Zeno Saletti

Fondamenti Matematici per l'Informatica

Matematica Discreta: Insiemistica Aritmetica Modulare Teoria dei Grafi

Avvertenze!

Questo testo è una raccolta di appunti, redatta da studenti e condivisa per altri studenti. Non pretende di essere un libro di testo, ma una forma di aiuto libero e gratuito per coloro che fossero in cerca di materiale di supporto allo studio. Pertanto, si raccomanda di non preparare l'esame basandosi unicamente su questo testo, ma di fare riferimento alle lezioni frontali e ai libri (in breve, a chi è esperto in merito). Qualora quindi vi fossero affermazioni erronee o false contenute in questo testo, *gli autori non si assumono la responsabilità di eventuali esiti negativi di esami o altre forme di prove ufficiali presso l'Università*; gli autori sono anzi aperti a eventuali segnalazioni e correzioni, in primo luogo per colmare lacune di natura concettuale nell'esposizione delle nozioni.

Prefazione

La presente dispensa, tavola di contenuti utili o meno, raccolta di appunti o qualsivoglia supporto allo studio, nasce come disordinata e incoerente collezione di note trascritte nel corso delle lezioni, sessioni di studio ed esercitazioni relative al corso *Fondamenti Matematici per l'Informatica*, durante l'anno accademico 2022/2023 presso l'Università degli Studi di Trento. Evolutasi a raccolta dei teoremi fondamentali richiesti all'esame, questa dispensa si mostra ora come testo organico e dignitosamente ordinato. Non si può negare il fatto che fossero già presenti materiali tramandati da generazioni di studenti durante la stesura di questi appunti, ma sentivamo forte l'esigenza di riunire in un unico luogo non solo i teoremi, ma anche definizioni, esempi esplicativi di esercizi d'esame e ulteriori spiegazioni teoriche, talvolta solo citate oralmente a lezione o difficilmente reperibili.

Ma qui non si discute di mero esercizio formale, di sfoggio di conoscenza o della presunta padronanza di strumenti tipografici come LaTeX. Questa dispensa si propone innanzitutto come risorsa (si spera) utile agli studenti presenti e futuri, del tutto gratuita. La scienza è umana ed è all'umanità che essa viene messa a disposizione. In secondo luogo, non è garantita l'assenza di errori, siano essi grammaticali, lessicali, sintattici, grafici, concettuali, di interpretazione, di conto, distrazioni e così via. Infine questo testo non pretende, e non potrebbe minimamente farlo, di essere un libro di testo; perché le nozioni qui mostrate e trascritte non sono altro che il frutto del lavoro di studenti, non professori o esperti in merito. Nonostante ciò, nell'ordinare tutti questi appunti è stata prestata la maggior attenzione nel riportare fedelmente il significato e il pensiero matematico di questa materia straordinaria.

Ultimo, ma forse il più caro tra i motivi che ci hanno spinto a creare queste note, è la speranza che questo corso appassioni gli studenti di informatica, sia per quanto riguarda la matematica che per l'informatica stessa, perché l'informatica è progenie della matematica come la fisica lo è per la filosofia. Certo, molti degli argomenti mostrati sono solo un assaggio di quel vasto mondo della matematica discreta e per molti sembrerà solo un conglomerato di concetti astratti, oltre che apparentemente inutili. Ma crediamo nel seguente postulato

$$\exists \text{studente} : \text{studente} \in \text{Corso di Informatica}, \ \text{studente apprezza la materia}$$

cioè, crediamo che almeno uno tra i lettori farà tesoro di queste nozioni e che, come noi, trovi motivo di spingere ancora più in là la propria curiosità, non solo per l'informatica in sé, ma anche per tutto ciò che ha permesso a questa giovanissima scineza di progredire, prima fra tutte la matematica.

Non fermatevi solo di fronte alla superficie, perché la totalità del reale non è ancora stata scoperta a fondo. La tecnica di crittografia RSA, trattata molto brevemente in queste note, è stata una grande novità e venne sviluppata solamente a partire dagli anni Settanta del secolo scorso. Finché si ricordava da poco il primo allunaggio, tre persone pensavano a cosa potevano fare dei semplici numeri interi divisi, moltiplicati, sommati e sottratti; apparentemente la cosa più banale che si potesse fare. Eppure si fecero ancora passi avanti in matematica, crittografia e informatica seppur dopo ben 2500 anni di storia, ovvero dalla trattazione della divisione euclidea, anch'essa citata qui.

Ringraziamo chiunque abbia contribuito, direttamente e indirettamente, a questo progetto: studenti, con i loro materiali generosamente condivisi e ormai reperibili con gran facilità, professori, con la chiarezza delle loro lezioni e la disponibilità e l'umorismo, esercitatori, con i loro segreti sul come passare l'esame. Noi non ci abbiamo messo solo impegno e fatica, ma curiosità e voglia di saperne ancora di più su questo universo e su noi stessi. Ora tocca a voi portare avanti la nostra conoscenza, che è la vostra.

Note e Guida al Testo

Gli argomenti trattati appartengono alla branca della Matematica Discreta, quindi quella matematica che si occupa non del *continuo* ma di ciò che è *numerabile* o talvolta *finito*. In parole semplici, di ciò che si può contare con le dita di una mano. Il corso è diviso in due parti:

- **Aritmetica Modulare:** dalla teoria degli insiemi, si passerà ai numeri naturali e interi, all'operazione di divisione, il concetto di congruenza in modulo e infine all'applicazione del metodo di crittografia RSA.
- **Introduzione alla Teoria dei Grafi:** verrà data un'occhiata ad alcuni grafi, se ne daranno definizioni formali (forse meno familiari rispetto alla loro controparte grafica) e proprietà rilevanti.

In più, vengono aggiunte una terza parte di esercitazione, che riflette lo schema di lezioni dell'A.A. 2022/2023, ed una quarta che include alcune appendici.

Questi appunti rispettano ancora fedelmente il loro iniziale mandato: raccogliere tutti i teoremi utili all'esame, arricchiti con le spiegazioni e le indicazioni del professore. Per questo li troverete evidenziati all'interno degli appositi box grigi. Col tempo, si sono aggiunte altre categorie degne di nota altrettanto evidenziate. Ecco le indicazioni di ogni colore:

- Grigio: teorema o proposizione rilevante.
- Verde: corollario.
- Giallo: definizione.
- Blu: esempio esplicativo o esercizio con soluzione.
- Rosso: nozione utile.
- Viola: il lemma utile.

I teoremi richiesti al tempo di stesura sono sottolineati, sia nei paragrafi che nell'indice, per una veloce consultazione. Affidarsi all'indice, non solo all'indicazione visiva dei box grigi.

Si fa qui intenso utilizzo di simboli logico-matematici, sia per contrarre i predicati e le formule che per produrre fedelmente la scrittura ideale da adottare all'esame e al di fuori di esso. Si è posta attenzione, per quanto possibile, ad affiancare a tali simboli una spiegazione verbale concisa. Sicuramente il testo non è del tutto privo di abusi di notazione o simbologia non-standard. Per questi ed altri motivi, *gli apppunti non sostituiscono interamente le lezioni frontali.* Eventuali spiegazioni più chiare e precise sono sicuramente fornite, nella stragrande maggioranza dei casi, dal professore. Questa dispensa mira solo a riassumere i contenuti delle lezioni.

Errata

Riconoscimenti

Testi

Immagini

Indice

Suggerimento: puoi consultare facilmente questa dispensa cliccando sugli elementi dell'indice (a patto che il lettore per file `.pdf` attualmente in uso consenta di usufruire di tale funzionalità).

Parte I

Aritmetica Modulare

1

Fondamenti di Insiemistica

1.1 Assiomi

Ai fini del corso, mostriamo solo alcuni assiomi e concetti primitivi, appartenenti alla teoria degli insiemi, utili a comprendere ciò che verrà trattato in seguito.

Elemento, insieme, appartenenza

Intenderemo *primitivi* i concetti seguenti:

- **Elemento:** intuitivamente, un oggetto qualsiasi.
- **Insieme:** intuitivamente, una collezione di elementi.

Un oggetto si può considerare un insieme se è sempre possibile stabilire *senza ambiguità* se qualcosa è un suo elemento oppure no. Tale affermazione esprime la relaizone di **appartenenza** tra elemento e insieme:

$$A \text{ è un insieme } \iff \forall x, x \in A \text{ o}^1\ x \notin A$$

Osservazione. Un insieme può a sua volta essere un elemento.

Appartenenza e paradosso di Russell

Anche se la richiesta espressa dalla condizioine di appartenenza può sembrare scontata, in realtà essa può essere fonte di problemi. Consideriamo l'oggetto

$$R = \{x | x \notin x\}$$

Per capire se R è un insieme, è necessario passare in rassegna ogni oggetto x e stabilire se esso appartiene o meno a R (affinché $x \in R$, deve valere la condizione espressa $x \notin x$). Quando si dice *ogni oggetto* si intende anche R stesso. Ecco cosa accade quando si tenta di stabilire se $R \in R$:

- Se $R \in R$, allora, per costruzione di R, deve essere $R \notin R$.
- Se invece $R \notin R$, vuol dire che R non rispetta la condizione, pertanto $R \in R$.

Dunque si giunge a concludere che

$$R \in R \iff R \notin R$$

che è un'evidente contraddizione. Quello che è stato appena illustrato è il *paradosso di Russell*[2]. Grazie agli assiomi precedenti, è allora garantito che R non è un insieme. Un altro esempio

[1] Disgiunzione esclusiva: solo una affermazione può e deve essere vera.

[2] Per una versione più divertente del paradosso, invitiamo il lettore a farsi raccontare la favola-paradosso del barbiere. Non ancora soddisfatti? Provate il paradosso del bibliotecario.

di oggetto non classificabile come insieme, secondo le definizioni presentate finora, è l'*insieme universo* $\mathcal{U}$, trattato più avanti.

Assioma di Estensionalità

Due insiemi sono uguali se possiedono gli stessi elementi.

$$A = B \iff (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Esistenza dell'insieme vuoto

Esiste un insieme, chiamato insieme vuoto (indicato col simbolo $\varnothing$), che non possiede elementi.

$$\exists \varnothing : \forall x, x \notin \varnothing$$

Tale insieme è unico (si dimostra attraverso l'Estensionalità).

Sottoinsiemi

Siano X, Y due insiemi. Si dice che X è sottoinsieme di Y (equivalentemente si può dire *è contenuto*), utilizzando il simbolo $\subseteq$, se ogni elemento di X è elemento di Y.

$$X \subseteq Y \iff \forall x (x \in X \Rightarrow x \in Y)$$

Osservazione. Esistono molti simboli per indicare i sottoinsiemi,: $\subset, \subseteq, \subseteqq$. Si presti bene attenzione a $\subset$: la letteratura accademica è piuttosto contraddittoria sul significato di tale simbolo e non è ben chiaro se esso possa essere utilizzato per indicare unicamente i sottoinsiemi **propri**, ovvero quelli che non possono coincidere col sovrainsieme. Per evitare ambiguità si utilizzano equivalentemente i simboli $\subsetneq, \subsetneqq$, poco usati qui.

1.2 Insiemi e proprietà: l'assioma di separazione

Un modo di definire alcuni insiemi è quello di impiegare una *proprietà* che ne caratterizzi gli elementi. Una proprietà non è altro che una proposizione, cioè un'affermazione vera e propria, come

$$P(x) := \ x \text{ è } \textit{fan dei Caesars}$$

Ovviamente a noi interesseranno affermazioni relative a oggetti matematici. In generale $P(x)$ può essere vera o falsa a seconda di x, ma asserzioni come

$$\forall x \quad x \in \varnothing \Longrightarrow P(x)$$

sono sempre vere. Sembra assurdo, ma approfittiamo di questo esempio per spiegare che il simbolo $\Longrightarrow$ (*se [ipotesi] allora [tesi]*) esprime, in matematica, *l'implicazione logica materiale*. In altre parole, l'intera implicazione è vera se l'ipotesi è falsa oppure se è vera la tesi. *Ex falso quodlibet*, dal falso segue ogni cosa. Nel nostro caso, la tesi $x \in \varnothing$ è sempre falsa, quindi possiamo supporre che tutti gli elementi dell'insieme vuoto sono fan dei Caesars.

Se P è una proposizione esprimibile in termini insiemistici, cioè attraverso gli opportuni simboli e connettori logici, allora scrivendo

$$\{x | P(x)\}$$

si intende la collezione di tutti gli x che soddisfano P. Il paradosso di Russel in realtà è prova che, in generale, un tale oggetto non è sempre un insieme. Perciò occorre l'assioma della separazione, che tuttavia non permette di costruire tutti gli insiemi della teoria degli insiemi, i quali devono essere definiti con altri assiomi (tali insiemi esulano da questo corso).

Assioma della separazione

Se X è un insieme e P una proprietà esprimibile come proposizione scritta in termini del linguaggio della teoria degli insiemi, allora la collezione

$$\{x|x \in X, P(x)\}$$

è un insieme. Alternativamente, vale anche la notazione $\{x \in X|P(x)\}$.

Possiamo ora spiegare perché non esiste $\mathcal{U}$, l'insieme di tutti gli insiemi. Supponiamo invece che $\mathcal{U}$ esista; allora possiamo scrivere

$$\{x|x \notin x\} = \{x \in \mathcal{U}|x \notin x\}$$

Questo perché x, nel membro di sinistra, è anche un insieme; dal momento che $\mathcal{U}$ è un insieme di insiemi, allora $x \in \mathcal{U}$. Ma per il paradosso di Russell, il primo membro non può essere un insieme; quello di destra, per l'assioma di separazione, invece lo è, perché abbiamo supposto l'esistenza di $\mathcal{U}$[3].

1.3 Operazioni tra insiemi

Se X e Y sono insiemi, si possono ricavare altri insiemi, per mezzo dell'assioma della separazione, attraverso le seguenti operazioni:

1. **Intersezione:** $X \cap Y = \{x|x \in X, x \in Y\}$
2. **Differenza:** $X \setminus Y = \{x|x \in X, x \notin Y\}$
3. **Unione:** $X \cup Y = \{x|x \in X \vee x \in Y\}$
4. **Prodotto:** $X \times Y = \{(x, y)|x \in X, y \in Y\}$
5. **Potenza:** $2^X = \{x|x \subseteq X\}$

Se I è un insieme e per ogni $i \in I$ è dato un insieme X_i (si dice che gli X_i sono indicizzati su I, cioè I serve solamente a *numerare* o etichettare gli X_i), ridefiniamo unione e intersezione al caso generale di insiemi multipli:

1. **Intersezione:** $\bigcap_{i \in I} X_i = \{x|\forall i \quad x \in X_i\}$
2. **Unione:** $\bigcup_{i \in I} X_i = \{x|\exists i : x \in X_i\}$

A parole, l'intersezione include gli x appartenenti *ad ogni* X_i, mentre l'unione include gli x contenuti in *almeno un* X_i.

[3] Il paradosso si supera introducendo la nozione di *classe*, che tuttavia non vedremo qui.

1.4 Relazioni e funzioni

Relazione

Siano X, Y insiemi. Si dice relazione ($\mathcal{R}$) tra X e Y un sottoinsieme del prodotto tra X e Y.

$$\mathcal{R} \subseteq X \times Y$$

Si scriverà anche $x\mathcal{R}y$ per indicare $(x, y) \in \mathcal{R}, \quad x \in X, y \in Y$. Una relazione in $X \times X$, cioè tra X e se stesso, si chiamerà *relazione binaria* su X.

Anche nella vita di tutti i giorni, si incontra spesso una classe di relazioni, dette *relazioni di equivalenza*, che condividono tre proprietà semplici ma per nulla scontate.

Relazione di equivalenza

Sia X un insieme e sia $\mathcal{R}$ una relazione binaria su X (cioè $\mathcal{R} \subseteq X \times X$). Diciamo che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza su X se possiede le seguenti proprietà:

1. **Riflessiva:** $\forall x \in X, \quad x\mathcal{R}x$
2. **Simmetrica:** $\forall x, y \in X, \quad x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$
3. **Transitiva:** $\forall x, y, z \in X, \quad x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$

La portata di questo genere di relazioni è ampia e copre non solo i linguaggi matematici, ma anche la logica quotidiana. Ad esempio, qualsiasi cosa è uguale a sé stessa; se la mia auto ha lo stesso colore della tua, allora la tua auto ha lo stesso colore della mia; se posso raggiungere Roma in skateboard partendo da Verona, e posso fare altrettanto da Roma a Foggia, posso viaggiare in skateboard da Verona a Foggia. In informatica si possono incontrare numerose relazioni di equivalenza. Generalmente nei corsi di teoria dei linguaggi di programmazione si tratta *l'equivalenza di tipo*, che è una relazione di equivalenza. In Java esiste il metodo `equals` (si occupa del confronto tra oggetti appartenenti a classi date), la cui definizione deve mandatoriamente rispettare le proprietà delle relazioni di equivalenza. Tale obbligo spetta peraltro al programmatore, qualora si decida di effettuare *override* del metodo.

Funzione

Una relazione $f \subseteq X \times Y$ si dice *funzione* (o funzione *totale*) se per ogni $x \in X$ esiste unico $y \in Y$ per cui xfy.

$$f \text{ funzione} \iff \forall x \in X, \exists! y \in Y : xfy$$

Si scriverà anche $f : X \to Y$ per indicare che f è una funzione (o applicazione) da X in Y e $y = f(x)$ come sinonimo di $(x, y) \in f$.

