Vorbesprechung Serie 2

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

Theorie

Konvergenz:

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} / \mathbb{C}$

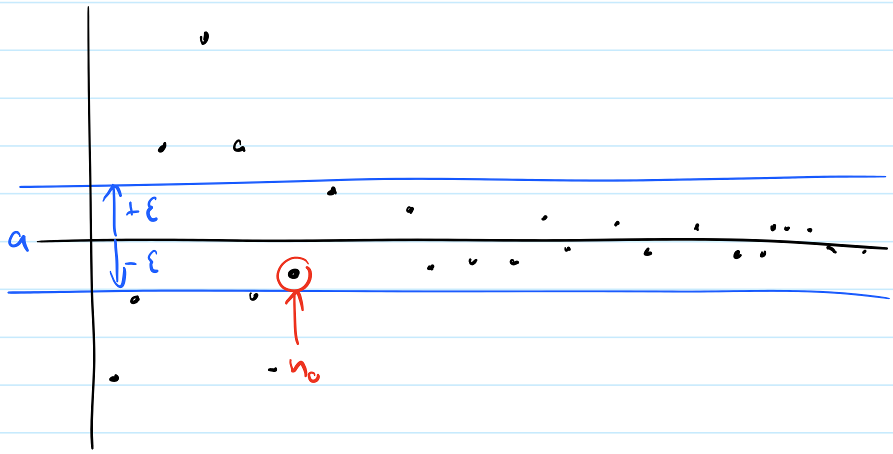
Eine Folge konvergiert gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ für $n \to \infty$ falls gilt:

$\underbrace{\forall \varepsilon > 0}_{\in\mathbb{R}} \; \exists \underbrace{n_0(\varepsilon) \; \forall n \geq n_0}_{\in\mathbb{N}} \; |a_n - a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$

$\iff a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

oft einfacher als überall limes hinzuschreiben.

Dieses a nennen wir Grenzwert/Limes von (a_n) und schreiben $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$



Bsp 1 Bh.: $a_n := \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0.

Beweis: Ang. $\varepsilon > 0$ sei beliebig. Zeige dass ein n_0 existiert s.d. $\forall n \geq n_0 \; \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$

Archim. Prinzip: $\forall b > 0 \; \exists n_0$ s.d. $n_0 > b \iff \frac{1}{n_0} < \underbrace{\frac{1}{b}}_{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ Wähle $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ dann gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \square$

Konvergenz-Kriterien

Monotone Konvergenz

Monotone Konvergenz

(a_n) heisst beschränkt falls $\exists M > 0 \quad -M \leq a_n \leq M \quad (\forall n)$
$\Longleftrightarrow |a_n| < M$

(a_n) heisst monoton wachsend falls $a_n \leq a_{n+1} \quad (\forall n)$

(a_n) beschränkt $\oplus$ monoton wachsend / fallend $\Rightarrow$ (a_n) konvergiert (d.h. wir wissen dass ein a existiert mit $\lim_n a_n = a$, kennen dieses jedoch (noch) nicht).

Divergenz

(a_n) divergiert falls (a_n) nicht konvergiert.

① Bestimmte Divergenz: $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

② Alternierende Folge: z.B. $a_n = (-1)^n$

Zeigen von Divergenz von (a_n):

Falls eine Folge (b_n) existiert mit $|b_n| \leq |a_n| \ (\forall n)$ und $|b_n|$ divergiert bestimmt, dann divergiert auch a_n bestimmt.

Bsp 2 $\quad a_n = \sqrt{2n^2 - n} = \sqrt{n^2\left(2 - \frac{1}{n}\right)} = n\underbrace{\sqrt{2 - \frac{1}{n}}}_{\geq 1} \geq n \quad$ und $\quad n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

$\Rightarrow a_n$ divergiert $\square$

Satz 3.3.2 („Modularität")

Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $\lim_n a_n = a$, $\lim_n b_n = b$. Dann:

(i) $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b$

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n = a \cdot b$

(iii) Falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0 \ (\forall n)$ dann $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b}$

