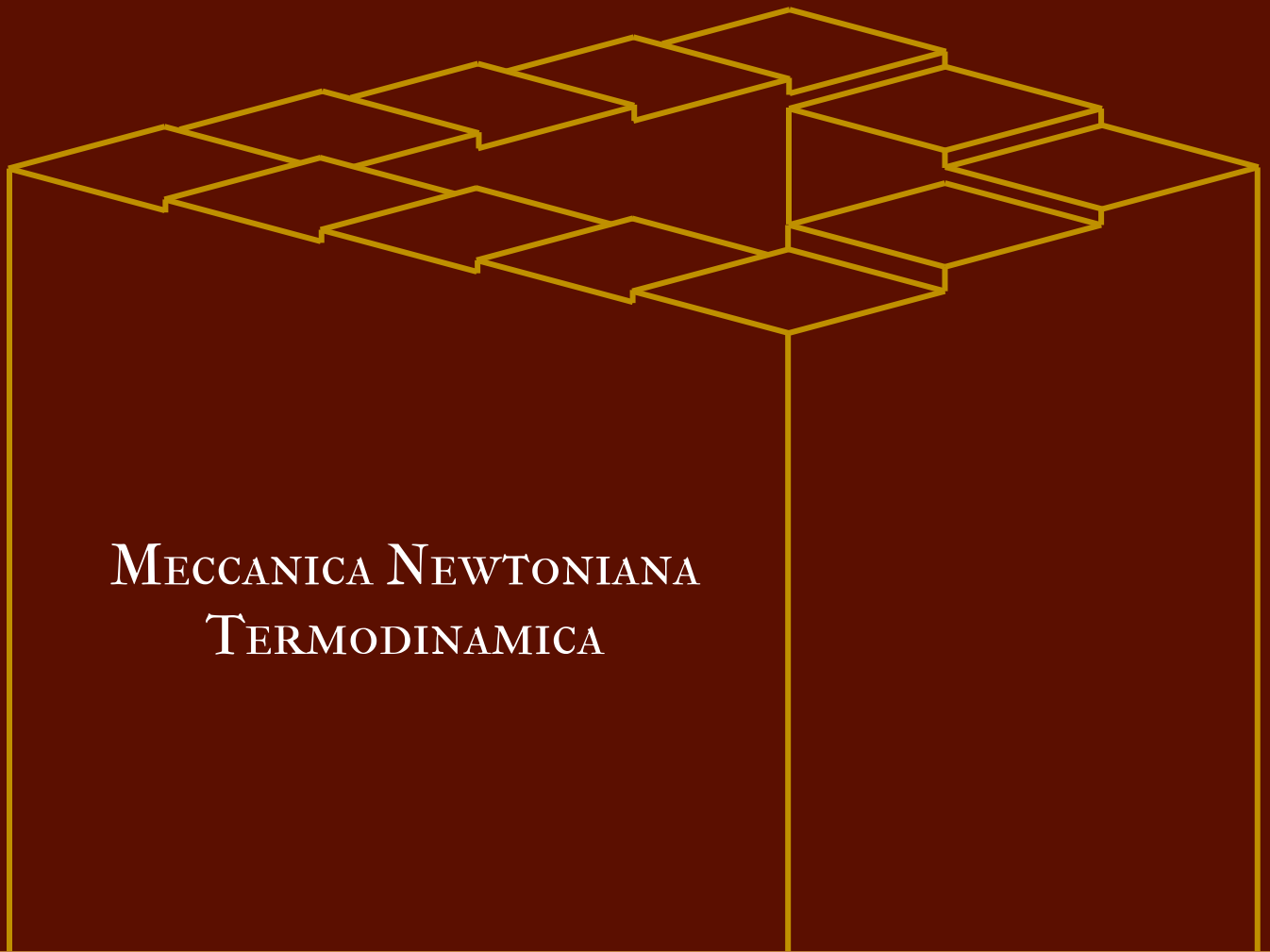


Zeno Saletti

Fisica



MECCANICA NEWTONIANA
TERMODINAMICA

If, in some cataclysm, all of scientific knowledge were to be destroyed, and only one sentence passed on to the next generations of creatures, what statement would contain the most information in the fewest words? I believe it is the *atomic hypothesis* [...] that *all things are made of atoms—little particles that move around in perpetual motion, attracting each other when they are a little distance apart, but repelling upon being squeezed into one another*. In that one sentence, you will see, there is an enormous amount of information about the world, if just a little imagination and thinking are applied.

Richard P. Feynman,
The Feynman Lectures on Physics
Vol. I

Consigliamo di consultare questa dispensa ascoltando il brano seguente:
[Cornfield Chase](#) by Hans Zimmer (from *Interstellar* by Christopher Nolan)

Avvertenze!


Questa è una raccolta di appunti redatta da studenti e condivisa per altri studenti. Non pretende di essere un libro di testo, ma una forma di aiuto libero e gratuito per coloro che fossero in cerca di materiale di supporto allo studio. Pertanto, si raccomanda di non preparare l'esame basandosi unicamente su questi appunti, ma di fare riferimento alle lezioni frontali e ai libri (in breve, a chi è esperto in merito). Qualora quindi vi fossero affermazioni fuorvianti o false contenute in queste pagine, *gli autori non si assumono la responsabilità di eventuali esiti (1) non corrispondenti alle aspettative oppure (2) negativi di esami o altre forme di prove ufficiali presso l'Università*; gli autori sono anzi aperti a eventuali segnalazioni e correzioni, in primo luogo per colmare lacune di natura concettuale nell'esposizione delle nozioni.

Errata

È statisticamente difficile eliminare ogni errore da una qualsiasi opera scritta, sia essa un breve articolo di un paio di pagine, oppure un tomo di qualche decina di milioni di caratteri. Questi appunti non sono un’eccezione. Spieghiamo di seguito *come* e *cosa* si può segnalare circa questi appunti.

Come segnalare

Puoi inviare le tue segnalazioni nei seguenti modi, dal più semplice al più complesso (può richiedere dimestichezza con strumenti “avanzati”):

- Se conosci gli autori, contattandoli o cercandoli direttamente in Università o su canali di comunicazione come Telegram o E-Mail istituzionale (`zeno.saletti@studenti.unitn.it`).
- Se conosci GitHub, aprendo una issue sulla repo ( Link).

Cosa segnalare

Vengono ora elencate, in ordine di priorità secondo gli autori, le imperfezioni che meritano una correzione:

- Errori grammaticali, lessicali, sintattici e tutti quegli errori nell’impiego del linguaggio che ostacolano la comprensione del testo.
- Nozioni che non corrispondono al vero o incomplete, di qualsiasi genere (ma attinenti alla materia trattata in queste pagine): leggi mal formulate; affermazioni, supposizioni, definizioni imprecise, false o superficiali¹; affermazioni false relative a fatti o persone reali.
- Errori di calcolo o risultati errati nelle equazioni e negli esempi del testo e negli esercizi dell’appendice.
- Irregolarità nell’utilizzo di notazioni standard, come i simboli matematici o la citazione di testi.
- Link malfunzionanti.
- Altri errori di battitura oppure grafici ed estetici.

Vengono contemplati con riguardo anche eventuali miglioramenti o integrazioni, qualora il tempo e le energie a disposizione lo permettano:

- Esercizi.
- Immagini che arricchiscono il testo e a supporto della comprensione.
- Rivisitazioni dell’ordine dei capitoli, delle sezioni, dei paragrafi, della veste grafica.
- Approfondimenti inerenti agli argomenti affrontati nel corso.

¹Sono ovviamente contemplate correzioni e integrazioni da parte di appassionati o esperti in campi specifici: la meccanica dei motori termici descritta brevemente nel capitolo di termodinamica; storia e filosofia; balistica e molto altro ancora.

Riconoscimenti

Questi appunti non sono stati realizzati del tutto dall'etere o dal nulla. Alcuni materiali di supporto sono stati impiegati per portare alla luce queste pagine.

Testi

Gran parte del testo è una trascrizione in linguaggio tipografico L^AT_EX degli appunti reperiti durante il corso di Fisica (a.a. 2023-2024) tenuto dal prof. Roberto Iuppa, presso l'Università degli Studi di Trento. Organizzazione e ordine dei capitoli ricalcano la successione delle lezioni frontali, con alcune rivisitazioni dell'ordine di esposizione degli argomenti.

Di grande ispirazione sono stati:

- R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics. Volume I: Mainly Mechanics, Radiation, and Heat*. Addison-Wesley. 1964.
- J. Walker. *Dalla Meccanica alla Fisica Moderna. Meccanica - Termodinamica*. Pearson (edizione italiana). 2012.

Immagini

Tutte le immagini che si trovano in questi appunti sono state realizzate integralmente a mano, incluso il design di copertina, utilizzando lo strumento Disegni appartenente alla suite Google. Tutte le risorse grafiche di questo testo sono incluse nella repository del progetto in formato .pdf.

Esercizi

Gli esercizi proposti sono una selezione di problemi giudicati interessanti o di importanza basilare, perché incorporano principi chiave studiati nel corso. Questi esercizi sono stati reperiti dai libri di testo citati precedentemente e da fogli relativi ad esercitazioni dell'anno accademico corrente (a loro volta raccolti dal Web), più alcuni testi d'esame antecedenti l'anno accademico nel quale questa dispensa è stata redatta per la prima volta. Questi testi d'esame sono stati pubblicati dal professore stesso sul canale Moodle del corso.

Guida al testo

Saremo onesti e concisi: Questi appunti sono lunghi e prolissi. Ma alcuni aspetti sono stati curati per soddisfare le esigenze di coloro che intendono solo dare rapide occhiate alle nozioni di questo corso.

- *Indice*: l'indice è la prima arma a portata di studenti che intendono consultare rapidamente gli appunti. Ci siamo impegnati al meglio per rendere concisi i titoli di capitoli e sezioni per raggiungere questo scopo. L'indice contiene collegamenti cliccabili che conducono direttamente alla pagina selezionata.
- *Microindici*: all'inizio di ogni capitolo viene collocato un microindice contenente la lista di macrosezioni, visibile nel margine destro. Anche questi microindici sono dotati di collegamenti (cliccabili) interni alle rispettive pagine del testo.
- *Box colorati*: definizioni, leggi e principi notevoli sono risaltati da box colorati.
- *Equazioni etichettate*: se non evidenziate dai box, le leggi e altri risultati (per lo più matematici) rilevanti sono comunque numerati tra parentesi tonde.
- *Appendici*: vengono anche curate alcune appendici che riportano risorse utili di svariato genere, quali un piccolo compendio di esercizi, le leggi fisiche rilevanti in questo corso e altro ancora. L'indice riporta anche queste appendici.

Per coloro che invece manifestano maggiore interesse per questa scienza, alcuni capitoli includono approfondimenti che possono stuzzicare conoscenze impavide (anche se non sono di certo questi appunti a contenere tutti quelli più interessanti, qui troverete solo un minimo assaggio). Anche queste sezioni potrebbero essere contrassegnate nell'indice. Gli approfondimenti non sono stati trattati durante le lezioni frontali, ma *alcuni* possono esser stati citati.

Sulla notazione

Si utilizzano spesso in questo testo notazioni matematiche compatte. Invitiamo il lettore a consultare l'appendice dei simboli per eventuali chiarimenti.

Indice

1	<i>Introduzione alla Fisica</i>	11
1.1	Definizione e scopi della fisica	11
1.2	Grandezze fisiche	11
1.3	Incertezza	12
1.4	Notazione scientifica	13
2	<i>Descrizione del moto</i>	17
2.1	Moto del punto	17
2.1.1	Sistemi di riferimento	17
2.1.2	Posizione e traiettoria	17
2.1.3	Distanza e spostamento	18
2.2	Interpretazioni geometriche	18
2.3	Moto rettilineo uniforme	18
2.4	Accelerazione	18
2.5	Moto circolare	18
2.5.1	Velocità angolare e velocità tangenziale	19
2.5.2	Moto circolare uniforme	19
2.6	Moto armonico	21
2.7	Moto nel piano	22
2.7.1	Vettori	23
3	<i>Dinamica</i>	25
3.1	Le leggi della dinamica	25
3.1.1	La prima legge	25
3.1.2	La seconda legge	25
3.1.3	La terza legge	26
3.2	Forze	26
3.2.1	Forza elastica	27
3.2.2	Peso	27
3.2.3	Attrito	27
3.3	Forze agenti sul moto	28
3.3.1	Lancio verticale e caduta libera	28
3.3.2	Accelerazione e frenata orizzontali	28
3.4	Statica	28
3.5	Dinamica dei moti armonici	28
3.5.1	Le equazioni del moto armonico	29
3.5.2	L'oscillatore a molla	31
3.5.3	Il pendolo	32
3.6	Approfondimenti	34
3.6.1	Raggio di curvatura	34
4	<i>Meccanica</i>	39
4.1	Energia	39
4.2	Lavoro di una forza	39
4.3	Teorema delle forze vive	41
4.3.1	Perché “forze vive”?	41
4.3.2	Energia cinetica e dimostrazione del teorema	41
4.4	Forze conservative	44
4.5	Energia potenziale	45

4.5.1	Energia potenziale gravitazionale	46
4.5.2	Energia potenziale elastica	46
4.6	Conservazione dell'energia meccanica	46
5	<i>Meccanica degli Urti</i>	49
5.1	Quantità di moto	49
5.2	Impulso	49
5.3	Il fenomeno dell'urto	50
5.4	Conservazione	52
5.4.1	Forze interne ed esterne	52
5.4.2	Centro di massa	53
5.4.3	La legge di conservazione della quantità di moto	54
5.5	Urti elastici	55
5.6	Urti anelastici	55
5.7	Aggessi interessanti	56
5.7.1	Pendolo balistico	57
5.7.2	Pendolo di Newton	58
5.7.3	Carrelli	58
6	<i>Relatività del Moto</i>	61
6.1	Sistemi di riferimento	61
6.2	Principio di relatività galileiana	62
6.3	Forze apparenti	63
6.3.1	L'ascensore	63
7	<i>Gravitazione</i>	65
7.1	Gravità e forze fondamentali	65
7.2	Il principio di equivalenza	65
7.3	Approfondimenti	67
7.3.1	Energia potenziale gravitazionale	67
7.3.2	Eratostene e Cavendish	68
7.3.3	Gravitazione universale	69
8	<i>Termodinamica</i>	71
8.1	Introduzione	71
8.1.1	Sistemi termodinamici	72
8.1.2	Variabili termodinamiche	72
8.1.3	Trasformazioni termodinamiche ed equilibrio	73
8.1.4	Caldo e freddo	74
8.2	Principio zero	74
8.3	Esperienza di Joule	74
8.4	Principio primo	75
8.4.1	Lavoro ed energia interna	75
8.4.2	Calore	75
8.4.3	Formulazione del primo principio	76
8.4.4	Modalità di trasmissione del calore	77
8.5	Gas ideali	78
8.5.1	Leggi dei gas ideali	78
8.5.2	Lavoro di un gas ideale	78
8.5.3	La teoria cinetica dei gas	79

8.6	Trasformazioni fondamentali	83
8.6.1	Isocore	83
8.6.2	Isobare	84
8.6.3	Isoterme	85
8.6.4	Adiabatiche	85
8.6.5	Ancora sulle trasformazioni termodinamiche	86
8.7	Macchine	87
8.7.1	Rendimento	87
8.7.2	Ciclo Diesel e ciclo di Otto	87
8.8	Principio secondo	89
8.8.1	Enunciati	89
8.8.2	Equivalenza degli enunciati	90
8.9	Esperienza di Carnot	91
8.9.1	Ciclo e macchina di Carnot	92
8.9.2	Teorema di Carnot	92
8.10	Esperienza di Clausius	92
8.10.1	Teorema di Clausius	92
8.10.2	Differenza di entropia	93
8.10.3	Il teorema dell'entropia	94
8.11	Approfondimenti	94
8.11.1	Espansione libera dei gas	94
8.11.2	Oltre la termodinamica: micro- e macro-stato	94
8.11.3	Il terzo principio	94
8.11.4	Il moto perpetuo	94
8.11.5	La questione del calorico	94
I	Appendici	101
A	Esercizi	103
A.1	Effetto centrifuga	103
A.2	Rincorsa sul cuneo	104
A.3	<i>Raindrops are falling on my head</i>	104
A.4	Valuta l'offerta	105
B	Leggi fisiche notevoli	107
B.1	Legge di Hooke	107
B.2	Legge di Stefan-Boltzmann	107
B.3	Legge di Newton gravitazione universale	107
B.4	Legge di Avogadro	107
B.5	Legge di Boyle	107
B.6	Equazione armonica	107
B.7	Oscillatore a molla	108
B.8	Pendolo	108
C	Costanti	109

D	<i>Tavola dei simboli e notazioni</i>	111
D.1	Sulla notazione vettoriale	111
D.2	Sui separatori decimali	111
D.3	Sui pedici	111
D.4	Simboli	112

1

Introduzione alla Fisica

1.1 Definizione e scopi della fisica

Si possono formulare definizioni diverse riguardo la disciplina scientifica della fisica, come la seguente:

Fisica

La fisica è lo studio quantitativo delle leggi fondamentali della natura, cioè delle leggi che governano tutti i fenomeni naturali dell'universo.

Una legge fisica (o principio) è una regolarità della natura esprimibile in forma matematica, ma anche una verità non dimostrabile che tuttavia non contraddice i fenomeni osservabili dell'esperienza.

La fisica si avvale del *metodo scientifico*, secondo cui la natura deve essere interrogata per vie sperimentali, facendosi guidare da *ipotesi* e modelli teorici. Una particolarità di questo metodo è la capacità di isolare un certo fenomeno che si intende studiare, tralasciando (si userà spesso il termine *trascurare*) certi aspetti ritenuti non rilevanti in modo da scoprire quelle regolarità dalle quali potrebbe essere dedotta una certa relazione matematica.

Il ruolo della matematica è quello di fornire un linguaggio formale per descrivere quantitativamente i fenomeni osservati e costruire modelli utili alla loro trattazione.

1.2 Grandezze fisiche

La fisica è una scienza quantitativa, ovvero essa si occupa di caratteristiche e proprietà del reale che possono essere misurate e quantificate: Le cosiddette grandezze fisiche. Esempi di grandezze fisiche sono la lunghezza, la massa, la temperatura, la durata temporale e così via.

Grandezza fisica

Una grandezza fisica è una caratteristica di un oggetto o di un fenomeno che può essere misurata in termini quantitativi (oltre che oggettivi, ovvero indipendentemente dalle sensazioni personali degli individui).

È implicito, intuitivamente, il concetto di *misura*. Misurare una grandezza fisica significa confrontarla con una grandezza “campione”, detta *unità di misura*, e stabilire quante volte l'unità è contenuta nella grandezza data. Il

- 1.1 Definizione e scopi della fisica
- 1.2 Grandezze fisiche
- 1.3 Incertezza
- 1.4 Notazione scientifica

valore numerico ottenuto è la misura della grandezza e deve essere sempre accompagnato dall'unità scelta. In altre parole, la *misura* non è altro che un *rapporto* tra la grandezza che si intende misurare e la grandezza campione scelta convenzionalmente per tale scopo.

Mostriamo un esempio: supponiamo di voler misurare la lunghezza di qualsiasi cosa in “chiavette USB” (si potrebbe argomentare circa quale chiavetta si stia impiegando e quale posizione la chiavetta debba assumere durante la misura. Supponiamo qui che la chiavetta sia posta in verticale, senza perderci in ulteriori dettagli). Decidiamo poi di misurare l'altezza di una porta—anche qui, non specifichiamo quale porta—utilizzando l'unità appena scelta. Supponiamo quindi di aver registrato il seguente dato:

$$H = 20 \text{ chiavette USB}$$

Notare come siano stati specificati:

- Un nome per l'oggetto che si intendeva misurare, H , ovvero l'altezza della porta.
- Il valore numerico individuato, 20.
- Una affermazione per legare il nome e il dato, = (“corrisponde a”, “è uguale a”)—caratteristica che peraltro si trova anche nei linguaggi di programmazione. Si presti bene attenzione che l'uguaglianza matematica non implica a priori l'equivalenza fisica. Questa sottigliezza si noterà bene nella formulazione del principio zero della termodinamica.
- L'unità di misura, chiavette USB.

Tuttavia, tale misurazione non è stata affatto sincera: non vi è la garanzia che il valore registrato sia esatto. La prossima sezione tratterà questo problema, ovvero quello dell'*incertezza*.

1.3 Incertezza

Idealmente, si vorrebbe impiegare, grazie alle misure, numeri puntuali ed esatti. In altre parole, dei numeri con una precisione indefinita, aventi un numero illimitato di cifre decimali e non.

Ma quando si effettua una misura di una grandezza, il risultato ottenuto è noto solo con una certa precisione. Riprendendo l'esempio della chiavetta USB, è impossibile misurare con certezza tutte le lunghezze, in quanto non multipli esatti della chiavetta stessa: ci sarà sempre un certo margine di “un pezzo di chiavetta”, minore dell'unità prescelta. Ma al di sotto di quella unità non è possibile fornire alcuna garanzia sulla puntualità del dato. In altre parole, la *sensibilità*¹ dello strumento è uno dei limiti alla precisione della misura.

¹La più piccola variazione della grandezza che lo strumento è in grado di rilevare.

Cifre significative del risultato di una misura

Le cifre significative del risultato di una misura sono le cifre note con certezza e la prima cifra incerta. In altre parole, esse sono le cifre che si possono controllare con lo strumento impiegato nella misura.

Ad esempio, il valore corrispondente alla lunghezza di una barca $L = 10.5$ m possiede tre cifre significative, che non equivale a 10.50 m. Il secondo dato, infatti, dichiara che la misurazione è stata possibile controllando le cifre fino al centimetro. $L = 0.002$ possiede solo una cifra significativa, perché in genere si ignorano gli zeri a sinistra della prima cifra significativa diversa da zero. Possono essere ambigui valori come $L = 2500$ m: Quali zeri sono cifre significative? Chi ha compiuto la misura può aver utilizzato un'asta lunga un centinaio di metri, dunque non è possibile stabilire il valore delle cifre meno significative delle centinaia. Come vedremo tra poco, è utile esprimere questi valori in notazione scientifica per eliminare ambiguità.

Vi potrebbero anche essere errori dovuti a imprecisioni introdotte nell'utilizzo degli strumenti di misura. Questo errore deve tuttavia essere quantificato ed ogni misura ne è affetta (comprese quelle che non la riportano).

Risultato della misura di una grandezza

Il risultato della misura di una grandezza è sempre un'approssimazione accompagnata da una certa incertezza, ovvero un **valore attendibile** e un **errore assoluto** (o semplicemente *incertezza*).

$$x = \bar{x} \pm e_r$$

Questo risultato non è quindi altro che un intervallo in cui il valore reale della misura si trova. Ci limiteremo agli errori relativi a singole misure, nelle quali x corrisponde al valore misurato e e_x la sensibilità dello strumento². Di conseguenza, possiamo ora correggere il risultato della misura effettuata in chiavette USB:

$$H = (20 \pm 1) \text{ chiavette USB}$$

1.4 Notazione scientifica

Unità di misura come il metro e il kologrammo sono comode nella vita di tutti i giorni, ma rappresentano quantità enormi su scala atomica e subatomica e quantità minuscole su scala astronomica e cosmica. Conseguenza di ciò è che alcune misure possono essere espresse da numeri “scomodi”. Considerando solo valori attendibili, la massa dell’atomo di idrogeno è circa

[illegible]

²Gli errori si propagano tuttavia anche durante i calcoli, secondo definizioni che tuttavia non verranno affrontate.

mentre la massa della Terra è

$$m_T = 5970000000000000000000000 \text{ kg}$$

È pressoché evidente il motivo di tale scomodità: La notazione è di difficile trattazione. Viene dunque in aiuto la **notazione scientifica**, ovvero una notazione numerica che permette di contrarre rappresentazioni estese impiegando potenze di 10. Nella notazione scientifica, ogni numero è scritto come prodotto di due fattori:

- Un numero decimale $x : x \in \mathbb{R}, 1 \leq x < 10$ ^[3].
- Una potenza di 10, con esponente intero.

Pertanto, le misure precedenti si possono esprimere in notazione scientifica come segue:

$$m_H = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Notare come la notazione sia in grado di eliminare ambiguità sul numero di cifre significative: ora sappiamo che la massa della Terra è stata calcolata fino a tre cifre significative e non 25.

Non sempre è necessario calcolare esattamente il valore di una certa grandezza. Talvolta basta averne solo un'idea approssimata. Supponiamo, ad esempio, che sia sufficiente sapere se una certa massa vale all'incirca 1 grammo oppure 1 ettogrammo. In questo caso, possiamo accontentarci di stimare il valore della massa con un'accuratezza di un fattore 10, cioè di calcolare il suo ordine di grandezza.

Ordine di grandezza

L'ordine di grandezza di un numero è la potenza di 10 più vicina a quel numero.

Per determinare l'ordine di grandezza di un numero occorre quindi esprimerlo in notazione scientifica—prodotto di un numero decimale compreso tra 1 e 10 e di una potenza di 10—e poi approssimare il valore alla potenza di 10 più vicina. In particolare:

- Se il numero decimale è minore di 5, si mantiene l'esponente della potenza. Ad esempio:

$$3,6 \cdot 10^2 \rightarrow \text{Ordine di grandezza } 10^2$$

$$4,2 \cdot 10^{-3} \rightarrow \text{Ordine di grandezza } 10^{-3}$$

- Se il numero decimale è maggiore di 5, si somma +1 all'esponente della potenza. Ad esempio:

$$9 \cdot 10^2 \approx 10 \cdot 10^2 \rightarrow \text{Ordine di grandezza } 10^3$$

$$8,1 \cdot 10^{-12} \approx 10 \cdot 10^{-12} \rightarrow \text{Ordine di grandezza } 10^{-11}$$

³In realtà, questa notazione corrisponde alla variante “ingegneristica”. Esiste anche una notazione che prevede che il valore espresso x sia $0 \leq x < 1$.

Sono stati definiti dei prefissi standard per certi ordini di grandezza notevoli, cioè quelli che, escludendo la potenza nulla, rappresentano multipli di tre. Utilizzando questi prefissi, di fianco all'unità di misura adottata, si contrae ancora di più la notazione scientifica, sottintendendo un certo ordine di grandezza.

Potenza	Simbolo	Prefisso
10^{12}	T	Tera
10^9	G	Giga
10^6	M	Mega
10^3	k	kilo
10^{-3}	m	milli
10^{-6}	μ	micro
10^{-9}	n	nano
10^{-12}	p	pico

2

Descrizione del moto

2.1 Moto del punto

Un corpo è in moto quando la sua posizione cambia nel tempo. Nel descrivere il moto, si introdurrà la seguente semplificazione: Gli oggetti saranno trattati come *punti materiali*, ovvero concentrati in un punto adimensionale. In particolare, *le dimensioni dell'oggetto del quale si intende studiare il moto saranno considerate trascurabili rispetto a quelle dell'ambiente circostante*.

Come comportarsi in situazioni come la descrizione del moto di un'auto, che è un corpo *esteso*? In questo corso, possiamo supporre che tutta l'auto si concentri in un punto specifico, o che venga trattato il moto di una sua parte puntiforme: Un pezzo del lunotto, lo specchietto retrovisore, la punta del paraurti anteriore o una parte molto piccola rispetto a tutto il resto. È tuttavia fondamentale che, se si parla del moto dell'auto, si intenda sempre quel punto che abbiamo scelto in partenza.

