



LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA

FAFF30 VÅGLÄRA OCH OPTIK

# Laborationsrapport Geometrisk Optik

Emil Babayev

Laborationshandledare  
David Gustavsson  
Rebecca Ahrling

2020-04-07

# 1 Inledning

## 1.1 Introduktion och sammanfattning

I denna laboration har två optiska komponenters (linser och prismor) egenskaper och karaktäristik undersökts. Därutöver har kollimering och linjering diskuterats och beskrivits. Hela den experimentella delen har genomförts digitalt i programmet Geometrical Optics Tool, skrivet av en tidigare student. Prismor och linsor är optiska komponenter som spelar en viktig roll i vår vardag, exempelvis i kameror, glasögon, lappar med mera. Därför finns det god motivation till att genomföra en laboration likt denna för att förstå optiska komponenters egenskaper.

Avståndet till ljuskällan, placering på den optiska axeln, rotation kring den optiska axeln och olika typer av avbildningsfel har undersökts för linsen och kommer diskuteras i rapporten. Vad gäller prismor har man experimentellt försökt hitta minsta avläkningsvinkel för olika våglängder.

Sammanfattningsvis kan vi formulera en kort frågeställning: Hur beter sig linsor i olika förhållanden, och hur kan man experimentellt beräkna minsta deviation(avläkningsvinkel) för ett prisma?

Undersökningen har lett till följande slutsatser: Linsor är känsliga optiska instrument som inte fokuserar rätt om vi avviker från optimala förhållanden, och drabbas lätt av avbildningsfel. Prisma hade i vårt fall hade en minsta deviation på runt  $60^\circ$ .

## 1.2 Introduktionsuppgifter

För uppgift 1, se appendix A om kollimering och linjering. Uppgift 2 beskrivs här nedan. Använder formeln för minimiavlänkning, ekvation 1[1, p. 212], där  $n$  är brytningsindex i materialet,  $\delta$  är avläkningsvinkeln och  $\alpha$  är vinkeln mellan de brytande ytorna i prisma

$$n = \frac{\sin(\frac{\delta+\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})} \quad (1)$$

och löser ut  $\delta$ , som vi söker. Detta ger ekvation 2:

$$\delta = 2\arcsin(n\sin(\frac{\alpha}{2})) - \alpha \quad (2)$$

Insättning av  $n = 1.57$  och  $\alpha = 60^\circ$  ger  $\delta = 43.44^\circ$ .

# 2 Teori

## 2.1 Divergens hos en stråle

Divergensen hos en ljuskälla definieras som vinkeln hos ljuskonen som bildas när ljuset propagerar [2]. Divergensvinkeln  $\theta$  kan beräknas med ekvation 3:

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{d_1 - d_2}{2l}\right) \quad (3)$$

Sambandet kan härledas om man iakttar en del av ljuskonen som är långt borta från alla fokus och utför lite trigonometri. Se figur 1.  $d_1$  och  $d_2$  är ljuskonens diameter i två punkter, och  $l$  är avståndet där emellan.

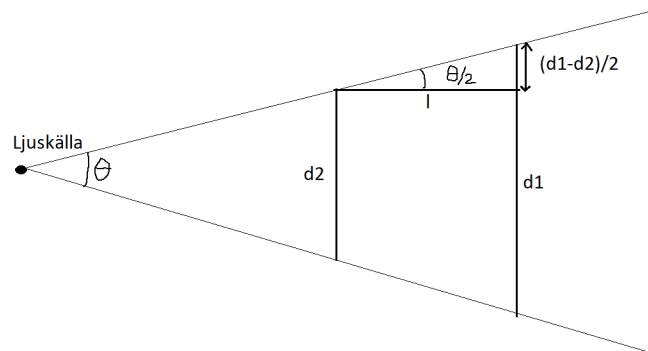


Figure 1: Härledning av divergensvinkel

## 2.2 Optiska komponenter

De optiska komponenter som används i laborationen är prismor och konvexa linser.

