

Fisica

MECCANICA NEWTONIANA
TERMODINAMICA

Zeno Saletti

If, in some cataclysm, all of scientific knowledge were to be destroyed, and only one sentence passed on to the next generations of creatures, what statement would contain the most information in the fewest words? I believe it is the *atomic hypothesis* [...] that *all things are made of atoms—little particles that move around in perpetual motion, attracting each other when they are a little distance apart, but repelling upon being squeezed into one another*. In that one sentence, you will see, there is an enormous amount of information about the world, if just a little imagination and thinking are applied.

Richard P. Feynman,
The Feynman Lectures on Physics
Vol. I

Consigliamo di consultare questa dispensa ascoltando il brano seguente:
Cornfield Chase by Hans Zimmer (from *Interstellar* by Christopher Nolan)

Prefazione

Errata

È statisticamente difficile eliminare ogni errore da una qualsiasi opera scritta, sia essa un breve articolo di un paio di pagine, oppure un tomo di qualche decina di milioni di caratteri. Questi appunti non sono un'eccezione.

Riconoscimenti

Testi

Gran parte del testo è una trascrizione degli appunti reperiti durante il corso di Fisica (a.a. 2023-2024) tenuto dal prof. Roberto Iuppa, presso l'Università degli Studi di Trento. Organizzazione e ordine dei capitoli ricalcano la successione delle lezioni frontali, con alcune rivisitazioni della struttura degli argomenti e ridefinizione netta di alcuni capitoli, come la separazione tra meccanica, meccanica degli urti, relatività galileiana.

Di grande ispirazione sono stati i *The Feynman Lectures on Physics* (Volume I: Mainly on Mechanics, Radiation and Heat), *Dalla Meccanica alla Fisica Moderna* (Walker).

Immagini

Tutte le immagini che si trovano in questi appunti sono state realizzate integralmente a mano, incluso il design di copertina, utilizzando lo strumento Disegni appartenente alla suite Google. La cartella **figures/** del progetto originale contiene tutte le risorse visive in formato **.pdf** che accompagnano questo testo.

Indice

1	<i>Introduzione alla Fisica</i>	11
1.1	Definizione e scopi della fisica	11
1.2	Grandezze fisiche	11
1.3	Incertezza	12
1.4	Notazione scientifica	13
2	<i>Descrizione del moto</i>	17
2.1	Moto del punto	17
2.1.1	Posizione e traiettoria	17
2.1.2	Sistemi di riferimento	17
2.1.3	Distanza e spostamento	18
2.2	Interpretazioni geometriche	18
2.3	Moto rettilineo uniforme	18
2.4	Accelerazione	18
2.5	Moto circolare	18
2.5.1	Velocità angolare e velocità tangenziale	18
2.5.2	Moto circolare uniforme	19
2.6	Moto armonico	20
2.7	Moto nel piano	22
2.7.1	Vettori	23
3	<i>Dinamica</i>	25
3.1	Leggi della dinamica	25
3.1.1	La prima legge	25
3.1.2	La seconda legge	25
3.1.3	Analisi dimensionale	26
3.1.4	Molla e forza elastica	26
3.2	Forza agente sul moto	26
3.3	Lancio verso l'alto	27
3.3.1	La terza legge	28
3.4	Statica	28
3.5	Dinamica e moti armonici	29
3.5.1	Le equazioni del moto armonico	29
3.5.2	L'oscillatore a molla	31
3.5.3	Il pendolo	32
3.6	Forze	35
3.6.1	Peso	35
3.6.2	Forza elastica	35
3.6.3	Attrito	35
4	<i>Meccanica</i>	37
4.1	Lavoro di una forza	37
4.1.1	Lavoro di una forza	37
4.2	Teorema delle forze vive	38
4.3	Forze conservative	42
4.4	Energia potenziale	43

4.4.1	Energia potenziale gravitazionale	44
4.4.2	Energia potenziale elastica	44
4.5	Conservazione dell'energia meccanica	44
5	<i>Meccanica e Urti</i>	47
5.1	Quantità di moto	47
5.2	Il fenomeno dell'urto	47
5.3	Conservazione	48
5.3.1	Forze interne ed esterne	49
5.3.2	Centro di massa	50
5.3.3	La legge di conservazione della quantità di moto	50
5.4	Impulso	51
5.5	Urti elastici	52
5.6	Urti anelastici	52
6	<i>Relatività galileiana</i>	55
6.1	Sistemi di riferimento	55
6.2	Principio di relatività galileiana	55
6.3	Forze apparenti	55
7	<i>Gravitazione</i>	57
7.1	Gravità e forze fondamentali	57
7.2	Il principio di equivalenza	57
7.3	Energia potenziale gravitazionale	59
7.4	Gravitazione universale	60
8	<i>Termodinamica</i>	63
8.1	Introduzione	63
8.2	Principio zero	63
8.3	Principio primo	63
8.4	Gas ideali	63
8.5	La teoria cinetica dei gas	63
8.6	Le trasformazioni termodinamiche	63
8.7	Macchine	63
8.8	Principio secondo	63
8.9	Studi di Carnot	63
8.10	Studi di Clausius	63
8.11	Entropia	63
8.11.1	Sistemi termodinamici	64
8.11.2	Leggi dei gas ideali	65
8.11.3	Lavoro di un gas ideale	65
8.11.4	Trasformazione isocora	70
8.11.5	Trasformazione isobara	70
8.11.6	Trasformazioni isoterme	71
8.11.7	Trasformazioni adiabatiche	72
8.11.8	Rendimento	73
8.11.9	Utopie	74

8.11.10 Teorema di Clausius	75
8.11.11 Entropia	76
8.11.12 Variazione di entropia nelle trasformazioni reversibili elementari	77
8.11.13 Il teorema dell'entropia	77

Introduzione alla Fisica

1.1 Definizione e scopi della fisica

Si possono formulare definizioni diverse riguardo la disciplina scientifica della fisica, come la seguente:

Fisica

La fisica è lo studio quantitativo delle leggi fondamentali della natura, cioè delle leggi che governano tutti i fenomeni naturali dell'universo.

Una legge fisica (o principio) è una regolarità della natura esprimibile in forma matematica, ma anche una verità non dimostrabile che tuttavia non contraddice i fenomeni osservabili dell'esperienza.

La fisica si avvale del *metodo scientifico*, secondo cui la natura deve essere interrogata per vie sperimentali, facendosi guidare da *ipotesi* e modelli teorici. Una particolarità di questo metodo è la capacità di isolare un certo fenomeno che si intende studiare, tralasciando (si userà spesso il termine *trascurare*) certi aspetti ritenuti non rilevanti in modo da scoprire quelle regolarità dalle quali potrebbe essere dedotta una certa relazione matematica.

Il ruolo della matematica è quello di fornire un linguaggio formale per descrivere quantitativamente i fenomeni osservati e costruire modelli utili alla loro trattazione.

1.2 Grandezze fisiche

La fisica è una scienza quantitativa, ovvero essa si occupa di caratteristiche e proprietà del reale che possono essere misurate e quantificate: Le cosiddette grandezze fisiche. Esempi di grandezze fisiche sono la lunghezza, la massa, la temperatura, la durata temporale e così via.

Grandezza fisica

Una grandezza fisica è una caratteristica di un oggetto o di un fenomeno che può essere misurata in termini quantitativi (oltre che oggettivi, ovvero indipendentemente dalle sensazioni personali degli individui).

È implicito, intuitivamente, il concetto di *misura*. Misurare una grandezza fisica significa confrontarla con una grandezza “campione”, detta *unità di mi-*

- 1.1 Definizione e scopi della fisica
- 1.2 Grandezze fisiche
- 1.3 Incertezza
- 1.4 Notazione scientifica

sura, e stabilire quante volte l'unità è contenuta nella grandezza data. Il valore numerico ottenuto è la misura della grandezza e deve essere sempre accompagnato dall'unità scelta. In altre parole, la *misura* non è altro che un *rapporto* tra la grandezza che si intende misurare e la grandezza campione scelta convenzionalmente per tale scopo.

Mostriamo un esempio: supponiamo di voler misurare la lunghezza di qualsiasi cosa in “chiavette USB” (si potrebbe argomentare circa quale chiavetta si stia impiegando e quale posizione la chiavetta debba assumere durante la misura. Supponiamo qui che la chiavetta sia posta in verticale, senza perderci in ulteriori dettagli). Decidiamo poi di misurare l'altezza di una porta—anche qui, non specifichiamo quale porta—utilizzando l'unità appena scelta. Supponiamo quindi di aver registrato il seguente dato:

$$H = 20 \text{ chiavette USB}$$

Notare come siano stati specificati:

- Un nome per l'oggetto che si intendeva misurare, H , ovvero l'altezza della porta.
- Il valore numerico individuato, 20.
- Una affermazione per legare il nome e il dato, = (“corrisponde a”, “è uguale a”)—caratteristica che peraltro si trova anche nei linguaggi di programmazione. Si presti bene attenzione che l'uguaglianza matematica non implica a priori l'equivalenza fisica. Questa sottigliezza si noterà bene nella formulazione del principio zero della termodinamica.
- L'unità di misura, chiavette USB.

Tuttavia, tale misurazione non è stata affatto sincera: non vi è la garanzia che il valore registrato sia esatto. La prossima sezione tratterà questo problema, ovvero quello dell'*incertezza*.

1.3 Incertezza

Idealmente, si vorrebbe impiegare, grazie alle misure, numeri puntuali ed esatti. In altre parole, dei numeri con una precisione indefinita, aventi un numero illimitato di cifre decimali e non.

Ma quando si effettua una misura di una grandezza, il risultato ottenuto è noto solo con una certa precisione. Riprendendo l'esempio della chiavetta USB, è impossibile misurare con certezza tutte le lunghezze, in quanto non multipli esatti della chiavetta stessa: ci sarà sempre un certo margine di “un pezzo di chiavetta”, minore dell'unità prescelta. Ma al di sotto di quella unità non è possibile fornire alcuna garanzia sulla puntualità del dato. In altre parole, la *sensibilità*¹ dello strumento è uno dei limiti alla precisione della misura.

¹La più piccola variazione della grandezza che lo strumento è in grado di rilevare.

Cifre significative del risultato di una misura

Le cifre significative del risultato di una misura sono le cifre note con certezza e la prima cifra incerta. In altre parole, esse sono le cifre che si possono controllare con lo strumento impiegato nella misura.

Ad esempio, il valore corrispondente alla lunghezza di una barca $L = 10.5$ m possiede tre cifre significative, che non equivale a 10.50 m. Il secondo dato, infatti, dichiara che la misurazione è stata possibile controllando le cifre fino al centimetro. $L = 0.002$ possiede solo una cifra significativa, perché in genere si ignorano gli zeri a sinistra della prima cifra significativa diversa da zero. Possono essere ambigui valori come $L = 2500$ m: Quali zeri sono cifre significative? Chi ha compiuto la misura può aver utilizzato un'asta lunga un centinaio di metri, dunque non è possibile stabilire il valore delle cifre meno significative delle centinaia. Come vedremo tra poco, è utile esprimere questi valori in notazione scientifica per eliminare ambiguità.

Vi potrebbero anche essere errori dovuti a imprecisioni introdotte nell'utilizzo degli strumenti di misura. Questo errore deve tuttavia essere quantificato ed ogni misura ne è affetta (comprese quelle che non la riportano).

Risultato della misura di una grandezza

Il risultato della misura di una grandezza è sempre un'approssimazione accompagnata da una certa incertezza, ovvero un **valore attendibile** e un **errore assoluto** (o semplicemente *incertezza*).

$$x = \bar{x} \pm e_x$$

Questo risultato non è quindi altro che un intervallo in cui il valore reale della misura si trova. Ci limiteremo agli errori relativi a singole misure, nelle quali x corrisponde al valore misurato e e_x la sensibilità dello strumento². Di conseguenza, possiamo ora correggere il risultato della misura effettuata in chiavette USB:

$$H = (20 \pm 1) \text{ chiavette USB}$$

1.4 Notazione scientifica

Unità di misura come il metro e il chilogrammo sono comode nella vita di tutti i giorni, ma rappresentano quantità enormi su scala atomica e subatomica e quantità minuscole su scala astronomica e cosmica. Conseguenza di ciò è che alcune misure possono essere espresse da numeri "scomodi". Considerando solo

²Gli errori si propagano tuttavia anche durante i calcoli, secondo definizioni che tuttavia non verranno affrontate.

- Se il numero decimale è maggiore di 5, si somma +1 all'esponente della potenza. Ad esempio:

$$9 \cdot 10^2 \approx 10 \cdot 10^2 \rightarrow \text{Ordine di grandezza } 10^3$$

$$8,1 \cdot 10^{-12} \approx 10 \cdot 10^{-12} \rightarrow \text{Ordine di grandezza } 10^{-11}$$

Sono stati definiti dei prefissi standard per certi ordini di grandezza notevoli, cioè quelli che, escludendo la potenza nulla, rappresentano multipli di tre. Utilizzando questi prefissi, di fianco all'unità di misura adottata, si contrae ancora di più la notazione scientifica, sottintendendo un certo ordine di grandezza.

Potenza	Simbolo	Prefisso
10^{12}	T	Tera
10^9	G	Giga
10^6	M	Mega
10^3	k	kilo
10^{-3}	m	milli
10^{-6}	μ	micro
10^{-9}	n	nano
10^{-12}	p	pico

2

Descrizione del moto

2.1 Moto del punto

Un corpo è in moto quando la sua posizione cambia nel tempo. Nel descrivere il moto, si introdurrà la seguente semplificazione: Gli oggetti saranno trattati come *punti materiali*, ovvero concentrati in un punto adimensionale. In particolare, *le dimensioni dell'oggetto del quale si intende studiare il moto saranno considerate trascurabili rispetto a quelle dell'ambiente circostante*.

2.1.1 Posizione e traiettoria

Alla base della descrizione del moto, è importante individuare quelli che sono chiamati *posizione* e *traiettoria*. Avendo assunto la semplificazione del punto materiale, è intuibile che la posizione verrà descritta matematicamente come una tupla di coordinate inserite in un sistema di assi cartesiani. Tra le coordinate, è importante tenere presente anche il tempo. Di fatto, abbiamo introdotto il moto definendolo come variazione della posizione nel tempo.

La traiettoria non è altro che la linea che unisce le posizioni occupate successivamente dal corpo. Tratteremo prima moti con traiettorie rettilinee, per poi passare a traiettorie curvilinee semplici, come il moto circolare.

2.1.2 Sistemi di riferimento

Abbiamo detto che il moto è caratterizzato da un cambiamento di posizione. Il primo passo nella descrizione del moto di un corpo consiste quindi nello stabilire il modello da adottare per catturare il concetto di **posizione**. Sappiamo già che i modelli della fisica si basano sul linguaggio matematico; il modello più naturale che si possa adottare è dunque un sistema di assi cartesiani. Da qui, la posizione del corpo può essere specificata mediante coordinate. Una speciale coordinata è il tempo (in caso di moti in più di una dimensione spaziale, il tempo viene spesso omesso dalla rappresentazione grafica).

La scelta del sistema di riferimento di assi cartesiani è del tutto arbitraria¹, ma una volta fissata è necessario essere coerenti con essa. Questo permette di riflettere sul fatto che il moto è sempre relativo al sistema di riferimento adottato: cambiando sistema di riferimento, il moto cambia.

¹Gli assi possono addirittura non essere ortogonali, purché si segua la *regola del parallelogramma* e si rinunci alle proprietà e alle regolarità matematiche degli assi ortogonali, come il teorema di Pitagora per il calcolo del modulo dei vettori.

