Introduction

L'accroissement des capacités de simulation numérique a fait émerger de nouvelles problématiques dans le spectre de l'ingénieur. Après 30 ans de développement en modélisation numérique, les probabilités fournissent un cadre adapté à la prise en compte des incertitudes inhérentes aux erreurs de modélisation et à la variabilité de l'environnement.

Sur la base de la théorie moderne des probabilités, les processus aléatoires permettent de modéliser des phénomènes fluctuants ou stochastiques dont l'évolution dans le temps revêt une grande importance. Par exemple, l'ajout de termes aléatoires dans les EDP régissant les phénomènes physiques, tels que la turbulence, conduit à des solutions qui sont des processus stochastiques. Dans ce cadre, les dépendances avec le passé peuvent être décrites par des fonctions de corrélation (processus gaussiens), par leurs espérances conditionnelles (martingales) ou par leurs lois conditionnelles (processus de Markov).

Pour maitriser ces concepts modernes, il est nécessaire de bien comprendre le cas où les processus sont indexés par des éléments d'ensembles discrets avant d'aborder les outils complexes issus du calcul stochastique intervenant en conception robuste, modélisation physique et financière ou traitement du signal et d'images.

Avertissement : Ce document n'a pas pour objectif de constituer un support de cours complet. Il s'apparente à un plan détaillé contenant les renvois précis à des références accessibles sur Internet.

La première partie de ce cours s'appuie largement sur les références [6, 13, 11].

Rappels d'espérance conditionnelle

Référence : Lecture Notes du cours CIP de 1ère année ([5]).

Dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, si A et B sont dans $\mathcal{F}$ et $\mathbf{P}(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Si X et Y sont des variables aléatoires à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}$ et dans un espace discret E. Il est intéressant de connaitre la distribution ou l'espérance de X, connaissant la réalisation de Y. Pour tout $y \in E$, on a $\{Y = y\} \in \mathcal{F}$ donc si $\mathbf{P}(Y = y) > 0$, alors on peut considérer la mesure de probabilité

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} : \mathcal{F} &\to [0, 1] \\ A &\mapsto \mathbf{P}(A \mid Y = y). \end{aligned}$$

Si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q})$, l'espérance conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ est définie par

$$\mathbf{E}[X \mid Y = y] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X],$$

où $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X]$ désigne l'espérance de X sous la probabilité $\mathbf{Q}$.

Par exemple, dans le cas où X est également à valeurs dans un espace discret $\tilde{E}$,

$$\mathbf{E}[X \mid Y = y] = \sum_{x \in \tilde{E}} x \ \mathbf{P}(X = x \mid Y = y),$$

si la somme est convergente.

Pour définir l'espérance de X sachant la variable aléatoire Y, on considère

$$\psi : y \mapsto \begin{cases} \mathbf{E}[X \mid Y = y] & \text{si } \mathbf{P}(Y = y) > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'espérance de X sachant Y est alors définie par

$$\mathbf{E}[X \mid Y] = \psi(Y).$$

La construction moderne décrite dans ce chapitre permet d'étendre la définition de l'espérance conditionnelle de X sachant une variable aléatoire Y qui n'est pas nécessairement discrète, et pour laquelle les événements $\{Y = y\}$ sont de probabilité nulle.