

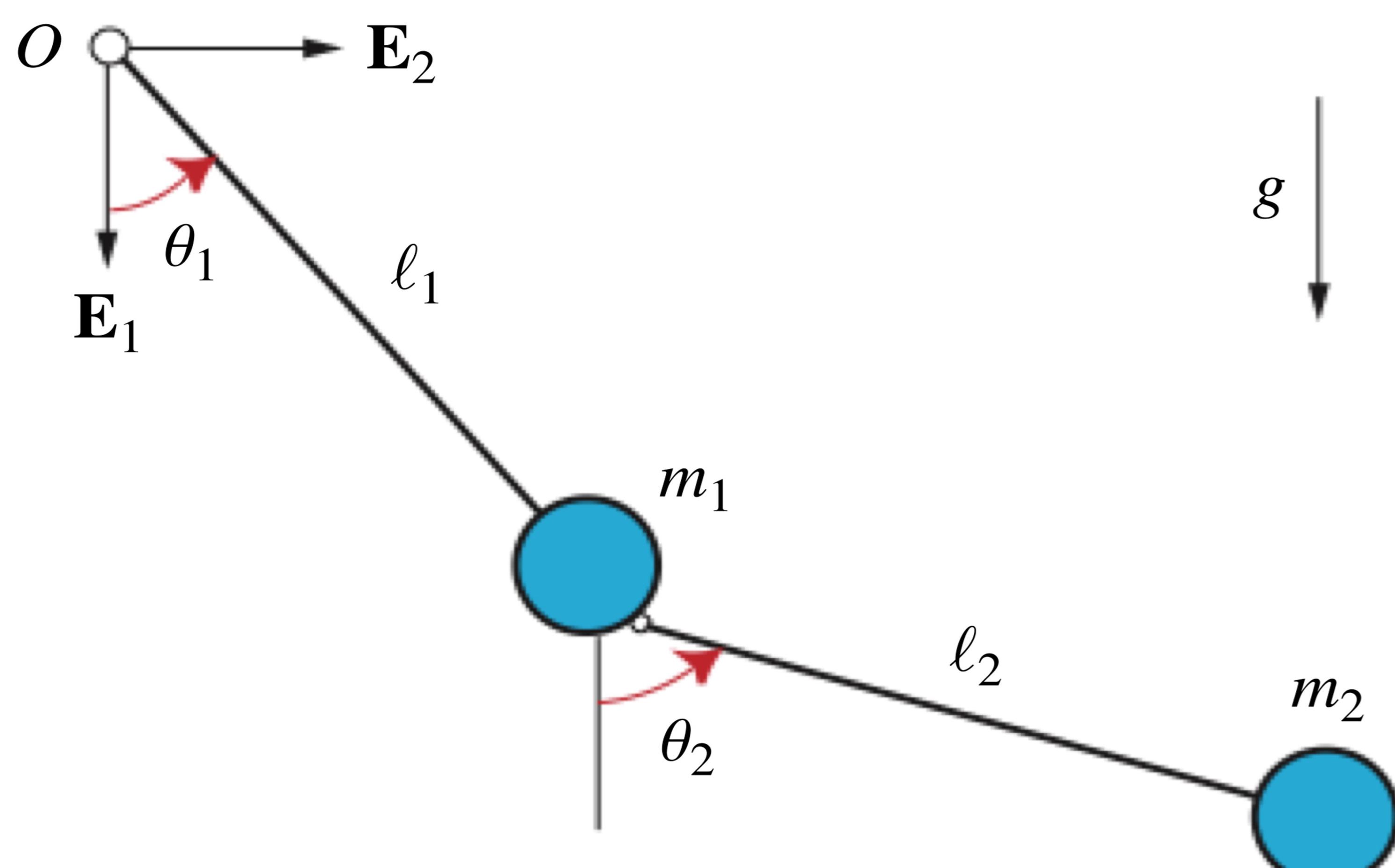
Kan man leka med ödet?

Introduktion - kaos i vardagen

Världen kan ibland upplevas som kaotisk och svår att förutsäga. Väderrapporter stämmer sällan, finansmarknaden lever till synes sitt eget liv och trafik kanstå still utan anledning. Är dessa fenomen sannerligen slumpmässiga eller finns det något sätt att förutspå framtiden, bara man känner till initialvärdena, på samma sätt som vi använder Newtons lagar? Sanningen är att alla scenarien ovan är exempel på deterministiskt kaotiska system, alltså system som går att förutsäga med hjälp av initialvärdet, men som är mycket känsliga för små förändringar i dessa värden [1]. Mycket små fluktuationer i initialvärdet förstärks exponentiellt. Vi har valt att demonstrera fenomenet genom att konstruera en dubbelpendel, även känd som kaotisk pendel.

Dubbelpendeln

En vanlig, enkelpendel är de flesta bekanta med. Dubbelpendeln kommer till genom att man hänger på en pendel till på denna, se figur 1 till höger. För små vinklar beter den sig relativt förutsägbart med två resonanslägen. Släpper man den vid större vinklar, även vinklar som är till synes exakt likadana, uppvisar dubbelpendeln kaotisk rörelse som inte verkar gå att förutsäga eller återskapa [2]. Vad beror detta på?

