Vorbesprechung Serie 9

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

Taylor Formel

Sei $f \in C^{m-1}([a,b])$ m-mal diff'bar (d.h. $f^{(m)}$ existiert).
Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ s.d.

$$f(b) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!}}_{= f(a) + f'(a)(b-a) + f''(a)\frac{(b-a)}{2} + \dots + f^{(m-1)}(a)\frac{(b-a)^{m-1}}{(m-1)!}} + f^{(m)}(\xi)\frac{(b-a)^m}{m!} = \mathcal{T}_{(m-1)} f(b,a) + f^{(m)}(\xi)\frac{(b-a)^m}{m!}$$

Taylor-Polynom (m-ter Ordnung)

$$\mathcal{T}_m f(x, x_0) := \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

Argument (x), Entwicklungspunkt (x_0)

Approximation für f:

$$f(x) - \mathcal{T}_m f(x, x_0) = \frac{(x-x_0)^m}{m!}\left(f^{(m)}(\xi) - f^{(m)}(x_0)\right) =: R_m f(x, x_0)$$

Der Fehler geht schnell gegen null: $$\lim_{x \to x_0} \frac{R_m f(x,x_0)}{(x-x_0)^m} = 0$$

Fehlerabschätzungen:

$$|R_m f(x,x_0)| \leq \sup_{\xi \in (x_0, x)} \left| f^{(m)}(\xi) - f^{(m)}(x_0) \right| \frac{|x-x_0|^m}{m!}$$

Falls f sogar $(m+1)$-mal diff'bar dann folgt aus Taylor-Formel:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}}_{= \mathcal{T}_m f(x,x_0)} + f^{(m+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}$$

d.h. $$R_m f(x, x_0) = f^{(m+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!} \leq \sup_{\xi \in (x, x_0)} \left| f^{(m+1)}(x_0) \right| \frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!}$$

Bsp:

Bsp:

Berechne $f(x) := (1+x)^{\alpha}$ an der Stelle $x_0 = 1{,}2$ für $\alpha = 1/7$ auf eine Nachkommastelle genau.

Schritt 1 Finde Formel für $J_m f(x, x_0)$:

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}$$
$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$
$$\vdots$$
$$f^{(m)}(x) \overset{!}{=} \prod_{k=0}^{m-1}(\alpha-k)(1+x)^{\alpha-m} \quad \text{(Induktion?)}$$

Wir wollen den Fehler kleiner als $1/10$ bekommen, also:

$$|R_m f(x, x_0)| \leq \sup_{\xi \in (x_0, x)} \left| f^{(m+1)}(\xi) \right| \frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!} \overset{!}{\leq} 1/10$$

Wir entwickeln um $x = 1$.
Sei $\xi \in (1, 1.2)$ beliebig.

$$\left|f^{(m+1)}(\xi)\right| \cdot \frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!} = \prod_{k=0}^{m} |\alpha - k| \cdot |1+\xi|^{\alpha-(m+1)} \cdot \frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!}$$

$$= \underbrace{\frac{\alpha}{1} \frac{|\alpha-1|}{2} \frac{|\alpha-2|}{3} \cdot \ldots \frac{|\alpha-m|}{m+1}}_{<1} \cdot |1+\xi|^{\alpha-(m+1)} \, |\underbrace{x-x_0}_{1{,}2-1<1}|^{m+1}$$

$$\boxed{\frac{|\alpha-k|}{k+1} \leq \frac{\alpha+k}{k+1} < \frac{1+k}{k+1} = 1}$$

$$< |1+\xi|^{\alpha-(m+1)} = (1+\xi)^{\alpha-(m+1)}$$

Da $\xi \in (x_0, x)$ beliebig war gilt insbesondere

$$R_m f(x, x_0) \leq \sup_{\xi \in (x_0, x)} \left|f^{(m+1)}(\xi)\right| \frac{|x-x_0|}{(m+1)!} < \sup_{\xi \in (x_0, x)} (1+\xi)^{\alpha-(m+1)}$$

Beachte: Für $s < 0$ gilt: $g(x) := (1+x)^s$ mit $g'(x) = s(1+x)^{s-1} \leq 0 \quad (\forall x \geq -1)$

$\Rightarrow g(x)$ ist monoton fallend auf $[-1, \infty)$.

da $\alpha = 1/7 \Rightarrow \underbrace{\alpha - (m+1)}_{=s} < 0$.

$$\Rightarrow (1+x)^{\alpha-(m+1)} \text{ ist monoton fallend auf } [-1,\infty) \text{ und insbesondere auf } \underbrace{(x_0,x)}_{=S} = (1, 1.2)$$

$$\Rightarrow \sup_{\xi\in(x_0,x)} (1+\xi)^{\alpha-(m+1)} = (1+1)^{\alpha-(m+1)} = 2^{\alpha-(m+1)}$$

Wir müssen jetzt m so wählen dass gilt: $2^{\alpha-(m+1)} \overset{!}{\leq} 1/10$

$$\Leftrightarrow \alpha-(m+1) \leq \log_2(1/10) = -\log_2(10)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\alpha - 1 + \underbrace{\log_2(10)}_{\approx 3{,}32}}_{\approx 2{,}46} \leq m$$

$$\leq m \Rightarrow \text{wähle } m = 3$$

Jetzt noch den Wert des Taylorpolyn. berechnen:

$$J_3 f(x,1) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2} + f'''(1)\frac{(x-1)^3}{6}$$

$$\Rightarrow f(1) = 2^{1/7} \approx 1{,}1$$
$$\Rightarrow f'(1) = 1/7 \cdot 2^{-6/7}$$
$$\Rightarrow f''(1) = -6/49 \cdot 2^{-13/7}$$
$$\Rightarrow f'''(1) = \frac{78}{343} \cdot 2^{-20/7}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J_3 f(1.2, 1) \approx 1{,}12}}$$

