, M = 0$ (keine quadr. Terme)

$\Rightarrow R(x) = L_1(x) + L_2(x)$

Die Variablen Namen in blau sind nur zur um Konsistent mit obiger Notation zu sein. Wir wählen hier der Übersicht halber die Namen a, b1, b2, b3.

② $L_1(x) = \frac{\overset{a_{11}}{a}}{x+3} \qquad L_2(x) = \frac{\overset{a_{21}}{b_1}}{x-1} + \frac{\overset{a_{22}}{b_2}}{(x-1)^2} + \frac{\overset{a_{23}}{b_3}}{(x-1)^3}$

$$\rightarrow \frac{\overbrace{x^2 - 5x + 8}^{A}}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{\overbrace{a(x-1)^3 + b_1(x-1)^2(x+3) + b_2(x-1)(x+3) + b_3(x+3)}^{B}}{\text{〃}}$$

③ Koeff-Vergleich

Naiv: B ausmultipl. und mit Koeff's in A vergleichen.

Trick: Es muss gelten dass $A(x) = B(x)$ $(\forall x)$. Wähle also geschickte x-Werte und vergleiche dann.

z.B. $x = 1 \Rightarrow A(1) = 1^2 - 5 + 8 = 4 \overset{!}{=} b_3 \cdot 4 = B(1) \iff \boxed{b_3 = 1}$

$x = -3 \Rightarrow A(-3) = (-3)^2 + 15 + 8 = 32 \overset{!}{=} a(-3-1)^3 = -64a = B(-3) \iff \boxed{a = -\frac{1}{2}}$

Jetzt suchen Koeff's von Grad 3: $a + b_1 = b_1 - \frac{1}{2} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{b_1 = \frac{1}{2}}$ (da A den Koeff 0 hat für x^3)

〃 Grad 2: $-3 \cdot a + 3b_1 - 2b_1 + b_2 = \frac{3}{2} + b_1 + b_2 = 2 + b_2 \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \boxed{b_2 = -1}$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 5x + 8}{x^4 - 6x^2 \ldots} = \frac{-1/2}{x+3} + \frac{1/2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+5x+8}{x^4-6x^2+8x-3} = \underline{\underline{\frac{-1/2}{x+3} + \frac{1/2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}}}$$

Bsp $R(x) = \dfrac{2x^3-14x^2+14x+30}{x^2-4}$

① Polynomdivision

$$(2x^3-14x^2+14x+30):(x^2-4) = \underbrace{2x-14}_{=:A(x)}$$
$$-(2x^3 \qquad -8x)$$
$$-14x^2+22x+30$$
$$-(-14x^2 \qquad +56)$$
$$22x-26 =: r(x)$$

$$R(x) = 2x-14 + \frac{\overbrace{22x-26}^{P(x)}}{\underbrace{(x+2)(x-2)}_{H(x)}} \Rightarrow \text{PBZ}$$

Wieso PBZ? Nach Zerlegung können wir mit Linearität die einzelnen Terme separat integrieren:

Bsp $$\int \frac{\overbrace{a_1x+a_2}^{\text{„}Q_j(x)\text{"}}}{(x-b_1)^2+b_2^2}\,dx = \underbrace{\int \frac{a_1x}{(x-b_1)^2+b_2^2}\,dx}_{①} + \underbrace{\int \frac{a_2}{(x-b_1)^2+b_2}\,dx}_{②}$$

② $= a_2 \cdot \int \frac{1}{(x-b_1)^2+b_2}\,dx$ subst $u=(x-b_1)$ $\quad \frac{du}{dx}=1 \Leftrightarrow du = dx$

$\Rightarrow a_2 \int \frac{1}{u^2+b_2}\,dx = \frac{a_2}{b_2}\int \frac{1}{\frac{u^2}{b_2}+1}\,du \Rightarrow$ subst $x = \frac{u}{\sqrt{b_2}}$ $\quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{\sqrt{b_2}} \Leftrightarrow \sqrt{b_2}\,dx = du$

$$= \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}\int \frac{1}{x^2+1}\,du = \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}\arctan(x) = \underline{\underline{\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}\arctan\left(\frac{(x-b_1)}{\sqrt{b_2}}\right)+C}}$$

① $= a_1 \cdot \int \frac{x}{(x-b_1)^2+b_2}\,dx$ subst: $u = x-b_1$ $\quad dx = du$
$x = u+b_1$

$$= a_1 \int \frac{u+b_1}{u^2+b_2}\,du = \underbrace{a_1\int \frac{u}{u^2+b_2}\,du}_{③} + \underbrace{a_1\int \frac{b_1}{u^2+b_2}}_{④}$$

③ Subst: $v = u^2 \Rightarrow \frac{dv}{du} = 2u \Leftrightarrow \frac{1}{2u}dv = du$

③ $= \frac{a_1}{2}\int \frac{1}{v+b_2}\,dv = \frac{a_1}{2}\log|v+b_2| + C$

$$= \frac{a_1}{2}\log|(x-b_1)^2+b_1| + C$$

$$= \frac{a_1}{2} \log \left| (x-b_1)^2 + b_2 \right| + C$$

$$④ = \frac{a_1 \cdot b_1}{\sqrt{b_2}} \cdot \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{b_2}}\right) \quad (\text{Analog zu } ②)$$

Zusammengefasst:

$$\int \frac{a_1 x + a_2}{(x-b_1)^2 + b_2}\, dx = \underbrace{\frac{a_1}{2} \log \left| (x-b_1)^2 + b_2 \right|}_{③} + \underbrace{\frac{a_1 b_1}{\sqrt{b_2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{b_2}}\right)}_{④} + \underbrace{\frac{a_2}{\sqrt{b_2}} \arctan\left(\frac{x-b_1}{\sqrt{b_2}}\right)}_{②}$$

Bsp $\int \frac{\overbrace{a}^{=L_i(x)}}{(x-b)}\, dx$ subst: $u = x-b \Rightarrow du = dx$

$$= a \int \frac{1}{u} \cdot du = a \cdot \log|x-b| + C$$

Bsp $\int \frac{a}{(x-b)^k}\, dx \quad (k>1)$ subst $u = x-b \Rightarrow du = dx$

$$= a \int u^{-k}\, du = -a \frac{u^{1-k}}{1-k} + C = -a \frac{(x-b)^{1-k}}{1-k} + C = -\frac{a}{(k-1)(x-b)^{k-1}} + C$$

Uneigentliches Integral

Bis jetzt. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ int'bar falls $\int_a^b f\, dx$ existiert.

Uneigentlich: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich int'bar falls $\int_a^b f\, dx := \lim_{c \to a^+} \lim_{d \to b^-} \int_c^d f\, dx$ existiert.

Bsp:

$$\alpha < -1 \quad \int_1^\infty x^\alpha\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^\alpha\, dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t^c} - 1}{1+\alpha} = -\frac{1}{\alpha+1}$$

$\alpha + 1 < 0 \iff c := -\alpha - 1 > 0$