Fisica

Zeno Saletti

15 marzo 2024

If, in some cataclysm, all of scientific knowledge were to be destroyed, and only one sentence passed on to the next generations of creatures, what statement would contain the most information in the fewest words? I believe it is the *atomic hypothesis* [...] that *all things are made of atoms—little particles that move around in perpetual motion, attracting each other when they are a little distance apart, but repelling upon being squeezed into one another.* In that one sentence, you will see, there is an enormous amount of information about the world, if just a little imagination and thinking are applied.

Richard P. Feynman,
The Feynman Lectures on Physics

Consigliamo di consultare questa dispensa ascoltando il brano seguente:
Cornfield Chase by Hans Zimmer (from *Interstellar*)

Indice

Parte I

Book

1

Introduzione alla Fisica

1.1 Definizione e scopi della fisica

Si possono formulare definizioni diverse riguardo la disciplina scientifica della fisica, come la seguente:

Fisica

La fisica è lo studio quantitativo delle leggi fondamentali della natura, cioè delle leggi che governano tutti i fenomeni naturali dell'universo. Una legge fisica (o principio) è una regolarita' della natura esprimibile in forma matematica, ma anche una verità non dimostrabile che tuttavia non contraddice i fenomeni osservabili dell'esperienza.

La fisica si avvale del **metodo scientifico**, secondo cui la natura deve essere interrogata per vie sperimentali, facendosi guidare da **ipotesi** e modelli teorici. Una particolarita' di questo metodo è la capacita' di isolare un certo fenomeno che si intende studiare, tralasciando (si usera' spesso il termine *trascurare*) certi aspetti ritenuti non rilevanti in modo da scoprire quelle regolarita' dalle quali potrebbe essere dedotta una certa' relazione matematica.

Il ruolo della matematica è di fornire un linguaggio formale per descrivere quantitativamente i fenomeni osservati e costruire modelli utili alla loro trattazione.

1.2 Grandezze fisiche

La fisica è una scienza quantitativa, ovvero essa si occupa di caratteristiche e proprieta' del mondo che possono essere misurate e quantificate: le cosiddette grandezze fisiche. Esempi di grandezze fisiche sono la lunghezza, la massa, la temperatura, la durata temporale e cosi' via.

Grandezza fisica

Una grandezza fisica è una caratteristica di un oggetto o di un fenomeno che puo' essere misurata in termini quantitativi (oltre che oggettivi, ovvero indipendentemente dalle sensazioni personali degli individui).

È implicito, intuitivamente, il concetto di **misura**. Misurare una grandezza fisica significa confrontarla con una grandezza “campione”, detta **unita' di**

misura, e stabilire quante volte l'unita' di misura è contenuta nella grandezza data. Il valore numerico ottenuto è la misura della grandezza e deve essere sempre accompagnato dall'unita' di misura. In altre parole, la **misura** non è altro che un *rapporto* tra la grandezza che si intende misurare e la grandezza campione scelta convenzionalmente per tale scopo.

Mostriamo un esempio: supponiamo di voler misurare la lunghezza di qualsiasi cosa in "chiavette USB" (si potrebbe argomentare circa quale chiavetta si stia impiegando e quale posizione la chiavetta debba assumere durante la misura. Supponiamo qui che la chiavetta sia posta in verticale, senza perderci in ulteriori dettagli). Decidiamo poi di misurare l'altezza di una porta—anche qui, non specifichiamo quale porta—utilizzando l'unita' appena scelta. Supponiamo quindi di aver registrato il seguente dato:

$$H = 20 \text{ chiavette USB}$$

Notare come siano stati specificati:

- Un nome per l'oggetto che si intendeva misurare, H, ovvero l'altezza della porta.
- Il valore numerico individuato, 20.
- Una affermazione per legare il nome e il dato, = ("corrisponde a", "è uguale a")—caratteristica che peraltro si trova anche nei linguaggi di programmazione.
- L'unita' di misura, chiavette USB.

Tuttavia, tale misurazione non è stata affatto "sincera": non vi è la garanzia del fatto che il valore registrato sia esatto. La prossima sezione trattera' questo problema, ovvero quello dell'*incertezza*.

1.3 Incertezza

Idealmente, si vorrebbe impiegare, grazie alle misure, numeri puntuali ed esatti. In altre parole, dei numeri con una precisione indefinita, aventi un numero illimitato di cifre decimali e non.

Ma quando si effettua una misura di una grandezza, il risultato ottenuto è noto solo con una certa precisione. Riprendendo l'esempio della chiavetta USB, è impossible misurare con certezza tutte le lunghezze, in quanto non multipli esatti della chiavetta stessa: ci sara' sempre un certo margine di "un pezzo di chiavetta", minore dell'unita' prescelta. Ma al di sotto di quella unita' non è possibile fornire alcuna garanzia sulla puntualita' del dato. In altre parole, la *sensibilità*[1] dello strumento è uno dei limiti alla precisione della misura.

[1] La più piccola variazione della grandezza che lo strumento è in grado di rilevare.

Cifre significative del risultato di una misura

Le cifre significative del risultato di una misura sono le cifre note con certezza e la prima cifra incerta. In altre parole, esse sono le cifre che si possono controllare con lo strumento impiegato nella misura.

Ad esempio, il valore corrispondente alla lunghezza di una barca $L = 10,5$ m possiede tre cifre significative, che non equivale a $10,50$ m. Il secondo dato, infatti, dichiara che la misurazione è stata possibile controllando le cifre fino al centimetro. $L = 0,002$ possiede solo una cifra significativa, perché in genere si ignorano gli zeri a sinistra della prima cifra significativa diversa da zero. Possono essere ambigui valori come $L = 2500$ m: quali zeri sono cifre significative? Come vedremo tra poco, è utile esprimere questi valori in notazione scientifica per eliminare ambiguità.

Vi potrebbero anche essere errori dovuti a imprecisioni introdotte nell'utilizzo degli strumenti di misura. Questo errore deve tuttavia essere quantificato ed ogni misura ne è affetta (comprese quelle che non la riportano).