(iv) Falls $a_n \leq b_n \ (\forall n)$ dann $a \leq b$

Bsp 3 $\quad a_n := \frac{n^2 + 5n^3 - 7}{13n - 10n^3}$

Trick: höchste Potenz rauskürzen: $a_n = \frac{\cancel{n^3}\left(\frac{1}{n} + 5 - \frac{7}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\left(\frac{13}{n^2} - 10\right)} \xrightarrow[\text{Satz 3.3.2}]{n\to\infty} \frac{5}{-10} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

(mit $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\frac{7}{n^3} \to 0$, $\frac{13}{n^2} \to 0$)

Bsp 4 Wichtige konvergente Folgen:

$\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \qquad q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad (\text{für } 0 \leq q < 1)$

$$\frac{3^n+5^n}{5^n+5^n} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}{1+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

Wurzeltrick

Folgen der Form $\underbrace{\sqrt{p(n)}}_{\to\infty} - \underbrace{\sqrt{p'(n)}}_{\to\infty}$ $\quad deg(p) = deg(p')$

Beide Terme gehen nach ∞ aber $\infty - \infty$ ist nicht definiert.

Trick: Erweitere um $\dfrac{\sqrt{p(n)}+\sqrt{p'(n)}}{\sqrt{p(n)}+\sqrt{p'(n)}}$

Bsp 5 $a_n := \sqrt{n^2+an+1} - \sqrt{n^2+1} \quad (a\in\mathbb{R})$

$$= \left(\sqrt{n^2+an+1} - \sqrt{n^2+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+an+1}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+an+1}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{\cancel{n^2}+an+\cancel{1}-\cancel{n^2}-\cancel{1}}{\sqrt{n^2+an+1}+\sqrt{n^2+1}}$$

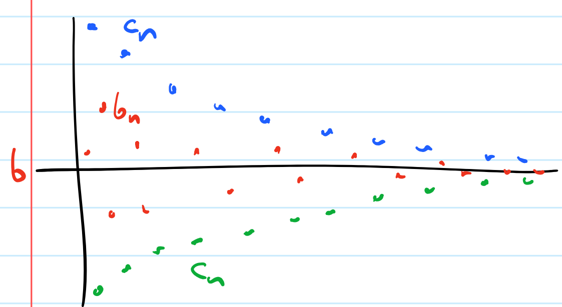
$$= \frac{n\cdot a}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a}{1+1} = \frac{a}{2}$$

$\sqrt{n}$ ist stetig $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$

Sandwich-Satz

Wir wollen den Grenzwert einer Folge b_n berechnen was aber schwierig erscheint. Falls wir zwei Folgen a_n und b_n finden können mit:

$$a_n \leq b_n \leq c_n \ (\forall n) \text{ und } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b \Rightarrow \lim_n b_n = b$$



Bsp 6 Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{=:b_n}$

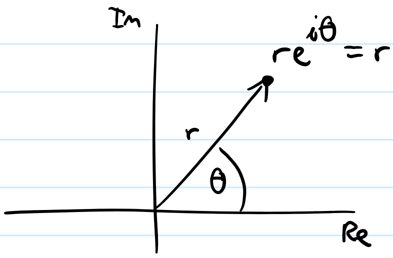
Sei $n\in\mathbb{N}$ beliebig. $\Rightarrow b_n = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n\cdot n}_{\leq 1}} \leq \frac{1}{n}$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\le 1}$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0}}{0} \le b_n \le \underset{\substack{\uparrow \\ c_n \xrightarrow{n\to\infty} 0}}{\frac{1}{n}} \quad (\forall n) \quad \Rightarrow \quad b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \square$$

