Nachbesprechung Serie 8

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

8.3. arctan Gegeben Sei die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \left]-\tfrac{\pi}{2}, \infty\right[$$
$$x \mapsto e^x + \arctan x.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar und bijektiv ist.

Zeigen Sie, dass f^{-1} differenzierbar ist und berechnen Sie $(f^{-1})'(1)$.

Strategie:

1. $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist diff'bar
2. $\frac{d}{dx} \tan(x) > 0 \quad (\forall x)$
3. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty \ \wedge \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$

$\overset{\text{UKS}}{\Longrightarrow}$ tan bijektiv und $\arctan := \tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ existiert und ist diff'bar.

4. $f(x) = e^x + \arctan(x)$ ist diff'bar
5. $\frac{d}{dx} f(x) > 0 \quad (\forall x)$
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} \ \wedge \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\overset{\text{UKS}}{\Longrightarrow}$ f ist bijektiv und $f^{-1} : (-\frac{\pi}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$ existiert und ist diff'bar. (✓ erster Teil)

7. Finde x_0 s.d. $f(x_0) = 1$ und Berechne mit UKS-Formel:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

① Beh. $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ist diff'bar.

Bew Da sin und cos diff'bar auf $\mathbb{R}$ und $\cos(x) \neq 0 \ \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ist tan diff'bar auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ✓

② Da tan diff'bar können $\frac{d}{dx}\tan(x)$ ausrechnen und abschätzen:

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} > 0 \ ✓$$

③ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$. $\overset{\text{UKS.}}{\Longrightarrow}$ tan ist bijektiv und $\tan^{-1} =: \arctan$ existiert. ✓

Ausserdem folgt mit UKS dass arctan diff'bar auf $\mathbb{R}$.

④ Da e^x ebenfalls diff'bar $\to$ f diff'bar. ✓

⑤ Wir berechnen zuerst:

$$\frac{d}{dx}\arctan(y) = \frac{d}{dx}\tan^{-1}(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1+y^2} > 0. \Rightarrow \text{mon.}$$

$$\frac{d}{dx}\arctan(y) = \frac{d}{dx}\tan^{-1}(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2} > 0. \Rightarrow \text{mon. wachsend.}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x).}$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}e^x + \frac{d}{dx}\arctan(x) = e^x + \frac{1}{1+x^2} > 0. \checkmark$$

uks

(6) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 + -\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty + \frac{\pi}{2} = \infty$ $\Rightarrow$ f bijektiv und f^{-1} existiert. ✓

(7) Wir wollen x_0 s.d. $f(x_0) = e^{x_0} + \arctan(x_0) \overset{!}{=} 1.$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$$

Für $x_0 = 0$ gilt: $f(0) = 1 + \arctan(0) = 1 + 0 = 1$ ✓

$$\boxed{\tan(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \arctan(0) = 0}$$

Somit gilt: $(f^{-1})'(1) = (f^{-1})'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\left(e^0 + \frac{1}{1+0^2}\right)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

8.4. Mit l'Hôpital Bestimmen Sie folgende Grenzwerte. Weisen Sie vor jeder Anwendung des Satzes von Bernoulli–de l'Hôpital dessen Voraussetzungen nach.

(a) $\lim_{x\searrow 0} \frac{e^x \sin x}{x}$

(b) $\lim_{x\searrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$

(c) $\lim_{x\searrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)+\sin(3x)}{\cos(2x)}$

(d) $\lim_{x\searrow 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{\sin x}\right)$

(e) $\lim_{x\searrow 0} \sqrt[x]{1+x}$

(f) $\lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$

a) Sei $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x\sin x$, $g(x) = x$. Offensichtlich sind f,g stetig und diff'bar auf $(0,1)$.

Es gilt: $f(0) = e^0\sin(0) = 0 = g(0)$ und $g'(x) = 1 \neq 0$

Folglich dürfen wir BdH anwenden:

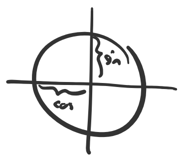
Formal

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{e^x\sin x}{x} \overset{BdH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x + e^x\cos x}{1} = \underline{\underline{1}}$$

b) $\lim_{x\searrow 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} \overset{\sqrt{\cdot}\ \text{stetig}}{=} \sqrt{\lim_{x\searrow 0}\frac{1-\cos x}{x^2}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{2}}}}$

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \overset{BdH}{=} \lim \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\searrow 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

c) $\lim_{x\searrow\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)+\sin(3x)}{\cos(2x)} = \frac{1+(-1)}{-1} = 0$



(Bernoulli ist hier nicht anwendbar (ist aber gar nicht nötig)).

d) $\lim_{x\searrow 0}\left(\underbrace{\frac{1}{e^x-1}}_{\to\infty}-\underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{\to\infty}\right) = \lim_{x\searrow 0}\frac{\sin x - e^x + 1}{(e^x-1)\sin x} \overset{BdH}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{\cos x - e^x}{e^x\sin x + (e^x-1)\cos x} \overset{BdH}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{-\sin x - e^x}{e^x\sin x + e^x\cos x + e^x\cos x - (e^x-1)\sin x}$

$= \frac{-1}{1+1} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

e) $\lim_{x\searrow 0}\sqrt[x]{1+x}$

$\sqrt[x]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}$

Wir berechnen zuerst:

$\lim_{x\searrow 0}\frac{\log(1+x)}{x} \overset{BdH}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{1}{1+x} = 1$

Da e^x stetig, gilt: $\lim_{x\searrow 0}\sqrt[x]{1+x} = e^{\left(\lim_{x\searrow 0}\frac{\log(1+x)}{x}\right)} = e^1 = \underline{\underline{e}}$

Alternativ ohne Bernoulli:

$\lim_{x\searrow 0}\sqrt[x]{1+x} = \lim_{x\searrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\nearrow\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$

f) $\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{x}\left(\underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{\infty}-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\infty}\right) = \lim_{x\searrow 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x} \overset{BdH}{=} \lim\frac{1-\cos x}{2x\sin x + x^2\cos x} \overset{BdH}{=} \lim\frac{\sin x}{2\sin x + 2x\cos x + 2x\cos x - x^2\sin x} = \lim\frac{\sin x}{\sin x(2-x^2)+4x\cos x}$

$\overset{BdH}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{\cos x}{\cos x(2-x^2) - 2x\sin x + 4\cos x - 4x\sin x} = \frac{1}{2+4} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$