Risultato della misura di una grandezza

Il risultato della misura di una grandezza è sempre un'approssimazione accompagnata da una certa incertezza, ovvero un **valore attendibile** e un **errore assoluto** (o semplicemente *incertezza*).

$$x = \overline{x} \pm e_x$$

Questo risultato non è quindi altro che un intervallo in cui il valore reale della misura si trova. Ci limiteremo agli errori relativi a singole misure, nelle quali x corrisponde al valore misurato e e_x la sensibilità dello strumento. Di conseguenza, possiamo ora correggere il risultato della misura effettuata in chiavette USB:

$$H = (20 \pm 1) \text{ chiavette USB}$$

1.4 Notazione scientifica e ordini di grandezza

Unità di misura come il metro e il kologrammo sono comode nella vita di tutti i giorni, ma rappresentano quantità enormi su scala atomica e subatomica e quantità minuscole su scala astronomica e cosmica. Conseguenza di ciò è che alcune misure possono essere espresse da numeri "scomodi". Considerando solo valori attendibili, la massa dell'atomo di idrogeno è circa

$$m_H = 0,00000000000000000000000000167 \text{ kg}$$

mentre la massa della Terra è

$$m_T = 5970000000000000000000000 \text{ kg}$$

È pressoché evidente il motivo di tale scomodità: la notazione è di difficile trattazione. Viene dunque in aiuto la **notazione scientifica**, ovvero una notazione numerica che permette di contrarre rappresentazioni estese impiegando potenze di 10. Nella notazione scientifica, ogni numero è scritto come prodotto di due fattori:

- Un numero decimale $x : x \in R, 1 \leq x < 10$[2].
- Una potenza di 10, con esponente intero.

Pertanto, le misure precedenti si possono esprimere in notazione scientifica come segue:

$$m_H = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Notare come la notazione sia in grado di eliminare ambiguità sul numero di cifre significative: ora sappiamo che la massa della Terra è stata calcolata fino a tre cifre significative e non 25.

Non sempre è necessario calcolare esattamente il valore di una certa grandezza. Talvolta basta averne solo un'idea approssimata. Supponiamo, ad esempio, che sia sufficiente sapere se una certa massa vale all'incirca 1 grammo oppure 1 ettogrammo. In questo caso, possiamo accontentarci di stimare il valore della massa con un'accuratezza di un fattore 10, cioè di calcolare il suo ordine di grandezza.

Ordine di grandezza

L'ordine di grandezza di un numero è la potenza di 10 più vicina a quel numero.

Per determinare l'ordine di grandezza di un numero occorre quindi esprimerlo in notazione scientifica—prodotto di un numero decimale compreso tra 1 e 10 e di una potenza di 10—e poi approssimare il valore alla potenza di 10 più vicina. In particolare:

- Se il numero decimale è minore di 5, si mantiene l'esponente della potenza. Ad esempio:

$$3,6 \cdot 10^2 \rightarrow \text{ Ordine di grandezza } 10^2$$

$$4,2 \cdot 10^{-3} \rightarrow \text{ Ordine di grandezza } 10^{-3}$$

- Se il numero decimale è maggiore di 5, si somma +1 all'esponente della potenza. Ad esempio:

$$9 \cdot 10^2 \approx 10 \cdot 10^2 \rightarrow \text{ Ordine di grandezza } 10^3$$

$$8,1 \cdot 10^{-12} \approx 10 \cdot 10^{-12} \rightarrow \text{ Ordine di grandezza } 10^{-11}$$

[2] In realtà, questa notazione corrisponde alla variante "ingegneristica". Esiste anche una notazione che prevede che il valore espresso x sia $0 \leq x < 1$.

Sono stati definiti dei prefissi stadard per certi ordini di grandezza notevoli, cioè quelli che, escludendo la potenza nulla, rappresentano multipli di tre. Utilizzando questi prefissi, di fianco all'unità di misura adottata, si contrae ancora di più la notazione scientifica, sottointendendo un certo ordine di grandezza.

Potenza	Simbolo	Prefisso
10^{12}	T	Tera
10^{9}	G	Giga
10^{6}	M	Mega
10^{3}	k	kilo
10^{-3}	m	milli
10^{-6}	μ	micro
10^{-9}	n	nano
10^{-12}	p	pico

2

Descrizione del moto

2.1 Moto del punto

Un corpo è in moto quando la sua posizione cambia nel tempo. Nel descrivere il moto, si introdurrà la seguente semplificazione: gli oggetti in moto saranno trattati come *punti materiali*, ovvero concentrati in un punto adimensionale. In particolare, *le dimensioni dell'oggetto del quale si intende studiare il moto saranno considerate trascurabili rispetto a quelle dell'ambiente circostante.*

2.1.1 Posizione e traiettoria

Alla base della descrizione del moto, è importante individuare quelli che sono chiamati *posizione* e *traiettoria*. Avendo assunto la semplificazione del punto materiale, è intuibile che la posizione verrà descritta matematicamente come una tupla di coordinate inserite in un sistema di riferimento. Tra le coordinate, è importante tenere presente anche il tempo. Di fatto, abbiamo introdotto il moto definendolo come variazione della posizione nel tempo.

La traiettoria non è altro che la linea che unisce le posizioni occupate successivamente dal corpo. Tratteremo prima moti con traiettorie rettilinee, per poi passare a traiettorie curvilinee semplici (il moto circolare).

2.1.2 Sistemi di riferimento

Abbiamo detto che il moto è caratterizzato da un cambiamento di posizione. Il primo passo nella descrizione del moto di un corpo consiste quindi nello stabilire il modello da adottare per catturare il concetto di **posizione**. Sappiamo già che i modelli della fisica si basano sul linguaggio matematico; il modello più naturale che si possa adottare è dunque un sistema di assi cartesiani. Da qui, la posizione del corpo può essere specificata mediante coordinate. Una speciale coordinata è il tempo (in caso di moti in più di una dimensione spaziale, il tempo viene spesso omesso dalla rappresentazione grafica).

La scelta del sistema di riferimento di assi cartesiani è del tutto arbitraria[1], ma una volta fissata è necessario essere coerenti con essa. Questo permette di riflettere sul fatto che il moto è sempre relativo al sitema di riferimento adottato: cambiando sistema di riferimento, il moto cambia.

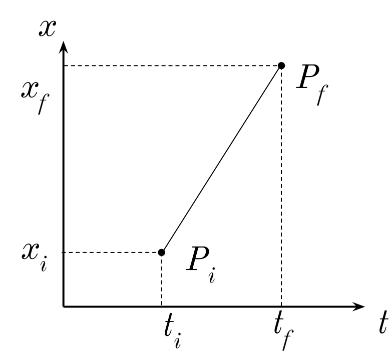

Figura 2.1: Sistema di riferimento con una sola dimensione spaziale (x) in funzione del tempo (t). All'istante t_i, il punto materiale P si trova nella posizione x_i

[1] Gli assi possono addirittura non essere ortogonali, purché si segua la *regola del parallelogramma* e si rinunci alle proprietà e alle regolarità matematiche degli assi ortogonali, come il teorema di Pitagora per il calcolo del modulo dei vettori.