Komplexe Zahlen

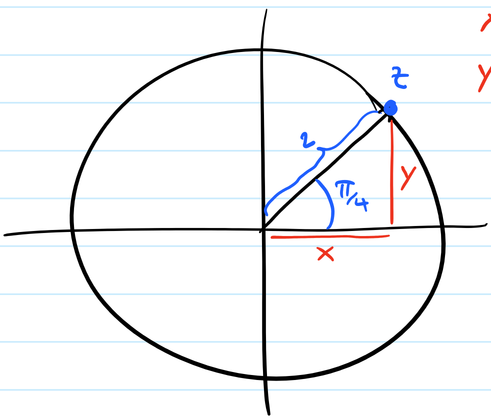
$$z \in \mathbb{C} \qquad z = \overset{\substack{\mathrm{Re}(z) \\ \uparrow}}{a} + i\overset{\substack{\mathrm{Im}(z) \\ \uparrow}}{b}$$



$$re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Bsp: Von Kugel- zu Kartesischen Koordinaten

$$z = 2\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$



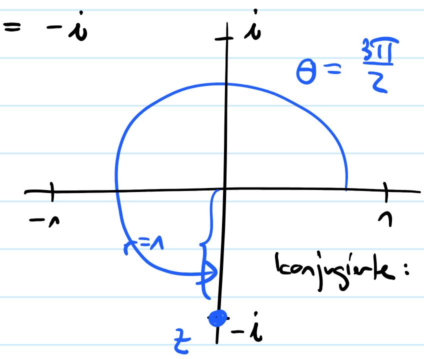
$$x = r\cos\theta \quad\Rightarrow\quad x = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$y = r\sin\theta \quad\Rightarrow\quad y = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow z = 2\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

Bsp: Von Kartesischen zu Kugelkoordinaten

$$z = -i$$



$$\Rightarrow z = -i = 1\cdot e^{i\frac{3}{2}\pi} = 1\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

konjugierte: $\bar{z} = a - ib$

Weitere Eigenschaften

Betrag: $|z| = \sqrt{z\cdot\bar{z}} = a^2 + b^2 \quad (z\cdot\bar{z} = |z|^2)$

Inverse: $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\})$

Inverse: $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\})$

Bsp: (Aufgabe 3.4. b) aus alter Serie)

zerlege $u = \frac{2-3i}{2+i} + \frac{1-i}{1+3i}$ in $Re(u)$ und $Im(u)$

Trick: Bruch mit konjugierten erweitern um imaginäre Terme aus Nenner wegzubekommen:

$$\frac{(2-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} + \frac{(1-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{4-8i-3}{5} + \frac{1-4i-3}{10}$$

$$= \frac{1-8i}{5} + \frac{-2-4i}{10}$$

$$= \frac{1-8i-1-2i}{5} = \frac{-10i}{5} = \underline{\underline{-2i}}$$

Tipps zu Serie 2

2.1 ✓

2.2 a_n: Zeige, es gibt zwei Teilfolgen, welche gegen unterschiedliche Grenzwerte konvergieren.

b_n: Wurzeltrick

c_n: "

d_n: Finde geschlossene Form (Tipp: Zeige durch Induktion dass $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.)

e_n: Starte mit:

$$E_n = e_n - e_{n-1} \; (\forall n \geq 3) \quad \text{und zeige dass} \quad E_n = -\frac{1}{2} E_{n-1}.$$

Versuche geschlossene Form für E_n zu finden.

Benutze die Tatsache dass
$$\begin{aligned} e_n &= (e_n + e_{n-1} + \dots + e_3) \\ &\quad - (e_{n-1} + \dots + e_3 + e_2) \\ &\quad + e_2 \\ &= \sum_{k=3}^{n-2} \underbrace{(e_k - e_{k-1})}_{=E_k} + e_2 \end{aligned}$$

2.3

a) Anker Für $n=1$, $n=2$

Annahme: Sei n bel. und es gilt $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dots\right)$

$- \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \dots\right)$

Annahme: Sei n bel. und es gilt $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dots\right)$

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \dots\right)$$

Schritt (von $n, n+1 \mapsto n+2$)

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n = \dots = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\dots \right) \quad \square$$

Tipp: Setze $A = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $B = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ und rechne mit A und B.
(spart Zeit :))

b) Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle $n_0(\varepsilon)$ s.d. $|b_n - \phi| < \varepsilon$ $(\forall n \geq n_0)$.

c) -

2.4 Zeige durch Induktion dass für $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$.

$$\sum_{k=1}^{n} k q^{k-1} = \underbrace{\frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}}_{=: a_n}$$

Berechne $\lim_{n \to \infty} a_n$.

2.5 Induktion