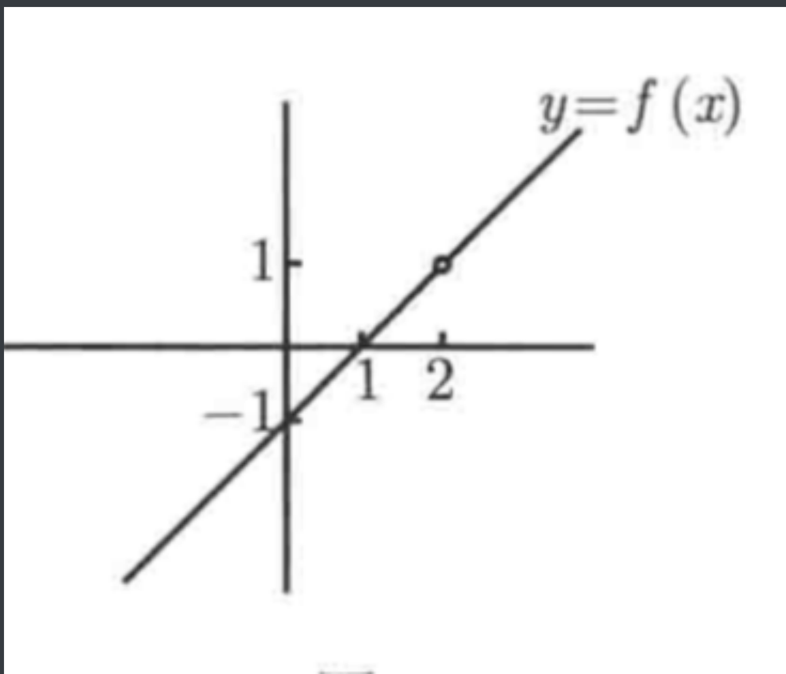
概要

如果没有极限的概念，微积分将不复存在，这意味着我们将会花费大量时间去研究极限。精确定义极限并不是很简单的事情，但我们依然可以对其有一个直观的理解，而无需深入体会其细节，这对于解决微分和积分问题已经足够了，因此，本文只包含对极限的直观描述，正式的描述读者可以参阅相关的数学文献。

基本思想

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

上述等式表示：当 x 趋近于 a 时，函数的极限是 b 。注意，为什么 x 是趋近于 a 而不是等于 a 呢，考虑下图的情况：



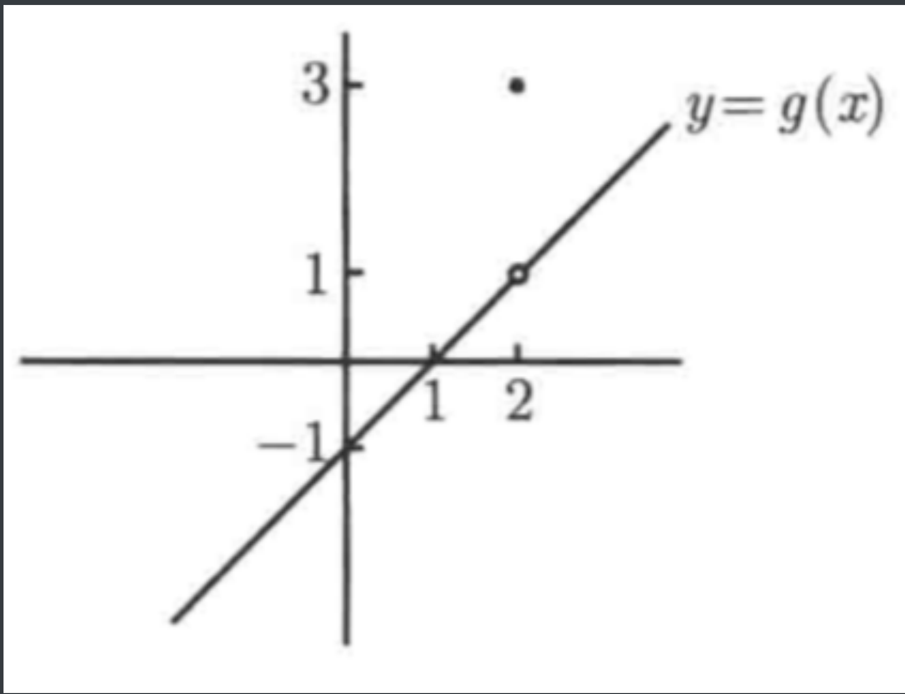
假设 a 等于 2，当 x 等于 2 时，该函数是没有定义的，所以这时候无法求函数在 x 等于 2 位置的值，但我们可以求 x 非常接近于 2 时的值。由图可知，这个函数是 $f(x) = x - 1, x \neq 2$ 。当 x 等于 1.9 时，函数值是 0.9，当 x 等于 2.1 时，函数值时 1.1，当 x 等于 1.99 时，函数值时 0.99，当函数值是 2.01 时，函数值是 1.01，由此可见，x 越接近 2，函数值越接近 1，但永远不可能等于 1，因为 x 不可能等于 2。也就是说，当 x 趋近于 2 时，函数的极限是 1，按照上面的等式写就是：