2.1.3 Distanza e spostamento

Durante il moto, è possibile registrare la **distanza** percorsa dall'oggetto e il suo **spostamento**. Il primo è una grandezza scalare e corrisponde alla distanza totale percorsa durante il tragitto effettuato dall'oggetto in moto. Il secondo è una grandezza vettoriale e corrisponde al cambiamento di posizione, cioè la differenza tra la posizione iniziale e quella finale dell'oggetto:

$$\Delta\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}_f - \overrightarrow{x}_i$$

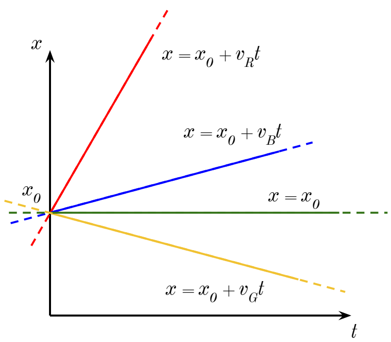

Figura 2.2: Oggetti in moto rettilineo uniforme con velocità differenti

2.2 Interpretazioni geometriche

2.3 Moto rettilineo uniforme

2.4 Accelerazione

2.5 Moto circolare

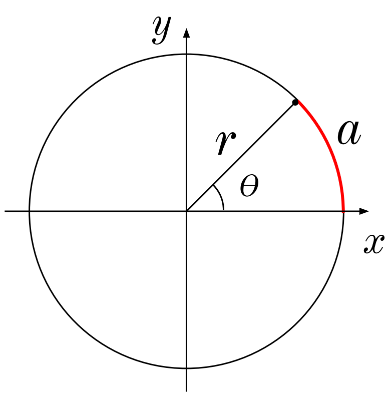

Figura 2.3: Sistema di riferimento per un moto circolare

Cambiamo ora la traiettoria dell'oggetto in moto, considerando quella circolare. Per descrivere un moto circolare è conveniente impiegare coordinate differenti, dette polari. Fissando il centro di un piano cartesiano al centro di una circonferenza di raggio r, possiamo identificare la posizione di ogni punto della circonferenza con la coppia (r, θ), dove θ è l'angolo formato dalla semiretta appartenente al sistema di riferimento e dalla semiretta che interseca la circonferenza nel punto desiderato (entrambe le semirette hanno origine nel centro del piano cartesiano, quindi della circonferenza).

Assumeremo qui che r non varia durante il moto. Per questo, viene omessa la coordinata r e si considera invece la posizione derivante da θ, detta anche *posizione angolare*. Convenzionalmente, $\theta > 0$ se misurato in senso antiorario a partire dall'asse di riferimento (come in Figura 2.3). Si utilizzano inoltre i *radianti* per misurare θ. I radianti tornano infatti comodi, perché permettono di semplificare le relazioni tra le grandezze in gioco durante il moto circolare. Innanzitutto, dato l'arco a in Figura 2.3, vale la relazione

$$a = r\theta$$

Di fatto, la lunghezza totale della circonferenza corrisponde a $C = 2\pi r$, dove 2π corrisponde ad un angolo giro espresso in radianti.

2.5.1 Velocità angolare e velocità tangenziale

Studiamo ora il cambiamento della posizione angolare nel tempo. Come per il moto rettilineo, possiamo considerare il rapporto tra lo spostamento angolare e l'intervallo di tempo trascorso. Da qui, si ottiene la velocità angolare:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

In ogni istante, una particella in moto circolare si muove in direzione tangenziale alla traiettoria. È chiaro che la particella, muovendosi, copre una certa distanza sulla circonferenza in un dato intervallo di tempo. Possiamo quindi affermare che essa ha una velocità, detta *tangenziale*, v, oltre che quella angolare ω. Cerciamo una relazione tra esse: supponiamo che la particella effettui, in un intervallo infinitesimo Δt, uno spostamento angolare altrettanto piccolo $\Delta\theta$ come mostrato in Figura 2.4. Lo spostamento Δs, dato dalla corda che sottende l'angolo $\Delta\theta$, approssima l'arco $a = r\Delta\theta$. Quindi:

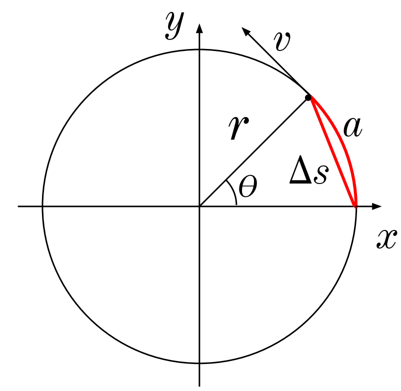

Figura 2.4: Velocità tangenziale

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega$$

Abbiamo quindi ottenuto la relazione cercata:

$$v = r\omega$$

Notare come $v \propto r$, al contrario di ω. Ciò significa che, assumendo una velocità angolare costante, la velocità tangenziale è tanto maggiore quanto più r cresce.

2.5.2 Moto circolare uniforme

Un moto circolare uniforme è un moto circolare con velocità *angolare* costante. Le regolarità di questo tipo di moto permettono di studiare altre grandezze importanti per il moto circolare: periodi e accelerazioni.

Periodo e frequenza

La particolarità di questo moto è la sua periodicità, perché esso si ripete ciclicamente nel tempo. In particolare, un oggetto torna ad occupare la medesima posizione iniziale dopo un certo intervallo di tempo, chiamato **periodo** (T): in altre parole, il tempo necessario per compiere "un giro (ciclo) completo". Nel nostro caso, un giro completo corrisponde all'intera circonferenza $C = 2\pi$. Sapendo che $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, è immediato ricavare il periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Si impiega spesso anche la **frequenza**, che corrisponde al reciproco del periodo:

$$f = \frac{1}{T}$$

L'unità di misura è l'*Hertz* (Hz), ovvero "cicli al secondo" (s^{-1}), quindi il numero di cicli compiuti nell'unità di tempo.

Accelerazione centripeta

Riprendendo la prima legge della dinamica, sappiamo che un corpo permane nel suo stato di moto rettilineo uniforme a meno dell'intervento di agenti esterni. Nel caso dell'intervento di tali agenti, si osserva un'accelerazione dell'oggetto, ovvero un cambiamento del suo stato di moto e dunque della sua velocità. Non viene specificato se questo cambiamento avviene al *modulo* oppure alla *direzione* della velocità. Infatti, la velocità è una grandezza vettoriale e una variazione di anche una sola delle sue caratteristiche comporta un'accelerazione. Per questo motivo, nonostante il modulo della velocità tangenziale di un corpo in moto circolare uniforme sia costante, la direzione del suo vettore cambia.

