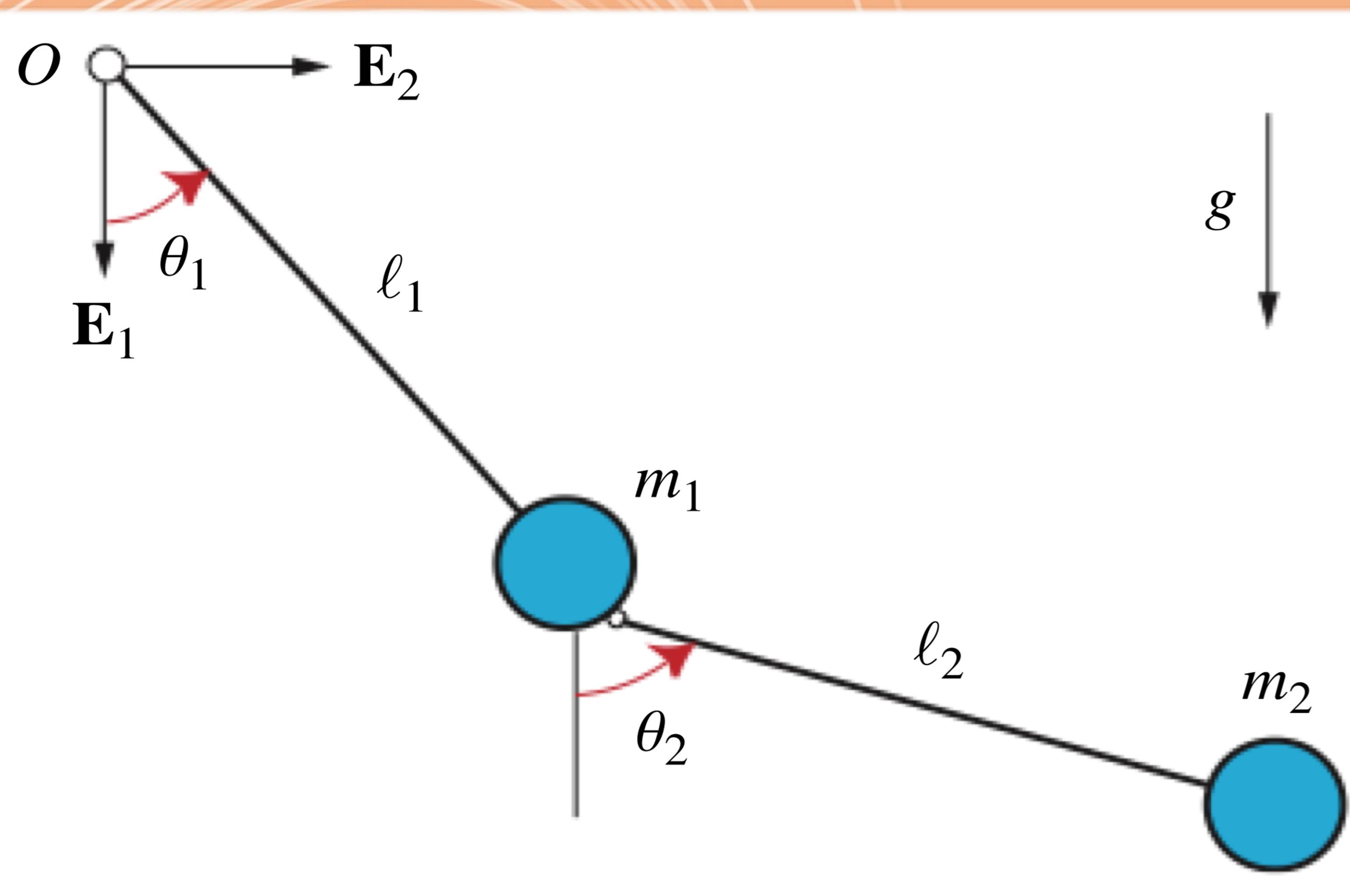


Vad har morgontrafik gemensamt med en dubbelpendel?

Introduktion - kaos i vardagen

Världen kan ibland upplevas som kaotisk och svår att förutsäga. Väderrapporter stämmer sällan, finansmarknaden lever till synes sitt eget liv och trafik kanstå still utan anledning. Är dessa fenomen sannerligen slumpmässiga eller finns det något sätt att förutspå framtiden, bara man känner till initialvärdena, på samma sätt Newtons lagar används? Sanningen är att alla scenarien ovan är exempel på deterministiskt kaotiska system. Dessa är system som går att förutsäga med hjälp av initialvärden, men som är mycket känsliga för små förändringar i dessa [1]. Mycket små fluktuationer i initialvärdena förstärks exponentiellt. Vi har valt att demonstrera fenomenet genom att konstruera en dubbelpendel, även känd som kaotisk pendel.



Figur 1: Schematisk ritning av en dubbelpendel.

