Nachbesprechung Serie 6

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

6.2. Folgen von Funktionen Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert folgender Folgen von Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$. Bestimmen Sie, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

(a) $f_n(x) = (1 + x/n)^2$

<u>1. Pktweise Konvergenz</u>

Sei $x \in [0,1]$ bel.! $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \left(1 + x \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^2 = (1+0)^2 = 1$

$\Rightarrow f(x) = 1$ und $f_n \xrightarrow{\text{pktw.}} f$. ✓

<u>2. Glm. Konvergenz</u>

<u>Achtung</u> (Von letzter Woche): f_n stetig $(\forall n)$ und f stetig $\not\Rightarrow$ $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$

Da f berechnet, können wir aber f verwenden um glm. Konv. zu zeigen:

<u>Beh</u> $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$

<u>Beweis</u> z.z. $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Wir schätzen ab:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 - 1\right| = \left|1 + 2\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} - 1\right| \overset{x,n\geq 0}{=} 2\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

Da x bel. $\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und somit gilt: $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$ □

(b) $f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{falls } 0 \leq x < 1/2n, \\ 2 - 2nx & \text{falls } 1/2n \leq x < 1/n, \\ 0 & \text{falls } 1/n \leq x \leq 1, \end{cases}$

<u>1. Pktw. Konvergenz</u>

Falls $x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$

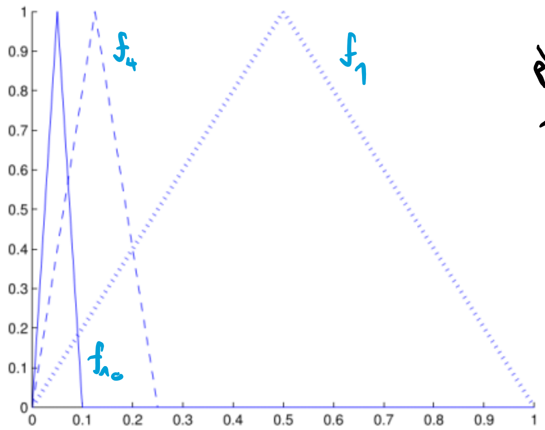
Falls $x > 0 \overset{\text{A.P.}}{\Rightarrow} \exists n_0 \;\; \frac{1}{n} < x$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\geq n_0}} f_n(x) = 0$

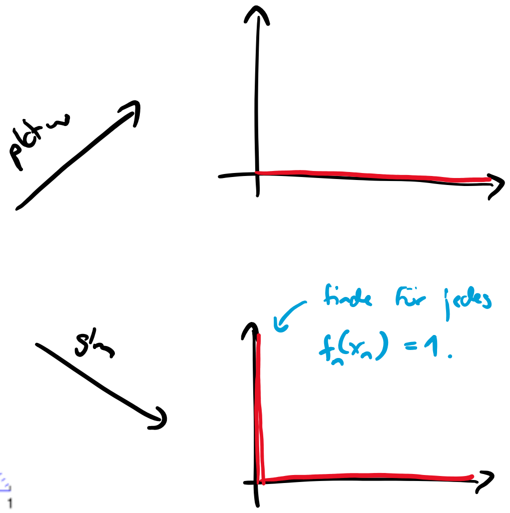
$\Bigg\}\Rightarrow f(x) = 0$ und $f_n(x) \xrightarrow{\text{pktw.}} f$. ✓

$n \geq n_0$

2. Glm. Konvergenz



Graphen der Funktionen f_1, f_4 und f_{10}



finde für jedes n, ein x_n s.d. $f_n(x_n) = 1$.

Beh $f_n \xrightarrow{\cancel{\text{glm}}} f$

Bew: Betrachte $x_n = \frac{1}{2n} \Longrightarrow f_n(x_n) = 2 - 2n\left(\frac{1}{2n}\right) = 1 \quad (\forall n)$

$$\Longrightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. „sup"}}}{\geq} \left|f_n\left(\tfrac{1}{2n}\right) - f\left(\tfrac{1}{2n}\right)\right| \underset{\substack{\uparrow \\ |x| \geq x}}{\geq} 1 - 0 = 1 \xrightarrow{n \to \infty} 1 \neq 0$$

$\Longrightarrow f_n \xrightarrow{\cancel{\text{glm}}} f \quad \square$

6.4. Additionstheoreme Wir definieren die folgenden drei Potenzreihen.

$$\operatorname{Exp}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad \operatorname{Cos}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \operatorname{Sin}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Hilfs-Lemmas

(L1): $\operatorname{Exp}(ix) = \operatorname{Cos}(x) + i\operatorname{Sin}(x) \Longleftarrow \operatorname{Re}(\operatorname{Exp}(ix)) = \operatorname{Cos}(x) \quad (L1')$