Vi è però il problema aperto di trovare l'agente esterno (la forza) che mantiene l'oggetto (dotato di massa) nella traiettoria del suo moto circolare. Esso può essere di varia natura: la tensione di una corda attaccata ad una pallina che viene fatta roteare; la forza di gravitazione universale che mantiene in orbita (assumiamo circolare) un pianeta intorno ad un sole; la forza elettrica che mantiene un elettrone vicino al nucleo (secondo un modello classico dell'atomo).

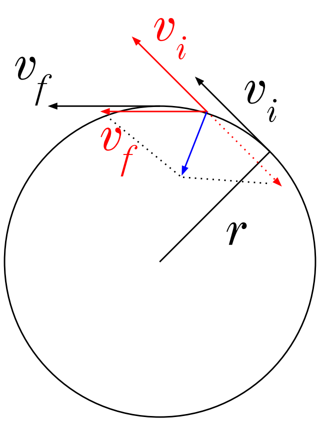

Figura 2.5: Dimostrazione delle caratteristiche geometriche del vettore accelerazione centripeta

Vista quindi l'esistenza di un'accelerazione determinata da un agente esterno, rimane da capire come è fatto il suo vettore (modulo, verso e direzione). L'esperienza ci dice che questa accelerazione: (1) cresce con l'aumentare della velocità angolare; (2) è diretta verso il centro della circonferenza. Ma come dimostrarlo formalmente per tutti i moti circolari uniformi? Consideriamo la situazione in Figura 2.5. consideriamo una variazione molto piccola nella posizione angolare dell'oggetto, che parte con una velocità iniziale $\vec{v}_i$ e termina con la velocità finale $\vec{v}_f$, uguali in modulo ma diverse in direzione. Come già detto, possiamo esprimere l'accelerazione come variazione della velocità tangenziale.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \simeq \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Concentriamoci sul termine $\Delta\vec{v}$.

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i = \vec{v}_f + (-\vec{v}_i)$$

Geometricamente, i vettori velocità si sommano secondo la "regola del parallelogramma" come mostrato nella Figura. Con i dovuti formalismi geometrici, sapendo che il modulo di v è sempre costante, possiamo dimostrare che l'accelerazione è effettivamente centripeta e ortogonale alla velocità tangenziale, ovvero il suo vettore punta sempre verso il centro della circonferenza. Sempre dalla Figura, possiamo osservare che al crescere di v cresce anche a; tenendo poi presente che la variazione $\Delta\vec{v}$, che è un vettore, viene moltiplicata per la quantità scalare $\frac{1}{\Delta t}$, il vettore risultante dell'accelerazione cresce in modulo quanto più piccolo diventa l'intervallo Δt: ovvero la velocità dell'oggetto è maggiore. Dimostreremo più avanti che la relazione precisa tra i moduli di queste grandezze è data da

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

2.6 Moto armonico

Supponiamo di osservare un oggetto in moto circolare uniforme, ma invece di vederlo "dall'alto" lo guardiamo con la riconferenza della traiettoria posta orizzontalmente. Da questo punto di vista, vedremo l'oggetto *oscillare* a destra e sinistra all'interno di uno spazio la cui larghezza corrisponde al diametro della circonferenza. Ciò che si vede è un moto particolare, il *moto armonico semplice*.

Dalla Figura 2.6 possiamo notare che, fissato il solito sistema di riferimento xy, il moto armonico semplice non è altro che la proiezione sugli assi di un moto circolare uniforme. Per questo motivo, possiamo descrivere la posizione dell'oggetto caratterizzato da tale moto:

$$\begin{cases} x_p(t) = r\cos\theta = r\cos(\omega t) \\ y_p(t) = r\sin\theta = r\sin(\omega t) \end{cases}$$

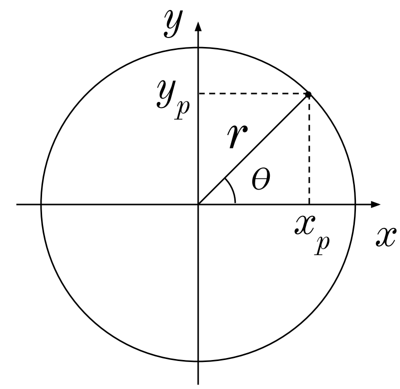

Figura 2.6: Modello di moti armonici semplici a partire da proiezioni di un moto circolare uniforme

Possiamo quindi notare che il moto circolare è la composizione di due moti armonici. Sapendo che la velocità corrisponde alla derivata della funzione che descrive la posizione:

$$\begin{cases} v_x(t) = -\omega R\sin(\omega t) \\ v_y(t) = \omega R\cos(\omega t) \end{cases}$$

Derivando nuovamente, otteniamo l'accelerazione:

$$\begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 R\cos(\omega t) \\ a_y(t) = -\omega^2 R\sin(\omega t) \end{cases}$$

Esiste anche una dimostrazione geometrica di tali relazioni, che non impiega esplicitamente i metodi del calcolo infinitesimale. È sufficiente tenere in considerazione la posizione angolare θ, avere dimestichezza con le funzioni sinusoidali e ricordare direzione e verso dei vettori velocità tangenziale e accelerazione centripeta durante un moto circolare uniforme.

Relazione tra accelerazione centripeta e velocità

Siamo ora in grado di mostrare l'origine della relazione $a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ tra accelerazione centripeta e velocità (angolare e tangenziale) in un moto circolare uniforme.