- 2.1 Moto del punto
- 2.2 Interpretazioni geometriche
- 2.3 Moto rettilineo uniforme
- 2.4 Accelerazione
- 2.5 Moto circolare
- 2.6 Moto armonico
- 2.7 Moto nel piano

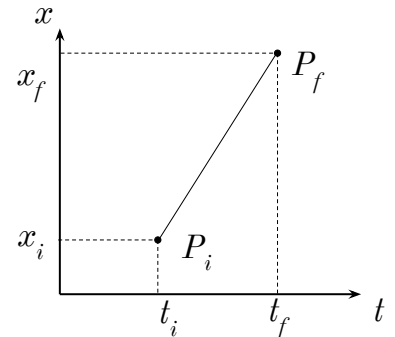


Figura 2.1: Sistema di riferimento con una sola dimensione spaziale (x) in funzione del tempo (t). All'istante t_i , il punto materiale P si trova nella posizione x_i

2.1.3 Distanza e spostamento

Durante il moto, è possibile registrare la **distanza** percorsa dall'oggetto e il suo **spostamento**. Il primo è una grandezza scalare e corrisponde alla distanza totale percorsa durante il tragitto effettuato dall'oggetto in moto. Il secondo è una grandezza vettoriale e corrisponde al cambiamento di posizione, cioè la differenza tra la posizione iniziale e quella finale dell'oggetto:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_i$$

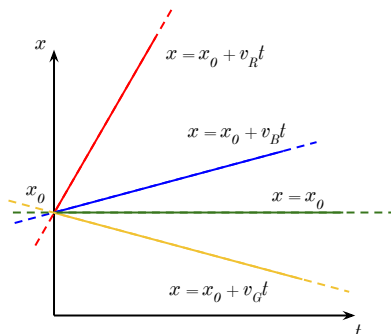


Figura 2.2: Oggetti in moto rettilineo uniforme con velocità differenti

2.2 Interpretazioni geometriche

2.3 Moto rettilineo uniforme

2.4 Accelerazione

2.5 Moto circolare

Cambiamo ora la traiettoria dell'oggetto in moto, considerando quella circolare. Per descrivere un moto circolare è conveniente impiegare coordinate differenti, dette polari. Fissando il centro di un piano cartesiano al centro di una circonferenza di raggio r , possiamo identificare la posizione di ogni punto della circonferenza con la coppia (r, θ) , dove θ è l'angolo formato dalla semiretta appartenente al sistema di riferimento e dalla semiretta che interseca la circonferenza nel punto desiderato (entrambe le semirette hanno origine nel centro del piano cartesiano, quindi della circonferenza).

Assumeremo qui che r non varia durante il moto. Per questo, viene omessa la coordinata r e si considera invece la posizione derivante da θ , detta anche *posizione angolare*. Convenzionalmente, $\theta > 0$ se misurato in senso antiorario a partire dall'asse di riferimento (come in Figura 2.3). Si utilizzano inoltre i *radianti* per misurare θ . I radianti tornano infatti comodi, perché permettono di semplificare le relazioni tra le grandezze in gioco durante il moto circolare. Innanzitutto, dato l'arco a in Figura 2.3, vale la relazione

$$a = r\theta$$

Di fatto, la lunghezza totale della circonferenza corrisponde a $C = 2\pi r$, dove 2π corrisponde ad un angolo giro espresso in radianti.

2.5.1 Velocità angolare e velocità tangenziale

Studiamo ora il cambiamento della posizione angolare nel tempo. Come per il moto rettilineo, possiamo considerare il rapporto tra lo spostamento angolare e l'intervallo di tempo trascorso. Da qui, si ottiene la velocità angolare:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

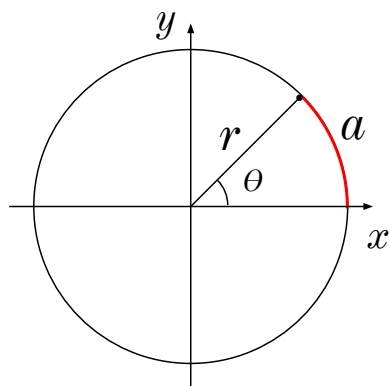


Figura 2.3: Sistema di riferimento per un moto circolare

In ogni istante, una particella in moto circolare si muove in direzione tangenziale alla traiettoria. È chiaro che la particella, muovendosi, copre una certa distanza sulla circonferenza in un dato intervallo di tempo. Possiamo quindi affermare che essa ha una velocità, detta *tangenziale*, v , oltre che quella angolare ω . Cerchiamo una relazione tra esse: supponiamo che la particella effettui, in un intervallo infinitesimo Δt , uno spostamento angolare altrettanto piccolo $\Delta\theta$ come mostrato in Figura 2.4. Lo spostamento Δs , dato dalla corda che sottende l'angolo $\Delta\theta$, approssima l'arco $a = r\Delta\theta$. Quindi:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega$$

Abbiamo quindi ottenuto la relazione cercata:

$$v = r\omega$$

Notare come $v \propto r$, al contrario di ω . Ciò significa che, assumendo una velocità angolare costante, la velocità tangenziale è tanto maggiore quanto più r cresce.

2.5.2 Moto circolare uniforme

Un moto circolare uniforme è un moto circolare con velocità *angolare* costante. Le regolarità di questo tipo di moto permettono di studiare altre grandezze importanti per il moto circolare: periodi e accelerazioni.

Periodo e frequenza

La particolarità di questo moto è la sua periodicità, perché esso si ripete ciclicamente nel tempo. In particolare, un oggetto torna ad occupare la medesima posizione iniziale dopo un certo intervallo di tempo, chiamato **periodo** (T): in altre parole, il tempo necessario per compiere “un giro (ciclo) completo”. Nel nostro caso, un giro completo corrisponde all'intera circonferenza $C = 2\pi$. Sapendo che $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, è immediato ricavare il periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Si impiega spesso anche la **frequenza**, che corrisponde al reciproco del periodo:

$$f = \frac{1}{T}$$

L'unità di misura è l'*Hertz* (Hz), ovvero “cicli al secondo” (s^{-1}), quindi il numero di cicli compiuti nell'unità di tempo.

Accelerazione centripeta

Riprendendo la prima legge della dinamica, sappiamo che un corpo permane nel suo stato di moto rettilineo uniforme a meno dell'intervento di agenti esterni. Nel caso dell'intervento di tali agenti, si osserva un'accelerazione dell'oggetto,

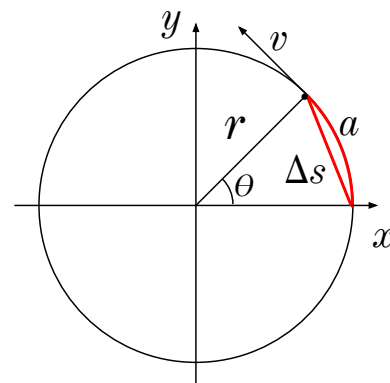


Figura 2.4: Velocità tangenziale

ovvero un cambiamento del suo stato di moto e dunque della sua velocità. Non viene specificato se questo cambiamento avviene al *modulo* oppure alla *direzione* della velocità. Infatti, la velocità è una grandezza vettoriale e una variazione di anche una sola delle sue caratteristiche comporta un'accelerazione. Per questo motivo, nonostante il modulo della velocità tangenziale di un corpo in moto circolare uniforme sia costante, la direzione del suo vettore cambia.

Vi è però il problema aperto di trovare l'agente esterno (la forza) che mantiene l'oggetto (dotato di massa) nella traiettoria del suo moto circolare. Esso può essere di varia natura: la tensione di una corda attaccata ad una pallina che viene fatta roteare; la forza di gravitazione universale che mantiene in orbita (assumiamo circolare) un pianeta intorno ad un sole; la forza elettrica che mantiene un elettrone vicino al nucleo (secondo un modello classico dell'atomo).

Vista quindi l'esistenza di un'accelerazione determinata da un agente esterno, rimane da capire come è fatto il suo vettore (modulo, verso e direzione). L'esperienza ci dice che questa accelerazione: (1) cresce con l'aumentare della velocità angolare; (2) è diretta verso il centro della circonferenza. Ma come dimostrarlo formalmente per tutti i moti circolari uniformi? Consideriamo la situazione in Figura 2.5. consideriamo una variazione molto piccola nella posizione angolare dell'oggetto, che parte con una velocità iniziale \mathbf{v}_i e termina con la velocità finale \mathbf{v}_f , uguali in modulo ma diverse in direzione. Come già detto, possiamo esprimere l'accelerazione come variazione della velocità tangenziale.

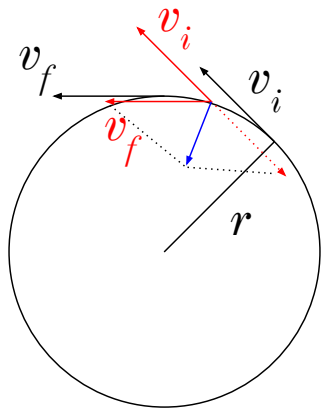


Figura 2.5: Dimostrazione delle caratteristiche geometriche del vettore accelerazione centripeta

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \simeq \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

Concentriamoci sul termine $\Delta\mathbf{v}$.

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_f + (-\mathbf{v}_i)$$

Geometricamente, i vettori velocità si sommano secondo la “regola del parallelogramma” come mostrato nella Figura. Con i dovuti formalismi geometrici, sapendo che il modulo di v è sempre costante, possiamo dimostrare che l'accelerazione è effettivamente centripeta e ortogonale alla velocità tangenziale, ovvero il suo vettore punta sempre verso il centro della circonferenza. Sempre dalla Figura, possiamo osservare che al crescere di v cresce anche a ; tenendo poi presente che la variazione $\Delta\mathbf{v}$, che è un vettore, viene moltiplicata per la quantità scalare $\frac{1}{\Delta t}$, il vettore risultante dell'accelerazione cresce in modulo quanto più piccolo diventa l'intervallo Δt : ovvero la velocità dell'oggetto è maggiore. Dimosteremo più avanti che la relazione precisa tra i moduli di queste grandezze è data da

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

2.6 Moto armonico

Supponiamo di osservare un oggetto in moto circolare uniforme, ma invece di vederlo “dall'alto” lo guardiamo con la riconferenza della traiettoria posta

orizzontalmente. Da questo punto di vista, vedremo l'oggetto *oscillare* a destra e sinistra all'interno di uno spazio la cui larghezza corrisponde al diametro della circonferenza. Ciò che si vede è un moto particolare, il *moto armonico semplice*.

Dalla Figura 2.6 possiamo notare che, fissato il solito sistema di riferimento xy , il moto armonico semplice non è altro che la proiezione sugli assi di un moto circolare uniforme. Per questo motivo, possiamo descrivere la posizione dell'oggetto caratterizzato da tale moto:

$$\begin{cases} x_p(t) = r \cos \theta = r \cos(\omega t) \\ y_p(t) = r \sin \theta = r \sin(\omega t) \end{cases}$$

Possiamo quindi notare che il moto circolare è la composizione di due moti armonici. Sapendo che la velocità corrisponde alla derivata della funzione che descrive la posizione:

$$\begin{cases} v_x(t) = -\omega R \sin(\omega t) \\ v_y(t) = \omega R \cos(\omega t) \end{cases}$$

Derivando nuovamente, otteniamo l'accelerazione:

$$\begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 R \cos(\omega t) \\ a_y(t) = -\omega^2 R \sin(\omega t) \end{cases}$$

Esiste anche una dimostrazione geometrica di tali relazioni, che non impiega esplicitamente i metodi del calcolo infinitesimale. È sufficiente tenere in considerazione la posizione angolare θ , avere dimestichezza con le funzioni sinusoidali e ricordare direzione e verso dei vettori velocità tangenziale e accelerazione centripeta durante un moto circolare uniforme.

Relazione tra accelerazione centripeta e velocità

Siamo ora in grado di mostrare l'origine della relazione $a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ tra accelerazione centripeta e velocità (angolare e tangenziale) in un moto circolare uniforme.

Osserviamo che il sistema che descrive l'accelerazione del moto armonico contiene i termini $r \cos(\omega t)$ e $r \sin(\omega t)$: le coordinate del punto in moto circolare uniforme in funzione del tempo. Dunque

$$\begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 r \cos(\omega t) \\ a_y(t) = -\omega^2 r \sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 x(t) \\ a_y(t) = -\omega^2 y(t) \end{cases}$$

Queste non sono altro che le componenti dell'accelerazione centripeta solidali al sistema di riferimento di assi xy . Sapendo che il modulo di un vettore corrisponde a $|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x_r^2 + y_r^2}$ (con x_r, y_r le componenti del vettore r rispetto ad un sistema di assi ortogonali xy), è immediato mostrare che

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{(-\omega^2 x)^2 + (-\omega^2 y)^2} = \sqrt{\omega^4 x^2 + \omega^4 y^2} = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 r$$

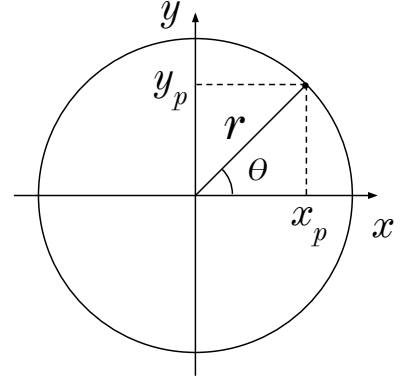


Figura 2.6: Modello di moti armonici semplici a partire da proiezioni di un moto circolare uniforme

Dal precedente sistema, è possibile capire perché il vettore dell'accelerazione è diretto verso il centro della circonferenza: x ed y sono le componenti del *vettore posizione* dell'oggetto in movimento; tale vettore non è altro che una freccia di modulo uguale alla lunghezza del raggio e la cui punta indica il punto in cui il corpo si trova sulla circonferenza, dunque questo vettore punta verso l'esterno; ma dato che ogni componente viene moltiplicata per la quantità negativa $-\omega^2$, il vettore accelerazione centripeta non può che puntare nel verso opposto, quindi verso il centro della circonferenza. L'equazione vettoriale è dunque la seguente:

$$\mathbf{a} = -\frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{r}}$$

Accelerazione centripeta, traiettorie curvilinee, raggio di curvatura

L'accelerazione centripeta non esiste solamente nei moti circolari uniformi, ma, come possiamo ricordare da esperienze quotidiane, qualsiasi variazione nella traiettoria di un corpo in moto, attraverso una “sterzata”, permette di percepire l'effetto e la direzione dell'accelerazione. Possiamo dunque estendere la descrizione del moto circolare uniforme a casi meno eccezionali, come quelli dei moti dalle traiettorie curvilinee. È interessante come l'equazione dell'accelerazione centripeta permetta di ottenere informazioni interessantissime su moti come questi, come il **raggio di curvatura**. Si osservi l'esempio in Figura 2.7.

Tratti di traiettorie come queste possono essere approssimate da archi di circonferenze con raggi di lunghezze differenti. Durante ognuno di questi brevi tratti, percorsi sugli archi, l'oggetto in moto è sottoposto ad una certa accelerazione centripeta. Assunto che tale oggetto abbia una massa, è possibile misurare l'accelerazione rilevando la forza esercitata sull'oggetto durante il tratto di curva. Dall'equazione dell'accelerazione centripeta, vale

$$\frac{F}{m} = \frac{v^2}{r}$$

Date le nostre supposizioni sulle grandezze conosciute (forza, massa e velocità), l'unico dato che rimane è il raggio, che in questo caso prende il nome di *raggio di curvatura*:

$$r = \frac{v^2 m}{F}$$

2.7 Moto nel piano

Parabola di un proiettile

$$\begin{cases} x = v_{0,x}t \\ y = v_{0,y}t - \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

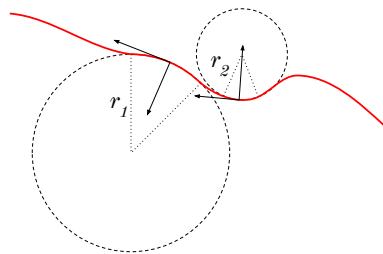


Figura 2.7: Una traiettoria curvilinea approssimata da archi di circonferenze con raggi differenti

Esprimiamo y in funzione di x :

$$y = \frac{v_{0,y}}{v_{0,x}}x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0,x}^2}x^2 = Bx - Cx^2$$

Tangente a questa parabola:

$$y' = B - 2Cx$$

2.7.1 Vettori

Vettori posizione e spostamento.

$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_f - \mathbf{s}_i$$

Vettore velocità

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} \sim d\mathbf{s} \cdot \frac{1}{dt}$$

Per definizione *sempre* tangente alla traiettoria. La traiettoria è la serie dei punti che si ottiene percorrendo per tratti infinitesimi le velocità istantanee.

Accelerazione tangente e accelerazione normale.

Esercizio

$|\mathbf{v}_i| = 50 \text{ km/h}$, $|\mathbf{v}_f| = 100 \text{ km/h}$, $m = 1800 \text{ kg}$, $R = 20 \text{ m}$, $\Delta t = 2 \text{ s}$.
 $|\mathbf{F}_n| = ?$ (forza normale), $|\mathbf{a}_t| = ?$. Assumiamo che l'auto acceleri con costanza tra le due velocità.

- $a_{n,i} = \frac{v_i^2}{R}$, $a_{n,f} = \frac{v_f^2}{R}$
- $F_{n,i} = ma_{n,i} \simeq 17100 \text{ N}$, $F_{n,f} = ma_{n,f} \simeq 68400 \text{ N}$
- $|\mathbf{a}_t| = \text{cost} = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} \simeq 6,95 \text{ m/s}^2$

Recap

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}(t - t_0)$$

Semplificazioni in termini di variazioni, infinità.

3

Dinamica

3.1 Leggi della dinamica

Nella descrizione introduttiva del moto, non è stata analizzata alcuna causa del fenomeno.