L'insieme $\{x \in X | \exists y \in Y : y = f(x)\}$ prende il nome di *dominio* di f ($\text{dom}(f)$), mentre $\{y \in Y | \exists x \in \text{dom}(f) : y = f(x)\}$ è l'*immagine* di f. In realtà, per la definizione appena data $\text{dom}(f) = X$, ma ciò è vero per le funzioni *totali*. Esistono anche funzioni *parziali*, nelle quali per ogni $x \in X$ esiste *al più* un $y \in Y$ col quale x è in relazione. Per noi saranno importanti le funzioni totali.

Denotiamo con Y^X l'insieme di tutte le funzioni totali da X a Y, cioè

$$Y^X = \{f \in 2^{X\times Y} | \forall x \in X, \exists! y \in Y : xfy\}$$

Osservazione. Una funzione è interpretabile (come d'altronde accade in fisica) come una legge che associa ad ogni elemento del dominio $x \in \text{dom}(f)$ uno e un solo elemento del codominio $y \in Y$ tale che $(x, y) \in f$. Tale elemento è più conosciuto con la notazione $f(x)$. In questo modo, acquista senso l'uguaglianza $y = f(x)$, che appunto corrisponde a $(x, y) \in f$.

Se X è un insieme, $\text{id}_X = \{(x_1, x_2 \in X \times X | x_1 = x_2)\}$ è una funzione, chiamata *identità* di X e vale

$$\text{id}_X(x) = x \quad \forall x \in X$$

Se $f : X \to Y$ è una funzione e $A \subseteq X$, allora $f \cap (A \times Y)$ è ancora una funzione, chiamata *restrizione di f ad A* e indicata con $f|_A$. In altre parole, essa rappresenta una parte della funzione f, ristretta ad un sottoinsieme del suo dominio.

Composizione

Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$. Si chiama *composizione* di f e g la relazione tra X e Z definita da

$$g \circ f = \{(x, z) | \exists y \in Y : y = f(x) \text{ e } z = g(x)\}$$

Osservazione. Grazie all'osservazione precedente, è possibile scrivere

$$g \circ f = g(f(x))$$

Iniettività, surgettività, bigettività

Una funzione $f : X \to Y$ si dice:

- **Iniettiva** se vale:
$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
- **Surgettiva** se vale:
$$\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$$
- **Bigettiva** se è iniettiva e surgettiva.

Osservazione. In una funzione surgettiva, l'immagine coincide con il codominio.

1.5 Equipotenza di insiemi

Composizione

Siano X e Y due insiemi. Diremo che X e Y sono *equipotenti* se esiste una bigezione $f : X \to Y$. Questa proprietà verrà denotata con

$$X \sim Y$$

letto anche come "X e Y hanno la stessa cardinalità".

Si può dimostrare che l'equipotenza tra insiemi è una relazioe di equivalenza. Dati X, Y, Z insiemi, valgono infatti:

1. $X \sim X$
2. $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$
3. $X \sim Y, Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$

Dimostrazione: (1) l'identità è una bigezione; (2) se f è una bigezione, allora f^{-1} è una bigezione; (3) composizione di bigezioni è una bigezione.

□

Osservazione. Non abbiamo ancora dato alcun significato preciso al termine *cardinalità* in relazione ad un insieme. Basti sapere che è possibile definire una classe di particolari insiemi detti **cardinali**, che godono delle seguenti proprietà:

- Ogni insieme X è equipotente ad uno ed un solo cardinale (solitamente denotato con $|X|$).
- Due cardinali diversi non sono equipotenti tra loro.

Ci limiteremo solamente alla definizione di cardinalità per gli insiemi finiti, trattati più avanti. Mostriamo il seguente teorema, generalizzazione di un altro mostrato invece in termini di cardinalità nelle prossime pagine:

Equipotenza come uguaglianza tra cardinali

Siano X, Y due insiemi. Vale:

$$X \sim Y \Leftrightarrow |X| = |Y|$$

Dimostrazione: se $\kappa = |X| = |Y|$ allora esistono due bigezioni $f : X \to \kappa$ e $g : Y \to \kappa$. Ma allora, avendo osservato che $\sim$ è una relazione di equivalenza, vale $g^{-1} \circ f : X \to Y$ è una bigezione e quindi $X \sim Y$.
Viceversa, sia $X \sim Y$ e sia $f : X \to Y$ una bigezione. Siano $\kappa = |X|$ e $\lambda = |Y|$; siano $g : X \to \kappa$ e $h : Y \to \lambda$ delle bigezioni. Allora $h \circ f \circ g^{-1} : \kappa \to \lambda$ è una bigezione e quindi $\kappa = \lambda$.

□

2

$\mathbb{N}$, *Insiemi Ordinati e Insiemi Finiti*

2.1 L'insieme $\mathbb{N}$

Un insieme numerico fondamentale in matematica discreta—in particolar modo per questo corso—è quello dei numeri naturali, indicato con il simbolo $\mathbb{N}$. La sua struttura attuale è dovuta al matematico italiano Giuseppe Peano, che formalizzò la natura di tale insieme attraverso i suoi celebri assiomi.

Assiomi di Peano

(i) $\mathbb{N}$ ammette almeno un elemento: 0 (zero).

$$0 \in \mathbb{N}$$

(ii) Esiste una funzione iniettiva avente $\mathbb{N}$ come dominio sia come codominio.

$$\exists \text{ succ: } \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ iniettiva}$$

(iii) Il successivo di ogni naturale non è mai 0.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{succ}(n) \neq 0$$

(iv) **Assioma di induzione:** Se $A \subseteq \mathbb{N}$ è un sottoinsieme contenente 0 e per cui vale tale proprietà: per ogni naturale n, se n appartiene ad A, allora anche succ(n) appartiene ad A; allora A coincide con $\mathbb{N}$.

$$[A \subseteq \mathbb{N} : 0 \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \in A \Rightarrow \text{succ}(n) \in A)] \Longrightarrow A = \mathbb{N}$$

L'assioma di induzione costituisce il principio fondante di una delle tecniche di dimostrazione più potenti della matematica: la dimostrazione per induzione. Questa costituirà infatti la logica di dimostrazione maggiormente sfruttata in questo corso.

2.2 Il principio di induzione di prima forma

Prima forma dell'induzione (A)

Sia $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di proposizioni indicizzata su $\mathbb{N}$. Supposto che:

1. $P(0)$ sia vera
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione: Sia $A = \{n|P(n)\}$. Per la (1) si ha che $0 \in A$. Se $n \in A$ allora vale $P(n)$, quindi $P(n+1)$ vale per la (2), ma allora $n+1 \in A$, quindi per l'assioma di induzione $A = \mathbb{N}$.

□

Spesso si desidera limitare la dimostrazione di certe proposizioni ad un sottoinsieme. Per questo esiste una formulazione alternativa del principio di induzione, utile a tale scopo.

Prima forma dell'induzione (B)

Sia $h \in \mathbb{N}$ e sia $\{P(n)\}_{n\geq h}$ una famiglia di proposizioni indicizzata su su $n \geq h$. Supposto che:

1. $P(h)$ sia vera
2. $\forall n \geq h \quad P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \geq h$.

Dimostrazione: Sia $A = \{n \geq h|P(n)\}$.
$n = h$ (base dell'induzione) $n = h \Longrightarrow n \in A \because$ ip. (1).
$\forall n \geq h, n \Rightarrow n+1$ (passo induttivo) Supposto che qualche $n \in A$, con $n \geq h$ allora per (2) si ha $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, ma allora $n+1 \in A$. Per l'assioma di induzione, $P(n)$ vera $\forall n \geq h$.

□

Come per molti altri teoremi che vedremo più avanti, le dimostrazioni del principio di induzione forniscono uno schema generale per mostrare la validità di proposizioni indicizzate sui naturali.

2.3 Il teorema di ricorsione

Con i soli assiomi di Peano non si può fare molta strada: non definiscono operazioni come somma e prodotto e nemmeno relazioni d'ordine—poter stabilire se un numero è più grande di un altro— sugli elementi di $\mathbb{N}$. Per poter procedere, è necessario citare l'assioma di ricorsione—probabilmente il più complesso del corso, ma sul quale si fondano operazioni scontate come la somma di numeri naturali.

Teorema di ricorsione

Sia X un insieme, $h : \mathbb{N} \times X \to X$ una funzione e $c \in X$. Esiste un'unica funzione $f : \mathbb{N} \to X$ tale che

$$f(0) = c$$
$$f(\text{succ}(n)) = h(n, f(n)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione: non vuoi vedere due pagine di dimostrazione

2.4 Operazioni fondamentali sui naturali

Enunciato il teorema di ricorsione, definiamo la somma e il prodotto in $\mathbb{N}$.

Somma in $\mathbb{N}$

Dato $n \in \mathbb{N}$ si definisce $+$ la funzione $m \mapsto n + m$ ricorsivamente nel seguente modo:

$$n + 0 = n$$
$$n + \text{succ}(m) = \text{succ}(n + m)$$

Ponendo $\text{succ}(0) = 1$, grazie al teorema di ricorsione si ottiene

$$\text{succ}(n) = \text{succ}(n + 0) = n + \text{succ}(0) = n + 1$$

D'ora in poi verrà utilizzata questa scrittura, più naturale e familiare, per indicare il successivo del numero n.

Prodotto in $\mathbb{N}$

Dato $n \in \mathbb{N}$ si definisce il prodotto $m \mapsto nm$

$$n0 = 0$$
$$n(m + 1) = nm + n$$

Osservazione. Queste definizioni prevedono solo la somma e il prodotto a sinistra, ma si può mostrare che vale la *commutatività*, oltre all'associatività e alla proprietà distributiva.

2.5 Insiemi ordinati

Definita la somma, possiamo tramite essa formalizzare l'ordinamento dei numeri naturali.

Ordinamento in $\mathbb{N}$

Siano $n, m \in \mathbb{N}$. Diremo che n è *minore o guale* a m scrivendo

$$n \leq m \iff \exists k \in \mathbb{N} : m = n + k$$

L'ordinamento sui naturali $\leq$ può essere visto come sottoinsieme di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, cioè

$$\leq \quad = \quad \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists k \in \mathbb{N} : m = n + k\}$$

e dunque $\leq$ è una relazione sui naturali. Infatti $n \leq m$ ha lo stesso significato di $(n, m) \in \leq$, seguendo la definizione insiemistica. Valgono poi le seguenti proprietà (dimostrabili) $\forall n, m, k \in \mathbb{N}$:

1. $n \leq n$
2. $n \leq m, m \leq n \implies n = m$
3. $n \leq m, m \leq k \implies n \leq k$
4. $n \leq m$ o $m \leq n$

In generale, un ordine degli oggetti può essere stabilito su quasi tutti gli insiemi. Infatti il linguaggio insiemistico descrive le regole per tale costruzione estendendole ad un generico insieme, come si vede nella prossima definizione. L'ordinamento dei numeri può sembrare qualcosa di totalmente naturale, ma in realtà e in generale si tratta solo di una convenzione. In informatica, ad esempio, esiste una relazione d'ordine sulle stringhe e i singoli caratteri, che si basa sull'ordine alfabetico di lettere e parole. Nulla vieta di stabilire ordinamenti su colori o strumenti musicali. Basta "inventarsi" una relazione sotto forma di proposizione (possibilmente formale e non ambigua) come "x viene prima (o con la stessa priorità) di y". Ma come vedremo è necessario stabilire almeno 3 regole affinche una relazione d'ordine su un certo insieme sia considerabile tale:

1. Ogni elemento deve poter essere confrontabile con sé stesso: x viene prima o con la stessa priorità di sé stessp.
2. Se un elemento è in relazione con un altro, che è in relazione col primo, allora questi elementi sono uguali: se x viene prima o con uguale priorità di y e y viene prima o con uguale priorità di x, allora $x = y$.
3. Se un elemento è in relazione con un altro, che è in relazione con un terzo, allora il primo è in relazione con il terzo: se x viene prima di y e y viene prima di z, allora x viene prima di z.

Relazione d'ordine parziale e totale

Sia X un insieme e $\preceq$ una relazione binaria su X. $\preceq$ si dice un ordinamento parziale, o relazione d'ordine parziale, se valgono se seguenti proprietà:

1. **Riflessiva:** $\forall x \in X \quad x \preceq x$
2. **Antisimmetrica:** $\forall x, y \in X \quad x \preceq y, y \preceq x \implies x = y$
3. **Transitiva:** $\forall x, y, z \in X \quad x \preceq y, y \preceq z \implies x \preceq z$

Un ordinamento parziale si dice totale se in più vale la **tricotomia**

$$\forall x, y \in X \quad x \preceq y \text{ o } y \preceq x$$

Una coppia $(X, \preceq)$ si dice *insieme parzialmente o totalmente ordinato*. I simboli (equivalenti) $<, \prec$ indicano l'*ordinamento stretto*, ossia $x \prec y, x \neq y$. La proprietà di tricotomia può essere riformulata in termini di ordinamento stretto scrivendo

$$\forall x, y \in X \text{ vale una e una sola tra } x \prec y \text{ o } x = y \text{ o } y \prec x$$

Introdotto questo nuovo linguaggio, si può allora affermare che $(\mathbb{N}, \leq)$ è un insieme *totalmente* ordinato.

L'ordinamento totale è forse la relazione d'ordine con cui si ha a che fare più spesso nella vita: i numeri naturali ne sono una dimostrazione lampante. Ma quindi quando si incontrano relazioni d'ordine *parziali*? Ma innanzitutto, cosa caspita significa essere una relazione d'ordine totale? Intuitivamente, una relazione d'ordine totale definita su uncerto insieme permette di confrontare *sempre* due elementi *qualsiasi* di quell'insieme. Cioè, se $\mathcal{R}$ è una generica relazione, ad esempio "è alfabeticamente minore di" impiegata su un insieme di parole W, il simbolo $x\mathcal{R}y$ ha sempre significato $\forall x, y \in W$.

Un esempio di relazione d'ordine parziale è invece il seguente:

$$\mathcal{R} = \text{"È antenato di o identico a"}$$

definito sull'insieme degli esseri umani. È facile verificare che valgono le proprietà (1), (2) e (3) mostrate precedentemente, ma non vale la tricotomia: non è vero che *per ogni* essere umano è possibile stabilire se uno è antenato o identico all'altro. Due fratelli distinti, infatti, non possono essere confrontati con questa relazione (si ricorda che si è supposto che l'insieme è quello di tutti gli esseri umani e che la relazione deve valere per tutte le coppie possibili di elementi; da qui il significato intuitivo del termine *totale*).

Se il lettore insaziabile desidera una prova dell'utilità di queste nozioni in ambito informatico, la struttura dati conosciuta come *heap* definisce un ordinamento parziale sui suoi elementi. Maggiori informazioni sono disponibili nel corso di *Algoritmi e Strutture Dati* del famigerato Alberto Montresus[1]

2.6 Insiemi finiti: il lemma dei cassetti

Forniamo ora una definizione-notazione usata frequentemente in questo corso: dato un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ denotiamo $I_n = \{0, 1, ..., n-1\}$. In particolare $I_0 = \varnothing$.

Insieme finito

Un insieme X si dice finito se esiste un naturale n tale che X è equipotente a I_n. Un insieme è infinito se non è finito.

$$X \text{ finito} \iff \exists n \in \mathbb{N} : X \sim I_n$$

Lemma dei cassetti

Siano X, Y due insiemi aventi rispettivamente $X \sim I_n$ e $Y \sim I_m$ con $n < m$. Allora ogni applicazione $f : Y \to X$ non è iniettiva.

Dimostrazione: Si procede per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Se $n = 0$ allora $X = \varnothing$ e $Y \neq$

[1] Personalità influente presso l'Università di Trento conosciuta anche come Montresor, Montresorus e altri pseudonimi.

$\varnothing$, quindi l'insieme X^Y delle applicazioni $Y \to X$ è vuoto e pertanto non c'è nulla da dimostrare (dal falso segue ogni cosa).
Supponiamo che la tesi sia vera per n e proviamola per $n+1$. Sia $X \sim I_{n+1}$ e sia $Y \sim I_m$ con $m > n+1$ e supponiamo per assurdo che l'applicazione $f : Y \to X$ sia iniettiva. Per definizione esiste una bigezione $g : I_{n+1} \to X$; poniamo $x_n = g(n)$ e $X' = X - \{x_n\}$. Chiaramente X' è in bigezione con I_n. Si presentano due casi:

$$f^{-1}(x_n) = \varnothing \quad (\text{i.e. } \forall y \in Y : f(y) \neq x_n)$$
$$f^{-1}(x_n) \neq \varnothing \quad (\text{i.e. } \exists y \in Y : f(y) = x_n)$$

Nel primo caso, $f(y) \subseteq X'$ e quindi $f : Y \to X'$ sarebbe un'applicazione iniettiva da un insieme equipotente a I_m in un insieme equipotente a I_n; dato che $m > n+1 > n$ questo è assurdo per ipotesi di induzione. Nel secondo caso, sia $y \in Y$ tale che $f(y) = x_n$ e sia $Y' = Y - \{y\}$. Dato che f è iniettiva, $f(Y') \subseteq X'$ e quindi $f|_{Y'} : Y' \to X'$ è un'applicazione iniettiva. Dato che $Y' \sim I_{m-1}$, $X' \sim I_n$ e $m-1 > n$, ciò è assurdo per ipotesi di induzione.

□

Il lemma dei cassetti prende il nome da un modo intuitivo di interpretarlo: se possiedo un certo numero di oggetti da disporre in un certo numero di cassetti, più piccolo di quello degli oggetti, allora sicuramente qualche cassetto conterrà più di un oggetto. In informatica questo concetto, seppur banale, assume un'importanza da non sottovalutare: se, in una funzione, si conoscono perfettamente tutti i possibili output e tutti i possibili input e se questi sono maggiori del numero di output, allora, per il lemma dei cassetti, almeno un output sarà condiviso da più input. Ovvero, due o più input produrranno lo stesso output.

