Nachbesprechung Serie 3

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

3.2. Induktive Folge

(a) Sei $(a_n)_n$ die Folge induktiv definiert durch:

$$a_1 = \sqrt{2},$$
$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \geq 2.$$

(i) Beweisen Sie, dass $(a_n)_n$ von oben durch 2 beschränkt ist.

(ii) Berechnen Sie, falls existent, den Grenzwert von $(a_n)_n$.

(b) Sei $(a_n)_n$ die Folge induktiv definiert durch:

$$a_1 = 1,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Beweisen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tipp: Induktive Folge untersucht man mit Induktion.

a)

(i) Beh: $a_n \leq 2 \ (\forall n)$

Bew: (Induktion)

Anker $(n=1)$ $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$

I.H. Sei $n \in \mathbb{N}$ bel. und $a_n \leq 2$.

Schritt $(n \mapsto n+1)$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{\text{I.H}}{\leq} \sqrt{2+2} = 2 \quad \square$$

(ii) Beh: $\forall n: a_n \leq a_{n+1}$

Bew: (Induktion)

$\sqrt{\cdot}$ ist mon steigend

Anker $(n=1)$ $a_1 = \sqrt{2} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}} = a_2$

I.H: Sei $n \in \mathbb{N}$ bel. und $a_{n-1} \leq a_n$

Schritt $(n \mapsto n+1)$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{\text{I.H}}{\geq} \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n \quad \square$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n =: a \quad \text{existiert}$$

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2+a}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 2 + a \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-2) = 0$$

$$\Rightarrow a \in \{-1, +2\}. \text{ Da } a_n \geq 0 \ (\forall n) \Rightarrow \underline{a = 2} \quad \square$$

b)

① Beh $a_n \geq 0 \ (\forall n)$

Bew (Induktion)

Anker $(n=1)$ $a_1 = 1 \geq 0$ ✓

I.H Sei $n \in \mathbb{N}$ bel. und $a_n \geq 0$

Schritt $(n \mapsto n+1)$

I.H. Sei $n \in \mathbb{N}$ bel. und $a_n \geq 0$

Schritt $(n \to n+1)$

Es gilt: $a_n + 1 \overset{\text{I.H.}}{\geq} a_n \geq 0 \Longleftrightarrow a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n+1} \geq 0$ $\square$

② $a_1 = 1$

$a_2 = \dfrac{1}{2}$

$a_3 = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}$

$a_4 = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{4}$

$\vdots$

$\Longrightarrow$ ② Beh.: $a_n \geq a_{n+1}$ $(\forall n)$

Bew (Induktion)

Anker $(n=1)$ $a_1 = 1 \geq \frac{1}{2} = a_2$ ✓

I.H. Sei $n \in \mathbb{N}$ bel. und $a_{n-1} \geq a_n$

Schritt $(n \to n+1)$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{a_n}} \leq \frac{1}{1+\frac{1}{a_{n-1}}} = a_n \quad \square$$

$$a_n \overset{\text{I.H.}}{\leq} a_{n-1} \Longleftrightarrow \frac{1}{a_{n-1}} \leq \frac{1}{a_n} \Longleftrightarrow 1+\frac{1}{a_{n-1}} \leq 1+\frac{1}{a_n}$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ existiert.

$$\Longrightarrow a = \frac{a}{a+1} \Longleftrightarrow a^2 + a = a \Longleftrightarrow a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0 \quad \square$$

3.3. Reihen in $\mathbb{R}$ mit reellem Parameter Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Reihen konvergent? Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind absolut konvergent? Benutzen Sie die Kriterien aus der Vorlesung.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{1+n^2x^2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+|x|^n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^x}{n^n}$.

a) Falls $|x| \geq 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x^{n!}| = \lim |x|^{n!} = \begin{cases} 1, & |x| = 1 \\ \infty, & |x| > 0 \end{cases} \neq 0$.

$\Longrightarrow \sum^{\infty} x^{n!}$ divergiert (NFK)

Falls $|x| < 1 \Longrightarrow |x^{n!}| \leq |x|^n =: b_n$ und $\sum^{\infty} b_n$ konv. (geom. Reihe)

$\Longrightarrow \sum^{\infty} x^{n!}$ konv. abs. (Majoranten-Krit).

(b) Falls $x = 0$: $\Longrightarrow |a_n| = \sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Longrightarrow$ keine Nullfolge und somit divergent.

