Nachbesprechung Serie 9

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

9.2. Eine Annäherung Sei $f : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arctan(x)$ die Funktion, so dass

$$\tan(f(x)) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$|f^{(3)}(x)| \leq 2 \quad \forall\, |x| \leq 10.$$

(c) Nähern Sie $f(\frac{1}{2})$ auf eine Dezimalstelle genau an.

Hinweise: Benutzen Sie eine Taylorannäherung.

a) Wir wissen dass $\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$ stetig. $\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R})$.

$$f^{(2)}(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Beh 1: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ wobei $p, q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynome und $q(x) \neq 0$.

Dann gilt: $\forall m \in \mathbb{N}$: $f \in C^{(m)}(\mathbb{R})$ und $f^{(m)}(x) = \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}$, $\tilde{p}, \tilde{q}$ polynome und $\tilde{q}(x) \neq 0$.

Beweis: Wir wissen: $p, q \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Durch Induktion:

Anker $(m=0)$ Da $q(x) \neq 0$ ist f offensichtlich stetig und somit gilt: $f \in C^0(\mathbb{R})$ ✓

I.H Sei $m \in \mathbb{R}$ beliebig und es gilt $f \in C^{(m-1)}(\mathbb{R})$ mit:

$$f^{(m-1)}(x) = \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}$$ und $\tilde{q}(x) \neq 0$, d.h. $f^{(m-1)}$ ist stetig.

Schritt: $(m-1) \to m$

Aus I.H folgt dass $f^{(m-1)}(x)$ ein Bruch diff'barer Funktionen ist mit $\tilde{q}(x) \neq 0$.

Mit QR folgt:

$$f^{(m)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(m-1)}(x) = \frac{\tilde{p}'(x)\tilde{q}(x) - \tilde{p}(x)\tilde{q}'(x)}{\tilde{q}(x)^2}.$$ Da $\tilde{q}(x) \neq 0$ folgt $\tilde{q}(x)^2 \neq 0$ und $f^{(m)}$ ist stetig.

$\Rightarrow f \in C^{(m)}(\mathbb{R})$ $(\forall m)$ $\square$

$$\Leftrightarrow f \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^{(k)}(\mathbb{R}) \overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

Betrachten wir nun $f: \mathbb{R} \to \underbrace{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}_{=: I}$, $x \mapsto \arctan(x)$.

Wir wissen: f ist diff'bar mit $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{p(x)}{q(x)}$ und $q(x) \neq 0$ $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R})$.

Rechte: f' erfüllt gerade die Bedingungen von f in Beh 1.

$\Longrightarrow f \in C^n(\mathbb{R})$.

Beachte: f' erfüllt gerade die Bedingungen von f in Beh 1.

Somit gilt: $f' \in C^\infty(\mathbb{R})$ und deshalb auch $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. $\square$

b) Beh: $|f^{(3)}(x)| \leq 2 \quad (\forall x \in [-10,10])$.

Bew:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x\, 2(1+x^2)\, 2x}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{8x^2 - 2(1+x^2)}{(1+x^2)^3} = \frac{8x^2 - 2 - 2x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

Wir müssen zeigen $\sup\limits_{x \in [-10,10]} |f(x)| \leq 2$.

Da f stetig, und $[-10,10]$ kompakt muss gelten dass das sup an einem der folgenden Punkte angenommen wird:

(1) Randpunkte $x \in \{-10, 10\}$

(2) Lokale extrema: $x \in \{x \mid \frac{d}{dx} f^{(3)}(x) = 0\}$.

(1) $|f(-10)| = |f(10)| = \frac{600-2}{101^3} < 1 < 2$ ✓

(2) $$\frac{d}{dx} f^{(3)}(x) = \frac{12x(1+x^2)^3 - (6x^2-2)3(1+x^2)^2 2x}{(1+x^2)^6}$$

$$= \frac{12x(1+x^2) - 6x(6x^2-2)}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{12x + 12x^3 - 36x^3 + 12x}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} \overset{!}{=} 0 \iff x \in \{-1, 0, 1\}.$$

$|f^{(3)}(-1)| = |f^{(3)}(1)| = \frac{6-2}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} < 2$ ✓

$|f^{(3)}(0)| = \left|\frac{-2}{1}\right| = 2 \leq 2$ ✓

Für alle anderen $x \in [-10, 10]$ gilt $f(x) \leq \max\{|f(x)| \mid x \in \{-10, 10, -1, 0, 1\}\}$ $\square$

c) Wir entwickeln $T_2 f(x, 0)$ (wir kennen $f^{(0)}(0) = \arctan(0) = 0$)

Der Fehler ist dann: $R_2 f(x,0) \leq \sup\limits_{\xi \in [-10,10]} \left| f^{(3)}(\xi) \cdot \frac{(\frac{1}{2}-0)^3}{3!} \right| \underset{b)}{\leq} 2 \, \frac{(\frac{1}{8})}{6} = \frac{1}{24} < \underline{\underline{\frac{1}{10}}}$

Somit gilt: $T_2 f(\frac{1}{2}, 0) = \arctan(0) + \frac{1}{1+0^2} \cdot (\frac{1}{2}) - \frac{2 \cdot 0}{(1+\frac{0}{2})^2} \frac{(\frac{1}{2})^2}{2!}$

$\Longrightarrow J_2 f(\tfrac{1}{2}, 0) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$f(\frac{1}{2}) = \arctan(\frac{1}{2}) \approx 0{,}46$ und $|J_2 f(\frac{1}{2},0) - f(\frac{1}{2})| < \frac{1}{24}$ ✓

$f(x) = 1$, $J_m f(x) = 0{,}9999\ldots9 \Longrightarrow$ sehr genau, keine korrekten Dezimalstellen)

9.4. Eine glatte Funktion Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $f \in C^\infty(]0,\infty[)$ ist und, dass $f^{(m)}(x) = P_m(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ gilt für $x > 0$. Dabei sind die P_m $(m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ Polynome.