Bsp Berechne $J_3(\exp\circ\sin)(x,0)$

Variante 1

$$f(x) = e^{\sin x} \qquad \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$$
$$f'(x) = e^{\sin x}\cos x \qquad \Rightarrow f'(0) = e^0 \cdot 1 = 1$$
$$f''(x) = e^{\sin x}\cos^2 x - e^{\sin x}\sin x \qquad \Rightarrow f''(0) = \ = 1$$
$$f'''(x) = \underbrace{e^{\sin x}\cos^3 x}_{1\cdot 1} - \underbrace{e^{\sin x} 2\cos x \sin x}_{0} - (\underbrace{e^{\sin x}\cos x\sin x}_{0} + \underbrace{e^{\sin x}\cos x}_{1}) \Rightarrow f'''(0) = 0$$

$$\Rightarrow J_3(\exp\circ\sin)(x,0) = \underline{1 + x + \frac{x^2}{2}}$$

Variante 2

Wir wissen: $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\Rightarrow \exp(\sin x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)^k / k!$$

$$\Rightarrow \exp(\sin x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} \right)^k \Big/ k!$$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^2 \Big/ 2! + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^3 \Big/ 3! + \dots$$

$\Rightarrow$ Suche alle Terme mit grad ≤ 3

$$\rightarrow 1 + x - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^2}{2!} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} = \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2!}}$$

Tipps Serie 9

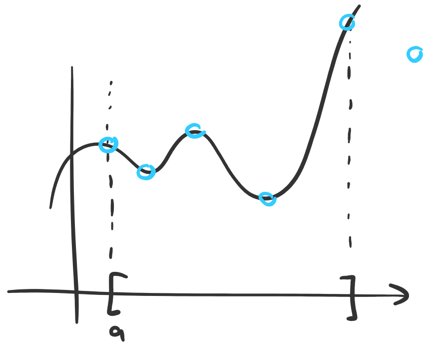
9.2 a) Beweise durch Induktion über $m \in \mathbb{N}_0$ dass:

Beh 1: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ wobei $p, q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynome und $q(x) \neq 0$.
Dann gilt: $\forall m \in \mathbb{N}: f \in C^{(m)}(\mathbb{R})$ und $f^{(m)}(x) = \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}$, $\tilde{p}, \tilde{q}$ polynome und $\tilde{q}(x) \neq 0$.

Benutze Beh 1 um z.z. dass $\arctan \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.
(Tipp: Verwende, dass $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.)

b) Verwende, dass für stetige Funktionen die auf einem Kompakten Intvervall definiert sind (d.h. Randpunkte gehören zum Intervall) der Maximalwert in diesem Intervall einer der Folgenden Punkte sein muss:

- einer der Beiden Randpunkte
- eine lokale Extremalstelle (dort wo f' = 0)



o mögliche Stelle wo $|f(x)| = \max_{x \in [a,b]} f(x)$

c) Mit Taylorreihe um Entwicklungspunkt x_0 = 0.
Hier müsst ihr nicht wie im obigen Beispiel eine geschlossene Form für $f^{(m)}(x)$ finden.
Ihr werdet die geforderte Fehler-Toleranz für: $T_4 f(x, 0)$ finden.
sicher

Um z.z. dass $R_4 f(x, x_0) \leq \frac{1}{10}$ verwenden wir die „verbesserte" Fehlerabschätzung, denn wir haben ja gezeigt dass $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$:

$$|R_4 f(\tfrac{1}{2}, 0)| \leq \underbrace{\sup_{\xi \in (0, \frac{1}{2})} |f^{(5)}(\xi)|}_{(*)} \frac{|\frac{1}{2} - 0|^5}{5!}$$

$$|R_4 f(\tfrac{1}{2},0)| \le \underbrace{\sup_{\xi \in (0,\frac{1}{2})} | \quad \ \ ) |}_{(*)} \quad 5!$$

Ihr könnt (*) exakt abschätzen indem ihr das Verhalten am Rand (0 und $\frac{1}{2}$) betrachtet, sowie die Stellen wo $f^{(5)\prime}(x) \overset{!}{=} 0 = f^{(6)}(x)$. (wie in b)).

9.3 (Newton Verfahren)

Newton-Iteration: Konvergiert gegen 0 falls „genug nahe an Nullstelle initialisiert".

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

D.h. früher oder später wird $x_n < 10^{-10}$ werden (falls konvergiert).

Schreibt ein Programm (Matlab, Python, JAVA, ...):

Input (f, f', x_0, eps)

Funkt. f und ihre Abl. (z.B. als lambda-expr.)

initialisierungs-Pkt.

Abbruch-Kriterium. Hier eps = 1e-10

Output (x^*, k)

NS

iterationsschritte

9.4

a) Zeige: $f \in C^{(m)}((0,\infty))$ $(\forall m)$ per Induktion.

Versuche im Schritt $f^{(m-1)}(x)$ abzuleiten und auf die Form $P_m(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ zu bringen.

b) Einfach ausrechnen (Quot.-Regel) und als Polynom in $\frac{1}{x}$ darstellen:

z.B.: $\dfrac{4x^2+2}{x^5} = 4\left(\frac{1}{x}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{x}\right)^5 = P\left(\frac{1}{x}\right)$ wobei $P(z) = 4z^3 + 2x^5$.

c) Verwende dass

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) \le \lim_{x \searrow 0} |f(x)| = \lim_{z \to \infty} |f(\tfrac{1}{z})| = \lim_{z \to \infty} |P_m(z)| \cdot e^{-z^2}$$

Argumentiere dass die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Potenz (Vrgl: Bsp 3.2.2.iv) in Struwe)