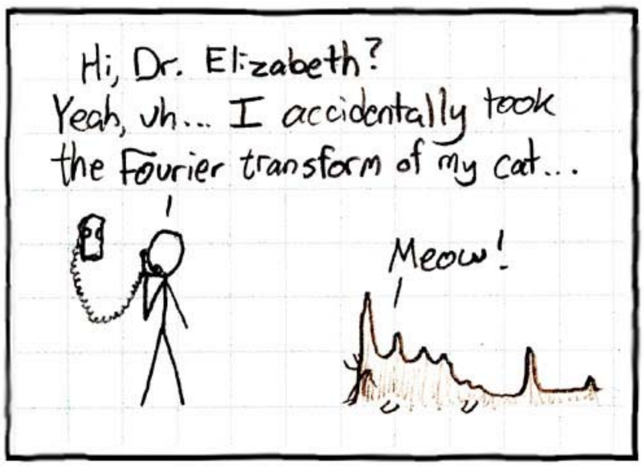
Matlabuppgift 3
Fouriersummor och transformer
2020

Instruktioner till MatLab

Våglära och optik FAFF30 & FAFF40



Anna Olofsson	anna.olofsson@fysik.lth.se
Sara Mikaelsson	sara.mikaelsson@fysik.lth.se
Samuel Selleck	sa2421se-s@student.lu.se
Johan Mauritsson	johan.mauritsson@fysik.lth.se

Matlabuppgift 3

I den här datorlaborationen ska du studera Fouriersummor och Fouriertransformer med hjälp av MATLAB. Har du problem med programmeringen, tveka inte att fråga handledaren! Tanken är att du skall se hur man kan använda datorn för att förstå fysik, inte att examinera din programmeringsfärdighet.

1 Fouriersummor

Periodiska funktioner (med periodtiden $T = \frac{2\pi}{\omega}$) går det att skriva funktionen som en summa av sinus- och cosinusfunktioner:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \cdots$$
$$+ b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \ldots$$

Det vill säga, utöver funktionens grundfrekvens, ω, behövs övertonerna 2ω, 3ω osv för att bygga upp funktionen. Om funktionen dessutom inte är centrerar runt noll behövs dessutom en konstant term a_0 (brukar kallas DC term eftersom den inte är associerad till någon svängning). Om funktionen är känd beräknas koefficienterna som:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, dt$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega t\, dt$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega t\, dt$$

Ni ska med hjälp av MATLAB undersöka tre periodiska funktioner och se hur deras form ändras succesivt när ni lägger till fler och fler övertoner. Vi kommer att underlätta beräkningarna något genom att välja fasen på grundfrekvensen så att alla $a_n = 0$ (dvs våra funktioner påminner ganska mycket om en sinusfunktion).

Funktion	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	*Tot*
Sinus	1	0	0	0	0	0	0	Endast $m = 0$
Fyrkant	1	0	$1/3$	0	$1/5$	0	$1/7$	$1/m$ för udda m
Triangel	1	0	$-1/9$	0	$1/25$	0	$-1/49$	$(-1)^{(m-1)/2}/m^2$ för udda m
Sågtand	1	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/6$	$1/7$	$1/m$ för alla m

2 Fouriertransform

För funktioner som inte är periodiska räcker det inte att endast addera övertonerna utan det behövs ett kontinuerligt spektrum av frekvenser och summeringen övergår till en intergral, en Fouriertransform (titta gärna på https://youtu.be/spUNpyF58BY).

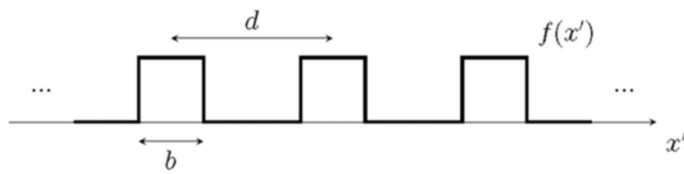
Då vi studerar Fraunhoferdiffraktion där plana vågor infaller mot ett hinder och mönstret studeras på en skärm långt borta går det att visa att mönstret på skärmen (fjärrfältet) är en Fouriertransform av hindret (närfältet).

2.1 FFT

I MATLAB kan man beräkna en numerisk approximation till Fouriertransformen med hjälp av kommandot *fft* (*fft2* för den tvådimensionella varianten). Om längden på vektorn som ni transformerar kan skrivas som 2^n där n är ett heltal, kan MATLAB utnyttja en mycket kraftfull algoritm som är väldigt snabb (*Fast Fourier Transform, FFT*), men för problemen som ni studerar idag kommer ni antagligen inte att märka så stor skillnad oavsett längd på vektorn.

3 Utförande

Du ska studera ett spaltsystem med en eller flera spalter. För att göra detta skapar du en vektor med ettor och nollor som representerar en genomskärning av ljusintensiteten som passerar spaltsystemet:



Ettorna i vektorn motsvarar öppningarna och nollorna omvänt. Använd sedan funktionen *fft* för att Fouriertransformera ditt spaltsystem (transformen omvandlar då din vektor från närvältet till fjärrfältet). En bieffekt av *fft* är att den kommer att placera de låga frekvenserna i ytterkanterna av vektorn, så använd kommandot *fftshift* för att få den lägsta frekvensen (DC komponenten) i mitten av vektorn. Vidare så innehåller den nya vektorn komplexa värden vilket kan liknas vid det elektriska fältet, så för att få ett resultat som är proportionelt mot intensiteten så tas absolutbeloppet av vektorn i kvadrat.

Börja med att rita intensiteten från en ensam spalt och studera hur mönstret i fjärrfältet ändras då du ändrar spaltens bredd.

Lägg nu till en spalt till och studera mönstret, stämmer det med vad du hade förväntat dig? Hur ändras mönstret då avståndet mellan spalterna ändras?

Hur ser det ut om du har 3, 4 eller 5 jämt fördelade spalter?

Extra

Om du vill och har tid kan du jämföra dina mönster med det analytiska diffraktionsmönstret för ett flerspaltssystem med godtyckligt antal spalter, N, avstånd mellan spalterna, d, och godtycklig bredd, b, på spalterna:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin N\gamma}{\sin(\gamma)}\right)^2, \ \beta = \frac{\pi}{\lambda} b \sin\theta, \ \gamma = \frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta.$$

Det uttrycket ger intensiteten som funktion av faktiska värden och enheter, så du måste göra några antaganden kring var skärmen placeras, för att den ska vara i fjärrfältet. Normera de två vektorerna som beskriver mönstret (så att max i vektorn är 1) och jämför dem i samma figur. Vad är lika och vad skiljer?