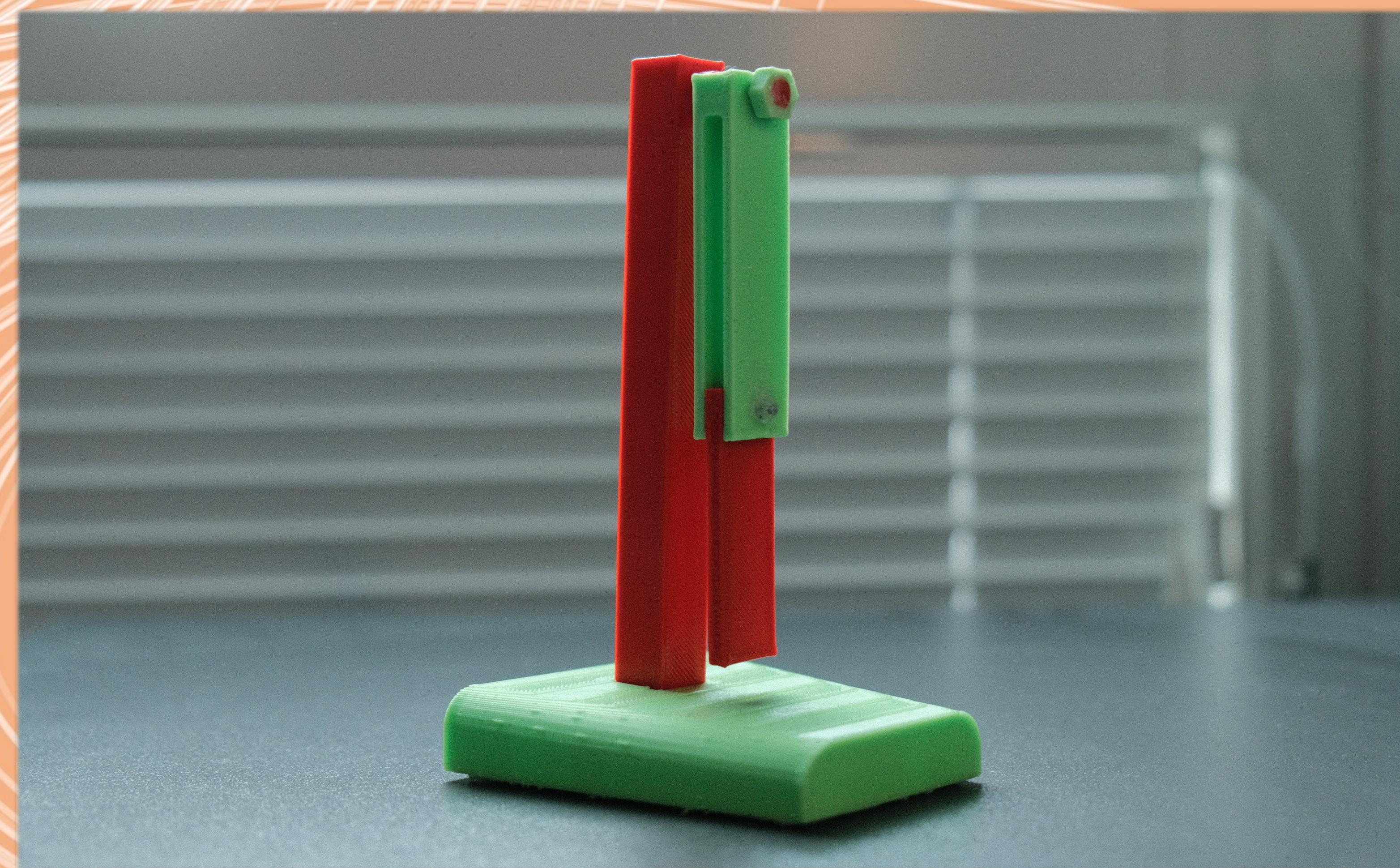
Bilden tagen från Berkeley Rotations, "The double pendulum" [3].

Rörelseekvationer

Differentialekvationerna som beskriver rörelsen kan härledas ur Newtons andra lag, $\vec{F} = m\vec{a}$, och är $(1+a)\ddot{\theta}_1 + ab(\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)) + (1+a)\sin\theta_1 = 0$ samt $ab^2\ddot{\theta}_2^2 + ab(\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)) + ab\sin\theta_2 = 0$, med vinklar från figur 1. Genom att sätta $\sin(x) \approx x$ och $\cos(x) \approx 1$ kan man för små vinklar få ut två enklare ekvationer som förutsäger rörelsen väl. För större vinklar är inte detta möjligt, och lösningarna urartar snabbt på grund av de trigonometriska funktionerna. Små variationer i initialvinklarna förstärks och skapar helt olika rörelser varje gång man släpper pendeln [3].

Dubbelpendeln

En vanlig, enkelpendel är de flesta bekanta med. Dubbelpendeln kommer till genom att man hänger på en pendel till på denna, se figur 1 till höger. För små vinklar beter den sig relativt förutsägbart med två resonanslägen. Släpper man den vid större vinklar, uppvisar dubbelpendeln kaotisk rörelse som inte verkar gå att förutsäga eller återskapa [2].



Figur 2: Vår dubbelpendel

Vår dubbelpendel och lärdomar

Dubbelpendeln har återskapats från ritningar från Harvard i Autodesk Inventor. Det färdiga resultatet syns i figur 2. Det är en enkel konstruktion som påvisar något djupt och fundamentalt om hur vår värld fungerar. På grund av att konstruktionen saknar kullager eller liknande är energiförlusterna höga i systemet men pendeln uppvisar ändå kaosartad rörelse. I en framtid variant kan det vara fördelaktigt att minimera förluster i systemet genom att göra pendeln större, öka massan i pendelstyckena och använda kullager. Sammanfattningsvis har projektet varit lärorikt.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_effect

[2] <https://sciedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/chaotic-pendulum>

[3] <https://rotations.berkeley.edu/the-double-pendulum/>