概要

直觉上来说，如果一个函数具有连续性，那么它应该能一笔不停的画出图像来；如果一个函数具有可导性，那么它应该在图像中不会出现尖角。本章内容就是详细复习函数的连续性和可导性相关的知识的。

连续性

在一点处连续

一个函数的图像在某一点处连续，那么当你在画这个图像的时候，可以一笔通过这个点而不需要抬起笔，这就意味着，在该点附近，有一连串无限接近该点的点，也就是说，设该点为 a，当 $x \to a$ 时，$f(x) \to f(a)$ 。用数学来表示就是：

> 如果 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ，则函数 f 在点 $x = a$ 处连续。

注意，上面的式子包含了极限必须存在和 $f(a)$ 也存在，否则等号两边就没有意义了。如果极限不存在，则函数在该点处不连续（想象一下左右极限不一样，那么函数图像应当是左右分开的），如果函数值不存在，那函数上都没有这一点，自然也就不连续了。

函数在某一点处连续更精确一点的条件是：

- 双侧极限 $\lim_{x\to a} f(x)a$ 存在（并且是有限的）
- 函数在点 $x = a$ 处有定义，即 $f(a)$ 存在（并且是有限的）
- 以上两个量相等，即 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

在一个区间上连续

显然，当一个区间上的所有点都连续，那么函数在这个区间上就是连续的。不过这里有个需要注意的问题，就是区间端点的问题。因为闭区间左右两个端点都只有单侧极限，不过这不是什么大问题，只需要稍微修改一下条件即可：

- 函数 f 在 (a, b) 上的每一点都连续
- 函数 f 在点 $x = a$ 处右连续，即 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 存在（并且是有限的），并且 $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
- 函数 f 在点 $x = b$ 处左连续，即 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 存在（并且是有限的），并且 $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

也就是说，**在考虑一个闭区间的连续性的时候，需要的条件是开区间内所有点连续，然后两个端点具有单侧连续性。**

连续函数的一个例子

这里有一些有用的结论：一个连续函数的常数倍是连续的，两个连续函数做加法、减法、乘法或者复合，得到的函数也是连续的，一个连续函数除以另一个连续函数也会得到一个连续函数，但这时要去掉分母为 0 的点，例如，除了 x = 0 处，函数 1/x 在其他各处都是连续的，除此之外，指数函数和对数函数以及三角函数都是连续的。具体的证明读者可以自行查阅相关的资料。

现在来考虑极限：

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

在上一章中，我们知道可以直接带入 x = -1 去求解极限，但是没说为什么这样做得到的值就是极限值。通过这一章，就可以知道，这是两个连续函数做除法，所以得到的还是一个连续函数。而既然是连续函数，那么必然有 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ，所以这里的极限值就是函数值。

介值定理

> 如果 f 在 $[a, b]$ 上连续，并且 $f(a) < 0$ 并且 $f(b) > 0$ ，那么在区间 (a, b) 上至少有一点 c ，使得 $f(c) = 0$ 。当 $f(a) > 0$ 并且 $f(b) < 0$ 时同样成立。