Osserviamo che il sistema che descrive l'accelerazione del moto armonico contiene i termini $r\cos(\omega t)$ e $r\sin(\omega t)$: le coordinate del punto in moto circolare uniforme in funzione del tempo. Dunque

$$\begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 r\cos(\omega t) \\ a_y(t) = -\omega^2 r\sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 x(t) \\ a_y(t) = -\omega^2 y(t) \end{cases}$$

Queste non sono altro che le componenti dell'accelerazione centripeta solidali al sistema di riferimento di assi xy. Sapendo che il modulo di un vettore corrisponde a $|\overrightarrow{r}| = r = \sqrt{x_r^2 + y_r^2}$ (con x_r, y_r le componenti del vettore r rispetto ad un sistema di assi ortogonali xy), è immediato mostrare che

$$|\overrightarrow{a}| = a = \sqrt{(-\omega^2 x)^2 + (-\omega^2 y)^2} = \sqrt{\omega^4 x^2 + \omega^4 y^2} = \omega^2\sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 r$$

Dal precedente sistema, è possibile capire perché il vettore dell'accelerazione è diretto verso il centro della circonferenza: x ed y sono le componenti del *vettore posizione* dell'oggetto in movimento; tale vettore non è altro che una freccia di modulo uguale alla lunghezza del raggio e la cui punta indica il punto in cui il corpo si trova sulla circonferenza, dunque questo vettore punta verso l'esterno; ma dato che ogni componente viene moltiplicata per la quantità negativa $-\omega^2$, il vettore accelerazione centripeta non può che puntare nel verso opposto, quindi verso il centro della circonferenza. L'equazione vettoriale è dunque la seguente:

$$\overrightarrow{a} = -\frac{v^2}{\overrightarrow{r}}$$

Accelerazione centripeta, traiettorie curvilinee, raggio di curvatura

L'accelerazione centripeta non esiste solamente nei moti circolari uniformi, ma, come possiamo ricordare da esperienze quotidiane, qualsiasi variazione nella traiettoria di un corpo in moto, attraverso una "sterzata", permette di percepire l'effetto e la direzione dell'accelerazione. Possiamo dunque estendere la descrizione del moto circolare uniforme a casi meno eccezionali, come quelli dei moti dalle traiettorie curvilinee. È interessante come l'equazione dell'accelerazione centripeta permetta di ottenere informazioni interessantissime su moti come questi, come il **raggio di curvatura**. Si osservi l'esempio in Figura 2.7. Tratti di traiettorie come queste possono essere approssimate da archi di circonferenze con raggi di lunghezze differenti. Durante ognuno di questi brevi tratti, percorsi sugli archi, l'oggetto in moto è sottoposto ad una certa accelerazione centripeta. Assumento che tale oggetto abbia una massa, è possibile misurare l'accelerazione rilevando la forza esercitata sull'oggetto durante il tratto di curva. Dall'equazione dell'accelerazione centripeta, vale

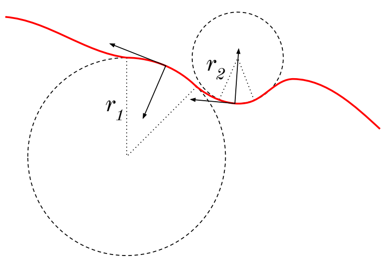

Figura 2.7: Una traiettoria curvilinea apporssimata da archi di circonferenze con raggi differenti

$$\frac{F}{m} = \frac{v^2}{r}$$

Date le nostre supposizioni sulle grandezze conosciute (forza, massa e velocità), l'unico dato che rimane è il raggio, che in questo caso prende il nome di *raggio di curvatura*:

$$r = \frac{v^2 m}{F}$$

2.7 Moto nel piano

2.7.1 Vettori

Vettori posizione e spostamento.

$$\Delta\overrightarrow{s} = \overrightarrow{s}_f - \overrightarrow{s}_i$$

Vettore velocità

$$\overrightarrow{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{s}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{s}}{dt} \sim ds \cdot \frac{1}{dt}$$

Per definizione *sempre* tangente alla traiettoria. La traiettoria è la serie dei punti che si ottiene percorrendo per tratti infinitesimi le velocità istantanee.

Accelerazione tangente e accelerazione normale.

Esercizio

$|\overrightarrow{v}_i| = 50$ km/h, $|\overrightarrow{v}_f| = 100$ km/h, $m = 1800$ kg, $R = 20$ m, $\Delta t = 2$ s. $|\overrightarrow{F}_n| =$? (forza normale), $|\overrightarrow{a}_t| =$?. Assumiamo che l'auto acceleri con costanza tra le due velocità.

- $a_{n,i} = \frac{v_i^2}{R}$, $a_{n,f} = \frac{v_f^2}{R}$
- $F_{n,i} = ma_{n,i} \simeq 17100$ N, $F_{n,f} = ma_{n,f} \simeq 68400$ N
- $|\overrightarrow{a}_t| = cost = \frac{|\Delta \overrightarrow{v}|}{\Delta t} \simeq 6,95$ m/s^2

3

Dinamica

3.1 Recap

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{v}(t - t_0)$$

Semplificazioni in termini di variazioni, infinità.

3.2 Leggi della dinamica

Nella descrizione introduttiva del moto, non è stata analizzata alcuna causa del fenomeno.

3.2.1 La prima legge

Prima legge della dinamica (legge di inerzia)

Un corpo permane nel suo stato di *quiete* o moto rettilineo uniforme finché non intervenga un *agente esterno*.

In altre parole, se nulla "rompe le scatole" al corpo, esso permanerà nel suo stato di moto, naturalmente.

Sistema inerziale

Sistema nel quale vale la prima legge della dinamica.

3.2.2 La seconda legge

Quando l'agente esterno agisce sull'oggetto, l'effetto è un cambiamento nello stato di moto di quell'oggetto. Ovvero, cambia la sua velocità. La variazione della velocità nel tempo è chiamata **accelerazione**.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = a$$

Seconda legge della dinamica

$$\frac{|\overrightarrow{F}|}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{F}{a} = m \tag{3.1}$$

Gli oggetti hanno inerzia, ovvero capacità di opporsi all'agire dell'agente esterno. Questa capacità di opporsi è rappresentato da una quantità detta massa (inerziale).

3.2.3 Analisi dimensionale

$$[F] = [ma] = \left[m \cdot \frac{v}{t}\right] = \left[m \cdot \frac{l}{t^2}\right]$$

$$1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{udm}\left[M \cdot \frac{L}{T^2}\right] = \text{udm}[F] = 1 \text{ N}$$

3.2.4 Molla e forza elastica

$$F \propto \Delta x$$

La forza che la molla esercita, essendo in opposizione alla direzione nella quale la deformazione viene effettuata, corrisponde a:

$$F_{el} = -k\Delta x$$

3.3 Forza agente sul moto

Un blocco di massa $m = 10$ kg viaggia ad una velocità $v_i = 2$ m/s. Una forza $F = 20$ N agisce sul blocco per $T = 5$ s. Quale velocità raggiungerà il blocco dopo T?. Dopo T, la forza cessa di agire e il blocco viaggia a v_f trovata precedentemente. Includendo lo spazio percorso durante T (e dunque il tempo T), quanto tempo impiega il blocco a coprire $s_w = 2$ km di distanza?