### 2.2.1 Prismor

Prismat är en komponent med platta genomskinliga ytor, där ljuset bryts då det propagerar. Vi tittar på triangulära prismor i denna laboration, där varje gränssyta följer Snells brytningslag, ekvation 4 [1, p.202].  $n$  brytningsindex.  $\alpha$  infalls-/brytningsvinkel.

$$n_1 * \sin(\alpha_1) = n_2 * \sin(\alpha_2) \quad (4)$$

Varje gång en ljusstråle passerar igenom en gränssyta bryts det. I vårt fall bryts det mot normalen när det antrar prismat, eftersom prismat är av glas och vi antar luft utanför. När det sedan lämnar prismat bryts det bort från normalen. Detta resulterar i att ljuset böjs av en viss vinkel jämfört med den ursprungliga riktningen. Denna vinkel kallas avläkningsvinkeln, eller deviationen, som vi betecknar med  $\delta$ . Den brytande kanten på prismat får också en egen vinkel,  $\alpha$ . Se figur 2. Avläkningsvinkeln blir minst då strålgången är symmetrisk kring prismat [1, p.210-211]. Det finns

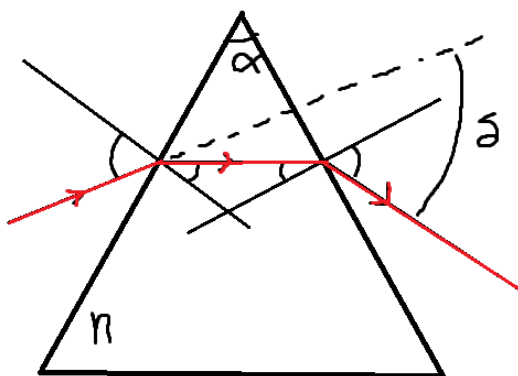


Figure 2: Principskiss av prisma. Strålgången är markerad i rött.

en formel för minsta avläkningsvinkel, ekvation 5 [1, p.212].

$$n = \frac{\sin(\frac{\delta+\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})} \quad (5)$$

### 2.2.2 Linser

Linserna vi pratar om i laborationen är två sfäriska, sammanfogade gränsytor som buktar utåt (konvexa). Även i linser gäller Snells brytningslag. Med hjälp av linser kan strålar fokuseras. Punkten (reell eller virtuell) där alla strålar fokuseras kallas brännpunkten. För tunna linser gäller (med vissa antaganden) Gauss linsformel, ekvation 6 [1, p.230]. Beteckningar enligt figur 3.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (6)$$

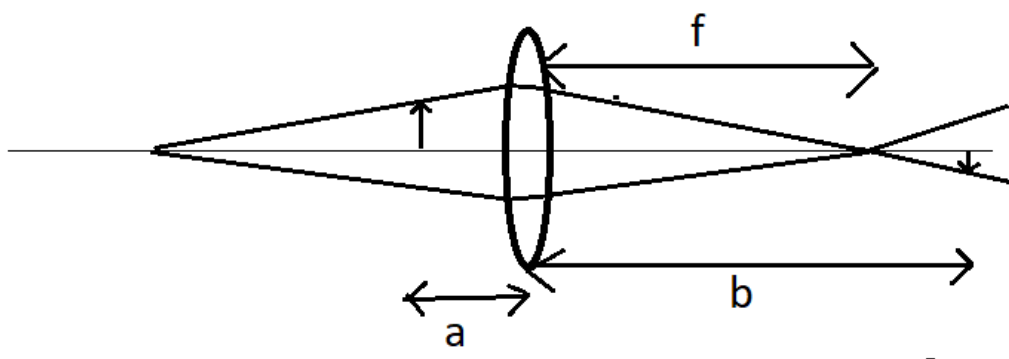


Figure 3: Principskiss av en lins. Ett objekt avbildas på andra sidan, fast mindre.

### 2.3 Avbildningsfel

I denna laboration diskuteras tre typer av avbildningsfel. Avbildningsfel skapar hinder vid design av optiska komponenter. De tre typerna är:

- Koma, där ljus som kommer in snett mot linsens optiska axel bryts olika mycket. Därmed skapas en utsmetad avbildning på andra sidan linsen [5]. Se figur 4f.
- Sfärisk aberration, som beror på att ljus som når sfäriska gränsytor inte bryts på samma sätt i kanten av linsen som paraxiala strålar. Strålarna som når kanten får en kortare brännvidd [1, p.238]. Se figur 4g.
- Kromatisk aberration, som beror på att glas med samma egenskaper inte bryter ljus med olika våglängd likadant, det blir olika brytningsindex. Varje våglängd får därmed en egen fokalpunkt och bilden blir ofokuserad [1, p.237]. Se figur 4h.