- 3.1 Leggi della dinamica
- 3.2 Forza agente sul moto
- 3.3 Lancio verso l'alto
- 3.4 Statica
- 3.5 Dinamica e moti armonici
- 3.6 Forze

3.1.1 La prima legge

Prima legge della dinamica (legge di inerzia)

Un corpo permane nel suo stato di *quiete* o moto rettilineo uniforme finché non intervenga un *agente esterno*.

In altre parole, se nulla “rompe le scatole” al corpo, esso permanerà nel suo stato di moto, naturalmente.

Sistema inerziale

Sistema nel quale vale la prima legge della dinamica.

3.1.2 La seconda legge

Quando l'agente esterno agisce sull'oggetto, l'effetto è un cambiamento nello stato di moto di quell'oggetto. Ovvero, cambia la sua velocità. La variazione della velocità nel tempo è chiamata **accelerazione**.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = a$$

Seconda legge della dinamica

Il cambiamento dello stato di moto è proporzionale all'intensità della forza applicata.

$$F \propto a \quad (3.1)$$

Inoltre, il cambiamento avviene lungo la retta secondo la quale la forza si applica.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (3.2)$$

Gli oggetti hanno inerzia, ovvero capacità di opporsi all'agire dell'agente esterno. Questa capacità di opporsi è rappresentato da una quantità detta *massa inerziale*. Essa è la costante di proporzionalità che lega forza applicata e accelerazione: fissata una accelerazione a , più m è grande, tanto più F cresce. Questo è l'effetto tangibile dell'inerzia.

3.1.3 Analisi dimensionale

$$[F] = [ma] = \left[m \cdot \frac{v}{t} \right] = \left[m \cdot \frac{l}{t^2} \right]$$

$$1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{udm} \left[M \cdot \frac{L}{T^2} \right] = \text{udm}[F] = 1 \text{ N}$$

3.1.4 Molla e forza elastica

$$F \propto \Delta x$$

La forza che la molla esercita, essendo in opposizione alla direzione nella quale la deformazione viene effettuata, corrisponde a:

$$F_{el} = -k\Delta x$$

3.2 Forza agente sul moto

Un blocco di massa $m = 10 \text{ kg}$ viaggia ad una velocità $v_i = 2 \text{ m/s}$. Una forza $F = 20 \text{ N}$ agisce sul blocco per $T = 5 \text{ s}$. Quale velocità raggiungerà il blocco dopo T ? Dopo T , la forza cessa di agire e il blocco viaggia a v_f trovata precedentemente. Includendo lo spazio percorso durante T (e dunque il tempo T), quanto tempo impiega il blocco a coprire $s_w = 2 \text{ km}$ di distanza?

Per rispondere al primo quesito, possiamo assumere un moto rettilineo uniformemente accelerato durante l'intervallo T . Sappiamo che

$$a = \frac{F}{m} = \frac{dv}{dt}$$

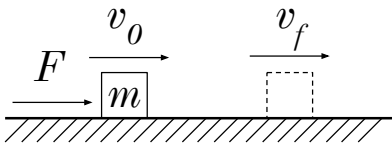


Figura 3.1: Forza agente su una massa in moto

Da cui possiamo esprimere la velocità in funzione del tempo (la velocità iniziale la conosciamo già, ma assumiamo un tempo iniziale $t_0 = 0$):

$$\frac{F}{m}dt = dv \rightarrow \int_{t_0}^t \frac{F}{m}dp = \int_{v_0}^v dw \rightarrow \frac{F}{m} \int_0^t dp = v - v_0 \rightarrow \frac{F}{m}t = v - v_0$$

Dunque

$$v(t) = v_0 + \frac{F}{m}t$$

Non ci manca che calcolare la velocità in corrispondenza di un $t_f = t_0 + \Delta t = 0 + T = T$:

$$v(t_f) = v(T) = v_0 + \frac{F}{m}T$$

Nel secondo quesito, possiamo spezzare il problema in due parti: durante l'azione della forza, la distanza percorsa (s_a) deve essere calcolata tenendo conto del moto uniformemente accelerato, mentre nell'intervallo di tempo successivo (T_v) il moto è semplicemente uniforme. Dalla seguente equazione, possiamo ricavare T_v (T lo conosciamo già).

$$s_w = s_a + s_v = s_a + v_f T_v = \int_0^T (v_0 + at)dp + v_f T_v = v_0 T + \frac{1}{2}aT^2 + v_f T_v$$

Il tempo per percorrere 2 km è dunque:

$$T_{2 \text{ km}} = T + \frac{s_w - v_i T - \frac{F}{2m}T^2}{v_f} = T + \frac{s_w - v_i T - \frac{F}{2m}T^2}{v_i + \frac{F}{m}T}$$

3.3 Lancio verso l'alto

Si consideri la situazione mostrata in Figura 3.2. Durante la salita, l'oggetto rallenta a causa dell'accelerazione di gravità g . Determiniamo la quota che l'oggetto raggiungerà.

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a dt \rightarrow \int_{v_0}^v dw = \int_{t_0}^t a dp \rightarrow v - v_0 = a \int_{t_0}^t dp \rightarrow v - v_0 = a(t - t_0)$$

Dunque

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) = v_0 + at$$

Rallentando, si arriverà ad un istante t_f nel quale l'oggetto avrà velocità nulla:

$$v(t_f) = 0 \rightarrow v_0 + at_f = 0$$

Non disponiamo tuttavia del tempo, ma possiamo avvalerci della legge oraria che descrive la distanza percorsa:

$$v(t) = \frac{dh}{dt} \rightarrow \int_{h_0}^h dk = \int_{t_0}^t v(t)dp \rightarrow h - h_0 = \int_{t_0}^t (v_0 + at)dp$$

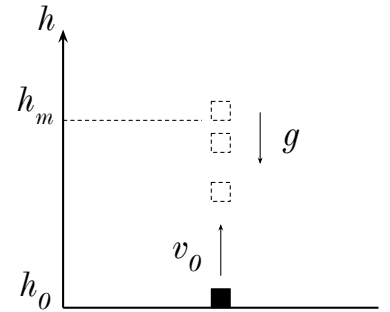


Figura 3.2: Lancio di un oggetto verso l'alto

$$h - h_0 = v_0 \int_{t_0}^t dp + a \int_{t_0}^t p dp \rightarrow h - h_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Da cui:

$$h(t) = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Abbiamo quindi ottenuto la quota in funzione del tempo, che possiamo ricavare dall'equazione $v_0 + a t_f = 0 \rightarrow t_f = -\frac{v_0}{a}$.

$$h(t_f) = v_0 t_f + \frac{1}{2} a t_f^2 = -\frac{v_0^2}{a} + \frac{1}{2} a \frac{v_0^2}{a^2} = -\frac{v_0^2}{a} + \frac{v_0^2}{2a} = -\frac{v_0^2}{2a}$$

Sapendo che $a = -|g|$, la quota massima h_m raggiunta è:

$$h_m = \frac{v_0^2}{2|g|}$$

Spostamento

$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_f - \mathbf{s}_i$$

3.3.1 La terza legge

Terza legge della dinamica (legge di azione e reazione)

La forza che un corpo A esercita su un corpo B è uguale e opposta alla forza che

$$\mathbf{F}_{A \rightarrow B} = -\mathbf{F}_{B \rightarrow A}$$

3.4 Statica

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = m \mathbf{a}$$

La somma nel membro di sinistra è detta *risultante* (\mathbf{R}). In quiete, non c'è accelerazione:

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

Se la velocità è costante, possiamo parlare di problemi di quiete? Yes.

Esercizio

$$\mathbf{P} + \mathbf{T} = \mathbf{0} \Rightarrow -mg + T = 0 \Rightarrow T = mg.$$

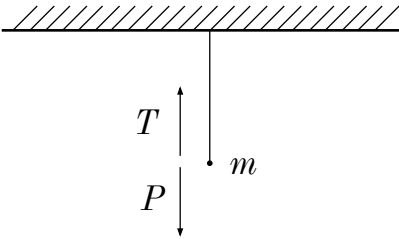


Figura 3.3: Massa appesa ad un filo

Esercizio

Come quello precedente ma con due corde che tengono m , inclinate di tot gradi fissate al soffitto. Trovare la tensione su ciascun filo.

3.5 Dinamica e moti armonici

Tratteremo il moto armonico introducendo elementi di dinamica newtoniana, studiando in particolare i cosiddetti *oscillatori armonici*.

Oscillatore armonico

Un oscillatore armonico è un oggetto su cui agisce una forza proporzionale, in modulo, allo spostamento dalla posizione di equilibrio e diretta in verso opposto rispetto a tale spostamento.

Saranno due gli oscillatori armonici di nostro interesse: l'oscillatore a molla e il pendolo semplice. Tuttavia, esistono numerosi esempi di oscillatori armonici in natura, come uno snowboarder che compie evoluzioni in un half-pipe o un atomo che vibra intorno al suo punto di equilibrio, il bilanciere di un orologio (con le dovute approssimazioni).

3.5.1 Le equazioni del moto armonico

Riprendiamo le equazioni del moto armonico introdotto nel capitolo precedente. Il cuore pulsante di tutte le leggi orarie del moto armonico è la funzione periodica, seno o coseno. La scelta tra queste due dipende dal sistema di riferimento scelto e dalle condizioni iniziali dell'oscillatore. Nel nostro caso, scegliamo un oscillatore che parte dalla posizione di equilibrio (e che come vedremo avrà velocità massima in questo punto), quindi utilizziamo il seno per descrivere la sua posizione in funzione del tempo:

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

È necessario fare alcune precisazioni: per *posizione* non intendiamo solo quella spaziale, ma anche, per esempio, quella angolare; inoltre, l'equazione precedente non è sufficientemente generale, perché abbiamo implicitamente supposto che l'istante temporale iniziale sia $t_0 = 0$. Per questo, la legge oraria generale della posizione di un oscillatore armonico è $x(t) = A \sin(\omega(t - t_0)) = A \sin(\omega t - \omega t_0)$ (è facile verificare che effettivamente $x(t_0) = 0$, in accordo con la nostra scelta del sistema di riferimento). In genere la legge si scrive in questo modo

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (3.3)$$

Introduciamo alcune terminologie tecniche:

- **Ampiezza** A : si tratta del massimo spostamento spaziale dell'oscillatore a partire dal suo punto di equilibrio, in genere assunto come origine del sistema di riferimento adottato per la posizione. Nell'esempio del moto circolare, corrisponde al raggio della circonferenza. L'oscillatore si muove di fatto tra il massimo A e il minimo $-A$.
- **Pulsazione** ω : è un indice della "rapidità" dell'oscillatore nel compiere i suoi cicli. Approfondiremo meglio l'interpretazione della pulsazione nei prossimi paragrafi.
- **Fase** $\phi = -\omega t_0$: intuitivamente, lo "sfasamento" dell'oscillatore. Incontriamo spesso oscillatori sfasati quando essi vengono messi in moto in istanti differenti. Per comodità, ometteremo spesso la fase, sottintendendo $t_0 = 0$.

Con qualche derivata della posizione, otteniamo velocità e accelerazione dell'oscillatore in funzione del tempo:

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(A \sin(\omega t + \phi)) = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}(A\omega \cos(\omega t + \phi)) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

Ecco dunque le leggi orarie generali della velocità e dell'accelerazione di un oscillatore armonico:

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi) \quad (3.4)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) \quad (3.5)$$

Concludiamo scrivendo la legge per eccellenza di un moto armonico, ovvero la *condizione sufficiente*. Sappiamo che l'accelerazione non è altro che la derivata seconda della posizione rispetto al tempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Ma dall'Equazione 3.5 notiamo che

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2(A \sin(\omega t + \phi)) = -\omega^2 x$$

Dunque

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (3.6)$$

Abbiamo appena definito matematicamente l'oscillatore armonico: cinematicamente, in un oscillatore l'accelerazione è proporzionale allo spostamento con costante di proporzionalità negativa.

Interpretazione dell'ampiezza**Interpretazione della fase****Interpretazione della pulsazione**

In tutte le equazioni dei moti armonici dominano le funzioni goniometriche. Esse sono periodiche, ovvero esiste una quantità T tale per cui $f(x+T) = f(x)$ per ogni x appartenente al dominio di f . In parole meno fredde, dopo un certo *periodo* la funzione si ripete, ciclicamente. Per seno e coseno, il periodo corrisponde a 2π (infatti, vale per esempio $\sin(x+2\pi) = \sin(x) \quad \forall x$).

Isoliamo la componente goniometrica delle equazioni armoniche, considerando per esempio il seno e ignorando la fase ϕ (per il coseno il ragionamento è analogo, mentre per ϕ possiamo risolvere il problema mediante trasformazioni). Supponiamo di avere il periodo T , ovvero quel valore per cui la funzione ritorna uguale a se stessa:

$$\sin(\omega t) = \sin(\omega(t+T)) = \sin(\omega t + \omega T)$$

Sapendo che il periodo del seno è 2π :

$$\omega T = 2\pi \quad \therefore \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Possiamo dunque comprendere il significato della pulsazione ω : il suo valore è inversamente proporzionale al periodo T , ovvero la pulsazione cresce al diminuire di T , e viceversa. Questo vuol dire che ω fornisce un indice della “rapidità” con la quale le oscillazioni di un moto armonico avvengono. Graficamente, ω comprime verso l’asse dell’ampiezza la funzione goniometrica quando il suo valore cresce.

3.5.2 L’oscillatore a molla

Consideriamo un carrello di una rotaia a cuscino d’aria di massa m attaccato ad una molla di costante elastica k , indice della durezza della molla. Quando la molla si trova nella posizione di equilibrio, cioè né estesa né compressa, il carrello rimane fermo. Poniamo questa posizione come l’origine $x_o = 0$ di un asse delle posizioni. Se il carrello viene spostato dall’equilibrio e portato a una distanza \bar{x} da tale posizione, la molla esercita una forza elastica di *richiamo* che, per la legge di Hooke, corrisponde a

$$F = -k(x - x_o) = -kx$$

Il segno negativo indica appunto che si tratta di una forza di richiamo, dunque opposta, nel suo verso, allo spostamento dalla posizione di equilibrio. Possiamo applicare la seconda legge di Newton:

$$-kx = ma = m \frac{d}{dt}(v) = m \frac{d}{dt} \frac{d}{dt}(x) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Da cui

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

È evidente che si tratta di un oscillatore armonico, perché l'accelerazione è proporzionale allo spostamento, con costante di proporzionalità negativa. Questa costante è $-\frac{k}{m} = -\omega^2$, da cui possiamo dedurre il periodo dell'oscillatore a molla:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.7)$$

Oscillatori verticali

Anche una massa appesa ad una molla verticale può comportarsi come un oscillatore armonico. L'unica differenza è la posizione di equilibrio, nella quale il peso della massa eguaglia la forza di richiamo della molla:

$$mg = kx_0$$

Indipendentemente dal sistema di riferimento utilizzato, l'equazione del periodo non cambia. La forma delle equazioni armoniche rimane pressoché invariata, ma è necessario fare attenzione ad eventuali traslazioni spaziali derivanti dalla scelta del sistema di riferimento.

Misurare dinamicamente k di molle per ammortizzatori

Per misurare la costante elastica di una molla, è immediato tentare un approccio statico, quindi allungando la molla, registrando la lunghezza di tale allungamento e la forza di richiamo della molla in seguito alla deformazione. Esiste tuttavia un metodo ancora più interessante che sfrutta le equazioni armoniche, in particolare il periodo espresso nell'equazione 3.7.

$$k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$$

Supponiamo di voler misurare la costante elastica dell'ammortizzatore di un'auto. Con un po' di ingegno, deduciamo che se affrontiamo un dosso ad alta velocità l'auto oscillerà verticalmente per qualche istante, per poi assestarsi. Possiamo dunque stimare il tempo che l'auto impiega per compiere la primissima oscillazione, che in realtà corrisponderà pressapoco alla metà del periodo di oscillazione. Infine, conoscendo la massa dell'auto, è possibile utilizzare l'equazione precedente, ma con una massa divisa per quattro, perché essa viene distribuita sulle quattro ruote.

3.5.3 Il pendolo

Quello del pendolo semplice è un sistema fisico descrivibile mediante il modello del moto armonico. Un pendolo semplice è formato da una massa m

appesa ad un filo o un'asta (idealmente inestensibili e di massa trascurabile) con una certa lunghezza l . Il punto di equilibrio stabile del pendolo si trova esattamente al di sotto del punto di sospensione. Di fatto, la posizione a riposo corrisponde a quella illustrata nel sistema della Figura 3.3, dove è stato appunto mostrato che la risultante delle forze agenti sulla massa appesa è nulla.