具体证明可以自行查阅，这个定理很容易理解，想一想就会明白，连续函数的两个点，一个在 x 轴下方，一个在上方，函数图像必然会经过 x 轴。

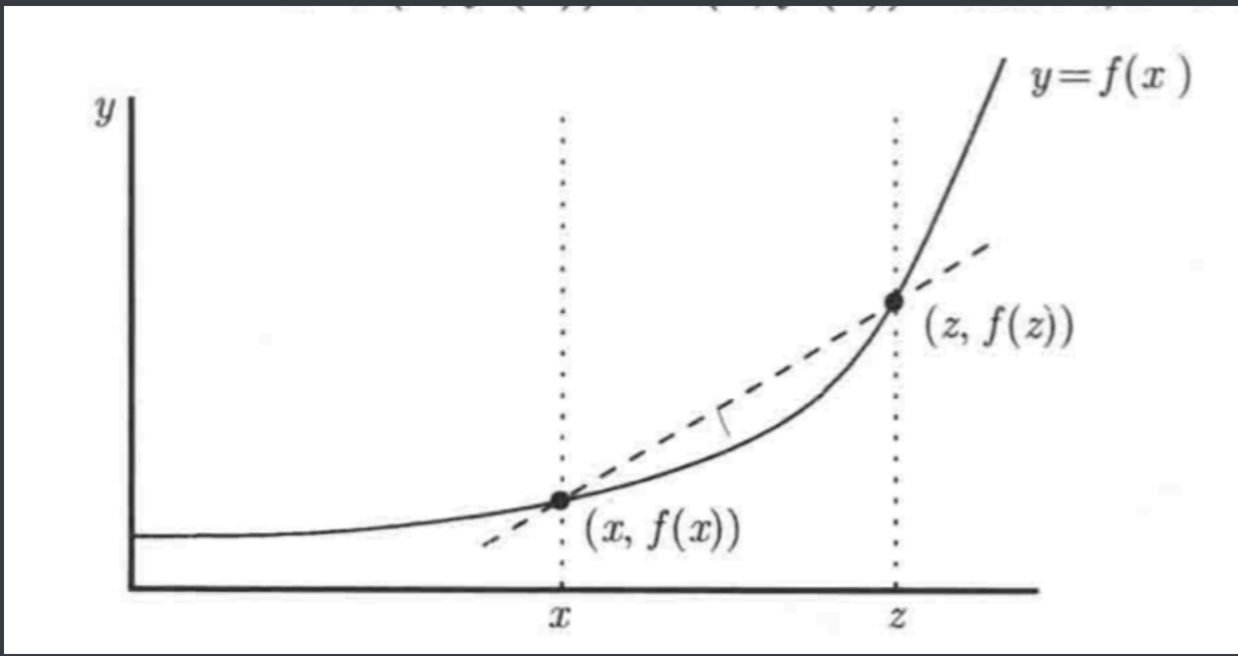
明白介值定理后，可以做出一些判断，例如，正明 $x = cos(x)$ 有解， 可以把方程转化为 $x - cos(x) = 0$ ，如果画图像，可以看出交点的 x 坐标在 $\pi/4$ 附近，所以令 $a = 0$ ，$b = \pi/2$ ，带入后得到 $x - cos(x)$ 分别是 -1 和 $\pi/2$ ，一个负数一个正数，由前面可知，三角函数和多项式相减依然是连续函数，所以可以带入介值定理，题目得证。

介值定理可以稍微做一下变体，0 可以换成任意数 M ，比较好理解就不做过多说明了。

可导性

切线

一个函数的在点 $(x, f(x))$ 处的切线就是与该函数曲线在这一点相切的直线，直线上一点 $(x, f(x))$ 已经得到，只需要知道该直线的斜率就可以求出该切线。



观察上图可知，当 z 越来越靠近 x，通过 $(x, f(x))$ 和 $(z, f(z))$ 两点的直线就越来越接近 x 点处的切线，而这条直线的斜率是：

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

所以，设 h = z - x，则过 $(x, f(x))$ 点的切线斜率为：

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

知道了切线斜率，切线就可以求出来了。

导函数

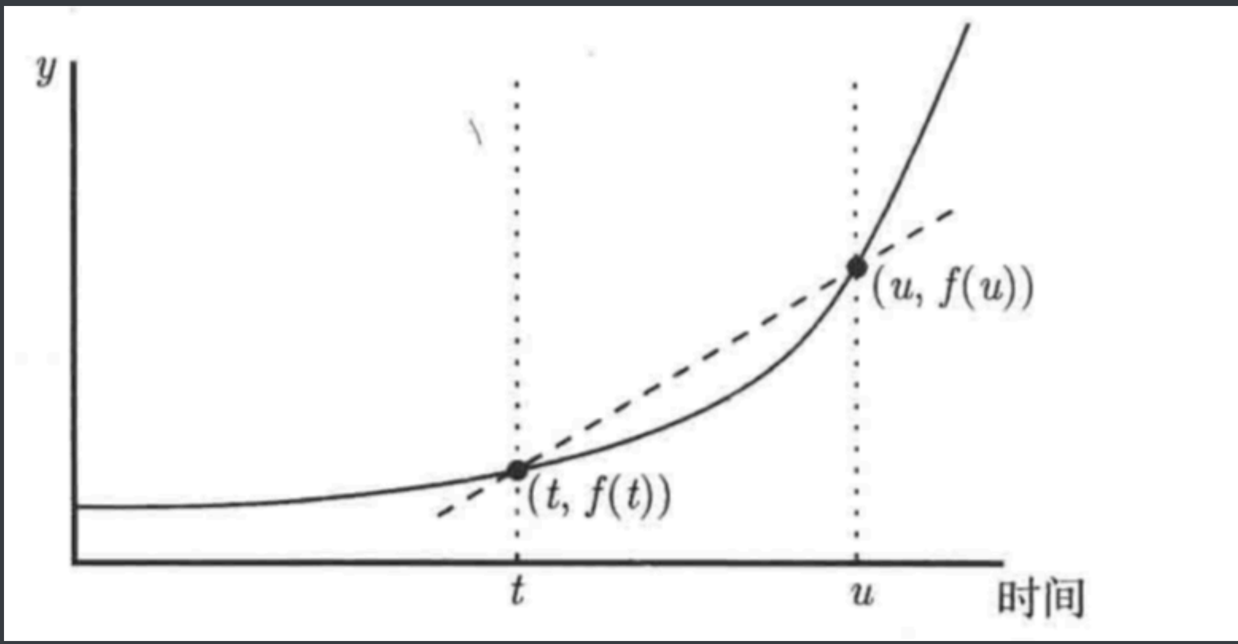
由上面的图应该很容易就明白，对于函数 f 的不同的 x 值，切线的斜率也不同，也就是说，切线的斜率也是一个关于 x 的函数，这个函数就被称为 f 的导数，写作 f' 。当函数极限存在时：

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

注意，当上面导数函数中等号右侧极限不存在或者 x 值根本就不在函数定义域的时候，导数是不存在的。

导数的例子

来看一个很常见的例子。



这是汽车位移关于时间的函数，现在求在时间 t 时刻，汽车的瞬时速度是多少?

