概要

学习微积分必须了解三角学，尽管最开始可能不会碰到太多三角学的内容，但如果不复习一下，遇到的话还是会感觉有些不容易，所以这一章就来复习三角学的一些基础知识。

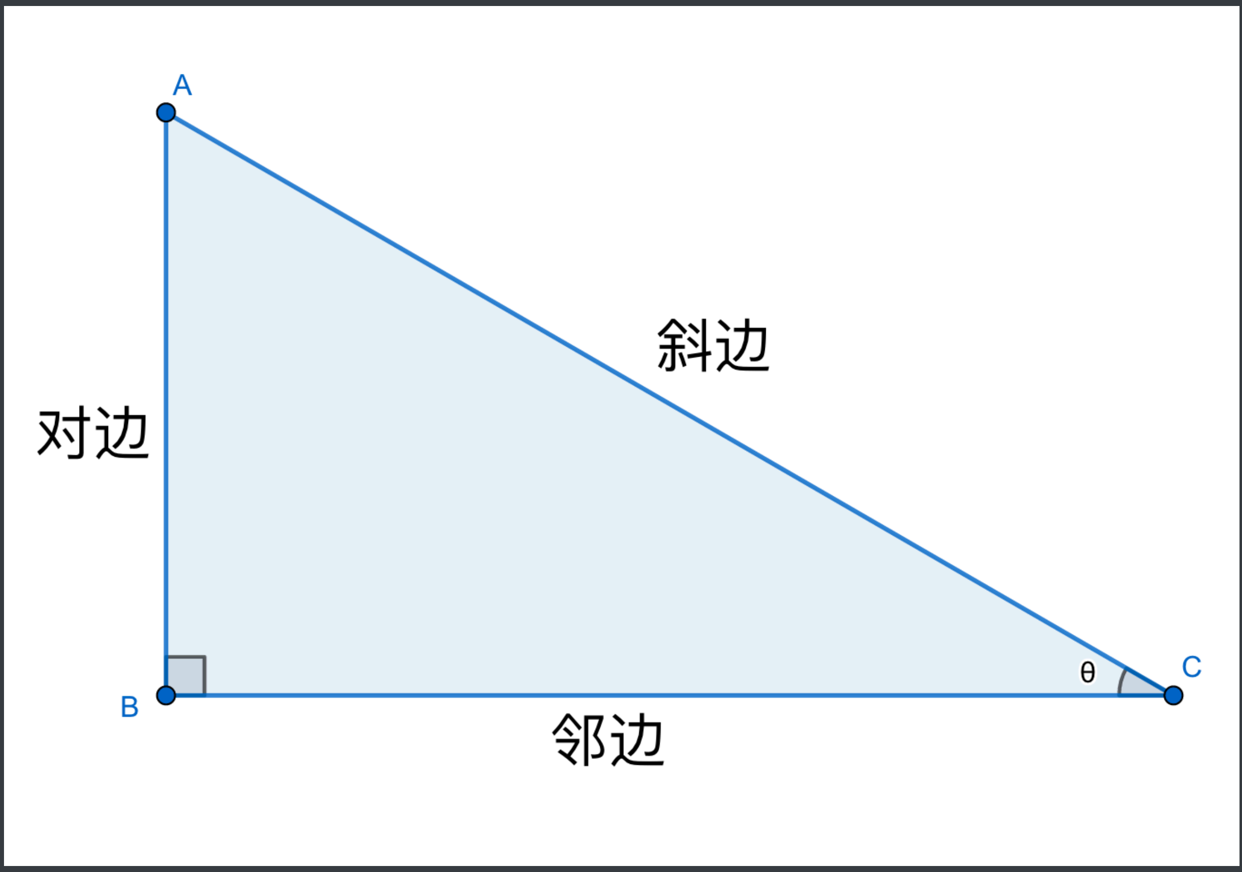
基本知识

弧度和角度

首先要复习的是弧度的概念，$1\pi_{\text{弧度}} = 180^\circ$，转换公式为：

$$\text{弧度} = \frac{\pi}{180} \times \text{角度}$$

三角函数



假设有一如上直角三角形，除直角外的一角度数为 θ，则基本三角函数公式为：

$$sin(\theta) = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}} \text{（正弦）}$$

$$cos(\theta) = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}} \text{（余弦）}$$

$$tan(\theta) = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}} \text{（正切）}$$