2.1.1 Sistemi di riferimento

Abbiamo detto che il moto è caratterizzato da un cambiamento di posizione. Il primo passo nella descrizione del moto di un corpo consiste quindi nello stabilire il modello da adottare per catturare il concetto di **posizione**. Sappiamo già che i modelli della fisica si basano sul linguaggio matematico; il modello più naturale che si possa adottare è dunque un sistema di assi cartesiani. Da qui, la posizione del corpo può essere specificata mediante coordinate. Una speciale coordinata è il tempo (in caso di moti in più di una dimensione spaziale, il tempo viene spesso omissso dalla rappresentazione grafica).

La scelta del sistema di riferimento di assi cartesiani è del tutto arbitraria¹, ma una volta fissata è necessario essere coerenti con essa. Questo permette di riflettere sul fatto che il moto è sempre relativo al sistema di riferimento adottato: cambiando sistema di riferimento, il moto cambia.

Fissando gli assi cartesiani, si fissa una componente di un *sistema di riferimento*. Intuitivamente, un sistema di riferimento è il “punto di vista” da cui si sceglie di effettuare misure ed osservazioni riguardo ad un certo fenomeno.

2.1.2 Posizione e traiettoria

Alla base della descrizione del moto, è importante individuare quelli che sono chiamati *posizione* e *traiettoria*. Avendo assunto la semplificazione

¹Gli assi possono addirittura non essere ortogonali, purché si segua la *regola del parallelogramma* e si rinunci alle proprietà e alle regolarità matematiche degli assi ortogonali, come il teorema di Pitagora per il calcolo del modulo dei vettori.

- 2.1 Moto del punto
- 2.2 Interpretazioni geometriche
- 2.3 Moto rettilineo uniforme
- 2.4 Accelerazione
- 2.5 Moto circolare
- 2.6 Moto armonico
- 2.7 Moto nel piano

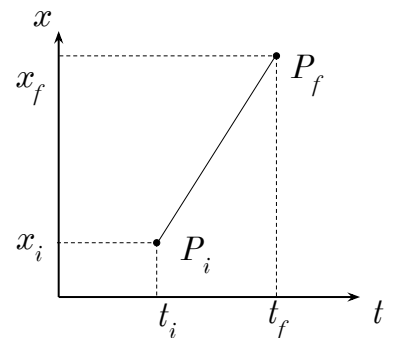


Figura 2.1: Sistema di riferimento con una sola dimensione spaziale (x) in funzione del tempo (t). All'istante t_i , il punto materiale P si trova nella posizione x_i

del punto materiale, è intuibile che la posizione verrà descritta matematicamente come una tupla di coordinate inserite in un sistema di assi cartesiani. Tra le coordinate, è importante tenere presente anche il tempo. Di fatto, abbiamo introdotto il moto definendolo come variazione della posizione nel tempo.

La traiettoria non è altro che la linea che unisce le posizioni occupate successivamente dal corpo. Tratteremo prima moti con traiettorie rettilinee, per poi passare a traiettorie curvilinee semplici, come il moto circolare.

Posizione e traiettoria

- La posizione di un corpo è il punto nel quale esso si trova entro un determinato sistema di riferimento.
- La traiettoria di un corpo è l'insieme di posizioni occupate da esso durante il suo moto.

2.1.3 Distanza e spostamento

Durante il moto, è possibile registrare la **distanza** percorsa dall'oggetto e il suo **spostamento**. Il primo è una grandezza scalare e corrisponde alla distanza totale percorsa durante il tragitto effettuato dall'oggetto in moto. Il secondo è una grandezza vettoriale e corrisponde al cambiamento di posizione, cioè la differenza tra la posizione iniziale e quella finale dell'oggetto:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_i$$



Figura 2.2: Oggetti in moto rettilineo uniforme con velocità differenti

2.2 Interpretazioni geometriche

2.3 Moto rettilineo uniforme

2.4 Accelerazione

2.5 Moto circolare

Cambiamo ora la traiettoria dell'oggetto in moto, considerando quella circolare. Per descrivere un moto circolare è conveniente impiegare coordinate differenti, dette polari. Fissando il centro di un piano cartesiano al centro di una circonferenza di raggio r , possiamo identificare la posizione di ogni punto della circonferenza con la coppia (r, θ) , dove θ è l'angolo formato dalla semiretta appartenente al sistema di riferimento e dalla semiretta che interseca la circonferenza nel punto desiderato (entrambe le semirette hanno origine nel centro del piano cartesiano, quindi della circonferenza).

Assumeremo qui che r non varia durante il moto. Per questo, viene omessa la coordinata r e si considera invece la posizione derivante da θ , detta anche *posizione angolare*. Convenzionalmente, $\theta > 0$ se misurato in senso antiorario a partire dall'asse di riferimento (come in Figura 2.3).



Figura 2.3: Sistema di riferimento per un moto circolare

Si utilizzano inoltre i *radianti* per misurare θ . I radianti tornano infatti comodi, perché permettono di semplificare le relazioni tra le grandezze in gioco durante il moto circolare. Innanzitutto, dato l'arco a in Figura 2.3, vale la relazione

$$a = r\theta$$

Di fatto, la lunghezza totale della circonferenza corrisponde a $C = 2\pi r$, dove 2π corrisponde ad un angolo giro espresso in radianti.

2.5.1 Velocità angolare e velocità tangenziale

Studiamo ora il cambiamento della posizione angolare nel tempo. Come per il moto rettilineo, possiamo considerare il rapporto tra lo spostamento angolare e l'intervallo di tempo trascorso. Da qui, si ottiene la velocità angolare:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

In ogni istante, una particella in moto circolare si muove in direzione tangenziale alla traiettoria. È chiaro che la particella, muovendosi, copre una certa distanza sulla circonferenza in un dato intervallo di tempo. Possiamo quindi affermare che essa ha una velocità, detta *tangenziale*, v , oltre che quella angolare ω . Cerchiamo una relazione tra esse: supponiamo che la particella effettui, in un intervallo infinitesimo Δt , uno spostamento angolare altrettanto piccolo $\Delta\theta$ come mostrato in Figura 2.4. Lo spostamento Δs , dato dalla corda che sottende l'angolo $\Delta\theta$, approssima l'arco $a = r\Delta\theta$. Quindi:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega$$

Abbiamo quindi ottenuto la relazione cercata:

$$v = r\omega$$

Notare come $v \propto r$, al contrario di ω . Ciò significa che, assumendo una velocità angolare costante, la velocità tangenziale è tanto maggiore quanto più r cresce.

2.5.2 Moto circolare uniforme

Un moto circolare uniforme è un moto circolare con velocità *angolare* costante. Le regolarità di questo tipo di moto permettono di studiare altre grandezze importanti per il moto circolare: periodi e accelerazioni.

Periodo e frequenza

La particolarità di questo moto è la sua periodicità, perché esso si ripete ciclicamente nel tempo. In particolare, un oggetto torna ad occupare la medesima posizione iniziale dopo un certo intervallo di tempo, chiamato **periodo** (T): in altre parole, il tempo necessario per compiere “un giro



Figura 2.4: Velocità tangenziale

(ciclo) completo”. Nel nostro caso, un giro completo corrisponde all’intera circonferenza $C = 2\pi$. Sapendo che $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, è immediato ricavare il periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Si impiega spesso anche la **frequenza**, che corrisponde al reciproco del periodo:

$$f = \frac{1}{T}$$

L’unità di misura è l’*Hertz* (Hz), ovvero “cicli al secondo” (s^{-1}), quindi il numero di cicli compiuti nell’unità di tempo.

Accelerazione centripeta

Riprendendo la prima legge della dinamica, sappiamo che un corpo permane nel suo stato di moto rettilineo uniforme a meno dell’intervento di agenti esterni. Nel caso dell’intervento di tali agenti, si osserva un’accelerazione dell’oggetto, ovvero un cambiamento del suo stato di moto e dunque della sua velocità. Non viene specificato se questo cambiamento avviene al *modulo* oppure alla *direzione* della velocità. Infatti, la velocità è una grandezza vettoriale e una variazione di anche una sola delle sue caratteristiche comporta un’accelerazione. Per questo motivo, nonostante il modulo della velocità tangenziale di un corpo in moto circolare uniforme sia costante, la direzione del suo vettore cambia.

Vi è però il problema aperto di trovare l’agente esterno (la forza) che mantiene l’oggetto (dotato di massa) nella traiettoria del suo moto circolare. Esso può essere di varia natura: la tensione di una corda attaccata ad una pallina che viene fatta roteare; la forza di gravitazione universale che mantiene in orbita (assumiamo circolare) un pianeta intorno ad un sole; la forza elettrica che mantiene un elettrone vicino al nucleo (secondo un modello classico dell’atomo).

Vista quindi l’esistenza di un’accelerazione determinata da un agente esterno, rimane da capire come è fatto il suo vettore (modulo, verso e direzione). L’esperienza ci dice che questa accelerazione: (1) cresce con l’aumentare della velocità angolare; (2) è diretta verso il centro della circonferenza. Ma come dimostrarlo formalmente per tutti i moti circolari uniformi? Consideriamo la situazione in Figura 2.5. consideriamo una variazione molto piccola nella posizione angolare dell’oggetto, che parte con una velocità iniziale \mathbf{v}_i e termina con la velocità finale \mathbf{v}_f , uguali in modulo ma diverse in direzione. Come già detto, possiamo esprimere l’accelerazione come variazione della velocità tangenziale.



Figura 2.5: Dimostrazione delle caratteristiche geometriche del vettore accelerazione centripeta

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \simeq \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

Concentriamoci sul termine $\Delta\mathbf{v}$.

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_f + (-\mathbf{v}_i)$$

Geometricamente, i vettori velocità si sommano secondo la “regola del parallelogramma” come mostrato nella Figura. Con i dovuti formalismi geometrici, sapendo che il modulo di v è sempre costante, possiamo dimostrare che l’accelerazione è effettivamente centripeta e ortogonale alla velocità tangenziale, ovvero il suo vettore punta sempre verso il centro della circonferenza. Sempre dalla Figura, possiamo osservare che al crescere di v cresce anche a ; tenendo poi presente che la variazione $\Delta \mathbf{v}$, che è un vettore, viene moltiplicata per la quantità scalare $\frac{1}{\Delta t}$, il vettore risultante dell’accelerazione cresce in modulo quanto più piccolo diventa l’intervallo Δt : ovvero la velocità dell’oggetto è maggiore. Dimosteremo più avanti che la relazione precisa tra i moduli di queste grandezze è data da

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

2.6 Moto armonico

Supponiamo di osservare un oggetto in moto circolare uniforme, ma invece di vederlo “dall’alto” lo guardiamo con la riconferenza della traiettoria posta orizzontalmente. Da questo punto di vista, vedremo l’oggetto *oscillare* a destra e sinistra all’interno di uno spazio la cui larghezza corrisponde al diametro della circonferenza. Ciò che si vede è un moto particolare, il *moto armonico semplice*.

Dalla Figura 2.6 possiamo notare che, fissato il solito sistema di riferimento xy , il moto armonico semplice non è altro che la proiezione sugli assi di un moto circolare uniforme. Per questo motivo, possiamo descrivere la posizione dell’oggetto caratterizzato da tale moto:

$$\begin{cases} x_p(t) = r \cos \theta = r \cos(\omega t) \\ y_p(t) = r \sin \theta = r \sin(\omega t) \end{cases}$$

Possiamo quindi notare che il moto circolare è la composizione di due moti armonici. Sapendo che la velocità corrisponde alla derivata della funzione che descrive la posizione:

$$\begin{cases} v_x(t) = -\omega R \sin(\omega t) \\ v_y(t) = \omega R \cos(\omega t) \end{cases}$$

Derivando nuovamente, otteniamo l’accelerazione:

$$\begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 R \cos(\omega t) \\ a_y(t) = -\omega^2 R \sin(\omega t) \end{cases}$$

Esiste anche una dimostrazione geometrica di tali relazioni, che non impiega esplicitamente i metodi del calcolo infinitesimale. È sufficiente tenere in considerazione la posizione angolare θ , avere dimestichezza con le funzioni sinusoidali e ricordare direzione e verso dei vettori velocità tangenziale e accelerazione centripeta durante un moto circolare uniforme.

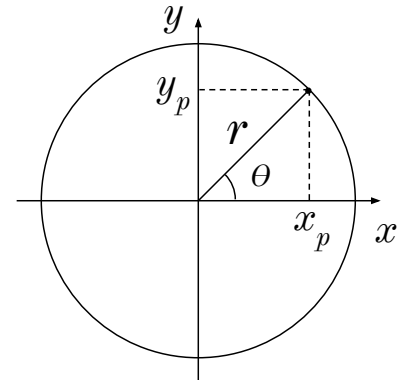


Figura 2.6: Modello di moti armonici semplici a partire da proiezioni di un moto circolare uniforme

Relazione tra accelerazione centripeta e velocità

Siamo ora in grado di mostrare l'origine della relazione $a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ tra accelerazione centripeta e velocità (angolare e tangenziale) in un moto circolare uniforme.

Osserviamo che il sistema che descrive l'accelerazione del moto armonico contiene i termini $r \cos(\omega t)$ e $r \sin(\omega t)$: le coordinate del punto in moto circolare uniforme in funzione del tempo. Dunque

$$\begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 r \cos(\omega t) \\ a_y(t) = -\omega^2 r \sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 x(t) \\ a_y(t) = -\omega^2 y(t) \end{cases}$$

Queste non sono altro che le componenti dell'accelerazione centripeta solidali al sistema di riferimento di assi xy . Sapendo che il modulo di un vettore corrisponde a $|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x_r^2 + y_r^2}$ (con x_r, y_r le componenti del vettore r rispetto ad un sistema di assi ortogonali xy), è immediato mostrare che

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{(-\omega^2 x)^2 + (-\omega^2 y)^2} = \sqrt{\omega^4 x^2 + \omega^4 y^2} = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 r$$

Dal precedente sistema, è possibile capire perché il vettore dell'accelerazione è diretto verso il centro della circonferenza: x ed y sono le componenti del *vettore posizione* dell'oggetto in movimento; tale vettore non è altro che una freccia di modulo uguale alla lunghezza del raggio e la cui punta indica il punto in cui il corpo si trova sulla circonferenza, dunque questo vettore punta verso l'esterno; ma dato che ogni componente viene moltiplicata per la quantità negativa $-\omega^2$, il vettore accelerazione centripeta non può che puntare nel verso opposto, quindi verso il centro della circonferenza. L'equazione vettoriale è dunque la seguente:

$$\mathbf{a} = -\frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{r}}$$

2.7 Moto nel piano

Parabola di un proiettile

$$\begin{cases} x = v_{0,x} t \\ y = v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Esprimiamo y in funzione di x :

$$y = \frac{v_{0,y}}{v_{0,x}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0,x}^2} x^2 = Bx - Cx^2$$

Tangente a questa parabola:

$$y' = B - 2Cx$$

2.7.1 Vettori

Vettori posizione e spostamento.

$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_f - \mathbf{s}_i$$

Vettore velocità

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} \sim d\mathbf{s} \cdot \frac{1}{dt}$$

Per definizione *sempre* tangente alla traiettoria. La traiettoria è la serie dei punti che si ottiene percorrendo per tratti infinitesimi le velocità istantanee.

Accelerazione tangente e accelerazione normale.

Esercizio

$|\mathbf{v}_i| = 50 \text{ km/h}$, $|\mathbf{v}_f| = 100 \text{ km/h}$, $m = 1800 \text{ kg}$, $R = 20 \text{ m}$, $\Delta t = 2 \text{ s}$. $|\mathbf{F}_n| = ?$ (forza normale), $|\mathbf{a}_t| = ?$. Assumiamo che l'auto acceleri con costanza tra le due velocità.

- $a_{n,i} = \frac{v_i^2}{R}$, $a_{n,f} = \frac{v_f^2}{R}$
- $F_{n,i} = ma_{n,i} \simeq 17100 \text{ N}$, $F_{n,f} = ma_{n,f} \simeq 68400 \text{ N}$
- $|\mathbf{a}_t| = \text{cost} = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} \simeq 6,95 \text{ m/s}^2$

Recap

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}(t - t_0)$$

Semplificazioni in termini di variazioni, infinità.

3

Dinamica

3.1 Le leggi della dinamica

Nella descrizione introduttiva del moto, non è stata analizzata alcuna causa del fenomeno. Cioè, non ci siamo mai preoccupati di studiare *cosa* fa muovere un oggetto, ma solo di *come* esso si muove. In questo capitolo affronteremo lo studio quantitativo di questi agenti esterni, che si uniscono sotto il termine di *forze*. La dinamica è il campo che si occupa di queste entità e fonda le proprie radici su tre principi formulati da Newton.

- 3.1 Le leggi della dinamica
- 3.2 Forze
- 3.3 Forze agenti sul moto
- 3.4 Statica
- 3.5 Dinamica dei moti armonici
- 3.6 Approfondimenti

3.1.1 La prima legge

Prima legge della dinamica (legge di inerzia)

Un corpo permane nel suo stato di *quiete* o moto rettilineo uniforme finché non intervenga un *agente esterno*.

In altre parole, se nulla “rompe le scatole” al corpo, esso permanerà nel suo stato di moto, naturalmente.

Sistema inerziale

Sistema nel quale vale la prima legge della dinamica.

3.1.2 La seconda legge

Quando l’agente esterno agisce sull’oggetto, l’effetto è un cambiamento nello stato di moto di quell’oggetto. Ovvero, cambia la sua velocità. La variazione della velocità nel tempo è chiamata **accelerazione**.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = a$$

Seconda legge della dinamica

Il cambiamento dello stato di moto è proporzionale all'intensità della forza applicata.

$$F \propto a \quad (3.1)$$

Inoltre, il cambiamento avviene lungo la retta secondo la quale la forza si applica.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (3.2)$$

Gli oggetti hanno inerzia, ovvero capacità di opporsi all'agire dell'agente esterno. Questa capacità di opporsi è rappresentato da una quantità detta *massa inerziale*. Essa è la costante di proporzionalità che lega forza applicata e accelerazione: fissata una accelerazione a , più m è grande, tanto più F cresce. Questo è l'effetto tangibile dell'inerzia.

Analisi dimensionale

$$[F] = [ma] = \left[m \cdot \frac{v}{t} \right] = \left[m \cdot \frac{l}{t^2} \right]$$

$$1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{udm} \left[M \cdot \frac{L}{T^2} \right] = \text{udm}[F] = 1 \text{ N}$$

3.1.3 La terza legge

Terza legge della dinamica (legge di azione e reazione)

La forza che un corpo A esercita su un corpo B è uguale e opposta alla forza che

$$\mathbf{F}_{A \rightarrow B} = -\mathbf{F}_{B \rightarrow A}$$

3.2 Forze

Il mondo che ci circonda è costituito da oggetti che esercitano delle azioni gli uni sugli altri. Tali azioni impresse da agenti esterni su altri agenti sono generalmente chiamate *forze*, ma possono avere natura differente a seconda del fenomeno fisico in esame. Ad esempio, le forze possono agire per contatto, come la spinta delle ruote di un'auto sull'asfalto, o a distanza, come la forza di gravità. Rimane tuttavia la caratteristica comune del loro *effetto*, ovvero la capacità di modificare il moto dei corpi in accordo con la seconda legge della dinamica.

Tra le forze più familiari che affronteremo in questo corso ci sono: la forza elastica; il peso; l'attrito.

3.2.1 Forza elastica

$$F \propto \Delta x$$

La forza che la molla esercita, essendo in opposizione alla direzione nella quale la deformazione viene effettuata, corrisponde a:

$$F_{el} = -k\Delta x$$

3.2.2 Peso

3.2.3 Attrito

Anche la più liscia delle superfici, se osservata a livello atomico, risulta scabra. Per far scorrere due superfici l'una sull'altra, occorre superare la resistenza dovuta agli urti fra i loro minuscoli avvallamenti e sporgenze. Questo modello grossolano spiega intuitivamente l'origine della forza chiamata *attrito*. Esso dipende da molti fattori, come il materiale, la finitura delle superfici, la presenza di lubrificanti, e pertanto non esiste una legge fisica semplice ed universale che lo descriva. È tuttavia possibile derivare alcune leggi empiriche in grado di calcolare le forze di attrito.

Attrito radente

L'attrito radente si manifesta durante lo scivolamento tra due superfici (esiste anche l'attrito volvente, che riguarda corpi estesi che rotolano e ruotano, ma non è di nostro interesse dato lo studio del punto materiale). La forza di attrito radente è proporzionale alla forza normale alla superficie ma è indipendente dalla superficie di contatto fra le superfici ed è espressa dalla relazione

$$\mathbf{F}_A = \mu \mathbf{F}_\perp$$

dove \mathbf{F}_\perp è la forza perpendicolare, o premente, alla superficie, mentre μ è un coefficiente di attrito che dipende dai materiali degli oggetti e altri fattori e spesso è compreso tra 0 e 1.

Le forze di attrito si suddividono a loro volta in attrito *dinamico* e *statico*.

Attrito dinamico

L'attrito dinamico si oppone allo scorrimento di un corpo su una superficie.

Attrito statico

L'attrito statico si oppone al distacco di un corpo da una superficie. Esso tende a impedire che un oggetto fermo su una superficie si distacchi da essa, cominciando a scivolare. L'attrito statico è generalmente maggiore di quello dinamico, perché, quando le superfici sono in contatto statico, i loro microscopici avvallamenti (riprendiamo il modello introdotto per spiegare l'origine dell'attrito) possono aderire maggiormente l'uno all'altro, determinando una maggiore interazione tra superfici.

...

$\mathbf{F}_A = \mu|\mathbf{N}|\hat{A}$. Grafico, zona statica forza di attrito statica, regime dinamico forza di attrito dinamica.

Statica

$$\mathbf{F}_{A,S} = -\mathbf{F}_{\text{app},T} \quad (3.3)$$

$$|\mathbf{F}_{A,S}| = |\mathbf{F}_{A,S}^{\max}| = \mu_s|\mathbf{N}| \quad (3.4)$$

Dinamica

$$\mathbf{F}_{A,D} = -\mu_d|\mathbf{N}|\hat{v} \quad (3.5)$$

3.3 Forze agenti sul moto

Ci occupiamo brevemente di alcuni problemi comuni di dinamica, nei quali forze di svariato genere modificano lo stato di moto dei corpi. Prenderemo come esempio il lancio in verticale con caduta libera e l'automobile che accelera e frena. Considereremo solo moti in una dimensione (su una linea retta), ma è possibile applicare gli stessi ragionamenti alle componenti di moti nel piano e nello spazio.

3.3.1 Lancio verticale e caduta libera

3.3.2 Accelerazione e frenata orizzontali

3.4 Statica

Dopo aver affrontato alcuni problemi di dinamica di corpi *in moto*, ci occuperemo ora di problemi di dinamica nei quali i corpi sono *immobili*.

3.5 Dinamica dei moti armonici

Tratteremo il moto armonico introducendo elementi di dinamica newtoniana, studiando in particolare i cosiddetti *oscillatori armonici*.

Oscillatore armonico

Un oscillatore armonico è un oggetto su cui agisce una forza proporzionale, in modulo, allo spostamento dalla posizione di equilibrio e diretta in verso opposto rispetto a tale spostamento.

Saranno due gli oscillatori armonici di nostro interesse: l'oscillatore a molla e il pendolo semplice. Tuttavia, esistono numerosi esempi di oscillatori armonici in natura, come uno snowboarder che compie evoluzioni in un half-pipe o un atomo che vibra intorno al suo punto di equilibrio, il bilanciario di un orologio (con le dovute approssimazioni).

3.5.1 Le equazioni del moto armonico

Riprendiamo le equazioni del moto armonico introdotto nel capitolo precedente. Il cuore pulsante di tutte le leggi orarie del moto armonico è la funzione periodica, seno o coseno. La scelta tra queste due dipende dal sistema di riferimento scelto e dalle condizioni iniziali dell'oscillatore. Nel nostro caso, scegliamo un oscillatore che parte dalla posizione di equilibrio (e che come vedremo avrà velocità massima in questo punto), quindi utilizziamo il seno per descrivere la sua posizione in funzione del tempo:

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

È necessario fare alcune precisazioni: per *posizione* non intendiamo solo quella spaziale, ma anche, per esempio, quella angolare; inoltre, l'equazione precedente non è sufficientemente generale, perché abbiamo implicitamente supposto che l'istante temporale iniziale sia $t_0 = 0$. Per questo, la legge oraria generale della posizione di un oscillatore armonico è $x(t) = A \sin(\omega(t - t_0)) = A \sin(\omega t - \omega t_0)$ (è facile verificare che effettivamente $x(t_0) = 0$, in accordo con la nostra scelta del sistema di riferimento). In genere la legge si scrive in questo modo

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (3.6)$$

Introduciamo alcune terminologie tecniche:

- **Ampiezza** A : si tratta del massimo spostamento spaziale dell'oscillatore a partire dal suo punto di equilibrio, in genere assunto come origine del sistema di riferimento adottato per la posizione. Nell'esempio del moto circolare, corrisponde al raggio della circonferenza. L'oscillatore si muove di fatto tra il massimo A e il minimo $-A$.
- **Pulsazione** ω : è un indice della "rapidità" dell'oscillatore nel compiere i suoi cicli. Approfondiremo meglio l'interpretazione della pulsazione nei prossimi paragrafi.
- **Fase** $\phi = -\omega t_0$: intuitivamente, lo "sfasamento" dell'oscillatore. Incontriamo spesso oscillatori sfasati quando essi vengono messi in moto in istanti differenti. Per comodità, ometteremo spesso la fase, sottintendendo $t_0 = 0$.

Con qualche derivata della posizione, otteniamo velocità e accelerazione dell'oscillatore in funzione del tempo:

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(A \sin(\omega t + \phi)) = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}(A\omega \cos(\omega t + \phi)) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

Ecco dunque le leggi orarie generali della velocità e dell'accelerazione di un oscillatore armonico:

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi) \quad (3.7)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) \quad (3.8)$$

Concludiamo scrivendo la legge per eccellenza di un moto armonico, ovvero la *condizione sufficiente*. Sappiamo che l'accelerazione non è altro che la derivata seconda della posizione rispetto al tempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Ma dall'Equazione 3.8 notiamo che

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2(A \sin(\omega t + \phi)) = -\omega^2 x$$

Dunque

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (3.9)$$

Abbiamo appena definito matematicamente l'oscillatore armonico: cinematicamente, in un oscillatore l'accelerazione è proporzionale allo spostamento con costante di proporzionalità negativa.

Interpretazione dell'ampiezza

Interpretazione della fase

Interpretazione della pulsazione

In tutte le equazioni dei moti armonici dominano le funzioni goniometriche. Esse sono periodiche, ovvero esiste una quantità T tale per cui $f(x + T) = f(x)$ per ogni x appartenente al dominio di f . In parole meno fredde, dopo un certo *periodo* la funzione si ripete, ciclicamente. Per seno e coseno, il periodo corrisponde a 2π (infatti, vale per esempio $\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \forall x$).

Isoliamo la componente goniometrica delle equazioni armoniche, considerando per esempio il seno e ignorando la fase ϕ (per il coseno il ragionamento è analogo, mentre per ϕ possiamo risolvere il problema mediante trasformazioni). Supponiamo di avere il periodo T , ovvero quel valore per cui la funzione ritorna uguale a se stessa:

$$\sin(\omega t) = \sin(\omega(t + T)) = \sin(\omega t + \omega T)$$

Sapendo che il periodo del seno è 2π :

$$\omega T = 2\pi \quad \therefore \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Possiamo dunque comprendere il significato della pulsazione ω : il suo valore è inversamente proporzionale al periodo T , ovvero la pulsazione cresce al diminuire di T , e viceversa. Questo vuol dire che ω fornisce un indice della "rapidità" con la quale le oscillazioni di un moto armonico avvengono. Graficamente, ω comprime verso l'asse dell'ampiezza la funzione goniometrica quando il suo valore cresce.