Osservazione. Qualora dominio e codominio abbiano lo stesso numero di elementi, è possibile per una tale applicazione essere bigettiva, semplicemente mostrando la sua iniettività. Di fatto il lemma dei cassetti può essere riformulato come segue: *se n oggetti vengono distribuiti in n posti cosicché ogni posto non riceva più di un oggetto, allora ogni posto conterrà uno e un solo oggetto.* Nel teorema di Fermat-Eulero si farà riferimento a questa formulazione del lemma dei cassetti.

Dal lemma dei cassetti seguono corollari e definizioni importanti relativi alle proprietà degli insiemi finiti.

Equipotenza tra insiemi finiti

Dati $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$ e X, Y insiemi finiti tali che $|X| = |I_n|$ e $|Y| = |I_m|$, allora X e Y non sono equipotenti.
In particolare vale

$$|X| = |I_n|, |X| = |I_m| \implies n = m$$

insieme a

$$X \sim I_n, Y \sim I_m \implies (X \sim Y \Leftrightarrow n = m)$$

Da quest'utlimo corollario si può definire la cardinalità degli insiemi finiti.

Cardinalità di un insieme finito

Sia X un insieme finito. Si dice cardinalità di X l'unico numero naturale n tale che $|X| = |I_n|$. Tale numero si denota con $|X|$.

Riproponiamo la condizione di equipotenza, in particolare per quanto riguarda gli insiemi finiti ed introducendo il linguaggio della cardinalità.

Condizione di equipotenza espressa in termini di cardinalità

Dati X, Y insiemi finiti vale

$$X \sim Y \iff |X| = |Y|$$

Dimostrazione: $|X| = |Y| \implies \exists n \in \mathbb{N} : X \sim I_n, Y \sim I_n \implies X \sim Y$ per transitività dell'equipotenza. Viceversa se $X \sim Y$ allora essi hanno la stessa cardinalità, per il corollario precedente.

Cardinalità di sottoinsiemi finiti

Sia X un insieme finito e $Y \subseteq X$. Allora anche Y è finito e $|Y| \leq |X|$. Se $Y \subsetneqq X$, allora $|Y| < |X|$.

Equipotenza tra insieme finito e sottoinsieme

Un insieme finito non è equipotente ad alcun suo sottinsieme proprio, cioè non esiste alcuna bigezione tra X e un qualsivoglia $X' \subsetneqq X$.

Osservazione. Segue in particolare che $\mathbb{N}$ è infinito. Per gli assiomi di Peano, si può considerare l'applicazione $n \mapsto \text{succ}(n)$; sapendo che 0 non possiede alcun predecessore, succ è una bigezione tra $\mathbb{N}$ e il suo sottoinsieme proprio $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. $\mathbb{N}$ dunque non soddisfa il corollario precedente.

2.7 Buon ordinamento

Minimo

Sia X un insieme e sia $\leq$ un ordinamento su X. Sia $A \subseteq X$, diremo che $z \in A$ è un minimo di A se per ogni $x \in A$ si ha che $z \leq x$.

$$z = \min A \iff z \leq x \quad \forall x \in A$$

Osservazione. Non avendo elementi, l'insieme vuoto non ammette minimo.

Insieme ben ordinato

Un ordinamento totale su un insieme X si dice buon ordinamento se ogni sottoinsieme non vuoto di X ammette minimo.

$$(X, \leq) \text{ ben ordinato } \iff \exists \min A \quad \forall A \subseteq X, A \neq \varnothing$$

Buon ordinamento di $\mathbb{N}$

L'ordinamenti dei numeri naturali è un buon ordinamento.

$$(\mathbb{N}, \leq) \text{ ben ordinato}$$

Dimostrazione: Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ che non ammette minimo e mostriamo che $A = \varnothing$. Sia $B = \mathbb{N} \setminus A$ il complementare di A. Si procede per induzione su $n \in \mathbb{N}$ considerando la proposizione:

$$P(n) := (\{0, 1, ..., n\} \subseteq B)$$

$n = 0$ (base dell'induzione) Si osservi che $0 = \min \mathbb{N}$, dunque $0 \notin A$, altrimenti sarebbe il suo minimo, allora $0 \in B$ e di conseguenza $\{0\} \subseteq B$.
$n \geq 0, n \implies n + 1$ (passo induttivo) Supponiamo che $\{0, ..., n\} \subseteq B$ per qualche $n \geq 0$ (ipotesi induttiva). Allora $0, ..., n \notin A$ per ipotesi induttiva, quindi $n + 1 \notin A$, altrimenti sarebbe il suo minimo. Quindi $n + 1 \in B$ e pertanto $\{0, ..., n, n + 1\} \subseteq B$. Allora $B = \mathbb{N}$, quindi $A = \varnothing$.

□

Esistono insiemi ordinati ma non ben ordinati? La risposta è affermativa:

- $\mathbb{Z}$: il sottoinsieme $M \subseteq \mathbb{Z}$ dei numeri negativi non ha minimo.
- $\mathbb{R}$: l'intervallo dei reali $(0, 1)$ non ammette minimo.

2.8 Il principio di induzione di seconda forma

Principio di induzione di seconda forma

Sia $\{P(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di proposizioni indicizzate su $\mathbb{N}$ e si supponga che:

1. $P(0)$ sia vera
2. $\forall n > 0 \quad (P(k) \text{ vera } \forall k < n) \implies P(n)$

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione: Sia $A := \{n \in \mathbb{N} | P(n) \text{ falsa}\}$, e si supponga per assurdo che $A \neq \varnothing$. Allora per la proprietà di buo ordinamento di $\mathbb{N}$, A ammette minimo m (essendo $A \subseteq \mathbb{N}$ non vuoto). Vale:

$$m := \min A \implies m \in A \implies P(m) \text{ falsa } \implies m \neq 0$$

che segue da (1).
Se $k \in \mathbb{N} : 0 \leq k < m = \min A$ allora $k \notin A$. Ma allora $P(k)$ è vera. Per (2), segue che $P(m)$ è vera, ma si ottiene così una contraddizione. Deve dunque essere necessariamente $A = \varnothing$, ovvero $P(n)$ vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

□

3

$\mathbb{Z}$ *e la Divisione*

3.1 Qualche parola sui numeri interi

L'insieme dei numeri interi si denota col simbolo $\mathbb{Z}$ (dal tedesco *Zahl*). Non verrà qui trattata nel dettaglio la sua struttura, al contrario dei naturali, ma ci limitiamo a dire che gli interi e le loro operazioni sono definibili per estensione dai naturali.

3.2 La divisione euclidea

Teorema della divisione euclidea

$$n, m \in \mathbb{Z} : m \neq 0 \implies \exists! q, r \in \mathbb{Z} : \begin{cases} n = qm + r \\ 0 \leq r < |m| \end{cases}$$

Dimostrazione: *Esistenza:* procediamo per casi. Si consideri dapprima $n, m \in \mathbb{N}$ ($n \geq 0, m > 0$) e si proceda per induzione, seconda forma, su $n \in \mathbb{N}$.
Se $n = 0$ (base dell'induzione) è sufficiente prendere $q = 0 = r$. Il sistema della tesi è infatti soddisfatto.
Si supponga ora che $n > 0$ e che la tesi sia vera $\forall k < n$. Se $n < m$ basta prendere $q = 0$ e $r = n$ (anche qui le condizioni del sistema sono soddisfatte). Altrimenti si ponga $k = n - m$, dato che $m > 0$ e pertanto si ha $0 \leq k < n$, quindi per ipotesi induttiva $\exists q, r \in \mathbb{Z}$ tali che:

$$\begin{cases} k = qm + r \\ 0 \leq r < m = |m| \end{cases}$$

Ma allora $n = k + m = qm + r + m = (q + 1)m + r$ e il passo induttivo è verificato.
Si consideri ora il caso $n < 0$ e $m > 0$. Allora $-n > 0$ e quindi per il caso precedente esistono $q, r \in \mathbb{Z}$ tali che $-n = qm + r$ e $0 \leq r < m = |m|$. Per ricondurci alla forma della tesi, si pone $n = (-q)m - r$. Per sistemare r, nel caso $r = 0$ si soddisfano le condizioni per raggiungere la tesi, se $0 < r < m$ allora $0 < m - r < m = |m|$ ($m - r$ è pertanto il resto cercato) e:

$$n = (-q)m - r = (-q)m - m + m - r = (-q - 1)m + (m - r)$$

Infine, se $m < 0$ allora $-m > 0$, quindi per i due casi precedenti $\exists q, r \in \mathbb{Z}$ tali che:

$$n = q(-m) + r = (-q)m + r \qquad \text{con } 0 \leq r < -m = |m|$$

Unicità: supponiamo che $qm + r = n = q'm + r'$ e che, a meno di scambiare r e r', $0 \leq r, r' < |m|$. Supponiamo che $r' \geq r$, allora:

$$qm + r = q'm + r' \iff (q - q')m = r' - r$$

$$\therefore {}^{a}$$

$$|q-q'||m| = |r'-r| = r'-r < |m| \iff 0 \leq |q-q'| < 1$$

Ma dal momento che $q, q' \in \mathbb{Z}$:

$$|q-q'| = 0 \iff q = q' \quad \implies \quad qm + r = q'm + r' \implies r = r'$$

□

La dimostrazione del teorema costituisce il procedimento alla base dell'algoritmo ricorsivo per il calcolo del quoziente e del resto della divisione intera.

Algoritmo di divisione euclidea con segni differenti

Ecco alcuni esempi di divisione euclidea:

1. Supponiamo di voler dividere $n = 16$ per $m = 5$. Osserviamo che 5 "ci sta 3 volte (intere) in" 16, ovvero $16 = 3 \cdot 5 + 1$. Dunque, è immediato riconoscere che:

$$\begin{cases} 16 = \mathbf{3} \cdot 5 + 1 \\ 0 \leq \mathbf{1} < |5| \end{cases}$$

2. Siano ora $n = 16, m = -5$. Osserviamo che $16 = 3 \cdot 5 + 1 \Leftrightarrow 16 = 3 \cdot (-(-5)) + 1 \Leftrightarrow 16 = (-3) \cdot (-5) + 1$. In altre parole, iniziamo come se m fosse positivo, per poi aggiungere i segni. Vale dunque

$$\begin{cases} 16 = (\mathbf{-3}) \cdot (-5) + 1 \\ 0 \leq \mathbf{1} < |-5| \end{cases}$$

3. Siano adesso $n = -16, m = 5$. Anche qui $16 = 3 \cdot 5 + 1 \Leftrightarrow -(-16) = 3 \cdot 5 + 1 \Leftrightarrow -16 = (-3) \cdot 5 - 1 \Leftrightarrow -16 = (-3) \cdot 5 - 1 + 5 - 5 \Leftrightarrow -16 = (-4) \cdot 5 + 4$.

$$\begin{cases} -16 = (\mathbf{-4}) \cdot 5 + 4 \\ 0 \leq \mathbf{4} < |5| \end{cases}$$

4. Con $n = -16, m = -5$. Ragionando come prima, vale

$$\begin{cases} -16 = 4 \cdot (-5) + 4 \\ 0 \leq 4 < |-5| \end{cases}$$

[a] Letteralmente, *quindi*.

3.3 Rappresentazione dei naturali in base b

Rappresentabilità dei naturali in base arbitraria

Sia $b \in \mathbb{N}$. Diremo che $n \in \mathbb{N}$ è rappresentabile in base b se esistono $\varepsilon_0, ..., \varepsilon_k \in I_b = \{0, ..., b-1\}$ tali che:

$$n = \varepsilon_0 b^0 + ... + \varepsilon_k b^k = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i b^i$$

Osservazione. È importante notare che nessun numero è rappresentabile in base 0, perché $I_0 = \varnothing$ e dunque non esistono simboli che possono rappresentare i numeri. L'unico naturale rappresentabile in base 1 è 0.

La rappresentabilità è esprimibile in maniera alternativa, come si vede dall'enunciato del seguente teorema:

Teorema di rappresentazione dei naturali in base arbitraria

Sia $b \in \mathbb{N} : b \geq 2$. Allora ogni $n \in \mathbb{N}$ è rappresentabile univocamente nella base b. Ossia esiste una successione $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$:

1. definitivamente nulla ($\exists i_0 \in \mathbb{N} : \varepsilon_i = 0 \quad \forall i > i_0$)
2. $\varepsilon_i \in I_b \quad \forall i \in \mathbb{N}$ ($0 \leq \varepsilon_i < b$, di tipo resto)
3. $n = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i b^i$ (per la (1) tale serie è finita)

e se $\{\varepsilon'_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è un'altra successione che soddisfa gli stessi punti, allora $\varepsilon_i = \varepsilon'_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione: Sia fissato $b \in \mathbb{N} : b \geq 2$.
Esistenza: Si procede per induzione, seconda forma, su $n \in \mathbb{N}$.
Se $n = 0$ basta scegliere una successione tale che $\varepsilon_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$.
Assumiamo ora $n > 0$ e si supponga che la tesi sia vera $\forall k < n$. Si consideri la divisione euclidea tra n, b: siano q, r tali che $n = qb + r$ con $0 \leq r < b$. Essendo inoltre $b \geq 2$ vale: $0 \leq q < qb \leq qb + r = n$ e quindi, per ipotesi di induzione, eiste una successione definitivamente nulla $\{\delta_i\}$ costituita di interi tali che $0 \leq \delta_i < b \quad \forall i$ e tale che $q = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i b^i$. Segue che:

$$n = qb + r = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i b^i \right) b + r = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i b^{i+1} + r = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{j-1} b^j + \varepsilon_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i b^i$$

(Si noti che si è posto $\varepsilon_0 = \varepsilon_0 b^0 = r$ e $\varepsilon_i = \delta_{j-1} \quad \forall i, j > 0$). La successione $\{\varepsilon_i\}$ è definitivamente nulla, essendo tale $\{\delta_i\}$ e inoltre $0 \leq \varepsilon_i = \delta_{j-1} < b \quad \forall i, j > 0$ e $0 \leq \varepsilon_0 = r < b$.
Unicità: Si procede per induzione su $n \in \mathbb{N}$.
Se $n = 0 = \sum_i \varepsilon_i b^i$ allora ogni addendo della somma, essendo non negativo ($b \geq 2, \varepsilon_i \in I_b \quad \forall i$), necessariamente deve essere nullo, pertando si ha $\varepsilon_i = 0 \quad \forall i$.

Si assuma ora $n > 0$ e si suppanga che, $\forall k < n$, l'espressione in base b sia unica. Sia n tale che:

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i b^i = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon'_i b^i \implies n = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i b^{i-1} \right) b + \varepsilon_0 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon'_i b^{i-1} \right) b + \varepsilon'_0$$

Per l'unicità della divisione euclidea, si ha che $\varepsilon_0 = \varepsilon'_0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i b^{i-1} = q = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon'_i b^{i-1}$. Vale $q < n$ (si veda l'esistenza) e pertanto, per ipotesi di induzione, $\varepsilon_i = \varepsilon'_i \quad \forall i \geq 1$.

□

In informatica si incontrano spesso numeri rappresentati in basi diverse da quella decimale, in modo particolare binaria, ottale ed esadecimale. Tutto questo è possibile perché il teorema precedente lo garantisce, sia nella capacità di rappresentare i numeri che nell'unicità di tali rappresentazioni.

Come per la divisione euclidea, la dimostrazione di questo teorema mostra un procedimento ricorsivo per il calcolo della stringa che rappresenta il numero naturale preso in esame data una certa base.

Algoritmo di conversione tra rappresentazioni dei naturali in basi diverse

3.4 Proprietà della divisibilità in $\mathbb{Z}$

Finora abbiamo incontrato la nozione di *divisione* attraverso quella euclidea, che tuttavia può dare origine al cosiddetto resto r. Un caso interessante di questo tipo di divisione è proprio quello in cui risulta $r = 0$: intuitivamente, qualora il divisore "ci sta *esattamente* un certo numero (intero) di volte" nel dividendo. Questo è il concetto di *divisibilità* in $\mathbb{Z}$, di cui introduciamo ora la definizione formale.