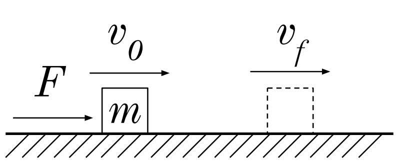

Figura 3.1: Forza agente su una massa in moto

Per rispondere al primo quesito, possiamo assumere un moto rettilineo uniformemente accelerato durante l'intervallo T. Sappiamo che

$$a = \frac{F}{m} = \frac{dv}{dt}$$

Da cui possiamo esprimere la velocità in funzione del tempo (la velocità iniziale la conosciamo già, ma assumiamo un tempo iniziale $t_0 = 0$):

$$\frac{F}{m}dt = dv \rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{F}{m}dp = \int_{v_0}^{v} dw \rightarrow \frac{F}{m}\int_0^t dp = v - v_0 \rightarrow \frac{F}{m}t = v - v_0$$

Dunque

$$v(t) = v_0 + \frac{F}{m}t$$

Non ci manca che calcolare la velocità in corrispondenza di un $t_f = t_0 + \Delta t = 0 + T = T$:

$$v(t_f) = v(T) = v_0 + \frac{F}{m}T$$

Nel secondo quesito, possiamo spezzare il problema in due parti: durante l'azione della forza, la distanza percorsa (s_a) deve essere calcolata tenendo conto del moto uniformemente accelerato, mentre nell'intervallo di tempo successivo (T_v) il moto è semplicemente uniforme. Dalla seguente equazione, possiamo ricavare T_v (T lo conosciamo già).

$$s_w = s_a + s_v = s_a + v_f T_v = \int_0^T (v_0 + at)dp + v_f T_v = v_0 T + \frac{1}{2}aT^2 + v_f T_v$$

Il tempo per percorrere 2 km è dunque:

$$T_{2\ \mathrm{km}} = T + \frac{s_w - v_i T - \frac{F}{2m}T^2}{v_f} = T + \frac{s_w - v_i T - \frac{F}{2m}T^2}{v_i + \frac{F}{m}T}$$

3.4 Lancio verso l'alto

Si consideri la situazione mostrata in Figura 3.2. Durante la salita, l'oggetto rallenta a causa dell'accelerazione di gravità g. Determiniamo la quota che l'oggetto raggiungerà.

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = adt \rightarrow \int_{v_0}^{v} dw = \int_{t_0}^{t} adp \rightarrow v - v_0 = a\int_{t_0}^{t} dp \rightarrow v - v_0 = a(t - t_0)$$

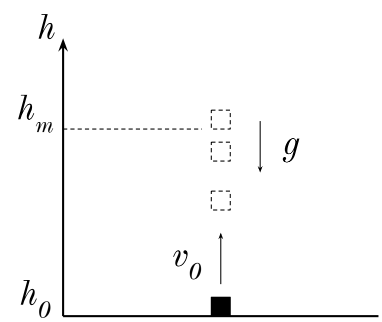

Figura 3.2: Lancio di un oggetto verso l'alto

Dunque

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) = v_0 + at$$

Rallentando, si arriverà ad un istante t_f nel quale l'oggetto avrà velocità nulla:

$$v(t_f) = 0 \rightarrow v_0 + at_f = 0$$

Non disponiamo tuttavia del tempo, ma possiamo avvalerci della legge oraria che descrive la distanza percorsa:

$$v(t) = \frac{dh}{dt} \rightarrow \int_{h_0}^{h} dk = \int_{t_0}^{t} v(t)dp \rightarrow h - h_0 = \int_{t_0}^{t} (v_0 + ap)dp$$

$$h - h_0 = v_0 \int_{t_0}^{t} dp + a\int_{t_0}^{t} pdp \rightarrow h - h_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Da cui:

$$h(t) = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Abbiamo quindi ottenuto la quota in funzione del tempo, che possiamo ricavare dall'equazione $v_0 + at_f = 0 \to t_f = -\frac{v_0}{a}$.

$$h(t_f) = v_0 t_f + \frac{1}{2}at_f^2 = -\frac{v_0^2}{a} + \frac{1}{2}a\frac{v_0^2}{a^2} = -\frac{v_0^2}{a} + \frac{v_0^2}{2a} = -\frac{v_0^2}{2a}$$

Sapendo che $a = -|g|$, la quota massima h_m raggiunta è:

$$h_m = \frac{v_0^2}{2|g|}$$

Spostamento

$$\Delta\overrightarrow{s} = \overrightarrow{s}_f - \overrightarrow{s}_i$$

3.4.1 La terza legge

Terza legge della dinamica

Accelerazione centripeta nel moto circolare uniforme

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \tag{3.2}$$

3.5 Statica

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F}_i = m\overrightarrow{a}$$

La somma nel membro di sinistra è detta *risultante* ($\overrightarrow{R}$). In quiete, non c'è accelerazione:

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$$

Se la velocità è costante, possiamo parlare di problemi di quiete? Yes.

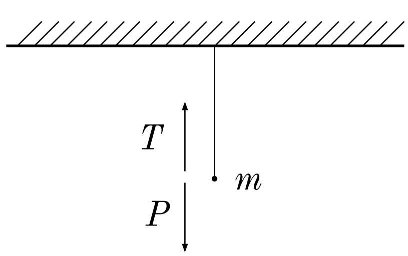

Figura 3.3: Massa appesa ad un filo

Esercizio

$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0} \Rightarrow -mg + T = 0 \Rightarrow T = mg$.

Esercizio

Come quello precedente ma con due corde che tengono m, inclinate di tot gradi fissate al soffitto. Trovare la tensione su ciascun filo.

3.6 Dinamica e moti armonici

Tratteremo il moto armonico introducendo elementi di dinamica newtoniana, studiando in particolare i cosiddetti *oscillatori armonici*.

Oscillatore armonico

Un oscillatore armonico è un oggetto su cui agisce una forza proporzionale, in modulo, allo spostamento dalla posizione di equilibrio e diretta in verso opposto rispetto a tale spostamento.

Saranno due gli oscillatori armonici di nostro interesse: l'oscillatore a molla e il pendolo semplice. Tuttavia, esistono numerosi esempi di oscillatori armonici in natura, come uno snowboarder che compie evoluzioni in un half-pipe o un atomo che vibra intorno al suo punto di equilibrio (con le dovute approssimazioni).