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$$

再看一个例子，有如下函数：

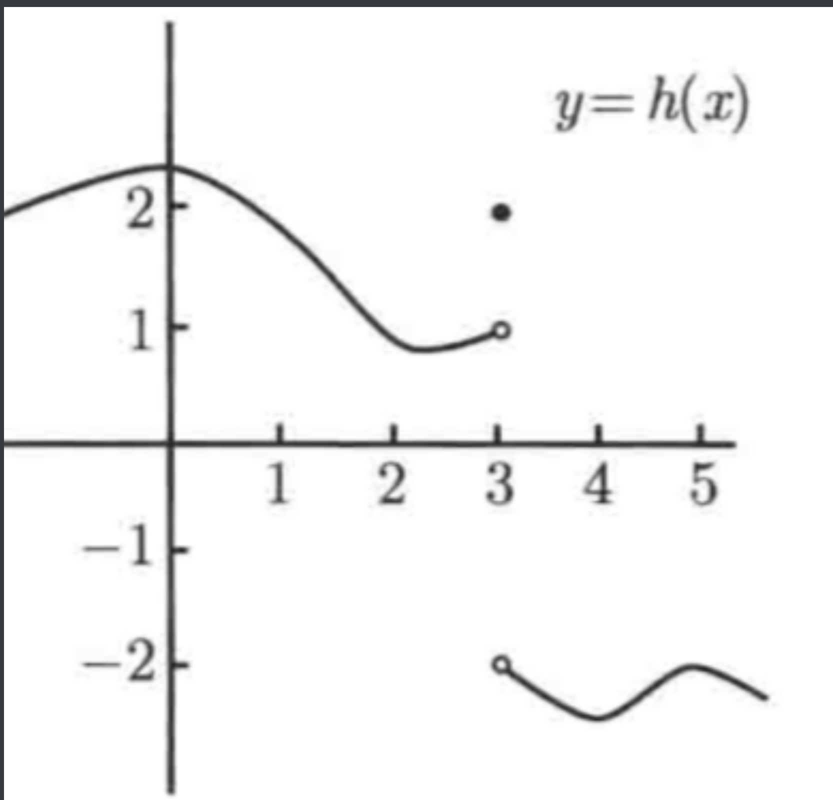
$$g(x) = \begin{cases} x - 1\ ,\ x \neq 2 \\ 3\ ,\ x = 2 \end{cases}$$

它的图像如下：



此时，该函数的定义域是全体实数，那么 $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ 值是多少呢？答案还是 1，并不是 3。因为这个表达式表示的是当 x 趋近于 2 时的值，并不是 x 等于 2 时的值，所以 x 在 2 处有没有定义其实是没有影响的，所以自然和上一个问题的答案是一样的了。**也就是说，一个点的极限值和该点的函数值没有关系。**