Supponiamo di spostare la massa dalla sua posizione di equilibrio, formando un angolo θ tra il filo e la verticale. Sappiamo che la massa può oscillare lungo un arco di circonferenza. Fissiamo un sistema di riferimento solidale alla massa, con un asse coincidente con la retta passante per il filo e l'altro ad esso perpendicolare, dunque tangente all'arco. Scomponiamo dunque il peso della massa lungo questi assi (perpendicolare e tangenziale) e applichiamo la seconda legge della dinamica:

$$ma_t = P_t = -mg \sin \theta$$

$$ma_n = -P_n + T + F_c = 0$$

Notare che nella seconda equazione è presente anche la forza centripeta F_c derivante dal moto circolare, oltre la tensione. Concentriamoci sull'accelerazione tangenziale nella prima equazione. Ricordando che gli angoli sono in relazione con la lunghezza degli archi a secondo l'equazione $a = l\theta$:

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega l) = l \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Dunque, riprendendo la primissima equazione riguardo la componente tangenziale del peso, semplificando la massa:

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin \theta = 0$$

Per rendere più semplice la trattazione del sistema fisico, supporremo per ipotesi che $\theta \ll 1$ (in radianti), dunque ciò che calcoleremo in seguito varrà solamente per piccole oscillazioni del pendolo. Ricordando le proprietà delle serie di Taylor, possiamo approssimare il seno nella precedente equazione, dividere per la lunghezza l del pendolo ottenendo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Diventa dunque evidente il motivo della semplificazione: abbiamo ottenuto una relazione nella quale l'accelerazione (angolare) dipende proporzionalmente dallo spostamento (angolare) con costante di proporzionalità negativa. In altre parole, si tratta della descrizione di un moto armonico semplice nella forma $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, dalla quale si deduce che $\omega^2 = \frac{g}{l}$. Ma sapendo che $\omega^2 = (\frac{2\pi}{T})^2$ abbiamo modo di determinare il periodo di oscillazione del pendolo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3.8)$$

Prima	$\varepsilon \rightarrow 0$	Dopo
$\sin \varepsilon$		ε
$\tan \varepsilon$		ε
$\cos \varepsilon$		$1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$
e^ε		$1 + \varepsilon$
$(1 + \varepsilon)^\alpha$		$1 + \alpha\varepsilon$

Isocronia delle piccole oscillazioni

Come già aveva concluso Galileo nel 1583, il periodo di oscillazione del pendolo, ristretta ad angoli ridotti a partire dalla posizione di equilibrio, non dipende dall'ampiezza, come altri moti armonici. Questo fatto è dimostrato dall'equazione precedentemente ottenuta (Equazione 3.8). Ciò che rende un pendolo diverso dall'altro è la lunghezza del filo e “il pianeta su cui si trova”, intendendo l'accelerazione gravitazionale g . Mantenendo invariati questi parametri, possiamo fissare una qualsiasi massa m e caricare il pendolo a nostro piacere (sempre entro i limiti di angoli ridotti), ma T non cambierà.

Il fatto che l'oscillazione non dipenda dalla massa fissata trova una motivazione analoga a quella di una massa in caduta libera, dove l'accelerazione è sempre la stessa. Masse ridotte si muovono più facilmente per la loro piccola inerzia, ma tuttavia su di esse agisce una forza altrettanto ridotta; d'altra parte, masse maggiori sono sottoposte a forze gravitazionali maggiori, ma sono anche più difficili da spostare. Per giustificare intuitivamente l'indipendenza dall'ampiezza, è sufficiente pensare che una maggiore “carica” è compensata da un tragitto maggiore (l'arco di circonferenza descritto durante l'oscillazione).

Possiamo dunque concludere che queste compensazioni sono il motivo delle indipendenze osservabili nell'equazione 3.8.

Analisi approfondita del moto di un pendolo

Alla luce delle equazioni sul moto armonico semplice, poniamo

$$\theta = A \sin(\omega t + \phi)$$

e definiamo la velocità *angolare* di una massa di un pendolo semplice:

$$\nu = \frac{d\theta}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

Ricordiamo che l'ampiezza A corrisponde all'angolo massimo spazzato durante l'oscillazione, quindi si tratta di una grandezza adimensionale, seppur col significato di radianti. Per quanto riguarda l'accelerazione angolare:

$$\alpha = \frac{d\nu}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

Descriviamo a , l'arco di circonferenza descritto durante il moto, sapendo che la lunghezza del filo è l :

$$a = l\theta = lA \sin(\omega t + \phi)$$

Per quanto riguarda velocità tangenziale e accelerazione tangenziale:

$$v_t = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(l\theta) = l \frac{d\theta}{dt} = l\nu = lA\omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -lA\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

Tensione del filo di un pendolo semplice in funzione del tempo

All'inizio di questa sottosezione, abbiamo analizzato le forze in gioco distinguendo le componenti tangenziali e perpendicolari alla circonferenza descritta dal pendolo. È ora di analizzare la componente perpendicolare, la quale permette al pendolo di non distruggersi durante l'oscillazione. Infatti, la massa è mantenuta nella sua traiettoria per mezzo della tensione del filo, che si contrappone alla componente perpendicolare del peso della massa appesa più la forza centripeta derivante dal moto circolare in atto. La relazione tra i moduli di queste forze è dunque la seguente:

$$T = P_{\perp} + F_c = mg \cos \theta + ma_c = mg \cos \theta + m \frac{v_t^2}{l}$$

Data la variazione di θ e di v_t durante l'oscillazione, segue che la tensione dipende dal tempo. Approssimiamo l'equazione supponendo $\theta \ll 1$, possiamo utilizzare l'equazione della velocità tangenziale ottenuta precedentemente:

$$T(t) = mg \cos \theta(t) + mL^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Per via delle approssimazioni, possiamo semplificare anche la funzione coseno dipendente da θ , rimanendo con il termine $mg(1 - \frac{\theta^2}{2})$. Avendo la descrizione armonica $\theta(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ otteniamo la funzione della tensione di un pendolo per piccole oscillazioni:

$$T(t) = mg \left(1 - \frac{(A \sin(\omega t + \phi))^2}{2} \right) + mL^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad (3.9)$$

3.6 Forze

Il mondo che ci circonda è costituito da oggetti che esercitano delle azioni gli uni sugli altri. Tali azioni impresse da agenti esterni su altri agenti sono generalmente chiamate *forze*, ma possono avere natura differente a seconda del fenomeno fisico in esame. Ad esempio, le forze possono agire per contatto, come la spinta delle ruote di un'auto sull'asfalto, o a distanza, come la forza di gravità. Rimane tuttavia la caratteristica comune del loro *effetto*, ovvero la capacità di modificare il moto dei corpi in accordo con la seconda legge della dinamica.

3.6.1 Peso

3.6.2 Forza elastica

3.6.3 Attrito

Anche la più liscia delle superfici, se osservata a livello atomico, risulta scabra. Per far scorrere due superfici l'una sull'altra, occorre superare la resistenza dovuta agli urti fra i loro minuscoli avvallamenti e sporgenze. Questo modello

grossolano spiega intuitivamente l'origine della forza chiamata *attrito*. Esso dipende da molti fattori, come il materiale, la finitura delle superfici, la presenza di lubrificanti, e pertanto non esiste una legge fisica semplice ed universale che lo descriva. È tuttavia possibile derivare alcune leggi empiriche in grado di calcolare le forze di attrito.

Attrito radente

L'attrito radente si manifesta durante lo scivolamento tra due superfici (esiste anche l'attrito volvente, che riguarda corpi estesi che rotolano e ruotano, ma non è di nostro interesse dato lo studio del punto materiale). La forza di attrito radente è proporzionale alla forza normale alla superficie ma è indipendente dalla superficie di contatto fra le superfici ed è espressa dalla relazione

$$\mathbf{F}_A = \mu \mathbf{F}_\perp$$

dove \mathbf{F}_\perp è la forza perpendicolare, o premente, alla superficie, mentre μ è un coefficiente di attrito che dipende dai materiali degli oggetti e altri fattori e spesso è compreso tra 0 e 1.

Le forze di attrito si suddividono a loro volta in attrito *dinamico* e *statico*.

Attrito dinamico

L'attrito dinamico si oppone allo scorrimento di un corpo su una superficie.

Attrito statico

L'attrito statico si oppone al distacco di un corpo da una superficie. Esso tende a impedire che un oggetto fermo su una superficie si distacchi da essa, cominciando a scivolare. L'attrito statico è generalmente maggiore di quello dinamico, perché, quando le superfici sono in contatto statico, i loro microscopici avvallamenti (riprendiamo il modello introdotto per spiegare l'origine dell'attrito) possono aderire maggiormente l'uno all'altro, determinando una maggiore interazione tra superfici.

...

$\mathbf{F}_A = \mu |\mathbf{N}| \hat{A}$. Grafico, zona statica forza di attrito statica, regime dinamico forza di attrito dinamica.

Statica

$$\mathbf{F}_{A,S} = -\mathbf{F}_{app,T} \quad (3.10)$$

$$|\mathbf{F}_{A,S}| = |\mathbf{F}_{A,S}^{\max}| = \mu_s |\mathbf{N}| \quad (3.11)$$

Dinamica

$$\mathbf{F}_{A,D} = -\mu_d |\mathbf{N}| \hat{v} \quad (3.12)$$

4

Meccanica

4.1 Lavoro di una forza

Il lavoro di una forza costante corrisponde al prodotto scalare¹ tra la forza e lo spostamento:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \quad (4.1)$$

Il lavoro si misura in Joule (J), dove

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Lavoro di una forza variabile durante lo spostamento:

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{r} \quad (4.2)$$

app

Si parte da $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$. Abbiamo una traiettoria qualsiasi, posizione descritta da $\vec{r}(t)$. Prendiamo una variazione infinitesima della posizione $\Delta\vec{r} \rightarrow d\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$.

4.1.1 Lavoro di una forza

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{F}| |d\mathbf{r}| \cos \theta$$

Può essere positivo, negativo, nullo.

- **Lavoro motore** $dW > 0$
- **Lavoro resistente** $dW < 0$ (la forza si oppone allo spostamento)
- **Lavoro nullo** $dW = 0$ (la forza è ortogonale allo spostamento), es forza centripeta

¹Ricordiamo che il prodotto scalare p tra due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} è un valore scalare definito da $p = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta_{\mathbf{ab}}$, con $\theta_{\mathbf{ab}}$ l'angolo tra i vettori.

4.1	Lavoro di una forza
4.2	Teorema delle forze vive
4.3	Forze conservative
4.4	Energia potenziale
4.5	Conservazione dell'energia meccanica

Analisi dimensionale:

$$[dW] = [\mathbf{F}d\mathbf{r}] = \left[M \frac{L}{T^2} L \right] = \left[M \left(\frac{L}{T} \right)^2 \right]$$

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Esempio cammino sentiero

$$W_{A \rightarrow B} = \sum_{i=A}^{N=B} dW_i \rightarrow \int_A^B dW \text{ per } N \rightarrow \infty$$

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Notiamo che

$$\mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{P}|(|d\mathbf{r}| \cos \theta)$$

Dove abbiamo la proiezione dello spostamento sul peso \mathbf{P} . Questo significa che per calcolo del lavoro importa solo la variazione della quota, dh .

$$W_{0 \rightarrow 2000 \text{ m}} = \sum_0^{2000} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2000} mg dh = mgh_{bondone}$$

Versore

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^L (F \hat{f}) \cdot (ds \hat{x}) = F(\hat{f} \cdot \hat{x}) \int_0^L ds = F \cos(\theta) L$$

Quindi

$$\cos \theta = \frac{W}{FL}$$

4.2 Teorema delle forze vive

vis viva (forza viva), quantità che viene dalle forze, che pareva avere vita propria, in grado di trasferirsi da corpo a corpo. Partiamo da seconda legge della dinamica

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Senza giustificare le ragioni matematiche dei prossimi passaggi, ma facendoci guidare dall'intuizione fisica, eseguiamo il prodotto scalare con $d\mathbf{s}$ su entrambi i membri

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} = m d\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

Notiamo che questa operazione ha permesso di ottenere un lavoro al membro di sinistra, mentre a destra si ottiene il termine $d\mathbf{s}/dt$, che corrisponderebbe proprio alla velocità \mathbf{v} . Con ulteriori sviluppi, si raggiunge la seguente equazione (il simbolo d ha il significato fisico di variazione o differenza infinitesima).

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = m d \left[\frac{v^2}{2} \right]$$

Dimostriamo come sviluppare il termine $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d \left[\frac{v^2}{2} \right]$. Ricorriamo alla definizione vettoriale di prodotto scalare² e utilizziamo questo abuso di notazione, ma ragionevole dal punto di vista fisico:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2}{2} + c \right] = x \Rightarrow \int x dx = \int d \left[\frac{x^2}{2} \right]$$

Quindi

$$v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z \Rightarrow d \left[\frac{v_x^2}{2} \right] + \dots = d \left[\frac{v_x^2 + \dots}{2} \right] = d \left[\frac{v^2}{2} \right]$$

Riprendendo l'equazione $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m d \left[\frac{v^2}{2} \right]$ otteniamo

$$dW = d \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]$$

Il termine $E_K = \frac{1}{2} m v^2$ viene chiamato *energia cinetica*. Quindi

$$dW = dE_K$$

Questa equazione può essere tradotta come “una infinitesima quantità di lavoro corrisponde ad una variazione infinitesima dell'energia cinetica”. Ora possiamo enunciare il teorema delle forze vive:

Teorema dell'energia cinetica (o delle forze vive)

Quando una forza (risultante) applicata a un oggetto per un dato tratto di traiettoria, compie su di esso un lavoro, il risultato è una variazione del modulo della velocità dell'oggetto e quindi una variazione della sua energia cinetica. Quindi, il lavoro compiuto su un oggetto è uguale alla variazione della sua energia cinetica.

$$W_{i \rightarrow f}^{(R)} = \Delta E_K \quad (4.3)$$

È necessario sottolineare alcune osservazioni:

²Il prodotto scalare di due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} è calcolabile anche attraverso la somma dei prodotti tra i valori delle componenti dei due vettori: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + \dots$

1. Il teorema presuppone che il lavoro sia dovuto all'effetto della risultante delle forze agenti sul corpo.
2. Il lavoro è rappresentato da una variazione di energia cinetica. Possiamo descrivere dunque lo stato finale come

$$E_{K,f} = E_{K,i} + W_{i \rightarrow f}$$

dunque se il lavoro, quindi l'energia trasferita all'oggetto, è positivo, l'energia cinetica aumenta e viceversa.

3. Il teorema sposta la descrizione del sistema fisico dal piano vettoriale a quello scalare. Ovvero, partendo da grandezze vettoriali, abbiamo ottenuto una legge dove compaiono solamente dei numeri. Ciò rende particolarmente agevole l'utilizzo del teorema in svariati problemi nei quali l'analisi vettoriale può essere ostica.
4. Il teorema è molto potente per la sua validità generale, perché non sono state fatte ipotesi sulla natura delle forze, se non presupponendo come vera la seconda legge della dinamica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. La legge può essere dunque applicata ad un pendolo, ad una palla da bowling, a delle molecole microscopiche in movimento.

Teorema delle forze vive (fatto ben)

Come adesso scopriremo, la definizione del lavoro introduce una quantità fisica estremamente utile nella trattazione di fenomeni di natura meccanica. Un risultato molto importante in merito è il *teorema dell'energia cinetica* (o, come un tempo, *delle forze vive*, da *vis viva*).

Riprendiamo il secondo principio della dinamica

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Supponiamo che \mathbf{F} sia una forza totale esercitata su di un corpo di massa m . L'azione di \mathbf{F} produce uno spostamento, che considereremo infinitesimo in modo da generalizzare il ragionamento a forze variabili e dipendenti dallo spostamento stesso. Allora

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s}$$

dove al membro di sinistra abbiamo ottenuto il lavoro infinitesimale corrispondente, dW . Osserviamo tuttavia che al membro di destra vale

$$m d\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = m d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

per definizione di velocità (istantanea). Osserviamo dunque ciò che accade passando all'integrazione:

$$\int_i^f m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = m \left[\frac{v^2}{2} \right]_i^f$$

Per questo ultimo passaggio, abbiamo fatto ricorso alla definizione di prodotto scalare e alle proprietà degli integrali:

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \int v_x dv_x + v_y dv_y + \dots = \frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + \dots = \frac{v^2}{2}$$

Abbiamo dunque mostrato che

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

ovvero il lavoro totale (derivante cioè dalla risultante \mathbf{F} su m , come avevamo supposto), dipende solo da certe quantità che definiscono l'oggetto prima e dopo lo spostamento nel quale ha agito la forza. La quantità $\frac{1}{2}mv^2$ corrisponde dimensionalmente ad una certa energia e viene definita *energia cinetica*

$$E_K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2$$

e rappresenta l'energia che un corpo possiede in virtù del suo stato di moto, dunque della sua velocità ad un certo istante.

