

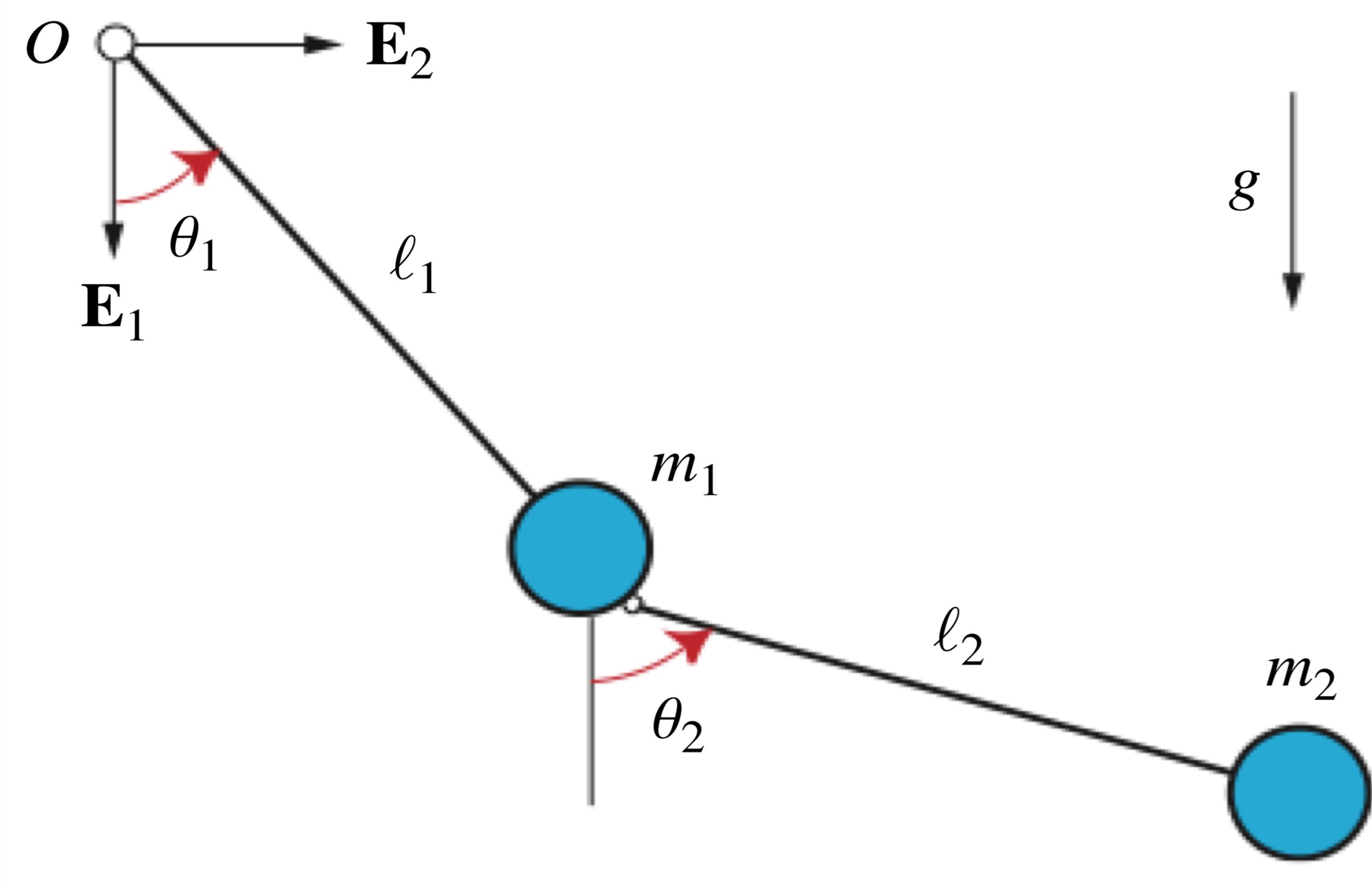
# Vad har trafik gemensamt med en dubbelpendel?

