Nachbesprechung Serie 5

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

5.2. Wichtige Grenzwerte Berechnen Sie mithilfe der Potenzreihendarstellung von exp, sin und cos folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$,

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$, (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$,

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Bemerkung: Es gilt $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Wir benutzen dass Potenzreihen stetig innerhalb des Konvergenzradiuses sind, und dürfen somit den Limes gliedweise betrachten.

b)
$$\frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$= \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}}_{=:a_n}$$

Konv. Reihe für $x=c$? QK: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n-1}}\right| = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{x=c} 0$ ✓

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

c)
$$\lim \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$= \frac{1}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!}$$
$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!}}_{=:a_n}$$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{2n}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n-2}}\right| = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{x=c} 0 < 1$ ✓

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^0}{2!} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

d)
$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\xrightarrow{x\to 0} 1} \cdot \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

e)
$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1\right) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^{n-1}}{n!}}_{=:a_n} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\frac{\quad}{x} = \frac{}{x}\left(\sum_{n=0} \frac{}{n!} \quad \right) \qquad x \sum_{n=1} \frac{}{n!} \qquad \sum_{n=1} \underbrace{\frac{}{n!}}_{=:a_n} \qquad x \to 0$$

QK: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^n}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^{n-1}}\right| = \frac{|x|}{n+1} \overset{x=c}{\overset{!}{=}} 0$

5.4. Zwischenwertsatz

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion bijektiv ist:

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Beh 1: f injektiv

Bew: z.z. $\forall x, y : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

Falluntersch. ① $x < 0,\ y \geq 0$
② $x \geq 0,\ y \geq 0$
③ $x < 0,\ y < 0$

Fall ① Beachte: $\sqrt{1-x^2} > 0 \quad (\forall x \in (-1,1)) \Rightarrow \operatorname{sign}(f(x)) = \operatorname{sign}(x)$.

$x < 0,\ y \geq 0$

$\Rightarrow f(x) < 0 \leq f(y)$

$\Rightarrow x \neq y$ ✓

$$\text{Betrachte} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}(x)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} & , \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Fall ② $\rightarrow$ $x^2 < y^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{y}\right)^2 < \left(\frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^2 - 1} < \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} < \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^2 - 1}}$

$x < y \Leftrightarrow$

Fall ③ $\rightarrow$ $y^2 > x^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^2 < \left(\frac{1}{y}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1} < \sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^2 - 1} \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} < \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^2 - 1}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sign}(x)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} < \frac{\operatorname{sign}(y)}{\sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^2 - 1}} \Leftrightarrow f(x) < f(y) \Leftrightarrow f \text{ mon. wachsend.}$$

Fall ①-③ $\Rightarrow f$ injektiv □

Beh 2: f surjektiv

Bew:

z.z. $\forall y \in \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R} \ \exists x \in (-1,1) \ f(x) = y$.

Wir bemerken zuerst dass f als komp. stetiger Fkt. stetig ist.

$$\boxed{\text{Notation: } \lim_{n \to \infty} y_n = \infty \ :\Leftrightarrow \forall c \geq 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_1 : y_k > c}$$

Sei $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$ beliebig. $\Rightarrow \forall n \geq n_0: x_n \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{sign}(x_n) = 1$.

$$\forall n \geq n_0 : \underbrace{f(x_n)}_{=: y_n} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x_n}\right)^2 - 1}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

d.h. $\forall c \geq 0 \; \exists n_1 \; \forall n \geq n_1 : f(x_n) > c$. (A)

Analog: Sei $x_n' \xrightarrow{n\to\infty} -1$ bel.

$\forall c' \geq 0 \; \exists n_2 \; \forall n \geq n_2 : x_n' < -c'$ (B)

Sei nun $y \in \mathbb{R}$ bel. Setze $c = c' = y$. Mit (A) und (B) können wir $x_k, x_{k'}'$ wählen, wobei $k \geq n_1, k' \geq n_2$ s.d. $f(x_{k'}') < y < f(x_k)$. Mit ZWS folgt dann: $\exists \tilde{x} \in [f(x_{k'}'), f(x_k)]$ s.d. $f(\tilde{x}) = y$ und somit ist f surjektiv. $\square$

Da f surj. + inj. $\Rightarrow$ f ist bijektiv, wie gewünscht. $\square$

(b) Es sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt ein $x \in [0, 1]$ derart, dass $f(x) = x$ gilt.

Betrachte $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) := f(x) - x$.

Offensichtlich ist g stetig, da f nach Anr. stetig ist.

Bemerke: x_0 ist NS für $g \Leftrightarrow g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$ und wir sind fertig.