首先，先求出 x 为 t 和 x 为 u 时函数上两点连线的斜率：

$$m = \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$$

由平均速度的定义可知，这也是这两个时刻之间汽车的平均速度，那么当 u 越接近 t 时，这个平均速度就越接近 t 时刻的瞬时速度，设 h = u - t，所以 t 时刻的瞬时速度为：

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

这个极限就是上面给出的函数在该点的导数。

再举一个求具体导数的例子，对于函数 $f(x) = x^2$ ，求其导数。过程如下：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

作为极限比的导数

在导数公式中，h 代表的是自变量的变化，通常这个变化我们用数学符号 Δ 表示，所以导数又可以写为：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

相应的，y 值的变化量可以表示为 Δy ，而这个变化量又恰好就是上面公式中的等号右边的分子部分，所以上面的公式还可以表示为：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

也就是说，导数等于函数值的变化量比上自变量的变化量，也就是说自变量变化 Δx 后 ，函数值变化了 Δx 的 $f'(x)$ 倍。举个例子，前面已经求得函数 $y = x^2$ 的导数是 $y' = 2x$ ，当 x 等于 10时，y 等于 100，当 x 变为 10.01 时，y 等于 100.2001，x 为 10，Δx 为 0.01，Δy 等于 0.2001，函数在该点的导数是 20，y 变化量和 x 变化量的比值是 20.01。读者可以自行用其他变化量去计算，当自变量的变化量越小，比值和导数值就越接近。

除了这个小三角符号外，还有一种表达方式很有用：即 $\mathrm{d}x$ ，它表示 x 中十分微小的变化，我理解的是已经包含了变化量很接近 0 这个前提，所以导数还可以表示为：

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

现在关于导数，我们有了多种表达方式，例如函数 $y = x^2$ 的导数，当 $y = f(x)$ 时：

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(x^2\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\right) = 2x$$

最后，请记住，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 不是一个分数，他是 $\Delta x \to 0$ 时 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 这个分数的极限。

二阶导数和更高阶的导数

导数的导数就是二阶导数，记为 f'' ，这跟正常的导数求法没有区别。对于二阶导数，我们有跟之前相似的符号去表示，还拿 $y = x^2$ 来举例：

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2\left(x^2\right)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(x^2\right) = 2$$

对于更高阶的导数，还有一种通用的表示方法，即对于 n 阶导数而言，可以用 $f^{(n)}$ 来表示。f^3, f^4 分别表示三阶导数和四阶导数，这种表示方法比之前的那些在表示高阶导数时更方便简洁。

何时导数不存在

之前提到过，导数函数极限不存在或者 x 值根本就不在原函数定义域的时候，导数是不存在的。连续函数不一定有导数，例如 $f(x) = |x|$ 在原点处就没有导数，因为在原点处该函数的导数函数的极限不存在（不是原函数极限不存在，是它的导数函数），但是它的单侧极限是存在的，所以，导数也可以用单侧导数来表示，即左导数和右导数：

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

它们看起来和正常的导数没什么区别，只不过双侧极限变为了单侧极限。和极限一样，左导数和右导数存在且相等，则函数在该点的导数存在且与左右导数相等；如果导数存在，那么该点的左右导数都存在且相等。

可导性和连续性

一个非常重要的结论：

> 如果一个函数在 x 上可导，那么它在 x 上连续。

现在来证明它。本文开头提到过如何证明函数连续，即需要证明：

$$\lim_{u \to x} f(u) = f(x)$$

设 h = u - x ，则要证明的是：

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

因为函数可导（这是前提），所以 $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 存在，当然 $f(x)$ 也存在。现在将导数极限内部乘上一个 h，则有：

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \times h \right) = \lim_{h \to 0} (f(x+h)-f(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \times \lim_{h \to 0} h = f'(x) \times$$

把重要的部分提取出来：

$$\lim_{h \to 0} (f(x+h)-f(x)) = 0$$

$f(x)$ 是函数值，并不依赖于极限，所以可以提出来，最后有：

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

结论得证。

最后以那句大部分都背过的结论结尾：**可导函数必连续，连续函数不一定可导**。这句话在本文应该都得到了解释。