Beweis durch Induktion:

Anker $(m=0)$

$f^{(0)}(x) = f(x) = \underbrace{1}_{=:P_0(\frac{1}{x})} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ ist stetig auf $\underbrace{(0,\infty)}_{=:I} \Rightarrow f \in C^0(I)$ ✓

I.H. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ bel. und es gilt $f \in C^{m-1}(I)$ mit $f^{(m-1)}(x) = P_{m-1}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ für ein Polynom P_{m-1}.

Schritt $(m-1 \mapsto m)$

Da P_{m-1}, e^x und $\frac{1}{x^2}$ diff'bar $(x>0)$ ist $f^{(m-1)}$ diff'bar mit

$$f^{(m)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(m-1)}(x) = P'_{m-1}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + P_{m-1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

$$= \left(P'_{m-1}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + P_{m-1}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{2}{x^3}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= P_m\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

mit $P_m(z) := -P'_{m-1}(z) \cdot z^2 + 2P_{m-1}(z)z^3$

Da P_m als Polynom und $e^{-\frac{1}{x^2}}$ wie den stetig $\underset{x>0}{\downarrow}$, ist $f^{(m)}$ stetig und somit gilt: $f \in C^m(I)$ □

b) $p_0(z) = 1$

$p_1(z) = 2z^3$

$p_2(z) = -(6z^2)z^2 + 2(2z^3)z^3 = -6z^4 + 4z^6$

$p_3(z) = -(-24z^3 + 24z^5)z^2 + 2(-6z^4 + 4z^6)z^3$

$= 24z^5 - 24z^7 - 12z^7 + 8z^9$

$= 24z^5 - 36z^7 + 8z^9 = 4(6z^5 - 9z^7 + 2z^9)$

$p_4(z) = -4(30z^4 - 63z^6 + 18z^8)z^2 + 2 \cdot 4(6z^5 - 9z^7 + 2z^9)z^3$

$= 24z - 36z + 8z = 4(6z - 9z + 2z)$

$p_4(z) = -4(30z^4 - 63z^6 + 18z^8)z^2 + 2\cdot 4(6z^5 - 9z^7 + 2z^9)z^3$

$= 4(-30z^6 + 63z^8 - 18z^{10} + 12z^8 - 18z^{10} + 4z^{12})$

$= 4(-30z^6 + 75z^8 - 36z^{10} + 4z^{12})$

(c) Zeigen Sie

$$\lim_{x\downarrow 0} f^{(m)}(x) = 0$$

für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Aus a) wissen wir dass $f^{(m)}(x) = P_m\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x>0$.

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) \leq \lim_{x\searrow 0} |f(x)| = \lim_{z\to\infty} \left|f\left(\tfrac{1}{z}\right)\right| = \lim_{z\to\infty} |P_m(z)|\cdot e^{-z^2} \leq K\cdot \lim_{z\to\infty} |z|^d \cdot e^{-z^2} = 0$$

$$\boxed{|P_m(z)| = \left|\sum_{k=0}^{d} z^k a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{d} |z|^k |a_k| \overset{|z|>1}{\leq} \underbrace{d \max_k a_k}_{=:K} \cdot |z|^d = K\cdot|z|^d}$$

(d) Folgern Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist mit $f^{(m)}(0) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Wir haben in a) gezeigt dass $f \in C^\infty((0,\infty))$

Offensichtlich gilt $f^{(m)} \equiv 0$ auf $(-\infty,0]$ und somit gilt $f^{(m)} \in C^\infty((-\infty,0])$.

Um z.z. dass $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ müssen wir noch zwei Dinge zeigen:

① $f^{(m)}$ ist diff'bar in $x_0 = 0$ $(\forall m)$:

② $f^{(m)}$ ist stetig in $x_0 = 0$ $(\forall m)$.

① $$\lim_{\substack{x\nearrow 0\\ x\neq 0}} \frac{f^{(m)}(x) - f^{(m)}(0)}{x-0} = \frac{0-0}{x-0} = 0$$

$=$

$$\lim_{\substack{x\searrow 0\\ x\neq 0}} \frac{f^{(m)}(x) - f^{(m)}(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\searrow 0\\ x\neq 0}} \frac{\overset{0 \text{ (aus c)}}{f^{(m)}(x)}}{\underset{0}{x}} \overset{\text{BdlH}}{=} \lim_{\substack{x\searrow 0\\ x\neq 0}} \frac{f^{(m+1)}(x)}{1} = \frac{0}{1} = 0 \checkmark$$

② da $f^{(m)}(0) = 0$ müssen wir nur noch zeigen dass $\lim_{\substack{x\searrow 0\\ x\neq 0}} f^{(m)}(x) = 0$.
Aber das haben wir schon in c) gezeigt und sind somit fertig! ✓

$\Longrightarrow f \in C^{k}(\mathbb{R})$ $\square$