3.6.1 Le equazioni del moto armonico

Riprendiamo le equazioni del moto armonico introdotto nel capitolo precedente. Il cuore pulsante di tutte le leggi orarie del moto armonico è la funzione periodica, seno o coseno. La scelta tra queste due dipende dal sistema di riferimento scelto e dalle condizioni iniziali dell'oscillatore. Nel nostro caso, scegliamo un oscillatore che parte dalla posizione di equilibrio (e che come vedremo avrà velocità massima in questo punto), quindi utilizziamo il seno per descrivere la sua posizione in funzione del tempo:

$$x(t) = A\sin(\omega t)$$

È necessario fare alcune precisazioni: per *posizione* non intendiamo solo quella spaziale, ma anche, per esempio, quella angolare; inoltre, l'equazione precedente non è sufficientemente generale, perché abbiamo implicitamente supposto che l'istante temporale iniziale sia $t_0 = 0$. Per questo, la legge oraria generale della posizione di un oscillatore armonico è $x(t) = A\sin(\omega(t - t_0)) = A\sin(\omega t - \omega t_0)$ (è facile verificare che effettivamente $x(t_0) = 0$, in accordo con la nostra scelta del sistema di riferimento). In genere la legge si scrive in questo modo

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{3.3}$$

Introduciamo alcune terminologie tecniche:

- **Ampiezza** A: si tratta del massimo spostamento spaziale dell'osillatore. Nell'esempio del moto circolare, corrisponde al raggio della circonferenza. L'oscillatore si muove di fatto tra il massimo A e il minimo $-A$.

- **Pulsazione** ω: è un indice della "rapidità" dell'oscillatore nel compiere i suoi cicli. Approfondiremo meglio l'interpretazione della pulsazione nei prossimi paragrafi.

- **Fase** $\phi = -\omega t_0$: intuitivamente, lo "sfasamento" dell'oscillatore. Incontriamo spesso oscillatori sfasati quando essi vengono messi in moto in istanti differenti. Per comodità, ometteremo spesso la fase, sottointendendo $t_0 = 0$.

Con qualche derivata della posizione, otteniamo velocità e accelerazione dell'oscillatore in fuznione del tempo:

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(A\sin(\omega t + \phi)) = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}(A\omega\cos(\omega t + \phi)) = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$$

Ecco dunque le leggi orarie generali della velocità e dell'accelerazione di un oscillatore armonico:

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi) \tag{3.4}$$

$$a(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi) \tag{3.5}$$

Concludiamo scrivendo la legge per eccellenza di un moto armonico, ovvero la *condizione sufficiente*. Sappiamo che l'accelerazione non è altro che la derivata seconda della posizione rispetto al tempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Ma dall'Equazione 3.5 notiamo che

$$a = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi) = -\omega^2(A\sin(\omega t + \phi)) = -\omega^2 x$$

Dunque

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{3.6}$$

Abbiamo appena definito matematicamente l'oscillatore armonico: cinematicamente, in un oscillatore l'accelerazione è proporzionale allo spostamento con costante di proporzionalità negativa.

Interpretazione dell'ampiezza

Interpretazione della fase

Interpretazione della pulsazione

In tutte le equazioni dei moti armonici dominano le funzioni goniometriche. Esse sono periodiche, ovvero esiste una quantità T tale per cui $f(x+T) = f(x)$ per ogni x appartenente al dominio di f. In parole meno fredde, dopo un certo *periodo* la funzione si ripete, ciclicamente. Per seno e coseno, il periodo corrisponde a 2π (infatti, vale per esempio $\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \forall x$).

Isoliamo la componente goniometrica delle equazioni armoniche, considerando per esempio il seno e ignorando la fase ϕ (per il coseno il ragionamento è analogo, mentre per ϕ possiamo risolvere il problema mediante trasformazioni). Supponiamo di avere il periodo T, ovvero quel valore per cui la funzione ritorna uguale a se stessa:

$$\sin(\omega t) = \sin(\omega(t + T)) = \sin(\omega t + \omega T)$$

Sapendo che il periodo del seno è 2π:

$$\omega T = 2\pi \quad \therefore \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Possiamo dunque comprendere il significato della pulsazione ω: il suo valore è inversamente proporzionale al periodo T, ovvero la pulsazione cresce al diminuire di T, e viceversa. Questo vuol dire che ω fornisce un indice della "rapidità" con la quale le oscillazioni di un moto armonico avvengono. Graficamente, ω comprime verso l'asse dell'ampiezza la funzione goniometrica quando il suo valore cresce.

3.6.2 L'oscillatore a molla

Consideriamo un carrello di una rotaia a cuscino d'aria di massa m attaccato ad una molla di costante elastica k, indice della durezza della molla. Quando la molla si trova nella posizione di equilibrio, cioè né estesa né compressa, il carrello rimane fermo. Poniamo questa posizione come l'origine $x_o = 0$ di un asse delle posizioni. Se il carrello viene spostato dall'equilibrio e portato a una distanza $\overline{x}$ da tale posizione, la molla esercita una forza elastica di *richiamo* che, per la legge di Hooke, corrisponde a

$$F = -k(x - x_o) = -kx$$

Il segno negativo indica appunto che si tratta di una forza di richiamo, dunque opposta, nel suo verso, allo spostamento dalla posizione di equilibrio. Possiamo applicare la seconda legge di newton:

$$-kx = ma = m\frac{d}{dt}(v) = m\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}(x) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Da cui

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

È evidente che si tratta di un oscillatore armonico, perché l'accelerazione è proporzionale allo spostamento, con costante di proporzionalità negativa. Questa costante è $-\frac{k}{m} = -\omega^2$, da cui possiamo dedurre il periodo dell'oscillatore a molla:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{3.7}$$

Oscillatori verticali

Anche una massa appesa ad una molla verticale può comportarsi come un oscillatore armonico. L'unica differenza è la posizione di equilibrio, nella quale il peso della massa eguaglia la forza di richiamo della molla:

$$mg = kx_0$$

Indipendentemente dal sistema di riferimento utilizzato, l'equazione del periodo non cambia. La forma delle equazioni armoniche rimane pressoché invariata, ma è necessario fare attenzione ad eventuali traslazioni spaziali derivanti dalla scelta del sistema di riferimento.

Misurare dinamicamente k di molle per ammortizzatori

$m = 1500$ kg (massa di una ruota per quattro).

$$k = m_r\frac{4\pi^2}{T^2} = m\frac{\pi^2}{T^2} \simeq 1500\frac{10}{1\ \text{s}}\ \text{kg/s}^2$$

$T \simeq 1$ s.

3.6.3 Il pendolo

Quello del pendolo semplice è un sistema fisico descrivibile mediante il modello del moto armonico. Un pendolo semplice è formato da una massa m appesa ad un filo o un'asta (idealmente inestensibili e di massa trascurabile) con una certa lunghezza l. Il punto di equilibrio stabile del pendolo si trova esattamente al di sotto del punto di sospensione. Di fatto, la posizione a riposo corrisponde a quella illustrata nel sistema della Figura 3.3, dove è stato appunto mostrato che la risultante delle forze agenti sulla massa appesa è nulla.