Falls $x \neq 0$:

$$a_n = \frac{O(n^{\frac{1}{2}})}{O(n^2)} \Rightarrow \lim |a_n| = 0 \checkmark$$

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n \sqrt{n}}{1+n^2x^2}\right| \overset{n\geq 1,\, x\neq 0}{\leq} \frac{\sqrt{n}}{n^2x^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}x^2} = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{n^{3/2}} =: b_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{x^2}\underbrace{\zeta(3/2)}_{\text{konvergiert}} \Rightarrow \sum a_n \text{ konv. absolut nach Majoranten-Krit. } (\forall x\neq 0)$$

c) $$|a_n| = \frac{|x|^n}{1+|x|^n} = \frac{1}{\frac{1}{|x|^n}+1} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } |x|=1 \\ 1, & \text{falls } |x|>1 \\ 0, & \text{falls } |x|<1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Reihe divergiert nach NFK. (für $|x|=1$, $|x|>1$)

$\Rightarrow$ können noch nichts schliessen. Weitere Krit. versuchen! (für $|x|<1$)

Falls $|x|<1$

$$|a_n| = \frac{|x|^n}{1+|x|^n} \leq \frac{|x|^n}{1+0} = |x|^n =: b_n \quad \text{und } \sum^{\infty} b_n \text{ konv. (geom. Reihe)} \Rightarrow \sum^{\infty} a_n \text{ konv. nach Maj.-Krit } \square$$

absolut

d) $$|a_n| = \frac{1}{1+(x^2)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } |x|=1 \\ 1 & \text{falls } |x|<1 \\ 0 & \text{falls } |x|>1 \end{cases}$$

$\neq 0 \Rightarrow$ div. (NFK) (für $|x|=1$, $|x|<1$)

$\Rightarrow$ weiter untersuchen! (für $|x|>1$)

Falls $|x|>1$:

$$|a_n| = \frac{1}{1+(x^2)^n} \leq \Big(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{<1}\Big)^n =: b_n \qquad \sum^{\infty} b_n \text{ konv. (geom. Reihe)} \Rightarrow \sum^{\infty} a_n \text{ konv. abs. nach Maj.-Krit. } \square$$

(e) Quotienten-Krit.

$(\cdot)^x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \ (\forall x)$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{((n+1)!)^x}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(n!)^x}\right| = \left|\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^x\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right| = (n+1)^x\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \underbrace{(n+1)^{x-1}}_{=: b_n}\cdot\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{=: c_n}$$

$$c_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e}$$

$$b_n = (n+1)^{x-1} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 1, & \text{falls } x=1 \\ 0, & \text{falls } x<1 \ (*) \\ \infty, & \text{falls } x>1 \end{cases}$$

(*) Falls $x<1 \Rightarrow x-1<0 \Rightarrow (n+1)^{x-1} = (n+1)^{-(1-x)} = \frac{1}{(n+1)^{1-x}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(*) Falls $x < 1 \Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow (n+1)^{x-1} = (n+1)^{-(1-x)} = \frac{1}{(n+1)^{1-x}} \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} \frac{1}{e} & \text{falls } x=1 \\ 0 & \text{falls } x<1 \\ \infty & \text{falls } x>1 \end{cases}$$

$\left.\begin{matrix} x=1 \\ x<1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ konv. abs. nach Quot.-krit.

$x>1 \Rightarrow$ divergiert $\square$

3.4. Reihen reellen Zahlen Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+100}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{n+1}}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$.

Bestimmen Sie, falls existent, die Werte von (b) und (d).

(a) NFK: $|a_n| = \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(2n)(2n-1)\cdots(n+2)(n+1)} \leq \frac{1}{(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (weiter versuchen)

$\frac{n-k}{2n-k} \leq 1$

Quotienten-Krit:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2\cdot\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n^2+\Theta(n)}{4n^2+\Theta(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4} < 1$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. abs nach Quot. Krit. $\square$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+100} = \sum_{n=101}^{\infty}\frac{1}{n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}_{\text{Harm. Reihe}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}}_{=:C} \Rightarrow \text{divergiert} \ \square$$

c) NFK: $|a_n| = \frac{5^n}{n^{n+1}} \overset{n\geq 5}{\leq} \frac{n^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ weiter versuchen.

Wurzel-Krit:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{5}{n^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{5}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{5}{n\cdot\sqrt[n]{n}} = 5\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 5\cdot 0\cdot\frac{1}{1} = 0 < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n \text{ konv. abs. } \square$$

d) Offensichtlich Nullfolge.

d) Offensichtlich Nullfolge.

$$|a_n| = \frac{1}{n(n+4)} = \frac{1}{n^2+4n} \leq \frac{1}{n^2} =: b_n$$

da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \zeta(2)$ konv. muss $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergieren.

Ausrechnen des Grenzwertes:

Partialbruch-Zerlegung:

Finde A, B s.d.

$$\frac{1}{n(n+4)} \overset{!}{=} \frac{A}{n} + \frac{B}{n+4} \iff \frac{A(n+4) + Bn}{n(n+4)} = \frac{1}{n(n+4)}$$

Koeffizienten-Vergleich: $(A+B)n + 4A = 1$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A+B &\overset{!}{=} 0 \\ 4A &\overset{!}{=} 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= \tfrac{1}{4} \\ B &= -\tfrac{1}{4} \end{aligned} \Rightarrow \frac{1}{n(n+4)} = \frac{1/4}{n} - \frac{1/4}{n+4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4}\right)$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ bel.!

$$S_n = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+4}\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=5}^{n+4}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{12+6+4+3}{12}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{25}{12} = \underline{\underline{\frac{25}{48}}}$$