## 3 Material och metod

Det fysiska materialet för denna laboration har endast varit en dator. Programvaran som tillhandahölls av institutionen är Geometrical Optics Tool för analys av optiska komponenter och MATLAB för dataanalys. Dessa program erbjöds av institutionen och därför fanns inte så mycket annat att välja på. För mätning av vinklar på skärmen användes programmet MB-Ruler eftersom det var lättillgängligt och gratis.

Arbetssättet i Geometrical Optics Tool (hädanefter förkortat som GOT) liknade det det skulle gjort i en verklig laborationssal. Uppställningen sattes upp enligt instruktioner i laborationshandledningen, resultat iakttogs och sedan dokumenterades uppställningen genom att ta en skärmdump av akutell uppställning. För att mäta avläkningsvinkeln i prismet användes programmet MB-Ruler som är en digital linjal som kan mäta vinklar och avstånd på skärmen.

I just denna laboration placerades en konvex lins framför en divergent ljuskälla (inladdad från en fil) i GOT. Den flyttades och roterades på olika sätt (se handledningen) och mellan varje förändring togs en skärmdump samtidigt som resultatet som varje förändring gav upphov till noterades. Ljuskällan kollimerades (se appendix A) och därefter linjerades en kollimerad ljuskälla (inladdad från fil), se appendix A. För att illustrera de olika avbildningsfelen återskapades de förhållanden som krävs för att dessa skall uppstå. Se avsnitt 2.3. En skärmdump togs för varje avbildningsfel och resultatet noterades.

Sedan placerades ett prisma samt en ensam ljusstråle ut för att mäta minsta deviation. Ljusstrålen placerades helt horisontellt. Prismat roterades ungefär  $10^\circ$  mellan varje mätning, sedan användes skärmlinjalen för att mäta vinkeln mellan den horisontella inkommande ljusstrålen och den utgående brutna ljusstrålen. Den inkommande strålens vinkel mot prismet avlästes i GOT. Resultatet noterades i en tabell. Detta gjordes två gånger, med ljusets våglängd 555 nm och 700 nm. Slutligen konstruerades totalreflektion enligt handledningen med en rektangulär glasbit.

## 4 Resultat

### 4.1 Beräkning av divergens

Jag valde två punkter och avståndet  $d_1 = 9.28$  l.e.,  $d_2 = 5.40$  l.e.,  $l = 7$  l.e. Insättning i ekvation 3 gav en vinkel  $\theta = 31.28^\circ$ .

### 4.2 Mätvärden från prismet

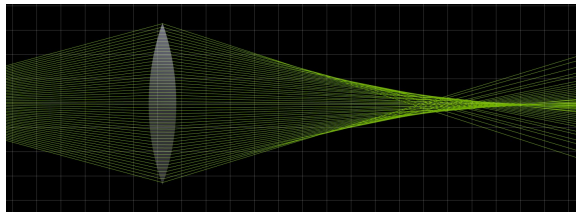
Infallsvinkel	Avläkningsvinkel
50.04	75.49
57.21	65.26
60.29	64.55
63.33	64.48
65.99	64.59
70.71	66.46
80.81	71.95
90	77.63

Table 1: Ljusets våglängd 555 nm. Alla mätvärden anges i grader.

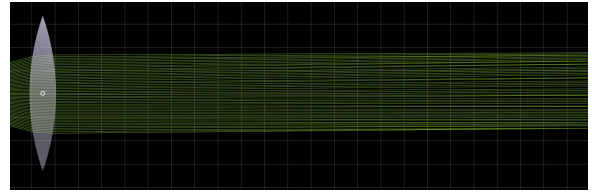
Infallsvinkel	Avläkningsvinkel
45.98	90
50.25	62.88
60.04	59.69
60.42	59.27
65.44	60.27
70.36	61.89
80.74	67.70
89.65	75.45

Table 2: Ljusets våglängd 700 nm. Alla mätvärden anges i grader.

