Vorbesprechung Serie 11

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

Hauptsatz der Integral und Differentialrechnung

Sei $f \in C^0([a,b])$.

(A) Sei $F: x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \quad x \in [a,b]$

Dann gilt: $F \in C^1([a,b])$ mit $F'(x) = f(x)$ (d.h. F ist <u>eine</u> Stammfkt von f)

(B) Sei F eine bel. Stammfkt von f.

Dann gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ Notation $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$

Bsp Sei $A(x) := \int_{-1}^{\cos x} e^{\arccos(t)}\,dt$. Berechne $\frac{d}{dx} A(x)$

Sei $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(t) := e^{\arccos(t)}$ Mit HID (A) $\Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{x} e^{\arccos t}\,dt \quad (x \in [-1,1])$

$\phi: [-1,1] \to [-1,1]$, $x \mapsto \phi(x) := \cos x$

$\Rightarrow A(x) = (F \circ \phi)(x)$ d.h. $\frac{d}{dx} A(x) = \frac{d}{dv} F(v)\Big|_{v=\phi(x)} \cdot \frac{d}{dx}\phi(x)$

$$= e^{\arccos(\cos x)} \cdot (-\sin x) = \underline{\underline{-\sin x \cdot e^{x}}}$$

Unbestimmtes Integral

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ (F Stammfkt. von f, $C \in \mathbb{R}$)

$\int f(x)\,dx = \{ F(x) + C \mid F' = f,\ C \in \mathbb{R} \}$

Integrierbarkeit vs Stammfunktion

f stetig $\Rightarrow$ f (stetig) integrierbar $\overset{\text{Hs. (A)}}{\Longrightarrow}$ f hat SF (nämlich $\int_a^x f\,dt$)

Im allg. jedoch gilt: f int'bar $\not\Rightarrow$ / $\not\Leftarrow$ f hat SF

Gegenbsp für $\not\Leftarrow$: „Vorbesprechung Serie 10"

" " $\not\Rightarrow$: MC Serie 11. (versucht eins zu finden)

Partielle Integration

$\boxed{\frac{d}{dx} f}$ | $\boxed{\int f\,dx}$

$\boxed{\frac{d}{dx} f}$

Produktregel:

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = \frac{du}{dx} \cdot v + u \frac{dv}{dx}$$

Kettenregel

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{df}{dx}\bigg|_{x_0 = g(x)} \cdot \frac{dg}{dx}$$

$\boxed{\int f dx}$

Partielle Integration

$$\int uv' dx = u \cdot v - \int u'v \, dx + C$$

Methode der Subst (voraussichtlich nächste Woche)

Herleitung der Regel:

$$uv = \int (uv)' dx \overset{P.R}{=} \int (u'v + uv') dx \overset{Lin.}{=} \int u'v \, dx + \int uv' dx$$

$$\Longleftrightarrow \int uv' \, dx = uv - \int u'v dx \qquad \text{(unbestimmt)}$$

$$\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx \qquad \text{(bestimmt)}$$

Bsp $\int \log^2 x \, dx$ $\qquad \int uv' \, dx = uv - \int u'v dx$

$$\int \log^2 x \cdot 1 \, dx = \log^2 x \cdot x - \int 2 \log x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \, dx = \log^2 x \cdot x - 2 \int \log x \cdot 1$$

$$= \log^2 x \cdot x - 2 \left(\log x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx \right)$$

$$= \log^2 x \cdot x - 2 \left(\log x \cdot x - x \right) + C$$

$$= \underline{\underline{x \log^2 x - 2x \log x + x + C}}$$

Bsp $\int e^{2x} \cos x \, dx$

$$I := \int e^{2x} \cos x \, dx = e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x \, dx$$

$$= e^{2x} \sin x - 2 \left(e^{2x} (-\cos x) \right) - 2 \int e^{2x} (-\cos x) dx$$

$$= e^{2x} \sin x + 2 e^{2x} \cos x - 4 \underbrace{\int e^{2x} \cos x \, dx}_{= I + \tilde{C}}$$

$$\Longleftrightarrow 5I = e^{2x} \sin x + 2 e^{2x} \cos x + \tilde{C}$$

$$\Longleftrightarrow I = \underline{\underline{\frac{1}{5} \left(e^{2x} \sin x + 2 e^{2x} \cos x \right) + C}} \qquad \left(C := \frac{1}{5} \tilde{C} \right)$$