3.5.2 L'oscillatore a molla

Consideriamo un carrello di una rotaia a cuscino d'aria di massa m attaccato ad una molla di costante elastica k , indice della durezza della molla. Quando la molla si trova nella posizione di equilibrio, cioè né estesa né compressa, il carrello rimane fermo. Poniamo questa posizione come l'origine $x_o = 0$ di un asse delle posizioni. Se il carrello viene spostato dall'equilibrio e portato a una distanza \bar{x} da tale posizione, la molla esercita una forza elastica di *richiamo* che, per la legge di Hooke, corrisponde a

$$F = -k(x - x_o) = -kx$$

Il segno negativo indica appunto che si tratta di una forza di richiamo, dunque opposta, nel suo verso, allo spostamento dalla posizione di equilibrio. Possiamo applicare la seconda legge di Newton:

$$-kx = ma = m \frac{d}{dt}(v) = m \frac{d}{dt} \frac{d}{dt}(x) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Da cui

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

È evidente che si tratta di un oscillatore armonico, perché l'accelerazione è proporzionale allo spostamento, con costante di proporzionalità negativa. Questa costante è $-\frac{k}{m} = -\omega^2$, da cui possiamo dedurre il periodo dell'oscillatore a molla:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.10)$$

Oscillatori verticali

Anche una massa appesa ad una molla verticale può comportarsi come un oscillatore armonico. L'unica differenza è la posizione di equilibrio, nella quale il peso della massa eguaglia la forza di richiamo della molla:

$$mg = kx_0$$

Indipendentemente dal sistema di riferimento utilizzato, l'equazione del periodo non cambia. La forma delle equazioni armoniche rimane pressoché invariata, ma è necessario fare attenzione ad eventuali traslazioni spaziali derivanti dalla scelta del sistema di riferimento.

Misurare dinamicamente k di molle per ammortizzatori

Per misurare la costante elastica di una molla, è immediato tentare un approccio statico, quindi allungando la molla, registrando la lunghezza di tale allungamento e la forza di richiamo della molla in seguito alla deformazione. Esiste tuttavia un metodo ancora più interessante che sfrutta le equazioni armoniche, in particolare il periodo espresso nell'equazione 3.10.

$$k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$$

Supponiamo di voler misurare la costante elastica dell'ammortizzatore di un'auto. Con un po' di ingegno, deduciamo che se affrontiamo un dosso ad alta velocità l'auto oscillerà verticalmente per qualche istante, per poi assestarsi. Possiamo dunque stimare il tempo che l'auto impiega per compiere la primissima oscillazione, che in realtà corrisponderà pressapoco alla metà del periodo di oscillazione. Infine, conoscendo la massa dell'auto, è possibile utilizzare l'equazione precedente, ma con una massa divisa per quattro, perché essa viene distribuita sulle quattro ruote.

3.5.3 Il pendolo

Quello del pendolo semplice è un sistema fisico descrivibile mediante il modello del moto armonico. Un pendolo semplice è formato da una massa m appesa ad un filo o un'asta (idealmente inestensibili e di massa trascurabile) con una certa lunghezza l . Il punto di equilibrio stabile del pendolo si trova esattamente al di sotto del punto di sospensione. Di fatto, la posizione a riposo corrisponde a quella illustrata nel sistema della Figura 3.4, dove è stato appunto mostrato che la risultante delle forze agenti sulla massa appesa è nulla.

Supponiamo di spostare la massa dalla sua posizione di equilibrio, formando un angolo θ tra il filo e la verticale. Sappiamo che la massa può oscillare lungo un arco di circonferenza. Fissiamo un sistema di riferimento solidale alla massa, con un asse coincidente con la retta passante per il filo e l'altro ad esso perpendicolare, dunque tangente all'arco. Scomponiamo dunque il peso della massa lungo questi assi (perpendicolare e tangenziale) e applichiamo la seconda legge della dinamica:

$$ma_t = P_t = -mg \sin \theta$$

$$ma_n = -P_n + T + F_c = 0$$

Notare che nella seconda equazione è presente anche la forza centripeta F_c derivante dal moto circolare, oltre la tensione. Concentriamoci sull'accelerazione tangenziale nella prima equazione. Ricordando che gli angoli sono in relazione con la lunghezza degli archi a secondo l'equazione $a = l\theta$:

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega l) = l \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Dunque, riprendendo la primissima equazione riguardo la componente tangenziale del peso, semplificando la massa:

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin \theta = 0$$

Per rendere più semplice la trattazione del sistema fisico, supporremo per ipotesi che $\theta \ll 1$ (in radianti), dunque ciò che calcoleremo in seguito varrà solamente per piccole oscillazioni del pendolo. Ricordando le proprietà delle serie di Taylor, possiamo approssimare il seno nella precedente equazione, dividere per la lunghezza l del pendolo ottenendo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Prima	$\varepsilon \rightarrow 0$	Dopo
$\sin \varepsilon$		ε
$\tan \varepsilon$		ε
$\cos \varepsilon$		$1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$
e^ε		$1 + \varepsilon$
$(1 + \varepsilon)^\alpha$		$1 + \alpha\varepsilon$

Diventa dunque evidente il motivo della semplificazione: abbiamo ottenuto una relazione nella quale l'accelerazione (angolare) dipende proporzionalmente dallo spostamento (angolare) con costante di proporzionalità negativa. In altre parole, si tratta della descrizione di un moto armonico semplice nella forma $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, dalla quale si deduce che $\omega^2 = \frac{g}{l}$. Ma sapendo che $\omega^2 = (\frac{2\pi}{T})^2$ abbiamo modo di determinare il periodo di oscillazione del pendolo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3.11)$$

Isocronismo del pendolo

Come già aveva concluso Galileo nel 1583, il periodo di oscillazione del pendolo, ristretta ad angoli ridotti a partire dalla posizione di equilibrio, non dipende dall'ampiezza, come altri moti armonici. Questo fatto è dimostrato dall'equazione precedentemente ottenuta (Equazione 3.11). Ciò che rende un pendolo diverso dall'altro è la lunghezza del filo e “il pianeta su cui si trova”, intendendo l'accelerazione gravitazionale g . Mantenendo invariati questi parametri, possiamo fissare una qualsiasi massa m e caricare il pendolo a nostro piacere (sempre entro i limiti di angoli ridotti), ma T non cambierà.

Il fatto che l'oscillazione non dipenda dalla massa fissata trova una motivazione analoga a quella di una massa in caduta libera, dove l'accelerazione è sempre la stessa. Masse ridotte si muovono più facilmente per la loro piccola inerzia, ma tuttavia su di esse agisce una forza altrettanto ridotta; d'altra parte, masse maggiori sono sottoposte a forze gravitazionali maggiori, ma sono anche più difficili da spostare. Per giustificare intuitivamente l'indipendenza dall'ampiezza, è sufficiente pensare che una maggiore “carica” è compensata da un tragitto maggiore (l'arco di circonferenza descritto durante l'oscillazione). Possiamo dunque concludere che queste compensazioni sono il motivo delle indipendenze osservabili nell'equazione 3.11.

Analisi approfondita del moto di un pendolo

Alla luce delle equazioni sul moto armonico semplice, poniamo

$$\theta = A \sin(\omega t + \phi)$$

e definiamo la velocità *angolare* di una massa di un pendolo semplice:

$$\nu = \frac{d\theta}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

Ricordiamo che l'ampiezza A corrisponde all'angolo massimo spazzato durante l'oscillazione, quindi si tratta di una grandezza adimensionale, seppur col significato di radianti. Per quanto riguarda l'accelerazione angolare:

$$\alpha = \frac{d\nu}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

Descriviamo a , l'arco di circonferenza descritto durante il moto, sapendo che la lunghezza del filo è l :

$$a = l\theta = lA \sin(\omega t + \phi)$$

Per quanto riguarda velocità tangenziale e accelerazione tangenziale:

$$v_t = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(l\theta) = l \frac{d\theta}{dt} = l\omega = lA\omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -lA\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

Tensione del filo di un pendolo semplice in funzione del tempo

All'inizio di questa sottosezione, abbiamo analizzato le forze in gioco distinguendo le componenti tangenziali e perpendicolari alla circonferenza descritta dal pendolo. È ora di analizzare la componente perpendicolare, la quale permette al pendolo di non distruggersi durante l'oscillazione. Infatti, la massa è mantenuta nella sua traiettoria per mezzo della tensione del filo, che si contrappone alla componente perpendicolare del peso della massa appesa più la forza centripeta derivante dal moto circolare in atto. La relazione tra i moduli di queste forze è dunque la seguente:

$$T = P_{\perp} + F_c = mg \cos \theta + ma_c = mg \cos \theta + m \frac{v_t^2}{l}$$

Data la variazione di θ e di v_t durante l'oscillazione, segue che la tensione dipende dal tempo. Approssimiamo l'equazione supponendo $\theta \ll 1$, possiamo utilizzare l'equazione della velocità tangenziale ottenuta precedentemente:

$$T(t) = mg \cos \theta(t) + mlA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Per via delle approssimazioni, possiamo semplificare anche la funzione coseno dipendente da θ , rimanendo con il termine $mg(1 - \frac{\theta^2}{2})$. Avendo la descrizione armonica $\theta(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ otteniamo la funzione della tensione di un pendolo per piccole oscillazioni:

$$T(t) = mg \left(1 - \frac{(A \sin(\omega t + \phi))^2}{2} \right) + mlA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad (3.12)$$

3.6 Approfondimenti

3.6.1 Raggio di curvatura

L'accelerazione centripeta non esiste solamente nei moti circolari uniformi, ma, come possiamo ricordare da esperienze quotidiane, qualsiasi variazione nella traiettoria di un corpo in moto, attraverso una "sterzata", permette di percepire una componente centripeta. Possiamo dunque estendere la descrizione del moto circolare uniforme a casi meno eccezionali, come quelli dei moti dalle traiettorie curvilinee. È interessante come l'equazione

dell'accelerazione centripeta permetta di ottenere informazioni interessantissime su moti come questi, come il *raggio di curvatura*. Si osservi l'esempio in Figura 3.1.

Tratti di traiettorie come queste possono essere approssimate da archi di circonferenze con raggi di lunghezze differenti. Durante ognuno di questi brevi tratti, percorsi sugli archi, l'oggetto in moto è sottoposto ad una certa accelerazione centripeta. Assunto che tale oggetto abbia una massa, è possibile misurare l'accelerazione rilevando la forza esercitata sull'oggetto durante il tratto di curva. Dall'equazione dell'accelerazione centripeta, vale

$$\frac{F}{m} = \frac{v^2}{r}$$

Date le nostre supposizioni sulle grandezze conosciute (forza, massa e velocità), l'unico dato che rimane è il raggio, che in questo caso prende il nome di *raggio di curvatura*:

$$r = \frac{v^2 m}{F}$$

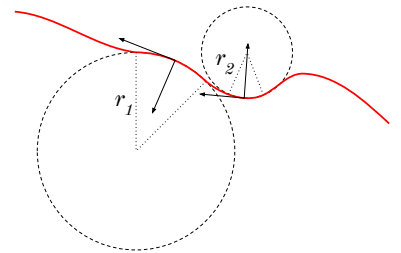


Figura 3.1: Una traiettoria curvilinea approssimata da archi di circonferenze con raggi differenti

Forza agente sul moto

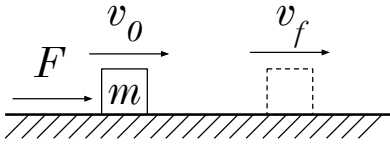


Figura 3.2: Forza agente su una massa in moto

Un blocco di massa $m = 10$ kg viaggia ad una velocità $v_i = 2$ m/s. Una forza $F = 20$ N agisce sul blocco per $T = 5$ s. Quale velocità raggiungerà il blocco dopo T ? Dopo T , la forza cessa di agire e il blocco viaggia a v_f trovata precedentemente. Includendo lo spazio percorso durante T (e dunque il tempo T), quanto tempo impiega il blocco a coprire $s_w = 2$ km di distanza?

Per rispondere al primo quesito, possiamo assumere un moto rettilineo uniformemente accelerato durante l'intervallo T . Sappiamo che

$$a = \frac{F}{m} = \frac{dv}{dt}$$

Da cui possiamo esprimere la velocità in funzione del tempo (la velocità iniziale la conosciamo già, ma assumiamo un tempo iniziale $t_0 = 0$):

$$\frac{F}{m} dt = dv \rightarrow \int_{t_0}^t \frac{F}{m} dp = \int_{v_0}^v dw \rightarrow \frac{F}{m} \int_0^t dp = v - v_0 \rightarrow \frac{F}{m} t = v - v_0$$

Dunque

$$v(t) = v_0 + \frac{F}{m} t$$

Non ci manca che calcolare la velocità in corrispondenza di un $t_f = t_0 + \Delta t = 0 + T = T$:

$$v(t_f) = v(T) = v_0 + \frac{F}{m} T$$

Nel secondo quesito, possiamo spezzare il problema in due parti: durante l'azione della forza, la distanza percorsa (s_a) deve essere calcolata tenendo conto del moto uniformemente accelerato, mentre nell'intervallo di tempo successivo (T_v) il moto è semplicemente uniforme. Dalla seguente equazione, possiamo ricavare T_v (T lo conosciamo già).

$$s_w = s_a + s_v = s_a + v_f T_v = \int_0^T (v_0 + at) dp + v_f T_v = v_0 T + \frac{1}{2} a T^2 + v_f T_v$$

Il tempo per percorrere 2 km è dunque:

$$T_{2 \text{ km}} = T + \frac{s_w - v_i T - \frac{F}{2m} T^2}{v_f} = T + \frac{s_w - v_i T - \frac{F}{2m} T^2}{v_i + \frac{F}{m} T}$$

Lancio verso l'alto

Si consideri la situazione mostrata in Figura 3.3. Durante la salita, l'oggetto rallenta a causa dell'accelerazione di gravità g . Determiniamo la quota che l'oggetto raggiungerà.

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a dt \rightarrow \int_{v_0}^v dw = \int_{t_0}^t a dp \rightarrow v - v_0 = a \int_{t_0}^t dp \rightarrow v - v_0 = a(t - t_0)$$

Dunque

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) = v_0 + at$$

Rallentando, si arriverà ad un istante t_f nel quale l'oggetto avrà velocità nulla:

$$v(t_f) = 0 \rightarrow v_0 + at_f = 0$$

Non disponiamo tuttavia del tempo, ma possiamo avvalerci della legge oraria che descrive la distanza percorsa:

$$v(t) = \frac{dh}{dt} \rightarrow \int_{h_0}^h dk = \int_{t_0}^t v(t) dp \rightarrow h - h_0 = \int_{t_0}^t (v_0 + ap) dp$$

$$h - h_0 = v_0 \int_{t_0}^t dp + a \int_{t_0}^t p dp \rightarrow h - h_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Da cui:

$$h(t) = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Abbiamo quindi ottenuto la quota in funzione del tempo, che possiamo ricavare dall'equazione $v_0 + at_f = 0 \rightarrow t_f = -\frac{v_0}{a}$.

$$h(t_f) = v_0 t_f + \frac{1}{2} at_f^2 = -\frac{v_0^2}{a} + \frac{1}{2} a \frac{v_0^2}{a^2} = -\frac{v_0^2}{a} + \frac{v_0^2}{2a} = -\frac{v_0^2}{2a}$$

Sapendo che $a = -|g|$, la quota massima h_m raggiunta è:

$$h_m = \frac{v_0^2}{2|g|}$$

Spostamento

$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_f - \mathbf{s}_i$$

Statica

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = m \mathbf{a}$$

La somma nel membro di sinistra è detta *risultante* (\mathbf{R}). In quiete, non c'è accelerazione:

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

Se la velocità è costante, possiamo parlare di problemi di quiete? Yes.

Esercizio

$$\mathbf{P} + \mathbf{T} = \mathbf{0} \Rightarrow -mg + T = 0 \Rightarrow T = mg.$$

Esercizio

Come quello precedente ma con due corde che tengono m , inclinate di tot gradi fissate al soffitto. Trovare la tensione su ciascun filo.

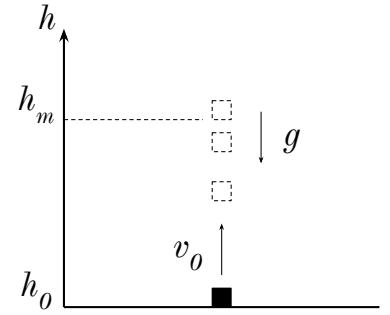


Figura 3.3: Lancio di un oggetto verso l'alto

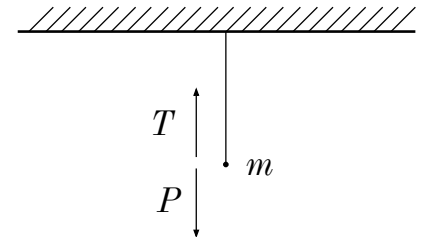


Figura 3.4: Massa appesa ad un filo

4.1 Energia

Con la cinematica abbiamo trattato unicamente il moto “come appare”, slegato dalle sue cause. Con la dinamica abbiamo invece introdotto quelle cause, ovvero le forze. In questo capitolo effettueremo un passo in più: Unendo i concetti definiti fino ad ora, scopriremo una quantità spesso interpretata come il costo con il quale si pagano cambiamenti e trasformazioni nell’universo: L’energia. Spiegare cosa sia l’energia valica il confine della filosofia; la fisica contemporanea si limita a postulare l’esistenza di questa quantità, misurabile indirettamente da altre quantità, che possiede la peculiare caratteristica di *conservarsi in sistemi isolati*. In altre parole, se un sistema non comunica in nessun modo con l’esterno, la quantità di energia di quel sistema non cambia mai. Essa può al più *trasformarsi* e per questo motivo non è un qualcosa di tangibile e direttamente osservabile; possiamo solo vederne le varie forme e manifestazioni. Questo perché l’energia viene sempre *definita* attraverso altre proprietà invece ben riconoscibili: Distanze, masse, lo scorrere del tempo. Moltiplicando, dividendo ed effettuando altre operazioni (che definiremo) di queste quantità su un sistema, scopriremo che il risultato che si ottiene è sempre lo stesso.

Quella della conservazione è una caratteristica che contraddistingue altre quantità fisiche, tra le quali vedremo, nel prossimo capitolo, solo la quantità di moto

4.2 Lavoro di una forza

Precedentemente abbiamo introdotto l’energia come un costo, che può essere convertito e speso per effettuare certi cambiamenti in natura. Il lavoro di una forza è la forma di energia più familiare, perché esprime il contributo di una forza allo spostamento di un oggetto, qualcosa che associamo al moto e dunque ad un’espressione di “vitalità”: Auto in movimento mediante il motore, una persona che cammina per mezzo della muscolatura, un oggetto in caduta libera a causa del suo peso.

Il lavoro di una forza \mathbf{F} costante corrisponde al prodotto scalare¹ tra la forza e lo spostamento $\mathbf{s} = \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$, dove \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_f sono vettori che descrivono rispettivamente le posizioni iniziale e finale del punto materiale in moto:

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} \quad (4.1)$$

¹Ricordiamo che il prodotto scalare p tra due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} è un valore scalare definito da $p = ab \cos \theta_{ab}$, con θ_{ab} l’angolo tra i vettori.

- 4.1 Energia
- 4.2 Lavoro di una forza
- 4.3 Teorema delle forze vive
- 4.4 Forze conservative
- 4.5 Energia potenziale
- 4.6 Conservazione dell’energia meccanica

Il lavoro si misura in Joule (J), dove

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

La definizione 4.1 presuppone che la forza \mathbf{F} rimanga sempre costante durante lo spostamento \mathbf{r} . Questo non è sempre vero nella realtà. Per questo possiamo definire il lavoro infinitesimo nel seguente modo

$$dW \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.2)$$

dove supponiamo che per il tratto infinitesimo $d\mathbf{r}$ agisca una certa forza costante \mathbf{F} . Se poi definiamo \mathbf{F} in funzione dello spostamento, $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, allora possiamo integrare su tale funzione per ottenere il lavoro totale tra due coordinate A, B .

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.3)$$

Se si sviscera il prodotto scalare della definizione 4.2, otteniamo

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F ds \cos \theta$$

dove θ è l'angolo compreso tra i vettori \mathbf{F} e \mathbf{s} . Notiamo che, per via del prodotto scalare, dW è uno scalare, non un vettore, e può essere positivo, negativo o nullo. A seconda del caso, il lavoro viene in genere nominato come segue:

- *Lavoro motore*: $dW > 0$
- *Lavoro resistente*: $dW < 0$ (la forza si oppone allo spostamento)
- *Lavoro nullo*: $dW = 0$ (forza nulla o spostamento nullo o la forza è ortogonale allo spostamento): un esempio è la forza centripeta.

Esempio cammino sentiero

$$W_{A \rightarrow B} = \sum_{i=A}^{N=B} dW_i \rightarrow \int_A^B dW \text{ per } N \rightarrow \infty$$

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Notiamo che

$$\mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{P}|(|d\mathbf{r}| \cos \theta)$$

Dove abbiamo la proiezione dello spostamento sul peso \mathbf{P} . Questo significa che per calcolo del lavoro importa solo la variazione della quota, dh .

$$W_{0 \rightarrow 2000 \text{ m}} = \sum_0^{2000} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2000} mg dh = mgh_{\text{bondone}}$$

4.3 Teorema delle forze vive

Osserviamo ora come il lavoro può condurre a risultati teorici molto importanti. Per i più frettolosi, consigliamo di saltare direttamente al sottoparagrafo 4.3.2.

4.3.1 Perché “forze vive”?

Il lavoro di una forza è ben visibile quando esso agisce su un corpo in movimento. Prendiamo l'esempio di un razzo che viene lanciato verso il cielo: La propulsione data dal propellente spinge il razzo verso l'alto e in termini semplicioti lo “aiuta” a guadagnare velocità durante la salita, perché la forza è concorde con lo spostamento (entrambi i vettori puntano verso l'alto perpendicolarmente al terreno) e compie lavoro motore. Quando il razzo raggiunge la sua altezza massima, in genere comincia a cadere, ma supponiamo che ad un certo punto esso liberi un paracadute. La resistenza data dal paracadute determina una forza che si oppone alla caduta del razzo; dunque, in questo secondo caso, la resistenza dell'aria che gonfia il paracadute compie un lavoro resistente, che si oppone al moto di caduta e per questo frena il razzo e ne riduce la velocità.

Agli albori della meccanica ci si sarebbe riferiti all'effetto di queste forze in gioco come *vis viva*, o forza viva, una quantità o un'essenza dotata di vita propria, che trasferendosi da corpo a corpo determinava cambiamenti nello stato di moto di quegli stessi corpi. Per tale ragione storica, il teorema porta ancora in sé il termine di forza viva, anche se la fisica contemporanea propende sempre più verso la denominazione di *teorema dell'energia cinetica*. Definiremo l'energia cinetica, altra forma dell'energia, nel prossimo paragrafo.

4.3.2 Energia cinetica e dimostrazione del teorema

L'ipotesi fondamentale per giungere all'enunciato del teorema è la seconda legge della dinamica, oltre alla definizione di lavoro. Supponiamo che \mathbf{F} sia una forza totale esercitata su di un corpo di massa m . L'azione di \mathbf{F} produce uno spostamento, che considereremo infinitesimo in modo da generalizzare il ragionamento a forze variabili e dipendenti dallo spostamento stesso. Allora

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Senza giustificare le ragioni matematiche dei prossimi passaggi, ma facendoci guidare dall'intuizione fisica, eseguiamo il prodotto scalare con $d\mathbf{s}$ su entrambi i membri

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} = m d\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

Notiamo che questa operazione ha permesso di ottenere un lavoro al membro di sinistra, mentre a destra si ottiene il termine $d\mathbf{s}/dt$, che corrisponderebbe proprio alla velocità \mathbf{v} . Con ulteriori sviluppi, si raggiunge la seguente equazione (il simbolo d ha il significato fisico di variazione o differenza

infinitesima).

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = m d\left[\frac{v^2}{2}\right]$$

Dimostriamo come sviluppare il termine $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d\left[\frac{v^2}{2}\right]$. Ricorriamo alla definizione vettoriale di prodotto scalare² e utilizziamo questo abuso di notazione, ma ragionevole dal punto di vista fisico:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2}{2} + c \right] = x \Rightarrow \int x dx = \int d\left[\frac{x^2}{2}\right]$$

Quindi

$$v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z \Rightarrow d\left[\frac{v_x^2}{2}\right] + \dots = d\left[\frac{v_x^2 + \dots}{2}\right] = d\left[\frac{v^2}{2}\right]$$

Riprendendo l'equazione $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m d\left[\frac{v^2}{2}\right]$ otteniamo

$$dW = d\left[\frac{1}{2}mv^2\right]$$

Il termine $E_K = \frac{1}{2}mv^2$ viene chiamato *energia cinetica*. Quindi

$$dW = dE_K$$

Questa equazione può essere tradotta come “una infinitesima quantità di lavoro corrisponde ad una variazione infinitesima dell'energia cinetica”. Ora possiamo enunciare il teorema delle forze vive:

Teorema dell'energia cinetica (o delle forze vive)

Quando una forza (risultante) applicata a un oggetto per un dato tratto di traiettoria, compie su di esso un lavoro, il risultato è una variazione del modulo della velocità dell'oggetto e quindi una variazione della sua energia cinetica. Quindi, il lavoro compiuto su un oggetto è uguale alla variazione della sua energia cinetica.

$$W_{i \rightarrow f}^{(R)} = \Delta E_K \quad (4.4)$$

È necessario sottolineare alcune osservazioni:

1. Il teorema presuppone che il lavoro sia dovuto all'effetto della risultante delle forze agenti sul corpo.
2. Il lavoro è rappresentato da una variazione di energia cinetica. Possiamo descrivere dunque lo stato finale come

$$E_{K,f} = E_{K,i} + W_{i \rightarrow f}$$

dunque se il lavoro, quindi l'energia trasferita all'oggetto, è positivo, l'energia cinetica aumenta e viceversa.

²Il prodotto scalare di due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} è calcolabile anche attraverso la somma dei prodotti tra i valori delle componenti dei due vettori: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + \dots$

3. Il teorema sposta la descrizione del sistema fisico dal piano vettoriale a quello scalare. Ovvero, partendo da grandezze vettoriali, abbiamo ottenuto una legge dove compaiono solamente dei numeri. Ciò rende particolarmente agevole l'utilizzo del teorema in svariati problemi nei quali l'analisi vettoriale può essere ostica.
4. Il teorema è molto potente per la sua validità generale, perché non sono state fatte ipotesi sulla natura delle forze, se non presupponendo come vera la seconda legge della dinamica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. La legge può essere dunque applicata ad un pendolo, ad una palla da bowling, a delle molecole microscopiche in movimento.

Teorema delle forze vive (fatto ben)

Come adesso scopriremo, la definizione del lavoro introduce una quantità fisica estremamente utile nella trattazione di fenomeni di natura meccanica. Un risultato molto importante in merito è il *teorema dell'energia cinetica* (o, come un tempo, *delle forze vive*, da *vis viva*).