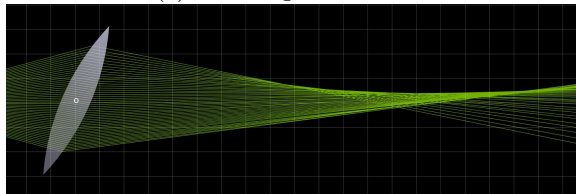
### 4.3 Uppställningar från GOT



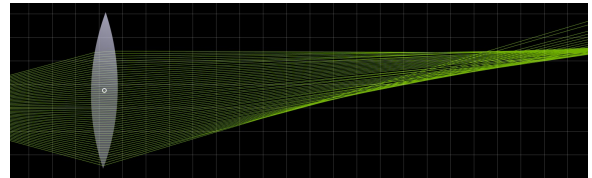
(a) Lins långt ifrån källan



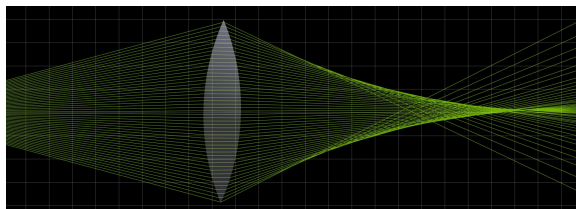
(b) Lins nära källan



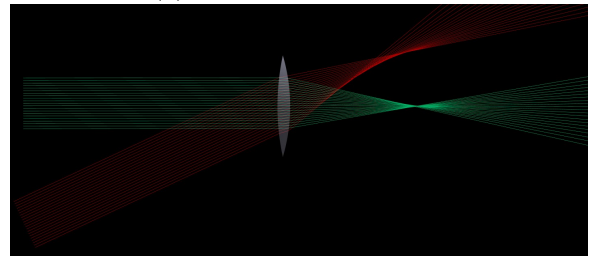
(c) Sned lins



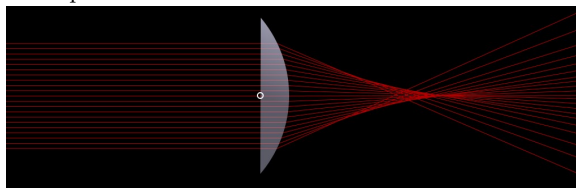
(d) Lins förskjuten i planet



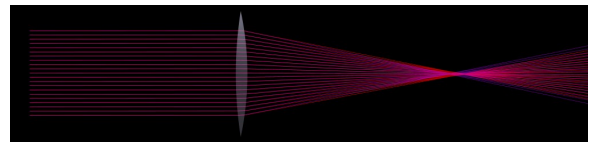
(e) Ungefär samma avstånd till källan som brännpunkten.



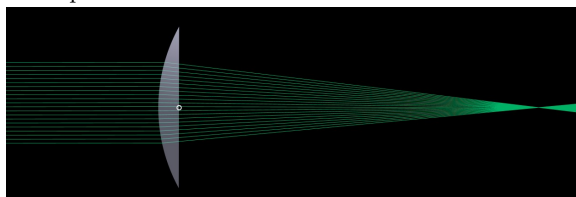
(f) Koma, ljuset kommer in snett och "smetas ut"



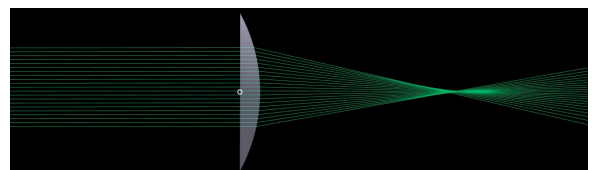
(g) Sfärisk aberration, allt ljus fokuseras inte i brännpunkten.



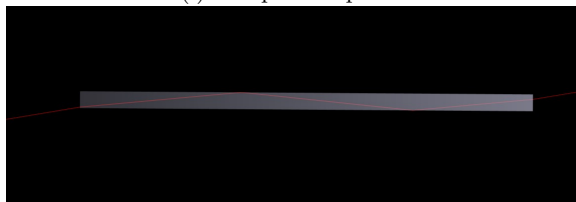
(h) Kromatisk aberration, olika våglängder fokuseras på olika brännpunkter.



