Nachbesprechung Serie 1

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

1.5

1.5. Supremum und Infimum II Bestimmen Sie zunächst, ob die folgende Mengen eine obere (bzw. untere) Schranke besitzen. Wenn Ja, bestimmen Sie das Supremum (bzw. Infimum). Welche Mengen besitzen Maximum (bzw. Minimum)?

$$M_1 = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\right\}, \qquad M_2 = \left\{\frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R}\right\},$$

$$M_3 = \bigcup_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \qquad M_4 = \left\{\frac{x+y}{z} : x, y > 0,\ z \in \mathbb{R}\right\}.$$

M_3 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$

$\boxed{\text{Sup/Max}}$

1. $M_3 \neq \emptyset$ ✓

2. Obere Schranken?

Vermutung: 1 ist obere Schranke

Beweis: z.z: $\forall x \in M_3 : x \leq 1.$

(Nicht mit nur mit Intervallgrenzen argumentiren)

Argumentiren: Sei $x \in M_3$ bel. $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : x \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}\ \ x \leq \frac{1}{k}$

Da $\frac{1}{k} \leq 1$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ $\Rightarrow$ $x \leq \frac{1}{k} \leq 1$ $\square$

3. Sup-Beweis

$1 = \frac{1}{1} \in \left(\frac{1}{1+1}, \frac{1}{1}\right] \subseteq M_3 \Rightarrow 1 = \max M_3 = \sup M_3$ $\square$

$\boxed{\text{inf/Min}}$

2. Untere Schranken:

Beh. 0 ist untere Schranke

Beweis: Sei $x \in M_3$ bel. $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}\ \ x \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$

$\Rightarrow x > \frac{1}{\underbrace{k+1}_{=:k' \in \mathbb{N}}} = \frac{1}{k'}$

Da $\frac{1}{k'} \geq 0$ (sonst wäre $1 \leq 0$ ↯) gilt: $x > \frac{1}{k'} \geq 0$ $\square$

Da $\frac{1}{k'} \geq 0$ (sonst wäre $1 \leq 0$ ↯) gilt: $x > \frac{1}{k'} \geq 0$ □

3. Inf Beweis

<u>Beh:</u> $\inf M_3 = 0$

<u>Bew.</u> Ang. $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in M_3 \quad x \geq \varepsilon$

Beachte: $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \subseteq M_3 \Rightarrow \frac{1}{n} \in M_3$ (*)

Arch. Prinzip $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{1}{n_0} \in M_3$ (wegen (*))

$\Rightarrow \exists x \in M_3$ (nämlich $x = \frac{1}{n_0}$) s.d. $x = \frac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon$ ist keine untere Schranke ↯

$\Rightarrow \sup M_3 = 0$ □

4. Min Beweis?

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ang. } 0 \in M_3 \Rightarrow \exists x \in M_3 : x = 0 \\ \text{Da } x \in M_3 \Rightarrow \exists k \quad \frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{k+1} < 0 \Leftrightarrow 1 < 0 \text{ ↯}$$

$\Rightarrow 0 \notin M_3 \Rightarrow$ kein min!

$$M_2 = \left\{ \frac{|x|}{1+|x|} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

$\boxed{\text{sup/max}}$

1. $M_2 \neq \emptyset$ ✓

2. Obere Schranke

<u>Beh.</u> 1 ist obere Schranke.

<u>Bew:</u> Sei $x \in \mathbb{R}$ bel. $\Rightarrow |x| \leq |x| + 1 \Leftrightarrow \frac{|x|}{|x|+1} \leq 1$ □

3. sup Beweis

<u>Beh.</u> $\sup M_2 = 1$.

<u>Beweis</u> Ang. $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{|x|}{|x|+1} \leq 1 - \varepsilon$

$$\Leftrightarrow |x| \leq |x| + 1 - \varepsilon(|x|+1)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(|x|+1) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |x| + 1 \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow |x|+1 \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} |x| \leq \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \quad (\forall x)$$

Arch. Prinzip: $\exists n \in \mathbb{N} \quad \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < n$

Da $n \in \mathbb{R} \overset{(*)}{\Longrightarrow} n = |n| \leq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ ↯

$\Rightarrow \sup M_2 = 1$ □

4. Max Beweis?

Ang. $1 \in M_2 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \quad \frac{|x|}{1+|x|} = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 + |x| \Leftrightarrow 0 = 1$ ↯

$\Rightarrow$ kein Max!

$\boxed{\text{inf/Min}}$

2. Untere Schranken?

Beh: 0 ist untere Schranke

Bew: $|x| \geq 0 \Rightarrow \frac{|x|}{1+|x|} \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ □

5. Min Beweis: Da $0 = \frac{|0|}{1+|0|} \in M_2 \Rightarrow 0 = \min M_2 = \inf M_2$ □

$$M_4 = \left\{ \frac{x+y}{z} : x, y > 0,\ z \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$$

$\boxed{\text{sup/max}}$

1. $M_4 \neq \emptyset$ ✓

2. Obere Schranken?

Beh: M_4 nach oben unbeschränkt.

Bew: Ang. $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall m \in M_4 \quad m \leq c$.

Da $1 = \frac{1+0}{1} \in M_4 \Rightarrow c > 0$.

Betrachte $\frac{c+c}{1} = 2c \in M_3$. Aber $2c > c \Rightarrow c$ ist keine ob. Schranke. ↯ □

1.8

1.8. Supremum und Infimum V Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht-leere beschränkte Mengen. Wir definieren

$$A + B := \{a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Zeigen Sie, dass $A + B$ beschränkt ist und, dass $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$. Gilt auch $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$?

1.8. Supremum und Infimum V Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkte Mengen. Wir definieren

$$A + B := \{a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Zeigen Sie, dass $A + B$ beschränkt ist und, dass $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$. Gilt auch $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$?

Beh. 1 $A+B$ ist beschränkt.

A beschränkt $\Rightarrow \exists \sup(A) = a^+$, $\inf(A) = a^-$
B beschränkt $\Rightarrow \exists \sup(B) = b^+$, $\inf(B) = b^-$.

Sei $c = a+b \in A+B$. $\Rightarrow c = a+b \leq a^+ + b^+ \Rightarrow c^+ := a^+ + b^+$ ist obere Schranke. ①
$\Rightarrow c = a+b \geq a^- + b^- \Rightarrow c^- := a^- + b^-$ ist untere Schranke. ②

$\Rightarrow A+B$ ist beschränkt. $\square$

Beh.: $\sup(A+B) = c^+$.

Bew.: Ang. $\sup(A+B) = c^+ - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$

$\forall a \in A, b \in B \quad a+b \leq a^+ + b^+ - \varepsilon$

Da $a^+ = \sup A \Rightarrow \exists \tilde{a} \in A \quad \tilde{a} > a^+ - \frac{\varepsilon}{2}$
Da $b^+ = \sup B \Rightarrow \exists \tilde{b} \in B \quad \tilde{b} > b^+ - \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \underbrace{\tilde{a} + \tilde{b}}_{\in A+B} > a^+ - \frac{\varepsilon}{2} + b^+ - \frac{\varepsilon}{2} = c^+ - \varepsilon \quad ↯ \quad \square$$

Beh.: $\inf(A+B) = a^- + b^-$

Beweis: Analog.