Vorbesprechung Serie 10

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

Integration

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

Wir suchen eine C^1-Fkt. $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\frac{d}{dx} F = f$

Stammfkt. von f

Riemannsummen

Sei $I = [a,b]$ ein Intervall

Partition $P := \{x_0, \dots, x_n\} \subseteq I \qquad a = x_0 < x_1 < \dots x_{n-1} < x_n = b$

$$\mathcal{P}(I) := \{ P \subseteq I \mid a,b \in P \wedge \exists k \in \mathbb{N} \ |P| = k \}$$

Feinheit $\delta(P) := \max_{i \in \{1,\dots,n\}} \{ |x_i - x_{i-1}| \} \qquad (x_i, x_{i-1} \in P)$

Riemannsche Summe $\quad S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Obersumme / Untersumme $\quad \overline{S}(f,P) \,/\, \underline{S}(f,P) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]} \,/\, \inf_{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

Oberes R Integral / Unteres R Integral $\quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \,/\, \underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf / \sup \{ \overline{S}(f,P) \,/\, \underline{S}(f,P) \mid P \in \mathcal{P}(I) \}$

f heisst R'integrierbar falls gilt: $\overline{\int_a^b} f\,dx = \underline{\int_a^b} f\,dx$

Kriterien für Integrierbarkeit

① $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}([a,b]) \ \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$

② f monoton $\Longrightarrow f$ integrierbar

③ f stetig $\Longrightarrow f$ integrierbar $\qquad$ (f diff'bar $\Rightarrow$ f stetig $\Rightarrow$ f int'bar)

④ $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar

$\{P^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}([a,b])$ mit $\delta(P^n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$\{\xi_n\}$ = wahl der Zwischenpunkte von P^n

Dann gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} S(f, P^n, \xi^n)$

Bsp $\int_0^1 x^2\,dx$

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto x^2$ ist stetig $\overset{③}{\Longrightarrow} \int_0^1 x^2\,dx$ existiert

Bsp $\int_0 x \, dx$

$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^2$ ist stetig $\overset{③}{\Rightarrow} \int_0^1 x^2 \, dx$ existiert

Wähle $P^n = \{\frac{k}{n}\}_{k=0}^{n}$ $\quad \xi^n = \{\frac{k}{n}\}_{k=1}^{n}$ (rechte Randpunkte)

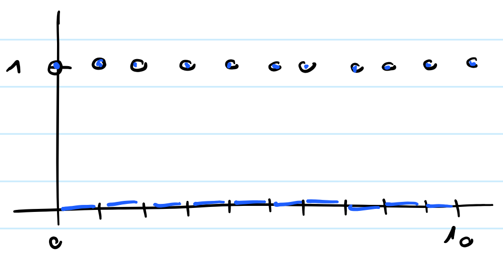
$\delta(P^n) = \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow S(x^2, P^n, \xi^n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Bsp

$$f : [0,10] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

R'integrabel?

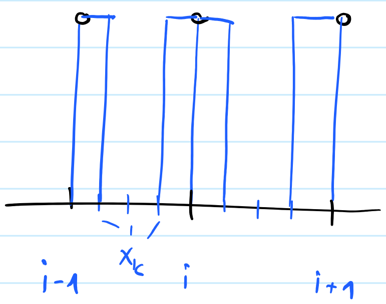


Sei $P \in \mathcal{P}(I)$ beliebig $(I = [0,10])$

Offensichtlich gilt: $\underline{S}(f,P) := \sum_{i=1}^{n} \overbrace{\inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi)}^{0} (x_i - x_{i-1}) = 0$

Betrachte nun $P^n \in \mathcal{P}(I)$ mit $P^n = \{ i + \frac{k}{n} \mid i = 0, \dots, 9, \; k = 0, \dots n-1 \} \cup \{10\}$

$\delta(P^n) = \frac{1}{n}$ $\quad |P^n| = 10 \cdot n$ $\qquad \overline{S}(f, P^n) = \sum_{j=1}^{10n} \sup_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) \cdot \frac{1}{n} = 20 \cdot \frac{1}{n} \quad (n > 1)$

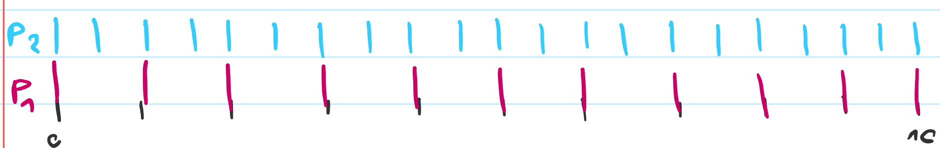


Wir verwenden nun ① um z.z. dass f integrierbar ist.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle n_0 s.d. $\frac{20}{n_0} \overset{!}{<} \varepsilon$