Riprendiamo il secondo principio della dinamica

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s}$$

dove al membro di sinistra abbiamo ottenuto il lavoro infinitesimale corrispondente, dW . Osserviamo tuttavia che al membro di destra vale

$$md\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = md\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

per definizione di velocità (istantanea). Osserviamo dunque ciò che accade passando all'integrazione:

$$\int_i^f m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = m \left[\frac{v^2}{2} \right]_i^f$$

Per questo ultimo passaggio, abbiamo fatto ricorso alla definizione di prodotto scalare e alle proprietà degli integrali:

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \int v_x dv_x + v_y dv_y + \dots = \frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + \dots = \frac{v^2}{2}$$

Abbiamo dunque mostrato che

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

ovvero il lavoro totale (derivante cioè dalla risultante \mathbf{F} su m , come avevamo supposto), dipende solo da certe quantità che definiscono l'oggetto prima e dopo lo spostamento nel quale ha agito la forza. La quantità $\frac{1}{2}mv^2$ corrisponde dimensionalmente ad una certa energia e viene definita *energia cinetica*

$$E_K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2$$

e rappresenta l'energia che un corpo possiede in virtù del suo stato di moto, dunque della sua velocità ad un certo istante.

4.4 Forze conservative

In fisica, possiamo classificare le forze in *conservative* e *non conservative*. La distinzione tra di esse sta nel fatto che quando agisce una forza conservativa, il lavoro compiuto viene immagazzinato in una forma di energia, *l'energia potenziale*, che è possibile risprigionare. Il lavoro compiuto da una forza non conservativa, invece, non può essere recuperato in seguito come energia cinetica, ma viene trasformato in altre forme di energia. Le differenze tra forze conservative e non conservative emergono se prendiamo in esame il moto di un oggetto lungo una traiettoria chiusa.

Forza conservativa (condizione I)

Una forza conservativa è una forza che compie un lavoro totale nullo lungo ogni percorso chiuso. Se il percorso è $\gamma = A \rightarrow A$ (il percorso si chiude su se stesso) e \mathbf{F} è una forza conservativa, allora:

$$W_{A \rightarrow A} = \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \forall \gamma \quad (4.5)$$

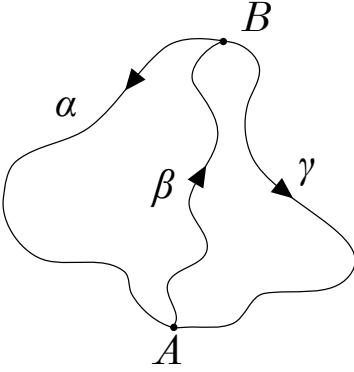


Figura 4.1: Percorsi tra due punti in presenza di una forza conservativa

Da questa prima caratteristica delle forze conservative ne segue una seconda. Si considerino i percorsi tra A e B in Figura 4.1. Supponiamo di dover raggiungere il punto A partendo da B e possiamo fare ciò percorrendo due strade differenti, α e γ . Disegniamo poi un terzo percorso, che invece riporta A in B . Per ipotesi vale la condizione I, ovvero sta agendo una forza conservativa lungo tali percorsi. Dunque, il lavoro compiuto dalla forza nei percorsi chiusi $\alpha\beta$ e $\beta\gamma$ è nullo:

$$W_{\alpha\beta} = W_{\alpha} + W_{\beta} = 0$$

$$W_{\beta\gamma} = W_{\beta} + W_{\gamma} = 0$$

Ma allora

$$W_{\beta} = -W_{\alpha} = -W_{\gamma} \quad \therefore \quad W_{\alpha} = W_{\gamma}$$

Abbiamo mostrato che il lavoro compiuto dalla forza conservativa dal punto B al punto A è uguale per entrambi i percorsi. In altre parole, il lavoro totale dipende solo dai punti A e B .

Possiamo dimostrare questa proprietà in un altro modo. Consideriamo il percorso chiuso $\beta\gamma$. Vale per ipotesi

$$W_{\alpha\beta} = W_{\beta} + W_{\gamma} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Quindi

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Forza conservativa (condizione II)

Una forza è conservativa se il lavoro totale compiuto da essa durante uno spostamento da A a B dipende unicamente da questi punti di partenza e di arrivo, non dal percorso seguito tra essi.

$$W[\mathbf{F}]_{A \rightarrow B} \text{ indipendente dai percorsi tra } A \text{ e } B$$

4.5 Energia potenziale

Una forza conservativa può essere caratterizzata da una terza condizione che deriva dalla seconda.

Forza conservativa (condizione III)

Una forza è conservativa se il lavoro effettuato da essa è esprimibile in funzione delle sole “coordinate” A e B tramite una primitiva nella forma seguente:

$$W_{A \rightarrow B} = - [\mathcal{U}(\mathbf{x}_B) - \mathcal{U}(\mathbf{x}_A)] = -\Delta\mathcal{U}$$

Questa condizione esprime la proprietà delle forze conservative di consentire agli oggetti ad essa sottoposti di immagazzinare una certa quantità di energia da essa trasferita se l'oggetto passa da A a B e di liberare quella stessa energia nel tragitto inverso. Immaginiamo di lanciare una palla nel vuoto. La forza peso, derivante dalla gravità, è conservativa. Mentre la palla cade, il peso effettua un lavoro su di essa e di fatto la sua energia cinetica aumenta. Quella energia deve pur provenire da qualche parte. Se osserviamo questo esperimento “invertendo il tempo” (o equivalentemente lanciamo in alto la palla), osserviamo che la forza peso esegue un lavoro negativo sulla palla, quindi la sua energia cinetica diminuisce mano a mano. Ma il peso è una forza conservativa, dunque l'energia da essa sottratta viene comunque conservata in qualche forma. Questa è l'energia potenziale, che dipende appunto dalla differenza di quota della palla.

Mostriamo come ricavare la condizione III. Sappiamo che il lavoro di una forza conservativa è definito da un integrale, che non dipende dal percorso effettuato tra l'inizio A e la fine B . Dunque il lavoro deve in qualche modo poter essere descritto da una funzione nelle variabili A e B .

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(A, B)$$

Questa funzione sarà una qualche primitiva della funzione integranda, che sarà quindi composta da dei contributi lineari di A e B dentro qualche funzione \mathcal{U} (a meno di costanti moltiplicative esterne alla funzione). Abbiamo quindi le seguenti scelte:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(A) + \mathcal{U}(B) \\ \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B)\end{aligned}$$

Ma sapendo che la funzione $f(A, B)$ è una qualche primitiva, ciò significa che deve valere la proprietà di antisimmetria (invertendo gli estremi di integrazione, deve cambiare il segno). Questa proprietà vale solo per la seconda funzione:

$$f(B, A) = \mathcal{U}(B) - \mathcal{U}(A) = -(\mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B))$$

Definiamo dunque la *differenza di energia potenziale* per forze conservative.

$$\Delta\mathcal{U}_{A \rightarrow B} = \mathcal{U}(B) - \mathcal{U}(A) = -W_{A \rightarrow B}$$

Notare che stiamo definendo solo la differenza di energia potenziale, non l'energia potenziale in sé. Possiamo infatti fissare lo “zero” dell'energia potenziale in modo del tutto arbitrario, in quanto esso non sarà mai utile nel risultato finale di un problema di meccanica.

4.5.1 Energia potenziale gravitazionale

4.5.2 Energia potenziale elastica

4.6 Conservazione dell'energia meccanica

Ricordiamo il teorema delle forze vive (Equazione 4.4)

$$W = E_{K,f} - E_{K,i}$$

dove W corrisponde al lavoro *totale* delle forze che agiscono sul corpo tra i momenti i e f . Abbiamo inoltre mostrato che il lavoro dovuto alle forze conservative (\mathfrak{C}) è legato ad una differenza di energia potenziale:

$$W_{\mathfrak{C}} = -(\mathcal{U}_f - \mathcal{U}_i)$$

Per il principio di sovrapposizione, possiamo esprimere il lavoro totale nel seguente modo, separando l'insieme forze conservative \mathfrak{C} e non conservative \mathfrak{N} :

$$W = W_{\mathfrak{C}} + W_{\mathfrak{N}}$$

Unendo le equazioni finora ottenute,

$$W_{\mathfrak{N}} = \Delta E_K + \Delta\mathcal{U} = (E_{K,f} + \mathcal{U}_f) - (E_{K,i} + \mathcal{U}_i) = \Delta E \quad (4.6)$$

Abbiamo unito quantità relative a momenti correlati, cioè abbiamo unito energia cinetica finale con energia potenziale finale ed energia cinetica iniziale con energia potenziale iniziale. La somma di queste quantità viene chiamata *energia meccanica*:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} E_K + \mathcal{U} \quad (4.7)$$

Dalla 4.6 possiamo notare che, se agiscono forze non conservative, la variazione di energia meccanica corrisponde al lavoro effettuato dalle forze non conservative stesse. Per questo, è intuitivo utilizzare l'equazione nella forma

$$E_f = E_i + W_{\mathfrak{N}}$$

perché permette di capire che l'energia meccanica finale del sistema cambierà da quella iniziale di una certa quantità dovuta all'azione delle forze non conservative, che possono aggiungere o sottrarre energia meccanica. In assenza di forze non conservative, allora $W_{\mathfrak{N}} = 0$. Segue dunque un importante teorema, ovvero il teorema di conservazione dell'energia meccanica, che abbiamo appena dimostrato.

Teorema di conservazione dell'energia meccanica

Se su un oggetto il lavoro totale delle forze non conservative è nullo, allora la sua energia meccanica si conserva.

$$\Delta E = 0 \tag{4.8}$$

Meccanica degli Urti

Fino ad ora abbiamo trattato il moto di corpi “solitari”, ovvero non perturbati da altri corpi, ma al massimo influenzati da qualche agente esterno (le forze). Trattiamo ora gli urti, fenomeni dei quali abbiamo un’idea intuitiva secondo la quale lo “scontro” determina un qualche cambiamento nella velocità e nella traiettoria degli oggetti coinvolti. Per trattare gli urti è necessario introdurre due nuove grandezze: Quantità di moto e impulso.

5.1	Quantità di moto
5.2	Impulso
5.3	Il fenomeno dell’urto
5.4	Conservazione
5.5	Urti elastici
5.6	Urti anelastici
5.7	Aggeggi interessanti

5.1 Quantità di moto

Abbiamo sempre espresso la seconda legge come

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

ma questa proposizione afferma che l’effetto dell’agente esterno (la forza \mathbf{F}) si traduce interamente in una variazione dello stato di moto del corpo (accelerazione \mathbf{a}). Si suppone quindi che la massa sia sempre costante, anche se ciò non è sempre vero. Ad esempio, un razzo pieno di carburante non avrà la stessa massa che aveva in partenza una volta arrivato in orbita, quindi la forza esercitata dalla propulsione dei motori si è tradotta non solo in una variazione dello stato di moto, ma anche in una variazione della massa. Non tratteremo sistemi complessi come il razzo, ma ciò fa intuire che la seconda legge della dinamica può essere generalizzata nella forma seguente

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (5.1)$$

Dove la quantità \mathbf{p} prende il nome di *quantità di moto*, definita come

$$\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\mathbf{v} \quad (5.2)$$

Come dice il termine, la quantità di moto descrive il moto dei corpi sulla base della velocità di una massa più la massa stessa, a differenza di quanto accade nello studio cinematico del moto, dove solo le variazioni dello stato di moto contano, slegate da cause (forze) e materia (massa). La quantità di moto è inoltre una grandezza vettoriale, perché contiene in sé la velocità, a sua volta grandezza vettoriale.

5.2 Impulso

In molte situazioni comuni le forze agiscono per un tempo brevissimo, come negli urti. In questi casi è utile introdurre la grandezza dell’impulso. Supponiamo, ad esempio, che in una partita di baseball il lanciatore faccia partire la palla a una velocità di 150 km/h. Il battitore ruota il braccio e

colpisce con la mazza la palla, che ritorna verso il lanciatore a 185 km/h. Nel breve intervallo di tempo durante il quale la palla e la mazza sono in contatto, dell'ordine del millesimo di secondo, la forza fra esse cresce rapidamente fino ad un valore massimo molto grande, quindi si annulla quando la palla si stacca dalla mazza.

Descrivere l'andamento nel tempo della forza che la mazza esercita sulla palla è difficile. Ciò che possiamo conoscere più facilmente con una strumentazione adeguata è la *variazione della quantità di moto* (massa e velocità) della palla a causa del colpo e il tempo Δt di contatto tra mazza e palla. Da questi dati possiamo allora accontentarci di ottenere, usando l'equazione 5.1 una *forza media*, ovvero una forza che si è mantenuta costante per tutto l'intervallo di tempo del contatto mazza-palla.

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$

Riformulando questa equazione per variazioni infinitesime, possiamo ottenere la variazione di quantità di moto in funzione di \mathbf{F} e dt :

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F} dt$$

Il prodotto $\mathbf{F} dt$ viene definito *impulso* e non è altro che una definizione matematica alternativa della variazione della quantità di moto, utilizzata però più spesso in contesti in cui agiscono forze *impulsive*, cioè forze variabili che agiscono per tempi molto brevi rispetto a quelli comunemente misurabili nel sistema esaminato.

$$\mathbf{I} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F} dt \quad (5.3)$$

L'impulso è particolarmente utile per spiegare il motivo per cui è più confortevole atterrare su 10 metri di neve dopo una caduta di 100 metri piuttosto che su una lastra di pietra. Per frenare la nostra caduta, la neve ci permette di sprofondare al suo interno, quindi essa varia la nostra quantità di moto in maniera graduale e su un intervallo di tempo prolungato. Al contrario, la lastra di pietra non si deforma in maniera apprezzabile e l'impatto determina un impulso molto forte rispetto alla neve, tanto da essere letale.

5.3 Il fenomeno dell'urto

Urto

Un urto è un'interazione tra corpi, nella quale si osservano forze denominate *impulsive*, che cioè agiscono per tempi e su distanze molto più brevi di quelli *tipici* osservabili all'infuori dell'urto.

Cosa si intende per distanze e tempi tipici? Per i lettori che ancora si ricordano, immaginiamo una puntata di Holly & Benji: Quando i calciatori si apprestano a sferrare un calcio, il disegnatore sceglie sempre di rappresentare l'istante del colpo deformando il pallone. Anche se questa

raffigurazione è evidentemente esagerata, essa ha un fondo di verità e offre una spiegazione intuitiva di cosa si intende per *distanze tipiche dell'urto*: in un urto, gli oggetti coinvolti si *deformano*. Queste deformazioni avvengono su distanze ben minori di quelle, per esempio, della traiettoria del calcio o della lunghezza del campo. In urti reali, inoltre, come il calcio alla palla di Holly & Benji, queste deformazioni sono inevitabili, nonostante i corpi che collidono sembrino apparentemente i più rigidi su questo pianeta¹. Bisogna poi specificare che le deformazioni sono molto difficili da osservare perché, oltre ad avvenire su distanze ridotte rispetto a quelle tipiche, anche i tempi nelle quali accadono sono molto brevi. Il contatto tra piede e pallone è molto ridotto rispetto a quello che invece è richiesto al calciatore per correre dall'angolo al centro del campo. Riassumendo questo esempio calcistico, quando osserviamo una partita siamo di fronte a grandezze *tipiche* (dimensioni del campo da calcio, velocità dei calciatori e della palla, ecc.); negli urti, invece, possiamo trascurare le deformazioni e le distanze, perché troppo piccole rispetto a quelle tipiche, e i tempi, perché gli urti appaiono come eventi istantanei ai nostri occhi.

L'intenzione della meccanica di questo capitolo, dunque, non è quella di descrivere ciò che accade *durante* l'urto, ma prevedere, date le informazioni *precedenti* all'urto, lo stato del sistema *successivamente* all'urto. Idealmente, l'urto avviene istantaneamente e i corpi coinvolti sono sempre punti materiali, che dunque non conoscono deformazioni.

Urti e quantità di moto

Vogliamo prevedere lo stato del sistema dopo l'urto, in termini di velocità (vettori) dei corpi coinvolti. Sorprendentemente, gli unici strumenti che servono per trattare in modo semplice questo problema sono i tre principi della dinamica, più la definizione di quantità di moto e l'assunzione del *sistema isolato*, ovvero non disturbato da forze esterne.

Un classico esempio che unisce nozioni su urti e quantità di moto è il tavolo da biliardo. Supponiamo di avere due palle, 1 e 2, sul tavolo in moto rettilineo uniforme e in rotta di collisione tra loro; ovvero, sappiamo con certezza che la loro traiettoria si intersecherà e che tale punto verrà raggiunto da entrambi i corpi nel medesimo istante di tempo. L'esperienza ci permette di concludere che, passata la *zona d'urto*, le palle non procederanno sulle stesse rette dei moti precedenti, ma devieranno. Dobbiamo fare alcune assunzioni fondamentali. Innanzitutto, supporremo che nessun altro agente agirà sul sistema appena descritto (aiuterebbe immaginare due palle che vagano nello spazio profondo, o in altre parole: Nulla deve disturbare il sistema). Immaginiamo l'intervallo temporale nel quale le due palle saranno a contatto tra loro, collidendo: entrambe eserciteranno una forza sull'altra e aiutati dalla terza legge della dinamica sappiamo che

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$$

cioè l'applicazione di una forza su una palla determina una forza identica in modulo e direzione, ma verso opposto e applicata sull'altra palla. Svilu-

¹Il suono è prova del fatto che sono avvenute vibrazioni nei corpi, che dunque si sono deformati.

priamo l'equazione sfruttando la definizione di quantità di moto, ricordando che una forza $x \rightarrow y$ determina una variazione dello stato di moto di y .

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_1}{dt}$$

Ricorrendo agli usuali abusi di notazione matematica, ma ragionevoli da un punto di vista fisico, semplifichiamo l'intervallo di tempo infinitesimale del differenziale:

$$\begin{aligned} d\mathbf{p}_2 &= -d\mathbf{p}_1 \\ d[\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2] &= 0 \\ d\mathbf{p}_{\text{tot}} &= 0 \end{aligned}$$

Abbiamo mostrato, in anticipo, che per un sistema di due corpi come le palle da biliardo, assumendo che non agiscano forze esterne, la quantità di moto totale del sistema si conserva. Come l'energia meccanica, possiamo dunque concludere che un urto ideale non modifichi la quantità di moto del sistema. Questa conclusione è ancora incompleta e inesatta perché, come scopriremo in una prossima sezione, la quantità di moto si conserva *sempre* in un sistema isolato e non dipende dalla natura dell'urto.

5.4 Conservazione

Come l'energia, nella storia della fisica si è sempre pensato al moto come una quantità che potesse essere trasferita da un corpo ad un altro, fatto ragionevole ben giustificato dall'esperienza: basti pensare al gioco del biliardo. Come già dedusse Cartesio, la “macchina dell'universo”, assimilata ad un orologio, non può continuare a funzionare senza che una qualche quantità si conservi. Egli stesso fu tra i primi a proporre il prodotto massa-velocità come misura di tale quantità: due carri identici che viaggiano a velocità differenti hanno chiaramente quantità di moto diverse, ma una palla di cannone racchiude in sé maggior moto rispetto ad un sasso lanciato alla stessa velocità. Queste quantità sono presenti negli oggetti secondo distribuzioni differenti e variabili nel tempo, ma nel complesso esse non possono che sommarsi (vettorialmente!) sempre nella medesima quantità; se l'universo è un sistema chiuso, e lo si può supporre per definizione, allora la quantità di moto non può sparire o comparire, ma può trasferirsi tra gli oggetti al suo interno, trasformarsi.

5.4.1 Forze interne ed esterne

Approfondiamo il concetto di *sistema di punti materiali* e studiamone uno contentente un certo numero di punti materiali N . Immaginiamo che tra questi punti agiscano forze di varia natura: repulsive elettriche, attrattive gravitazionali ecc.; inoltre, supponiamo che vengano applicate altre forze dall'esterno di questo sistema di punti materiali². Possiamo suddividere le forze in gioco in due insiemi:

²Una immagine esplicativa è il polmone, dove le molecole dell'aria formano i punti materiali e i muscoli del torace sono gli agenti esterni.

1. **Forze interne:** le forze che i punti esercitano gli uni sugli altri. Forze che descrivono l'interazione tra i punti.
2. **Forze esterne:** le forze che l'ambiente esterno esercita sul sistema, l'insieme di punti.

Ogni punto i -esimo sarà sottoposto ad una certa forza totale, o risultante, derivante dalla somma/sovrapposizione di tutte le forze precedentemente descritte

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_i &= m_i \mathbf{a}_i \\ \mathbf{R}_i^{(E)} + \mathbf{R}_i^{(I)} &= m_i \mathbf{a}_i\end{aligned}$$

Definiamo le risultanti delle forze esterne, ed interne agenti sul punto i -esimo:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_i^{(E)} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \mathbf{F}_{k \rightarrow i}^{(E)} \\ \mathbf{R}_i^{(I)} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \mathbf{F}_{j \rightarrow i}^{(I)} \quad j \neq i\end{aligned}$$

Supponiamo che un punto non eserciti alcuna forza su se stesso (per questo poniamo $i \neq j$). La risultante di tutte le forze in gioco sarà

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{R}_i$$

In tale somma, concentriamoci sulla risultante delle forze interne:

$$\mathbf{R}^{(I)} = \sum_i \mathbf{R}_i^{(I)} = \sum_i \sum_j \mathbf{F}_{j \rightarrow i}^{(I)}$$

In questa somma, supponiamo che non vi siano forze agenti su un corpo ed esercitate dal corpo stesso, dunque poniamo $\mathbf{F}_{j \rightarrow i}^{(I)} = \vec{0} \quad \forall j = i$. Sappiamo che vale la terza legge della dinamica, dunque $\mathbf{F}_{j \rightarrow i}^{(I)} = -\mathbf{F}_{i \rightarrow j}^{(I)}$. Ma allora

$$\mathbf{R}^{(I)} = \sum_i \sum_j \mathbf{F}_{j \rightarrow i}^{(I)} = \vec{0} \quad (5.4)$$

Abbiamo appena dimostrato, grazie all'ipotesi della terza legge, che, in un sistema di punti materiali, la risultante delle forze interne è nulla.

5.4.2 Centro di massa

Dall'Equazione 5.4 possiamo dedurre che la risultante delle forze, interne ed esterne, coinvolte in un sistema di punti materiali è determinata solamente dalle forze esterne.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(E)} = \sum_i \mathbf{R}_i^{(E)} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i$$

Dalla precedente equazione, si può ricavare un'interessante definizione:

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = \left(\sum_i m_i \right) \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{\sum_i m_i} \right]$$

Abbiamo ottenuto un termine molto interessante, un artificio matematico che ha interpretazioni e applicazioni piuttosto importanti: *il centro di massa*.

$$\mathbf{x}_{\text{CM}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{\sum_i m_i} \quad (5.5)$$

Dalla definizione è banane³ ricavare la velocità e l'accelerazione del centro di massa. Riprendendo le equazioni precedenti e ponendo $M = \sum_i m_i$, possiamo concludere che

$$\mathbf{R}^{(E)} = M \frac{d^2 \mathbf{x}_{\text{CM}}}{dt^2} = M \mathbf{a}_{\text{CM}}$$

5.4.3 La legge di conservazione della quantità di moto

In un sistema isolato, non si rilevano forze esterne. Allora

$$\mathbf{R}^{(E)} = \vec{0} \quad \therefore \quad M \mathbf{a}_{\text{CM}} = 0 \quad \therefore \quad \mathbf{a}_{\text{CM}} = 0$$

ovvero, la velocità del centro di massa è costante, quindi la quantità di moto del centro di massa è costante e si conserva in un sistema isolato. Vale dunque la seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{CM},i} &= \mathbf{v}_{\text{CM},f} \\ \frac{\sum_j m_j \mathbf{v}_{j,i}}{M} &= \frac{\sum_j m_j \mathbf{v}_{j,f}}{M} \\ \mathbf{p}_{\text{tot},i} &= \mathbf{p}_{\text{tot},f} \end{aligned}$$

Da cui

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_{\text{tot}} = 0 \quad (5.6)$$

Tale risultato ha conseguenze di portata non trascurabile. Si consideri infatti il problema esposto nella prossima sottosezione.

Punto di collisione

Due magneti di massa m e $5m$ sono mantenuti ad una distanza fissa tra di loro. Una volta rimossi i vincoli, i due magneti si attraggono fino a schiantarsi. Sapendo che il primo magnete si trovava in posizione $x_1 = 0$ mentre il secondo in $x_2 = 8$ cm, si intende individuare la posizione della collisione.

³Hai letto bene.

Alla luce della legge di conservazione della quantità di moto, sappiamo che nella situazione iniziale la quantità di moto totale del sistema è nulla, in quanto i due magneti sono mantenuti fermi.

$$\mathbf{p}_i = 0$$

Il problema non fa alcun cenno all'azione di forze esterne, dunque possiamo supporre che il sistema sia isolato e che dunque la quantità di moto iniziale si conserverà anche subito prima dell'urto. Vale allora:

$$\mathbf{p}_i = m\mathbf{v}_{i,\text{tot}} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_{i,\text{tot}} = 0$$

Ma sappiamo anche che la velocità totale è rappresentato dal centro di massa del sistema. Ciò significa che se il centro di massa era “fermo” inizialmente, rimarrà tale anche poco prima dell'urto, grazie alla legge di conservazione della quantità di moto. Basta dunque trovare la posizione del centro di massa e il gioco è fatto.

$$x_{\text{CM}} = \frac{mx_1 + 5mx_2}{m + 5m} = \frac{x_1 + 5x_2}{6} = \frac{5}{6}x_2$$

5.5 Urti elastici

Urto

In un urto elastico, si conservano la quantità di moto e l'energia cinetica.

Un sistema contenente un certo numero di corpi può dunque essere descritto come segue:

$$\begin{cases} \sum_j m_j \mathbf{v}_{0,j} = \sum_j m_j \mathbf{v}_{f,j} & \text{conservazione della quantità di moto} \\ \sum_j m_j \mathbf{v}_{0,j}^2 = \sum_j m_j \mathbf{v}_{f,j}^2 & \text{conservazione dell'energia cinetica} \end{cases} \quad (5.7)$$

Nella realtà comunemente osservabile, urti pressoché elastici avvengono tra oggetti che rimbalzano tra loro dopo un urto, anche se in realtà l'energia cinetica viene inevitabilmente dissipata in altre forme (suono e calore), rendendo l'urto stesso non del tutto elastico. Sono idealmente elastici urti tra particelle, a livello molecolare e atomico⁴.

5.6 Urti anelastici

Urto

In un urto anelastico, la quantità di moto del sistema si conserva, mentre l'energia cinetica totale no.

⁴Questa assunzione sarà fondamentale nella teoria cinetica dei gas

Negli urti anelastici, vale sempre la legge di conservazione della quantità di moto. Tutti gli urti reali sono anelastici e un esempio di *urto perfettamente anelastico* è quello di due corpi che rimangono uniti dopo l'urto. Supponiamo di avere due masse che viaggiano ad una certa velocità e in rotta di collisione tra loro. Dopo l'urto, le due masse rimangono in contatto. Supponendo che le due masse attaccate formino un unico corpo, Vale:

$$\mathbf{p}_{1,i} + \mathbf{p}_{2,i} = \mathbf{p}_{3,f}$$

Dal punto di vista energetico, però, accade qualcosa di strano. Osserviamo l'energia cinetica:

$$E_{K,i} = E_{K1,i} + E_{K2,i} = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_{2,i}^2$$

Supponiamo di porre gli oggetti nel sistema di riferimento del centro di massa e di osservare esternamente la situazione (poniamo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{CM}} + \mathbf{v}_{\text{scm}}$):

$$E_{K,i} = \frac{1}{2}m_1(\mathbf{v}_{\text{CM}} + \mathbf{v}_{1,i,\text{scm}})^2 + \frac{1}{2}m_2(\mathbf{v}_{\text{CM}} + \mathbf{v}_{2,i,\text{scm}})^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\mathbf{v}_{\text{CM}}^2 + E'_{K,i}$$

dove abbiamo isolato i termini nei quali compare la velocità del centro di massa elevata al quadrato, per poi condensare l'energia rimanente in $E'_{K,i}$, la cui forma non è per noi rilevante. Se invece calcoliamo l'energia cinetica finale,

$$E_{K,f} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\mathbf{v}_{3,f}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\mathbf{v}_{\text{CM}}^2$$

è immediato infatti notare che, data la conservazione della quantità di moto, il corpo finale comprensivo di entrambe le masse non potrà che muoversi con velocità identica a quella del centro di massa. Abbiamo dunque mostrato che in generale l'energia cinetica non si conserva nell'urto. In particolare, essa diminuisce sempre in situazioni reali.

$$E_{K,f} \leq E_{K,i} \quad (5.8)$$

Il motivo di tale fenomeno può essere spiegato attraverso numerose interpretazioni, che possono dipendere dal sistema analizzato. In generale, la perdita di energia cinetica è dovuta al costo per mantenere unite le masse dopo l'urto, oppure, come accade sempre nella realtà, quell'energia viene dissipata in calore, deformazioni permanenti dei materiali, suono e così via.

