Nachbesprechung Serie 4

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

4.3. Cauchy-Kriterium Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge rationaler Zahlen, sodass

$$|q_n - q_{n+1}| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Folgt daraus, dass $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist? Finden Sie ein Gegenbeispiel oder beweisen Sie die Behauptung.

Beh: Die Aussage ist falsch.

Bew:

Finde ein q_n s.d. $\lim_{n\to\infty} |q_n - q_{n+1}| = 0$ aber q_n konv. nicht $\Rightarrow$ q_n ist keine C.F.

$A \leftrightarrow B \equiv \neg A \leftrightarrow \neg B$ d.h. a_n konv. $\leftrightarrow$ a_n ist C.F $\Leftrightarrow$ a_n konv. nicht $\leftrightarrow$ a_n keine C.F.

Setze $q_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $\Rightarrow$ $|q_n - q_{n+1}| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right| = \left|-\frac{1}{k}\right| = \frac{1}{k} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

aber offensichtlich divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ $\square$

4.5. Annäherung

(a) Sei $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass

$$a := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

existiert. Sei

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Bewiesen Sie, dass

$$|a - s_n| \le \frac{1}{n+1}.$$

Nähern Sie a mit 3 Dezimalzahlen an.

a)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

Definition 3.5.1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heisst* **Cauchy-Folge**, *falls gilt*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}\ \ \forall n, l \ge n_0 : \ |a_n - a_l| < \epsilon. \tag{3.5.1}$$

[illegible] für $l > n$ gilt dass $|s_l - s_n| \le \frac{1}{n+1}$

a) Zeige für $k \geq n$ bel. dass $|s_{n+k} - s_n| \leq \frac{1}{n+1}$

Um dies zu tun zeige separat:

$$-\frac{1}{n+1} \overset{(1)}{\leq} (-1)^n(s_{n+k}-s_n) \overset{(2)}{\leq} \frac{1}{n+1}$$ daraus folgt dann: $|(-1)^n(s_{n+k}-s_n)| = |s_{n+k}-s_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

Dann gilt: $$|a - s_n| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_n - \sum_{k=1}^{n} a_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_n\right| = \lim_{k\to\infty} |s_{n+k}-s_n|$$
$$\overset{3.8.2}{\leq} \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+k} \quad \square$$

Bew (2): $(-1)^n(s_{n+k}-s_n) \leq \frac{1}{n+1}$

Bew: $$s_{n+k}-s_n = \sum_{k=n+1}^{n+k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} + \dots + \frac{(-1)^{n+k-1}}{n+k}$$
$$= (-1)^n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{n+k}\right) \quad \Big| \cdot (-1)^n$$

$$\Leftrightarrow (-1)^n(s_{n+k}-s_n) = \underbrace{\frac{1}{n+1} \underbrace{-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}}_{\leq 0} \underbrace{-\frac{1}{n+4}+ \dots}_{\leq 0} \dots + \frac{(-1)^{k-2}}{n+k-1} + \frac{(-1)^{k-1}}{n+k}}_{k \text{ Terme}}$$

$$\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{n+1} \quad \square$$

Falls k ungerade: Abschätzung gilt schön auch, da die letzten beiden Terme: $\frac{(-1)^{k-2}}{n+k-1} + \frac{(-1)^{k-1}}{n+k} = \underbrace{-\frac{1}{n+k-1}+\frac{1}{n+k}}_{\leq 0}$

Falls k gerade: Beim Abschätzen bleibt letzter Term übrig. Aber da $\frac{(-1)^{k-1}}{n+1} = -\frac{1}{n+1} \leq 0$ kann er einfach weggelassen werden.

Bew (1): $(-1)^n(s_{n+k}-s_n) \geq -\frac{1}{n+1}$

Bew: $$(-1)^n(s_{n+k}-s_n) = \cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \dots + \frac{(-1)^{k-2}}{n+k-1} + \frac{(-1)^{k-1}}{n+k}$$ (wie in (1))

$$\geq \underbrace{-\frac{1}{n+2} \underbrace{+\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}}_{\geq 0} \underbrace{+ \dots + \frac{(-1)^{k-2}}{n+k-1}}_{\geq 0} \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{n+k}}_{k-1 \text{ Terme}}$$

$$\overset{(*)}{\geq} -\frac{1}{n+2} \geq -\frac{1}{n+1} \quad \square$$

$(-1)^{k-2} \quad (-1)^{k-1} \quad 1 \quad 1$

$$\geq -\frac{1}{n+2} \geq -\frac{1}{n+1} \quad \square$$

k-1 Terme

Falls k gerade: Abschätzung geht schön auf, da die letzten beiden Terme: $\frac{(-1)^{k-2}}{n+k-1} + \frac{(-1)^{k-1}}{n+k} = \underbrace{\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}}_{\geq 0}$

Falls k ungerade: Beim Abschätzen bleibt letzter Term übrig. Aber da

$\frac{(-1)^{k-1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \geq 0$ kann er einfach weggelassen werden.

Somit gilt $|(-1)^n s_{n+k} - s_n| = |s_{n+k} - s_n| \leq \frac{1}{n+1}$. $(\forall n)$.

Der Rest geht wie oben schon beschrieben.