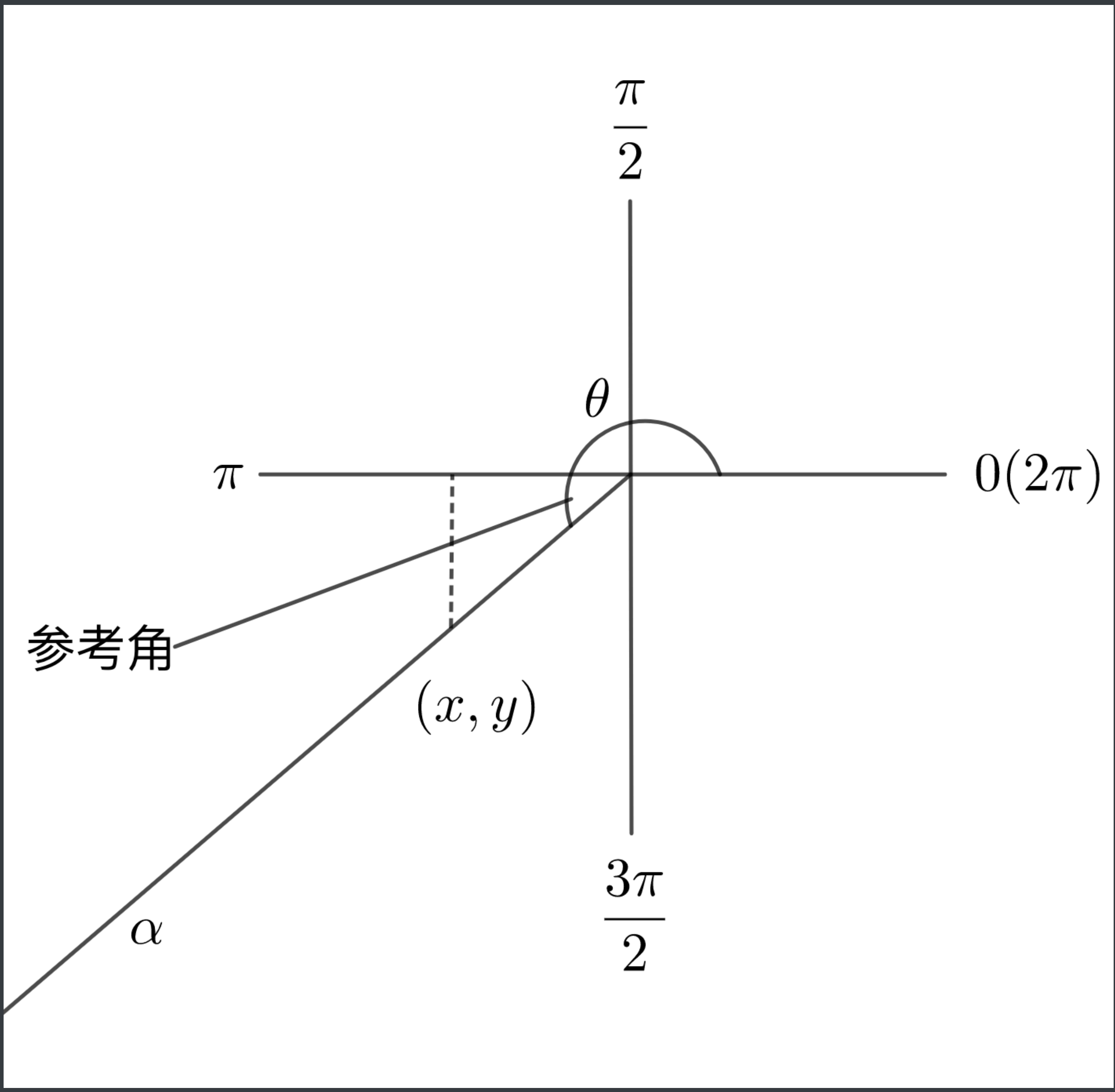
除此之外，还有几个相关的公式：

$$csc(x) = \frac{1}{sin(x)} \text{（余割）}$$
$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)} \text{（正割）}$$
$$cot(x) = \frac{1}{tan(x)} \text{（余切）}$$

扩展三角函数定义域

0 到 2π

上面例子所说的角都是在 0 到 π 之间，事实上，三角函数可以扩展到任意角度。入下图所示：



射线 α 从 x 轴正方向开始逆时针旋转了 θ 角，在射线上取一点 (x, y)，距离原点的距离为 r，则定义如下三角函数：

$$
sin(\theta) = \frac{y}{r}
$$
$$
cos(\theta) = \frac{x}{r}
$$
$$
tan(\theta) = \frac{y}{x}
$$

