Nachbesprechung Serie 11

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

11.2. Durch Integrale definierte Funktionen Berechnen Sie die Ableitung folgender durch Integrale definierten reellen Funktionen:

$$A(x) = \int_0^{x^7+e^x} \cos(e^{2t}+2t)\,dt, \qquad B(x) = \int_{x^2+1}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Hinweise: Bemerken Sie, dass das Integral in der Definition von B immer über ein Interval $I \subset [1,+\infty)$ läuft. Somit ist $\frac{\sin(t)}{t}$ auf I wohldefiniert.

<u>A(x):</u>

Sei $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(e^{2x}+2x)$

Offensichtlich ist $f \in C^0([0,\infty)) \overset{\text{HS.A}}{\Longrightarrow} F(x) := \int_0^x f(t)\,dt \in C^1([0,\infty))$

Da $g(x) := x^7+e^x$ ebenfalls diff'bar gilt:

$$\frac{d}{dx}A(x) = \frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(x)\cdot g'(x) = f(x)\cdot g'(x) = \cos(e^{2x}+2x)(7x^6+e^x)$$

<u>B(x):</u>

Sei $f:[1,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

Offensichtlich ist $f \in C^0([1,\infty)) \overset{\text{HSA}}{\Longrightarrow} F(x) := \int_1^x f(t)\,dt \in C^1([1,\infty))$.

Es gilt: $B(x) = \int_1^{x^2+5} f\,dt - \int_1^{x^2+1} f\,dt = F(x^2+5) - F(x^2+1)$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}B(x) = \frac{\sin(x^2+5)}{x^2+5}\cdot 2x - \frac{\sin(x^2+1)}{x^2+1}\cdot 2x$$

11.3. Gewichteter Mittelwertsatz Seien $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbare Funktionen mit G stetig und $F>0$.

(a) Zeigen Sie, dass $c \in [a,b]$ existiert, sodass

(1) $\displaystyle\int_a^b F(x)G(x)\,dx = G(c)\int_a^b F(x)\,dx.$

a) Aus der Übungsstunde wissen wir, dass $\int_a^b F\cdot G\,dx$ existiert.

Sei $G^- := \inf_{x\in[a,b]} G(x)$, $G^+ := \sup_{x\in[a,b]} G(x)$ (Beachte: G int'bar $\Rightarrow$ G beschränkt).

Siehe Beweis unten

Da $F>0$:

$\int$ Monotonie

$$G^-\cdot F(x) \le G(x)F(x) \le G^+\cdot F(x) \Longrightarrow G^-\int_a^b F(x)dx \le \int_a^b F(x)G(x)dx \le G^+\int_a^b F(x)dx$$

Sei $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\phi(x) := G(x)\cdot C$, wobei $C = \int_a^b F(x)dx$. >0

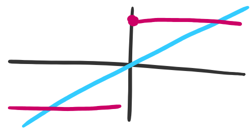
Da G stetig $\Rightarrow$ ϕ stetig $\overset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} \forall y \in [G^-\cdot C, G^+\cdot C]$ $\exists c\in[a,b]$ s.d. $\phi(c) = y$.

Wähle $y := \int_a^b F(x)G(x)dx \Longrightarrow \exists c$ s.d. $G(c)\cdot\int_a^b F(x)dx = \int_a^b F(x)G(x)dx$ $\square$

Wähle $y := \int_a^b F(x)G(x)\,dx \Rightarrow \exists c$ s.d. $G(c)\cdot\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b F(x)G(x)\,dx$ □

(b) Bleibt (1) wahr, wenn F nicht notwendigerweise positiv ist? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

Nein! Gegenbsp: $F,G:[-1,1]$ $\quad F(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$, $G(x) = x$



$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} F(x)G(x)\,dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_0^1 x\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

aber $\int_{-1}^{1} F(x)\,dx = 0 \Rightarrow G(c)\cdot\int_{-1}^{1} F\,dx \neq 1$ ↯

R-Integrierbare Funktionen sind beschränkt

Sei $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ int'bar.