5.7 Aggeggi interessanti

Sono numerosissimi i sistemi che possono essere resi affascinanti se analizzati da un punto di vista meccanico. Qui tratteremo solo alcuni dei più semplici di questi sistemi.

5.7.1 Pendolo balistico

Dedichiamo una sezione ad un dispositivo molto divertente, che per qualche strano motivo eccita a dismisura la materia grigia di un qualsiasi fisico: Il pendolo balistico. Scegliamo questo sistema fisico perché unisce lo studio di quantità di moto ed energia meccanica, le due principali grandezze conservative affrontate nel corso.

La figura 5.1 mostra lo schema essenziale di un pendolo balistico. Un pendolo balistico è costituito da due elementi principali: Un pendolo, costituito da un filo o asta al quale è agganciato un bersaglio (spesso un sacco di sabbia o un blocco di legno), e un proiettile. Generalmente, per funzionare bene, ci si aspetta che la massa del proiettile sia relativamente ridotta rispetto a quella del bersaglio. Per utilizzare il pendolo balistico, si spara il proiettile verso il bersaglio fermo, in modo che la traiettoria del proiettile sia perpendicolare al filo del pendolo. Quando il proiettile colpisce il bersaglio, esso si conficca al suo interno e il pendolo comincia ad oscillare per via dell'urto.

Il pendolo balistico è un metodo ingegnoso per misurare in particolare la velocità del proiettile. Ciò che è sufficiente conoscere sono le masse del proiettile (m) e del bersaglio (M), l'altezza massima di oscillazione del pendolo (h), a partire dalla posizione di equilibrio, e l'accelerazione di gravità del pianeta sul quale ci si trova (nel caso della Terra, g). Si consideri l'istante immediatamente precedente all'urto proiettile-bersaglio: in questo caso, la quantità di moto dell'intero sistema è data dalla somma della quantità di moto del proiettile e quella del bersaglio appeso al pendolo, ma sappiamo che quest'ultimo è fermo.

$$\mathbf{p}_i = m\mathbf{v} + M\vec{0} = m\mathbf{v}$$

Il proiettile si conficca nel bersaglio, rimanendovi incastrato. Si tratta dunque di un urto idealmente anelastico. Stavolta il pendolo comincerà a muoversi con una certa velocità \mathbf{V} ma la sua massa include quella del proiettile.

$$\mathbf{p}_f = (m + M)\mathbf{V}$$

La quantità di moto del sistema si conserva e dunque $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$, ma supponendo di voler ottenere \mathbf{v} , serve un'ulteriore via per trovare l'incognita \mathbf{V} . Per fare questo, ricorriamo alla meccanica. Immediatamente dopo l'urto, il pendolo comincia ad elevarsi ad una certa altezza h , che possiamo facilmente misurare, dove il pendolo si fermerà per poi oscillare ciclicamente. Supponiamo che l'energia cinetica del pendolo sia massima nel punto di equilibrio e che invece la sua energia potenziale sia nulla. All'altezza h , invece, l'energia cinetica è nulla, perché il pendolo si ferma per invertire l'oscillazione, mentre l'energia potenziale è massima. Dal momento che sul sistema solo le forze conservative compiono lavoro (la forza peso), possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica.

$$\Delta E = E_{K_f} + \mathcal{U}_f - (E_{K_i} + \mathcal{U}_i) = (m + M)gh - \frac{1}{2}(m + M)\mathbf{V}^2 = 0$$

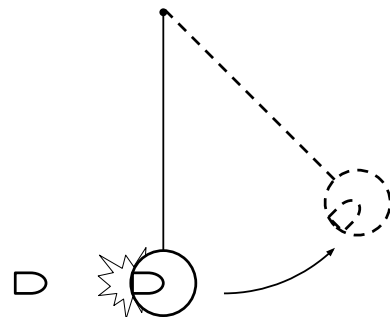


Figura 5.1: Il pendolo balistico

Da cui otteniamo il modulo di \mathbf{V} .

$$V = \sqrt{2gh}$$

Passando ai moduli, consapevoli del fatto che i vettori di \mathbf{V} e \mathbf{v} hanno direzione perpendicolare al filo del pendolo, ricaviamo facilmente il risultato dall'equazione sulla conservazione della quantità di moto:

$$v = \frac{m+M}{m} \sqrt{2gh}$$

Ovviamente questa equazione può essere invertita a piacere a seconda del dato che si intende individuare, non necessariamente la velocità del proiettile.

5.7.2 Pendolo di Newton

Il famoso pendolo di Newton venne in realtà ideato da Robert Hooke. Originariamente, l'artefatto era costituito da tre sferette. In tutti i pendoli di Newton, ogni sferetta (di egual massa) è allineata e a contatto con le altre, fissate poi mediante fili ad una impalcatura. Sollevando e lasciando cadere una delle sferette alle estremità, si mette in moto il pendolo, che con fare divertente farà muovere solamente le sferette più esterne, mentre quelle interne rimarranno apparentemente immobili.

5.7.3 Carrelli

Ammesso che esistano ancora, i fisici si intrattengono nei laboratori utilizzando anche i carrelli, costituiti da oggetti che scorrono su binari. È frequente che, per ridurre l'attrito, la rotaia permetta al carrello di levitare mediante un cuscinetto d'aria. Minimizzare gli attriti e le dissipazioni è importante, perché ciò consente di giocare coi carrelli al fine di ottenere degli urti *perfettamente* (in realtà quasi) elastici e anelastici. Nel seguito illustriamo i più banali casi di urto perfettamente elastico e urto perfettamente anelastico.

Urto perfettamente elastico

Supponiamo di avere un carrello A , di massa m_A , che si dirige con velocità v_A verso un carrello fermo B (dunque $v_B = 0$), con massa m_B . Il binario è dritto è dunque il problema si riduce ad una sola dimensione. Supponiamo che il verso di \mathbf{v}_A sia positivo. A urta elasticamente B e il loro stato di moto cambierà in qualche modo a seconda delle loro masse. Possiamo descrivere il sistema prima e dopo l'urto come segue:

$$\begin{cases} m_A \mathbf{v}_A = m_A \mathbf{v}_{A,f} + m_B \mathbf{v}_{B,f} \\ m_A v_A^2 = m_A v_{A,f}^2 + m_B v_{B,f}^2 \end{cases}$$

Cerchiamo una forma chiusa con la quale esprimere $\mathbf{v}_{A,f}$ e $\mathbf{v}_{B,f}$.

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{B,f} = \frac{m_A}{m_B} (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_{A,f}) \\ m_A v_A^2 = m_A v_{A,f}^2 + m_B \frac{m_A^2}{m_B^2} (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_{A,f})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{B,f} = \frac{m_A}{m_B}(\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_{A,f}) \\ \mathbf{v}_A^2 - \mathbf{v}_{A,f}^2 = \frac{m_A}{m_B}(\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_{A,f})^2 \end{cases}$$

Otteniamo dunque

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{B,f} = \mathbf{v}_A \frac{2m_A}{m_A + m_B} \\ \mathbf{v}_{A,f} = \mathbf{v}_A \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \end{cases} \quad (5.9)$$

Dalla 5.9 possiamo notare che, se $m_A = m_B$, il carrello A trasferirà tutto il suo moto su B e dunque A si fermerà, mentre $\mathbf{v}_{B,f} = \mathbf{v}_A$. Inoltre, $\mathbf{v}_{B,f}$ non sarà mai negativo, mentre a seconda della differenza tra m_A e m_B il blocco A potrebbe rimbalzare o proseguire seguendo B .

Nella teoria cinetica dei gas impiegheremo la 5.9 nei casi ideali dove $m_A \ll m_B$, o ancor meglio $m_B \rightarrow \infty$. Ciò significa che A rimbalza su B e torna dunque indietro con la stessa velocità precedente all'urto, ma stavolta con verso opposto. B invece non si muove.

Urto perfettamente anelastico

Il sistema è lo stesso di prima, ma stavolta l'urto è anelastico. Supporremo che i carrelli rimangano saldamente uniti tra loro. La descrizione stavolta riguarda solo la quantità di moto del sistema, per definizione di urto anelastico:

$$m_A \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_f (m_A + m_B)$$

e dunque

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_A \frac{m_A}{m_A + m_B}$$

Qui non è possibile che \mathbf{v}_f si opponga al verso di \mathbf{v}_A (in questo contesto ideale, sarebbe assurdo se A , dopo essersi unito a B fermo, tornasse indietro). A e B rimarrebbero invece immobili dopo l'urto qualora la massa di B fosse infinitamente più grande di quella di A .

Relatività del Moto

“That view of things would be normal for me if I normally walked on my hands.”

*Frames of Reference (1960) -
Hume, Ivey*

- 6.1 Sistemi di riferimento**
- 6.2 Principio di relatività galileiana**
- 6.3 Forze apparenti**

Ciò di cui si tratta in questo capitolo è stato uno dei temi più controversi nella storia della fisica, quello che forse ha sconvolto di più convinzioni un tempo ben radicate e che ha infiammato dibattiti che hanno pure fatto la storia della letteratura¹. E non è tutto qui: Gli ultimi grandi sviluppi della relatività del moto sono avvenuti poco più di un secolo fa ad opera di Einstein e molti altri e i cambiamenti da loro apportati hanno condotto a stravolgimenti ancora più bizzarri. Perché ciò che questo ramo della fisica rivela è che più osserviamo con attenzione la realtà, più essa non è come un attimo prima poteva sembrare. Per tale motivo la relatività può essere allo stesso tempo semplice e complessa, perché offre una visione del tutto insolita di ciò che ci appare come “normale”.

6.1 Sistemi di riferimento

“Relativo” è un termine che ben si sposa con l’espressione “a qualcosa”. Quel qualcosa viene definito nelle teorie relativistiche della fisica *sistema di riferimento*, che intuitivamente rappresenta il punto di vista dal quale si effettuano delle misurazioni o semplici osservazioni di fenomeni. Ricordiamo che tra le coordinate di un sistema di riferimento è presente anche il tempo.

Sistema di riferimento

Un insieme di strumenti geometrico-algebrici, di coordinate solidali con un oggetto arbitrario, e di procedure che consentono di individuare la posizione di un punto di uno spazio metrico.

Una volta fissato il sistema di riferimento, tutte le misurazioni devono essere coerenti con esso, se si intende adottare quel punto di vista. Quando diciamo che un’auto viaggia a 110 km/h, stiamo in realtà fornendo un’informazione incompleta, perché sottintendiamo che tale misurazione sia stata effettuata rispetto alla strada. Non potremmo dire la stessa cosa se viaggiassimo su un’altra auto che affianca la prima, con stessa direzione e verso: Diremmo che l’auto che prima, vista dalla strada, si muoveva a 110 km/h ora sta viaggiando con velocità minore rispetto a noi. Il moto di un corpo

¹ *Marco Paolini - ITIS Galileo* (circa 10 minuti a partire dal tempo 1:43:00).

è sempre relativo a un sistema di riferimento. Cambiando il sistema, il moto cambia. Vedremo nei prossimi paragrafi che però non tutti i sistemi di riferimento sono uguali e possono distinguersi in *inerziali* e *non inerziali*.

Il cambiamento riguarda anche le traiettorie: Se lanciassimo una pallina verso l'alto mentre viaggiamo sulla carrozza di un treno con velocità costante, vedremmo la pallina salire e scendere su una linea retta. Un osservatore esterno, invece vedrebbe la pallina muoversi secondo una traiettoria parabolica. Vedremo che i moti si compongono ed è necessario effettuare trasformazioni tra le coordinate dei sistemi di riferimento.

6.2 Principio di relatività galileiana

In questo corso ci limiteremo a studiare sistemi di riferimento che descrivono punti materiali che traslano soltanto e non ruotano in alcun modo. Dato che molti oggetti sono in movimento l'uno rispetto all'altro, vogliamo ora descrivere come essi sono tra loro legati, ovvero come possiamo “passare” da un sistema all'altro, trasformando le misure effettuate in un sistema in quelle che misureremmo nell'altro.

Supponiamo di avere due sistemi di riferimento, S ed S' centrati rispettivamente in o e o' , come mostrati in figura 6.1. Consideriamo poi un punto materiale P qualsiasi e i vettori posizione che individuano P nei sistemi di riferimento; otterremo \mathbf{r} , che è la posizione che S misura, e \mathbf{r}' , misurata invece da S' . Possiamo notare poi che il sistema S può misurare la posizione del centro o' individuando il vettore \mathbf{oo}' . Ora è chiaro come questi vettori sono tra loro in relazione:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{oo}' \quad (6.1)$$

Non abbiamo fatto supposizioni sul moto relativo dei due sistemi, ma se volessimo estendere l'analisi a velocità e accelerazione di P rispetto ai due sistemi è sufficiente applicare alla 6.1 le definizioni di velocità e accelerazione, come visto in cinematica, derivando l'equazione:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{o'} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{o'} \quad (6.3)$$

Notiamo che in queste equazioni compaiono $\mathbf{v}_{o'}$ e $\mathbf{a}_{o'}$, che corrispondono alla velocità e all'accelerazione di S' misurate in S . Se $\mathbf{v}_{o'}$ non è nullo, allora si può concludere che S' si sta muovendo rispetto a S . Se $\mathbf{a}_{o'}$ non è nullo, S' sta accelerando rispetto ad S . Ci occuperemo nel seguito del caso in cui S è inerziale e $\mathbf{a}_{o'}$ è nullo.

Dal momento che S è inerziale, in esso vale la seconda legge della dinamica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Essa avrà la stessa forma anche in S' , che si muove rispetto a S con $\mathbf{v}_{o'}$ costante? Ovvero, se \mathbf{F} è la forza in S e $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$ in S' , varrà $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$? Dalle relazioni precedenti, possiamo notare che

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}' + \mathbf{a}_{o'}) = m\mathbf{a}' + \frac{d}{dt}\mathbf{v}_{o'} = m\mathbf{a}' = \mathbf{F}'$$

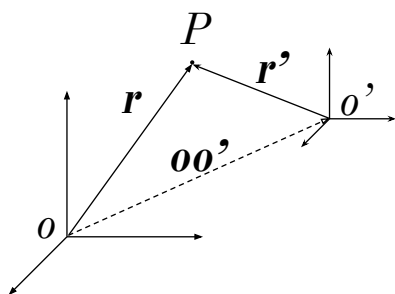


Figura 6.1: Relazione tra due sistemi di riferimento che misurano la posizione del punto P .

La seconda legge non è cambiata e possiamo dunque concludere che S' è un *sistema di riferimento inerziale*.

Principio dei relatività galileiana

Le leggi della dinamica newtoniana hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Con riferimento alle proprietà cinematiche di posizione e velocità di un punto materiale, il legame tra un sistema di riferimento inerziale, con origine o , e un altro sistema di riferimento inerziale, con origine o' , è descritta dalla seguente trasformazione:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{o}\mathbf{o}' \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{o'} \end{cases} \quad (6.4)$$

In sistemi di riferimento inerziali, la velocità $\mathbf{v}_{o'}$ prende il nome di *velocità di trascinamento*.

6.3 Forze apparenti

6.3.1 L'ascensore

Gravitazione

7.1 Gravità e forze fondamentali

Conosciamo bene la seconda legge della dinamica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Sappiamo che il termine \mathbf{F} rappresenta l'azione di un agente esterno, chiamato forza, che può avere natura diversa a seconda del sistema studiato. Pertanto, possiamo esprimere la sua intensità in forme a volte diverse, sia essa il peso, l'attrito, la forza elastica e così via. Tuttavia tutte queste forze, per quanto sappiamo al giorno d'oggi, sono riconducibili a quattro interazioni fondamentali che si manifestano nella materia (dalla più forte alla più debole):

- *Forza forte*: la più forte tra tutte. Tiene insieme i nuclei degli atomi.
- *Forza elettromagnetica*: accoppia le cariche elettriche e le correnti.
- *Forza debole*: si manifesta in fenomeni di decadimento nucleare.
- *Forza gravitazionale*: la più debole tra tutte.

Lo stato attuale della fisica suggerisce che molte di queste forze possano essere unificate, ovvero esse non sono altro che la manifestazione, in nature differenti, della stessa forza fondamentale. Sorprendentemente, è stata la forza più debole ad essere studiata per prima. La legge fondamentale venne formulata da Newton nel seguente modo:

$$\mathbf{F}_{G,1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_{G,1} m_{G,2}}{r_{1,2}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1,2} \quad (7.1)$$

Che esprime il vettore della forza gravitazionale che un corpo 1 esercita su un altro corpo 2. Come mostrato in figura 7.1, il vettore giace sulla congiungente tra i due corpi (considerati come punti materiali), separati da una distanza $r_{1,2}$ e dotati di una certa *massa gravitazionale* m_G . Il segno negativo, accompagnato dalla *costante di gravitazione universale*, indica che la forza gravitazionale è sempre attrattiva.

7.2 Il principio di equivalenza

Soffermiamoci a chiarire alcuni concetti. Innanzitutto, vogliamo esprimere la legge 7.1 in maniera più generica.

$$\mathbf{F} = c \frac{p_1 p_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (7.2)$$

7.1 Gravità e forze fondamentali

7.2 Il principio di equivalenza

7.3 Approfondimenti

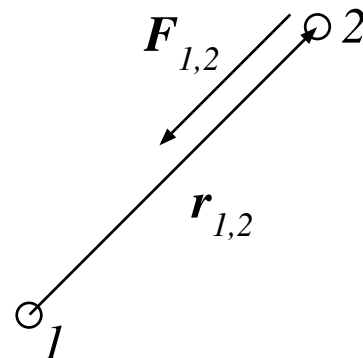


Figura 7.1: Illustrazione dell'applicazione della legge di Newton. Anche se non viene mostrata, il corpo 2 esercita la stessa forza, ma opposta in verso, sul corpo 1, in accordo con la terza legge della dinamica.

Sorprendentemente, questa forma verrà proposta da Coulomb per esprimere l'interazione tra due cariche elettriche, secondo la legge (in moduli)

$$F_E = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

Diventa naturale pensare che la 7.2 possa rappresentare una sorta di “template” con il quale esprimere quantitativamente l'interazione tra due oggetti dotati di una certa qualità o proprietà intrinseca p , che consente agli oggetti in questione di partecipare nell'interazione. Nel caso delle cariche elettriche, essa sarà, per l'appunto, una carica elettrica. Per quanto riguarda la gravità, questa qualità è la massa gravitazionale. Ci si può chiedere se stiamo parlando della stessa massa della seconda legge di Newton. In realtà, esse sono ben diverse:

- La massa inerziale m_I esprime la capacità di un corpo di opporsi all'azione di agenti esterni e, di conseguenza, al cambiamento del proprio stato di moto. In breve, essa misura l'inerzia del corpo.
- La massa gravitazionale m_G esprime la capacità di un corpo di partecipare, contribuire ed essere soggetto all'interazione gravitazionale in presenza di un altro corpo dotato di massa gravitazionale.

Seppur sottile, la differenza tra queste quantità è comunque diversa (un oggetto “massivo” è difficile da spostare; un oggetto “massiccio” interagisce maggiormente con un altro oggetto). La parola “carica” sarebbe più intuitiva per spiegare la differenza e viene infatti utilizzata per le interazioni elettriche: più “carico” di una certa proprietà dell'interazione, più “intensa” l'interazione stessa. Nella pratica ci riferiamo sempre alla stessa massa (i kilogrammi), ma nulla impedisce di pensare che le masse di uno stesso corpo siano effettivamente quantità distinte.

Consideriamo un corpo in prossimità della superficie terrestre. Possiamo approssimare la Terra ad una sfera uniforme e supporre che la forza gravitazionale corpo-Terra giaccia sulla congiungente tra il centro del pianeta e il corpo (puntiforme). Il corpo si trova ad una certa altezza h e conosciamo inoltre il raggio della Terra R_T . Il corpo sarà soggetto alla forza gravitazionale della Terra; uniamo le equazioni di Newton (consideriamo i moduli):

$$F = m_{I,C}a \quad F = G \frac{m_{G,C}M_{G,T}}{(R_T + h)^2}$$

Supponiamo che $R_T \gg h$. Dunque la distanza Terra-corpo può essere approssimata:

$$r_{T,C} = R_T + h = R_T \left(1 + \frac{h}{R_T} \right)$$

$$r_{T,C}^2 \simeq R_T^2 \left(1 + 2\frac{h}{R_T} \right)$$

$$\frac{1}{r_{T,C}^2} \simeq \frac{1}{R_T^2} \left(1 - 2\frac{h}{R_T} \right)$$

Da cui concludiamo che possiamo trascurare h . Dunque, sapendo che $a = g$,

$$m_{I,C}g = G \frac{m_{G,C}M_{G,T}}{R_T^2}$$

Isoliamo g

$$g = \frac{m_{G,C}}{m_{I,C}} G \frac{M_{G,T}}{R_T^2}$$

Se assumessimo che le masse inerziale e gravitazionale di uno stesso corpo sono diverse, l'accelerazione g non sarebbe la stessa per tutti gli oggetti. Tuttavia, non è ancora stata trovata evidenza della differenza quantitativa (apprezzabile, in quanto misure sperimentali) tra le due proprietà. L'osservazione galileiana stessa sulla caduta libera, ovvero che tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione, indica che

$$m_I = m_G \quad (7.3)$$

che rappresenta il principio di equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale. Possiamo affermare ciò perché, fissata la massa della Terra e il suo raggio, il rapporto m_I/m_G deve essere costante affinché g sia uguale per tutti i corpi di massa distinta.

7.3 Approfondimenti

Forse il campo della fisica più affascinante è l'astrofisica. Citiamo solo alcuni approfondimenti infinitesimi rispetto all'immensità della fisica astronomica¹.

7.3.1 Energia potenziale gravitazionale

Si usa spesso calcolare l'energia potenziale di un oggetto vicino alla superficie terrestre, ad un'altitudine h , con la seguente legge:

$$mgh$$

Tuttavia sappiamo che g non è costante al variare della quota e su grandi distanze questa legge non è più una buona approssimazione. Calcoliamo dunque la differenza di energia potenziale tra la superficie terrestre e una certa quota h da essa alla luce della legge di Newton.

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{U} = -W &= - \int_R^{R+h} -G \frac{mM}{s^2} ds = GmM \int_R^{R+h} \frac{ds}{s^2} = GmM \left[-\frac{1}{s} \right]_R^{R+h} = \\ &= -GmM \left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} \right) \end{aligned}$$

¹Così ampia per via della sua storia millenaria, al contrario della meccanica descritta in queste pagine

Notiamo che $\Delta\mathcal{U} > 0$, dunque allontanando un oggetto di massa m dalla superficie terrestre, esso guadagna una certa energia potenziale. Più in generale, se poniamo un punto di riferimento X arbitrario dal quale calcolare la (differenza di) energia potenziale verso un punto P , otteniamo la seguente espressione:

$$\mathcal{U}(P) = -GmM \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_X} \right)$$

Per convenienza è utile porre $r_X = +\infty$, ovvero ad una distanza infinita da M , ottenendo dunque

$$\mathcal{U} = -\frac{GmM}{r}$$

L'energia meccanica di un corpo è dunque

$$E = E_K + \mathcal{U} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}$$

Ovviamente supponiamo che tutte queste leggi valgano per punti materiali. In un caso reale, per esempio per il calcolo dell'energia potenziale gravitazionale in prossimità della Terra, quando si “sprofonda” nel corpo che genera il campo gravitazionale, l'estensione di tale corpo modifica l'andamento dell'energia potenziale.

7.3.2 Eratostene e Cavendish

Per giungere alla conclusione mostrata nell'equazione 7.3, sono necessari due dati molto importanti: Il raggio della Terra e la costante G . Il primo fu misurato già ai tempi di Eratostene. Il secondo rimase incognito per quasi 100 anni dopo la formulazione della legge 7.1 da parte di Newton.

Nel 1798 il fisico inglese Henry Cavendish compì un esperimento con strumentazioni abbastanza sensibili da poter stimare il valore di G , un dato estremamente piccolo (ordine 10^{-11} !). Nel suo esperimento, Cavendish utilizzò una bilancia di torsione. Due masse m sono fissate a un'asta appesa ad un filo (la massa dell'asta è trascurabile). Accanto alle due masse sospese sono poste due grandi masse $M > m$ ferme. Ciascuna massa m viene attratta, a causa della forza di gravità, verso la massa M vicina, quindi l'asta che sostiene le masse sospese ruota e torce il filo. È possibile misurare l'angolo di torsione del filo riflettendo un raggio di luce su una superficie riflettente solidale con il filo. Se è nota la forza necessaria per torcere il filo di un dato angolo (questo è possibile se il filo è stato tarato con esperimenti precedenti), la misura dell'angolo di torsione fornisce la misura dell'intensità della forza di gravità. Conoscendo le masse m e M e la distanza tra i loro centri, possiamo usare la legge di Newton per ricavare G . Cavendish ottenne un valore $G = 6.754 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, in accordo con il valore oggi accettato di $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

Avendo a disposizione il valore di G , fu quindi possibile determinare anche la massa della Terra M_T :

$$M_T = \frac{gR_T^2}{G}$$

7.3.3 Gravitazione universale

Secondo la legge di Newton, tutti gli oggetti nell'universo si attraggono l'un l'altro attraverso l'interazione gravitazionale. È in questo senso che la legge viene detta "universale".

La terza legge di Keplero

Ovviamente la legge di Newton ha grande importanza in campo astronomico (anche se espressa in forme assai più complesse) ed è stata la conferma di una legge scoperta sperimentalmente tempo addietro da Keplero, appunto la *terza legge di Keplero*:

$$T \propto r^{\frac{3}{2}}$$

Secondo tale legge, il periodo T di rivoluzione di un pianeta attorno al Sole è proporzionale alla distanza media r del pianeta dal Sole elevata a $3/2$. Dunque esiste una costante k tale che $T = kr^{\frac{3}{2}}$. In realtà questa legge vale per tutti i sistemi astronomici (solari e non) simili al nostro, ma gli studi di Keplero si basavano sugli attenti dati raccolti dal maestro Tycho Brahe sui moti orbitali dei corpi celesti appartenenti al sistema solare.

Per dimostrare la terza legge per via teorica, è necessario supporre che il pianeta in rivoluzione intorno al Sole viaggia secondo un moto circolare uniforme², del quale conosciamo bene le relazioni che legano periodo, velocità angolare, velocità tangenziale e accelerazione centripeta: $T = 2\pi/\omega$, $v = \omega r$ e $a_c = v^2/r$. Sapendo poi che la forza di gravità tra un pianeta e il Sole è proprio la forza centripeta del moto orbitale, possiamo effettuare i seguenti calcoli unendo tutte le leggi scoperte fino ad ora:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{v}r = \frac{2\pi}{\sqrt{a_c r}}r = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{GM}{r}}}r = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\right)r^{\frac{3}{2}}$$

Non solo abbiamo dimostrato la terza legge, ma abbiamo pure individuato la costante di proporzionalità k .

