Vorbesprechung Serie 6

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

Pktweise / glm Konvergenz

Seien $f, f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$.

pktweise: $\forall x \quad \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$

glm: $\sup\limits_{x\in\Omega} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Bmk: f_k stetig $(\forall k) \wedge f_k \xrightarrow{glm} f \Longrightarrow f$ stetig.

Bsp

$f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^k$

Pkt Konv: Sei $x \in [0,1]$ bel.

$x = 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \lim\limits_{k\to\infty} 1 = 1$

$x < 1 \qquad \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \lim\limits_{k\to\infty} x^k = 0$

$\Rightarrow \lim f_k(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, f nicht stetig $\Rightarrow f_k \cancel{\xrightarrow{glm}} f$

Bsp

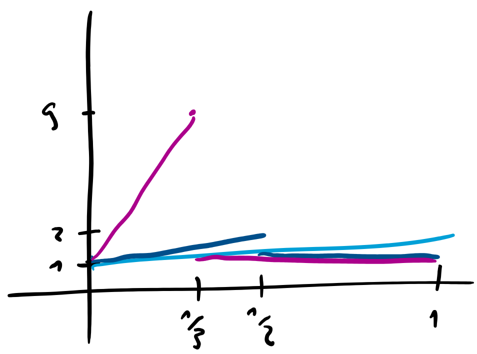
$f_k : [0,10] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^3}{k}$

Beh: $f_k \xrightarrow{glm} 0$

Bew: Sei $x \in [0,10]$ bel. $\quad \left|\frac{x^3}{k} - 0\right| = \frac{|x|^3}{k} \leq \frac{10^3}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$

$\Longrightarrow \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x^3}{k} - 0\right| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \qquad \square$

Bsp $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} k^2 x + 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 1, & \frac{1}{k} < x \end{cases}$



pkt konv

$x = 0 \qquad f_k(x) = 1 \quad (\forall k) \Rightarrow \lim f(0) = 1$

$\sim x > \frac{1}{k}$

$x = 0$ $\quad f_k(x) = 1 \quad (\forall k) \Rightarrow \lim f(c) = 1$

$x > 0$ $\quad$ Setze $k_0 := \lceil \frac{1}{x} \rceil + 1 \quad \rightarrow \forall k \quad k_0 \quad f_k(x) \overset{x > \frac{1}{k}}{=} 1 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f_k(x) = 1$

d.h. f_k konv. pktw. gegen $f \equiv 1$.

f stetig $\Rightarrow f_k \xrightarrow{glm} f$? nicht notwendigerweise! Überprüfen!

Beh. $f_k \xrightarrow{glm} f \equiv 1$?

Sei $k \in \mathbb{N}$ bel. Beachte dass $f(\frac{1}{k}) = k^2 \cdot \frac{1}{k} + 1 = k+1$

$\rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_k(x) - f(x)| \geq |f_k(\frac{1}{k}) - f(\frac{1}{k})| \geq f_k(\frac{1}{k}) - \underbrace{f(\frac{1}{k})}_{=1}$

$= k+1-1 = k \quad (\forall k) \Rightarrow \cancel{f_k \xrightarrow{glm} f}$

Tipps Serie 6

6.2 Sie Beispiele oben.

6.3 Betrachte $\frac{P(x)}{x^n}$.

Zeige, es existieren $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ s.d. $\frac{P(x_1)}{x_1} > 0$ und $\frac{P(x_2)}{x_2} < 0$.

Versuche daraus zu folgern dass dann gilt:

$P(x_1) > 0$ und $P(x_2) < 0$. Dann ZWS.

6.4 Additionstheoreme

Benutzt die Tatsache dass die Reihen $Exp(z)$, $Cos(x)$, $Sin(x)$ abs. konvergent sind. (D.h. ihr dürft die Glieder frei umordnen).

a) Zeige dass $Exp(ix) \overset{(*)}{=} Cos(x) + i\,Sin(x)$

(Teilt auf in grade und ungrade k)

Versuche danach $Exp(-ix)$ in Cos und Sin Termen auszudrücken.

(Entweder gleich „rechnen" wie in $(*)$ oder das Resultat in $(*)$

verwenden zusammen mit: • $Cos(-x) = Cos(x)$ ← Versuche das zu zeigen!
• $Sin(-x) = -Sin(x)$. ←

b) Geht ohne Reihendarstellung. Rechne direkt mit $\mathrm{Exp}(\cdot)$, $\sin(\cdot)$, $\cos(\cdot)$ ausdrücken.

Verwende (*)

c) Geht ohne Reihendarstellung.

Für $1 \overset{(**)}{=} \sin(x)^2 + \cos(x)^2$:

Verwende b) zusammen mit $1 = \cos(0) = \cos(x-x)$.

Für $\cos(3x)$: Verwende (**)

<u>6.5</u> (Nicht mehr lösen falls schon gelösst)

<u>6.6</u> a) Schreibt ein Programm um den Graphen zu plotten.

(Matlab, Python etc).

b) Majorantenkriterium!

c) Siehe Beispiele oben.

d) Kann mit einem Satz aus Struwe begründet werden.