Vorbesprechung Serie 8

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

Mittelwertsatz

Bsp (zu 8.2)

$f : [2,4] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - 2$

Für welche $c \in [2,4]$ ist $f'(c) = \frac{f(4) - f(2)}{4-2}$ erfüllt?

$$\left.\begin{aligned} f(b) &= f(4) = 4^3 - 2 = 62 \\ f(a) &= f(2) = 8 - 2 = 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(c) \overset{!}{=} \frac{62-6}{4-2} = \frac{56}{2} = 28$$

$f'(x) = 3x^2 \overset{!}{=} 28 \iff x = \pm\sqrt{\frac{28}{3}}$ da $c \in [2,4] \Rightarrow c \in \underline{\left\{\sqrt{\frac{28}{3}}\right\}}$

Bernoulli de l'Hôspital

Seien $f, g : \overset{[a,b]-\{x_0\}}{[a,b]} \to \mathbb{R}$ stetig, und diff'bar auf $(a,b) - \{x_0\}$ $(x_0 \in (a,b))$

und $g'(x) \neq 0$ $(\forall x \in (a,b) - \{x_0\})$.

Sei (i) $f(x_0) = 0 = g(x_0)$ (i)' $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = \infty$

(ii) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: A$ (d.h. der limes existiert)

Dann gilt: (i), (ii) $\Rightarrow$ $g(x) \neq 0$ $(\forall x \in (a,b) - \{x_0\})$ und $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Dann gilt (i)', (ii) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Bmk (i) $\iff$ „$\frac{f(c)}{g(c)}$ ist vom Typ $\frac{0}{0}$"

Bernoulli funktioniert aber auch bei Fälle die „vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ sind.

Falls „vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$" können wir B.d.H etwas abändern (siehe blaue Anmerkungen oben).

Beweis dass abgeändertes B.d.H für Typ „$\frac{\infty}{\infty}$" funktioniert:

Aus (i)' wissen wir $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: A$ existiert.

Wir müssen zeigen dass $\underbrace{\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \tilde{A} \text{ existiert}}_{1}$ und dass $\underbrace{A = \tilde{A}}_{2}$.

1 Beachte dass für $x \in [a,b] - \{x_0\}$:

$\frac{f(x)}{\ldots} = \frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)}{\ldots} = \tilde{g}(x)$ „0"

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)} = \frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{f}(x)} \quad \text{„}\frac{0}{0}\text{"}$$

sktige Ergänzung in x_0

Mit $\tilde{f}(x) := \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & , x \neq x_0 \\ 0 & , x = x_0 \end{cases}$, $\tilde{g}(x) := \begin{cases} \frac{1}{g(x)} & , x \neq x_0 \\ 0 & , x = x_0 \end{cases}$ $\Rightarrow \tilde{f}, \tilde{g} : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Und wir können B.d.H anwenden:

$$\text{B.d.H} \Rightarrow \lim_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{f}(x)} = \lim \frac{\tilde{g}'(x)}{\tilde{f}'(x)} =: \tilde{A} \quad (1) \checkmark$$

Es gilt also:

$$\tilde{A} = \lim \frac{\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right)}{\left(-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)} = \lim \underbrace{\frac{g'(x)}{f'(x)}}_{=\frac{1}{A}} \cdot \underbrace{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2}_{\tilde{A}^2} = \frac{\tilde{A}^2}{A} \Leftrightarrow A = \tilde{A} \quad (2) \checkmark \square$$

Typ $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x \to c} \underbrace{f(x)}_{\to 0} \underbrace{g(x)}_{\to \infty} = \lim \frac{f(x)}{\underbrace{\left(\frac{1}{g(x)}\right)}_{=: \tilde{g}(x)}} = \lim \frac{f(x) \to 0}{\tilde{g}(x) \to 0} \Rightarrow \text{BdH anwendbar!}$$

