Vorbesprechung Serie 1

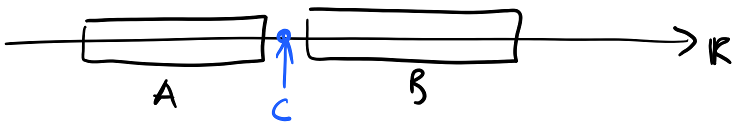
Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

Supremum und Infimum (Theorie)

Ordnungsvollständigkeit • Eigenschaft die für $\mathbb{R}$ gilt aber nicht für $\mathbb{Q}$.

$$\forall A,B \subseteq \mathbb{R}: A\neq\emptyset \wedge B\neq\emptyset \wedge (\forall a \forall b\ a\leq b) \rightarrow \exists c\ \forall a \forall b\ \ a\leq c\leq b$$

"Zwischen zwei nichtleeren Mengen A und B wobei jedes element in A kleiner ist als jedes Element in B, existiert eine Reelle Zahl c welche die beiden Mengen trennt



Wieso erfüllt $\mathbb{Q}$ diese Eigenschaft nicht?

Gegenbsp: $A=\{q\in\mathbb{Q} \mid q\leq\sqrt{2}\}$ $B=\{q\in\mathbb{Q}\mid q\geq\sqrt{2}\}$

Offensichtlich erfüllt $c:=\sqrt{2}$ diese Eigenschaft, jedoch ist $c\notin\mathbb{Q}$. Ang. $\exists c'\in\mathbb{Q}$ $c'\neq c$ welche ebenfalls die Trennungseigenschaft erfüllt.
Sei O.b.d.A $c'<c$ ($c>c'$ analog).

$\boxed{\text{Satz: } \mathbb{Q} \text{ liegt dicht in } \mathbb{R}, \text{ d.h. } \forall a,b\in\mathbb{R}\ \ a<b \rightarrow \exists m,n\in\mathbb{Z}\ \ a<\frac{m}{n}<b.}$

$c'\in\mathbb{Q}\Rightarrow c'\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$ $\quad c'\neq c \Rightarrow \exists a\in\mathbb{Q}\ \ c'<a<c=\sqrt{2}$

$\Rightarrow a\in A$ ↯ $\lrcorner$ c' erfüllt die Trennungseigenschaft nicht $\square$

Was bringt uns Ordnungsvollständigkeit?

Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum.

Sei A nichtleer, nach oben beschränkt.

Sei also b eine obere Schranke: $\forall a\in A: a\leq b$.

Wir konstruieren eine neue Menge $B:=\{b \mid$,,b ist obere Schranke für $A\}$.

Beachte: • $A\neq\emptyset$ (Annahme)
• $B\neq\emptyset$ (da $b\in B$) $\Big\}$ Ordnungsvollständigkeit $\Rightarrow \exists c\in\mathbb{R}\ \forall a\in A, b\in B$

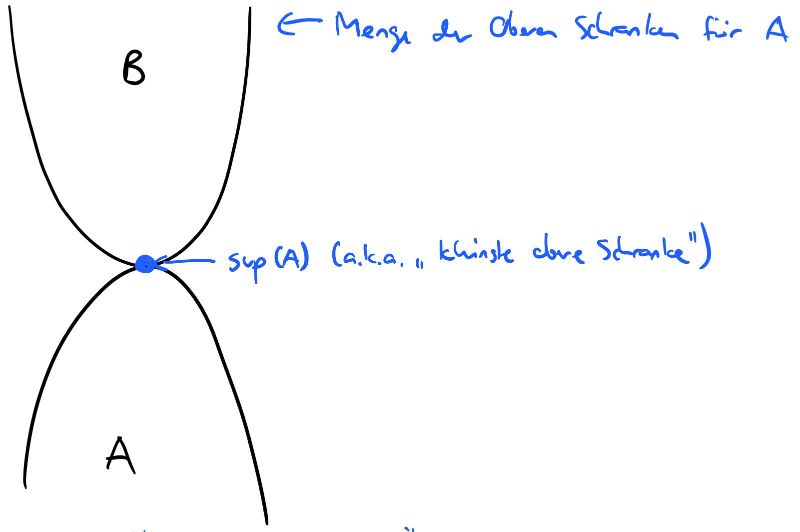
- $B \neq \emptyset$ (da $b \in B$)
- $\forall a \in A, b \in B \quad a \leq b$

$\Big\}$ Ordnungsvollständigkeit $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}\ \forall a \in A, b \in B$
$a \leq c \leq b$.