实际上，x，y，r 可以分别解释为邻边，对边，斜边，这与 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 范围内的三角函数是一样的。一般来说，我们会让 r 等于 1，这样无论射线如何旋转，点 (x, y) 都是落在单位圆上，方便计算。在这个前提下，我们来看一个例子：

假设 θ 是 $\frac{7\pi}{6}$ ，这也符合上图射线落在第三象限的事实，那么图中的参考角（即射线与 x 轴组成的较小的角）为 30 度，r 是 1，根据三角函数公式：

$$
sin(\theta) = sin(\frac{7\pi}{6}) = \frac{y}{r} = y
$$

所以想要求出正弦值，要知道 y 的值。由于 r 是 1，参考角是 30 度，所以根据正弦函数可知，y 是 $\frac{1}{2}$ ，所以算出来结果是 $\frac{1}{2}$ 。

但是这是错的！因为射线落在第三象限，所以 y 一定是负数，所以实际结果是 $-\frac{1}{2}$ 。

其他三角函数的计算过程同理。

ASTC

上例中的关键是将 $\frac{7\pi}{6}$ 和 $\frac{\pi}{6}$ 关联起来，事实上，读者应该很容易就能看出任意角度的正弦值就是参考角的正弦值的正或者负，所以我们只需要求出参考角（一定在 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间）的值，在选择正负号就可以了。

所以问题就变成了，如何判断三角函数的正负，按照上面的方法，读者应该能算出任意角度三角函数的正负，所以这里就不具体再算了，我直接把一个用来记结果的结论写出来，这个结论是 ASTC。

所谓 ASTC ，分别对应一二三四这四个象限的哪些三角函数为正，第一个字母 A 就是 ALL ，即第一象限全部为正，第二个字母 S(sin） 就是第二象限正弦为正，第三个字母 T(tan) 就是第三象限正切为正，第四个字母 C(cos) 就是第四象限余弦为正，不为正的三角函数就是负的。