Beweis $$\operatorname{Exp}(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Abs. konv.}}}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!}}_{(i)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{(ii)} = \operatorname{Cos}(x) + i\operatorname{Sin}(x) \quad \square$$

$$(i) = \sum_{k=0}^{\infty} (i^2)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \operatorname{Cos}(x)$$

$$(ii) = \sum_{k=0}^{\infty} i(i^2)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = i\operatorname{Sin}(x)$$

(L2): $\operatorname{Cos}(-x) = \operatorname{Cos}(x)$

Beweis: $\operatorname{Cos}(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-x)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-1)^{2k} x^{2k}}{(2k)!} = \operatorname{Cos}(x)$ $\square$

(L3): $\operatorname{Sin}(-x) = -\operatorname{Sin}(x)$

Beweis: $\operatorname{Sin}(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\overbrace{(-1)^{2k+1}}^{=-1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\operatorname{Sin}(x)$ $\square$

(a) Beweisen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{Exp}(ix) = \operatorname{Cos}(x) + i\operatorname{Sin}(x)$, sowie

$$\operatorname{Cos}(x) = \frac{\operatorname{Exp}(ix) + \operatorname{Exp}(-ix)}{2}, \qquad \operatorname{Sin}(x) = \frac{\operatorname{Exp}(ix) - \operatorname{Exp}(-ix)}{2i}.$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\left(\operatorname{Exp}(ix) + \operatorname{Exp}(-ix)\right) &\overset{(L1)}{=} \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{Cos}(x) + i\operatorname{Sin}(x) + \operatorname{Cos}(-x) + i\operatorname{Sin}(-x)\right) \\
&\overset{(L2,L3)}{=} \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{Cos}(x) + i\operatorname{Sin}(x) + \operatorname{Cos}(x) - i\operatorname{Sin}(x)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(2\operatorname{Cos}(x)\right) \\
&= \operatorname{Cos}(x) \quad \square
\end{aligned}$$

Für $\operatorname{Sin}(x)$ analog.

(b) Benutzen Sie (a) und $\operatorname{Exp}(z+w) = \operatorname{Exp}(z)\operatorname{Exp}(w)$ um folgende Additionstheoreme zu beweisen: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cos}(x+y) &= \operatorname{Cos}(x)\operatorname{Cos}(y) - \operatorname{Sin}(x)\operatorname{Sin}(y), \\
\operatorname{Sin}(x+y) &= \operatorname{Sin}(x)\operatorname{Cos}(y) + \operatorname{Cos}(x)\operatorname{Sin}(y).
\end{aligned}$$

Wir verwenden (L1') und berechnen:

$$\operatorname{Cos}(x+y) = \operatorname{Re}\left[\operatorname{Exp}(i(x+y))\right] = \operatorname{Re}\left[\operatorname{Exp}(ix)\operatorname{Exp}(iy)\right] \overset{(*)}{=} \operatorname{Cos}(x)\operatorname{Cos}(y) - \operatorname{Sin}(x)\operatorname{Sin}(y) \quad \square$$

$$\begin{aligned}
(*)\ \operatorname{Exp}(ix)\operatorname{Exp}(iy) &= \left(\operatorname{Cos}(x) + i\operatorname{Sin}(x)\right)\left(\operatorname{Cos}(y) + i\operatorname{Sin}(y)\right) \\
&= \underbrace{\operatorname{Cos}(x)\operatorname{Cos}(y) - \operatorname{Sin}(x)\operatorname{Sin}(y)}_{\operatorname{Re}} + 2i \underbrace{\operatorname{Sin}(x)\operatorname{Cos}(x)}_{\operatorname{Im}}
\end{aligned}$$

(c) Beweisen Sie $\operatorname{Sin}(x)^2 + \operatorname{Cos}(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und stellen Sie $\operatorname{Cos}(3x)$ als Polynom in $\operatorname{Cos}(x)$ dar.

$$\begin{aligned}
1 = \operatorname{Cos}(0) = \operatorname{Cos}(x-x) &= \operatorname{Cos}(x)\operatorname{Cos}(-x) - \operatorname{Sin}(x)\operatorname{Sin}(-x) \\
&\overset{(L2,L3)}{=} \operatorname{Cos}(x)\operatorname{Cos}(x) + \operatorname{Sin}(x)\operatorname{Sin}(x) \\
&= \operatorname{Cos}(x)^2 + \operatorname{Sin}(y)^2 \quad \square
\end{aligned}$$

$$\cos(3x) = \cos(x+2x) = \cos(x)\underbrace{\cos(2x)}_{①} - \underbrace{\sin(x)\sin(2x)}_{②}$$

① $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = \cos(x)^2 - (1-\cos(x)^2) = 2\cos(x)^2 - 1$