Divisibilità

Dati $n, m \in \mathbb{Z}$ si dice che n è un divisore di m (o che m è un multiplo di n) se esiste un $k \in \mathbb{Z}$ tale che $m = kn$:

$$n|m \quad \iff \quad \exists k \in \mathbb{Z} : m = kn$$

Osservazione. Dalla definizione valgono le seguenti:

1. $n|0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
2. $n \neq 0 \implies 0 \not| n$
3. $0|0$
4. $\pm 1|n, \pm n|n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$

Proprietà della divisibilità

Dati $n, m \in \mathbb{Z}$ valgono

1. $n|m$, $m|q \Longrightarrow n|q$
2. $n|m$, $m|n \Longrightarrow n = \pm m$

Dimostrazione:

1. $n|m \Rightarrow m = kn$, $m|q \Rightarrow q = hm = (hk)n \Longrightarrow n|q$
2. $n|m \Rightarrow m = kn$, $m|n \Rightarrow n = hm \Longrightarrow m = khm \Longleftrightarrow m(1-kh) = 0 \quad \therefore m = 0, n = 0 \because n = hm$ oppure $1 - kh = 0 \Longrightarrow h = k = \pm 1 \therefore n = \pm m$

□

Lemma utile

Siano $c, n, m \in \mathbb{Z} : c|n, c|m$. Allora c divide ogni combinazione lineare in $\mathbb{Z}$ tra n e m:

$$c|xn + ym \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} c|n, c|m \Rightarrow & \\ & \Rightarrow \exists h, k \in \mathbb{Z} : n = ch, m = ck \Rightarrow \\ & \Rightarrow xn + ym = xch + yck = c(xh + yk) \Rightarrow \\ & \Rightarrow c|xn + ym \end{aligned}$$

□

3.5 Definizione, esistenza e unicità del MCD

Massimo Comun Divisore

Dati $n, m \in \mathbb{Z}$ non entrambi nulli e $c \in \mathbb{Z}$, si dice che $M = (n, m)$ è *il* massimo comun divisore di n e m se:

1. $M > 0$
2. $M|n$ e $M|m$
3. $\forall c \in \mathbb{Z} : c|n, c|m \Longrightarrow c|M$

Esistenza e unicità del massimo comun divisore

Dati $n, m \in \mathbb{Z}$ non entrambi nulli eiste unico il loro massimo comun divisore:

$$n, m \in \mathbb{Z} : n \neq 0 \vee m \neq 0 \Longrightarrow \exists! M = (n, m)$$

Dimostrazione: *Esistenza:* Si consideri l'insieme

$$S := \{s \in \mathbb{Z} | s > 0, \exists x, y \in \mathbb{Z} : s = xn + ym\}$$

Possiamo asserire che $S \neq \varnothing$, perché vale $nn + mm > 0$ (si ricorda che n, m non sono entrambi nulli). Poiché S è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$, grazie al teorema del buon ordinamento di $\mathbb{N}$, S ammette minimo. Sia $d := \min S = xn + ym$, per qualche $x, y \in \mathbb{Z}$ e dimostriamo che d è il MCD. Vale $d \in S \Longrightarrow d > 0$ (definizione (1)). Sia

$$c \in \mathbb{Z} : c|n, c|m \Leftrightarrow \exists h, k \in \mathbb{Z} : n = kc, m = hc \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d = xkc + yhc = (xk + yh)c \Rightarrow c|d$$

(definizione (2)). Dimostriamo che $d|n$. Si consideri la divisione euclidea tra n e d: $n = qd + r$ con $0 \leq r < d$. Se $r > 0$, allora $r = n - qd = n - q(xn + ym) = n(1 - qx) + m(-qy) \in S$. Ma questo è assurdo, perché $r < d$ e $d = \min S$. Quindi $r = 0$ cioè $d|n$. Lo stesso ragionamento vale per $d|m$ (definizione (3)).
Unicità: Supponiamo che M, M' siano due massimi comun divisori di n, m. Allora $M'|M$, perché $M|n, M|m$, essendo M divisore comune. Ma invertendo i ruoli vale anche $M|M'$, perché anche M si suppone essere massimo comun divisore. Per la proprietà della divisibilità, allora $M = \pm M'$, ma essendo entrambi i massimi comun divisori di n e m, per definizione $M, M' > 0$, quindi $M = M'$.

□

Dalla dimostrazione segue che, dati $n, m \in \mathbb{Z}$, esistono $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che

$$(n, m) = nx + my$$

e che gli interi che sono combinazione lineare di n e m sono tutti e soli multipli di (n, m). È altresì importante notare che:

1. La nozione di divisibilità non dipende dai segni:

$$n|m \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : m = kn \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : m = (-k)(-n) \Longleftrightarrow -n|m$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists k \in \mathbb{Z} : -m = (-k)n = k(-n) \Longleftrightarrow n| - m, -n| - m$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(n, m) = (-n, m) = (-n, -m) = (|n|, |m|)$$

2. La definizione di massimo comun divisore non dipende dall'ordine di n e m:

$$(n, m) = (m, n)$$

3. Siano $n, m \in \mathbb{Z}$ non entrambi nulli. Allora

$$(n, m) = \max\{c \in \mathbb{Z} | c|n, c|m\}$$

4. Sia $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Vale
$$(n, 0) = |n|$$

3.6 Algoritmo di Euclide per il calcolo del MCD

Algoritmo di Euclide

Siano:

1. $n, m \in \mathbb{Z}$
2. $n = qm + r$ la divisione euclidea di n per m
3. $\mathcal{A} := \{c \in \mathbb{Z} | c|n, c|m\}$, $\mathcal{B} := \{c \in \mathbb{Z} | c|m, c|r\}$

Allora $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ e in particolare $(n, m) = (m, r)$.

Dimostrazione: mostriamo che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Sia $c \in \mathcal{A}$. Vale:

$$c \in \mathcal{A} \Leftrightarrow c|n, c|m \Leftrightarrow \exists h, k \in \mathbb{Z} : n = hc, m = kc \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r = n - qm = hc - qkc = (h - qk)c \Rightarrow c|r \Rightarrow c \in \mathcal{B}$$

Mostriamo che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Sia $c \in \mathcal{B}$. Vale:

$$c \in \mathcal{B} \Leftrightarrow c|m, c|r \Leftrightarrow \exists h, k \in \mathbb{Z} : m = hc, r = kc \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n = qm + r = qhc + kc = (qh + k)c \Rightarrow c|n \Rightarrow c \in \mathcal{A}$$

Segue che
$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$$

In particolare, per il teorema di esistenza e unicità del MCD e l'Osservazione (3) di questa sezione, segue che
$$(n, m) = \max \mathcal{A} = \max \mathcal{B} = (m, r)$$

□

Impiegare l'Algoritmo di Euclide

3.7 Numeri coprimi e primi

Numeri coprimi

$n, m \in \mathbb{Z}$ non entrambi nulli si dicono coprimi se vale:
$$(n, m) = 1$$

Osservazione. $(n,m) = 1 \iff \exists x, y \in \mathbb{Z} : nx + my = 1$. *In particolare,* $(n, n+1) = 1$*; infatti* $1 = (n+1)1 + n(-1)$.

Avendo introdotto il massimo comun divisore, è ora possibile mostrare una loro proprietà che permette di metterli in relazione con i numeri coprimi. Siano infatti $n, m \in \mathbb{Z}$ non entrambi nulli. Vale allora

$$\left(\frac{n}{(n,m)}, \frac{m}{(n,m)}\right) = 1$$

ovvero, dividendo n e m per il loro massimo comun divisore, si ottengono numeri tra loro coprimi. La dimostrazione è la seguente:

$$d = (n,m) \iff \exists x, y \in \mathbb{Z} : d = nx + my \therefore \frac{d}{d} = \frac{nx + my}{d} \iff 1 = \frac{n}{d}x + \frac{m}{d}y$$

□

Numero primo

Il numero $p \geq 2$ si dice primo se i suoi unici divisori sono $\pm 1, \pm p$.

$$p \text{ primo} \iff \nexists c \in \mathbb{Z}, c \neq \pm 1, c \neq \pm p : c|p, \quad p \geq 2$$

I numeri coprimi godono di alcune proprietà che verranno sfruttate in dimostrazioni successive. Siano $n, m, q \in \mathbb{Z}$ con n, m non entrambi nulli. Valgono:

1. $(n,m) = 1$ e $n|mq \implies n|q$
2. $(n,m) = 1$ e $n|q$ e $m|q \implies nm|q$

Dimostrazione:

1. $(n,m) = 1 \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z} : (n,m) = xn + ym = 1 \Rightarrow q = qxn + qym \Rightarrow n|mq \Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z} : mq = nh \Rightarrow q = qxn + ynh = n(qx + yh) \Rightarrow n|q$
2. $n|q \Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z} : q = nh \quad \Rightarrow \quad m|q = nh, (n,m) = 1 \overset{(1)}{\implies} m|h \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : h = km \Rightarrow q = nh = nmk \Rightarrow nm|q$

□

Condizione alternativa di primalità

$$p \text{ primo} \iff \forall n, m \in \mathbb{Z} : (p|nm \Rightarrow p|n \text{ o } p|m)$$

Citiamo un'ulteriore proprietà sui numeri primi, della quale si farà menzione più avanti.

$$n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}, p \text{ primo} : p|n_1 n_2 \ldots n_k \implies \exists i \in \{1, \ldots, k\} : p|n_i$$

3.8 Definizione, esistenza e unicità del mcm

Minimo Comune Multiplo

Siano $n, m \in \mathbb{Z}$. Un numero intero M è il minimo comune multiplo tra n e m se:

1. $M \geq 0$
2. $n|M$ e $m|M$
3. $\forall c \in \mathbb{Z} : n|c, m|c \Longrightarrow M|c$

Si utilizzerà il simbolo $[n, m]$ per indicare tale M.

Esistenza e Unicità del Minimo Comune Multiplo

Dati $n, m \in \mathbb{Z}$, esiste unico il loro minimo comune multiplo:

$$n, m \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \exists! M = [n, m]$$

Nota: $n = m = 0 \Longrightarrow [n, m] = 0$. Per n, m non entrambi nulli: $[n, m] = \frac{nm}{(n,m)}$

Dimostrazione: *Esistenza* L'unico multiplo di 0 è sé stesso, dunque se $n = 0 = m$ basta porre $[n, m] = 0$. Sia $M = \frac{nm}{(n,m)} = n'm'(n, m)$. Si è posto $n = n'(n, m)$ e $m = m'(n, m)$. Segue che: $M = nm' = n'm$ e allora $n|M$ e $m|M$.
Sia $c \in \mathbb{Z} : n|c, m|c$. Allora $(n, m)|c$ [1]. Ponendo $c = c'(n, m)$ segue $n'|c'$ e $m'|c'$. Essendo $(n', m') = 1$ per proprietà dei coprimi, grazie ancora alle proprietà dei coprimi $n'm'|c'$ quindi

$$M = n'm'(n, m)|c'(n, m) = c$$

Unicità: Supponiamo che $M, M' \in \mathbb{Z}$ siano due minimi comuni multipli per n, m. Da (2) e (3) della definizione segue che $M|M'$ ma anche, scambiando i ruoli, $M'|M$. Ma allora, per la proprietà della divisibilità, deve essere $M = \pm M'$. Ma per (1) della definizione necessariamente segue che $M = M'$.

□

3.9 Teorema fondamentale dell'aritmetica

Teorema Fondamentale dell'Aritmetica

Ogni naturale $n \geq 2$ può essere fattorizzato in numeri primi (positivi), ovvero può essere scritto come prodotto di numeri primi eventualmente ripetuti:

$$n = p_1 p_2 \dots p_a \quad (a \geq 1 \text{ e } p_i \text{ primo})$$

Inoltre questa scrittura è unica a meno di riordinamento, ovvero: se $n = q_1 \dots q_b$, dove

[1] Per definizione $(n, m)|n, (n, m)|m \Rightarrow \exists h, k \in \mathbb{Z} : n = h(n, m), m = k(n, m)$. Quindi se esiste c tale che $n|c, m|c$ allora $c = in = i(n, m), c = jm = jk(n, m)$ per qualche $i, j \in \mathbb{Z}$. Dunque $(n, m)|c$.

q_j con $1 \leq j \leq b$ sono primi, allora esiste una bigezione $\varphi : \{1, ..., a\} \to \{1, ..., b\}$ tale che $q_j = p_{\varphi(j)}$.

Dimostrazione: Esistenza: Si procede per induzione di seconda forma su $n \geq 2$, considerando la proposizione $P(n)$ = "il numero naturale n si può scrivere $n = p_1...p_a$ per qualche $p_1, ..., p_a$ primi eventualmente ripetuti".
$n = 2$ (base): $n = 2$ è un numero primo, quindi $a = 1$, $p_1 = n = 2$, quindi $n = p_1 = 2$.
$n > 2, \forall 2 \leq k < n \Rightarrow n$ (passo induttivo): sia $n > 2$. Assumiamo di saper scrivere ciascun $2 \leq k < n$ come prodotto di numeri primi eventualmente ripetuti (ipotesi induttiva). Dobbiamo provare che anche n ammette una tale fattorizzazione. Se n è primo, allora $a = 1$ e $p_1 = n$, quindi $n = p_1$. Supponiamo che n non sia primo, allora $n = d_1 d_2$ con $2 \leq d_1, d_2 < n$, quindi per ipotesi induttiva $d_1 = p_1...p_a$ e $d_2 = q_1...q_b$ ($a, b \geq 1$ con $p_1, ..., p_a, q_1, ..., q_b$ numeri primi eventualmente ripetuti). Ma allora $n = d_1 d_2 = p_1...p_a q_1...q_b$.
Unicità: Supponiamo che esista $n \geq 2$ con due fattorizzazioni: $n = p_1...p_a = q_1...q_b$ per qualche $p_1, ..., p_a$, $q_1, ..., q_b$ primi eventualmente ripetuti. Dobbiamo provare che $a = b$ e $p_i = q_i \quad \forall i \in \{1, ..., a\}$ a meno di riordinamento. Osserviamo che $a \leq b$. Si procede per induzione (prima forma) su $a \geq 1$ considerando $P(a)$ = "per ogni $b \geq a$, per ogni $p_1, ..., p_a, q_1, ..., q_b$ primi tali che $p_1...p_a = q_1...q_b$; allora $a = b$ e, a meno di riordinamento, $p_i = q_i \quad \forall i \in \{1, ..., a\}$".
$a = 1$ (base) Sia $b \geq 1$ e siano $p_1, q_1, ..., q_b$ numeri primi tali che $p_1 = q_1...q_b$. Dobbiamo provare che $b = 1$ e $p_1 = q_1$. Supponiamo per assurdo che $b \geq 2$. Vale: $p_1 = q_1(q_2...q_b)$, cioè $q_1 | p_1$. Ma dal momento che essi sono numeri primi, deve essere $p_1 = q_1$, ma qindi $1 = q_2...q_b$, che è assurdo.
$a \geq 1, a \Rightarrow a+1$ (passo induttivo) Supponiamo che vengano dati $p_1, ..., p_a, q_1, ..., q_b$ numeri primi con $b \geq a$ e $p_1...p_a = q_1...q_b$. Allora assumiamo che $a = b$ e, a meno di riordinamento, $p_i = q_i \quad \forall i \in \{1, ..., a\}$ (ipotesi induttiva). Dobbiamo dimostrare che: $P(a+1)$ ="sia $b \geq a+1$ e siano $p_1, ..., p_{a+1}, q_1, ..., q_b$ primi tali che $p_1...p_{a+1} = q_1...q_b$. Allora $b = a+1$ e $p_i = q_i \quad \forall i \in \{1, ..., a+1\}$ a meno di riordinamento". Vale: $p_{a+1} | p_1...p_{a+1} = q_1...q_b$, ma per l'esercizio 10.1 $\exists i \in \{1, ..., b\} : p_{a+1} | q_i$. A meno di riordinare gli indici, supponiamo qui che $p_{a+1} | q_b$. Ma allora $p_{a+1} = q_b$ (ci si ritrova nella stessa situazione della base). Segue che:

$$p_1...p_a p_{a+1} = q_1...q_{b-1}q_b \quad \Rightarrow \quad p_1...p_a = q_1...q_{b-1}$$

Ma $a \leq b - 1 \Leftrightarrow a + 1 \leq b$: per ipotesi induttiva $a = b - 1$ e, a meno di riordinamento, $p_i = q_i \quad \forall i \in \{1, ..., a\}$. Pertanto $a + 1 = b$ e $p_i = q_i \quad \forall i \in \{1, ..., a, a+1\}$.
Verificato il passo induttivo, possiamo concludere che, grazie al principio di induzione di prima forma, la fattorizzazione è unica a meno di riordinamento $\forall n \geq 2$.

□

Perché 1 non è primo?

Con molta probabilità, alcuni lettori si saranno posti suddetta domanda. Di fatto 1 è divisibile solamente per sé stesso, dunque anche per 1, ma dalla definizione potrebbe non essere del tutto chiara la ragione per cui i numeri primi sono maggiori o uguali a 2. Ora che abbiamo illustrato il teorema fondamentale dell'aritmetica, possiamo rispondere mostrando la ragione matematicamente formale di questa scelta convenzionale: assumere 1 come numero primo viole-

rebbe la condizione di unicità della fattorizzazione. Si veda infatti, nella dimostrazione, la base dell'induzione: non si arriverebbe all'assurdo se assumessimo $p_1, q_1, ..., q_b$ primi incluso 1. Infatti, non ci sarebbe modo di dare prova che la fattorizzazione in $q_1, ..., q_b$ contenga lo stesso numero di elementi dell'altra.

4

Congruenza e Aritmetica Modulare

4.1 Congruenza in modulo

Congruenza in Modulo n

Fissiamo $n \in \mathbb{Z}$. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Diciamo che a è congruo a b modulo n e scriveremo:

$$a \equiv b \pmod{n}$$

se vale:

$$n|(a-b)$$

Uno dei significati intuitivi della congruenza in modulo è il seguente: se a è congruo a b modulo n, allora il resto della divisione euclidea di a per n e quello della divisione euclidea di b per n sono uguali. Anche la congruenza è una relazione di equivalenza, che vale su $\mathbb{Z}$. Infatti essa gode delle proprietà (si fissa $n \in \mathbb{Z}$):

1. **Riflessiva:**
$$\forall a \in \mathbb{Z}, a \equiv a \pmod{n}$$
2. **Simmetrica:**
$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{n} \implies b \equiv a \pmod{n}$$
3. **Transitiva:**
$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a \equiv b \pmod{n} \text{ e } b \equiv c \pmod{n} \implies a \equiv c \pmod{n}$$

4.2 Quoziente insiemistico

Prima di procedere con le proprietà della conguenza in modulo, estendiamo il discorso sulle relazioni di equivalenza introducendo nuovi concetti e strumenti molto astratti ma altrettanto utili nella trattazione dell'aritmetica modulare.