Applicazione del teorema delle forze vive

Supponiamo di avere un punto di massa m sulla sommità di un piano inclinato di altezza h con un angolo θ rispetto all'orizzontale. Sappiamo che la massa parte dalla cima con velocità v_i parallela alla lunghezza del piano e diretta verso la discesa. Vogliamo trovare la velocità finale della massa. Si esprima il calcolo sia con che senza attrito, considerando nell'ultimo caso un coefficiente di attrito dinamico μ .

Possiamo risolvere il problema utilizzando il teorema delle forze vive.

$$W = \Delta E_K$$

$$W = \mathbf{P} \cdot \mathbf{L} = |\mathbf{P}||\mathbf{L}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = |\mathbf{P}||\mathbf{L}| \sin \theta = |\mathbf{P}|h = mgh$$

$$\Delta E_K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Quindi

$$mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$v_f = \sqrt{2gh + v_i^2}$$

Con attrito il peso è contrastato. L'attrito compie il suo lavoro per tutta la lunghezza del piano fino alla fine della discesa. L'espressione della differenza di energia cinetica è tuttavia la stessa.

$$W = W_P - W_A = Ph - F_A L = Ph - \mu F_{\perp} L = mgh - \mu mg \sin \theta L$$

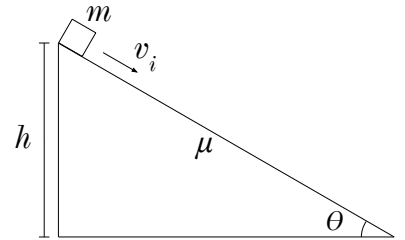


Figura 4.1: Un piano inclinato

Problemino

Supponiamo di avere un piano inclinato, con attrito e lunghezza l , come nel problema precedente. La massa viene stavolta lanciata con una velocità iniziale dalla base del piano. La massa raggiunge una certa altezza h e poi scivola di nuovo fino in fondo. Si vuole determinare la velocità alla quale la massa raggiunge nuovamente la base del piano.

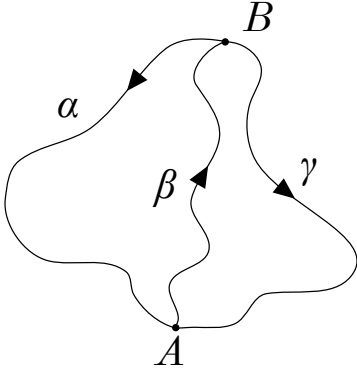
4.3 Forze conservative

In fisica, possiamo classificare le forze in *conservative* e *non conservative*. La distinzione tra di esse sta nel fatto che quando agisce una forza conservativa, il lavoro compiuto viene immagazzinato in una forma di energia, *l'energia potenziale*, che è possibile risprigionare. Il lavoro compiuto da una forza non conservativa, invece, non può essere recuperato in seguito come energia cinetica, ma viene trasformato in altre forme di energia. Le differenze tra forze conservative e non conservative emergono se prendiamo in esame il moto di un oggetto lungo una traiettoria chiusa.

Forza conservativa (condizione I)

Una forza conservativa è una forza che compie un lavoro totale nullo lungo ogni percorso chiuso. Se il percorso è $\gamma = A \rightarrow A$ (il percorso si chiude su se stesso) e \mathbf{F} è una forza conservativa, allora:

$$W_{A \rightarrow A} = \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \forall \gamma \quad (4.4)$$



Da questa prima caratteristica delle forze conservative ne segue una seconda. Si considerino i percorsi tra A e B in Figura 4.2. Supponiamo di dover raggiungere il punto A partendo da B e possiamo fare ciò percorrendo due strade differenti, α e γ . Disegniamo poi un terzo percorso, che invece riporta A in B . Per ipotesi vale la condizione I, ovvero sta agendo una forza conservativa lungo tali percorsi. Dunque, il lavoro compiuto dalla forza nei percorsi chiusi $\alpha\beta$ e $\beta\gamma$ è nullo:

$$W_{\alpha\beta} = W_{\alpha} + W_{\beta} = 0$$

$$W_{\beta\gamma} = W_{\beta} + W_{\gamma} = 0$$

Ma allora

$$W_{\beta} = -W_{\alpha} = -W_{\gamma} \quad \therefore \quad W_{\alpha} = W_{\gamma}$$

Abbiamo mostrato che il lavoro compiuto dalla forza conservativa dal punto B al punto A è uguale per entrambi i percorsi. In altre parole, il lavoro totale dipende solo dai punti A e B .

Figura 4.2: Percorsi tra due punti in presenza di una forza conservativa

Possiamo dimostrare questa proprietà in un altro modo. Consideriamo il percorso chiuso $\beta\gamma$. Vale per ipotesi

$$W_{\alpha\beta} = W_\beta + W_\gamma = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Quindi

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Forza conservativa (condizione II)

Una forza è conservativa se il lavoro totale compiuto da essa durante uno spostamento da A a B dipende unicamente da questi punti di partenza e di arrivo, non dal percorso seguito tra essi.

$$W[\mathbf{F}]_{A \rightarrow B} \text{ indipendente dai percorsi tra } A \text{ e } B$$

4.4 Energia potenziale

Una forza conservativa può essere caratterizzata da una terza condizione che deriva dalla seconda.

Forza conservativa (condizione III)

Una forza è conservativa se il lavoro effettuato da essa è esprimibile in funzione delle sole “coordinate” A e B tramite una primitiva nella forma seguente:

$$W_{A \rightarrow B} = - [\mathcal{U}(\mathbf{x}_B) - \mathcal{U}(\mathbf{x}_A)] = -\Delta\mathcal{U}$$

Questa condizione esprime la proprietà delle forze conservative di consentire agli oggetti ad essa sottoposti di immagazzinare una certa quantità di energia da essa trasferita se l'oggetto passa da A a B e di liberare quella stessa energia nel tragitto inverso. Immaginiamo di lanciare una palla nel vuoto. La forza peso, derivante dalla gravità, è conservativa. Mentre la palla cade, il peso effettua un lavoro su di essa e di fatto la sua energia cinetica aumenta. Quella energia deve pur provenire da qualche parte. Se osserviamo questo esperimento “invertendo il tempo” (o equivalentemente lanciamo in alto la palla), osserviamo che la forza peso esegue un lavoro negativo sulla palla, quindi la sua energia cinetica diminuisce mano a mano. Ma il peso è una forza conservativa, dunque l'energia da essa sottratta viene comunque conservata in qualche forma. Questa è l'energia potenziale, che dipende appunto dalla differenza di quota della palla.

Mostriamo come ricavare la condizione III. Sappiamo che il lavoro di una forza conservativa è definita da un integrale, che non dipende dal percorso

effettuato tra l'inizio A e la fine B . Dunque il lavoro deve in qualche modo poter essere descritto da una funzione nelle variabili A e B .

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(A, B)$$

Questa funzione sarà una qualche primitiva della funzione integranda, che sarà quindi composta da dei contributi lineari di A e B dentro qualche funzione \mathcal{U} (a meno di costanti moltiplicative esterne alla funzione). Abbiamo quindi le seguenti scelte:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(A) + \mathcal{U}(B) \\ \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B) \end{aligned}$$

Ma sapendo che la funzione $f(A, B)$ è una qualche primitiva, ciò significa che deve valere la proprietà di antisimmetria (invertendo gli estremi di integrazione, deve cambiare il segno). Questa proprietà vale solo per la seconda funzione:

$$f(B, A) = \mathcal{U}(B) - \mathcal{U}(A) = -(\mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B))$$

Definiamo dunque la *differenza di energia potenziale* per forze conservative.

$$\Delta\mathcal{U}_{A \rightarrow B} = \mathcal{U}(B) - \mathcal{U}(A) = -W_{A \rightarrow B}$$

Notare che stiamo definendo solo la differenza di energia potenziale, non l'energia potenziale in sé. Possiamo infatti fissare lo “zero” dell'energia potenziale in modo del tutto arbitrario, in quanto esso non sarà mai utile nel risultato finale di un problema di meccanica.

4.4.1 Energia potenziale gravitazionale

4.4.2 Energia potenziale elastica

4.5 Conservazione dell'energia meccanica

Ricordiamo il teorema delle forze vive (Equazione 4.3)

$$W_{i \rightarrow f}^{\text{tot}} = E_{K,f} - E_{K,i}$$

Abbiamo inoltre mostrato che il lavoro dovuto alle forze conservative è legato ad una differenza di energia potenziale:

$$W_{i \rightarrow f}^{\text{FC}} = -(\mathcal{U}_f - \mathcal{U}_i)$$

Per il principio di sovrapposizione, possiamo esprimere il lavoro totale nel seguente modo, separando forze conservative e non conservative:

$$W_{i \rightarrow f}^{\text{tot}} = W_{i \rightarrow f}^{\text{FNC}} + W_{i \rightarrow f}^{\text{FC}}$$

Unendo le equazioni finora ottenute,

$$W_{i \rightarrow f}^{\text{FNC}} = \Delta E_K + \Delta \mathcal{U} = (E_{K,f} + \mathcal{U}_f) - (E_{K,i} + \mathcal{U}_i) = \Delta E \quad (4.5)$$

Al membro destro abbiamo unito quantità relative a momenti correlati, cioè abbiamo unito energia cinetica finale con energia potenziale finale ed energia cinetica iniziale con energia potenziale iniziale. La somma di queste quantità viene chiamata *energia meccanica*:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} E_K + \mathcal{U} \quad (4.6)$$

Dalla 4.5 possiamo notare che, se agiscono forze non conservative, la variazione di energia meccanica corrisponde al lavoro effettuato dalle forze non conservative stesse. Per questo, è intuitivo utilizzare l'equazione nella forma

$$E_f = E_i + W_{i \rightarrow f}^{\text{FNC}}$$

perché permette di capire che l'energia meccanica finale del sistema cambierà da quella iniziale di una certa quantità dovuta all'azione delle forze non conservative, che possono aggiungere o sottrarre energia meccanica. In assenza di forze non conservative, allora $W_{i \rightarrow f}^{\text{FNC}} = 0$. Segue dunque un importante teorema, ovvero il teorema di conservazione dell'energia meccanica, del quale abbiamo appena esposto la dimostrazione.

Teorema di conservazione dell'energia meccanica

Se su un oggetto non agisce alcuna forza non conservativa, allora l'energia meccanica si conserva.

$$\Delta E = 0 \quad (4.7)$$

Meccanica e Urti

Vogliamo prevedere lo stato del sistema dopo l'urto, in termini di velocità (vettori) dei corpi coinvolti. Ci serve un *sistema isolato* e la terza legge della dinamica.

5.1 Quantità di moto

Abbiamo sempre espresso la seconda legge come

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

ma questa proposizione afferma che l'effetto dell'agente esterno (la forza \mathbf{F}) si traduce interamente in una variazione dello stato di moto del corpo (accelerazione \mathbf{a}). Si suppone quindi che la massa sia sempre costante, anche se ciò non è sempre vero. Ad esempio, un razzo pieno di carburante non avrà la stessa massa che aveva in partenza una volta arrivato in orbita, quindi la forza esercitata dalla propulsione dei motori si è tradotta non solo in una variazione dello stato di moto, ma anche in una variazione della massa. Non tratteremo sistemi complessi come il razzo, ma ciò fa intuire che la seconda legge della dinamica può essere generalizzata nella forma seguente

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (5.1)$$

Dove la quantità \mathbf{p} prende il nome di *quantità di moto*, definita come

$$\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\mathbf{v} \quad (5.2)$$

Come dice il termine, la quantità di moto descrive il moto dei corpi sulla base della velocità di una massa più la massa stessa, a differenza di quanto accade nello studio cinematico del moto, dove solo le variazioni dello stato di moto contano, slegate da cause (forze) e materia (massa).

5.2 Il fenomeno dell'urto

Urto

Un urto è un'interazione tra corpi, nella quale

Un classico esempio che unisce nozioni su urti e quantità di moto è il tavolo da biliardo. Supponiamo di avere due palle, 1 e 2, sul tavolo in moto rettilineo

5.1	Quantità di moto
5.2	Il fenomeno dell'urto
5.3	Conservazione
5.4	Impulso
5.5	Urti elastici
5.6	Urti anelastici

uniforme e in rotta di collisione tra loro; ovvero, sappiamo con certezza che la loro traiettoria si intersecherà e che tale punto verrà raggiunto da entrambi i corpi nel medesimo istante di tempo. L'esperienza ci permette di concludere che, passata la *zona d'urto*, le palle non procederanno sulle stesse rette dei moti precedenti, ma devieranno. Dobbiamo fare alcune assunzioni fondamentali. Innanzitutto, supporremo che nessun altro agente agirà sul sistema appena descritto (aiuterebbe immaginare due palle che vagano nello spazio profondo). Immaginiamo l'intervallo temporale nel quale le due palle saranno a contatto tra loro, collidendo: entrambe eserciteranno una forza sull'altra e aiutati dalla terza legge della dinamica sappiamo che

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$$

cioè l'applicazione di una forza su una palla determina una forza identica in modulo e direzione, ma verso opposto e applicata sull'altra palla. Sviluppiamo l'equazione sfruttando la definizione di quantità di moto, ricordando che una forza $x \rightarrow y$ determina una variazione dello stato di moto di y .

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_1}{dt}$$

Ricorrendo agli usuali abusi di notazione matematica, ma ragionevoli da un punto di vista fisico, semplifichiamo l'intervallo di tempo infinitesimale del differenziale:

$$\begin{aligned} d\mathbf{p}_2 &= -d\mathbf{p}_1 \\ d[\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2] &= 0 \\ d\mathbf{p}_{\text{tot}} &= 0 \end{aligned}$$

Abbiamo mostrato, in anticipo, che per un sistema di due corpi come le palle da biliardo, assumendo che non agiscano forze esterne, la quantità di moto totale del sistema si conserva. Come l'energia meccanica, possiamo dunque concludere che un urto ideale non modifichi la quantità di moto del sistema. Un'altra supposizione importante che è stata sottintesa è la seguente: le distanze (eventuali variazioni della forma degli oggetti) e i tempi (intervalli di tempo nei quali avviene il contatto o più generalmente l'azione delle forze generate nella collisione) tipici dell'urto sono molto piccoli e trascurabili rispetto a quelli normalmente osservabili al di fuori dell'urto. Con tutte queste assunzioni possiamo descrivere il sistema attraverso la seguente approssimazione (dove m indica la massa di una palla), che consente di descrivere lo stato del sistema prima o dopo l'urto, *iniziale* e *finale*.

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$$

5.3 Conservazione

Come l'energia, nella storia della fisica si è sempre pensato al moto come una quantità che potesse essere trasferita da un corpo ad un altro, fatto

ragionevole ben giustificato dall'esperienza: basti pensare al gioco del biliardo. Come già dedusse Cartesio, la “macchina dell'universo”, assimilata ad un orologio, non può continuare a funzionare senza che una qualche quantità si conservi. Egli stesso fu tra i primi a proporre il prodotto massa-velocità come misura di tale quantità: due carri identici che viaggiano a velocità differenti hanno chiaramente quantità di moto diverse, ma una palla di cannone racchiude in sé maggior moto rispetto ad un sasso lanciato alla stessa velocità. Queste quantità sono presenti negli oggetti secondo distribuzioni differenti e variabili nel tempo, ma nel complesso esse non possono che sommarsi sempre nella medesima quantità; se l'universo è un sistema chiuso, e lo si può supporre per definizione, allora la quantità di moto non può sparire o comparire, ma può trasferirsi tra gli oggetti al suo interno, trasformarsi.

5.3.1 Forze interne ed esterne

Approfondiamo il concetto di *sistema di punti materiali* e studiamone uno contentente un certo numero di punti materiali N . Immaginiamo che tra questi punti agiscano forze di varia natura: repulsive elettriche, attrattive gravitazionali ecc.; inoltre, supponiamo che vengano applicate altre forze dall'esterno di questo sistema di punti materiali¹. Possiamo suddividere le forze in gioco in due insiemi:

1. **Forze interne:** le forze che i punti esercitano gli uni sugli altri. Forze che descrivono l'interazione tra i punti.
2. **Forze esterne:** le forze che l'ambiente esterno esercita sul sistema, l'insieme di punti.

Ogni punto i -esimo sarà sottoposto ad una certa forza totale, o risultante, derivante dalla somma/sovrapposizione di tutte le forze precedentemente descritte

$$\mathbf{R}_i = m_i \mathbf{a}_i$$

$$\mathbf{R}_i^{(E)} + \mathbf{R}_i^{(I)} = m_i \mathbf{a}_i$$

Definiamo le risultanti delle forze esterne, ed interne agenti sul punto i -esimo:

$$\mathbf{R}_i^{(E)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \mathbf{F}_{k \rightarrow i}^{(E)}$$

$$\mathbf{R}_i^{(I)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \mathbf{F}_{j \rightarrow i}^{(I)} \quad j \neq i$$

Supponiamo che un punto non eserciti alcuna forza su se stesso. La risultante di tutte le forze in gioco sarà

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{R}_i$$

¹Una immagine esplicativa è il polmone, dove le molecole dell'aria formano i punti materiali e i muscoli del torace sono gli agenti esterni.

