Vorbesprechung Serie 5

Mittwoch, 15. Februar 2017 15:14

Grenzwerte

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

Der Abschluss $\overline{\Omega}$ von Ω ist definiert als $\overline{\Omega} := \{ x \in \mathbb{R}^d \mid \exists (x_k) \subseteq \Omega \ \lim_{k\to\infty} x_k = x \}$

z.B. $\overline{(0,1)} = [0,1]$ da z.B. $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,1)$ und $\lim \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow 0 \in \overline{(0,1)}$

Folgendefinition

Sei $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, $x_0 \in \overline{\Omega}$, $a \in \mathbb{R}^n$.

a heisst Grenzwert an der Stelle x_0 falls $\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_k) = a$

Wir dürfen dann schreiben: $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$

Beachte $x_0 \in \overline{\Omega} \not\Rightarrow x_0 \in \Omega$.

Falls aber $x_0 \in \Omega$ dann ist $f(x_0)$ definiert und es gilt: $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\lim x_k) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{Grenzwert}}$

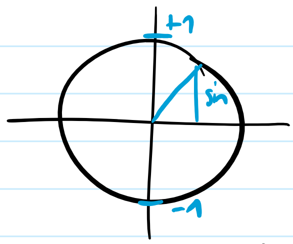
Falls: $x_0 \in \overline{\Omega} - \Omega \Rightarrow f$ stetig ergänzbar in x_0:

$$\left.\begin{array}{l} f: \Omega \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}\right\} \rightsquigarrow \tilde{f}: \Omega \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ a, & x = x_0 \end{cases}$$

Stetigkeit

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ heisst stetig in $x_0 \in \Omega$ falls der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ existiert.

Beachte: Es gilt dann $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.



Bsp: Ist $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ stetig in $x_0 = 0$?

Nein! Beweis: Um stetig zu sein in x_0 müsste gelten:

$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = a \in \mathbb{R}$ existiert $\Rightarrow \forall x_k$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ gilt: $\lim_{k\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_k}\right) = a$.

Betrachte $x_k^{(0)} := \frac{1}{2\pi \cdot k + \frac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_k^{(0)}}\right) = \lim_{k\to\infty} \sin\left(2\pi \cdot k + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

$x_k^{(1)} := \frac{1}{2\pi \cdot k - \frac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_k^{(1)}}\right) = \lim_{k\to\infty} \sin\left(2\pi \cdot k - \frac{\pi}{2}\right) = -1$

Rechenregeln

Seien $f, g: \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ stetig

(i) $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ stetig
(ii) $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ stetig
(iii) $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$ stetig (falls $g(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

Falls $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ stetig dann
(iv) $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ stetig.

Beispiele für stetige Funktionen: c, x^y $(\forall y \in \mathbb{R})$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, ...

Bsp

$$e^{\left(\frac{\sqrt[15]{x^{3/4}}}{(x+1)(x-2)^2}\right)}$$ ist stetig auf $\mathbb{R}^+ - \{-1, 2\}$

Sei $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$.

Beh: f stetig in $x_0 \iff \overbrace{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \leq x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \geq x_0}} f(x)}^{(*)} = a$.

Bew: „$\Rightarrow$" Easy: f stetig in $x_0 \Rightarrow \forall (x_k)$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ gilt: $\lim f(x_k) = a$.

$\Rightarrow \forall (x_k)$ mit $\lim x_k = x_0$ und $x_k \leq x_0$ gilt: $\lim f(x_k) = a$

$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \leq x_0}} f(x) = a$

Analog folgt man $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \geq x_0}} f(x) = a$ womit die Aussage folgt. ✓

„$\Leftarrow$" Sei (x_k) mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ bel. Definiere $X^{\geq} := \{x_k \mid x_k \geq x_0\}$, $X^{\leq} := \{x_k \mid x_k \leq x_0\}$.

Falls $X^{\geq}$ oder $X^{\leq}$ endlich $\Rightarrow$ ab gewissen k_0: $x_k \geq x_0$ oder $x_k \leq x_0$ $(\forall k \geq k_0)$ und wegen (*) gilt: $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a$ ✓

Falls $X^{\geq}$ und $X^{\leq}$ unendlich dann sortiere beide Mengen aufsteigend und wir haben zwei Teilfolgen:

$(x_k^{\geq})$, $(x_k^{\leq})$

Bsp: $x_0 = 0$

$(x_k)^{\geq} = \{ \quad \}$

$(x_k) = \{5, -1, -2, 3, -1, 2, 2 \dots\}$

$(x_k)^{\leq} = \{ \quad \}$

Wegen (*) gilt für bel. $\varepsilon > 0$
① $\exists k_0 \; \forall k \geq k_0: \; |f(x_k^{\geq}) - a| < \varepsilon$
② $\exists k_1 \; \forall k \geq k_1: \; |f(x_k^{\leq}) - a| < \varepsilon$