ASTC 方法有一个缺点，就是不能表示 0，90，180，270 这些射线正好落在坐标轴上的角度，这时候就需要自己计算了。

任意角度

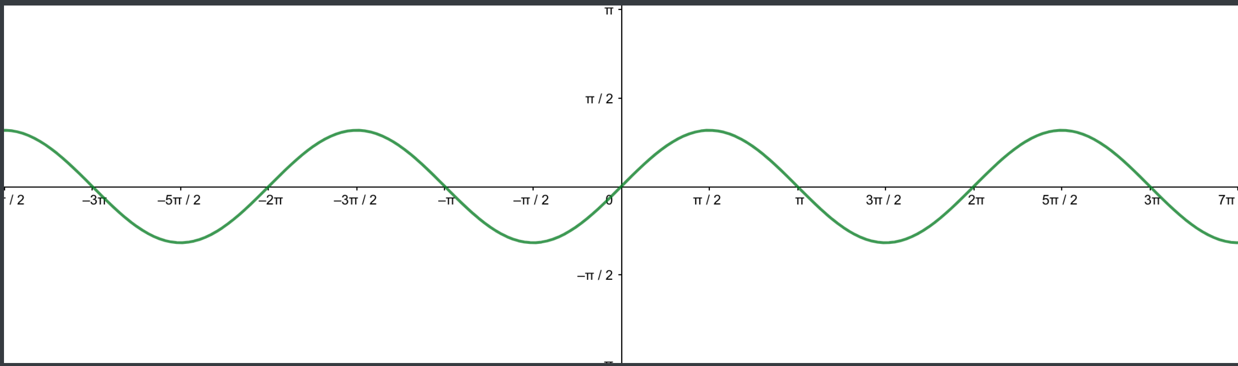
360 度一个循环，我想应该不需要过多说明了。

三角函数的图像

记住正弦，余弦，正切函数的图像非常有用。

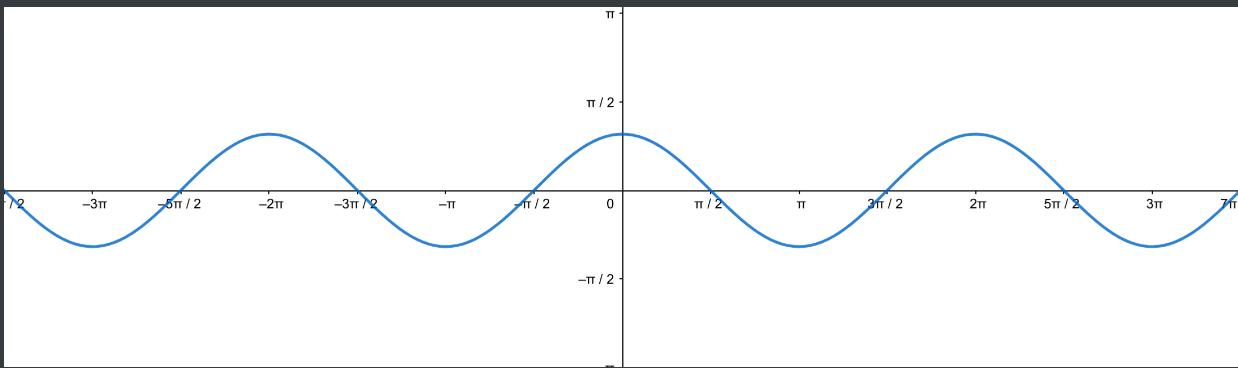
正弦函数

下图是正弦函数的图像，正弦函数为奇函数：



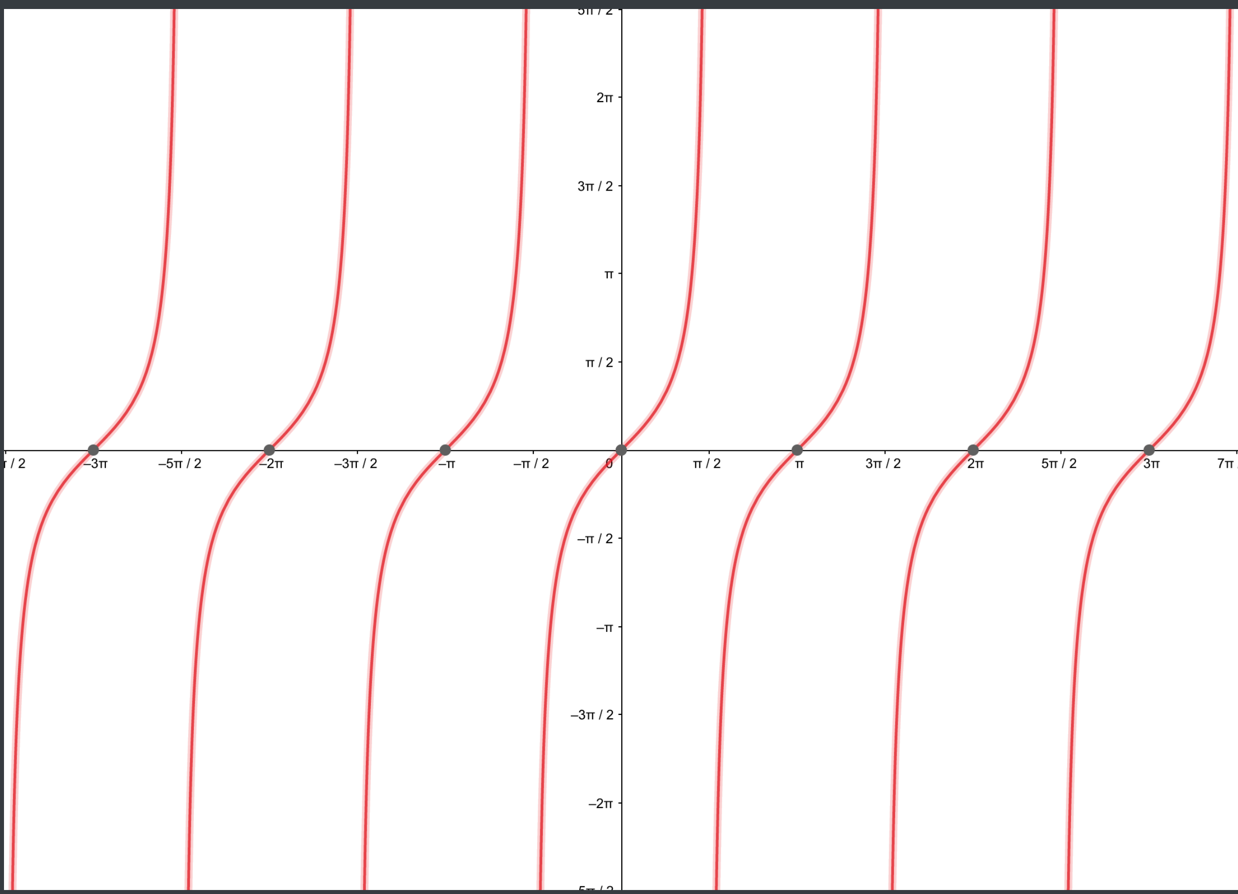
余弦函数

下图是余弦函数的图像，余弦函数为偶函数：



正切函数

下图为正切函数的图像，正切函数为奇函数：



正切函数稍微特殊一些，它以 π 为周期，重复着 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 的内容，并且正切函数在 x 为 $\frac{\pi}{2}$ 的倍数时，没有定义。而其余两个函数，都是以 2π 为周期。