② $\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\Longrightarrow \sin(x)\sin(2x) = 2\sin(x)^2\cos(x) = 2(1-\cos(x)^2)\cos(x) = 2\cos(x) - 2\cos(x)^3$

$$\Longrightarrow \cos(3x) = \cos(x)(2\cos(x)^2-1) - (2\cos(x) - 2\cos(x)^3)$$
$$= 2\cos(x)^3 - \cos(x) - 2\cos(x) + 2\cos(x)^3$$
$$= \underline{\underline{4\cos(x)^3 - 3\cos(x)}}$$

6.6. Eine Funktionenreihe Die Funktion $\langle\cdot\rangle : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert: $\langle x\rangle$ ist der Abstand von x zu der nächsten ganzen Zahl, nämlich, mit der Abrundungsfunktion

$$\langle x\rangle = \begin{cases} x-[x] & \text{falls } x-[x] \le \frac{1}{2}, \\ 1-(x-[x]) & \text{falls } x-[x] > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Man definiere die Funktion f durch

$$f(x) = \langle x\rangle + \frac{\langle 10x\rangle}{10} + \frac{\langle 100x\rangle}{100} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) Offensichtlich haben wir punktweise Konvergenz

$$f_i \xrightarrow{i\to\infty} f,$$

wobei

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \langle x\rangle \\ f_2(x) &= \langle x\rangle + \frac{\langle 10x\rangle}{10} \\ f_3(x) &= \langle x\rangle + \frac{\langle 10x\rangle}{10} + \frac{\langle 100x\rangle}{100} \\ &\vdots \\ f_i(x) &= \sum_{k=0}^{i} \frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k}. \end{aligned}$$

Zeichnen Sie Graph(f_i) für $i = 1, 2, 3$ über das Interval $[0, 1]$. Sieht es so aus als konvergiere die Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen f?

(b) Zeigen Sie, dass die gegebene Reihe absolut konvergent für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist.

Sei $x \in \mathbb{R}$ bel. Beachte: $0 \le \langle x\rangle \le 1$

$0 \le \frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k} \le \underbrace{\frac{1}{10^k}}_{=:b_k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k}$ konvergiert $\overset{MK}{\Longrightarrow} \forall x: \lim_{i\to\infty} f_i(x)$ existiert.

$\Longrightarrow$ Reihe konv. absolut und $f_i \xrightarrow{\text{pktw.}}$ gegen eine Fkt f $\square$

(da Reihe für jeden Punkt konv.)

(c) Betrachten Sie jetzt die Folge $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k}$. Konvergiert f_n nach f gleichmässig?

<u>Beh</u> $f_i \xrightarrow{glm} f := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k}$

<u>Bew</u>: $\left|f_i(x) - f(x)\right| = \left|\sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k}\right| \leq \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \xrightarrow{i\to\infty} 0$

$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_i(x) - f(x)\right| \xrightarrow{i\to\infty} 0 \Leftrightarrow f_i \xrightarrow{glm} f$ □

(d) Ist f stetig?

Falls $f:[a,b]$ $x_0 = b$ $\Rightarrow \lim_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \overbrace{\forall x_k \to b: \underbrace{x_k > 0\ (\forall k)}_{\text{immer falsch}} \to \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)}^{}$

immer wahr.

<u>Lemma 1</u> $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0) \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

<u>Bew</u>: (Durch Widerspruch)

Ang. $\exists x_k \to x_0$ mit $f(x_k) \cancel{\xrightarrow{k\to\infty}} f(x_0) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall n\ \exists n_0 \geq n\ \left|f(x_k) - f(x_0)\right| \overset{(*)}{>} \varepsilon$

Definiere TF $h(n) := n_0(n)$ s.d. (*) gilt:

Setze $X_\rho := \{x_{h(n)} \mid x_{h(n)}\ \rho\ x_0\}$ für $\rho \in \{<, >, =\}$.

Es muss gelten: $X_> \sim \mathbb{N} \vee X_< \sim \mathbb{N} \vee X_= \sim \mathbb{N}$. $A \sim \mathbb{N} :\Leftrightarrow \exists$ Bijektion von A nach $\mathbb{N}$.

D.h. eine der drei Mengen hat abzählbar undendlich viele Elemente und wir können dieses X_rho als neue Folge betrachten.

Sei o.B.d.A. $\rho =$ '$>$'. Es gilt:

$\exists \varepsilon > 0\ \forall n\ \exists n_0 \geq n\ \left|f(x_n) - f(x_0)\right| > \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) \neq f(x_0)$ ↯

dasselbe ε wie aus (*)   nämlich $n = n_0$

Fälle $\rho =$ '$<$' und $\rho =$ '$=$' analog. □

<u>Lemma 2</u>

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x+\alpha) \overset{(*)}{=} f(x)$ $(\forall x)$ $f|_{[0,\alpha]}$ stetig $\Rightarrow f$ stetig auf $\mathbb{R}$.