Sistemi binari

Dedichiamo questa sezione ad un classico problema di gravitazione piuttosto complesso, ma altrettanto interessante, presente peraltro in natura nonostante il classico modello copernicano al quale siamo abituati.

In sistemi non simili a quello solare vale ancora la legge di Newton. Consideriamo per esempio un sistema di stelle binarie, ovvero stelle con una differenza di massa non trascurabile rispetto alla distanza del centro di massa del sistema dal centro di massa di una delle due stelle. In tale caso, le stelle orbiteranno attorno al loro centro di massa, situato in qualche punto dello spazio intermedio sulla loro congiungente. Anche nel sistema solare la Terra e il Sole ruotano attorno al centro di massa totale, che tuttavia si trova ben al di sotto della superficie del Sole, il che permette di ridurre la trattazione del problema ad una rivoluzione della Terra attorno al Sole.

²Anche se in realtà l'orbita è ellittica, la distanza media tra pianeta e Sole è la stessa durante una rivoluzione e dunque il moto è approssimabile a quello circolare.

8.1 Introduzione

A partire da questo capitolo il ruolo dell'energia sarà ancora più importante. In precedenza abbiamo dimostrato che la differenza di energia meccanica di un sistema corrisponde al lavoro totale delle forze non conservative che agiscono sul sistema, quindi $W^{\text{NC}} = \Delta E$. In altri termini, l'energia che un sistema possiede viene persa o acquistata nel caso in cui vi siano forze non conservative che compiono lavoro su di esso. Ma quindi l'unico modo di “parlare”, trasferire energia, ad un sistema dell'universo è quello di compiere lavoro? In realtà no, come mostreremo parlando di *calore*, un'altra forma di energia *in movimento* come il lavoro, ma in un certo senso più disordinata.

Ci occuperemo inoltre di sistemi fisici contenenti un numero di costituenti dell'ordine del numero di Avogadro

$$N_A = 6 \cdot 10^{23}$$

Il sistema di questo tipo che più ci interessa è quello dei gas. Supporremo che i gas saranno costituiti da particelle infinitesime che dovranno seguire certi comportamenti ideali. Ma trattandosi di punti materiali, non possiamo studiare questi sistemi in termini meccanici, secondo la dinamica newtoniana, come abbiamo sempre fatto? Se seguissimo questa strada, potremmo non vivere abbastanza per vedere i risultati: Dovremmo prima di tutto osservare e misurare le caratteristiche cinematiche e meccaniche di ogni singola particella, quanto meno ad un preciso istante di tempo (dovremmo dunque misurare tutte le particelle pressoché contemporaneamente), stilare poi un sistema di equazioni che descriva le quantità di moto, le energie in gioco ed eventualmente altre informazioni per analizzare gli urti e prevedere lo stato futuro del sistema. Due vie alternative sono possibili: La prima è quella di introdurre nuove grandezze che misurino lo stato globale del sistema, rinunciando ad elencarne minuziosamente i dettagli come abbiamo descritto sopra; la seconda, una sorta di compromesso, è di ricorrere alla statistica. Noi tratteremo qui la prima modalità per ragioni storiche e semplicità (la seconda, chiamata *meccanica statistica*, è una delle ultime evoluzioni della termodinamica, assai più complessa della formulazione classica).

In effetti, l'individuazione delle relazioni tra le varie proprietà dei materiali, senza conoscere la loro struttura interna, è l'oggetto di studio della termodinamica¹. In realtà cercheremo una spiegazione di certi fenomeni analizzando ciò che accade nel microscopico, come mostreremo con la teoria cinetica, ma ciò che sorprenderà di più sarà il fatto che effetti come pressione e variazioni di temperatura sono pressoché indipendenti dai dettagli interni delle particelle del materiale come le loro singole collisioni.

¹Feynman, 44-1

8.1	Introduzione
8.2	Principio zero
8.3	Esperienza di Joule
8.4	Principio primo
8.5	Gas ideali
8.6	Trasformazioni fondamentali
8.7	Macchine
8.8	Principio secondo
8.9	Esperienza di Carnot
8.10	Esperienza di Clausius
8.11	Approfondimenti

8.1.1 Sistemi termodinamici

Le nostre trattazioni avranno per oggetto i *sistemi termodinamici*, per definizione immersi in un *ambiente esterno*. Ambiente esterno e il suo contenuto costituiscono l'*universo*, un sistema che per definizione non è contenuto in un altro ambiente esterno. Altro oggetto di nostro interesse per lo studio di questi sistemi sono le *trasformazioni termodinamiche*, ovvero processi nei quali avvengono scambi di energia e che si osservano nei sistemi elencati sopra. Qualsiasi cosa può essere un sistema termodinamico, ma l'esempio più classico è quello della pentola sul fuoco (figura 8.1), dove il contenuto è il sistema termodinamico mentre la cucina e il fornello sono l'ambiente esterno. Nel complesso, questi elementi costituiscono un universo (dunque non necessariamente la realtà intera o il cosmo!), all'interno del quale avvengono scambi di energia. Si suppone che questi scambi siano indipendenti da ciò che, se esiste, si trova fuori dall'universo.

Possiamo classificare i sistemi termodinamici sulla base di due criteri: capacità di scambiare materia e capacità di scambiare energia con l'ambiente esterno.

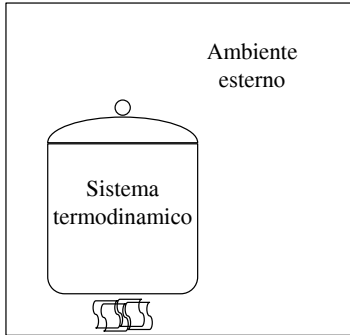


Figura 8.1: Un esempio di universo, composto da un sistema termodinamico (la pentola) e un ambiente esterno (la stanza). Viene anche mostrato uno scambio di energia, mediato dal fuoco.

Sistema	Scambia materia	Scambia energia
<i>Aperto</i>	✓	✓
<i>Chiuso</i>	×	✓
<i>Isolato</i>	×	×

È immediato chiedersi se esistono sistemi opposti a quelli chiusi, che scambino materia ma non energia con l'ambiente esterno. Ma questo è impossibile, perché vale

$$E = mc^2 \quad (8.1)$$

dove c corrisponde alla velocità della luce nel vuoto. Questa celebre equazione, anche se più complessa di quel che sembra, mostra che ogni corpo possiede una certa energia E per il semplice motivo che esso possiede una massa m .

8.1.2 Variabili termodinamiche

Le *variabili* (o *coordinate*) *termodinamiche* sono gli strumenti che in termodinamica sostituiscono le proprietà cinematiche a cui eravamo abituati in meccanica: lo spazio e il tempo, che ci permettevano di descrivere il moto dei punti materiali. Come già discusso precedentemente, questa sostituzione ha motivi pratici. Le variabili termodinamiche fondamentali sono *pressione* p (rapporto tra il modulo di una forza perpendicolare ad una superficie e l'area della superficie stessa), *temperatura* T (espressione quantitativa della nostra sensazione di caldo e freddo), *volume* V e massa m ². Come poi in cinematica utilizzavamo un sistema di assi cartesiani, anche ora utilizziamo lo stesso strumento matematico (il piano pV , pressione-volume) accoppiandolo però con le coordinate termodinamiche appena introdotte.

²In termodinamica è spesso presente un'influenza da parte della chimica, quindi alla massa si preferisce la *mole* (come la massa, si riferisce a quantità di materia).

Le variabili termodinamiche si suddividono in due categorie: grandezze *intensive* ed *estensive*. Il valore delle grandezze intensive non dipende dalla quantità di materia o dall'estensione del campione esaminato, ma soltanto dalla sua natura e/o dalle condizioni in cui si trova e possono essere misurate localmente. La temperatura di una stanza, per esempio, non dipende dalle sue dimensioni o dal tipo di aria che esso contiene. Dall'altro lato, le estensive dipendono dalla quantità di materia esaminata e dalla sua estensione.

Grandezze intensive	Grandezze estensive
p, T	V, m

8.1.3 Trasformazioni termodinamiche ed equilibrio

I sistemi termodinamici possono essere descritti dalle coordinate termodinamiche appena introdotte, che giacciono su un piano. Un sistema che viene idealmente rappresentato da un punto fisso sul piano pV è in uno *stato di equilibrio termodinamico*, nel quale le condizioni di pressione, volume e temperatura rimangono costanti col passare del tempo. Un sistema si dice in equilibrio termodinamico se esso rispetta i seguenti equilibri:

1. *Equilibrio meccanico*: lo stato non è sottoposto a forze totali non nulle, in qualsiasi coppia delle sue parti.
2. *Equilibrio chimico*: non esiste alcuna reazione chimica tra una qualsiasi coppia di parti del sistema.
3. *Equilibrio termico*: per ogni coppia di parti, la temperatura è la stessa.

Per “parti” di un sistema intendiamo sottoinsiemi abbastanza piccoli rispetto al sistema originale ma allo stesso tempo sufficientemente grandi affinché gli strumenti della termodinamica funzionino.

Un sistema può ovviamente muoversi all'interno del piano pV , cambiando i propri parametri termodinamici e spostandosi tra due stati differenti. Questi movimenti sono chiamati *trasformazioni termodinamiche* e vedremo più avanti che sono processi che coinvolgono scambi di energia tra sistema termodinamico e ambiente esterno. Nel mondo reale, approssimare sperimentalmente la curva di una trasformazione sul piano pV è estremamente difficile e dunque, se un sistema passa dallo stato A ad uno differente B , non vi è garanzia di equilibrio nel percorso tra i due punti. Per ora, ciò ci permette solo di “accontentarci” di stimare teoricamente l'energia scambiata e i parametri in una trasformazione termodinamica. Per questo motivo, sottointenderemo la seguente assunzione in questo capitolo: tutte le trasformazioni trattate sono *quasistatiche*³ (a meno che non venga specificato diversamente).

Trasformazione quasistatica

Trasformazione termodinamica ideale nella quale il sistema termodinamico attraversa equilibri successivi. Data una trasformazione τ quasistatica sul piano pV , tutti i punti di τ sono stati di equilibrio.

³Da non confondere con le trasformazioni *reversibili*, trattate più avanti.

Le trasformazioni quasistatiche sono irripetibili sperimentalmente, perché, affinché ad *ogni* istante il sistema si trovi in uno stato di equilibrio, è necessario variare le sue coordinate termodinamiche in quantità infinitesime e in tempi sufficientemente lunghi in modo da non rompere gli equilibri.

8.1.4 Caldo e freddo

8.2 Principio zero

Primo zero della termodinamica

Se un corpo A è in equilibrio termico con B e B lo è con un terzo corpo C , allora A è in equilibrio termico con C .

In particolare, se $T_A = T_B$ e $T_B = T_C$, allora $T_A = T_C$; cioè i corpi possiedono la medesima temperatura.

Sottolineiamo che le equivalenze espresse dal principio non sono dedotte da proprietà logico-matematiche, ma sono affermazioni fondate puramente su evidenze sperimentali.

8.3 Esperienza di Joule

A metà del Diciannovesimo secolo, James Prescott Joule compì alcuni esperimenti celebri che misero in luce il legame tra alcune forme di energia e temperatura. Il più noto esperimento è quello del mulinello, con il quale Joule mostrò *l'equivalente meccanico del calore*. Il dispositivo di Joule consisteva in un serbatoio adiabatico contenente acqua, la cui temperatura veniva controllata per mezzo di un termometro infilato in un'apertura del serbatoio. Nell'acqua vi era poi immerso un mulinello azionato dall'esterno da un sistema di carrucole e masse in caduta libera. L'esperimento consisteva nel sollevare una certa massa totale m ad una altezza h ; cadendo, la massa avrebbe messo il mulinello in rotazione, agitando l'acqua del serbatoio. Joule osservò che la temperatura dell'acqua aumentava dopo la caduta della massa e l'incremento di temperatura era proporzionale alla massa e all'altezza.

Un'analisi energetica del sistema mette in luce che un certo lavoro è stato compiuto sull'acqua del serbatoio:

$$W = mgh$$

Per principio di conservazione dell'energia, il lavoro non può essere sparito nel nulla. L'effetto della caduta della massa è stato però un aumento di temperatura. La conclusione più ragionevole è che temperatura ed energia sono tra loro legati da qualche relazione.

8.4 Principio primo

8.4.1 Lavoro ed energia interna

Come abbiamo osservato con Joule, è sperimentalmente evidente che se si compie lavoro sull'acqua, essa aumenta la propria temperatura. Inoltre, se la temperatura iniziale dell'acqua è la stessa in tutti gli esperimenti e il lavoro compiuto è sempre uguale, allora la temperatura finale sarà anch'essa la stessa in tutte le situazioni. Da ciò si può dedurre che l'aumento di temperatura non dipende dalla natura del lavoro. Cos'è allora la temperatura? Non possiamo ancora rispondere a questa domanda, ma sicuramente sappiamo che essa è legata in qualche modo all'energia, quantomeno al lavoro.

La temperatura ci fornisce un'informazione sullo *stato* di un corpo, cioè una proprietà che lo caratterizza in un dato istante in una certa situazione. Il lavoro è invece qualcosa di dinamico, una “energia in movimento” dovuta al moto di qualche cosa. Il lavoro si trasferisce da corpo a corpo e ne altera una proprietà di stato, il cui indicatore è la temperatura. L'energia del lavoro, allora, si può immagazzinare nei corpi, come abbiamo visto parlando di (variazione di) energia potenziale $\Delta U = -W$. Anche qui potremmo parlare di una qualche energia potenziale, ma non possiamo denominarla in questo modo perché in generale non si osservano forze conservative in azione. Introduciamo allora l'*energia interna* di un sistema, che, come si è osservato dagli esperimenti, è esprimibile come funzione della temperatura

$$U = U(T)$$

8.4.2 Calore

Dal paragrafo precedente abbiamo scoperto che si può dedurre il contenuto energetico di un sistema in funzione della sua temperatura. Con Joule, però, abbiamo visto che, per aumentare la temperatura di un sistema, è necessario compiere del lavoro su di esso. Ma per esperienza sappiamo che un corpo freddo può essere riscaldato da uno più caldo. Tuttavia non si osserva alcun lavoro in azione. Per spiegare questo fenomeno, la fisica ha introdotto una quantità energetica nuova: *il calore*.

Calore

Energia scambiata tra corpi in contatto termico e a temperature differenti⁴.

Spesso indicata con Q .

Spesso si è tentati di associare il calore alla temperatura. Si tratta di un'idea errata, perché la temperatura rappresenta lo stato di un sistema, mentre il calore è solo energia in movimento, come lo è il lavoro. Queste

⁴Per esperienza sappiamo che il passaggio spontaneo avviene dal corpo più caldo a quello più freddo, ma questa proprietà della natura viene riassunta in principi della termodinamica che affronteremo più avanti.

grandezze si manifestano solamente durante trasferimenti di energia. Il legame tra temperatura e calore è tuttavia molto stretto:

$$\Delta T \propto Q$$

cioè il calore corrisponde ad una certa variazione della temperatura del sistema. In altri termini, variazione di temperatura e calore sono legati mediante una certa costante ξ dalla relazione $\Delta T = \xi Q$.

Abbiamo visto come quantificare la temperatura mediante i termometri. Rimane però il problema di come quantificare il calore. Per fare un esempio concreto, supponiamo di voler scaldare un salotto con una stufa. Per incrementare la temperatura della stanza da 200 K a 300 K, sarà necessario bruciare una certa quantità di legna. È facile allora esprimere il calore necessario (che è l'energia sprigionata dalla legna che arde) ad aumentare la temperatura della stanza: È proprio funzione della quantità di legna che dobbiamo comprare e bruciare, a meno della costante ξ espressa precedentemente.

Se anche il calore, come il lavoro, può variare la temperatura di un sistema, ciò implica che anche lo scambio di calore può mutare l'energia interna di un sistema. Abbiamo visto precedentemente che l'energia interna di un sistema è una qualche funzione della temperatura, $U = U(T)$. Questa relazione si suppone essere invertibile, $T = T(U)$. Dagli studi sul calore, poi, abbiamo mostrato la relazione tra calore e variazione di temperatura, dalla quale possiamo notare che

$$Q = \frac{1}{\xi} \Delta T = \frac{1}{\xi} (T_f - T_i) = \frac{1}{\xi} (T(U_f) - T(U_i))$$

A meno di costanti, possiamo esprimere il calore come quantità proporzionale alla variazione di energia interna del sistema:

$$Q \propto \Delta U$$

8.4.3 Formulazione del primo principio

Possiamo ora mostrare il primo principio della termodinamica. Il principio mostra semplicemente che un sistema può variare la propria energia interna mediante il contributo energetico di due quantità “in movimento”: il lavoro, $W = -\Delta U_W$ ⁵ e il calore scambiato con l'ambiente, $Q = \Delta U_Q$. Questi contributi si sommano per determinare una variazione totale $\Delta U = \Delta U_Q + \Delta U_W$, da cui la formulazione seguente del primo principio:

$$\Delta U = Q - W \tag{8.2}$$

Sarebbe più corretto mostrare la seguente forma differenziale

⁵Poniamo il segno negativo per convenzione e convenienza matematica, come abbiamo fatto per l'energia potenziale.

Primo principio della termodinamica

$$dU = \delta Q - \delta W \quad (8.3)$$

Ci limiteremo alla seguente interpretazione: d rappresenta un differenziale esatto, che sottolinea l'indipendenza della differenza dal percorso. La differenza di energia interna dU dipende solo dagli stati iniziale e finale del sistema, ignorando ciò che è accaduto durante la trasformazione. Il simbolo δ indica invece che i contributi di calore e lavoro possono essere differenti a seconda della trasformazione avvenuta. In altre parole, la stessa differenza dU può aver avuto origine da trasformazioni termodinamiche differenti, ognuna delle quali ha osservato un diverso contributo di lavoro e calore. Per riassumere, *l'energia interna definisce una proprietà di stato del sistema e invece calore e lavoro sono proprietà della particolare trasformazione.*

Chiariamo le convenzioni sui segni: supponiamo di avere un sistema termodinamico che scambia calore con l'ambiente e che può compiere lavoro. La situazione è mostrata in figura 8.2. Quando il sistema acquista calore dall'ambiente esterno, il valore di questa quantità sarà positivo. Quando invece il sistema perde calore, quest'ultimo ha valore negativo. In accordo con il primo principio, supponendo di ignorare il lavoro, l'energia interna U del sistema diminuisce quando il calore esce e viceversa aumenta quando entra nel sistema. Per il lavoro vale il contrario: quando l'ambiente effettua lavoro sul sistema, questa quantità di energia in entrata ha valore negativo; quando invece il sistema effettua lavoro sull'ambiente, esso spende e perde parte della sua energia interna. Per questo motivo, nel primo principio, il lavoro viene sottratto alla variazione di energia totale.

Sottolineiamo infine che, nella formulazione 8.2, ΔU corrisponde alla variazione *totale* di energia interna del sistema in un dato momento nel quale avviene scambio di energia. Sono dunque totali anche il calore scambiato Q e il lavoro effettuato W .

8.4.4 Modalità di trasmissione del calore

Come il lavoro può presentarsi in svariate forme, come abbiamo visto dagli esperimenti di Joule ma già anche dalla meccanica, anche il calore può essere scambiato in vari modi. Queste modalità di trasmissione hanno in comune la condizione di *contatto termico*, ovvero situazioni in cui due corpi sono in grado di trasmettere calore tra di loro. È importante non confondere il contatto termico con quello fisico, perché, come vedremo, non sempre il calore si trasmette solo se due corpi si toccano tra loro.

Altro punto da ricordare è che possiamo distinguere che l'energia si trasferisce sotto forma di calore perché non si compie lavoro.

Conduzione

Nella conduzione, il calore viene scambiato per contatto tra corpi. Un semplice modello per descrivere questo fenomeno è la finestra di un edificio.

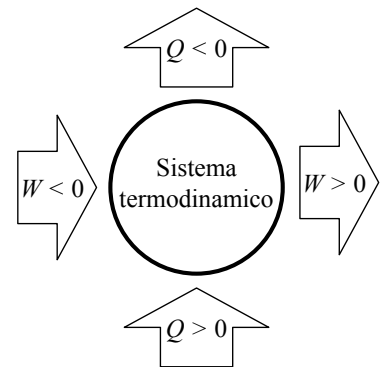


Figura 8.2: Convenzione sui segni dei flussi energetici in un sistema termodinamico, al quale si applica la nostra formulazione del primo principio.

Convezione

Nella convezione, il calore viene scambiato per mezzo di masse calde in movimento, all'interno di masse più fredde. Questa modalità è caratteristica dei fluidi, data la necessità del moto. Semplici esempi di questo fenomeno sono la pentola d'acqua sul fornello acceso e la lava-lamp.

Irraggiamento

L'irraggiamento permette lo scambio di energia per mezzo di onde elettromagnetiche, quindi senza la necessità di essere in contatto termico con un corpo. Un esempio è il Sole, che di fatto scalda la Terra mediante le radiazioni emesse. In realtà non è propriamente corretto dire che il calore viene trasmesso durante il tragitto tra i due corpi, ma l'effetto delle onde elettromagnetiche che raggiungono la destinazione è un aumento di temperatura, che assimiliamo ad uno scambio di calore.

Una legge degna di nota è la *legge di Stefan-Boltzmann* del potere emissivo di un corpo

$$\varepsilon = \sigma e T^4 \quad (8.4)$$

Questa legge esprime la quantità di energia che un corpo può emettere per irraggiamento data la sua temperatura. Nella realtà, un corpo non è in grado di emettere la totalità di questa energia e per tale motivo è presente un fattore e adimensionale, tale che $0 < e < 1$. Nel caso ideale $e = 1$ si parla di *corpo nero*. La quantità

8.5 Gas ideali

8.5.1 Leggi dei gas ideali

Prima legge di Gay-Lussac

Seconda legge di Gay-Lussac

Legge di Boyle

Legge di Avogadro

Esempio di equazione di stato.

8.5.2 Lavoro di un gas ideale

Mostreremo ora parte del principio di funzionamento di un pistone di un motore a combustione interna. Si tratta di un esempio estremamente semplificato, perché considereremo gas ideali. Sappiamo bene che il motore termico di, ad esempio, una motocicletta genera lavoro per azionare la catena e di conseguenza la ruota posteriore. Il “tempo” nel quale il motore genera lavoro è quello nel quale avviene lo scoppio, che aumenta violentemente la temperatura e la pressione dell'aria all'interno del cilindro, spingendo di fatto il pistone.

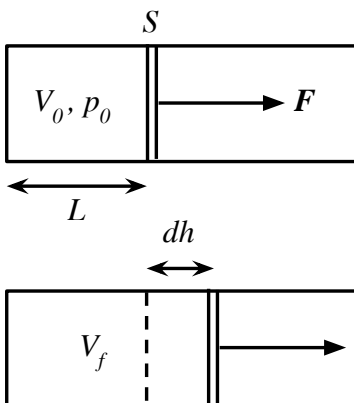


Figura 8.3: Lavoro infinitesimo di un gas all'interno di un cilindro.

Si faccia riferimento al motore in figura 8.3, costituito da un cilindro e un pistone libero di muoversi al suo interno. Inizialmente, il pistone, con sezione di area S , si trova ad una distanza L dal fondo del cilindro. L'aria all'interno ha pressione e volume iniziali p_0 e V_0 . Se l'esterno del pistone oppone resistenza, il gas del cilindro, avendo una certa pressione, esercita sulla sezione del pistone una certa forza \mathbf{F} . Immaginiamo che la resistenza esterna cessi ad un certo istante: il gas, in virtù della forza esercitata, spingerà il pistone di una certa distanza infinitesima dh . Il gas sta allora compiendo lavoro sul pistone:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = Fdh$$

la forza F non ci è molto utile attualmente. Vogliamo esprimere tutto sotto forma di variabili termodinamiche e non meccaniche. Notiamo allora che, dopo lo spostamento dh , il gas raggiungerà un certo volume V_f , che è leggermente più voluminoso di V_0 di una certa quantità dV :

$$V_f = (L + dh)S = SL + Sdh = V_0 + dV$$

Tramite semplice algebrina, possiamo dedurre che $dW = Fdh = \frac{F}{S}Sdh = pdV$. Abbiamo dunque definito il lavoro infinitesimo di un gas ideale

$$dW = pdV \quad (8.5)$$

Stiamo assumendo che, durante l'aumento di dV , la pressione rimanga costante. Se però vogliamo calcolare il lavoro totale sprigionato durante l'intera corsa del pistone, dobbiamo effettuare un'integrazione tenendo presente che la pressione varierà durante tale processo. In generale, data una certa trasformazione termodinamica τ , il lavoro totale di un gas può essere espresso nella seguente forma:

$$W_\tau = \int_\tau pdV \quad (8.6)$$

8.5.3 La teoria cinetica dei gas

È evidente che, nella termodinamica da noi affrontata, il sistema fisico preferito è quello del gas. Lo abbiamo però sempre trattato da un punto di vista macroscopico, utilizzando variabili termodinamiche (pressione, volume e temperatura), senza mai spiegare cosa in realtà accade nel microscopico, all'interno del gas stesso. È ciò che proveremo a fare ora, costruendo una teoria che spieghi ciò che osserviamo dall'esterno. Non abbiamo però altro strumento che quello della meccanica e per questo motivo i risultati che otterremo in seguito sono conosciuti sotto il nome di *teoria cinetica dei gas*.

Ipotesi e presupposti della teoria

Sottolineiamo che la teoria cinetica, per funzionare, poggia su numerosi presupposti, molti dei quali sono solo un'approssimazione della realtà.

Tuttavia, vedremo che queste ipotesi condurranno ad una spiegazione soddisfacente delle nostre osservazioni:

- Oggetto della trattazione teorica è un *gas ideale* (o perfetto) che si trova all'interno di un contenitore con volume V . La forma del contenitore non sarà rilevante, ma spesso si semplificano i calcoli se esso è un cubo.
- Il gas è ideale nel senso che esso è costituito da particelle infinitamente piccole rispetto al contenitore e alle distanze che le separano. Tali particelle sono inoltre indistinguibili l'una dall'altra (eccezion fatta per il loro stato di moto): esse hanno in particolare la medesima massa.
- Sempre il gas è ideale in quanto a bassa pressione e densità, nella misura in cui l'interazione tra le particelle è nulla: non avvengono urti e non vi sono interazioni di natura gravitazionale, elettrica o di altro genere.
- Gli unici urti non trascurabili sono quelli che avvengono tra particella e parete del contenitore ed essi sono perfettamente elastici, perché tra l'altro la massa delle particelle è infinitamente piccola rispetto a quella del contenitore e delle sue pareti. L'urto non mette dunque in moto il contenitore.

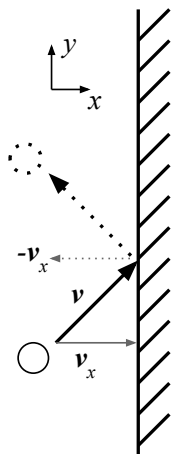


Figura 8.4: Urto tra una particella di gas e una delle pareti del contenitore.

La teoria

Coerentemente con le ipotesi espresse nel paragrafo precedente, consideriamo ora una singola particella del gas ideale, con massa m . Esso sta per urtare una parete del contenitore cubico, con lato L e di una certa massa M tale che $M \gg m$. Proiettiamo la situazione su un piano, come in figura 8.4. La particella potrebbe avere una qualsiasi velocità, che denoteremo \mathbf{v} . Consideriamo poi solo la componente orizzontale di tale vettore, ovvero \mathbf{v}_x .