Falls $f(0) = 0$ oder $f(1) = 1$ sind wir fertig.

Sonst: $f(0) > 0$ und $f(1) < 1$.

$\Rightarrow g(0) > 0$ und $g(1) < 0 \Rightarrow 0 \in [g(1), g(0)] \overset{\text{ZWS}}{\Rightarrow} \exists x_0 \in [0,1] : g(x_0) = 0$. $\square$

(c) Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1) = 0$. Zeigen sie dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x \in [0, \frac{n-1}{n}]$ existiert, so dass $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ bel.

Betrachte $g : [0, \frac{n-1}{n}] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$

z.z.: g hat NS $x_0 \in [0, \frac{n-1}{n}]$.

Ang. g hat keine NS. Da g stetig muss eine der folgenden Fälle eintreten:

Fall ① $g(x) > 0 \quad \forall x \in [0, \frac{n-1}{n}]$

Fall ② $g(x) < 0 \quad \forall x \in [0, \frac{n-1}{n}]$

(Falls g sowohl strikt pos und strikt neg Werte annimmt, hat g wegen ZWS eine NS.)

Fall ① $\Rightarrow f(x) > f(x + \frac{1}{n}) \quad (\forall x \in [0, \frac{n-1}{n}])$

z.B. Für $x = 0 \Rightarrow f(0) > f(\frac{1}{n})$; $=$

$x = \frac{1}{n} \Rightarrow f(\frac{1}{n}) > f(\frac{2}{n})$; $=$

$\vdots$

$\Rightarrow f(0) > f(1)$

$\Leftrightarrow 0 > 0$ ↯

$$x = \tfrac{1}{n} \Rightarrow f(\tfrac{1}{n}) > f(\tfrac{2}{n})$$
$$\vdots$$
$$x = \tfrac{n-1}{n} \Rightarrow f(\tfrac{n-1}{n}) > f(1)$$
$$\Bigg\} \Rightarrow f(0) > f(1) \Leftrightarrow 0 > 0 \text{ ↯}$$

Fall ② $\Rightarrow f(x) < f(x+\frac{1}{n})$ $(\forall x \in [0, \frac{n-1}{n}])$

Gleiches Argument $\Rightarrow f(0) < f(1) \Leftrightarrow 0 < 0$ ↯

$\Rightarrow g$ muss NS haben $\Rightarrow \exists x \in [0, \frac{n-1}{n}]\ f(x) = f(x+\frac{1}{n})$ $\square$

5.3. (schriftlich) Definition von Stetigkeit Bestimme die Konstanten α und β so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta & \text{falls } x \leq -1, \quad (f_1 :=) \\ (\alpha + \beta)x & \text{falls } -1 < x < 1, \quad (f_2 :=) \\ x^2 + \alpha x - \beta & \text{falls } x \geq 1, \quad (f_3 :=) \end{cases}$$

stetig auf ganz $\mathbb{R}$ wird und skizziere ihren Graph.

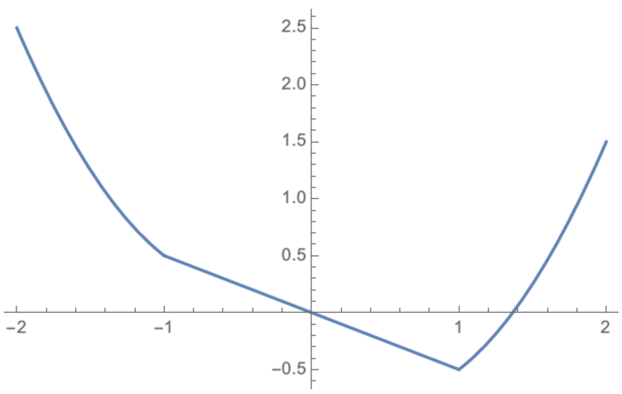
f ist sicher stetig auf $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

<u>Stetigkeit in $x_0 = -1$</u>

Es muss gelten: $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f_2(x) = (\alpha+\beta)(-1) \overset{!}{=} 1 + \alpha + \beta = f_1(-1)$ Ⓐ

<u>Stetigkeit in $x_0 = +1$</u>

Es muss gelten: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f_2(x) = \alpha + \beta \overset{!}{=} 1 + \alpha - \beta = f_3(1)$ Ⓑ



Auflösen der Gleichungen:

Ⓑ $\Leftrightarrow 2\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}$

Ⓐ $\Leftrightarrow -\alpha - \frac{1}{2} = 1 + \alpha + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = -1$

f wird stetig für $\underline{\underline{\alpha = -1}}$, $\underline{\underline{\beta = \frac{1}{2}}}$