## Introduktion - kaos i vardagen

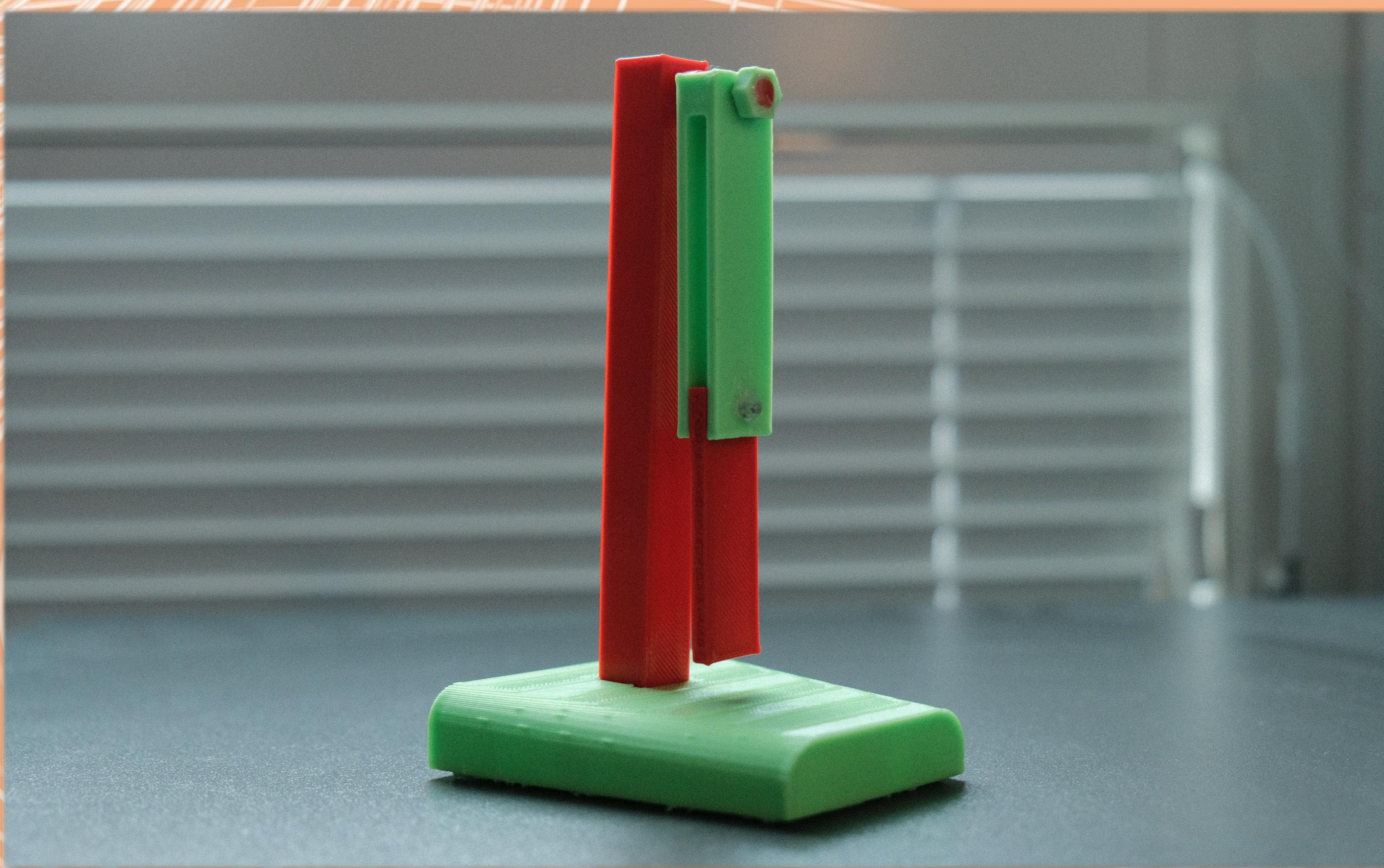
Världen kan ibland upplevas som kaotisk och svår att förutsäga. Väderrapporter stämmer sällan, finansmarknaden lever till synes sitt eget liv och trafik kanstå still utan anledning. Är dessa fenomen sannerligen slumpmässiga eller finns det något sätt att förutspå framtiden, bara man känner till initialvärdena, på samma sätt som vi använder Newtons lagar? Sanningen är att alla scenarien ovan är exempel på deterministiskt kaotiska system. Dessa är system som går att förutsäga med hjälp av initialvärdet, men som är mycket känsliga för små förändringar i dessa [1]. Mycket små fluktuationer i initialvärdena förstärks exponentiellt. Vi har valt att demonstrera fenomenet genom att konstruera en dubbelpendel, även känd som kaotisk pendel.

## Dubbelpendeln

En vanlig, enkelpendel är de flesta bekanta med. Dubbelpendeln kommer till genom att man hänger på en pendel till på denna, se figur 1 till höger. För små vinklar beter den sig relativt förutsägbart med två resonanslägen. Släpper man den vid större vinklar, uppvisar dubbelpendeln kaotisk rörelse som inte verkar gå att förutsäga eller återskapa [2].



Figur 1: Schematisk ritning av en dubbelpendel.  
Bilden tagen från [3]



Figur 2: Vår dubbelpendel

## Rörelseekvationer

Ekvationerna som beskriver rörelsen kan härledas ur Newtons andra lag,  $\vec{F} = m\vec{a}$ , men blir långa och är därför inte inkluderade. Det visar sig bli två icke-linjära differentialekvationer i  $\theta_1$ ,  $\dot{\theta}_1$  och  $\ddot{\theta}_1$  för repetitiva vinkel (med namn från figur 1) som innehåller trigonometriska funktioner. För små vinklar är det möjligt att få en relativt god deterministisk approximation till rörelsen. För större vinklar är inte detta möjligt, och lösningarna urartar snabbt på grund av de trigonometriska funktionerna. Små variationer i initialvinklarna förstärks och skapar helt olika rörelser [3].

## Vår dubbelpendel och lärdomar

Dubbelpendeln har återskapats från ritningar från Harvard i Autodesk Inventor. Det färdiga resultatet syns i figur 2. Det är en enkel konstruktion som påvisar något djupt och fundamentalt om hur vår värld fungerar. På grund av att konstruktionen saknar kullager eller liknande är energiförlusterna höga i systemet men pendeln uppvisar ändå kaosartad rörelse. I en framtidig variant kan det vara fördelaktigt att minimera förlusterna i systemet genom att göra pendeln större, öka massan i pendelstyckena och använda kullager. Sammanfattningsvis har projektet varit lärorikt.

[1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly\\_effect](https://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_effect)

[2] <https://sciedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/chaotic-pendulum>

[3] <https://rotations.berkeley.edu/the-double-pendulum/>