Vorbesprechung Serie 7

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

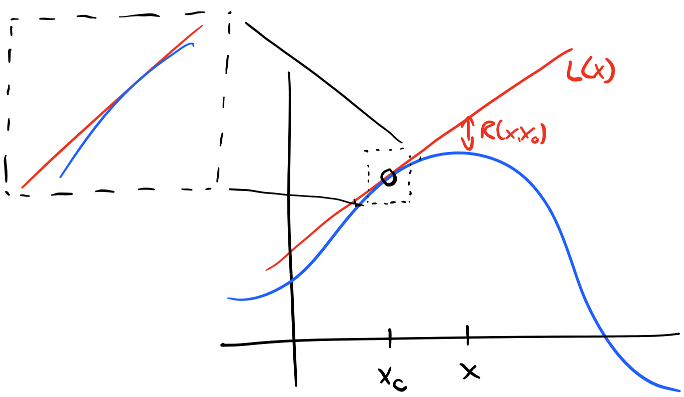
$\Omega \subseteq \mathbb{R}$ $\quad f: \Omega \to \mathbb{R}$ heisst differenzierbar in $x_0 \in \Omega$ falls

Def ①

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$ existiert. Wir bezeichnen a auch als $\frac{d}{dx} f(x_0) = f'(x)$

Def ②

Falls eine lineare Funktion $L: \Omega \to \mathbb{R}$ und eine „Fehlerfunktion" $R: \Omega \to \mathbb{R}$ existieren s.d.:



① $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + R(x, x_0)$

② $\lim_{x \to x_0} \left| \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} \right| = 0$

$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$

Äquivalenz der Definitionen

Def ① $\Longleftrightarrow$ Def ②

Beweis „$\Rightarrow$"

Sei f diff'bar in x_0 nach ①. $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$

Definiere $L: \Omega \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f'(x_0) \cdot x$

$\qquad\quad R: \Omega \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$

dann gilt ① $f(x_0) + L(x - x_0) + R(x, x_0) = \cancel{f(x_0)} + \cancel{f'(x_0)(x - x_0)} + f(x) - \cancel{f(x_0)} - \cancel{f'(x_0)(x - x_0)}$
$= f(x)$ ✓

② $$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} \right| = \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| = \Bigg| \underbrace{\lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{= f'(x_0) \text{ (Annahme)}} - f'(x_0) \Bigg| = 0$$ ✓

$= f'(x_0)$ (Annahme)

„$\Leftarrow$"

Sei f diff'bar in x_0 nach ② $\Rightarrow \exists L, R$ s.d. ① $f(x) = f(x_0) + L(x-x_0) + R(x,x_0)$

② $\lim\limits_{x\to x_0} \left| \frac{R(x,x_0)}{x-x_0} \right| = 0$

Es gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim \frac{f(x_0)+L(x-x_0)+R(x,x_0)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim \frac{L(x-x_0)}{x-x_0} + \underbrace{\lim \frac{R(x,x_0)}{x-x_0}}_{=0}$

$\boxed{\text{da } L \text{ linear} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} : L(x) = ax}$ $= a$ ✓ (Grenzwert existiert) $\square$

Differentiationsregeln

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(i) $\frac{d}{dx}(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha \frac{d}{dx} f(x_0) + \beta \frac{d}{dx} g(x_0)$

(ii) $\frac{d}{dx}(f \cdot g)(x_0) = \left(\frac{d}{dx} f(x_0)\right) g(x_0) + f(x_0)\left(\frac{d}{dx} g(x_0)\right)$

(iii) $\frac{d}{dx}(f/g)(x_0) = \frac{\left(\frac{d}{dx} f(x_0)\right) g(x_0) + f(x_0)\left(\frac{d}{dx} g(x_0)\right)}{(g(x_0))^2}$ $\quad (g(x_0) \neq 0)$

(iv) Kettenregel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \to \mathbb{R}$

$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x_0) = \frac{d}{dg} f(g)\Big|_{g=g(x_0)} \cdot \frac{d}{dx} g(x_0)$

Bsp

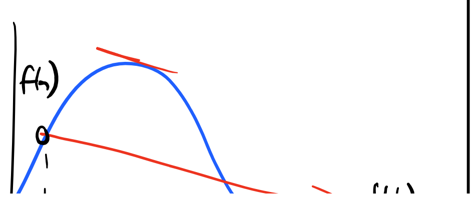
$f(x) = x^{(x^n)} = \exp(x^n \log x)$

$\frac{d}{dx} f(x) = \underbrace{\frac{d}{dy} \exp(y)\Big|_{y = x^n \log x}}_{\exp(x^n \log x) = x^{(x^n)}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}(x^n \log x)}_{= n x^{n-1} \cdot \log x + x^n \cdot \frac{1}{x}} = x^{(x^n)} (n \log x + 1) x^{n-1} = \underline{\underline{x^{(x^n + n - 1)}(n \log x + 1)}}$

Mittelwertsatz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f|_{(a,b)}$ diff'bar.

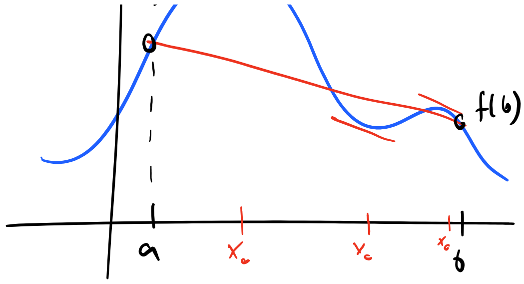
Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit



$|(a,b)$

Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f(b) = f(a) + f'(x_0)(b-a) \iff f'(x_0) \underset{(*)}{=} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

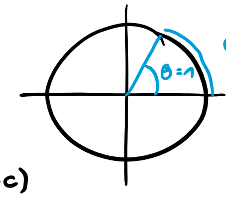


Bsp

$\sin(x) < x \quad \forall x > 0$

Beweis: Für $x > 1 \implies \sin(x) \leq 1 < x$ ✓

Für $x \in [0,1]$ betrachte $\sin'(x) = \cos(x)$



MWS $\implies \exists x_0 \in (0,x) \quad \sin(x) = \sin(0) + \cos(x_0)(x-0)$

$$= \cos(x_0) \cdot x$$

$$< x \quad \square$$

Graphen („Kurvendiskussion")

Wichtige Eigenschaften:

Sei f zweimal diff'bar, d.h. f', f'' existiren.

(i) $f' \equiv 0 \implies f \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

(ii) $f' \geq 0 \quad (f' > 0)$, $f' \leq 0 \quad (f' < 0)$ $\implies f$ (streng) mon. wachsend. / fallend.

(iii) $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) \begin{cases} > 0 \implies \text{lokales min in } x_0 \\ < 0 \implies \text{lokales max in } x_0 \end{cases}$

Bsp

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

Def-Bereich? $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

Um $x_0 = 0$:

$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty + 1 = -\infty \qquad \lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty$

Um $x_0 = 1$:

$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \searrow 1} = -\infty$