Classe di Equivalenza

Siano X un insieme e $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su X. Fissiamo $x \in X$. Definiamo la classe di equivalenza di x in X rispetto a $\mathcal{R}$ (oppure classe di $\mathcal{R}-$equivalente di x, oppure $\mathcal{R}-$classe di x):

$$[x]_{\mathcal{R}} := \{y \in X | y \mathcal{R} x\}$$

Insieme Quoziente

Definiremo l'insieme quoziente di X modulo $\mathcal{R}$ che indicheremo con $X/_{\mathcal{R}}$ ponendo:

$$X/_{\mathcal{R}} := \{[x]_{\mathcal{R}} \in 2^X | x \in X\} = \bigcup_{x \in X} \{[x]_{\mathcal{R}}\} \subseteq 2^X$$

Ovvero l'insieme i cui elementi sono tutte e sole le $\mathcal{R}$-classi in X.

4.3 Classi di congruenza

4.4 Struttura algebrica di $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

Sia $n > 0$. Siano $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ tali che $[a]_n = [a']_n$ e $[b]_n = [b']_n$. Valgono:

1. $[a + b]_n = [a' + b']_n$, ovvero $a + b \equiv a' + b' \pmod{n}$
2. $[a \cdot b]_n = [a' \cdot b']_n$, ovvero $a \cdot b \equiv a' \cdot b' \pmod{n}$

Dalle precedenti proposizioni si possono definire le operazioni di somma e prodotto tra classi di resto:

$$[a]_n + [b]_n = [a + b]_n$$
$$[a]_n[b]_n = [ab]_n$$

Si può altresì dimostrare che le operazioni di somma e prodotto tra classi di congruenza godono delle stesse proprietà di quelle in $\mathbb{Z}$:

1. **Associatività:**
   $([a]_n + [b]_n) + [c]_n = [a]_n + ([b]_n + [c]_n) \quad ([a]_n[b]_n)[c]_n = [a]_n([b]_n[c]_n)$
2. **Commutatività:** $[a]_n + [b]_n = [b]_n + [a]_n \qquad [a]_n[b]_n = [b]_n[a]_n$
3. **Distributività:** $[a]_n([b]_n + [c]_n) = [a]_n[b]_n + [a]_n[c]_n$
4. **Elemento neutro:** $[a]_n + [0]_n = [a]_n \qquad [a]_n[1]_n = [a]_n$
5. **Elemento assorbente:** $[a]_n[0]_n = 0$

Tuttavia è interessante notare altre proprietà peculiari:

1. *Classi nulle come prodotto tra classi non nulle:*

   $$2 \cdot 3 = 0 \text{ in } \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$$

2. *Somma fino a 0:* se $n > 0$, allora:

   $$\sum_{i=1}^{n} 1 = 0 \quad \text{in } \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$$

Da qui il nome intuitivo di *regola dell'orologio*: la caratteristica delle classi di resto è proprio il fatto che i numeri che vi appartengono non si trovano su una retta o semiretta, bensì su una circonferenza. Fu Gauss ad illustrare per primo questa intuizione.

Ricordate dalle elementari quelle regole di divisibilità per 3, 4, 11 e così via? Ecco la dimostrazione della regola di divisibilità per 3 (vogliamo mostrare che un naturale è divisibile per 3 se e solo se la somma delle sue cifre lo è; la dimostrazione delle altre regole è analoga):

Dimostrazione: sia n un naturale espresso in base decimale le cui cifre sono $\varepsilon_0, ..., \varepsilon_k$ dalla meno alla più significativa. Ricordando il teorema di rappresentabilità in base arbitraria dei naturali, vale:

$$[n]_3 = [\varepsilon_0 \cdot 10^0 + ... + \varepsilon_k \cdot 10^k]_3 = [\varepsilon_0]_3[10]_3^0 + ... + [\varepsilon_k]_3[10]_3^k =$$
$$=[\varepsilon_0][1]_3^0 + ... + [\varepsilon_k][1]_3^k = [\varepsilon_0 + ... + \varepsilon_k]_3$$

Scrivendo in modo compatto:

$$[n]_3 = \left[\sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i 10^i\right]_3 = \sum_{i=0}^{k} [\varepsilon_i 10^i]_3 = \sum_{i=0}^{k} [\varepsilon_i]_3[10]_3^i =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} [\varepsilon_i]_3[1]_3^i = \sum_{i=0}^{k} [\varepsilon_i]_3 = \left[\sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i\right]_3$$

Dunque, esprimendo la condizione di divisibilità:

$$[n]_3 = [0]_3 \iff \left[\sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i\right]_3 = [0]_3$$

appunto, n è divisibile per (o multiplo di) 3 se e solo se la somma delle sue cifre è multipla di (o divisibile per) 3.

□

4.5 Teorema cinese del resto

Teolema cinese del lesto

Siano $n, m > 0$ e siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \equiv a \pmod{n} \\ x \equiv b \pmod{m} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ [x]_n = [a]_n \\ [x]_m = [b]_m \end{cases}$$

Indichiamo con S l'insieme delle soluzioni del precedente sistema di congruenze: $S := \{x \in \mathbb{Z} | x \equiv a \pmod{n}, x \equiv b \pmod{m}\}$. Allora il sistema è compatibile se e solo se $a \equiv b \pmod{(n, m)}$, ovvero:

$$S \neq \varnothing \iff (n, m) | a - b$$

Assumiamo che $S \neq \varnothing$ e sia $c \in S$. Allora:

$$\begin{aligned} S &= [c]_{[n,m]} \subseteq \mathbb{Z} \\ &= \{c + k[n,m] \in \mathbb{Z} | k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Dimostrazione: *Compatibilità:* Assumiamo che $S \neq \varnothing \Rightarrow \exists c \in S$ ovvero:

$$\begin{cases} c \equiv a \pmod{n} \\ c \equiv b \pmod{m} \end{cases} \iff \begin{cases} c = a + kn \\ c = b + hm \end{cases}$$

per qualche $h, k \in \mathbb{Z}$. Vale: $0 = a + kn - b - hm \Leftrightarrow -kn + hm = a - b$. Ma dato che $(n,m)|n$ e $(n,m)|m$, per il lemma utile $(n,m)| - kn + hm = a - b$.
Assumiamo ora che valga $(n,m)|a - b$. Vale, per qualche $k \in \mathbb{Z}$:

$$a - b = k(n,m) \tag{4.1}$$

Applichiamo l'algoritmo di euclide con sostituzione a ritroso ad n e m, ottenendo la combinazione lineare:

$$(n,m) = xn + ym \tag{4.2}$$

per qualche $x, y \in \mathbb{Z}$. Grazie a (1) e (2) vale:

$$\begin{aligned} a - b = k(n,m) = k(xn + ym) = kxn + kym \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a + (-kx)n = b + (ky)m =: c \in S \end{aligned}$$

Soluzione: Sia $c \in S$ e proviamo che $S = [c]_{[n,m]} \subseteq \mathbb{Z}$. Mostriamo che $S \subseteq [c]_{[n,m]}$. Sia $c' \in S$. Vale:

$$c \in S \iff \begin{cases} c \equiv a \pmod{n} \\ c \equiv b \pmod{m} \end{cases} \iff \begin{cases} c = a + kn \\ c = b + hm \end{cases}$$

$$c' \in S \iff \begin{cases} c' \equiv a \pmod{n} \\ c' \equiv b \pmod{m} \end{cases} \iff \begin{cases} c' = a + k'n \\ c' = b + h'm \end{cases}$$

per qualche $h, h', k, k' \in \mathbb{Z}$. Vale:

$$c' - c = k'n - kn = (k' - k)n \quad \text{e} \quad c' - c = h'm - hm = (h' - h)m$$

dunque

$$n|c' - c, m|c' - c \Longrightarrow [n,m]|c' - c \iff c' \equiv c \pmod{[n,m]} \iff c' \in [c]_{[n,m]}$$

Mostriamo che $[c]_{[n,m]} \subseteq S$. Sia $c' \in [c]_{[n,m]}$, ovvero $c' = c + k[n,m]$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Vale:

$$\begin{aligned} [c']_n = \\ &= [c + k[n,m]]_n = \\ &= [c]_n + [k[n,m]]_n = \\ &= [a]_n + [k]_n \cdot [[n,m]]_n = \\ &= [a + k \cdot 0]_n = [a]_n \end{aligned}$$

Lo stesso procedimento vale per m: $[c']_m = [b]_m$. Dunque $c' \in S$. Avendo mostrato che $S \subseteq [c]_{[n,m]}$ e $[c]_{[n,m]} \subseteq S$, allora $S = [c]_{[n,m]} \subseteq \mathbb{Z}$.

□

4.6 Invertibilità

4.7 La funzione Φ di Eulero

4.8 Teorema di Fermat-Eulero

4.9 RSA

4.10 Metodi di calcolo: orbita di una classe

Le proprietà dell'aritmetica modulare consentono di effettuare calcoli (in modulo) a mano nonostante ci si dovesse imbattere in numeri estremamente grandi. Anche se il calcolo manuale non riscuote molto successo al giorno d'oggi, esistono ancora alcuni sistemi, come le calcolatrici, che impiegano tecniche di aritmetica modulare per semplificare i calcoli e trattare numeri altrimenti enormi rispetto alla capacità di rappresentazione digitale del dispositivo. Tecniche di calcolo simili si fondano su alcuni principi esaminati in questa parte:

- equivalenza tra classi di resto;
- somma e prodotto tra classi di resto;
- teorema di Fermat-Eulero, insieme a generalizzazioni e corollari;
- orbita.

Supponiamo di voler calcolare il resto della divisione intera tra 4^{2465} e 3. Calcolare esplicitamente il dividendo non sarebbe molto efficiente, ma, conoscendo ora l'aritmetica modulare, sappiamo che il problema è interpretabile come segue:

$$\text{si trovi il minimo } r \in \mathbb{Z}, r \geq 0 : [r]_3 = [4^{2465}]_3$$

Dunque applichiamo le proprietà algebriche: $[4^{2465}]_3 = [4]_3^{2465} = [1]_3^{2465} = [1^{2465}]_3 = [1]_3 \Rightarrow r = 1$. Supponiamo ora di voler identificare la cifra delle unità di 7^{222}. Con un po' di ragionamento si imposta il problema come segue[1]:

$$d \in \{0, ..., 9\} : 7^{222} \equiv d \pmod{10}$$

Notiamo che 7 e 10 sono coprimi, quindi per il teorema di Fermat-Eulero $7^{\Phi(10)} \equiv 1 \pmod{10}$, dove $\Phi(10) = \Phi(2 \cdot 5) = 4$. Ma allora $7^{222} \equiv 7^{4 \cdot 55 + 2} \equiv (7^4)^{55} \cdot 7^2 \equiv 1^{55} \cdot 49 \equiv 49 \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow d = 9$.

Illustriamo il concetto di orbita di una classe di resto con la seguente tabella, prendendo l'esempio di $[8]_{77}$:

[1] In un naturale espresso in base decimale, la cifra delle unità corrisponde al resto della divisione tra il numero stesso e 10.

k	**Rappresentante di** $[8^k]_{77}$
1	8
2	64
3	50
4	15
5	43
6	36
7	57
8	71
9	29
10	1
11	8
12	64
...	...

Notiamo che all'esponente 10 abbiamo ottenuto il rappresentante 1. Per i principi dell'aritmetica modulare ciò accade sempre. Ma quello che è ancor più sorprendente è che questa successione è periodica (provate a proseguire con i calcoli con $k > 10$): questa è l'orbita della classe $[8]_{77}$ elevata a potenze positive. La formulazione rigorosa di questa proprietà si collega al teorema di Carmichael.

La tecnica dell'orbita permette, in alcuni casi, di velocizzare i calcoli in modulo in due modi: trovare rappresentanti canonici ridotti e agevoli da maneggiare o raggiungere la classe 1 senza ripiegare sul teorema di Fermat-Eulero. Questa tecnica può tornare utile in alcuni contesti (si vedano gli esercizi) ma non è sempre conveniente. Per esempio, l'orbita potrebbe essere più lunga di quello che si potrebbe pensare.

Parte II

Grafi

5

Introduzione alla Teoria dei Grafi

5.1 Definizioni preliminari

Non introdurremo i grafi nella classica maniera grafica e intuitiva (punti collegati tra loro da semirette), ma sfrutteremo il linguaggio insiemistico precedentemente studiato al fine di comprendere le proprietà e le potenzialità di questi oggetti matematici, estremamente utili in informatica.

Insieme dei 2-sottoinsiemi

Dato un insieme V, indichiamo con

$$\binom{V}{2} := \{A \in 2^V \,|\, |A| = 2\}$$

(che si dice V su 2) l'insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi con due elementi che si possono estrarre da V.

5.2 Morfismi e isomorfismi

6

Congiungibilità

Passeggiate, cammini, cicli

Sia $G = (V, E)$ un grafo. Una successione finita ordinata $(v_0, v_1, ..., v_n)$ di vertici di G (cioè $v_0, v_1, ..., v_n \in V$) si dice:

- **Passeggiata in** G se vale: $n = 0$ oppure $n \geq 1$ e $\{v_i, v_{i+1}\} \in E \ \forall i \in \{0, ..., n-1\}$.
- **Cammino in** G se è una passeggiata in G e $v_i \neq v_j \ \forall i, j \in \{0, ..., n\}, i \neq j$.
- **Ciclo in** G se è una passeggiata in G e $n \geq 3, v_n = v_0, (v_0, ..., v_{n-1})$ è un cammino in G.

6.1 Congiungibilità per cammini e passeggiate

Equivalenza tra congiungibilità per cammini e passeggiate

Due vertici v, w sono congiungibili mediante un cammino se e solo se lo sono mediante una passeggiata.

Dimostrazione: Se v è congiungibile a w in G per cammini, allora lo è anche per passeggiate, perché un cammino è anche una passeggiata.
Supponiamo viceversa che v sia congiungibile con w in G tramite una certa passeggiata P. Osserviamo che, se $v = w$, allora è sufficiente considerare il cammino banale (v). Supponiamo $v \neq w$. Consideriamo il seguente insieme:

$$\mathcal{P} := \{Q | Q \text{ è una passeggiata in } G \text{ da } v \text{ a } w\}$$

Per ipotesi $P \in \mathcal{P} \implies \mathcal{P} \neq \varnothing$. Definiamo il seguente insieme *delle energie* degli elementi di $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{A} := \{l(Q) \in \mathbb{N} | Q \in \mathcal{P}\} \subseteq \mathbb{N}$$

dove $l(Q) =$ "numero di lati percorsi durante la passeggiata Q". Ma $l(P) \in \mathcal{A} \implies \mathcal{A} \neq \varnothing$. Grazie al teorema del buon ordinamento dei naturali,

$$\exists \min \mathcal{A} =: m \quad \implies \quad \exists P_0 \in \mathcal{P} : l(P_0) = m \leq l(Q) \quad \forall Q \in \mathcal{P}$$

Dimostriamo che $P_0 = (v_0, ..., v_n), v_0 = v, v_n = w$ è un cammino in G. Supponiamo per assurdo che esso non lo sia. Allora (ricordando però che $v \neq w$) $\exists i, j \in \{0, ..., n\}$: $i \neq j, v_i = v_j$ e possiamo supporre $i < j$ a meno di scambio. Si consideri allora $P_1 = (v_0, ..., v_i, v_{j+1}, ..., v_n)$, che è una passeggiata: dato che P_0 è una passeggiata, $\{v_h, v_{h+1}\} \in E(G)$ per ogni $0 \leq h < n$, e dato che $v_i = v_j$, allora $\{v_i, v_{j+1}\} = \{v_j, v_{j+1}\} \in E(G)$. P_1 congiunge v a w (sappiamo che $v_0 = v, v_n = w$), quindi $P_1 \in \mathcal{P}$. Ma allora

$$l(P_1) = l(P_0) - (j - i) = m - (j - i) < m = \min \mathcal{A}$$

che contraddice la condizione di minimalità imposta su P_0. Segue che P_0 è un cammino in G, quindi v, w sono congiungibili anche per cammino in G.

□

6.2 La relazione di congiungibilità

La congiungibilità tra vertici è una relazione di equivalenza

Sia $G = (V, E)$ un grafo. Definiamo la relazione biunivoca $\sim$ sull'insieme V dei vertici ponendo:

$$v \sim w \text{ se } v \text{ è congiungibile con } w \text{ in } G$$

La relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza su V.

Dimostrazione: Sia $G = (V, E)$ un grafo e prendiamo $v, v', v'' \in V$, $\sim :=$ relazione di congiungibilità.

1. **Riflessività:** $\forall v \in V$ è sufficiente considerare la passeggiata banale $B = (v)$, dunque $v \sim v$.
2. **Simmetricità:** $v \sim v' \implies \exists P = (v_0 = v, v_1, ..., v_{n-1}, v_n = v')$ passeggiata in G. Basta dunque considerare la passeggiata "inversa" $P' = (v_n = v', v_{n-1}, ..., v_0 = v) \implies v' \sim v$.
3. **Transitività:** $v \sim v', v' \sim v'' \implies \exists P_1 = (v_0 = v, ..., v_n = v'), P_2 = (u_0, = v', ..., u_m = v'')$. Si considera dunque $Q = (v_0 = v, ..., v_n = v', u_1, ..., u_m = v'')$, che è una passeggiata perché tutti gli elementi consecutivi di Q rappresentano vertici che sono adiacenti nelle passeggiate $P_1, P_2 \implies v \sim v''$.