Beh: f ist beschränkt

Beweis (Durch Widerspruch)

Idee: Ang. (i) f integrierbar, (ii) f unbeschränkt $\Longleftrightarrow$ (i) $\forall\varepsilon>0\ \exists P\in\mathcal{P}(I): \overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\varepsilon$, (ii) $\forall M>0\ \exists x_0\in[a,b]: |f(x_0)|>M$

Wir zeigen, dass $\exists\varepsilon>0\ \forall P\in\mathcal{P}(I): \overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)\geq\varepsilon$ ↯ (**)

Sei also $P=\{x_0=a, x_1,\dots,x_{n-1},x_n=b\}\in\mathcal{P}([a,b])$ beliebig. $I_i:=[x_{i-1},x_i]$, $\Delta_i:=x_i-x_{i-1}$, $i\in\{1,\dots,n\}$

Beachte: $\exists k\in\{1,\dots,n\}$ s.d. $f|_{[x_{k-1},x_k]}$ unbeschränkt. Sei

(Beweis durch Widerspruch): Ang. $f|_{[x_{i-1},x_i]}$ beschränkt $(\forall i\in\{1,\dots,n\}) \Rightarrow \exists M_i : |f(x)|\leq M_i\ \forall x\in I_i$
$\Rightarrow \exists M:=\max_i\{M_i\}\ \forall x\in[a,b]: |f(x)|\leq M$ ↯ zu (ii)

Dann gilt:

$$\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P) = \underbrace{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\left(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f\right)\cdot\Delta_i}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\sup_{I_k} f-\inf_{I_k} f\right)\cdot\Delta_k}_{\text{über unbeschr. Intervall}} \overset{I:=I_k}{\geq} \underbrace{\left(\sup_I f-\inf_I f\right)\cdot\Delta_k}_{(*)}$$

Falls $f|_I$ nach oben unbeschränkt (und nach unten beschr. (d.h. $\inf_{x\in I} f = a^-\in\mathbb{R}$)):

$$\exists x_0\in I: \sup_{x\in I} f(x) \overset{\text{Def. „sup"}}{\geq} f(x_0) > \underbrace{\inf_{x\in I} f(x) + \frac{1}{\Delta_k}}_{\text{unsere Wahl von „M"}} \Rightarrow (*) \geq \left(\inf f(x) + \frac{1}{\Delta_k}\right) - \inf f(x) = \frac{1}{\Delta_k} \quad ①$$

Falls $f|_I$ nach unten unbeschränkt (und nach oben beschr. (d.h. $\sup_{x\in I} f = a^+\in\mathbb{R}$)):

Def. „inf"

Falls $f|_I$ nach unten unbeschränkt (und nach oben beschr. (d.h. $\sup\limits_{x\in I} f = a^+ \in \mathbb{R}$)):

$$\exists x_0 \in I : \inf_{x\in I} f(x) \overset{\text{Def. „inf"}}{\leq} f(x_0) < \underbrace{\sup_{x\in I} f(x) - \frac{1}{\Delta_k}}_{\text{unsere Wahl von „M"}} \Rightarrow (*) \geq \sup f(x) - \left(\sup f(x) - \frac{1}{\Delta_k}\right) = \frac{1}{\Delta_k} \quad ②$$

Falls $f|_I$ sowohl nach oben als auch nach unten unbeschränkt ($\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$):

$$\Rightarrow \sup f \geq \frac{1}{\Delta_k}, \quad \inf f \leq 0 \Longrightarrow (*) \geq \frac{1}{\Delta_k} \quad ③$$

Es gilt also:

$$\forall P \in \mathcal{P}(I): \quad \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \geq \left(\sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x)\right)\cdot \Delta_k \overset{①,②,③}{\geq} \frac{1}{\Delta_k}\cdot \Delta_k = 1$$

↯ (siehe (**) mit $\varepsilon := 1$)