三角恒等式

三角函数有一些重要的恒等式，这些等式会在求各种问题的时候频繁用到，下面给出这些恒等式：

首先，由正弦函数和余弦函数的公式可以得到（稍微思考就能得到，就不解释了）：

$$tan(\theta) = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)}$$

另一个非常重要的公式是毕达哥拉斯定理（用三角函数表示）：

$$cos^2(x) + sin^2(x) = 1$$

为什么是毕达哥拉斯定理（勾股定理）呢，因为如果直角三角形的斜边长为 1，其中一个角为 x，那么 $cos(x)$ 就等于邻边长，$sin(x)$ 就等于对边长，邻边长的平方加上对边长的平方等于斜边长的平方。

现在，将上面的公式两边同时除以 $cos^2(x)$，得到：

$$1 + tan^2(x) = sec^2(x)$$

这个公式在微积分会经常出现，另外，如果是同时除以 $sin^2(x)$，则会得到：

$$cot^2(x) + 1 = csc^2(x)$$

不过这个公式可能没有其他公式出现那么频繁。

三角函数还有一些恒等式，同学们可能已经注意到，一些三角函数的名字里带【余】这个字，这是互余 (complementary) 的意思，前面带 co (complementary 的缩写) 的三角函数就是这类函数，如 cos 余弦，cot 余切，csc 余割（其余都是正字开头）。互余在三角中的意思就是两个角相加等于 90 度，也就是说，某个三角函数和与其互余的三角函数之间有 90 度的关系，由此可以稍微方便地记住下面公式：

$$\text{三角函数}(x) = co - \text{三角函数}(\frac{\pi}{2} - x)$$

具体点为：

$$\begin{aligned} sin(x) &= cos(\frac{\pi}{2} - x) \text{ 正弦和余弦} \\ tan(x) &= cot(\frac{\pi}{2} - x) \text{ 正切和余切} \\ sec(x) &= csc(\frac{\pi}{2} - x) \text{ 正割和余割} \end{aligned}$$

当反过来也是一样的：

$$\begin{aligned} cos(x) &= sin(\frac{\pi}{2} - x) \\ cot(x) &= tan(\frac{\pi}{2} - x) \\ csc(x) &= sec(\frac{\pi}{2} - x) \end{aligned}$$

最后，还有一组恒等式最好记住，它就是和角公式：

$$\begin{aligned} sin(A + B) &= sin(A)cos(B) + cos(A)sin(B) \\ cos(A + B) &= cos(A)cos(B) - sin(A)sin(B) \end{aligned}$$

当加号变为减号时，利用上述公式和函数的奇偶性可得：

$$\begin{aligned} sin(A - B) &= sin(A)cos(B) - cos(A)sin(B) \\ cos(A - B) &= cos(A)cos(B) + sin(A)sin(B) \end{aligned}$$

结果就相当于把拆分后的加减号互换。

基于上述和角公式，当 A 和 B 相等时，设 A 和 B 都为 x，则可以得到倍角公式：

$$\begin{aligned} sin(2x) &= 2sin(x)cos(x) \\ cos(2x) &= cos^2(x) - sin^2(x) \end{aligned}$$

正弦函数的倍角公式没什么更多可说的，但余弦函数的倍角公式一般还会进行下一步转换，由毕达哥拉斯定理可知，$sin^2(x) + cos^2(x) = 1$，所以，$sin^2(x) = 1 - cos^2(x)$，也有 $cos^2(x) = 1 - sin^2(x)$，所以余弦函数的倍角公式也可以写为：

$$cos(2x) = 2cos^2(x) - 1 = 1 - 2sin^2(x)$$

这个形式通常更有用。

$sin(4x)$ 之类的只需要由上述公式推导即可，掌握了这些，后面的学习会好很多。

结尾

这一章复习了三角函数的基本知识，基本上大学以前也都应该看过了，下一章，将会开始复习极限相关的知识。

这个系列主要还是我自己用来记录复习笔记的，我会坚持写下去，如果对这个系列有什么建议，欢迎提出来～

感谢阅读，如果发现错误，还请通知我，谢谢～