In tale somma, concentriamoci sulla risultante delle forze interne:

$$\mathbf{R}^{(I)} = \sum_i \mathbf{R}_i^{(I)} = \sum_i \sum_j \mathbf{F}_{j \rightarrow i}^{(I)}$$

In questa somma, supponiamo che non vi siano forze agenti su un corpo ed esercitate dal corpo stesso, dunque poniamo $\mathbf{F}_{j \rightarrow i}^{(I)} = \vec{0} \quad \forall j = i$. Sappiamo che vale la terza legge della dinamica, dunque $\mathbf{F}_{j \rightarrow i}^{(I)} = -\mathbf{F}_{i \rightarrow j}^{(I)}$. Ma allora

$$\mathbf{R}^{(I)} = \sum_i \sum_j \mathbf{F}_{j \rightarrow i}^{(I)} = \vec{0} \quad (5.3)$$

Abbiamo appena dimostrato, grazie all'ipotesi della terza legge, che, in un sistema di punti materiali, la risultante delle forze interne è nulla.

5.3.2 Centro di massa

Dall'Equazione 5.3 possiamo dedurre che la risultante delle forze, interne ed esterne, coinvolte in un sistema di punti materiali è determinata solamente dalle forze esterne.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(E)} = \sum_i \mathbf{R}_i^{(E)} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i$$

Dalla precedente equazione, si può ricavare un'interessante definizione:

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = \left(\sum_i m_i \right) \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{\sum_i m_i} \right]$$

Abbiamo ottenuto un termine molto interessante, un artificio matematico che ha interpretazioni e applicazioni piuttosto importanti: *il centro di massa*.

$$\mathbf{x}_{\text{CM}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{\sum_i m_i} \quad (5.4)$$

Dalla definizione è banane² ricavare la velocità e l'accelerazione del centro di massa. Riprendendo le equazioni precedenti e ponendo $M = \sum_i m_i$, possiamo concludere che

$$\mathbf{R}^{(E)} = M \frac{d^2 \mathbf{x}_{\text{CM}}}{dt^2} = M \mathbf{a}_{\text{CM}}$$

5.3.3 La legge di conservazione della quantità di moto

In un sistema isolato, non si rilevano forze esterne. Allora

$$\mathbf{R}^{(E)} = \vec{0} \quad \therefore \quad M \mathbf{a}_{\text{CM}} = 0 \quad \therefore \quad \mathbf{a}_{\text{CM}} = 0$$

²Esattamente, banane. Ci scusiamo per questo scherzo di nevrosi.

ovvero, la velocità del centro di massa è costante, quindi la quantità di moto del centro di massa è costante e si conserva in un sistema isolato. Vale dunque la seguente in un sistema isolato:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\text{CM},i} &= \mathbf{v}_{\text{CM},f} \\ \frac{\sum_j m_j \mathbf{v}_{j,i}}{M} &= \frac{\sum_j m_j \mathbf{v}_{j,f}}{M} \\ \mathbf{P}_{\text{tot},i} &= \mathbf{P}_{\text{tot},f}\end{aligned}$$

Da cui

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}_{\text{tot}} = 0 \quad (5.5)$$

Tale risultato ha conseguenze di portata non trascurabile. Si consideri infatti il problema esposto nella prossima sottosezione.

Punto di collisione

Due magneti di massa m e $5m$ sono mantenuti ad una distanza fissa tra di loro. Una volta rimossi i vincoli, i due magneti si attraggono fino a schiantarsi. Sapendo che il primo magnete si trovava in posizione $x_1 = 0$ mentre il secondo in $x_2 = 8$ cm, si intende individuare la posizione della collisione.

Alla luce della legge di conservazione della quantità di moto, sappiamo che nella situazione iniziale la quantità di moto totale del sistema è nulla, in quanto i due magneti sono mantenuti fermi.

$$\mathbf{p}_i = 0$$

Il problema non fa alcun cenno all'azione di forze esterne, dunque possiamo supporre che il sistema sia isolato e che dunque la quantità di moto iniziale si conserverà anche subito prima dell'urto. Vale allora:

$$\mathbf{p}_i = m\mathbf{v}_{i,\text{tot}} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_{i,\text{tot}} = 0$$

Ma sappiamo anche che la velocità totale è rappresentato dal centro di massa del sistema. Ciò significa che se il centro di massa era “fermo” inizialmente, rimarrà tale anche poco prima dell'urto, grazie alla legge di conservazione della quantità di moto. Basta dunque trovare la posizione del centro di massa e il gioco è fatto.

$$x_{\text{CM}} = \frac{mx_1 + 5mx_2}{m + 5m} = \frac{x_1 + 5x_2}{6} = \frac{5}{6}x_2$$

5.4 Impulso

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \mathbf{F}_{\text{impulsiva}} \simeq \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F}_{\text{impulsiva}} \Delta t$$

Deformazioni per tempi brevi, tempo di contatto.

$$\Delta \mathbf{p} = m \mathbf{v}_f - m(\vec{0}) \quad F_{\text{imp}} = \frac{mv_f}{T}$$

5.5 Urti elastici

In un urto elastico, si conservano la quantità di moto e l'energia cinetica. Un sistema contenente un certo numero di corpi può dunque essere descritto come segue:

$$\begin{cases} \sum_j m_j \mathbf{v}_{0,j} = \sum_j m_j \mathbf{v}_{f,j} & \text{conservazione della quantità di moto} \\ \sum_j m_j \mathbf{v}_{0,j}^2 = \sum_j m_j \mathbf{v}_{f,j}^2 & \text{conservazione dell'energia cinetica} \end{cases}$$

Nella realtà comunemente osservabile, urti pressoché elastici avvengono tra oggetti che rimbalzano tra loro dopo un urto, anche se in realtà l'energia cinetica viene inevitabilmente dissipata in altre forme (suono e calore), rendendo l'urto stesso non del tutto elastico. Sono idealmente elastici urti tra particelle.

5.6 Urti anelastici

Negli urti anelastici, vale sempre la legge di conservazione della quantità di moto. Supponiamo di avere due masse che viaggiano ad una certa velocità e in rotta di collisione tra loro. Dopo l'urto, le due masse rimangono in contatto. Supponendo che le due masse attaccate formino un unico corpo, Vale:

$$\mathbf{p}_{1,i} + \mathbf{p}_{2,i} = \mathbf{p}_{3,f}$$

Dal punto di vista energetico, però, accade qualcosa di diverso. Osserviamo l'energia cinetica:

$$E_{K,i} = E_{K1,i} + E_{K2,i} = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_{2,i}^2$$

Supponiamo di porre gli oggetti nel sistema di riferimento del centro di massa e di osservare esternamente la situazione (poniamo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{CM}} + \mathbf{v}_{\text{scm}}$):

$$E_{K,i} = \frac{1}{2} m_1 (\mathbf{v}_{\text{CM}} + \mathbf{v}_{1,i,\text{scm}})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\mathbf{v}_{\text{CM}} + \mathbf{v}_{2,i,\text{scm}})^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{\text{CM}}^2 + E'_{K,i}$$

dove abbiamo isolato i termini nei quali compare la velocità del centro di massa elevata al quadrato, per poi condensare l'energia rimanente in $E'_{K,i}$, la cui forma non è per noi rilevante. Se invece calcoliamo l'energia cinetica finale,

$$E_{K,f} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{3,f}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{\text{CM}}^2$$

è immediato infatti notare che, data la conservazione della quantità di moto, il corpo finale comprensivo di entrambe le masse non potrà che muoversi con velocità identica a quella del centro di massa. Abbiamo dunque mostrato che in generale l'energia cinetica non si conserva nell'urto. In particolare, essa diminuisce sempre in situazioni reali.

$$E_{K,f} \leq E_{K,i} \quad (5.6)$$

Il motivo di tale fenomeno può essere spiegato attraverso numerose interpretazioni, che possono dipendere dal sistema analizzato. In generale, la perdita di energia cinetica è dovuta al costo per mantenere unite le masse dopo l'urto, oppure, come accade sempre nella realtà, quell'energia viene dissipata in calore, deformazioni permanenti dei materiali, suono e così via.

6

Relatività galileiana

6.1 Sistemi di riferimento

6.2 Principio di relatività galileiana

6.3 Forze apparenti

6.1 Sistemi di riferimento

6.2 Principio di relatività galileiana

6.3 Forze apparenti

Gravitazione

7.1 Gravità e forze fondamentali

Conosciamo bene la seconda legge della dinamica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Sappiamo che il termine \mathbf{F} rappresenta l'azione di un agente esterno, chiamato forza, che può avere natura diversa a seconda del sistema studiato. Pertanto, possiamo esprimere la sua intensità in forme a volte diverse, sia essa il peso, l'attrito, la forza elastica e così via. Tuttavia tutte queste forze, per quanto sappiamo al giorno d'oggi, sono riconducibili a quattro interazioni fondamentali che si manifestano nella materia (dalla più forte alla più debole):

- *Forza forte*: la più forte tra tutte. Tiene insieme i nuclei degli atomi.
- *Forza elettromagnetica*: accoppia le cariche elettriche e le correnti.
- *Forza debole*: si manifesta in fenomeni di decadimento nucleare.
- *Forza gravitazionale*: la più debole tra tutte.

Lo stato attuale della fisica suggerisce che molte di queste forze possano essere unificate, ovvero esse non sono altro che la manifestazione, in nature differenti, della stessa forza fondamentale. Sorprendentemente, è stata la forza più debole ad essere studiata per prima. La legge fondamentale venne formulata da Newton nel seguente modo:

$$\mathbf{F}_{G,1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_{G,1} m_{G,2}}{r_{1,2}^2} \hat{r}_{1,2} \quad (7.1)$$

Che esprime il vettore della forza gravitazionale che un corpo 1 esercita su un altro corpo 2. Il vettore giace sulla congiungente tra i due corpi (considerati come punti materiali), separati da una distanza $r_{1,2}$ e dotati di una certa *massa gravitazionale* m_G . Il segno negativo, accompagnato dalla *costante di gravitazione universale*, indica che la forza gravitazionale è sempre attrattiva.

7.2 Il principio di equivalenza

Soffermiamoci a chiarire alcuni concetti. Innanzitutto, vogliamo esprimere la legge 7.1 in maniera più generica.

$$\mathbf{F} = c \frac{p_1 p_2}{r^2} \hat{r} \quad (7.2)$$

7.1	Gravità e forze fondamentali
7.2	Il principio di equivalenza
7.3	Energia potenziale gravitazionale
7.4	Gravitazione universale

Sorprendentemente, questa forma verrà proposta da Coulomb per esprimere l'interazione tra due cariche elettriche, secondo la legge (in moduli)

$$F_E = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

Diventa naturale pensare che la 7.2 possa rappresentare una sorta di “template” con il quale esprimere quantitativamente l'interazione tra due oggetti dotati di una certa qualità o proprietà intrinseca p , che consente agli oggetti in questione di partecipare nell'interazione. Nel caso delle cariche elettriche, essa sarà, per l'appunto, una carica elettrica. Per quanto riguarda la gravità, questa qualità è la massa gravitazionale. Ci si può chiedere se stiamo parlando della stessa massa della seconda legge di Newton. In realtà, esse sono ben diverse:

- La massa inerziale m_I esprime la capacità di un corpo di opporsi all'azione di agenti esterni e, di conseguenza, al cambiamento del proprio stato di moto. In breve, essa misura l'inerzia del corpo.
- La massa gravitazionale m_G esprime la capacità di un corpo di partecipare, contribuire ed essere soggetto all'interazione gravitazionale in presenza di un altro corpo dotato di massa gravitazionale.

Seppur sottile, la differenza tra queste quantità è comunque diversa (un oggetto “massivo” è difficile da spostare; un oggetto “massiccio” interagisce maggiormente con un altro oggetto). La parola “carica” sarebbe più intuitiva per spiegare la differenza e viene infatti utilizzata per le interazioni elettriche: più “carico” di una certa proprietà dell'interazione, più “intensa” l'interazione stessa. Nella pratica ci riferiamo sempre alla stessa massa (i kilogrammi), ma nulla impedisce di pensare che le masse di uno stesso corpo siano effettivamente quantità distinte.

Consideriamo un corpo in prossimità della superficie terrestre. Possiamo approssimare la Terra ad una sfera uniforme e supporre che la forza gravitazionale corpo-Terra giaccia sulla congiungente tra il centro del pianeta e il corpo (puntiforme). Il corpo si trova ad una certa altezza h e conosciamo inoltre il raggio della Terra R_T . Il corpo sarà soggetto alla forza gravitazionale della Terra; uniamo le equazioni di Newton (consideriamo i moduli):

$$F = m_{I,C}a \quad F = G \frac{m_{G,C}M_{G,T}}{(R_T + h)^2}$$

Supponiamo che $R_T \gg h$. Dunque la distanza Terra-corpo può essere approssimata:

$$r_{T,C} = R_T + h = R_T \left(1 + \frac{h}{R_T} \right)$$

$$r_{T,C}^2 \simeq R_T^2 \left(1 + 2 \frac{h}{R_T} \right)$$

$$\frac{1}{r_{T,C}^2} \simeq \frac{1}{R_T^2} \left(1 - 2 \frac{h}{R_T} \right)$$

Da cui concludiamo che possiamo trascurare h . Dunque, sapendo che $a = g$,

$$m_{I,C}g = G \frac{m_{G,C}M_{G,T}}{R_T^2}$$

Isoliamo g

$$g = \frac{m_{G,C}}{m_{I,C}} G \frac{M_{G,T}}{R_T^2}$$

Se assumessimo che le masse inerziale e gravitazionale di uno stesso corpo fossero diverse, l'accelerazione g non sarebbe la stessa per tutti gli oggetti. Tuttavia, non è ancora stata trovata evidenza della differenza quantitativa (apprezzabile, in quanto misure sperimentali) tra le due proprietà. L'osservazione galileiana stessa sulla caduta libera, ovvero che tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione, indica che

$$m_I = m_G \quad (7.3)$$

che rappresenta il principio di equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale. Possiamo affermare ciò perché, fissata la massa della Terra e il suo raggio, il rapporto m_I/m_G deve essere costante affinché g sia uguale per tutti i corpi di massa distinta.

7.3 Energia potenziale gravitazionale

Si usa spesso calcolare l'energia potenziale di un oggetto vicino alla superficie terrestre, ad un'altitudine h , con la seguente legge:

$$mgh$$

Tuttavia sappiamo che g non è costante al variare della quota e su grandi distanze questa legge non è più una buona approssimazione. Calcoliamo dunque la differenza di energia potenziale tra la superficie terrestre e una certa quota h da essa alla luce della legge di Newton.

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{U} = -W &= - \int_R^{R+h} -G \frac{mM}{s^2} ds = GmM \int_R^{R+h} \frac{ds}{s^2} = GmM \left[-\frac{1}{s} \right]_R^{R+h} = \\ &= -GmM \left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} \right) \end{aligned}$$

Notiamo che $\Delta\mathcal{U} > 0$, dunque allontanando un oggetto di massa m dalla superficie terrestre, esso guadagna una certa energia potenziale. Più in generale, se poniamo un punto di riferimento X arbitrario dal quale calcolare la (differenza di) energia potenziale verso un punto P , otteniamo la seguente espressione:

$$\mathcal{U}(P) = -GmM \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_X} \right)$$

Per convenienza è utile porre $r_X = +\infty$, ovvero ad una distanza infinita da M , ottenendo dunque

$$\mathcal{U} = -\frac{GmM}{r}$$

L'energia meccanica di un corpo è dunque

$$E = E_K + \mathcal{U} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}$$

Ovviamente supponiamo che tutte queste leggi valgano per punti materiali. In un caso reale, per esempio per il calcolo dell'energia potenziale gravitazionale in prossimità della Terra, quando si “sprofonda” nel corpo che genera il campo gravitazionale, l'estensione di tale corpo modifica l'andamento dell'energia potenziale.

7.4 Gravitazione universale

Secondo la legge di Newton, tutti gli oggetti nell'universo si attraggono l'un l'altro attraverso l'interazione gravitazionale. È in questo senso che la legge viene detta “universale”.