Bsp $\int_0^1 t \sinh(4t) \, dt$

Bsp $\int_0^1 t\sinh(4t)\,dt$

$$\int_0^1 t\sinh(4t)\,dt = \left[t\cdot\frac{\cosh(4t)}{4}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cosh(4t)}{4}\,dt = \frac{1}{4}\cdot\cosh(4) - \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{\sinh(4t)}{4}\right]_0^1$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\cosh(4t)}{4}\right) = \frac{\sinh(4t)}{4}\cdot 4 = \sinh(4t)}$$

$$= \frac{1}{4}\cosh(4) - \frac{1}{16}\left(\sinh(4) - \frac{e^0 - e^{-0}}{2}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}\cosh(4) - \frac{1}{16}\sinh(4)}}$$

Was ist mit $\int \frac{1}{x}\,dx$?

$f_1 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $\int f_1(x)\,dx = \log(x) + C$ (klar: $\frac{d}{dx}(\log x + C) = \frac{1}{x}$ ✓)

$f_2 : \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $\int f_2(x)\,dx = \log|x| + C$ (Wieso?)

Behauptung: $\int f_2(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$

z.z: $\frac{d}{dx}\left(\log|x| + C\right) = \frac{1}{x}$

Beweis:

$$\frac{d}{dx}\log|x| + C = \frac{d}{dt}\log t\Big|_{t=|x|}\cdot\frac{d}{dx}|x| = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{d}{dx}|x| = \begin{cases}\frac{1}{x}\cdot(+1) & x \geq 0\\ \frac{1}{-x}(-1), & x < 0\end{cases} = \frac{1}{x} \quad \square$$

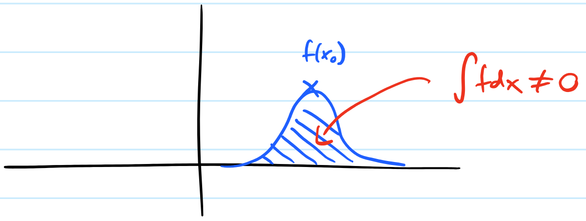
Stetigkeit und Integration

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R'integrabel. Zeige dass gilt:

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i) } f \text{ stetig}\\ \text{(ii) } f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]\\ \text{(iii) } \int_a^b f(x)\,dx = 0\end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

Beweis

Idee: Ang. (i),(ii),(iii) gilt und $\exists x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) > 0$. Wir zeigen dass dann $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ (im Widerspruch zu (ii))



Sei also $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) > 0$

Da f stetig (i) gilt:

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)\ \forall x\in[a,b]: \ |x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (*)

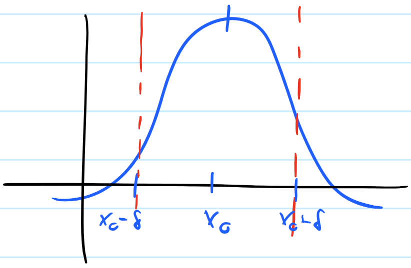
$\Longrightarrow$ Wähle $\varepsilon := f(x_0) > 0$. Wegen (*) erhalten wir ein $\delta(\varepsilon)$ s.d. gilt:

$$\underbrace{|x-x_0|<\delta}_{1} \Longrightarrow \underbrace{|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon}_{2}$$

$1 \Longleftrightarrow -\delta < x-x_0 < \delta$
$\Longleftrightarrow x_0-\delta < x < x_0+\delta$
$\Longleftrightarrow x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$2 \Longrightarrow -\varepsilon < f(x)-f(x_0)$
$\Longleftrightarrow f(x_0)-\varepsilon < f(x)$
$\Longleftrightarrow \varepsilon-\varepsilon < f(x)$
$\Longleftrightarrow 0 < f(x)$ 3

$1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3$ d.h.: $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta) \Longrightarrow 0<f(x)$
oder äquivalent: $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta): f(x)>0$
(in einer δ-Umgebung von x_0 ist f ebenfalls positiv.)



