Nachbesprechung Serie 10

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

10.3. Integral mit Riemannschen Summen Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^a e^x \, dx, \quad a > 0,$$

indem Sie *nur die Definition mit Untersumme/Obersumme verwenden* (keinen Fundamentalsatz der Integralrechnung!).

Wir wissen: f stetig $\Rightarrow$ f int'bar.

Da e^x stetig folgern wir, dass $I := \int_0^a e^x dx$ existiert.

Wir berechnen I mit dem Kriterium 4 aus der „Vorbesprechung 10":

Wir betrachten $P_n := \{\frac{a}{n}\cdot k \mid k = 0, \dots, n\}$ mit $\delta(P_n) = \frac{a}{n}$ und wählen als Zwischenpunkt immer die linken Randpunkte. Beachte, da e^x mon. steigend, ist diese Riemannsumme gerade eine Untersumme:

$S(e^x, \xi, P_n) = \underline{S}(e^x, P_n)$. Da $\delta(P_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ müssen wir lediglich folgendes berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(e^x, P_n)$$

$$\underline{S}(e^x, P_n) = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{a}{n}(k-1)} \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{a}{n}\cdot k} = \frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{a}{n}}\right)^k \overset{\text{geom. Summe}}{=} \underbrace{\frac{a}{n}}_{\to 0} \cdot \frac{e^a - 1}{\underbrace{e^{\frac{a}{n}} - 1}_{\to 0}}$$

Berechne $\lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{a}{x} \frac{e^a - 1}{e^{\frac{a}{x}} - 1}}_{=: f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{a}{x}\right)\left(e^a - 1\right)}{e^{\frac{a}{x}} - 1} \overset{\text{BdH}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\left(-\frac{a}{x^2}\right)\left(e^a - 1\right)}{e^{\frac{a}{x}}\left(-\frac{a}{x^2}\right)} = e^a - 1$

Da $\lim_{x\to\infty} f(x) = e^a - 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{x_k := n}{=} \lim_{n\to\infty} f(n) = \underline{\underline{e^a - 1}}$ □

7.1 Variablenwechsel

$f: \Omega - \{y_0\} \to \mathbb{R}$ stetig (ergänzbar) in y_0 mit $\lim_{y\to y_0} f(y) = a$

$g: \Omega' - \{x_0\} \to \Omega$ stetig (ergänzbar) in x_0 mit $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$ (*)

Dann gilt: $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y) = a$.

Beweis:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \tilde{f}\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) \overset{(*)}{=} \tilde{f}(y_0) = a = \lim_{y\to y_0} f(y) \quad \square$$

$$\tilde{f} := \begin{cases} f(y) & y \neq y_0 \\ a & y = y_0 \end{cases}$$

$\underline{y(e^a-1)}$ BdH $e^a - 1$

$g(x) := \frac{a}{x}$ und $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0 \overset{\text{ww}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to\infty} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to 0} f(y) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y(e^a-1)}{e^y-1} \overset{\text{BdH}}{=} \lim\limits_{y\to 0} \frac{e^a-1}{e^y} = \underline{\underline{e^a-1}}$

10.4. Stammfunktionen

(a) Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit ~~$[c,d] \subseteq f([a,b])$~~. Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu $g([c,d]) \subseteq [a,b]$

$$x \mapsto f'(g(x))g'(x), \quad x \in [c,d].$$

Finden Sie eine Stammfunktion der folgenden Funktionen:

(b) $(x^3+5x+1)^{2017}(3x^2+5)$;

(c) $e^{\cos x}\sin x$;

(d) $\dfrac{x}{\sqrt{1+5x^2}}$;

(e) $-\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$;

(f) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, mit f beliebig ;

(g) $\tan x$;

a) Wir betrachten $F : [c,d] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(g(x))$

Da f, g diff'bar gilt mit der Kettenregel: $F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ womit F eine SF für f ist.

b) Sei $g(x) := x^3+5x+1$, $g'(x) = 3x^2+5$

$f(y) := \frac{x^{2018}}{2018}$, $f'(x) = x^{2017}$

$(x^3+5x+1)^{2017}(3x^2+5) = f'(g(x))g'(x)$ Mit a) ist somit $f(g(x)) = \frac{1}{2018}(x^3+5x+1)^{2018}$ SF.

c) $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$

$g(x) = \cos x$, $g'(x) = -\sin x \Rightarrow e^{\cos x} \cdot \sin x = -f'(g(x))g'(x)$

mit a) ist somit $-f(g(x)) = -e^{\cos x}$ SF.

d) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+5x^2}}$

$g(x) = 1+5x^2$, $g'(x) = 10x$

Wir wollen $f'(x) \overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \to f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$

Dann gilt: $h(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot \frac{1}{10}$

$\Rightarrow H(x) = \frac{1}{10} f(g(x)) = \frac{1}{10} \cdot (2 \cdot \sqrt{1+5x^2}) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{1+5x^2}}{5}}}$

e) $h(x) = -\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$

$g(x) = \cos x \;,\; g'(x) = -\sin x$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \implies f(x) = \arctan(x)$

$\rightarrow h(x) = f'(g(x))\, g'(x)$

$\xrightarrow{a)} H(x) = \arctan(\cos x))$

f) $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\log(f(x)) \cdot f'(x) \xrightarrow{a)} H(x) \overset{(*)}{=} \log|f(x)|$

(*)

Was ist mit $\int \frac{1}{x}dx$?

$f_1 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \;,\; x \mapsto \frac{1}{x} \implies \int f_1(x)dx = \log(x) + C$ (klar: $\frac{d}{dx}(\log x + C) = \frac{1}{x}$ ✓)

$f_2 : \mathbb{R}-\{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{x} \implies \int f_2(x)dx = \log|x| + C$ (Wieso?)

Behauptung: $\int f_2(x)\,dx = \int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$

z.z: $\frac{d}{dx}(\log|x| + C) = \frac{1}{x}$

Beweis:

$$\frac{d}{dx}\log|x| + C = \frac{d}{dt}\log t\Big|_{t=|x|} \cdot \frac{d}{dx}|x| = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{d}{dx}|x| = \begin{cases} \frac{1}{x}\cdot(+1) & x \geq 0 \\ \frac{1}{-x}(-1), & x < 0 \end{cases} = \frac{1}{x} \quad \square$$

(g) $h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Sei $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$.

$\Rightarrow \tan(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$ und mit (f) gilt: $H(x) = -\log|\cos x|$