Sappiamo dalle equazioni 5.9 che l'urto perfettamente elastico farà rimbalzare la particella in modo tale da rendere invariato il modulo di \mathbf{v}_x , ma invertendone il verso. Le quantità di moto finale e iniziale della particella, allora, corrispondono rispettivamente a $\mathbf{p}_{x,i} = m\mathbf{v}_x$ e $\mathbf{p}_{x,f} = -m\mathbf{v}_x$. La variazione della quantità di moto della particella è quindi

$$\Delta \mathbf{p}_x = -2m\mathbf{v}_x \hat{x}$$

Utilizziamo il versore \hat{x} per separare i moduli e per trattare oggetti scalari.

Sappiamo che la variazione $\Delta \mathbf{p}_x$ può essere interpretata come un impulso esercitato dalla parete, che quindi esercita una forza sulla particella. Ma come calcolare questa forza? È necessario trovare un intervallo temporale entro il quale l'impulso agisce, in modo da ricavare l'intensità della forza mediante la definizione 5.3. Possiamo notare che, per via degli urti perfettamente elastici, la particella continua a rimbalzare senza che la sua velocità totale v muti. Proiettando il moto sull'asse x , vedremmo il vettore \mathbf{v}_x invertirsi ciclicamente ad ogni urto con le pareti di destra e sinistra. La particella impiega allora un tempo

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x}$$

per lasciare una parete e tornarvi per urtare nuovamente. Durante questo intervallo di tempo, in media, la forza impulsiva esercitata da una parete sulla particella ha intensità

$$F_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = 2mv_x \frac{v_x}{2L} = \frac{mv_x^2}{L}$$

Tramite la definizione di pressione $p = F/S$, (con S la superficie di una parete, dunque L^2) otteniamo la pressione esercitata dalla singola particella

$$p_x = \frac{F_x}{L^2} = \frac{mv_x^2}{L^3} = \frac{mv_x^2}{V}$$

Notare che questo ragionamento vale solo per la componente x , ma lo stesso ragionamento può essere esteso a tutte le altre componenti. La relazione precedente non è ancora di nostro aiuto, perché riguarda solo una particolare particella, la cui velocità può essere differente dalle altre. Calcoliamo dunque la pressione mediante la forza totale esercitata dalle particelle sull'asse x :

$$F_{\text{tot},x} = \sum_i F_{x,i} = \sum_i \frac{mv_{x,i}^2}{L} = \frac{m}{L} \sum_i v_{x,i}^2$$

Supponendo che il gas sia costituito da N particelle, possiamo effettuare un'approssimazione riducendo le velocità ad una loro media (essendo al quadrato, sarà una velocità quadratica media).

$$p_x = \frac{F_{\text{tot},x}}{L^2} = N \frac{m \overline{v_x^2}}{V}$$

Il ragionamento effettuato per la componente x vale anche per tutte le altre. Per questo motivo, dato che la pressione è una grandezza intensiva che idealmente rimane costante in tutto il cubo, possiamo supporre che $p_x = p_y = p_z = p$. Vogliamo però ottenere un'equazione che non dipenda da una componente della velocità delle particelle, ma dalla loro velocità totale. Anche qui supponiamo di ridurre le velocità di tutte le particelle, che potrebbero differire tra loro, ad una velocità quadratica media totale. La relazione con le sue componenti spaziali è ricavabile geometricamente:

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

Le approssimazioni introdotte ci permettono anche di supporre che tutte e tre le componenti spaziali siano equivalenti tra loro, ovvero che $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$. Usando allora l'equazione della pressione:

$$p = N \frac{m}{V} \left(\frac{1}{3} \overline{v^2} \right)$$

Notiamo che compare il prodotto $m \overline{v^2}$, che corrisponde al doppio dell'energia cinetica media delle particelle, $\overline{E_K}$. Otteniamo dunque la seguente relazione:

$$pV = \frac{2}{3}N\overline{E_K}$$

$\overline{E_K}$ corrisponde ad una singola particella. Allora possiamo concludere che la somma di tutte le energie cinetiche medie delle particelle del gas costituiscono l'energia interna del gas stesso: $E_{\text{int}} = U = N\overline{E_K}$. La teoria ci ha dunque permesso dunque di unire le seguenti relazioni:

$$pV = Nk_B T = \frac{2}{3}U$$

In particolare, possiamo notare che

$$\overline{E_K} = \frac{3}{2}k_B T$$

che esprime la relazione tra energia cinetica media di una particella e la temperatura. In un certo senso, la temperatura è l'energia cinetica media delle particelle.

Conclusioni

Il risultato più importante della teoria cinetica è l'unione tra il mondo macroscopico osservato sperimentalmente e il mondo microscopico modellato teoricamente. In particolare:

- La teoria cinetica offre una spiegazione dell'origine della pressione esercitata da un gas in un contenitore. L'origine è proprio dovuta alla continua collisione delle particelle con le pareti del contenitore.
- La teoria cinetica mostra che la temperatura è strettamente legata all'energia cinetica media delle particelle. Intuitivamente, la temperatura è interpretabile proprio come l'agitazione media delle particelle, per l'appunto l'energia del loro movimento.
- La teoria cinetica costruisce un modello generalizzabile a sistemi di costituenti non necessariamente monoatomico-puntiformi, come approfondito nella prossima sezione.

Gradi di libertà

Nell'equazione relativa all'energia cinetica media, il fattore $1/2$ deriva dalla definizione di energia cinetica, ma il numero 3 invece? Esso dipende dal numero di dimensioni entro le quali le particelle possono muoversi, ovvero i *gradi di libertà*. Se compissimo lo studio da capo, costringendo però le particelle a giacere su un piano, i gradi di libertà sarebbero solo due e il fattore moltiplicativo dell'energia cinetica media sarebbe diverso. Ciò è dovuto al fatto che ogni grado di libertà permette alla particella di muoversi su un'altra dimensione e quindi di aggiungere un contributo in più alla propria energia cinetica. In generale, ogni grado di libertà comporta un contributo energetico di $\frac{1}{2}k_B T$ e dunque, per l gradi di libertà, si ottiene

$$\overline{E_K} = \frac{l}{2} k_B T \quad (8.7)$$

I gradi di libertà possono crescere all'aumentare della complessità della particella di gas. Oltre alle tre dimensioni, una molecola biatomica (quindi non puntiforme come abbiamo sempre supposto finora) può anche ruotare su due assi⁶; i due atomi possono poi vibrare intorno alla loro “sede” nella molecola, dunque anche questa energia deve essere presa in considerazione. In totale, una molecola biatomica ideale può avere $l = 6$ gradi di libertà.

8.6 Trasformazioni fondamentali

Questa sezione è dedicata ad analisi più approfondite sulle trasformazioni termodinamiche fondamentali, ovvero trasformazioni molto semplici da trattare mediante gli strumenti di termodinamica finora mostrati. Da un certo punto di vista, queste trasformazioni rappresentano le modalità fondamentali con le quali un sistema può muoversi sul piano pV . Un motivo della loro semplicità risiede nel fatto che, in ogni trasformazione, un qualche parametro termodinamico rimane sempre costante.

Supporremo che queste trasformazioni riguarderanno un gas ideale contenuto in un cilindro. A seconda del caso di studio, il cilindro potrà variare il proprio volume interno grazie ad un pistone mobile, oppure sarà adiabatico. Le trasformazioni saranno inoltre *quasistatiche reversibili*: ad ogni istante, il sistema è in uno stato di equilibrio (il passaggio dall'uno all'altro è sufficientemente lento per raggiungere tale scopo) e inoltre è sempre possibile ripercorrere la trasformazione, e ogni suo tratto intermedio, in senso inverso. Le leggi che deriveremo non saranno pertanto applicabili alla lettera a trasformazioni reali di gas reali, ma costituiranno solo una buona approssimazione delle osservazioni sperimentali.

8.6.1 Isocore

Queste trasformazioni traggono il loro nome per via del loro volume, che rimane sempre costante, cioè $dV = 0$. Segue in particolare che $dW = pdV = 0$, ricordando la definizione di lavoro di un gas ideale. D'altronde, il volume del gas non cambia e quindi nessuna parte del suo contenitore viene mossa.

Dal primo principio vale $dU = dQ$. Ciò significa che avviene solo scambio di calore. Possiamo supporre che il gas, durante la trasformazione, vari la propria temperatura in relazione al calore scambiato secondo un certo *calore specifico a volume costante* c_V .

$$dQ = nc_V dT \quad (8.8)$$

Da cui $dU = nc_V dT$. Come aveva previsto Joule, per questa particolare trasformazione abbiamo individuato una relazione che lega energia interna

⁶Due assi sono sufficienti a coprire tutte le rotazioni nelle tre dimensioni

e (variazione di) temperatura di un gas. Ricordando poi la teoria cinetica, $U = \frac{3}{2}nRT$. È facile allora scoprire che, dati l gradi di libertà per un gas ideale,

$$c_V = \frac{l}{2}R$$

per gas monoatomici in tre dimensioni, vale perciò $c_V = \frac{3}{2}R$.

8.6.2 Isobare

In queste trasformazioni, è la pressione a rimanere costante. Calcolarne il lavoro è molto semplice. Si evince infatti che la definizione si riduce ad una semplice moltiplicazione: $dW = pdV$, da cui $W = p\Delta V$.

Dalle trasformazioni isocore, abbiamo scoperto un legame tra variazione di energia interna del gas e variazione di temperatura. Già per definizione legammo in una funzione queste due quantità. In particolare, stabilimmo che U è una funzione di stato, la cui variazione non dipende dal percorso ma dagli stati iniziale e finale. Siamo allora legittimati a impiegare la relazione $dU = nc_V dT$ trovata nelle isocore.

Rimane da trovare il calore scambiato durante una isobara. Anche qui possiamo inventare una nuova costante, un *calore specifico a pressione costante* c_p , col quale legare calore e intervallo di temperatura:

$$dQ = nc_p dT$$

come per c_p , ci piacerebbe conoscere la sua vera forma. Notiamo che differenziando i membri della legge di Avogadro, $d[pV] = d[nRT]$, ci ritroveremo con la relazione $pdV = nRdT$, da cui scopriamo che $dW = nRdT$. Dal primo principio $dU = dQ - dW$, possiamo allora scoprire che $nc_V dT = nc_p dT - nRdT$, da cui la *relazione di Mayer*⁷

Relazione di Mayer

$$c_p - c_V = R \quad (8.9)$$

La relazione ci permette di esprimere c_p per gas monoatomici in tre dimensioni: $c_p = c_V + R = \frac{5}{2}R$. Osserviamo infine che

$$c_p > c_V \quad (8.10)$$

È facile spiegare intuitivamente il perché di questa disuguaglianza: a parità di calore fornito ad una certa quantità di gas, è maggiore la differenza di temperatura registrata dal gas a volume costante, perché esso non disperde il calore fornito in lavoro, come invece accade per il gas a pressione costante (in quest'ultimo, possiamo immaginare che il contenitore possieda un pistone mobile. Fornendo calore al gas, la pressione può rimanere costante a costo di muovere il pistone).

⁷Come lo studentato.

Per finire, tenete bene a mente questa definizione:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (8.11)$$

il motivo: ci tornerà utile in una delle prossime trasformazioni.

8.6.3 Isoterme

Come si evince dal nome, queste trasformazioni avvengono a temperatura costante. Come già visto con la legge di Boyle, per il gas ideale vale $pV = \text{cost.} = nRT$. Per questo motivo, $dT = 0$, da cui $dU = nc_V dT = 0$ (come prima, esprimiamo la variazione di energia interna sfruttando il calore specifico a volume costante). Sempre in accordo con le precedenti osservazioni, se la temperatura non varia allora anche l'energia interna del gas rimane costante. Dal primo principio segue allora

$$dQ = dW$$

da cui $dQ = dW = pdV = nRT \frac{dV}{V}$ per definizione di lavoro di un gas ideale. Segue dunque che:

$$Q = W = \int_{V_i}^{V_f} nRT \frac{dV}{V} = nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \quad (8.12)$$

Considerazioni

Si noti che, per ottenere il calore scambiato, non ha senso inventarsi, come per le altre trasformazioni, un calore specifico a temperatura costante c_T , perché la sua eventuale definizione $dQ = nc_T dT$ non funzionerebbe: $dT = 0$, da cui concluderemmo erroneamente che $dQ = 0$! In verità, in una trasformazione isoterma è possibile mantenere una temperatura costante del gas a patto di convertire tra loro calore e lavoro. Se ad esempio si riceve lavoro dall'ambiente esterno, esso viene contemporaneamente dissipato in calore in uscita, altrimenti l'energia interna del gas (quindi la sua temperatura) aumenterebbe.

8.6.4 Adiabatiche

Se nelle trasformazioni isocore non si osserva lavoro in azione, nelle adiabatiche non si registra invece scambio di calore: $dQ = 0$, da cui, sempre per il primo principio, $dU = -dW$. Anche qui possiamo utilizzare la scorciatoia di c_V per concludere che $dU = nc_V dT$.

Dalla relazione $dU = -dW$ possiamo trarre conclusioni interessanti. Possiamo infatti esprimerla come $nc_V dT = -pdV$. Proseguendo,

$$\begin{aligned}
nc_V dT &= -pdV \\
nc_V dT &= -nRT \frac{dV}{V} \\
\frac{dT}{T} &= -\frac{R}{c_V} \frac{dV}{V}
\end{aligned}$$

notiamo che l'algebrina e la relazione di Mayer ci portano a scoprire che $R/c_V = (c_p - c_V)/c_V = \gamma - 1$ (ricordate la 8.11?). Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{T} &= -(\gamma - 1) \frac{dV}{V} \\
\int_i^f \frac{dT}{T} &= \int_i^f -(\gamma - 1) \frac{dV}{V} \\
\ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) &= -(\gamma - 1) \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \\
T_f V_f^{\gamma-1} &= T_i V_i^{\gamma-1}
\end{aligned}$$

vedere un prodotto che rimane sempre costante solletica le meningi dei fisici. Dall'ultima equazione si conclude che

$$TV^{\gamma-1} = \text{cost.} \quad (8.13)$$

Lasciamo al lettore l'esercizio di ricavare le altre espressioni di questa relazione (ovvero, utilizzando le altre variabili termodinamiche).

8.6.5 Ancora sulle trasformazioni termodinamiche

Di seguito riportiamo alcune considerazioni sulle trasformazioni introdotte.

Tabella riassuntiva

Sappiamo bene che le tabelle riassuntive piacciono a tutti quando si parla di leggi da memorizzare.

	Isocora $\Delta V = 0$	Isobara $\Delta p = 0$	Isoterma $\Delta T = 0$	Adiabatica $Q = 0$
ΔU	$nc_V \Delta T$	$nc_V \Delta T$	0	$nc_V \Delta T$
Q	$nc_V \Delta T$	$nc_p \Delta T$	$nRT \ln(V_f/V_i)$	0
W	0	$nR \Delta T = p \Delta V$	$nRT \ln(V_f/V_i)$	$-nc_V \Delta T$

Trasformazioni composte e cicliche

Combinando insieme le trasformazioni semplici viste fino ad ora, è possibile comporre trasformazioni più complesse. Ad esempio, un gas in certe condizioni di pressione e volume può passare ad un altro stato mediante una adiabatica, seguita da una isoterma e infine da una isobara.

Tra tutte queste trasformazioni “composte”, quelle più interessanti sono forse le *trasformazioni cicliche* (o cicli termodinamici), nelle quali, data una coordinata termodinamica, il sistema ritorna nello stesso punto dopo aver compiuto alcune trasformazioni. Seguendo i nostri presupposti, possiamo concludere che la variazione di energia interna dei sistemi che subiscono trasformazioni cicliche non varia per definizione:

$$\Delta U_\tau = 0 \quad \forall \tau \text{ ciclica}$$

in quanto quest'ultima dipende unicamente dallo stato.

Avremo modo di osservare che le trasformazioni cicliche costituiscono il principio di funzionamento delle *macchine*.

Reversibilità e irreversibilità

Abbiamo affermato che le leggi che descrivono le trasformazioni fondamentali valgono solamente nel caso ideale di trasformazioni *reversibili*.

Trasformazioni reversibili

Un processo si dice reversibile se esso, in qualche modo, è invertibile in modo tale da riportare l'universo allo stato precedente.

Prendiamo come esempio

8.7 Macchine

8.7.1 Rendimento

8.7.2 Ciclo Diesel e ciclo di Otto

Esaminiamo un esempio reale di ciclo termodinamico, impiegato in una classe diffusa di motori termici: il ciclo Diesel, il cui principio di funzionamento consiste nel portare la miscela di miscela e aria a pressione elevata in tempi brevi per generare lo scoppio. Tale ciclo è illustrato sul piano pV nella figura 8.5, anche se in realtà, come vedremo, si tratta solo di una idealizzazione. Considereremo infatti molti tratti del ciclo come trasformazioni quasistatiche. Nel ciclo, il gas che subisce queste trasformazioni è la miscela di aria, combustibile (la cosiddetta miscela) ed eventuali residui di scarico, combusti o meno.

Il ciclo diesel è costituito dai seguenti tratti, o “tempi”:

1. OA è una fase di aspirazione della miscela. Si tratta di una trasformazione isobara. Qui il pistone si abbassa, aumentando il volume della camera di combustione.
2. AB è una adiabatica, che corrisponde ad una compressione forte abbastanza da innescare, in B , l'esplosione della miscela. Ovviamente non viene scambiato calore.

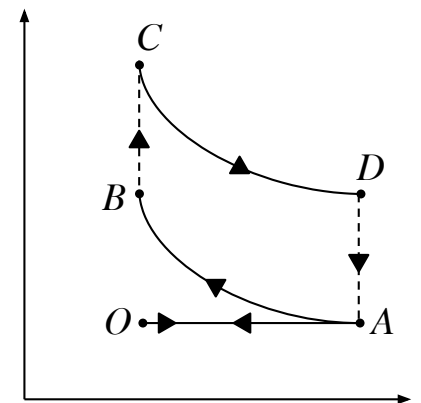


Figura 8.5: Ciclo diesel teorico.

3. BC è la fase di esplosione. Si tratta di un fenomeno più complesso di quello che i nostri strumenti di termodinamica possano descrivere. Per questo assumiamo che tale fase non sia quasistatica, essendo tra l'altro molto rapida. Questo tratto è quello che immette calore nel cilindro, permettendo di alzare violentemente la pressione (e la temperatura) a volume idealmente costante.
4. CD è una seconda adiabatrica, nella quale il pistone viene spinto in seguito alla precedente esplosione. Qui viene compiuto lavoro dal motore.
5. DA è un'altra fase non quasistatica, perché dopo le precedenti due fasi violente il pistone termina la sua corsa; pressione e temperatura crollano vertiginosamente.
6. AO chiude il ciclo, scaricando i gas combusti e, permettendo di preparare il motore all'aspirazione di miscela successiva.

Calcoliamo l'efficienza di questo ciclo. Innanzitutto, possiamo notare che le fasi OA e AO , sommandosi, si annullano e dunque non le considereremo. Possiamo utilizzare la definizione di efficienza $\eta = 1 - |Q_c|/Q_a$; serve dunque calcolare i calori scambiati nel ciclo. Dal momento che AB e CD sono adiabatiche, rimangono solo i tratti BC e DA . Abbiamo detto che queste fasi non sono quasistatiche, ma possiamo notare che avvengono dei "salti" di temperatura simili ad una isocora. Possiamo allora supporre che valgano le leggi finora studiate:

$$Q_a = Q_{BC} = \Delta U_{BC} = nc_V(T_B - T_C) > 0 \quad Q_c = Q_{DA} = nc_V(T_A - T_D) < 0$$

da cui

$$\eta_{\text{Diesel}} = 1 - \frac{|T_A - T_D|}{T_C - T_B}$$

ricordiamo, in condizioni ideali. Questa efficienza, secondo analisi più approfondite, potrebbe raggiungere un valore pari a $\eta \simeq 0.6$.

Nella realtà, il ciclo Diesel come appena mostrato è ben lontano da quelli che vengono solitamente progettati. In figura 8.6 viene mostrato il *ciclo Otto*, molto simile a quello Diesel e dal quale traggono ispirazione i maggiori tipi di motori termici attuali. Si deve essere coscienti del fatto che la forma in figura subisce numerosissime fluttuazioni sul piano pV e l'intera trasformazione è ovviamente irreversibile. Tutto ciò spiega il crollo drastico dell'efficienza prevista teoricamente.

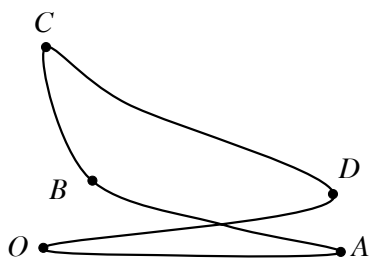


Figura 8.6: Rappresentazione approssimativa del ciclo di Otto in condizioni reali. Sono evidenziate anche le coordinate teoriche corrispondenti a quelle presenti in figura 8.5.

8.8 Principio secondo

A: “Quindi non è possibile nemmeno teoricamente?”

B: “Esattamente.”

A: “Per questo secondo me è *mind-blowing*.”

Lezione di termodinamica,
a.a. 2023/2024

Dopo aver introdotto il concetto di macchina e della sua efficienza, è legittimo chiedersi se è possibile progettare *nella realtà* la macchina perfetta, che cioè converte tutta l'energia (in particolare calore) in ingresso interamente in lavoro in uscita, con efficienza unaria (100%). Operando ciclicamente, per una macchina dovrebbe seguire dal primo principio $\Delta U = Q - W$ la conclusione $\Delta U = 0$ e allora

$$Q = W$$

La teoria sembrerebbe essere fondata: lavoro e calore sono convertibili, cioè spendendo calore otteniamo lavoro e possiamo tra l'altro *invertire* il processo, perché l'uguaglianza non ci impone un verso preferenziale e noi siamo tanto furbi da costruire macchine in grado di funzionare al contrario. Per esperienza, tuttavia, è evidente che non è così, cioè se spendiamo una certa quantità di calore Q e la trasformiamo in lavoro, sembra impossibile, mediante quel lavoro, riottenere tutto il calore Q iniziale. Per fare un esempio, potremmo immaginare di costruire un mulino ad acqua in questo modo: sappiamo che tutti i mulini sono mossi dalla corrente e in tal modo producono lavoro; potremmo dunque far sì che il mulino alimenti una pompa che riporta l'acqua in cima al mulino, facendolo muovere indefinitamente. Assumendo che il dispositivo sia costruito in maniera eccellente, riducendo quanto possibile dispersione e attriti, in realtà questa macchina è destinata a fermarsi dopo un certo intervallo di tempo⁸.

Potremmo ribattere affermando che la realtà ci pone problemi come attrito e dissipazioni di vario genere. Ciò che è sconcertante è l'impossibilità non solo *reale* di realizzare macchine simili, ma anche *teorica*. Questa conclusione, come vedremo, fonda le radici nel secondo principio, che a sua volta poggia sulla seguente evidenza:

il calore non fluisce mai spontaneamente da un corpo ad uno più caldo.

8.8.1 Enunciati

Esistono due enunciati celebri del secondo principio della termodinamica⁹. In qualità di principi, essi sono dati per veri sulla base dell'esperien-

⁸Consigliamo di dare un'occhiata alla sezione dedicata al moto perpetuo, negli approfondimenti di questo capitolo.

⁹Anche se storicamente non fu così, trattiamo prima l'attuale forma del secondo principio della termodinamica, permettendoci di chiarire le sezioni successive.

za, ma è comunque possibile dimostrare che essi si riferiscono alla stessa proprietà della natura.

Enunciati del secondo principio della termodinamica

- **Enunciato di Kelvin-Planck**

È impossibile realizzare una macchina il cui unico risultato sia quello di trasformare calore, a partire da una sola sorgente, interamente in lavoro.

- **Enunciato di Clausius**

È impossibile realizzare un processo il cui unico risultato sia quello di trasferire calore da un corpo ad uno più caldo.

Una delle proprietà della natura che il secondo principio sottointende è il fatto che ogni macchina termica, qualsiasi essa sia (anche tra quelle non ancora inventate!) deve sempre operare tra almeno due sorgenti affinché essa possa funzionare. Inoltre, da come si evince dall'enunciato di Kelvin-Planck, è impossibile costruire macchine con rendimento pari a 1.

8.8.2 Equivalenza degli enunciati

Dimostreremo che i due enunciati sono equivalenti nel seguente modo: indicando con KP l'enunciato di Kelvin-Planck e con C quello di Clausius, concluderemo che $KP \Leftrightarrow C$ mostrando che $\overline{KP} \Leftrightarrow \overline{C}$, cioè negando uno necessariamente si deve negare anche l'altro. Di volta in volta considereremo macchine che disobbediscono ai due principi, che chiameremo sempre \overline{KP} e \overline{C} , e che operano tra due serbatoi 1 e 2 a temperature $T_1 < T_2$.

Dimostrazione: $\overline{KP} \Rightarrow \overline{C}$

Cominciamo mostrando che $\overline{KP} \Rightarrow \overline{C}$, facendo riferimento alla figura 8.7. Consideriamo allora la macchina \overline{KP} che preleva una certa quantità di calore $Q_1 > 0$ da 1 e lo converte interamente in lavoro W , alla facciaccia di Kelvin e Planck.

$$Q_1 = W$$

Il lavoro W viene poi impiegato per alimentare una seconda macchina che cede il calore prodotto Q_2 alla sorgente 2. Questa macchina può essere progettata, per esempio, sulla base di trasformazioni isoterme, oppure dissipando il lavoro meccanico in attrito, che genera sempre calore. Allora

$$Q_2 = -W$$

Ma allora, se uniamo le macchine, ne otteniamo una che nel complesso preleva del calore Q_1 dalla sorgente fredda 1 e cede quella stessa quantità di calore alla sorgente calda 2, senza produrre altri risultati. Questa macchina composta è proprio \overline{C} .

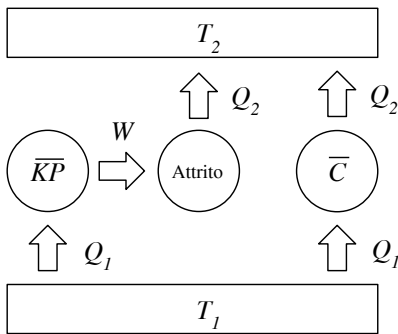


Figura 8.7: Dimostrazione dell'implicazione $\overline{KP} \Rightarrow \overline{C}$.

Dimostrazione: $\overline{C} \Rightarrow \overline{KP}$

Si osservi la figura 8.8. Supponiamo di avere una macchina \overline{C} che trasferisce calore $Q > 0$ da 1 verso 2. Il calore in entrata nella macchina è $Q_1 = Q$ mentre quello in uscita è $Q_2 = -Q$. Consideriamo poi una seconda macchina M , progettata per prelevare del calore $Q^* > Q$ dalla sorgente calda 2, produrre lavoro W e cedere calore $Q_c = -Q$ alla sorgente fredda 1. Questo è ammissibile operando sul rendimento $\eta_M = 1 - |Q_c|/Q^*$ di M . Se si uniscono \overline{C} e M , si ottiene una macchina che nel complesso assorbe calore $Q^* - Q$ dalla sorgente calda 2, produce lavoro W ma che preleva per poi cedere di nuovo lo stesso calore Q alla sorgente 1, come se non esistesse. Dunque $W = Q^* - Q$. La macchina composta corrisponde allora a \overline{KP} .