□

7

Proprietà dei Grafi Finiti

7.1 Relazione fondamentale dei grafi finiti

Grafo finito

Un grafo G si dice finito se $V(G)$ è finito (numero finito di vertici).

Osservazione. Un grafo finito ha un numero finito di lati: G finito $\implies V(G)$ finito $\implies \binom{V(G)}{2}$ finito $\implies E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$ finito $\implies E(G)$ finito (lemma dei cassetti). Quindi $|E(G)|$ è finito.

Osservazione. Esistono grafi infiniti che hanno numero finito di lati: $(\mathbb{N}, \varnothing)$. Quindi avere lati finiti non implica la condizione di essere grafo finito.

Grado di un vertice

Sia $G = (V, E)$ un grafo finito e sia $v \in V$. Definitamo il grado di v in G come segue:

$$\deg_G(v) := |\{e \in E | v \in e\}|$$

ovvero il numero di lati ai quali v appartiene.

Score di un grafo

Si chiama score di un grafo il vettore contenente il grado di ogni vertice, eventualmente riordinati:

$$\text{Score}(G) := (\deg_G(v_1), ..., \deg_G(v_n)) = (d_1, ..., d_n)$$

Lo score che ordina i gradi in modo crescente o al più costante è lo **score canonico**: $d_1 \leq ... \leq d_n$.

Sottolineamo la relazione tra score di grafi isomorfi. Se G e G' sono isomorfi allora hanno lo stesso score:

$$G \cong G' \implies \text{Score}(G) = \text{Score}(G')$$

Non vale l'implicazione inversa.

Relazione fondamentale dei grafi finiti

Sia $G = (V, E)$ un grafo finito. Allora

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$

Dimostrazione: Scriviamo esplicitamente V e E:

$$V = \{v_1, ..., v_n\} \qquad E = \{e_1, ..., e_k\}$$

Dunque $n = |V|$ e $k = |E|$. Definiamo $m_{ij} \in \{0, 1\}$ per ogni $i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., k\}$:

$$m_{ij} := \begin{cases} 0 & v_i \notin e_j \\ 1 & v_i \in e_j \end{cases}$$

Ottenendo la *matrice di adiacenza*:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1k} \\ m_{21} & m_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & \dots & m_{nk} \end{bmatrix}$$

Si osserva che la somma totale $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} m_{ij}$ degli elementi della matrice non dipende dalla precedenza tra righe e colonne. Sommando una riga si ottiene il grado del rispettivo vertice, mentre dalle colonne si ottiene sempre 2, dal momento che ogni lato congiunge due soli vertici:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} m_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} m_{ij} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \deg_G(v_i) = \sum_{j=1}^{k} 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2k = 2|E|$$

□

Osservazione. Una banale conseguenza della relazione fondamentale dei grafi finiti è la semplicità con la quale si può calcolare $|E|$ (dato lo score d), cioè il numero di lati del grafo G:

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg_G(v)$$

7.2 Lemma delle strette di mano

Immaginiamo di essere ad una festa. Di norma ci si stringe spesso la mano tra gli invitati, ma il padrone di casa si diverte a verificare ogni volta una proprietà curiosa. Egli chiede sempre

ad ogni ospite di contare il numero di persone distinte con le quali ha stretto la mano. Il padrone scopre sempre che il numero di invitati che hanno stretto la mano ad un numero dispari di coetanei è *sempre* pari. Da qui il nome intuitivo del lemma delle strette di mano.

Lemma delle strette di mano

In un grafo finito il numero di vertici di grado dispari è pari.

Dimostrazione: Sia $G = (V, E)$. Definiamo:

$$P := \{v \in V | \deg_G(v) \text{ pari}\} \qquad D := \{v \in V | \deg_G(v) \text{ dispari}\}$$

In particolare questi formano una partizione di V: $V = P \cup D$ e $P \cap D = \varnothing$. Applicando la relazione fondamentale otteniamo:

$$\sum_{v \in P} \deg_G(v) + \sum_{v \in D} \deg_G(v) = 2|E| \iff \sum_{v \in D} \deg_G(v) = 2|E| - \sum_{v \in P} \deg_G(v)$$

Osserviamo che nel membro di destra abbiamo una quantità pari alla quale si sottrae un'altra quantità pari. Questo implica che anche il membro di sinistra è pari, ma essendo una somma di elementi dispari, i suoi addendi devono comparire in numero pari.

□

Le applicazioni di questo lemma sono piuttosto vantaggiose in ambito informatico. Supponiamo che, tra le specifiche di una rete che si intende costruire, vengano forniti i numeri di collegamenti (cavi e altro) per ogni dispositivo appartenente alla rete, sotto forma di score:

$$s = (0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3)$$

Notiamo a colpo d'occhio che dovrebbero esistere 5 nodi di grado dispari, ma questo non sarebbe possibile per il lemma delle strette di mano.

7.3 Grafi 2-connessi e hamiltoniani

Sia $G = (V, E)$ un grafo con almeno due vertici. Scegliamo $v \in V$. Definiamo il grafo $G - v$, ottenuto da G cancellando il vertice v. Ponendo:

$$V(G - v) := V(G) \setminus \{v\} \qquad E(G - v) := E(G) \setminus \{e \in E(G) | v \in e\}$$

Intuitivamente, $G - v$ è il grafo risultante dalla rimozione di un suo vertice v e della cancellazione dei lati ai quali esso appartiene.

Grafo 2-connesso

Sia $G = (V, E)$ con almeno 3 vertici. Diciamo che G è 2-connesso se $G - v$ è connesso $\forall v \in V$.

Un grafo 2-connesso è semplicemente un grafo che, tolto un qualsiasi vertice (uno soltanto), rimane sempre connesso.

Può essere desiderabile avere una rete di computer configurata come un grafo 2-connesso. In tal modo, infatti, ammettendo che i guasti e le manutenzioni affliggano sempre un solo nodo alla volta, è garantita la connettività ai nodi rimanenti, senza che un gruppo di essi rimanga isolato.

Grafo Hamiltoniano

Sia $G = (V, E)$ con almeno 3 vertici. Diciamo che G è hamiltoniano se ammette almeno un **ciclo hamiltoniano**, ovvero un ciclo in G che attraversa tutti i suoi vertici.

Un grafo hamiltoniano è anche 2-connesso. Questo perché, ammettendo un ciclo hamiltoniano, tale ciclo è di per se stesso 2-connesso. Vale in generale la seguente catena di implicazioni (ma non quella inversa):

$$G \text{ hamiltoniano} \implies G \text{ 2-connesso} \implies G \text{ connesso}$$

Foglia

Sia $G = (V, E)$ un grafo. Un vertice $v \in V$ si dice **foglia** di G se $\deg_G(v) = 1$.

Supponiamo che $G = (V, E)$ sia 2-connesso. Allora G non può avere foglie. Infatti, si supponga per assurdo che $\exists v \in V$ foglia di G, cioè $\deg_G(v) = 1$. Allora $\exists! w \in V, w \neq v : \{v, w\} \in E$. Considerando il grafo $G - w$, si osserva che v è un vertice isolato di $G - w$, dunque $G - w$ è sconnesso.

Osservazione. Lo stesso ragionamento vale per i grafi Hamiltoniani. Intuitivamente, se G fosse un grafo hamiltoniano, allora esisterebbe un ciclo hamiltoniano, che cioè attraversa ogni vertice senza mai passare sugli stessi lati. Ma allora non possono esistere foglie in G, altrimenti il ciclo non potrebbe chiudersi (si potrebbe solo *entrare*, ma non *uscire*, dalla foglia).

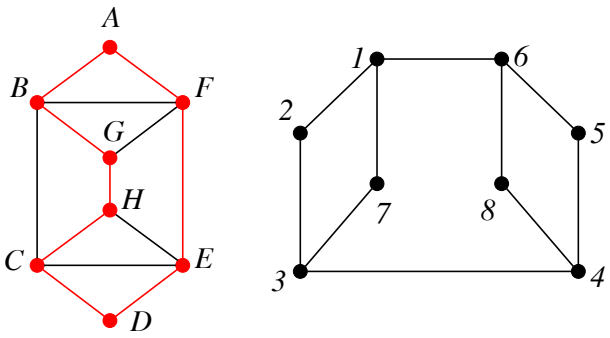


Figura 7.1: Un grafo hamiltoniano (a sinistra, con un ciclo evidenziato) e un grafo 2-connesso (a destra). Si provi a verificare che quello a destra è effettivamente un grafo 2-connesso cancellando un vertice qualsiasi (e i lati annessi)

8

Alberi

8.1 Alberi e proprietà

Alberi e Foreste

- **Foresta**: un grafo senza cicli.
- **Albero**: un grafo *connesso* e senza cicli.

Osservazione. Un grafo è una foresta se e solo se ogni sua componente connessa è un albero.

Sia infatti G un grafo con proprietà di foresta; allora G è un grafo senza cicli; se G è connesso, allora esso è anche un albero; altrimenti, G è costituito da più di una componente connessa; essendo G senza cicli per ipotesi, ogni componente di G deve essere un albero. Si supponga ora che G sia un grafo connesso con proprietà di albero; G allora non ha cicli ed è una foresta; sia invece G sconnesso tale per cui ogni componente sia un albero; allora ogni componente di G (e G stesso) non ha cicli e quindi è una foresta.

Teorema sugli alberi

Sia $T = (V, E)$ un grafo non connesso finito. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. T è un albero.
2. $\forall v, v' \in V, \exists!$ cammino in T che congiunge v, v'.
3. **Minimalità della connessione:**
   T è connesso e $\forall e \in E, T - e := (V, E \setminus \{e\})$ è sconnesso.
4. **Massimalità rispetto all'assenza di cicli:**
   T non ha cicli e $\forall e \in \binom{V}{2} \setminus E, T + e := (V, E \cup \{e\})$ possiede cicli.

Lemma delle foglie

Sia T un albero finito avente almeno due vertici. Allora T possiede almeno due foglie.

Dimostrazione: Sia $\mathcal{P}$ l'insieme di tutti i cammini possibili in T. Poiché T è finito, $\mathcal{P}$ è finito. Dunque esiste un cammino $P = (v_0, ..., v_k) \in \mathcal{P}$ che abbia lunghezza massima k:

$$k = l(P) \geq l(P') \quad \forall P' \in \mathcal{P}$$

Dimostriamo che v_0, v_k sono due foglie di T. Supponiamo che v_0 non sia una foglia. Quindi $\deg_T(v_0) \geq 2$. Sia allora v' vertice del secondo lato $\{v_0, v'\}$. $v' \notin \{v_1, ..., v_k\}$, perché altrimenti si creerebbero cicli. Ma allora si otterrebbe una passeggiata $P' = (v', v_0, ..., v_k)$ di lunghezza maggiore di P. Quindi necessariamente $\deg_T(v_0) = 1$.

□

Osservazione. Il *Lemma delle foglie* è falso se non si assume che l'albero sia finito. Esistono alberi infiniti che possiedono una o nessuna foglia (si prenda come esempio un cammino infinito).

Lemma della rimozione delle foglie (ex 20.8)

Se G è un grafo connesso e v è una sua foglia, allora $G - v$ è connesso.

Corollario della rimozione delle foglie (ex 20.9)

Sia T un albero e sia v una sua foglia. Allora $T - v$ è ancora un albero.

8.2 Alberi e formula di Eulero

Teorema di caratterizzazione degli alberi finiti con formula di Eulero

Sia $T = (V, E)$ un grafo finito. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. T è un albero;
2. $\forall v, v' \in V, \exists!$ cammino in$T$ che congiungev, v';
3. Minimalità della connessione;
4. Massimalità rispetto all'assenza di cicli;
5. T **è connesso e vale la seguente formula di Eulero:**

$$|V| - 1 = |E|$$

Dimostrazione: Mostriamo che (1) $\Rightarrow$ (5). Procediamo per induzione su $|V(T)|$.

$|V(T)| = 1$ (**base induzione**): T consiste in un vertice isolato, dunque $|V(T)| = 1$ e $|E(T)| = 0 \Longrightarrow |V(T)| - 1 = 1 - 1 = 0 = |E(T)|$.

$|V(T)| \geq 2, |V(T)| - 1 \Longrightarrow |V(T)|$ (**passo induttivo**) Sia T un albero con almeno 2 vertici. Assumiamo che la formula di Eulero valga su tutti gli alberi che possiedono un vertice in meno di T (ipotesi induttiva). Grazie al lemma 20.6, T possiede almeno due foglie v, w. Grazie al *Corollario della rimozione delle foglie*, $T - v$ è un albero. Segue che $|V(T - v)| = |V(T)| - 1$, dunque per ipotesi induttiva vale la formula di Eulero per $T - v$:

$$\begin{gathered} |V(T-v)| - 1 = |E(T-v)| \Longrightarrow 1 + |V(T-v)| - 1 = 1 + |E(T-v)| \\ \Downarrow \\ |V(T)| - 1 = |E(T)| \end{gathered}$$

Il passo induttivo è verificato, dunque grazie al principio di induzione di prima forma l'implicazione (1)$\Rightarrow$(5) è sempre vera.

Mostriamo ora che (5) $\Rightarrow$ (1). Procediamo per induzione su $|V(T)|$.

$|V(T)| = 1$ (base induzione): T possiede un solo vertice: è un albero e vale (1).

$|V(T)| \geq 2, |V(T)| - 1 \Longrightarrow |V(T)|$. Sia T un grafo finito connesso con almeno due vertici e che soddisfa la formula di Eulero. Assumiamo che l'implicazione (5)$\Rightarrow$(1)

sia vera per tutti i grafi finiti connessi con esattamente $|V(T)| - 1$ vertici e per i quali vale la formula di Eulero (ipotesi induttiva). Mostriamo che T ammette almeno una foglia. Supponiamo che T non abbia foglie; segue che:

$\forall w \in V(T)$
$\deg_T(w) \neq 0$ per ipotesi sulla connessione e sul numero minimo di vertici
$\deg_T(w) \neq 1$ per supposizione sull'assenza di foglie
$\implies \deg_T(w) \geq 2$

Vale, per ipotesi (vale Eulero per T)* e per la relazione fondamentale dei grafi finiti**:

$$2(|V(T)| - 1) \overset{*}{=} 2|E(T)| \overset{**}{=} \sum_{w \in V(T)} \deg_T(w) \geq \sum_{w \in V(T)} 2 = 2|V(T)|$$

Il che è assurdo, a causa del fatto che si è assunta l'assenza di foglie. Quindi $\exists v$ foglia di T. Allora per il *Lemma della rimozione delle foglie* $T - v$ è connesso. Siccome T soddisfa la formula di Eulero,

$$(|V(T)| - 1) - 1 = |E(T)| - 1 \Rightarrow |V(T - v)| - 1 = |E(T - v)|$$

quindi $T - v$ soddisfa la formula di Eulero e ad esso si può applicare l'ipotesi induttiva: $T - v$ è un albero. T non può avere un ciclo, perché tale ciclo dovrebbe attraversare vertici di grado maggiore o uguale di 2, dunque non può attraversare la foglia. Ma per ipotesi $T - v$ è un albero, dunque tale ciclo non può esistere. Allora T è un albero. Il passo induttivo è verificato, quindi l'implicazione inversa è sempre vera grazie al principio di induzione di prima forma.

□

8.3 Alberi di copertura

Albero di copertura

Sia G un grafo. Un sottografo T di G è un albero di copertura (spannig tree) se:

- T è un albero.
- $V(T) = V(G)$

La Figura 8.1 mostra un grafo G ed evidenzia un suo possibile spanning tree.

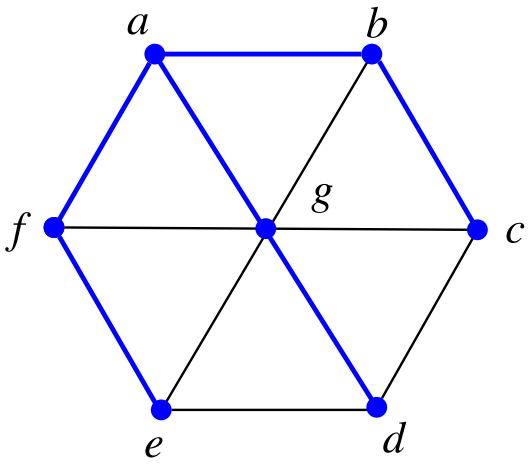


Figura 8.1: Grafo G con spanning tree (blu)

Osservazione. Se G ammette spanning treee, allora G è connesso. Infatti, se T è uno spanning tree per G, allora $V(T) \subseteq V(G)$ e $E(T) \subseteq E(G)$. Quindi un cammino in T è anche un cammino in G. Poiché T è connesso (per definizione di albero), allora lo è anche G.

Esistenza dell'albero di copertura per grafi connessi finiti

Se G è un grafo finito connesso, allora esso ammette un albero di copertura.

Dimostrazione: Sia G un grafo finito e connesso. Definiamo l'insieme

$$\mathcal{C} := \{C | C \text{ è un sottografo connesso di } G \text{ e } V(C) = V(G)\}$$

Mostriamo che in $\mathcal{C}$ esiste un albero. Osserviamo che $\mathcal{C} \neq \varnothing$ perché $G \in \mathcal{C}$ grazie all'ipotesi iniziale. Definiamo

$$S := \{n \in \mathbb{N} | n = |E(C)|, C \in \mathcal{C}\} \subset \mathbb{N}$$

Osserviamo che $|E(G)| \in S \implies S \neq \varnothing$. Per il teorema del buon ordinamento dei naturali

$$\exists m := \min S \implies \exists \overline{C} \in \mathcal{C} : |E(\overline{C})| = m \leq |E(C)| \quad \forall C \in \mathcal{C}$$

Mostriamo che $\overline{C}$ è un albero. Supponiamo per assurdo che non lo sia. Quindi grazie al teorema 20.4

$$\exists e \in E(\overline{C}) : \overline{C} - e = (V(\overline{C}), E(\overline{C}) \setminus \{e\}) \in \mathcal{C}$$

Ma allora $|E(\overline{C} - e)| = |E(\overline{C})| - 1 \in S$ e avremmo $|E(\overline{C})| \leq |E(\overline{C})| - 1$, che è assurdo.