La terza legge di Keplero

Ovviamente la legge di Newton ha grande importanza in campo astronomico (anche se espressa in forme assai più complesse) ed è stata la conferma di una legge scoperta sperimentalmente tempo addietro da Keplero, appunto la *terza legge di Keplero*:

$$T \propto r^{\frac{3}{2}}$$

Secondo tale legge, il periodo T di rivoluzione di un pianeta attorno al Sole è proporzionale alla distanza media r del pianeta dal Sole elevata a $3/2$. Dunque esiste una costante k tale che $T = kr^{\frac{3}{2}}$. In realtà questa legge vale per tutti i sistemi astronomici (solari e non) simili al nostro, ma gli studi di Keplero si basavano sugli attenti dati raccolti dal maestro Tycho Brahe sui moti orbitali dei corpi celesti appartenenti al sistema solare. Sapendo infatti che la forza di gravità tra un pianeta e il Sole è proprio la forza centripeta del moto orbitale, assunto come circolare, dimostrare la terza legge di Keplero diventa ovvio:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{v}r = \frac{2\pi}{\sqrt{a_c r}}r = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{GM}{r}}}r = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \right) r^{\frac{3}{2}}$$

Non solo abbiamo dimostrato la terza legge, ma abbiamo pure individuato la costante di proporzionalità k .

Sistemi binari

In sistemi non simili a quello solare vale ancora la legge di Newton. Consideriamo per esempio un sistema di stelle binarie, ovvero stelle con una differenza di massa non trascurabile rispetto alla distanza del centro di massa del sistema dal centro di massa di una delle due stelle. In tale caso, le stelle orbiteranno attorno al loro centro di massa, situato in qualche punto dello spazio intermedio sulla loro congiungente. Anche nel sistema solare la Terra e il Sole ruotano attorno al centro di massa totale, che tuttavia si trova ben al di sotto della superficie del Sole, il che permette di ridurre la trattazione del problema ad una rivoluzione della Terra attorno al Sole.

8

Termodinamica

8.1 Introduzione

8.2 Principio zero

8.3 Principio primo

8.4 Gas ideali

8.5 La teoria cinetica dei gas

8.6 Le trasformazioni termodinamiche

8.7 Macchine

8.8 Principio secondo

8.9 Studi di Carnot

8.10 Studi di Clausius

8.11 Entropia

8.1 Introduzione

8.2 Principio zero

8.3 Principio primo

8.4 Gas ideali

8.5 La teoria cinetica dei gas

8.6 Le trasformazioni termodinamiche

8.7 Macchine

8.8 Principio secondo

8.9 Studi di Carnot

8.10 Studi di Clausius

8.11 Entropia

Si consideri una trasformazione termodinamica *reversibile* qualsiasi. Per ipotesi di reversibilità, l'integrale di Clausius calcolato sulla curva γ di tale trasformazione nel piano pressione-volume è nullo.

$$\oint_{\gamma} \frac{dQ}{T} = 0$$

Selezioniamo due punti, A e B , distinti su questo ciclo. Scomponiamo dunque l'integrale nei due percorsi, sempre reversibili, α e β .

$$\int_{A,\alpha}^B \frac{dQ}{T} + \int_{B,\beta}^A \frac{dQ}{T} = 0$$

Trattandosi di un ciclo reversibile, vale la proprietà antisimmetrica dell'integrale. Giungiamo dunque alla seguente conclusione:

$$\int_{A,\alpha}^B \frac{dQ}{T} = \int_{A,\beta}^B \frac{dQ}{T}$$

Dunque, qualsiasi sia il percorso tra A e B , l'uguaglianza precedente vale sempre per percorsi reversibili. Vi è dunque una dipendenza di una certa quantità dai soli stati iniziale e finale della trasformazione. Definiamo dunque, in modo simile all'energia potenziale studiata in meccanica, la *differenza di entropia tra due stati termodinamici*.

$$\Delta S_{AB} = S_B - S_A \stackrel{\text{def}}{=} \int_{A,\text{rev}}^B \frac{dQ}{T} \quad (8.1)$$

Introduzione

D'ora in poi, il ruolo dell'energia sarà ancora più importante. In precedenza abbiamo dimostrato che la differenza di energia meccanica di un corpo corrisponde al lavoro totale delle forze non conservative.

$$W^{\text{NC}} = \Delta E$$

In altri termini, l'energia che un corpo possiede viene persa o acquistata nel caso in cui vi siano forze non conservative che compiano lavoro effettivo. Ma quindi l'unico modo di “parlare”, ovvero scambiare energia, con l'universo è quello di compiere lavoro? In realtà no, come vedremo parlando di *calore*, la forma di energia più “disordinata” che conosciamo.

Ci occuperemo di sistemi contenenti un numero di costituenti nell'ordine di

$$N_A = 6 \cdot 10^{23}$$

ossia il numero di Avogadro. Questi costituenti possono scambiare energia attraverso ciò che definiremo calore.

8.11.1 Sistemi termodinamici

Le nostre trattazioni avranno per oggetto i *sistemi termodinamici*, per definizione contenuto in un *ambiente esterno*. Ambiente esterno e il suo contenuto costituiscono l'*universo*, per definizione l'unico sistema che non è contenuto in un altro ambiente esterno. Altro oggetto di nostro interesse per lo studio di questi sistemi sono le *trasformazioni termodinamiche*, ovvero processi nei quali avvengono scambi di energia.

Possiamo classificare i sistemi termodinamici sulla base di due criteri: capacità di scambiare materia e capacità di scambiare energia.

Variabili termodinamiche

In cinematica utilizziamo variabili spazio-temporali per descrivere i nostri sistemi di punti materiali. Fare questo per un numero di punti o costituenti dell'ordine di 10^{23} è di fatto proibitivo. In termodinamica si utilizzano invece grandezze diverse, dette *variabili (o coordinate) termodinamiche*. Le distinguiamo in

- **Grandezze intensive:** si possono misurare localmente, indipendentemente dall'estensione dell'oggetto che ne è caratterizzato. Sono grandezze intensive la *pressione* e la *temperatura*.
- **Grandezze estensive:** è necessario considerare l'oggetto nel suo complesso, non ha senso o non si può misurare in un punto locale arbitrario. Sono grandezze estensive il *volume* e la *massa*.

Come in cinematica impiegavamo un sistema di assi cartesiani come forma di rappresentazione del sistema di punti materiali in moto nelle dimensioni, anche in termodinamica utilizziamo il medesimo strumento, ma utilizzando le coordinate termodinamiche. Una trasformazione termodinamica consiste in uno spostamento tra due punti A e B su questo nuovo piano cartesiano e assumiamo sempre, affinché la nostra teoria funzioni, che A e B siano situazioni, stati, di *equilibrio termodinamico*. Nel mezzo non vi è garanzia di equilibrio.

Un sistema si dice in equilibrio dinamico se esso rispetta i seguenti equilibri:

1. **Equilibrio meccanico:** lo stato non è sottoposto a forze totali non nulle, in qualsiasi coppia delle sue parti.
2. **Equilibrio chimico:** non esiste alcuna reazione chimica tra una qualsiasi coppia di parti dello stato.
3. **Equilibrio termico:** per ogni coppia di parti, la temperatura è la stessa.

Per “parti” di uno stato o di un sistema intendiamo sottoinsiemi abbastanza piccoli rispetto al sistema originale ma allo stesso tempo sufficientemente grandi affinché gli strumenti della termodinamica funzionino.

Calore e scambi

Gas ideali

8.11.2 Leggi dei gas ideali

8.11.3 Lavoro di un gas ideale

La teoria cinetica dei gas

Finora abbiamo affrontato la termodinamica parlando spesso di gas. Lo abbiamo fatto inoltre da un punto di vista macroscopico, ovvero utilizzando

variabili termodinamiche (pressione, volume, temperatura). Tuttavia, vogliamo ora tentare di costruire un modello che permetta di spiegare cosa accade a livello microscopico e che sia allo stesso tempo coerente con le leggi mostrate fino ad ora. Per giungere a tale obiettivo, ovvero collegare macroscopico e microscopico, l'unico strumento che abbiamo a disposizione in questo corso è la meccanica. Questa è la via che porta alla cosiddetta *teoria cinetica dei gas*.

Ipotesi e presupposti della teoria cinetica

La teoria cinetica dei gas semplifica molto ciò che veramente accade nella realtà fisica, ma è una approssimazione piuttosto buona e soddisfacente. In particolare, chiariamo che la teoria si basa sulle seguenti ipotesi:

- Oggetto delle osservazioni è un gas *ideale* (o perfetto) che si trova all'interno di un contenitore con volume V .
- Il gas è ideale nel senso che esso è costituito da particelle infinitamente piccole rispetto al contenitore nel quale si trovano e alle distanze che le separano; tali particelle sono inoltre tutte uguali, compresa massa e altre proprietà.
- Il gas ha una densità bassa nell'ordine in cui le interazioni tra le sue particelle è minimo o possibilmente nullo (non avvengono urti, interazioni gravitazionali o di qualsiasi altra natura).
- Gli unici urti di interesse teorico, non trascurabili, sono quelli con le pareti del contenitore, perfettamente elastici (la massa delle particelle è infinitamente piccola rispetto a quella delle pareti del contenitore).

Logica della teoria

Per semplificare i calcoli, supponiamo che il contenitore sia un cubo con lati di lunghezza L . Si consideri una sola particella di gas (massa m) che sta per urtare la parete destra e la componente x della sua velocità (v_x). La quantità di moto iniziale di tale particella è

$$\mathbf{p}_{x,i} = m\mathbf{v}_{x,i}$$

Avviene un urto elastico con la parete destra, dunque la velocità finale della particella è uguale in modulo a quella iniziale, ma con verso opposto:

$$\mathbf{p}_{x,f} = m\mathbf{v}_{x,f} = -m\mathbf{v}_{x,i}$$

La variazione della quantità di moto della particella equivale dunque a

$$\Delta\mathbf{p}_x = -2mv_x\hat{x}$$

Utilizziamo d'ora in poi i moduli dei vettori. Sappiamo che tale variazione nella quantità di moto della particella può essere interpretata come un impulso

esercitato dalla parete; dunque la parete esercita una forza sulla particella, ma come calcolarla? Diventa necessario trovare un intervallo temporale entro il quale agisce l'impulso per ricavare l'intensità della forza. Semplicemente notiamo che la velocità della particella non varia, per via degli urti elastici, e dunque essa rimbalza ripetutamente a destra e sinistra nel cubo. Dunque, la particella impiega un tempo

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x}$$

Per lasciare la parete e tornarvi per un altro urto. In media nel tempo, dunque, la forza impulsiva esercitata dalla parete destra sulla particella equivale a

$$F_x = \left| \frac{\Delta p_x}{\Delta t} \right| = 2mv_x \cdot \frac{v_x}{2L} = \frac{mv_x^2}{L}$$

Dalla definizione di pressione, otteniamo la pressione esercitata dalla particella che rimbalza tra due pareti opposte (di superficie $S = L^2$):

$$p_x = \frac{F_x}{S} = \frac{mv_x^2}{L^3} = \frac{mv_x^2}{V}$$

Lo stesso ragionamento vale per tutte le componenti spaziali. Macroscopicamente, osserviamo che la pressione è una quantità intensiva, che non dipende dalla località della misurazione. Dunque tutte le dimensioni spaziali sono equivalenti e possiamo effettuare la seguente semplificazione:

$$p_x = p_y = p_z = p$$

Unendo la legge dei gas perfetti al risultato ottenuto precedentemente,

$$pV = mv_x^2$$

Ma ciò riguarda solamente una singola particella. Sommiamo dunque tutti i contributi:

$$F_{\text{tot},x} = \sum_i F_{x,i} = \sum_i \frac{mv_{x,i}^2}{L} = \frac{m}{L} \sum_i v_{x,i}^2$$

In generale le velocità delle particelle potrebbero non essere tutte uguali. Supponendo che il gas sia costituito da N particelle, possiamo determinare la loro velocità quadratica media

$$F_{\text{tot},x} = N \frac{m}{L} \overline{v_x^2}$$

Dunque

$$pV = Nm \overline{v_x^2}$$

Sappiamo che $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, che vale anche per la velocità quadratica media $\overline{v^2}$. Ma trattando delle medie, i contributi di tutte le dimensioni sono tra loro equivalenti:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

Da cui

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2}$$

Allora

$$pV = Nm \frac{\overline{v^2}}{3} = \frac{2}{3} N \overline{E_K}$$

Dove abbiamo esplicitato l'energia cinetica media della singola particella. Per andare più in profondità, possiamo notare che la teoria può portarci a concludere che

$$N \overline{E_K} = E_{int} = U$$

Abbiamo dunque collegato la nostra teoria da un lato e gli esperimenti dall'altro:

$$pV = Nk_B T = \frac{2}{3} U$$

Possiamo inoltre osservare dalla precedente che

$$\overline{E_K} = \frac{3}{2} k_B T$$

Che esprime la relazione tra energia cinetica media di una particella e la temperatura. In un certo senso, dunque, la temperatura è proprio l'energia cinetica media delle particelle.

Risultati della teoria

Il risultato più importante della teoria cinetica è l'unione tra il mondo macroscopico osservato sperimentalmente e il mondo microscopico modellato teoricamente. In particolare:

- La teoria cinetica offre una spiegazione dell'origine della pressione esercitata da un gas in un contenitore.
- La teoria cinetica mostra che la temperatura è strettamente legata all'energia cinetica media delle particelle. Intuitivamente, la temperatura è interpretabile proprio come l'agitazione media delle particelle, per l'appunto l'energia del loro movimento.
- La teoria cinetica costruisce un modello generalizzabile a sistemi di costituenti non necessariamente monoatomico-puntiformi, come approfondito nella prossima sezione.

Gradi di libertà

Il fattore $1/2$ deriva dalla definizione di energia cinetica, ma il numero 3 invece? Esso dipende dal numero di dimensioni entro le quali le particelle possono muoversi, ovvero i *gradi di libertà*. Se compissimo lo studio da capo, costringendo però le particelle a giacere su un piano, i gradi di libertà sarebbero solo due e il fattore moltiplicativo dell'energia cinetica media sarebbe diverso. Ciò è dovuto al fatto che ogni grado di libertà permette alla particella di muoversi su un'altra dimensione e dunque di aggiungere un contributo in più alla propria energia cinetica. In generale, dunque, ogni grado di libertà comporta un contributo energetico di $\frac{1}{2}k_B T$ e dunque, per l gradi di libertà, si ottiene

$$\overline{E_K} = \frac{l}{2} k_B T$$

I gradi di libertà possono crescere all'aumentare della complessità della particella di gas. Oltre alle tre dimensioni, una molecola biatomica (quindi non puntiforme come abbiamo sempre supposto finora) può anche ruotare su due assi¹; i due atomi possono poi vibrare intorno alla loro “sede” nella molecola, dunque anche questa energia deve essere presa in considerazione. In totale, una molecola biatomica ideale può avere $l = 6$ gradi di libertà.

Trasformazioni termodinamiche

Abbiamo mostrato che il lavoro di un gas ideale (ovvero a bassa densità) è legato al volume e alla temperatura dalla seguente relazione:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{A, \gamma}^B p(V) dV$$

Notare che è sempre necessario specificare il “percorso” γ che il gas intraprende nel piano pressione-volume (e temperatura), perchè in generale il lavoro dipende da tale percorso. Ricordiamo infatti che

$$\Delta U = Q - W \quad \text{ma} \quad dU = \delta Q - \delta W$$

dove δ indica una quantità dipendente dai punti attraversati. La differenza finale dU sarà sempre la stessa, ma può derivare da contributi differenti di calore e lavoro. Nelle prossime sezioni sostituirò δ con d , perchè ci limiteremo a definire una sola trasformazione alla volta, quindi un solo tratto di percorso ben definito. L'equazione $dU = \delta Q - \delta W$ è più generale perchè presuppone la possibilità che il gas possa compiere più di una trasformazione per variare la propria energia interna.

Il “percorso” prende il nome di *trasformazione termodinamica* e studieremo ora le più semplici. Ricordiamo inoltre che le trasformazioni che verranno mostrate sono *quasistatiche* e che quindi ogni punto può essere approssimato ad uno stato di equilibrio differente.

¹Due assi sono sufficienti a coprire tutte le rotazioni nelle tre dimensioni

8.11.4 Trasformazione isocora

Nelle trasformazioni isocore, il volume del gas rimane costante. Segue dunque

$$dV = 0 \Rightarrow dW = p dV = 0 \Rightarrow dU = dQ$$

Sappiamo dagli studi di calorimetria che possiamo associare al gas un certo calore specifico c_v che permette di descrivere il calore scambiato rispetto alla variazione di temperatura. Utilizziamo per convenienza un calore specifico *molare*, anziché ricorrere alla massa. Bisogna però specificare che tale calore specifico vale solo a volume costante.

$$dQ = n c_v dT$$

Da cui

$$dU = n c_v dT$$

Dal momento che l'energia interna di un gas dipende solamente dalla temperatura, ciò vale anche per la sua variazione. Dunque, anche nelle trasformazioni che vedremo di seguito possiamo supporre che valga tale relazione.