Um integrieren zu können machen brauchen wir aber ein kompaktes Intervall.
Dazu setze $\tilde\delta := \delta/2 > 0$. Beachte dass immernoch gilt: $\forall x\in(x_0-\tilde\delta, x_0+\tilde\delta): f(x)>0$

Deshalb gilt: $$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{x_0-\tilde\delta} f(x)\,dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{x_0-\tilde\delta}^{x_0+\tilde\delta} f(x)\,dx}_{(**)} + \underbrace{\int_{x_0+\tilde\delta}^{b} f(x)\,dx}_{\geq 0} > 0 \ \lightning \text{ (zu (ii))} \quad \square$$

$$(**) \geq \underbrace{\inf_{x\in[x_0-\tilde\delta,\, x_0+\tilde\delta]} f(x)}_{>0} \cdot \underbrace{\left(x_0+\tilde\delta-(x_0-\tilde\delta)\right)}_{2\tilde\delta=\delta>0} > 0$$

Tipps Serie 11

11.2 Siehe Bsp oben.

11.3 Verwende: $F,G:[a,b]\to\mathbb{R}$ int'bar $\begin{cases} 1 \ \Longrightarrow F,G \text{ beschränkt.} \\ 2 \ \ F\cdot G \text{ integrierbar.}\end{cases}$

Beweis 1: Übung!

Beweis 2: Beachte: f,g int'bar $\Rightarrow f,g$ beschränkt. $\Rightarrow f(x)\leq M_f,\ g(x)\leq M_g \ (\forall x\in[a,b])$.

$$\overline{S}(f\cdot g,P)-\underline{S}(f\cdot g,P) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{\xi\in I_i} f\cdot g - \inf_{\xi\in I_i} f\cdot g\right)\Delta_i, \quad I_i=[x_{i-1},x_i],\ \Delta_i=(x_i-x_{i-1})$$

$$\overline{S}(f\cdot g,P)-\underline{S}(fg,P)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{\xi\in I_i} f\cdot g-\inf_{\xi\in I_i} f\cdot g\right)\Delta_i\ ,\quad I_i=[x_{i-1},x_i],\ \Delta_i=(x_i-x_{i-1})$$

Für $i\in\{1,\dots,n\}$ bel. sei $\xi^+,\xi^-\in I_i$ s.d.
$$f(\xi^+)g(\xi^+)=\sup_{I_i} f(\xi)g(\xi)$$
$$f(\xi^-)g(\xi^-)=\inf_{I_i} f(\xi)g(\xi)$$

Es gilt:
$$\begin{aligned}f(\xi^+)g(\xi^+)-f(\xi^-)g(\xi^-)&=f(\xi^+)g(\xi^+)-f(\xi^+)g(\xi^-)+f(\xi^+)g(\xi^-)-f(\xi^-)g(\xi^-)\\&=f(\xi^+)(g(\xi^+)-g(\xi^-))+(f(\xi^+)-f(\xi^-))g(\xi^-)\\&\le M_f(\sup g-\inf g)+M_g(\sup f-\inf f)\end{aligned}$$

Somit gilt:
$$\begin{aligned}\overline{S}(fg,P)-\underline{S}(fg,P)&\le M_f\underbrace{\left(\overline{S}(g,P)-\underline{S}(g,P)\right)}_{A}+M_g\underbrace{\left(\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)\right)}_{B}\\&\le M(A+B)\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon>0$ beliebig.

da f,g int'bar

Wähle P s.d. $A, B<\frac{\varepsilon}{2M}\Rightarrow\overline{S}(f\cdot g,P)-\underline{S}(f\cdot g,P)<M\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2M}\right)=\varepsilon\ \square$

Verwende den ZWS (nicht MWS!) mit G (G stetig nach Annahme).

Betrachte die Fkt. $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}\quad x\mapsto G(x)\cdot\int_a^b F(x)\,dx.$

Ist ϕ stetig?

11.4

(a) Bruch zuerst vereinfachen. Beachte: $\int\frac{ax+b}{x}dx$ schwierig. $\int a+\frac{b}{x}\,dx=\int a\,dx+\int\frac{b}{x}dx.$

(b) Ausmultiplizieren.

(c) Betrachte Aufg. 10.4

(d) Partielle Integration

(e) Bruch aufteilen. Betrachte $\frac{d}{dx}\tan x$. Was fällt dir auf?

(f) Betrachte Aufg. 10.4