Typ $\infty - \infty$

$$\lim_{x \to c} \left(\underbrace{f(x)}_{\to \infty} - \underbrace{g(x)}_{\to \infty}\right) = \lim \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)}\right] = \lim \left[\frac{\overbrace{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}^{=: \tilde{f}(x) \to 0}}{\underbrace{\frac{1}{f(x)g(x)}}_{=: \tilde{g}(x) \to 0}}\right] = \lim \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} \Rightarrow \text{BdH anwendbar!}$$

<u>Bsp</u>: $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\overbrace{\log(1-\cos x)}^{\to -\infty}}{\underbrace{\log x}_{\to -\infty}} \Rightarrow$ „vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$" und $g'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$ für $x \neq c \Rightarrow$ BdH!

$$\lim \frac{\log(1-\cos x)}{\log x} \overset{\text{BdH}}{=} \lim \frac{\frac{1}{1-\cos x} \sin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \Rightarrow \text{„vom Typ } \tfrac{0}{0}\text{"}$$

$$\overset{\text{BdH}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\sin x} \Rightarrow \text{„vom Typ } \tfrac{0}{0}\text{"}$$

$$\overset{\text{BdH}}{=} \lim \frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{\cos x} = \lim_{x \to c} \frac{2\cos x - x \sin x}{\cos x}$$

$$= 2 - \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\cos x} = 2 - \frac{0}{1} = \underline{\underline{2}}$$

Umkehrsatz

Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ diff'bar mit $f'(x)>0$ $(\forall x\in(a,b))$

Sei $-\infty \leq c := \inf_x f(x) < \sup_x f(x) =: d \leq +\infty$ dann ist $f:(a,b)\to(c,d)$ bijektiv (f^{-1} existiert)
und f^{-1} ist ebenfalls diff'bar mit:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{bzw.} \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

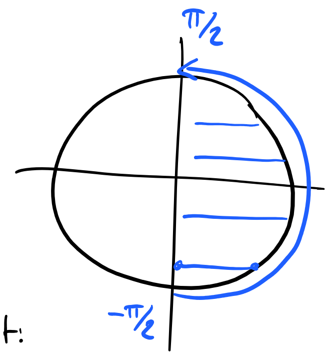
$\Longrightarrow$ Berechne Ableitung der Umkehrfkt. mittels Ableitung der Ursprungsfkt.

Bsp: $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $x\mapsto x^2$

$f'(x)=2x>0$ $(\forall x\in(0,\infty))$, $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

Bsp $\sin:(-\pi/2,+\pi/2)\to(-1,+1)$
$x\mapsto \sin x$



$\forall x\in(-\pi/2,\pi/2)$: $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x > 0$

$\Rightarrow \arcsin := \sin^{-1}:(-1,1)\to(-\pi/2,\pi/2)$ existiert und es gilt:

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) \overset{\text{UKS}}{=} \frac{1}{\frac{d}{dy}\sin(y)\big|_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \underset{\cos^2+\sin^2=1}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}$$

Tipp zu 8.3

Strategie:

1. $\tan:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ ist diff'bar
2. $\frac{d}{dx}\tan(x)>0$ $(\forall x)$
3. $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\tan x=-\infty \wedge \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$

$\overset{\text{UKS}}{\Longrightarrow}$ tan bijektiv und $\arctan := \tan^{-1}:\mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ existiert und ist diff'bar.

4. $f(x)=e^x+\arctan(x)$ ist diff'bar
5. $\frac{d}{dx}f(x) > 0$ $(\forall x)$

$\overset{\text{UKS}}{\Longrightarrow}$ f ist bijektiv und $f^{-1}:(-\frac{\pi}{2},\infty)\to\mathbb{R}$

4. $f(x) = $ [illegible]

5. $\frac{d}{dx} f(x) > 0 \quad (\forall x)$

6. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} \ \wedge \ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\overset{\text{UKS}}{\Longrightarrow}$ f ist bijektiv und $f^{-1} : (-\frac{\pi}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$ existiert und ist diff'bar. (✓ erster Teil)

7. Finde x_0 s.d. $f(x_0) = 1$ und Berechne mit UKS-Formel:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Bmk UKS

f stetig und diff'bar auf (a,b) und $f'(x) > c$.

$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \inf_{x \in (a,b)} f(y)$ und $\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$.