(i) Skarp brännpunkt



(j) Oskarp brännpunkt



(k) Totalreflektion i en rektangulär komponent.

Figure 4: De olika uppställningarna i GOT

## 5 Diskussion och slutsatser

Inledningsvis kan det nämnas att totalreflektion, figur 4k, kunde iakttas och resultatet är rimligt.

### 5.1 Linser

Vi kan etablera att divergensvinkeln som beräknas i sektion 4.1 är rimlig (jämfört med blotta ögat).

Efter noggrann undersökning kan man dra en del slutsatser om hur en lins beter sig. Det som kunde iakttas var att ju närmare linsen placeras till ljuskällan, ju större blir brännvidden, för att till slut bli oändlig. Då får vi parallella strålar från en divergent ljuskälla. Detta demonstreras i resultatet, figur 4a. När vi istället placerar linsen långt ifrån ljuskällan får vi motsatt effekt, brännvidden minskar, och strålarna fokuseras i en brännpunkt. Brännpunkten kommer närmare linsen ju längre bort linsen placeras från ljuskällan. Se figur 4b.

Rotation och förflyttning av linsen gav liknande resultat. En rotation av linsen förskjöt brännpunkten uppåt eller nedåt, om än lite. Se figur 4c. Samtidigt bryts inte alla strålar i samma plan och brännpunkten blir "utsmetad". Med en roterad lins går det antagligen inte att få en fokuserad bild av hela objektet. Med en lins som är förskjuten i samma plan (figur 4d) flyttas brännpunkten upp eller ned mycket mer. Samtidigt blir brännpunkten mycket mindre utsmetad, antagligen eftersom alla strålar bryts i ungefär samma plan. Min gissning är att det borde gå att få en fokuserad bild om man endast förskjuter linsen i samma plan.

Sedan placerades linsen så att avståndet till ljuskällan var ungefär samma som avståndet till brännpunkten, figur 4e. För att ta reda på vad detta avstånd är, uttryckt i linsens brännvidd, användes Gauss linsformel, ekvation 6. Det enda vi känner till är att avståndet  $a = b$  i formeln, och att båda dessa avstånd är en multipel av brännvidden  $f$ . Med dessa antaganden kan vi då sätta  $a = b = cf$  i  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ . Löses ekvationen fås  $c = 2$  alltså  $a = b = 2f$ . Avståndet mellan lins och fokalpunkt är alltså två brännvidder. Resultatet är diskuterbart med tanke på att ekvation 6 egentligen endast gäller för tunna linser och linsen som användes inte var tunn. Samtidigt känns det rimligt att avståndet är en heltalsmultipel. Däremot känns det fel rent intuitivt med tanke på att avståndet mellan lins och brännpunkt borde vara definierat som just brännvidden, alltså att  $c = 1$ .

Sedan återskapades tre avbildningsfel med hjälp av GOT, sfärisk aberration, koma och kromatisk aberration. Resultatet från dessa undersökningar återfinns i figurer 4f-h. Det syns tydligt att ljusstrålarna böjs av mer när de propagerar genom linsens kant, jämfört med propagation genom linsens mitt, den "tjockare" delen, alltså uppstår sfärisk aberration i figur 4g. Samtidigt syns förskjutningen och defokuseringen av fokalpunkten tydligt i figur 4f, när ljuset kommer in snett mot den optiska axeln, där ett koma uppstår. Likaså syns det, om inte lika tydligt att brännpunkten förskjuts beroende på ljusets våglängd i figur 4h, då kromatisk aberration uppstår.

Har man en plankonvex lins är det bättre att placera den konvexa sidan mot ljuskällan, jämför figurer 4i och 4j. Då motverkas sfärisk aberration och fokalpunkten blir skarp. Anledningen till att sfärisk aberration motverkas skulle jag gissa på är att ljuset i detta fall bryts när det antrar linsen, och endast en gång, vilket leder till att sfärisk aberration inte uppstår.