Si potrebbe ribattere sostenendo che \overline{KP} può funzionare perché vi è comunque scambio di calore Q con la sorgente fredda, anche se questo calore viene sempre ceduto e prelevato ripetutamente, ma comunque questo ragionamento non regge. Per convincerci di ciò, basta pensare ad un'altra macchina composta X che incorpora \overline{KP} (costruita precedentemente) e la sorgente 1, mentre la 2 rimane esterna. Non vediamo la sorgente 1, in quanto componente della macchina X che opera solamente con la sorgente 2. Allora anche X è analoga ad una macchina di tipo \overline{KP} .

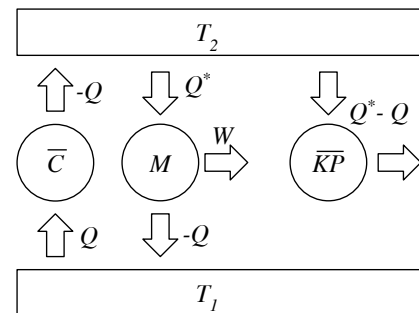


Figura 8.8: Dimostrazione dell'implicazione $\overline{C} \Rightarrow \overline{KP}$.

8.9 Esperienza di Carnot

Nel 1824, l'ingegnere francese Sadi Carnot pubblicò il *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance*. Trascurando il titolo altisonante, la questione che egli affrontò nell'opera scaturì dalla nascente competizione alimentata dalla rivoluzione industriale: In quali condizioni una macchina termica ha il rendimento massimo, indipendentemente da come essa viene costruita? Come vedremo, la potenza di questa domanda (e della sua risposta) sta proprio nell'indipendenza dalla tecnologia con la quale la macchina funziona. Non importa se essa è il motore di una monoposto di Formula 1, lo scramjet del Boeing X-43 o un altro metodo di propulsione di qualche civiltà aliena a noi sconosciuta.

8.9.1 Ciclo e macchina di Carnot

8.9.2 Teorema di Carnot

Teorema di Carnot

Il rendimento di una qualsiasi macchina termica \mathcal{M} (reversibile o non) che opera tra due temperature costanti $T_1, T_2 : T_1 > T_2$ è limitato superiormente dal rendimento della macchina di Carnot \mathcal{C} che lavora tra le medesime temperature.

$$\eta_{\mathcal{M}} \leq \eta_{\mathcal{C}} \quad \text{per } T_1 > T_2 \quad (8.14)$$

Inoltre, tutte le macchine reversibili che operano tra le medesime temperature hanno lo stesso rendimento, che equivale a quello della corrispondente macchina di Carnot. Se \mathcal{R} è una macchina reversibile, allora:

$$\eta_{\mathcal{R}} = \eta_{\mathcal{C}} \quad (8.15)$$

Ricordiamo che $\eta_{\mathcal{C}} = 1 - T_2/T_1$.

8.10 Esperienza di Clausius

Un ulteriore personaggio degno del titolo di main character della termodinamica è il tedesco Rudolf Clausius, il quale estese gli studi di Carnot. Illustreremo il teorema di Clausius, che aprirà la strada ad uno degli ultimi concetti di questi appunti: l'entropia.

8.10.1 Teorema di Clausius

Abbiamo visto che una delle relazioni ottenute da Carnot è la somma di rapporti $Q_1/T_1 + Q_2/T_2 \leq 0$. Ciò vale per tutte le macchine, reversibili o meno, che operano tra due sorgenti 1 e 2 tali che $T_1 < T_2$. Avere però solamente due sorgenti è alquanto limitante e irrealistico, perché nella realtà le macchine operano su cicli ben più complessi, fluttuando tra svariati valori di temperatura, come se operassero tra infinite sorgenti. Clausius ebbe così la brillante idea di generalizzare le conclusioni di Carnot per un ciclo termodinamico qualsiasi.

Si consideri il ciclo motore mostrato in figura. Esso attraversa un'infinità di temperature differenti. Immaginiamo di approssimare la curva di questo ciclo mediante piccole trasformazioni adiabatiche e isoterme. Se estendiamo queste piccole trasformazioni, otterremo una griglia che suddivide l'area interna del nostro ciclo in tanti piccoli cicli di Carnot. Per il ciclo i -esimo, vale allora $Q_{1,i}/T_{1,i} + Q_{2,i}/T_{2,i} \leq 0$. Sommando i rapporti di tutti i cicli otteniamo

$$\sum_i \left(\frac{Q_{1,i}}{T_{1,i}} + \frac{Q_{2,i}}{T_{2,i}} \right) \leq 0$$

Questa relazione non ci dice ancora molto di straordinario, anche se possiamo notare due fatti: i tratti adiabatici non coinvolgono scambi di calore per definizione e dunque possiamo ignorarli nel nostro calcolo, perché il rapporto calore-temperatura è sempre nullo durante questo tipo di trasformazione; esistono poi molti tratti isotermi che vengono percorsi in versi opposti da cicli adiacenti. Ciò accade nei tratti interni alla curva originale e non introducono contributi calorici. Gli unici tratti di nostro interesse sono quelli delle trasformazioni isoterme ai bordi del ciclo. Possiamo allora riformulare la somma unendo solamente i rapporti di questi tratti. Supponendo che il tratto j -esimo sia una isoterma che costituisce parte del bordo della curva originale, vale $\sum_j Q_j/T_j \leq 0$. Più elegantemente, passando all'infinitesimo si ottiene la seguente disuguaglianza

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad (8.16)$$

che è proprio la tesi del teorema di Clausius. L'integrale prende il nome di *integrale di Clausius*. Il caso particolare dell'uguaglianza vale solamente per trasformazioni reversibili.

8.10.2 Differenza di entropia

Si consideri una trasformazione termodinamica *reversibile* qualsiasi. Per ipotesi di reversibilità, l'integrale di Clausius calcolato sulla curva τ di tale trasformazione nel piano pressione-volume è nullo.

$$\oint_{\tau} \frac{dQ}{T} = 0$$

Selezioniamo due punti, A e B , distinti su questo ciclo. Scomponiamo dunque l'integrale nei due percorsi, sempre reversibili, α e β .

$$\int_{A,\alpha}^B \frac{dQ}{T} + \int_{B,\beta}^A \frac{dQ}{T} = 0$$

Trattandosi di un ciclo reversibile, vale la proprietà antisimmetrica dell'integrale. Giungiamo dunque alla seguente conclusione:

$$\int_{A,\alpha}^B \frac{dQ}{T} = \int_{A,\beta}^B \frac{dQ}{T}$$

Dunque, qualsiasi sia il percorso tra A e B , l'uguaglianza precedente vale sempre per percorsi reversibili. Vi è dunque una dipendenza di una certa quantità dai soli stati iniziale e finale della trasformazione. Definiamo dunque, in modo simile all'energia potenziale studiata in meccanica, la *differenza di entropia tra due stati termodinamici*.

$$\Delta S_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{A,\text{rev}}^B \frac{dQ}{T} \quad (8.17)$$

8.10.3 Il teorema dell'entropia

8.11 Approfondimenti

8.11.1 Espansione libera dei gas

8.11.2 Oltre la termodinamica: micro- e macro-stato

8.11.3 Il terzo principio

Ebbene sì: esiste un terzo principio della termodinamica che è stato ignorato in queste lezioni. Esso introduce concetti già avanzati, ma, in alcune delle sue formulazioni equivalenti, rimane comunque estremamente affascinante. In breve, questo principio afferma che non esiste temperatura più bassa dello zero assoluto e che quest'ultimo non è neppure raggiungibile. Ecco una delle formulazioni:

Non esiste processo in grado portare la temperatura di un corpo allo zero assoluto tramite un numero finito di passi.

Analogamente alle dimostrazioni viste per l'equivalenza degli enunciati del secondo principio, anche il terzo può essere dimostrato con un esperimento mentale che si basa sullo stesso principio di funzionamento del frigorifero:

Supponiamo di avere un insieme di oggetti a 0 K e un oggetto X da raffreddare e a temperatura superiore. Mettiamo X in contatto termico con uno degli oggetti a 0 K. Sappiamo dalla calorimetria che i due corpi raggiungeranno l'equilibrio termico e avranno una temperatura uguale intermedia alle loro iniziali. Possiamo allora ripetere il raffreddamento con X e un altro oggetto a 0 K, ma non raggiungeremo mai lo zero assoluto con un numero finito di contatti, perché l'equilibrio termico viene raggiunto ad una temperatura che è sempre compresa tra 0 K (escluso) e quella di X raffreddato, che è maggiore di 0 K.

Purtroppo per noi, non è ancora stato trovato un oggetto a 0 K¹⁰, né tantomeno sono state trovate tecniche di raffreddamento in grado di raggiungere lo zero assoluto, anche se siamo stati in grado di avvicinarci ad esso nell'ordine di una frazione di Kelvin.

8.11.4 Il moto perpetuo

8.11.5 La questione del calorico

La fisica poggia su un substrato filosofico molto sofisticato e sviluppato, dal quale hanno origine, per esempio, molte interpretazioni della realtà

¹⁰Sono molti gli oggetti leggendari come questo in fisica: la massa infinita, il corpo nero, il piano privo di attrito...

che viene studiata. Una questione che segnò le ricerche nel campo della termodinamica fu quella di definire e chiarire le ragioni d'essere del *calore*, ovviamente avanzando ipotesi secondo il metodo scientifico.

Prima di Joule, si parlava in letteratura di *calorico*, qualcosa che veniva interpretato come un fluido vero e proprio, dotato di esistenza propria e in grado di muoversi da corpo a corpo, da sorgenti più calde a quelle più fredde. La temperatura veniva poi definita sulla base della concentrazione di calorico in un certo corpo, anche se calore e temperatura rimanevano in molti casi concetti confusi, come a volte capita anche nell'esperienza.

Grazie agli esperimenti di Joule, la fisica comprese che il calore rappresenta in realtà una forma di energia. Nell'esperimento del mulinello, l'innalzamento di temperatura dell'acqua è dovuto al lavoro compiuto da una massa in caduta. Secondo l'interpretazione precedente, del calorico sarebbe comparso dal nulla, quando invece viene semplicemente osservata una trasformazione di lavoro in calore.

Macchine

I cicli termodinamici caratterizzano i principi di funzionamento delle *macchine*. Il motore due-tempi dell'Husqvarna sotto casa è una macchina; ma lo è anche un freezer. Di fatto, la termodinamica distingue due categorie principali di macchine sulla base del verso con il quale avvengono gli scambi di energia:

- **Macchine termiche:** per queste macchine valgono

$$W, Q > 0$$

ovvero compiono lavoro al prezzo di un consumo di calore.

- **Macchine frigorifere:** vale

$$W, Q < 0$$

ossia esse dissipano calore al prezzo di un lavoro esterno.

Notare che la classificazione parte dal segno del lavoro, per poi dedurre il flusso di calore mediante la definizione di trasformazione ciclica combinata alla prima legge della termodinamica $\Delta U = 0 = Q - W$.

Rendimento

Sappiamo bene che è necessario un costo in termini energetici (dunque monetari, ambientali e così via nella nostra vita economica) per far funzionare una macchina e ottenere da essa i risultati attesi. Dal motore dell'auto è desiderabile ottenere il massimo della distanza percorribile e della potenza sprigionabile partendo dalla benzina pagata al pieno precedente. Ma come valutare la bontà di un motore?

Consideriamo una macchina termica, ovvero il motore dell'auto. Il suo scopo è produrre lavoro, cioè trasmettere forza motrice alle ruote. Per far funzionare una macchina termica è necessario fornire calore. Dunque, possiamo valutare l'*efficienza* del motore dell'auto secondo il seguente rapporto:

$$\eta = \frac{W}{Q_A} \quad (8.18)$$

Dove Q_A rappresenta il calore assorbito dalla macchina, o l'energia pagata e immessa nell'auto. Possiamo riformulare la definizione di rendimento notando che, durante il funzionamento del motore, parte del calore assorbito Q_A viene sì trasformato in lavoro, ma anche in altre forme, che racchiuderemo nel calore totale ceduto Q_C . Vale dunque:

$$\Delta U = 0 = Q - W = Q_A + Q_C - W$$

$$W = Q_A + Q_C$$

da cui riformuliamo l'efficienza:

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_A|} \quad (8.19)$$

Notare che, per definizione di macchina termica, il calore ceduto possiede segno negativo.

Utopie

Chiaramente, senza l'intervento di agenti esterni, non è possibile ottenere dal nostro motore più lavoro di quanto calore è stato fornito inizialmente

$$Q_A < W$$

perché, come sappiamo dalla meccanica, l'energia si conserva e non è possibile dunque crearne "magicamente". È però lecito chiedersi se è possibile ottenere qualcosa come questo:

$$Q_A \stackrel{?}{=} W$$

ovvero costruire un motore completamente efficiente. Sempre dalla meccanica, possiamo ipotizzare che, anche solo teoricamente e in situazioni ideali, ciò sarebbe ammesso, perché i sistemi meccanici sono *reversibili*, ovvero è sempre possibile riportarli allo stato iniziale dopo un certo fenomeno. Non aggiungiamo altro per riservare la sorpresa ai lettori.

In ogni caso, un buon motore dovrebbe produrre quanto più lavoro rispetto ad un quantitativo basso di calore assorbito:

Minimo sforzo, massima resa. Spendì poco, ottieni molto.

Esperienza di Carnot

Qual è la macchina più efficiente in assoluto? Oppure, in quali condizioni una macchina può ottenere il rendimento massimo? Queste sono domande che Carnot si pose ai suoi tempi.

Esperienza di Clausius

Entropia

Supponiamo di avere un ciclo reversibile γ qualsiasi. Essendo reversibile, possiamo concludere che

$$\oint_{\gamma} \frac{dQ}{T} = 0$$

Selezioniamo due punti distinti su questo ciclo, A e B e scomponiamo l'integrale di Clausius nei due percorsi α e β :

$$\int_{A,\alpha}^B \frac{dQ}{T} + \int_{B,\beta}^A \frac{dQ}{T} = 0$$

Trattandosi di un ciclo reversibile, vale la proprietà antisimmetrica dell'integrale. Giungiamo dunque alla seguente conclusione:

$$\int_{A,\alpha}^B \frac{dQ}{T} = \int_{A,\beta}^B \frac{dQ}{T}$$

Dunque, qualsiasi sia il percorso tra A e B , luguaglianza precedente vale sempre per percorsi reversibili. Vi è dunque una dipendenza di una certa quantità dai soli stati iniziale e finale. Definiamo dunque, come abbiamo fatto per l'energia potenziale, la *differenza di entropia tra due stati termodinamici*:

$$\Delta S_{AB} = S_B - S_A \stackrel{\text{def}}{=} \int_{A,\text{rev}}^B \frac{dQ}{T}$$

L'entropia è a tutti gli effetti una funzione di stato. Possiamo inoltre ricavare le seguenti osservazioni:

- La somma dell'entropia di due sottosistemi corrisponde all'entropia del sistema complessivo. Da questa osservazione è possibile supporre che l'universo abbia una propria entropia, derivante da tutti i suoi sottosistemi, conosciuti e non.
- Si tratta di una grandezza estensiva. Ha significato solo se si considera l'intero sistema.
- Per calcolare le differenze di entropia nelle trasformazioni reversibili, è sufficiente essere furbi utilizzando le trasformazioni reversibili più comode dal punto di vista computazionale, perché l'entropia è una funzione di stato e non dipende dal percorso.

Il teorema dell'entropia

Consideriamo due trasformazioni termodinamiche che collegano due punti A e B descritti da coordinate termodinamiche. Tuttavia, il primo, α , è irreversibile, mentre β , il secondo, è reversibile. Unendo α e β (invertito), otteniamo un ciclo per il quale vale la seguente disuguaglianza, che segue dal teorema di Clausius

$$\oint_{\gamma} \frac{dQ}{T} < 0$$

Perché il tratto α rende l'intera trasformazione irreversibile. Come per la definizione di variazione di entropia, spezziamo l'integrale di Clausius:

$$\oint_{\gamma} \frac{dQ}{T} = \int_{A,\alpha}^B \frac{dQ}{T} + \int_{B,\beta}^A \frac{dQ}{T} < 0$$

Da cui, sapendo che β è reversibile,

$$\int_{A,\alpha}^B \frac{dQ}{T} < \int_{A,\beta}^B \frac{dQ}{T} = \Delta S_{AB}$$

Il fatto che la variazione di entropia dipenda solo dagli stati iniziale e finale, è possibile concludere con la seguente generalizzazione

$$\Delta S_{AB} \geq \int_{A, \text{qualsiasi}}^B \frac{dQ}{T} \quad (8.20)$$

che è l'enunciato del teorema dell'entropia (come sempre, l'uguaglianza vale solamente per trasformazioni reversibili). Dal teorema segue un'osservazione inquietante. Per un sistema isolato, non vi è alcuno scambio di calore con l'esterno, qualunque siano le trasformazioni che stanno avvenendo al suo interno, reversibili oppure no. Dunque $dQ = 0$ e l'integrale è sempre nullo.

$$\Delta S_{AB} \geq \int_A^B \frac{dQ}{T} = 0 \quad \Delta S_{AB} \geq 0$$

ovvero

$$S_B \geq S_A$$

Segue che per il nostro sistema isolato l'entropia non può mai diminuire; essa può al più rimanere costante. Ma la cosa più sconcertante è che anche quest'ultima prospettiva è pressoché un miraggio: dovremmo riprodurre trasformazioni *sempre reversibili*.

Parte I

Appendici

A

Esercizi

A.1 Effetto centrifuga

Un corpo è vincolato a muoversi lungo una guida rigida (può muoversi parallelamente alla guida ma non perpendicolarmente ad essa) che sta ruotando intorno ad uno dei suoi estremi con velocità angolare ω (rad/s). Inizialmente il corpo si trova a d_0 m dall'asse di rotazione ed è fermo; dopo un certo intervallo di tempo il corpo ha raggiunto una posizione d_f (m) ed ha una velocità v_f (m/s). Dati $d_0 = 1$, $d_f = 2.5$, $v_f = 8.1$, trovare ω .

1. 5.0
2. 5.6
3. 8.9
4. 3.5

Soluzione: Fissiamo un sistema di riferimento solidale con la guida. In tal modo, è come se l'oggetto si stesse muovendo solamente in linea retta sulla guida stessa. In tale situazione, l'oggetto si sposta verso l'esterno per via della forza centrifuga, una forza apparente, perché il sistema di riferimento scelto non è inerziale.

Ricorriamo ad una analisi energetica. L'energia cinetica dell'oggetto viene incrementata dall'azione della forza centrifuga; ciò suggerisce il ricorso al teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta E_K = W_{F_c} \quad (\text{A.1})$$

$$K_f - K_0 = \int_{d_0}^{d_f} F_c ds \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \int_{d_0}^{d_f} m\omega^2 s ds \quad (\text{A.3})$$

$$v_f^2 = \omega^2(d_f^2 - d_0^2) \quad (\text{A.4})$$

da cui il risultato cercato

$$\omega = \frac{v_f}{\sqrt{d_f^2 - d_0^2}}$$

Eseguendo i calcoli, risulta che la risposta (4) è quella corretta. Analizziamo più chiaramente i passaggi: In A.1 esprimiamo il teorema delle forze vive come variazione dell'energia cinetica dell'oggetto equivalente al lavoro compiuto dalla forza centrifuga F_c . In A.2 esplicitiamo la differenza tra le energie cinetiche iniziale e finale; dall'altro membro costruiamo invece l'integrale che permette di ottenere il lavoro totale dalla posizione iniziale d_0 a

d_f : ricorriamo alla definizione più generale di lavoro (appunto impiegando il calcolo integrale), perché F_c varia durante il percorso da d_0 a d_f . In A.3 possiamo accorgerci che l'energia cinetica iniziale è nulla (il testo afferma che l'oggetto è inizialmente fermo rispetto alla guida); al membro di destra esprimiamo invece F_c in funzione di m , ω e s , dove s rappresenta la posizione dell'oggetto a partire dal fulcro sul quale ruota la guida. Per ricavare questa relazione abbiamo utilizzato la definizione di forza centripeta (che si rivela essere, in modulo, la stessa di quella centrifuga)

$$a_c = \omega^2 s$$

In A.4 cancelliamo i termini comuni come la massa e il fattore $\frac{1}{2}$ (che compare anche al membro di destra per via dell'integrazione del tipo $\int x dx = x^2/2$). Notiamo poi che ω è costante, perché la guida ruota con velocità angolare costante, e può essere “estratto” dall'integrale.

A.2 Rincorsa sul cuneo

Una massa m (kg) si muove inizialmente su un piano orizzontale privo di attrito con velocità v_0 (m/s). Successivamente essa sale su un piano inclinato, inizialmente fermo rispetto al piano orizzontale, di massa M (kg), che consiste in un cuneo libero di muoversi anch'esso sul piano. La velocità v_0 è tale che m si ferma esattamente sulla sommità del cuneo, ad altezza h (cm). Si supponga che non vi siano attriti di alcun genere. Dati $m = 11.0$, $M = 47.0$ e $h = 25.0$, trovare v_0 .

1. 4.1
2. 8.5
3. 2.5
4. 6.0

Soluzione:

A.3 *Raindrops are falling on my head*

Una goccia di pioggia di raggio R (mm) cade da una nuvola. Durante la caduta questa risente della resistenza aerodinamica opposta dall'aria che possiamo modellizzare come $F = \frac{1}{2} D \rho_{\text{aria}} S v^2$, dove D è il coefficiente aerodinamico, S la superficie d'impatto della goccia e v la sua velocità. Si assuma la goccia sferica e le densità di aria e acqua pari a $\rho_{\text{aria}} = 1.2 \text{ kg/m}^3$ e $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kg/m}^3$. Sotto queste assunzioni la velocità limite della goccia cresce fino a stabilizzarsi al valore limite v_f (m/s). Dati $D = 0.78$, $v_f = 24.0$, trovare R .

1. 40.4
2. 28.1

3. 59.2

4. 20.6

Soluzione:

A.4 Valuta l'offerta

Vostro cugino Nunzio vi dice che ha inventato una macchina termica che assorbe calore da una fonte a 30°C e cede calore ad un pozzo a 15°C . Secondo Nunzio l'efficienza della macchina è pari al 15%. La comprereste?

Soluzione: L'obiettivo dell'esercizio consiste nel verificare se, date le temperature, l'efficienza della macchina di Nunzio è corretta. Idealmente, una macchina termica reversibile che opera tra le due temperature (in Kelvin!) può avere un rendimento massimo del

$$\eta = 1 - \frac{T_{\text{fredda}}}{T_{\text{calda}}} = 1 - \frac{15 + 273.16}{30 + 273.16} \simeq 0.05 = 5\%$$

Nunzio ci sta dunque raccontando una baggianata e conviene non comprare la sua invenzione.

B

Leggi fisiche notevoli

B.1 Legge di Hooke

La legge di Hooke è una legge empirica che pone in relazione la forza di richiamo esercitata da una molla e l'estensione della deformazione che genera quella stessa forza.

$$\mathbf{F} = -k\Delta\mathbf{x} \quad (\text{B.1})$$

Si suppone che la deformazione $\Delta\mathbf{x}$ avvenga sulla stessa retta sulla quale la molla giace.

B.2 Legge di Stefan-Boltzmann

$$\varepsilon = \sigma e T^4 \quad (\text{B.2})$$

B.3 Legge di Newton gravitazione universale

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{B.3})$$

B.4 Legge di Avogadro

$$N = \frac{1}{k_B} \frac{pV}{T} \quad (\text{B.4})$$

B.5 Legge di Boyle

$$p \propto \frac{1}{V} \quad (\text{B.5})$$

B.6 Equazione armonica

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + \omega^2\mathbf{x} = 0 \quad (\text{B.6})$$

B.7 Oscillatore a molla

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{B.7})$$

B.8 Pendolo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\text{B.8})$$

C

Costanti

La fonte dei valori delle costanti è la calcolatrice CASIO *fx-991ES PLUS*.

g	Accelerazione di gravità (superficie terrestre)	9.80665 m/s ²
G	Costante di gravitazione universale	6.67428×10^{-11} Nm ² /kg ²
σ	Costante di Stefan-Boltzmann	5.6704×10^{-8} W/(m ² K ⁴)
k_B	Costante di Boltzmann	000
R	Costante dei gas ideali	000
N_A	Numero di Avogadro	6.022×10^{23}
c	Velocità della luce nel vuoto	299,792,458 m/s

Note

Curiosità: Lettere maiuscole Vi siete mai chiesti perché i simboli di alcune unità di misura sono in maiuscolo, come W (Watt), N (Newton) e Pa (Pascal)? Nella stragrande maggioranza dei casi, ciò si deve al fatto che l'unità è dedicata ad una persona realmente esistita¹ e dunque è doveroso utilizzare una sua iniziale con la prima lettera maiuscola.

Sulla costante di Stefan-Boltzmann Ricordare questa costante fino alle primissime cifre significative è una passeggiata: si tratta di ricordare la sequenza "5678", con l'8 all'esponente e negativo.

Curiosità: Velocità della luce Fizeau misurò la luce in maniera assai bizzarra, mediante un complesso meccanismo costituito da una ruota dentata e specchi, ricorrendo a precisione e tempistiche finissime.

Curiosità: Numero di Avogadro Nonostante il nome, Avogadro non calcolò questo numero. Jean Baptiste Perrin effettuò misure sperimentali che condussero successivamente al valore oggi accettato, ma pure Albert Einstein, mediante studi sul moto browniano, diede importanti contributi alla stima di questa costante. Molte altre leggi e costanti che portano nomi di persone hanno avuto storie inaspettate, simili a questa.

¹Almeno per ora...

D

Tavola dei simboli e notazioni

D.1 Sulla notazione vettoriale

Il testo rappresenta i vettori con lettere maiuscole o minuscole, italiche e in grassetto. Tale scelta è stata adottata in quanto standardizzata e più pratica da impiegare su carta. Questa notazione è equivalente a quella utilizzata abitualmente alla lavagna, dove le lettere sono sovrastate da una freccia che punta verso destra.

\boldsymbol{v} equivale a \vec{v}

Se la lettera non è grassetta e il contesto di interpretazione non è ambiguo, si intende il *modulo* del vettore.

v equivale a $|\vec{v}|$

D.2 Sui separatori decimali

In questi appunti si utilizza la notazione anglosassone per separare tra loro le cifre dei numeri. Il punto (.) ha significato di separatore tra parte intera e frazionaria, mentre la virgola (,) separa le cifre presenti tra ordini di grandezza multipli di 3 nella parte intera. Ecco alcuni esempi:

123.456 = centoventitré virgola quattro cinque sei

123,456 = centoventitrémilaquattrocentocinquantasei

D.3 Sui pedici

I pedici aiutano a rendere più espliciti i simboli, ma alcuni possono aver bisogno di chiarimenti. Ogniqualevolta si tratta di quantità che variano nel tempo, come ad esempio uno spostamento nello spazio, il pedice i indica l'istante iniziale della variazione, mentre f quello finale. Nel caso dello spostamento, \boldsymbol{x}_i indica la posizione iniziale (descritta dal rispettivo vettore), \boldsymbol{x}_f quella finale. Può capitare, per evitare ambiguità, che al posto del pedice i si utilizzi la cifra numerica 0, sempre per indicare l'istante iniziale. In tal caso \boldsymbol{x}_i ha lo stesso significato di \boldsymbol{x}_0

D.4 Simboli

\therefore	Quindi
F	Forza, modulo
\boldsymbol{F}	Forza, vettore
ω	Velocità angolare
p	Quantità di moto, modulo
\boldsymbol{p}	Quantità di moto, vettore
\boldsymbol{I}	Impulso, vettore
Δ	Differenza

Postfazione

Vuoi conoscenza infinita e immediata di fisica? Clicca [qui](#).