Da $c \geq a$ $(\forall a \in A)$ ist c obere Schranke für A.

Da $c \leq b$ $(\forall b \in B)$ ist b untere Schranke für B

$\Rightarrow c$ ist kleinste obere Schranke für A, deshalb $c := \sup A$.



Analog: „grösste untere Schranke" $\Leftrightarrow$ Infimum

Falls $c = \sup(A) \in A \Rightarrow c = \max(A)$

Falls $d = \inf(A) \in A \Rightarrow d = \min(A)$

Bsp: $A = (0,1] \Rightarrow \inf(A) = 0$ $\min(A)$ existiert nicht

$\Rightarrow \sup(A) = \max(A) = 1$

Archimedisches Prinzip

① $\boxed{\forall b \in \mathbb{R} \quad 0 < b \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad b < n}$ $\Leftrightarrow$ ② $\boxed{\forall b \in \mathbb{R}\ 0 < b\ \exists n \in \mathbb{N}\ \underbrace{\tfrac{1}{b}}_{=:\varepsilon} > \tfrac{1}{n}}$

Bsp: Bestimme, (falls existiert), das Infimum von $A := \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

Offensichtlich ist:
- $\frac{1}{1} \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$
- 0 eine untere Schranke von a da $0 < a$ $(\forall a \in A)$.

$\Big\} \Rightarrow$ Supremum existiert!

Wie zeigen wir dass 0 die grösste untere Schranke ist?

Allgemeines vorgehen:

Nimm an es gibt eine grössere untere Schranke $\varepsilon > 0$ s.d.

Allgemeines vorgehen:

Nimm an es gibt eine grössere untere Schranke $\varepsilon > 0$ s.d.
$\forall a \in A: \varepsilon < a = \frac{1}{n}$ (für $n \in \mathbb{N}$).

$$\text{Archimedisches Prinzip ②} \Rightarrow \exists n_0 \quad 0 < \overbrace{\frac{1}{n_0}}^{=: a_0 \in A} < \varepsilon \quad ↯$$

(im Widerspruch zur Annahme dass ε eine untere Schranke ist)

Beh: Sei $A \neq \emptyset$ nach oben beschränkt.
Sei b eine obere Schranke für a. Dann gilt: $b \in A \Rightarrow b = \max A = \sup A$.

Beweis: Ang. $b \neq \sup A \Rightarrow \exists b' < b$ und $b' \geq a$ $(\forall a \in A)$.
Nach Annahme ist aber $b \in A \Rightarrow b \leq b'$ ↯ □

Bsp: (Aufgabe 2.4. b) aus alter Serie)

Bestimme Sup/Max/Inf/Min von $B := \{x + \frac{1}{x} \mid \frac{1}{2} < x \leq 2\}$

Sup: Sei $f: (\frac{1}{2}, 2] \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto f(x) := x + \frac{1}{x}$

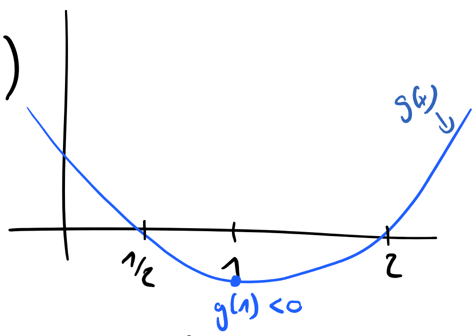
Existiert sup? $1 + \frac{1}{1} = 2 \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$ ✓
$x + \frac{1}{x} \leq 2 + 2 = 4 \quad (\forall x \in (\frac{1}{2}, 2]) \Rightarrow 4$ ist obere Schranke ✓
$\Big\} \Rightarrow$ Sup existiert.