### 5.2 Prismat

Vad gäller prismat togs ett tiotal mätvärden, för två våglängder,  $\lambda_1 = 555\text{ nm}$  och  $\lambda_2 = 700\text{ nm}$ . Dessa återfinns i tabell 1 och 2. Mätvärdena plottades i MATLAB och för att skapa en kontinuerlig avläkningskurva valde jag att anpassa tredjegradspolynom till mätdata. Plotten och kurvorna syns i figur 5. Att göra denna anpassningen fungerade bra för  $\lambda_1$  men inte riktigt lika bra för  $\lambda_2$ . Antagligen hade jag bara tur i anpassningen. Med hjälp av dessa anpassade kurvor sökte jag sedan minsta avläkningsvinkel numeriskt och fick ut minsta deviation  $\delta_1 = 64.0680^\circ$  för  $\lambda_1$  och  $\delta_2 = 57.5861^\circ$  för  $\lambda_2$ . Detta resultat kan diskuteras på två sätt: rimligheten hos resultatet och rimligheten hos metoden som användes för att få fram resultatet. Vi börjar med det förstnämnda.

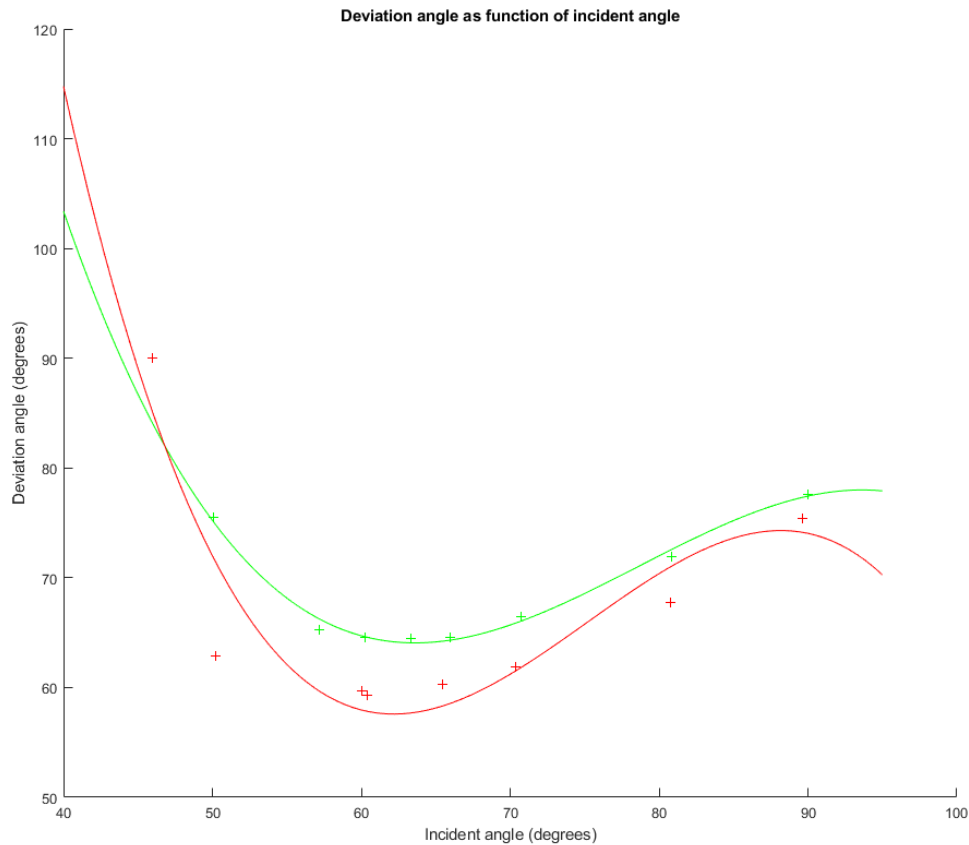


Figure 5: Mätvärden plottade och tredjegradspolynom anpassade till mätvärdena. Gröna mätpunkter och kurvor motsvarar  $\lambda_1$  och röda  $\lambda_2$ .