Supponiamo di spostare la massa dalla sua posizione di equilibrio, formando un angolo θ tra il filo e la verticale. Sappiamo che la massa può oscillare lungo un arco di circonferenza. Fissiamo un sistema di riferimento solidale alla massa, con un asse coincidente con la retta passante per il filo e l'altro ad esso perpendicolare, dunque tangente all'arco. Scomponiamo dunque il peso della massa lungo questi assi (perpendicolare e tangenziale) e applichiamo la seconda legge della dinamica:

$$ma_t = P_t = -mg\sin\theta$$

$$ma_n = -P_n + T + F_c = 0$$

Notare che nella seconda equazione è presente anche la forza centripeta F_c derivante dal moto circolare, oltre la tensione. Concentriamoci sull'accelerazione tangenziale nella prima equazione. Ricordando che gli angoli sono in relazione con la lunghezza degli archi a secondo l'equazione $a = l\theta$:

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ld\theta}{dt}\right) = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Dunque, riprendendo la primissima equazione riguardo la componente tangenziale del peso, semplificando la massa:

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin\theta = 0$$

Per rendere più semplice la trattazione del sistema fisico, supporremo per ipotesi che $\theta \ll 1$ (in radianti), dunque ciò che calcoleremo in seguito varrà solamente per piccole oscillazioni del pendolo. Ricordando le proprietà delle serie di Taylor, possiamo approssimare il seno nella precedente equazione, dividere per la lunghezza l del pendolo ottenendo

Prima	$\varepsilon \to 0$	Dopo
$\sin\varepsilon$		ε
$\tan\varepsilon$		ε
$\cos\varepsilon$		$1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$
e^ε		$1+\varepsilon$
$(1+\varepsilon)^\alpha$		$1+\alpha\varepsilon$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Diventa dunque evidente il motivo della semplificazione: abbiamo ottenuto una relazione nella quale l'accelerazione (angolare) dipende proporzionalmente dallo spostamento (angolare) con costante di proporzionalità negativa. In altre parole, si tratta della descrizione di un moto armonico semplice nella forma $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, dalla quale si deduce che $\omega^2 = \frac{g}{l}$. Ma sapendo che $\omega^2 = (\frac{2\pi}{T})^2$ abbiamo modo di determinare il periodo di oscillazione del pendolo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3.8}$$

Isocronia delle piccole oscillazioni

Come già aveva concluso Galileo nel 1583, il periodo di oscillazione del pendolo, ristretta ad angoli ridotti a partire dalla posizione di equilibrio, non dipende dall'ampiezza, come altri moti armonici. Questo fatto è dimostrato dall'equazione precedentemente ottenuta (Equazione 3.8). Ciò che rende un pendolo diverso dall'altro è la lunghezza del filo e “il pianeta su cui si trova”, intendendo l'accelerazione gravitazionale g. Mantenendo invariati questi parametri, possiamo fissare una qualsiasi massa m e caricare il pendolo a nostro piacere (sempre entro i limiti di angoli ridotti), ma T non cambierà.

Il fatto che l'oscillazione non dipenda dalla massa fissata trova una motivazione analoga a quella di una massa in caduta libera, dove l'accelerazione è sempre la stessa. Masse ridotte si muovono più facilmente per la loro piccola inerzia, ma tuttavia su di esse agisce una forza altrettanto ridotta; d'altra parte, masse maggiori sono sottoposte a forze gravitazionali maggiori, ma sono anche più difficili da spostare. Per giustificare intuitivamente l'indipendenza dall'ampiezza, è sufficiente pensare che una maggiore "carica" è compensata da un tragitto maggiore (l'arco di circonferenza descritto durante l'oscillazione).

Possiamo dunque concludere che queste compensazioni sono il motivo delle indipendenze osservabili nell'equazione 3.8.

Analisi approfondita del moto di un pendolo

Alla luce delle equazioni sul moto armonico semplice, definiamo la velocità *angolare* di una massa di un pendolo semplice:

$$\nu = \frac{d\theta}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

Ricordiamo che l'ampiezza A corrisponde all'angolo massimo spazzato durante l'oscillazione, quindi si tratta di una grandezza adimensionale, seppur col significato di radianti. Per quanto riguarda l'accelerazione angolare:

$$\alpha = \frac{d\nu}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$$

Descriviamo a, l'arco di circonferenza descritto durante il moto, sapendo che la lunghezza del filo è l:

$$a = l\theta = lA\sin(\omega t + \phi)$$

Per quanto riguarda velocità tangenziale e accelerazione tangenziale:

$$v_t = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(l\theta) = l\frac{d\theta}{dt} = l\nu = lA\omega\cos(\omega t + \phi)$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -lA\omega^2\sin(\omega t + \phi)$$

Tensione del filo di un pendolo semplice in funzione del tempo

All'inizio di questa sottosezione, abbiamo analizzato le forze in gioco distinguendo le componenti tangenziali e perpendicolari alla circonferenza descritta dal pendolo. È ora di analizzare la componente perpendicolare, la quale permette al pendolo di non distruggersi durante l'oscillazione. Infatti, la massa è mantenuta nella sua traiettoria per mezzo della tensione del filo, che si contrappone alla componente perpendicolare del peso della massa appesa più la forza centripeta derivante dal moto circolare in atto. La relazione tra i moduli di queste forze è dunque la seguente:

$$T = P_\perp + F_c = mg\cos\theta + ma_c = mg\cos\theta + m\frac{v_t^2}{l}$$

Data la variazione di θ e di v_t durante l'oscillazione, segue che la tensione dipende dal tempo. Approssimiamo l'equazione supponendo $\theta \ll 1$, possiamo utilizziare l'equazione della velocità tangenziale ottenuta precedentemente:

$$T(t) = mg\cos\theta(t) + mlA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

Per via delle approssimazioni, possiamo semplificare anche la funzione coseno dipendente da θ, rimanendo con il termine $mg\theta(t)$. Avendo la descrizione armonica $\theta(t) = A\sin(\omega t+\phi)$ otteniamo la funzione della tensione di un pendolo per piccole oscillazioni:

$$T(t) = mg\left(1 - \frac{(a\sin(\omega t + \phi))^2}{2}\right) + mlA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi) \tag{3.9}$$

4

Meccanica

4.1 Conservazione

4.1 Conservazione

Parte II

Appendici

Link utili

- Immagini