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow f(\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2} + 2 = \tfrac{5}{2} \\ f(1) &= 1 + 1 = 2 \\ f(2) &= 2 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2} \end{aligned}\right\} \text{Vermutung: } \underbrace{\sup(B) = \tfrac{5}{2}}_{①} \quad \underbrace{\inf(B) = 2}_{②}$$

Beweis ①: $(\sup(B) = \frac{5}{2})$

$$\forall x \in (\tfrac{1}{2}, 2] \quad f(x) - \tfrac{5}{2} = x + \tfrac{1}{x} - \tfrac{5}{2} = \tfrac{1}{x}\left(x^2 - \tfrac{5}{2}x + 1\right)$$

$$= \underbrace{\tfrac{1}{x}(x-2)(x-\tfrac{1}{2})}_{g(x)} \leq 0 \quad (\forall x \in (\tfrac{1}{2}, 2])$$



$\Rightarrow \frac{5}{2}$ ist eine obere Schranke für B. Da $f(2) = \frac{5}{2} \Rightarrow \max(B) = \sup(B) = \frac{5}{2}$ □

Beweis ②: $(\inf(B) = 2)$

$$f(x) - 2 = x + \tfrac{1}{x} - 2 = \tfrac{1}{x}\left(x^2 - 2x + 1\right) = \tfrac{1}{x}(x-1)^2 \geq 0$$

und Gleichheit bei $x := 1$ $\Rightarrow$ $\inf(B) = \min(B) = \underline{\underline{2}}$ $\square$

Tipps: Serie 1

1.1 MC: Versucht: „JA"'s zu beweisen
„NEIN"'s zu widerlegen (Gegenbsp).

in a) und b): $\forall a, b \in \mathbb{R}$ sollte heissen: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$.

1.2 Easy

1.3 Benutzt die Axiome
- A.i) – A.iv)
- M.i) – M.iv)
- D)
- O.i) – O.iv)
- K.i), K.ii) ← wichtig für diese Aufgabe.

(aus Struwe-Skript)

Ihr dürft bewiesene Bemerkungen aus dem Skript verwenden (sofern sie natürlich nicht identisch mit der zu lösenden Aufgabe sind.)

1.5 Vorgehen für sup/max (inf/min analog:

$M_i = \emptyset$

- JA: kein sup/max fertig!
- Nein: M_i nach oben beschränkt?
  - Nein: kein sup/Max fertig!
  - JA: $\Rightarrow$ $\sup M_i$ existiert.

1. Stelle Vermutung auf für sup:
   $m^+ \in \mathbb{R}$ und $m^+ = \sup M_i$
2. Beweise die Vermutung
   (z.B. nimm widerspruchsweise an
   $\exists\, \varepsilon > 0$ und $m^+ - \varepsilon$ ist obere Schranke),
   führe zu einem Widerspruch in dem du zeigst,
   dass $\exists\, m \in M_i : m_i > m^+ - \varepsilon$.
3. ist $m^+ \in M_i$?

3. ist $m^+ \in M_i$?

JA

$\sup M_i = \max M_i = m^+$

NEIN

$\sup M_i = m^+$, kein Max.

1.6

$\sup(A) \leq 1$ ist einfach.

Für $0{,}99 \leq \sup(A)$: Benutze Taschenrechner und zeige

dass $\exists n_0 : \langle n\sqrt{2} \rangle \geq 0{,}99$.

1.7

Vorgehen wie in 1.5. Versuche geschlossene Form für $a \in A$ zu finden. (Tipp: Geometrische Reihe)

1.8

Vorgehen wie in 1.5.
A beschränkt <=> A ist nach oben und unten beschränkt.