### 5.2.1 Rimlighetsbedömning av resultatet

Vi skall diskutera om de givna avläkningsvinklarna är rimliga under rådande förhållanden. För att göra denna rimlighetsbedömning skall jag använda Snells brytningslag (ekvation 4) och formeln för minsta avläkning (ekvation 5). Med hjälp av Snells brytningslag beräknar jag brytningsindex för de två våglängderna och prismats material. När vi känner till dessa kan vi med hjälp av ekvation 5 beräkna det som borde vara minsta avläkningsvinkel. I GOT skapar jag ett rektangulärt glasblock och mäter infalls- och brytningsvinkel. Jag antar att det infallande mediet är luft. För  $\lambda_1 = 555 \text{ nm}$  får vi  $n_1 = 1.0$ ,  $\alpha_1 = 45^\circ$ ,  $\alpha_2 = 23.42^\circ$

$$\begin{aligned} n_1 * \sin(\alpha_1) &= n_2 * \sin(\alpha_2) \\ n_2 &= \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} \\ n_2 &= 1.779 \end{aligned} \tag{7}$$

Insättning i ekvation 5 ger ett förväntat värde  $\delta_1 = 65.62^\circ$  för ljus med våglängden 555 nm.

Mätningen med 700 nm ger en vinkel  $\alpha_2 = 23.91^\circ$  ett brytningsindex  $n_2 = 1.745$ , vilket ger en minsta avläkningsvinkel  $\delta = 61.50^\circ$ . Jämfört med de uppmätta värdena verkar mätvärdena (och anpassningen) för  $\lambda_1$  stämma bra, men inte för  $\lambda_2$ . För  $\lambda_2$  ser det sanna minimat ut att ligga kring  $60^\circ$ , vilket överensstämmer bättre med det analytiska resultatet. Anledningen till varför det inte kan stämma kan bero på det jag skall diskutera i nästa stycke.



### 5.2.2 Rimlighetsbedömning av metoden

Nu övergår diskussionen till huruvida metoden jag använde för att beräkna minsta avlänkingsvinkel är rimlig, om det finns något att förbättra med den och i så fall, vad. Inledningsvis kan det nämnas att anledningen till att jag valde att anpassa just ett tredjegradspolynom var att ett andragrads-polynom gav ännu sämre anpassning, och ett fjärdegradspolynom gav ett orimligt utseende på kurvan. Självklart är inte sambandet mellan infallsvinkel och anvlänkingsvinkel ett polynom, utan en komplicerad trigonometrisk funktion. Givetvis skulle man kunna anpassa en sådan funktion till mätvärdena, men MATLAB har ingen sådan funktion inbyggd så det skulle vara alltför tidskrävande att göra det manuellt i detta fall.

Eftersom jag försöker representera en typ av samband med ett annat kommer det naturligtvis uppstå en felkälla där. En förbättring skulle därför vara att analytiskt härleda detta trigonometriska samband och anpassa det till mätvärdena, istället för en godtycklig tredjegradskurva. Dessutom skulle man i en framtida laboration kunna ta fler mätpunkter, speciellt kring området där minimat borde ligga, för att öka precisionen i resultatet. I en optimal värld skulle man kunna skriva ett program som går igenom och tar mätvärden för exempelvis 100 eller 1000 värden mellan två angivna infallsvinklar. Detta leder också in på vad som skulle kunna vara en felkälla till: nämligen precisionen hos mätningarna då de gjordes för hand med hjälp av en digital linjal. En förbättring skulle alltså vara att modifiera GOT så att programmet också kan mäta avlänkingsvinklar. Detta skulle eliminera möjligheten för mänskligt fel just i det steget.

### 5.3 Allmän diskussion kring svårigheter i laborationen

För min del var det svårast att greppa hur mätningen av avlänkingsvinkeln skulle gå till. Först och främst måste man inse vilken vinkel som är rätt, för att sedan lista ut hur man skall mäta den. Det tog mig några försök innan jag insåg vilken vinkel som var den rätta. Till en början satt jag också och funderade på om jag skulle mäta vinkeln för hand eller inte, men efter lite googlande hittade jag verktyget MB-Ruler.