□

Parte III

Esercizi

9

Problemi di Insiemistica

9.1 Dimostrazioni per induzione

A tempo di stesura della presente dispensa, la dimostrazione per induzione costituisce l'unica tipologia di esercizio appartenente all'ambito degli insiemi e richiesta frequentemente in sede d'esame. La dimostrazione per induzione eccelle qualora rispetti tutti i punti qui sotto elencati:

1. Dichiarazione della proposizione che si intende dimostrare: generalmente si tratta della *formuletta* indicizzata su n. Si tratta di un passo essenziale per far comprendere a coloro che leggono *cosa* intendiamo dimostrare.
2. Dichiarazione dell'insieme entro il quale dimostrare la validità della proposizione.
3. Verifica della **base dell'induzione**.
4. Dichiarazione dell'**ipotesi induttiva** e verifica del **passo induttivo** mediante l'ipotesi.
5. Conclusioni: terminare il passo induttivo non basta; di fatto la conclusione consiste nel constatare che, verificati caso base e passo induttivo, la validità della proposizione si fonda sul meccanismo del principio di induzione (bisogna dunque nominarlo).

Esempio

Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che, per ogni intero $n \geq 0$, vale:

$$\sum_{k=0}^{n} 4k3^k = 3 + 3^{n+1}(2n-1)$$

Soluzione (dimostrazione): si procede per induzione su $n \in \mathbb{N}$, considerando la proposizione

$$P(n) := \left(\sum_{k=0}^{n} 4k3^k = 3 + 3^{n+1}(2n-1) \right)$$

$\underline{n = 0 \text{ (base dell'induzione)}}$ Si deve verificare $P(0)$, ovvero che $\sum_{k=0}^{0} 4k3^k = 3 + 3^{0+1}(2 \cdot 0 - 1)$. Vale:

$$\sum_{k=0}^{0} 4k3^k = 4 \cdot 0 \cdot 3^0 = 0$$
$$3 + 3^{0+1}(2 \cdot 0 - 1) = 3 + 3(-1) = 3 - 3 = 0$$

Segue che $\sum_{k=0}^{0} 4k3^k = 0 = 3 + 3^{0+1}(2 \cdot 0 - 1)$, dunque la base dell'induzione è verificata.
$\underline{n \in \mathbb{N}, n \implies n+1 \text{ (passo induttivo)}}$ Si assume ora che l'uguaglianza espressa da $P(n)$ sia vera per qualche $n \in \mathbb{N}$ (ipotesi induttiva). Si deve mostrare che vale $P(n+1)$, cioè:

$$\sum_{k=0}^{n+1} 4k3^k = 3 + 3^{(n+1)+1}(2(n+1)-1)$$

Vale:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} 4k3^k &= 4(n+1)3^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} 4k3^k \overset{\text{ipotesi induttiva}}{=} \\ &= 4(n+1)3^{n+1} + 3 + 3^{n+1}(2n-1) = \\ &= 3 + 3^{n+1}(2n - 1 + 4(n+1)) = \\ &= 3 + 3^{n+1}(6n+3) = \\ &= 3 + 3^{n+1}3(2n+1) = \\ &= 3 + 3^{(n+1)+1}(2(n+1) - 1)\end{aligned}$$

Dunque vale $P(n+1)$ e il passo induttivo è verificato. Grazie al principio di induzione di prima forma, $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

10

Problemi di Aritmetica Modulare

10.1 Sistemi di congruenze semplici

Sistemi di questo genere richiedono l'applicazione del teorema cinese del resto, la cui dimostrazione fornisce il procedimento per raggiungere la soluzione. Pertanto i punti essenziali sono:

1. Identificare e dichiarare l'insieme delle soluzioni.
2. Verificare la compatibilità.
3. Calcolare una soluzione particolare.
4. Costruire l'insieme delle soluzioni.

Esempio

Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 100 & (\text{mod } 150) \\ x \equiv 65 & (\text{mod } 85) \end{cases}$$

Si dica inoltre, motivando la risposta, se il precedente sistema una soluzione divisibile per 2551.

Soluzione: Sia $S \subset \mathbb{Z}$ l'insieme delle soluzioni del sistema di cui sopra e calcoliamolo. Verifichiamo anzitutto la compatibilità del sistema. Grazie al teorema cinese del resto vale la relazione $S \neq \varnothing \iff (150, 85) | 100 - 65$. Calcoliamo dunque $(150, 85)$ tramite fattorizzazione:

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2, 85 = 5 \cdot 17 \Longrightarrow (150, 85) = 5 | 100 - 65 = 35$$

Dunque, grazie al teorema cinese del resto, $S \neq \varnothing$. Inoltre vale:

$$(1)\ 100 - 65 = 7 \cdot 5 = 7(150, 85)$$

Calcoliamo una soluzione particolare $c \in S$. Lanciamo l'algoritmo di Euclide su 150 e 85:

$$\begin{aligned} 150 &= 85 + 65 \\ 85 &= 65 + 20 \\ 65 &= 3 \cdot 20 + \mathbf{5} \\ 20 &= 4 \cdot 5 + 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5 &= 65 - 3 \cdot 20 = \\ &= 65 - 3 \cdot (85 - 65) = 4 \cdot 65 - 3 \cdot 85 \\ &= 4 \cdot (150 - 85) - 3 \cdot 85 = 4 \cdot 150 - 7 \cdot 85 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (150, 85) = 4 \cdot 150 - 7 \cdot 85\ (2) \end{aligned}$$

Grazie alle uguaglianze (1) e (2) vale:

$$\begin{gathered} 100 - 65 = 7 \cdot (150, 85) = 28 \cdot 150 - 49 \cdot 85 \\ \Updownarrow \\ 100 - 28 \cdot 150 = 65 - 49 \cdot 85 = -4100 =: c \in S \end{gathered}$$

Grazie al teorema cinese del resto, l'insieme delle soluzioni può essere costruito come segue:

$$S = [-4100]_{[150,85]} \subseteq \mathbb{Z} \qquad \text{dove} \qquad [150, 85] = \frac{150 \cdot 85}{(150, 85)} = 2550$$

Dunque:

$$S = [-4100 + 2 \cdot 2550]_{[150,85]} = [1000]_{[2550]} \subseteq \mathbb{Z}$$

Alternativamente, $S = \{1000 + 2550k \in \mathbb{Z} | k \in \mathbb{Z}\}$.
Per rispondere alla seconda domanda, si può procedere in più modi. Notiamo che la richiesta è equivalente a determinare se l'insieme delle soluzioni F del seguente sistema di congruenze è non vuoto:

$$\begin{cases} x \equiv 1000 & (\text{mod } 2550) \\ x \equiv 0 & (\text{mod } 2551) \end{cases}$$

Come prima applichiamo il teorema cinese del resto per verificare la compatibilità (non è necessario calcolare la soluzione). Osserviamo che $(2550, 2551) = 1$, perché 2551 è successivo a 2550. Verifichiamo:

$$(2550, 2551) = 1 | 1000 - 0 = 1000$$

Allora $F \neq \varnothing$ grazie al teorema cinese del retsto ed esistono soluzioni al primo sistema divisibili per 2551.

10.2 Congruenze con potenza e metodo RSA

Queste congruenze sono risolvibili in vari modi. Vedremo solo la soluzione mediante RSA, che tuttavia non risolve tutte le congruenze con potenza. Il procedimento generale per risolvere questi esercizi è il seguente:

1. Dichiarare l'insieme delle soluzioni.
2. Verificare l'applicabilità del metodo RSA.
3. Costruire l'insieme delle soluzioni.
4. Calcolare l'esponente.
5. Calcolare esplicitamente la soluzione, eventualmente ricorrendo al metodo dell'orbita.

Esempio

Si determinino tutte le soluzioni della seguente congruenza e si calcoli la minima soluzione positiva:

$$x^7 \equiv 59 \pmod{62}$$

Soluzione: Sia $S \subseteq \mathbb{Z}$ l'insieme delle soluzioni della congruenza di cui sopra e calcoliamolo. Verifichiamo l'applicabilità del metodo RSA, ovvero controlliamo se valgono le seguenti uguaglianze:

$(59, 62) \stackrel{?}{=} 1$: osserviamo che 59 è primo e $59 \not| 62$ dunque $(59, 62) = 1$.

$(7, \Phi(62)) \stackrel{?}{=} 1$: applicando la moltiplicatività della Phi di Eulero:
$\Phi(62) = \Phi(2 \cdot 31) = \Phi(2)\Phi(31) = (2-1)(31-1) = 30$
7 è primo e $7 \not| 30$ dunque $(7, \Phi(62)) = 1$.

Il metodo RSA è applicabile. La soluzione può allora essere costruita nel seguente modo:

$$S = [59^d]_{62} \subseteq \mathbb{Z} \quad d > 0, d \in [7]^{-1}_{\Phi(62)}$$

Calcoliamo d. Applichiamo l'algoritmo di Euclide a 7 e $\Phi(62) = 30$:

$$\begin{aligned} 30 &= 4 \cdot 7 + 2 \\ 7 &= 3 \cdot 2 + \mathbf{1} \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1 &= 7 - 3 \cdot 2 = \\ &= 7 - 3 \cdot (30 - 4 \cdot 7) = \\ &= 13 \cdot 7 - 3 \cdot 30 \end{aligned}$$

Vale:

$$1 = 13 \cdot 7 + (-3) \cdot 30 \Longrightarrow [1]_{30} = [13 \cdot 7]_{30} + [-3 \cdot 30]_{30} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow [1]_{30} = [13]_{30}[7]_{30} \Longrightarrow [7]^{-1}_{30} = [13]_{30}$$

Dunque $d = 13$. Calcoliamo esplicitamente la soluzione e, per semplificare i calcoli, studiamo l'orbita di $[59^k]_{62}, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

k	**Rappresentante di** $[59^k]_{62}$
1	59
2	$59^2 = 3481 = 56 \cdot 62 + 9 \equiv 9 \pmod{62}$
3	$59^3 = 59^2 \cdot 59 \equiv 9 \cdot 59 \equiv 35 \pmod{62}$
4	$59^4 = (59^2)^2 \equiv 9^2 \equiv 19 \pmod{62}$
5	$59^5 = 59^4 \cdot 59 \equiv 19 \cdot 59 \equiv 5 \pmod{62}$

Osserviamo che $[59^5]_{62} = [5]_{62}, [59^3]_{62} = [35]_{62}$, dunque vale:

$$[59^{13}]_{62} = [59]_{62}^{2\cdot 5+3} = [59^5]_{62}^2 [59^3]_{62} = [5^2]_{62}[35]_{62} = [25 \cdot 35]_{62} = [7]_{62}$$

E la soluzione è:

$$S = [7]_{62} \subseteq \mathbb{Z}$$

e la minima soluzione positiva corrisponde al rappresentante di $[7]_{62}$ ovvero 7.

11

Problemi sui Grafi

11.1 Individuare un isomorfismo

Consideriamo il problema seguente:

Dati due o più grafi, si desidera stabilire se sono tra loro isomorfi.

Quando si affronta un problema come questo, spesso torna utile ricorrere alle proprietà mostrate di seguito.

Alcune caratteristiche dei grafi isomorfi

Siano G, G' grafi finiti. Supponiamo $G \cong G'$. Allora:

1. $\text{Score}(G) = \text{Score}(G')$.
2. G, G' hanno lo stesso numero di componenti connesse.
3. G è 2-connesso $\iff$ G' è 2-connesso.
4. G è hamiltoniano $\iff$ G' è hamiltoniano.
5. G, G' hanno lo stesso numero di sottografi che sono k-cicli.
6. Sia $f : V \to V'$ un isomorfismo. Sia $v \in V$ tale che $\deg_G(v) = k \in \mathbb{N}$. Siano $v_1, ..., v_k \in V$ adiacenti a v. Allora $f(v_1), ..., f(v_k)$ sono adiacenti a $f(v)$:

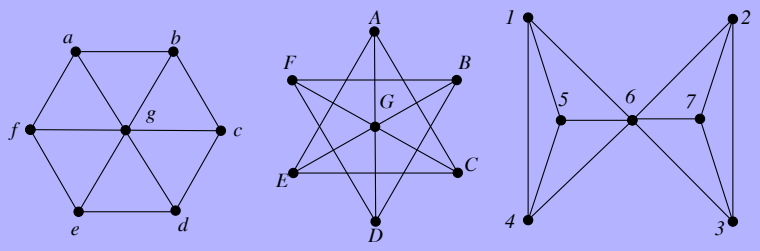
$$\deg_G(v) = \deg_G(f(v)) \quad \deg_G(v_i) = \deg_G(f(v_i)) \quad \forall i \in \{1, ..., k\}$$

La proprietà (6) potrebbe essere la più complessa da applicare. Intuitivamente, essa permette di trovare grafi tra loro non isomorfi osservando i gradi di vertici tra loro adiacenti. Un sempio di applicazione di (6) è presente in uno degli esercizi di esempio mostrati in questa sezione.

Supponiamo di avere G, G' grafi finiti. Per stabilire se sono isomorfi, si controllano le proprietà da (1) a (6). Se anche una sola è falsa, allora si può concludere con certezza che $G \ncong G'$. Altrimenti non si può ancora dare una risposta: infatti si tratta di condizioni sufficienti ma non necessarie all'esistenza di isomorfismi. Si prova allora a definire un isomorfismo "a mano".

Esempio

Siano rispettivamente G_1, G_2, G_3 i grafi raffigurati qui sotto. Si dica, motivando la risposta, quali tra essi sono isomorfi e quali no.



Soluzione: verifichiamo prima le condizioni necessarie per l'esistenza di isomorfismi tra grafi finiti:

1. $\text{Score}(G_1) = \text{Score}(G_2) = \text{Score}(G_3)$: nulla si può dire.
2. In ciascuno dei tre grafi, ogni coppia di vertici può essere collegata con passeggiate. Dunque G_1, G_2, G_3 sono connessi: nulla si può dire.
3. Osserviamo che (a, b, c, d, e, f, g, a) è un ciclo hamoltoniano in G_1. Dunque G_1 è un grafo hamiltoniano e quindi anche 2-connesso. Possiamo inoltre notare che $G_2 - G$ e $G_3 - 6$ non sono connessi, quindi G_2 e G_3 non sono grafi 2-connessi. Possiamo concludere che
$$G_1 \ncong G_2 \quad \text{e} \quad G_1 \ncong G_3$$
4. Dal punto precedente abbiamo concluso che G_2 e G_3 non sono 2-connessi, dunque nemmeno hamiltoniani: nulla si può dire su questi due grafi.
5. G_2 e G_3 hanno lo stesso numero di 3-cicli: nulla si può dire.
6. Notiamo che G_2 e G_3 hanno un unico vertice di grado massimo: $G \in V(G_2)$ e $6 \in V(G_3)$ con $\deg_{G_2}(G) = \deg_{G_3}(6) = 6$. Dunque, se esistesse un isomorfismo $f : V(G_2) \to V(G_3)$, allora $f(G) = 6$. Osserviamo che G è adiacente a sei vertici, ciascuno di grado 3. D'altra parte, anche 6 è adiacente a sei vertici, ciascuno con grado 3. Non si deduce alcuna contraddizione: nulla si può dire.

Non concludendo ancora nulla su G_2 e G_3, proviamo a definire un isomorfismo tra questi grafi. Sia:

$$\begin{gathered} V(G_2) \xrightarrow{f} V(G_3) \\ A \mapsto 2 \\ B \mapsto 5 \\ C \mapsto 7 \\ D \mapsto 4 \\ E \mapsto 3 \\ F \mapsto 1 \\ G \mapsto 6 \end{gathered}$$

Poiché nella colonna di destra appaiono tutti i vertici di G_3 senza ripetizioni, la funzione $f : V(G_2) \to V(G_3)$ è una bigezione. Verifichiamo se si tratta anche di un morfismo da G_2 a G_3:

$$E(G_2) \overset{'f'}{\to} \binom{V(G_3)}{2}$$
$$\{A, E\} \mapsto \{2, 3\}$$
$$\{A, G\} \mapsto \{2, 6\}$$
$$\{A, C\} \mapsto \{2, 7\}$$
$$\{E, C\} \mapsto \{3, 7\}$$
$$\{E, G\} \mapsto \{3, 6\}$$
$$\{C, G\} \mapsto \{7, 6\}$$
$$\{F, B\} \mapsto \{1, 5\}$$
$$\{F, G\} \mapsto \{1, 6\}$$
$$\{F, D\} \mapsto \{1, 4\}$$
$$\{D, G\} \mapsto \{4, 6\}$$
$$\{D, B\} \mapsto \{4, 5\}$$
$$\{B, G\} \mapsto \{5, 6\}$$

Segue che $f(E(G_2)) \subseteq E(G_3)$, dunque f è un morfismo da G_2 a G_3. D'altra parte i lati di G_3 che compaiono nella seconda colonna della precedente lista sono tutti i 12 lati di G_3. Allora $f(E(G_2)) = E(G_3)$, ovvero f è un isomorfismo da G_2 a G_3. Dunque $G_2 \equiv G_3$.