<u>Beweis</u>

Wir zeigen dass für $k \in \mathbb{Z}$ bel. gilt: $f|_{[k\alpha, (k+1)\alpha]}$ stetig.

Der Rest folgt mit <u>Lemma 3</u> (unten):

Sei $x_0 \in [k\alpha, (k+1)\alpha]$ bel.

Ang. f nicht stetig in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert nicht

Ang. f nicht stetig in x_0 $\Longleftrightarrow$ $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert nicht

$\Rightarrow \exists x_k \to x_0$ s.d. $\lim_{k \to \infty} f(x_k) \neq f(x_0)$.

$f|_{[0,1]}$ stetig

$$\text{Aber } \lim_{k\to\infty} f(x_k) \overset{(*)}{=} \lim_{k\to\infty} f(x_k - k\alpha) = \lim_{k\to\infty} f(x_k') = f(x_0 - k\alpha) \overset{(*)}{=} f(x_0) \quad \square$$

$x_k' = x_k - k\alpha \xrightarrow{k\to\infty} x_0 - k\alpha$

f ist also stetig wenn wir nur die Teilintervalle $[k\cdot\alpha, (k+1)\alpha]$ betrachten.

Was ist, wenn wir die Intervalle „verschmelzen" wollen?

<u>Lemma 3</u> $\underbrace{f|_{[a,b]} \text{ stetig}}_{A} \wedge \underbrace{f|_{[b,c]} \text{ stetig}}_{B} \Rightarrow f|_{[a,c]}$ stetig. ✓

<u>Beweis</u> Wir müssen nur Stetigkeit in $x_0 = b$ untersuchen:

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to b \\ x \leq b}} f(x) \overset{A}{=} f(b) \overset{B}{=} \lim_{\substack{x \to b \\ x \geq b}} f(x) \quad \square$$

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x - [x] & \text{falls } x - [x] \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - (x - [x]) & \text{falls } x - [x] > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Mit Lemma 3 ist somit f stetig auf ganz $\mathbb{R}$. $\square$

Um z.z. dass $f_i(x)$ stetig für alle $i \in \mathbb{N}$, müssen wir zeigen dass $\langle\cdot\rangle : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

<u>Beachte</u>:

$$\langle x+1 \rangle = \left.\begin{cases} (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor = x+1 - \lfloor x \rfloor - 1 = x - \lfloor x \rfloor & \text{, Case 1} \\ 1 - ((x+1) - \lfloor x+1 \rfloor) = 1 - (x+1 - \lfloor x \rfloor - 1) = 1 - (x - \lfloor x \rfloor) & \text{Case 2} \end{cases}\right\} = \langle x \rangle$$

Wegen <u>Lemma 2</u> reicht es also z.z. dass $\langle\cdot\rangle|_{[0,1]}$ stetig.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Für } x = \frac{1}{2} \Rightarrow \langle \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \\ \text{Da } \lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}}} \langle x \rangle = 1 - (\frac{1}{2} - 0) = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \langle x \rangle \text{ stetig in } x_0 = \tfrac{1}{2} \checkmark$$

Ausserdem ist $\langle\cdot\rangle|_{(0,1)}$ sicher stetig als kompos. stetiger Fkt.

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\text{Für } x = 0} \quad \langle 0 \rangle = 0 \\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \langle x \rangle = 0 \end{array}\right\} \overset{L1}{\Longrightarrow} \langle\cdot\rangle|_{[0,1]} \text{ stetig in } x_0 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\text{Für } x = 1} \quad \langle 1 \rangle = 0 \quad (\text{Case 1!}) \\ \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \langle x \rangle = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 1 - (x - \lfloor x \rfloor) \underset{x<1}{=} 1 - (1 - 0) = 0 \end{array}\right\} \overset{L1}{\Longrightarrow} \langle\cdot\rangle|_{[0,1]} \text{ stetig in } x_0 = 1$$

$$\overset{L2}{\Longrightarrow} \langle\cdot\rangle \text{ stetig auf } \mathbb{R}. \Rightarrow f_i(x) : \sum_{k=0}^{i} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k} \text{ stetig } (\forall i \in \mathbb{N}).$$

$$\text{Mit c) wissen wir } f_i \overset{glm}{\longrightarrow} f \overset{S.4.6.1}{\Longrightarrow} f \text{ stetig } \square$$

Mit c) wissen wir $f_i \xrightarrow{\text{glm}} f \overset{\text{S.4.8.1}}{\Longrightarrow} f$ stetig $\square$