Mitt tips till en framtida student är därför att vara rejält påläst kring prismafenomen innan man börjar laborationen, samt att använda sig av verktyget MB-Ruler eller motsvarande för att mäta vinklar.

## 6 Referenser

- [1] Jönsson G. Våglära och Optik. Lund: Teach Support, 2018.
- [2] Wikipedia. Beam divergence [Online]. [https://en.wikipedia.org/wiki/Beam\\_divergence](https://en.wikipedia.org/wiki/Beam_divergence) [2020-03-27]
- [3] Mauritsson J. Kollimera [Online]. 2017. <https://youtu.be/G3TCW3y5oMc> [2020-03-27]
- [4] Mauritsson J. Linjera [Online]. 2017. <https://youtu.be/8TzarQwkxPo> [2020-03-27]
- [5] Gustavsson D, Ahrling R. Appendix avbildningsfel i Optik 2020 [Online]. 2020. <https://canvas.education.lu.se/courses/3383/files/308598/download> [2020-03-27]

## 7 Appendix A - Kollimering och linjering

### 7.1 Kollimering

Kollimering (från latin: collimare - kasta i rak riktning) innebär att man använder en konvex lins för att parallellisera ljuset från en divergent ljuskälla. Detta görs genom att placera linsen framför ljusstrålen, med fördel nära ljuskällan och justera avståndet till källan tills strålarna är parallella på alla avstånd. En spegel kan användas så att ljuskälla och kollimeringspunkt hamnar bredvid varandra. Se figur 6. Genom att placera linsen nära ljuskällan ser vi till att brännvidden blir oändlig [3].

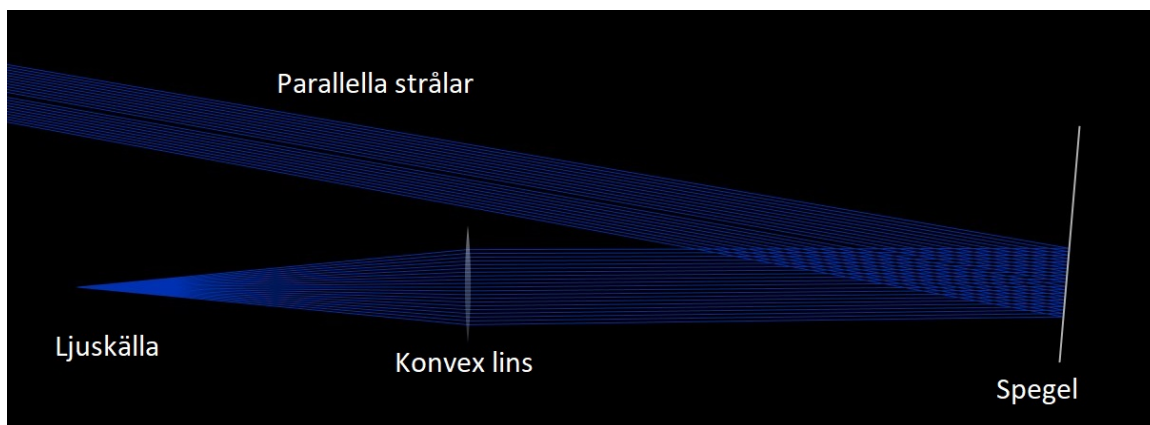


Figure 6: Kollimering av en divergent ljusstråle.

### 7.2 Linjering

Att linjera lasern innebär att man tar en parallelliserad ljuskälla, exempelvis en laserstråle och ser till att det går igenom två bländare med rakast möjliga väg. Detta görs genom att placera ut två speglar, en så nära den första bländaren som möjligt, och en så att ljusstrålen böjs ned mot den andra spegeln. Se figur 7. Sedan justeras spegel 1 i figuren så att ljuset passerar igenom första bländaren så centralt som möjligt. Sedan används spegel 2 för att se till att hela ljusstrålen passerar genom den vänstra bländaren [4].



Figure 7: Kollimering av en divergent ljusstråle.

## 8 Övriga appendix

Appendix B - MATLAB-kod från undersökningen av prismat. Återfinns på <https://raw.githubusercontent.com/zentabit/vaglara/master/laborationer/laboration1/measure.m>.