11.2 Riconoscere uno score

Si consideri il seguente problema:

$$\text{dato } d = (d_1, ..., d_n) \in \mathbb{N}^n, \text{ stabilire se esiste un grafo } G \text{ tale che Score}(G) = d$$

Presentiamo ora un ridottissimo numero di lemmi, o *ostruzioni*, che consentono di verificare se un vettore di interi può *non* essere lo score di un grafo. Si sottolinea che:

- Le ostruzioni sono *condizioni sufficienti ma non necessarie* all'esistenza di un grafo: dato un vettore d, se anche tutte le ostruzioni mostrate qui fallissero, non si potrebbe dire alcunché sull'esistenza di un grafo con score d.
- Alcune ostruzioni non sono applicabili a tutti i vettori: ciò non implica la non esistenza di un possibile grafo con score d.
- Queste non sono le uniche ostruzioni esistenti: in base alle dimensioni e alla conformazione del vettore dato, potrebbero anzi esistere migliaia di ostruzioni applicabili.

Ostruzione 1

Sia $d = (d_1, ..., d_n) \in \mathbb{N}^n, n \geq 1, d_1 \leq ... \leq d_n$.

$$d_n > n - 1 \implies \nexists G : \text{Score}(G) = d$$

Esempio: applicazione della prima ostruzione

Viene dato $d = (1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 8)$. Quindi $n = 8, d_n = 8$ ma $d_n = 8 > n - 1 = 8 - 1 = 7$. Quindi non esiste nessun grafo con score d.

Motivazione: non può esistere un grafo con tale score, perché sono previsti n vertici e ognuno di essi può essere collegato ad al più $n - 1$ vertici (ovvero può appartenere ad al più $n - 1$ lati).

Osservazione

Sia $d = (0, ..., 0, d_1, ..., d_n) \in \mathbb{N}^{n+m}$, dove compaiono m zeri e vale $0 < d_1 \leq ... \leq d_n$. Sia $d' = (d_1, ..., d_n) \in \mathbb{N}^n$.

$$d \text{ è lo score di un grafo } \iff d' \text{ è lo score di un grafo}$$

Esempio

Viene dato $d = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 9)$. L'ostruzione 1 non è verificata, quindi non si può ancora dare una risposta. Estraiamo da d lo score $d' = (1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 9)$ e riapplichiamo l'ostruzione: $d_n = 9 > n-1 = 8-1 = 7$. Segue che d' non può rappresentare lo score di un grafo e per l'Osservazione non lo è nemmeno d.

Ostruzione 2

Siano $h, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sia $n := h + k$ e $d \in \mathbb{N}^n$ tale che $d = (d_1, ..., d_h, n-1, ..., n-1)$ dove $n-1$ compare k volte e $d_1 \leq ... \leq d_h < n-1$.

$$d_1 < k \implies \nexists G : \text{Score}(G) = d$$

Esempio

Viene dato $d = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8)$. L'ostruzione 1 non fornisce informazioni. Notiamo che è applicabile l'ostruzione 2: $d_1 = 1 < 2$ quindi non esistono grafi con score d.

Una motivazione verbale esaustiva può essere la seguente: *non può esistere un grafo con tale score, perché sarebbero previsti n vertici di cui k collegati a tutti gli altri, quindi d_1 dovrebbe valere almeno k.*

Esempio: combinare l'osservazione alle altre ostruzioni

Viene dato $d = (0, 0, 0, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 10, 10, 10)$.

1. $d_n = 10 \not> n - 1 = 14 - 1 = 13$: l'ostruzione 1 non fornisce informazioni.
2. Non è applicabile l'ostruzione 2. Però il vettore d' è valido, quindi applichiamo l'osservazione: $d'_1 = 2 < 3$, quindi d' non è lo score di un grafo e pertanto nemmeno d.

Ostruzione 3

Sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Sia $d = (d_1, ..., d_n) \in \mathbb{N}^n, d_1 \leq ... \leq d_n$. Definiamo: $L := |\{i \in \{1, ..., n-2\} | d_i \geq 2\}|$.

$$L < d_{n-1} + d_n - n \implies \nexists G : \text{Score}(G) = d$$

Esempi

Viene dato $d = (1, 1, 1, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8)$.

1. $d_n = 8 > n - 1 = 10 - 1 = 9$: nulla si può dire.
2. Ostruzione 2 non applicabile.
3. $L = 5 < d_n + d_{n-1} - n = 8 + 8 - 10 = 6 \implies \nexists G : \text{Score}(G) = d$.

Viene dato $d = (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 6)$.

1. $d_n = 6 > n - 1 = 9 - 1 = 8$: nulla si può dire.
2. Ostruzione 2 non applicabile.
3. $L = 7 < 5 + 6 - 9 = 2$: nulla si può dire.

Ostruzione 4

Si veda il **lemma delle strette di mano**.

$$d \text{ non soddisfa il lemma delle strette di mano} \implies \nexists G : \text{Score}(G) = d$$

11.3 Il teorema dello score

Una volta verificato che il vettore fornito non soddisfa alcuna ostruzione, è possibile procedere con l'applicazione del teorema dello score, che rappresenta un buon metodo di verifica e costruzione di un possibile grafo con score dato.

Teorema dello Score

Sia $n \geq 2$ e sia $d = (d_1, ..., d_n) \in \mathbb{N}^n$ tale che $d_1 \leq ... \leq d_n \leq n-1$. Definiamo $d' = (d'_1, ..., d'_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ ponendo:

$$d'_i := \begin{cases} d_i & i < n - d_n \\ d_i - 1 & i \geq n - d_n \end{cases}$$

Allora d è lo score di un grafo se e solo se lo è d'.

Si noti che il teorema dello score incorpora già in sé la condizione dell'ostruzione 1. La proprietà più apprezzabile di questo teorema risiede nel fatto che esso fornisce un algoritmo che abbassa la complessità dello score fornito, riducendolo ad una serie di casi possibili trattabili con molta facilità. Il lemma seguente ci mostra quali sono questi casi.

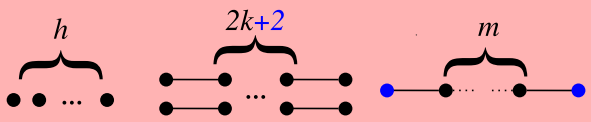
Casi notevoli dopo l'applicazione del teorema dello score

Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e sia $d = (d_1, ..., d_n) \in \mathbb{N}^n$ tale che $d_1 \leq ... \leq d_n \leq 2$. Valgono:

1. Se $d = (0, ..., 0, 2)$ oppure $n \geq 2$ e $d = (0, ..., 0, 2, 2)$ allora non esiste un grafo con score d.
2. Se $d = (0, ..., 0)$ o $d = (0, ..., 0, 2, 2, ..., 2)$ ($m \geq 3$ elementi di grado 2) allora esiste un grafo con tali score: G_1 con tutti i vertici isolati, G_2 con $n - m$ vertici isolati e un m-ciclo.
3. Supponiamo che compaia almeno una volta l'unità 1. Se il numero di volte in cui compare 1 è dispari, allora non esiste G con tale score (conseguenza del lemma delle strette di mano).
4. Supponiamo che 1 compaia in numero pari $2k + 2 \geq 2$ ($k \geq 0$), che il numero di 0 sia $h \geq 0$ e i 2 in numero $m \geq 0$:

   $$d = (0, ..., 0, 1, 1, ..., 1, 1, 2, ..., 2)$$

   Allora il seguente grafo G ha score d:



Esempio di applicazione del teorema dello score

Stabilire se esiste un grafo con score $d = (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 6)$. In caso affermativo, costruire un possibile grafo con score d, mediante il teorema dello score.

Soluzione: Passiamo in rassegna le ostruzioni viste finora:

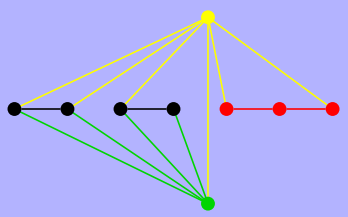
1. Osserviamo che $6 > 9 - 1$: nulla si può dire.
2. Questa ostruzione non è applicabile: nulla si può dire.
3. $L = 7 < 5 + 6 - 9 = 2$: nulla si può dire.
4. d soddisfa il lemma dell strette di mano: nulla si può dire.

Non avendo concluso nulla, ricorriamo al teorema dello score (sappiamo già dall'ostruzione 1 che il teorema è applicabile a d).

d	2	2	2	2	3	3	3	5	6
d'	2	2	1	1	2	2	2	4	$\times$
	1	1	2	2	2	2	2	4	ordinato
d''	1	1	2	1	1	1	1	$\times$	
	1	1	1	1	1	1	2		ordinato

Ci siamo ricondotti ad una forma notevole dello score, facilmente rappresentabile. Costruiamo G'', che ha score d'':

Per il teorema dello score, sono score di qualche grafo anche d' e d. Costruiamo un grafo G con score d mediante il teorema dello score:



Sottolineamo alcuni punti:

- Il grafo G finale potrebbe non essere l'unico con score d (potrebbero esistere alternative nella costruzione del grafo).
- Sono stati omessi i nomi dei vertici, ma è buona prassi indicarli sempre, in particolare all'esame.

11.4 Altri problemi sullo score

Appurato che un vettore d è lo score di un grafo, si potrebbe estendere ulteriormente il problema chiedendosi se esistono grafi con score d che sono connessi o sconnessi, hamiltoniani, 2-connessi o aventi un certo numero di componenti connesse.

Connessione e sconnessione

Forzatura alla connessione

Sia $G = (V, E)$ un grafo finito e sia $n = |V|$ il numero di vertici di G. Siano $m := \min\{\deg_G(v) | v \in V\}, M := \min\{\deg_G(v) | v \in V\}$. Vale:

$$m \geq n - M - 1 \implies G \text{ è connesso}$$

In termini di score, se viene fonrnito $d = (d_1, ..., d_n) \in \mathbb{N}^n : n \geq 1, d_1 \leq ... \leq d_n$, per i grafi con tale score, se esistono, vale:

$$d_1 + d_n \geq n - 1 \implies G \text{ connesso } \forall G : \text{Score}(G) = d$$

Osservazione. La forzatura alla connessione è verificabile anche attraverso l'Ostruzione 2. Se infatti compaiono vertici di grado $n - 1$, ovvero adiacenti a tutti gli altri, necessariamente tutti i grafi con score d, se esistono, sono connessi.

Forzatura alla sconnessione

Sia $G = (V, E)$ un grafo finito. Vale:

$$|E| < |V| - 1 \implies G \text{ è sconnesso}$$

In termini di score (si consideri il vettore come sopra):

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d_i < n - 1 \implies G \text{ sconnesso } \forall G : \text{Score}(G) = d$$

Osservazione. Se entrambe le forzature falliscono, nulla si può dire sullo score d fornito.

Individuare grafi 2-connessi e hamiltoniani

Dalla sezione sui grafi 2-connessi e hamiltoniani, sappiamo che tali grafi:

- Non possono contenere foglie.
- Sono connessi.

Vettori contenenti entrate nulle o corrispondenti a 1 sicuramente non possono essere score di grafi 2-connessi o hamiltoniani. Il problema del ciclo hamiltoniano è *NP-completo*. In altre parole, non esistono metodi efficienti per capire se un dato grafo è hamiltoniano o meno, se non in casi particolari come quelli appena elencati.

11.5 Alberi e score

Dal teorema di caratterizzazione degli alberi finiti mediante la formula di Eulero, applicando la relazione fondamentale dei grafi finiti, si può formulare un utile corollario che lega score e alberi.

Esistenza di alberi con score dato

Sia $n \geq 2$ e sia $d = (d_1, ..., d_n) \in \mathbb{N}^n$ tale che $1 \leq d_1 \leq ... \leq d_n$. Allora eisste un albero con score d se e solo se vale la seguente

$$n - 1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d_i$$

In particolare, affinché un vettore d sia lo score di qualche albero, è importante ricordare questi punti:

- Se d ha almeno due entrate, le prime due devono essere pari a 1 (l'albero deve possedere almeno due foglie).
- d deve soddisfare la formula di Eulero.

In generale, a meno che non ci si imbatta nel vettore $d = (0)$ (è un albero che consiste in un solo vertice isolato), applicando il corollario appena visto ad un $d = (1, 1, ..., 1, ..., d_n)$ di dimensione $n \geq 2$, e supponendo che tutte le entrate cosentano a d di essere uno score di qualche albero si può facilmente costruire un albero

1. creando un cammino di lunghezza k, dove k è il numero di entrate in d maggiori di 1;
2. aggiungendo opportunamente le foglie ai vertici del cammino, secondo il loro grado.

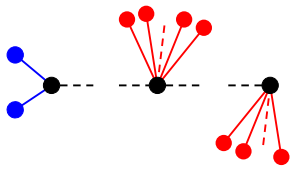


Figura 11.1: Un generico albero A costruito da d. Le foglie blu ricordano che A deve contenere almeno due foglie; il cammino iniziale, lungo k, è in nero; le foglie rimanenti sono rosse.

11.6 Un esercizio d'esame sullo score: dall'inizio alla fine

Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori è lo score di un grafo e, in caso affermativo, si costruisca un tale grafo utilizzando il teorema dello score.

$$d_1 = (3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5) \qquad d_2 = (2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 7, 7, 7, 12, 12, 12)$$

Si dica inoltre se

1. esiste un tale grafo che sia un albero;
2. esiste un tale grafo che sia hamiltoniano;

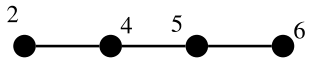
3. esiste un tale grafo che sia sconnesso.

Soluzione: non esiste alcun grafo G che abbia score d_2. Infatti, d_2 imporrebbe a G di avere 13 vertici dei quali tre di grado 12, dunque adiacenti a tutti gli altri vertici; allora il vertice di grado minimo in G dovrebbe avere almeno grado 3, ma questo contraddice quanto previsto in d_2, dove l'entrata minima equivale a 2.

Non avendo trovato ostruzioni all'esistenza di grafi con score d_1, procediamo applicando il teorema dello score a d_1. Ciò è possibile dal momento che $d_{1_8} = 5 \leq 8 - 1$.

d_1	3	4	4	5	5	5	5	5
d_1'	3	3	4	4	4	4	4	×
d_1''	3	3	3	3	3	3	×	
d_1'''	2	2	2	3	3	×		
d_1''''	1	1	2	2	×			

Notiamo che da d_1'''' è possibile costruire un possibile rispettivo grafo G'''' mostrato di seguito:



Per il teorema dello score, allora anche tutti gli altri vettori, incluso d_1, sono lo score di qualche grafo. Costruiamo un grafo G (si veda la Figura 11.2) con score d_1 mediante il teorema dello score.

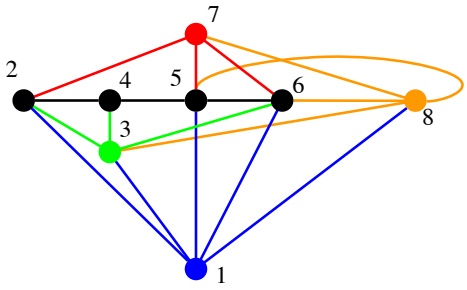


Figura 11.2: G

Rispondiamo ora agli altri quesiti:

1. Osserviamo che d_1 non soddisfa la formula di Eulero:

$$8 - 1 = 7 \neq \frac{3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5}{2} = 18$$

pertanto non esistono alberi con score d_1. D'altra parte d_1, che contiene $8 \geq 2$ elementi, non possiede nessuna entrata pari a 1, ovvero non possiede almeno 2 foglie (condizione necessaria all'esistenza di un albero).

2. Si noti che il ciclo $c = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$, evidenziato in Figura 11.3, in G è hamiltoniano.

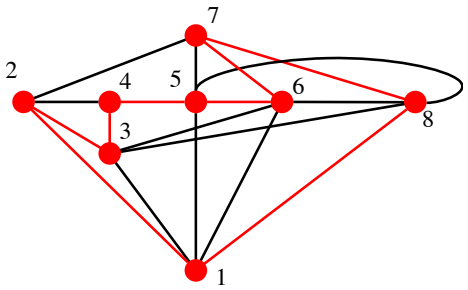


Figura 11.3: Un ciclo (c) hamiltoniano in G.

dunque G è un grafo hamiltoniano con score d_1.

3. Applicando la condizione di *forzatura alla connessione* giungiamo alla seguente conclusione:

$$5 + 3 = 8 > 7 = 8 - 1$$

che soddisfa la forzatura; ma allora ogni grafo con score d_1 è necessariamente connesso e pertanto non esistono grafi sconnessi con score d_1.

Parte IV

Appendici

12

Simbologia

Simbolo	**Significato**	**Esempio**
$\in$	Appartiene a	$x \in A$
$\ni$	Contiene	$A \ni x$
$\forall$	per ogni	$\forall x, x = x$
$\exists$	esiste (almeno un)	$\exists n \in \mathbb{N} : n = 0$
$\varnothing$	Insieme vuoto	
$\subset$ [1]	Sottoinsieme di	$A \subset B$
$\subseteq$	Sottoinsieme di	
$\subsetneq$	Sottoinsieme proprio di	
$\nsubseteq$	Sottoinsieme proprio di	
:	Tale che (affermazioni)	$\exists k \in \mathbb{N} : k = 0$
$\mid$	Tale che (assioma di separazione)	$\{n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ è pari}\}$

[1] La letteratura è ambigua riguardo il significato preciso di questo simbolo. Si consiglia l'utilizzo di altre notazioni più esplicite.