Setze $k_2 := \max\{k_0, k_1\}$ und es gilt $\forall k \geq k_2: |f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon$

Was gerade bedeutet dass $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a$. Da x_k eine bel. Folge war gilt:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ □

Stetigkeit von Stückweisen Funktionen (6.3)

Bsp

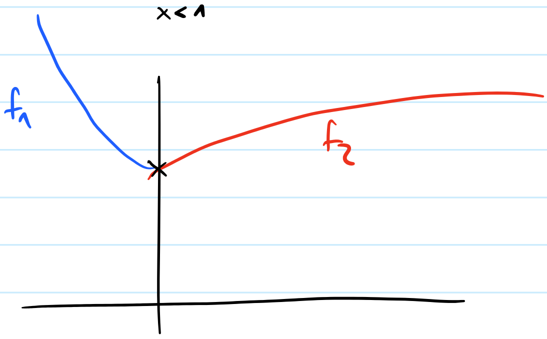
$$f(x) := \begin{cases} \overbrace{x^2 - \alpha}^{=: f_1(x)}, & x < 1 \\ \underbrace{\sqrt{3x+1} + 2}_{=: f_2(x)}, & x \geq 1 \end{cases}$$

für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist f stetig auf ganz $\mathbb{R}$?

Offensichtlich ist f_1, f_2 stetig auf ganz $\mathbb{R}$. $\Rightarrow$ f ist sicher stetig auf $\mathbb{R} - \{1\}$.
Ist $\mathbb{R}$ stetig in 1?

Es gilt: $f(1) = f_2(1) = \sqrt{3 \cdot 1 + 1} + 2 = 4$.
Damit f stetig wird in 1 muss jede Folge x_k mit $x_k \to 1$ $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(1) = 4$ erfüllen.

f_1 ist stetig $\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_1(x) = 1 - \alpha \overset{!}{=} 4 \Rightarrow$ für $\alpha = -3$ wird f stetig in 1
(und somit auf ganz $\mathbb{R}$)



Bsp

$$f(x) = \begin{cases} \overbrace{8a + 16x}^{=: f_1(x)} & x < 2 \\ \underbrace{a^2(x+2)}_{=: f_2(x)} & x \geq 2 \end{cases}$$

Wieder gilt: f ist sicher stetig auf $\mathbb{R} - \{2\}$, da f_1, f_2 stetig sind.

Untersuche für $x_0 = 2$

$f(2) = f_2(2) = 8a + 32$, da f_1 stetig folgt $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f_1(x) = 4 - 2 = 2$

damit f stetig wird in $x_0 = 2$ muss also gelten: $4a^2 \overset{!}{=} 8a + 32$

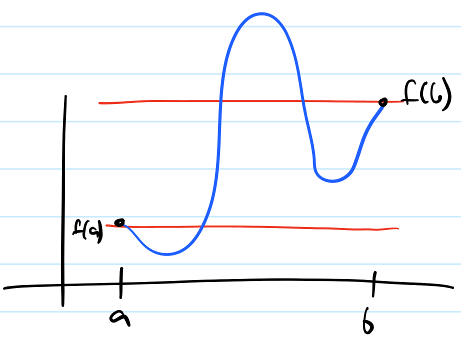
$$\Leftrightarrow 4a^2 - 8a - 32 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4(a^2 - 2a - 8) = 0$$
$$\Leftrightarrow 4(a-4)(a+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow a \in \{4, -2\}$$

$\Rightarrow$ f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$ für $a \in \{4, -2\}$

Zwischenwertsatz

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < f(b)$. Dann gilt:

$\forall y \in [f(a), f(b)] \; \exists x \in [a,b] : f(x) = y$



Bsp Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = (x^3 - \sin(2\pi x) + 1) - 5$$

f hat einen Nullpunkt.

<u>Beweis</u>: f ist stetig und $f(0) = (0^3 + \sin(0) + 1)^3 - 5 = -4$
$f(1) = (1^3 + \sin(2\pi) + 1)^3 - 5 = 3$

ZWS: $\forall y \in [-4, 3]\ \exists x \in [0,1] : f(x) = y$.
$\Rightarrow \exists x_0$ s.d. $f(x) = 0$ $\square$

Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

$f: X \to Y$ heisst: - injektiv falls $\forall x_1 \neq x_2 \in X\ \ f(x_1) \neq f(x_2)$ ①
- surjektiv falls $\forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y$ ②
- bijektiv falls ① $\wedge$ ②

<u>Beachte</u>: f <u>streng</u> monoton wachsend (fallend) $\Rightarrow$ f injektiv.