$\Rightarrow$ Setze $n_0 := \frac{20}{\varepsilon}$

Dann gilt: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists P^{n_0}$ s.d. $\overline{S}(f, P^{n_0}) - \underline{S}(f, P^{n_0}) = \overline{S}(f, P^{n_0}) = \frac{20}{n_0} < \varepsilon$ $\square$



Bsp Zeige dass $\int_0^a e^x dx$ existiert für $a > 0$ mit Kriterium ④.

Betrachte $P_n := \{ \frac{a}{n} \cdot k \mid k = 0, \dots, n \}$ mit $\delta(P_n) = \frac{a}{n}$.

Betrachte $P_n := \{\frac{a}{n}\cdot k \mid k = 0,\dots,n\}$ mit $\delta(P_n) = \frac{a}{n}$.

Es gilt: $\overline{S}(e^x, P_n) = \sum_{k=1}^{n} e^{(\frac{a}{n}\cdot k)} \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} e^{(\frac{a}{n}\cdot k)}$

$$\underline{S}(e^x, P_n) = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{a}{n}(k-1)} \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{a}{n}\cdot k}$$

$\Rightarrow \overline{S}(e^x, P_n) - \underline{S}(e^x, P_n) = \frac{a}{n}(e^a - e^0) = \frac{a}{n}\cdot K$, wobei $K := e^a - 1 > 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle n_0 s.d. $\frac{a}{n_0}\cdot K < \varepsilon$.

Somit gilt: $\overline{S}(e^x, P_n) - \underline{S}(e^x, P_n) < \varepsilon \quad (\forall n \geq n_0) \Longrightarrow \int_0^a e^x dx$ existiert $\square$

Nicht integrierbare Funktionen:

Bsp: $f: [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ (Intuition: $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = 1 - 0 = 1 \quad (\forall P)$)

Bsp: Es gilt: f stetig $\Rightarrow$ f int'bar und stetig $\Longrightarrow$ f hat SF.

aber nicht: $\Leftarrow$

Gegenbsp: $F: [0,1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x > 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Offensichtlich gilt: $f(x) := \frac{d}{dx} F(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Deshalb ist F SF für f.

Beachte jedoch: $\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht:

Sei $P = \{x_0 = 0, x_1, \dots, x_n = 1\}$ bel. offensichtlich gilt: $\underbrace{\sup_{[x_0,x_1]} f(x) = \infty}_{\geq \frac{\Delta x}{2}}$, $\underbrace{\inf_{[x_0,x_1]} f(x) = -\infty}_{\leq -\frac{\Delta x}{2}}$

Da f diff'bar für $x > 0 \Longrightarrow \int_{x_1}^{1} f(x)dx$ existiert

$$\Rightarrow \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sup_{[x_0,x_1]} f(x)\underbrace{(x_1 - x_0)}_{=:\,\Delta x} + \underbrace{\overline{S}(f|_{[x_1,1]}, P) - \inf_{[x_0,x_1]} f(x)(x_1 - x_0) - \underline{S}(f|_{[x_1,1]}, P)}_{\overline{S} - \underline{S} \geq 0}$$

$$\geq \left(\sup f(x) - \inf f(x)\right)\Delta x$$

$\overline{S} - \underline{S} \geq 0$

$$\geq \left(\sup f(x) - \inf f(x)\right) \Delta x$$
$$\geq \left(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x = 1 > 0$$

Da P bel. $\rightarrow$ $\exists \varepsilon > 0 \; \forall P: \; \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \geq \varepsilon$ $\Rightarrow$ f nicht int'bar $\square$

$\varepsilon := 1$

Tipps Serie 10

10.5

Benutze 4. Kriterium um z.z. dass $\lim S(e^x, P_n, \xi) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Da die ξ frei gewählt werden kann, kann man auch die Ober- bzw. Untersumme betrachten.

Benutzt dass e^x monoton steigend ist
Hinweis: Für (endliche) geometrische Summen können gibt es eine Formel auch falls |q|>= 1.

10.4

a) Kettenregel!

Versuche die Teilaufgaben b) - g) auf Teilaufgabe a) zu reduzieren.

d) Erweitere um $\frac{10}{10}$

e) Betrachte $\frac{d}{dx} \arctan(x)$