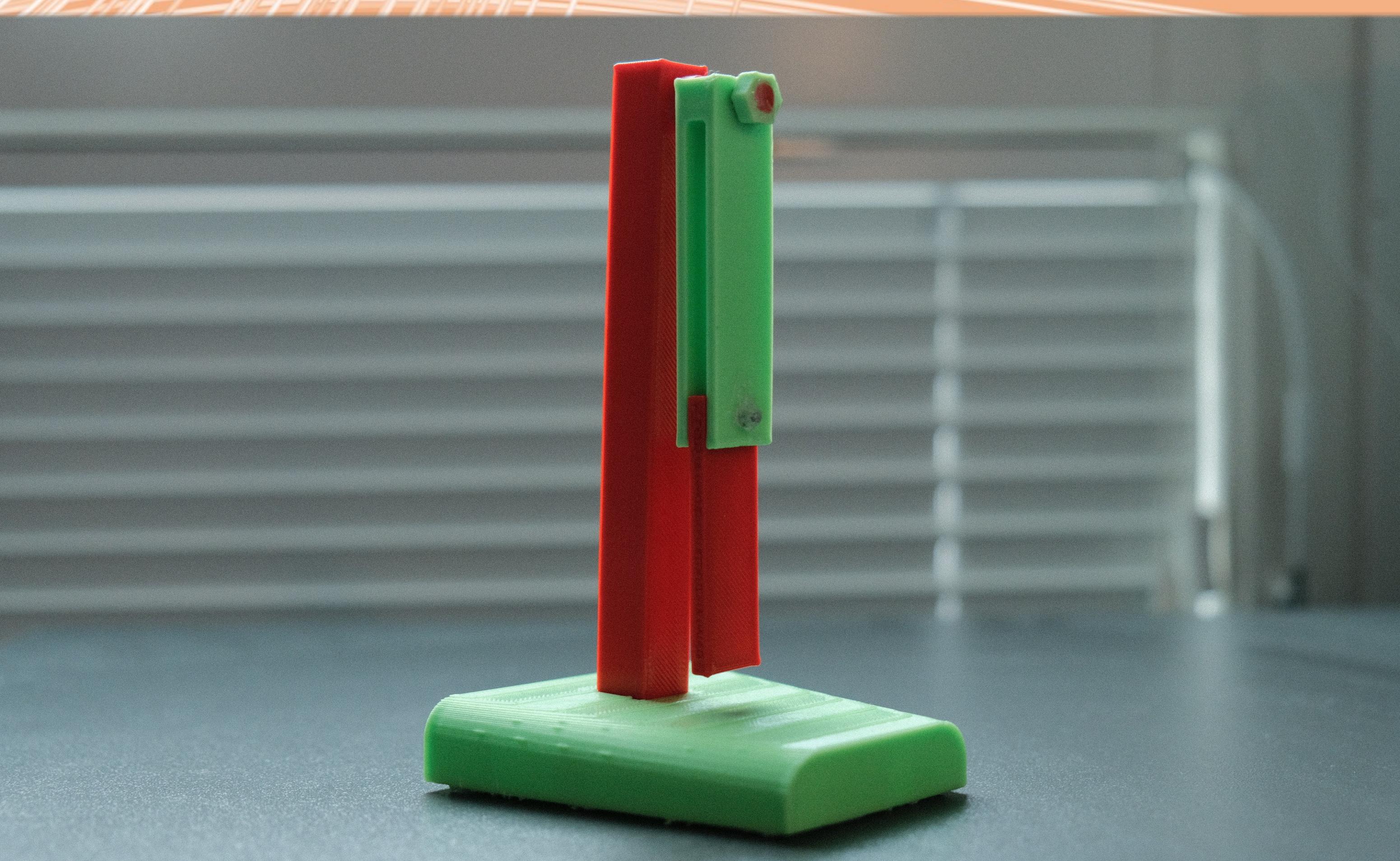


Figur 1: Schematisk ritning av en dubbelpendel.
Bilden tagen från [3]

Rörelseekvationer

Ekvationerna som beskriver rörelsen kan härledas ur Newtons andra lag, $\vec{F} = m\vec{a}$, men blir långa och är därför inte inkluderade. Det visar sig bli två icke-linjära differentialekvationer i θ_1 , $\dot{\theta}_1$ och $\ddot{\theta}_1$ för repetitiva vinkel (med namn från figur 1) som innehåller trigonometriska funktioner. För små vinklar är det möjligt att sätta $\sin(x) \approx x$ och $\cos(x) \approx 1$ vilket reducerar, efter förenkling, ekvationerna till två enklare differentialekvationer. Detta ger en relativt god deterministisk approximation till rörelsen. För större vinklar är inte detta möjligt, och lösningarna urtar snabbt på grund av de trigonometriska funktionerna. Små variationer i initialvinklarna förstärks och skapar helt olika rörelser [3].

Vår dubbelpendel och lärdomar



Figur 2: Vår 3D-printade dubbelpendel

Dubbelpendeln har återskapats från ritningar från Harvard i Autodesk Inventor. Det färdiga resultatet syns i figur 2. Det är en enkel konstruktion som påvisar något djupt och fundamentalt om hur vår värld fungerar. På grund av att konstruktionen saknar kullager eller liknande är energiförlusterna höga i systemet men pendeln uppvisar ändå kaosartad rörelse. Till en framtida variant är det fördelaktigt att minimera förlusterna i systemet genom att göra pendeln större, öka massan i pendelstyckena och använda kullager. Sammanfattningsvis har projektet varit lärorikt.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_effect

[2] <https://sciedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/chaotic-pendulum>

[3] <https://rotations.berkeley.edu/the-double-pendulum/>