Dalla teoria cinetica abbiamo inoltre osservato che l'energia interna di un gas equivale a $U = \frac{3}{2} n R T$, da cui $dU = \frac{3}{2} n R dT$. Possiamo dunque concludere con la seguente proposizione (per i gas ideali monoatomici):

$$c_v = \frac{3}{2} R$$

In generale, avendo l gradi di libertà vale $c_v = \frac{l}{2} R$.

8.11.5 Trasformazione isobara

Per una trasformazione isobara, la pressione rimane costante. Diventa dunque facile calcolare il lavoro effettuato in tale trasformazione:

$$W_{\text{isobara}} = p \Delta V = n R \Delta T$$

Dalle trasformazioni isocore abbiamo concluso che $dU = n c_v dT$. Per quanto riguarda il calore, dobbiamo introdurre un ulteriore calore specifico c_p che invece vale per trasformazioni isobare.

$$dQ = n c_p dT$$

Riproponiamo l'equazione di stato dei gas ideali $pV = nRT$ e consideriamo una variazione infinitesimale su entrambi i membri.

$$d[pV] = d[nRT]$$

$$dpV + p dV = n R dT$$

$$p dV = dW = n R dT$$

Dunque $dU = nc_p dT - nR dT = nc_v dT$, da cui la seguente relazione.

$$c_p - c_v = R \quad (8.2)$$

Quella che abbiamo appena ottenuto è la cosiddetta *relazione di Mayer* (esatto, lo studentato). Dai risultati precedenti otteniamo

$$c_p = c_v + R = \frac{5}{2}R$$

Se riformuliamo la relazione di Mayer otteniamo una ulteriore relazione molto impiegata nello studio di un'altra trasformazione che vedremo.

$$R = c_v \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) = c_v(\gamma - 1) > 0$$

Incontreremo di nuovo il rapporto γ . Da questo risultato risulta dunque che

$$c_p > c_v$$

sempre (entro il nostro modello). Ma come mai è importante precisare questa osservazione? In verità tale relazione ha un riscontro reale e sperimentale: in una trasformazione isocora, il volume non varia; d'altra parte in trasformazioni isobare la pressione viene mantenuta costante e ciò significa che il gas deve esercitare tale pressione costante durante tutta la trasformazione. Ciò comporta la necessità di un supplemento di energia dovuto alla variazione di volume e alla costanza della pressione. Di fatto, per aumentare l'energia interna di un gas è necessario fornire maggior energia qualora la pressione rimanga costante (per esempio in un contenitore chiuso da uno stantuffo mobile, dove il gas impiega energie per sollevare lo stantuffo), mentre risulta meno dispendioso innalzare l'energia interna di un gas a volume costante. Da qui il motivo della disuguaglianza $c_p > c_v$.

8.11.6 Trasformazioni isoterme

Nelle trasformazioni isoterme, la temperatura non varia. Come conseguenza, nemmeno l'energia interna varia.

$$dU = nc_v dT = 0$$

Segue dunque che

$$\begin{aligned} dQ - dW &= 0 \\ dQ = dW &= p dV = nRT \frac{dV}{V} \\ Q_{\text{isoterma}} &= \int_i^f nRT \frac{dV}{V} = nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = W_{\text{isoterma}} \end{aligned}$$

In una isoterma, dunque, non varia l'energia interna, perché il calore scambiato viene "consumato" in una quantità uguale di lavoro.

8.11.7 Trasformazioni adiabatiche

In queste trasformazioni non avvengono scambi di calore.

$$dU = dQ - dW = -dW$$

Come sempre, sapendo che la variazione di energia interna è esprimibile attraverso una corrispondente variazione di temperatura legata a c_V ,

$$nc_V dT = -pdV$$

$$nc_V dT = -nRTdV$$

Otteniamo dunque la seguente relazione:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_V} \frac{dV}{V}$$

$$\int_i^f \frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_V} \int_i^f \frac{dV}{V}$$

$$\ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) = -(\gamma - 1) \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1}$$

Vale allora per le adiabatiche

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad (8.3)$$

$$pV^\gamma = \text{const} \quad (8.4)$$

In particolare, nel caso di trasformazioni adiabatiche che coinvolgono gas monotatomici risulta $pV^{\frac{5}{3}} = \text{const}$.

Trasformazioni cicliche

Combinando insieme le trasformazioni semplici viste fino ad ora, è possibile comporre trasformazioni più complesse. Tra queste, quelle più interessanti sono forse le *trasformazioni cicliche* (o cicli termodinamici), nelle quali, data una coordinata termodinamica, il sistema ritorna nello stesso punto dopo aver compiuto alcune trasformazioni. Seguendo i nostri presupposti, possiamo concludere che la variazione di energia interna dei sistemi che subiscono trasformazioni cicliche non varia per definizione:

$$\Delta U_\gamma = 0 \quad \forall \gamma = A \rightarrow A$$

in quanto quest'ultima dipende unicamente dallo stato.

Macchine

I cicli termodinamici caratterizzano i principi di funzionamento delle *macchine*. Il motore due-tempi dell'Husqvarna sotto casa è una macchina; ma lo è anche un freezer. Di fatto, la termodinamica distingue due categorie principali di macchine sulla base del verso con il quale avvengono gli scambi di energia:

- **Macchine termiche:** per queste macchine valgono

$$W, Q > 0$$

ovvero compiono lavoro al prezzo di un consumo di calore.

- **Macchine frigorifere:** vale

$$W, Q < 0$$

ossia esse dissipano calore al prezzo di un lavoro esterno.

Notare che la classificazione parte dal segno del lavoro, per poi dedurre il flusso di calore mediante la definizione di trasformazione ciclica combinata alla prima legge della termodinamica $\Delta U = 0 = Q - W$.

8.11.8 Rendimento

Sappiamo bene che è necessario un costo in termini energetici (dunque monetari, ambientali e così via nella nostra vita economica) per far funzionare una macchina e ottenere da essa i risultati attesi. Dal motore dell'auto è desiderabile ottenere il massimo della distanza percorribile e della potenza sprigionabile partendo dalla benzina pagata al pieno precedente. Ma come valutare la bontà di un motore?

Consideriamo una macchina termica, ovvero il motore dell'auto. Il suo scopo è produrre lavoro, cioè trasmettere forza motrice alle ruote. Per far funzionare una macchina termica è necessario fornire calore. Dunque, possiamo valutare l'*efficienza* del motore dell'auto secondo il seguente rapporto:

$$\eta = \frac{W}{Q_A} \quad (8.5)$$

Dove Q_A rappresenta il calore assorbito dalla macchina, o l'energia pagata e immessa nell'auto. Possiamo riformulare la definizione di rendimento notando che, durante il funzionamento del motore, parte del calore assorbito Q_A viene sì trasformato in lavoro, ma anche in altre forme, che racchiuderemo nel calore totale ceduto Q_C . Vale dunque:

$$\Delta U = 0 = Q - W = Q_A + Q_C - W$$

$$W = Q_A + Q_C$$

da cui riformuliamo l'efficienza:

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_A|} \quad (8.6)$$

Notare che, per definizione di macchina termica, il calore ceduto possiede segno negativo.

8.11.9 Utopie

Chiaramente, senza l'intervento di agenti esterni, non è possibile ottenere dal nostro motore più lavoro di quanto calore è stato fornito inizialmente

$$Q_A < W$$

perché, come sappiamo dalla meccanica, l'energia si conserva e non è possibile dunque crearne “magicamente”. È però lecito chiedersi se è possibile ottenere qualcosa come questo:

$$Q_A \stackrel{?}{=} W$$

ovvero costruire un motore completamente efficiente. Sempre dalla meccanica, possiamo ipotizzare che, anche solo teoricamente e in situazioni ideali, ciò sarebbe ammesso, perché i sistemi meccanici sono *reversibili*, ovvero è sempre possibile riportarli allo stato iniziale dopo un certo fenomeno. Non aggiungiamo altro per riservare la sorpresa ai lettori.

In ogni caso, un buon motore dovrebbe produrre quanto più lavoro rispetto ad un quantitativo basso di calore assorbito:

Minimo sforzo, massima resa. Spendì poco, ottieni molto.

Il secondo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica ci consente di osservare che non è possibile costruire macchine in grado di sprigionare più energia di quella con la quale la alimentiamo. Possiamo però notare che se $\Delta U = 0$ allora $Q = W$. Ciò può far sperare che una macchina possa comunque convertire l'intera energia fornita in lavoro, senza alcuna dispersione. Tuttavia, ciò è talmente difficile da sembrare impossibile (vedremo che effettivamente lo è). Parimenti è sperimentalmente evidente che il calore non fluisce *mai spontaneamente* da una sorgente fredda da una calda. Quest'ultima osservazione in particolare è la base che supporta il secondo principio della termodinamica, del quale sono date due formulazioni ben note:

- **Enunciato di Kelvin-Planck**

È impossibile realizzare una macchina il cui unico risultato sia quello di trasformare calore, da una sorgente, interamente in lavoro.

• **Enunciato di Clausius**

È impossibile realizzare un processo il cui unico risultato sia quello di trasferire calore da un corpo ad uno più caldo.

Purtroppo per la nostra umanità (e probabilmente per tutte le civiltà avvenire), non è possibile realizzare macchine perfette, ovvero dal rendimento del 100%, perché questo è impedito dal secondo principio, in particolar modo dalla formulazione di Kelvin-Planck.

Entrambe le formulazioni sono date per vere, ma possiamo tuttavia dimostrarne l'equivalenza.

Esperienza di Carnot

Qual è la macchina più efficiente in assoluto? Oppure, in quali condizioni una macchina può ottenere il rendimento massimo? Queste sono domande che Carnot si pose ai suoi tempi.

Esperienza di Clausius

Altra figura importante in termodinamica è il tedesco Rudolf Clausius, che estese gli studi importanti di Carnot ad un livello superiore.

8.11.10 Teorema di Clausius

Abbiamo appena visto che una delle relazioni ottenute da Carnot è la somma di rapporti $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$. Ciò vale per tutte le macchine, reversibili o no, che operano tra due sorgenti $T_1 < T_2$. Avere però solamente due sorgenti è piuttosto limitante, perché nella realtà le macchine operano su cicli ben più complessi e dunque è come se operassero tra più di due sorgenti. Clausius ebbe così la brillante idea di generalizzare le conclusioni di Carnot per un ciclo termodinamico qualsiasi.

Supponiamo di osservare un ciclo motore qualsiasi (la nocciolina motrice, che carina). Questo ciclo attraversa gradi di temperatura molteplici. Possiamo però effettuare una approssimazione della curva del ciclo immaginando di percorrerla mediante piccole trasformazioni adiabatiche e isoterme. Se estendiamo queste piccole trasformazioni, otterremo una suddivisione dell'area interna del nostro ciclo in tanti piccoli cicli di Carnot. Per allora il ciclo i -esimo, vale la relazione

$$\frac{Q_{1,i}}{T_{1,i}} + \frac{Q_{2,i}}{T_{2,i}} \leq 0$$

È allora immediato osservare che sommando questa quantità per ogni ciclo interno all'area del ciclo vale

$$\sum_i \left(\frac{Q_{1,i}}{T_{1,i}} + \frac{Q_{2,i}}{T_{2,i}} \right) \leq 0$$

Questa relazione non ci dice ancora molto di straordinario. Possiamo però notare due cose: i tratti adiabatici non coinvolgono scambi di calore per definizione, e dunque possiamo ignorarli nel nostro calcolo, perché il rapporto calore-temperatura è sempre nullo durante questo tipo di trasformazione; esistono molti tratti isotermi che vengono percorsi in versi opposti. Questi sono i tratti *interni* alla nostra curva originale ed essendo percorsi in versi opposti non introducono ulteriori contributi calorici. Gli unici tratti di nostro interesse, dunque, sono quelli delle trasformazioni isoterme *ai bordi* del ciclo. Possiamo allora riformulare la sommatoria unendo solo questi rapporti. Supponendo che il tratto j -esimo sia una isoterma che costituisce un pezzo di bordo della curva originale, otteniamo

$$\sum_j \frac{Q_j}{T_j} \leq 0$$

o per i più duri e cazzuti come noi, vere allieve e veri allievi del Maestro Iuppa,

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad (8.7)$$

che è proprio la tesi del teorema di Clausius. L'integrale prende il nome di *integrale di Clausius*, giusto per sottolineare che se un qualche oggetto matematico porta il nome di una persona, esso è più importante di quanto si possa credere. Inoltre, come sempre, l'uguaglianza vale solamente per trasformazioni reversibili.

8.11.11 Entropia

Supponiamo di avere un ciclo reversibile γ qualsiasi. Essendo reversibile, possiamo concludere che

$$\oint_{\gamma} \frac{dQ}{T} = 0$$

Selezioniamo due punti distinti su questo ciclo, A e B e scomponiamo l'integrale di Clausius nei due percorsi α e β :

$$\int_{A,\alpha}^B \frac{dQ}{T} + \int_{B,\beta}^A \frac{dQ}{T} = 0$$

Trattandosi di un ciclo reversibile, vale la proprietà antisimmetrica dell'integrale. Giungiamo dunque alla seguente conclusione:

$$\int_{A,\alpha}^B \frac{dQ}{T} = \int_{A,\beta}^B \frac{dQ}{T}$$

Dunque, qualsiasi sia il percorso tra A e B , luguaglianza precedente vale sempre per percorsi reversibili. Vi è dunque una dipendenza di una certa quantità dai soli stati iniziale e finale. Definiamo dunque, come abbiamo fatto per l'energia potenziale, la *differenza di entropia tra due stati termodinamici*:

$$\Delta S_{AB} = S_B - S_A \stackrel{\text{def}}{=} \int_{A,\text{rev}}^B \frac{dQ}{T}$$

L'entropia è a tutti gli effetti una funzione di stato. Possiamo inoltre ricavare le seguenti osservazioni:

- La somma dell'entropia di due sottosistemi corrisponde all'entropia del sistema complessivo. Da questa osservazione è possibile supporre che l'universo abbia una propria entropia, derivante da tutti i suoi sottosistemi, conosciuti e non.
- Si tratta di una grandezza estensiva. Ha significato solo se si considera l'intero sistema.
- Per calcolare le differenze di entropia nelle trasformazioni reversibili, è sufficiente essere furbi utilizzando le trasformazioni reversibili più comode dal punto di vista computazionale, perché l'entropia è una funzione di stato e non dipende dal percorso.

8.11.12 Variazione di entropia nelle trasformazioni reversibili elementari

- Isoterma:

8.11.13 Il teorema dell'entropia

Consideriamo due trasformazioni termodinamiche che collegano due punti A e B descritti da coordinate termodinamiche. Tuttavia, il primo, α , è irreversibile, mentre β , il secondo, è reversibile. Unendo α e β (invertito), otteniamo un ciclo per il quale vale la seguente disuguaglianza, che segue dal teorema di Clausius

$$\oint_{\gamma} \frac{dQ}{T} < 0$$

Perché il tratto α rende l'intera trasformazione irreversibile. Come per la definizione di variazione di entropia, spezziamo l'integrale di Clausius:

$$\oint_{\gamma} \frac{dQ}{T} = \int_{A,\alpha}^B \frac{dQ}{T} + \int_{B,\beta}^A \frac{dQ}{T} < 0$$

Da cui, sapendo che β è reversibile,

$$\int_{A,\alpha}^B \frac{dQ}{T} < \int_{A,\beta}^B \frac{dQ}{T} = \Delta S_{AB}$$

Il fatto che la variazione di entropia dipenda solo dagli stati iniziale e finale, è possibile concludere con la seguente generalizzazione

$$\Delta S_{AB} \geq \int_{A,\text{qualsiasi}}^B \frac{dQ}{T} \quad (8.8)$$

che è l'enunciato del teorema dell'entropia (come sempre, l'uguaglianza vale solamente per trasformazioni reversibili). Dal teorema segue un'osservazione inquietante. Per un sistema isolato, non vi è alcuno scambio di calore con l'esterno, qualunque siano le trasformazioni che stanno avvenendo al suo interno, reversibili oppure no. Dunque $dQ = 0$ e l'integrale è sempre nullo.

$$\Delta_{AB} \geq \int_A^B \frac{dQ}{T} = 0 \quad \Delta_{AB} \geq 0$$

ovvero

$$S_B \geq S_A$$

Segue che per il nostro sistema isolato l'entropia non può mai diminuire; essa può al più rimanere costante. Ma la cosa più sconcertante è che anche quest'ultima prospettiva è pressoché un miraggio: dovremmo riprodurre trasformazioni *sempre reversibili*.

Entropia e tempo