<u>Bsp</u>: Zeige $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$
$x \mapsto x^2$ ist bijektiv.

<u>Beh.</u> ① f ist injektiv.
<u>Bew</u>: Wir zeigen „f ist streng mon wachsend":

$\forall x \neq y \in [0, \infty) : f(x) = x^2 < y^2 = f(y)$ ✓

<u>Beh.</u> ② f ist surjektiv
Sei $y \in [0, \infty)$ bel. $\Rightarrow f(0) = 0 \leq y < y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2 = f(y+1)$

ZWS $\Rightarrow \forall \tilde{y} \in [f(0), f(y+1)]\ \exists \tilde{x} \in [0, y+1]$ mit $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$
insbesondere für unser bel. y. $\Rightarrow$ f ist surjektiv ✓

<u>Beh</u> ① $\wedge$ ② $\Rightarrow$ f ist bijektiv $\square$

5.2 Wichtige Grenzwerte

Sei $p_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$, $\underbrace{p(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k}_{\text{Potenzreihe}}$

$p(x)$ konvergiert $\forall x \in (-g, g)$ wobei g der Konvergenzradius ist.

$p(x)$ konvergiert $\forall x \in (-\varrho, \varrho)$ wobei ϱ der Konvergenzradius ist.

Dann gilt: $p_n(x) \xrightarrow{glm} p(x)$. $(\forall x \in (-\varrho,\varrho))$. Mit Satz. 4.8.1 folgern wir:

$p(x)$ stetig $(\forall x \in (-\varrho, \varrho))$ und wir dürfen vertauschen:

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = \lim_{x \to x_0} \sum^{\infty} a_k x^k = \sum^{\infty} a_k \lim_{x \to x_0} x^k = p(x_0).$$

Berechnen von ϱ:

$$\varrho := \sup\left\{ |x| \;\middle|\; p(x) \text{ konvergiert} \right\} = \begin{cases} \limsup \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| & \text{(i) Quotientenkrit} \quad \text{(Herleitung folgt)} \\ \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{(ii) Wurzelkrit} \quad \text{(Herleitung im Skript)} \end{cases}$$

Herleitung (ii):

Sei $p(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n x^n}_{=: \tilde{a}_n}$

Quotientenkrit $\lim \left| \frac{\tilde{a}_{n+1}}{\tilde{a}_n} \right| = \lim \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| \overset{!}{<} 1$

$$|x| < \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} =: \varrho$$

$\Rightarrow p(x)$ konv. für $|x| < \varrho$

Mit analogem Argument kommen wir zum Schluss: $|x| \begin{cases} < \varrho & \Rightarrow p(x) \text{ konv.} \\ = \varrho & \Rightarrow \text{keine Aussage } (*) \\ > \varrho & \Rightarrow p(x) \text{ div.} \end{cases}$

$(*)$ lässt sich überprüfen für $|x| := \varrho$ d.h. $x = \varrho$ od. $x = -\varrho$

Bsp $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

Für $x \neq 0$

$$\frac{1}{x} \sin x = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^k \frac{(x^2)^k}{(2k+1)!}}_{=: \tilde{a}_k} = p(z) \qquad x^2 =: z$$

$$\varrho \text{ ok: } \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{(2k+3)!}{(2k+1)!} = (2k+1)(2k+2) \xrightarrow{n \to \infty} \infty = \varrho$$

$\Rightarrow p(z)$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$

Alternativ: Man kann auch das QK / WK der Folge mit x benutzen:

„normales QK": $\left|\frac{\tilde{a}_{k+1}}{\tilde{a}_k}\right| = \frac{(x^2)^{k+1}\,(2k+1)!}{(2(k+1)+1)!\,(x^2)^k} = \frac{x^2}{(2k+3)(2k+2)} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad (\forall x)$

$\rightarrow \rho = \infty$ und Potenzreihe konv. auf ganz $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} p(x^2) = p(0) = (-1)^0 \frac{(0^2)^0}{1!} + 0 + 0 + \dots$

$= 1 + 0 + 0 + \dots$

$= \underline{\underline{1}}$

Strategie zu 5.2:

1. Ersetze: sin, cos, e^x durch Potenzreihendarst. und vereinfache.

- Exponentialfunktion: $e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
- Sinus: $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$
- Kosinus: $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots$

2. Zeige dass x_0 im Konvergenzradius ist. (Mittels einer der beiden gezeigten Varianten).
3. Verwende dass Potenzreihen stetig innerhalb des Konv.-Radius sind!

$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(\lim_{x\to x_0} x)$ und berechne den Wert der Reihe.