左极限和右极限



上图所示的函数，在 x 等于 3 处，极限值是多少呢？是 1？ 还是 -2？如果从左边开始逼近，就会得到 1 的结果，如果从右边开始逼近，就会得到 -2 的结果，这与之前的例子有些不同，极限出现了两个。实际上，这两个值分别叫做【左极限】和【右极限】。数学表示如下：

$$\lim_{x \to 3^-} = 1$$
$$\lim_{x \to 3^+} = -2$$

观察可知，左极限用一个小减号表示，右极限用一个小加号表示，注意符号是在后边写的。用减号表示左极限，是因为这是表示此极限只涉及小于 3 的 x 值，加号同理。**如果不写减号或者加号，则表示为【双侧极限】**，这很重要，符号不同和有无，会影响表达式的意思。

那么这个函数在 x 趋近于 3 处的极限到底是多少呢，答案是不存在，因为它的左极限和右极限不相等。一般我们说的极限，是指代双侧极限，只有左极限和右极限都存在且相等，双侧极限才存在，并且等于左右极限的值，所以在这个问题下，极限不存在。双侧极限存在的数学表示为：

$$\lim_{x \to a^-} = \lim_{x \to a^+} = \lim_{x \to a} = L$$

当双侧极限不存在时，写作:

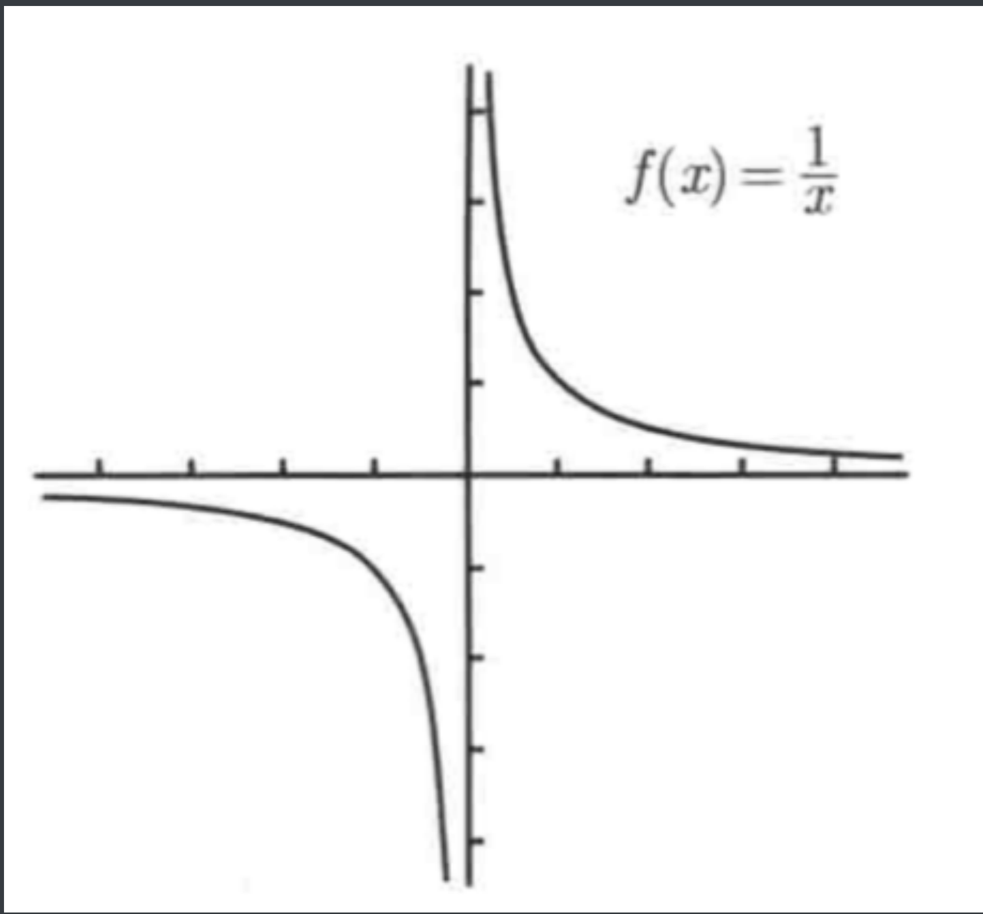
$$\lim_{x \to a} \text{不存在}$$

或者用缩写【DNE】表示不存在。

何时极限不存在

现在通过一些例子来考虑极限不存在的情况。

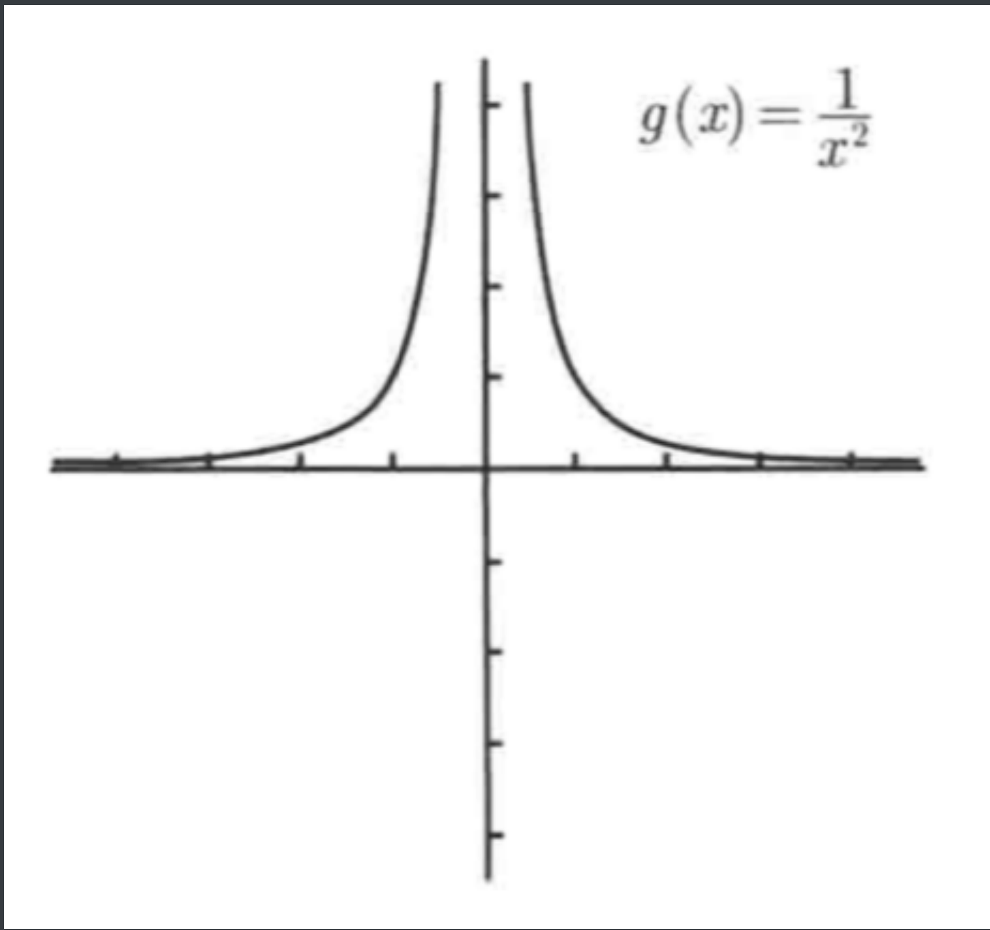
考虑函数 $f(x) = \frac{1}{x}$，图像如下：



$\lim_{x\to 0} f(x)$ 是多少呢？先来看右极限，从 x 轴正方向无限逼近原点，显然函数值越来越大，有多大呢？比任何数都大，我们以 ∞ 来表示无穷。同理，左极限比任何数都负（用小怕有误解，所以用负来表示），所以是 $-\infty$，即负无穷，数学表示如下：

$$\lim_{x\to 0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} = \infty$$

左右极限存在但不相等，所以双侧极限不存在。下面再看另一个例子，考虑函数 $g(x)=\frac{1}{x^2}$ ，图像如下：

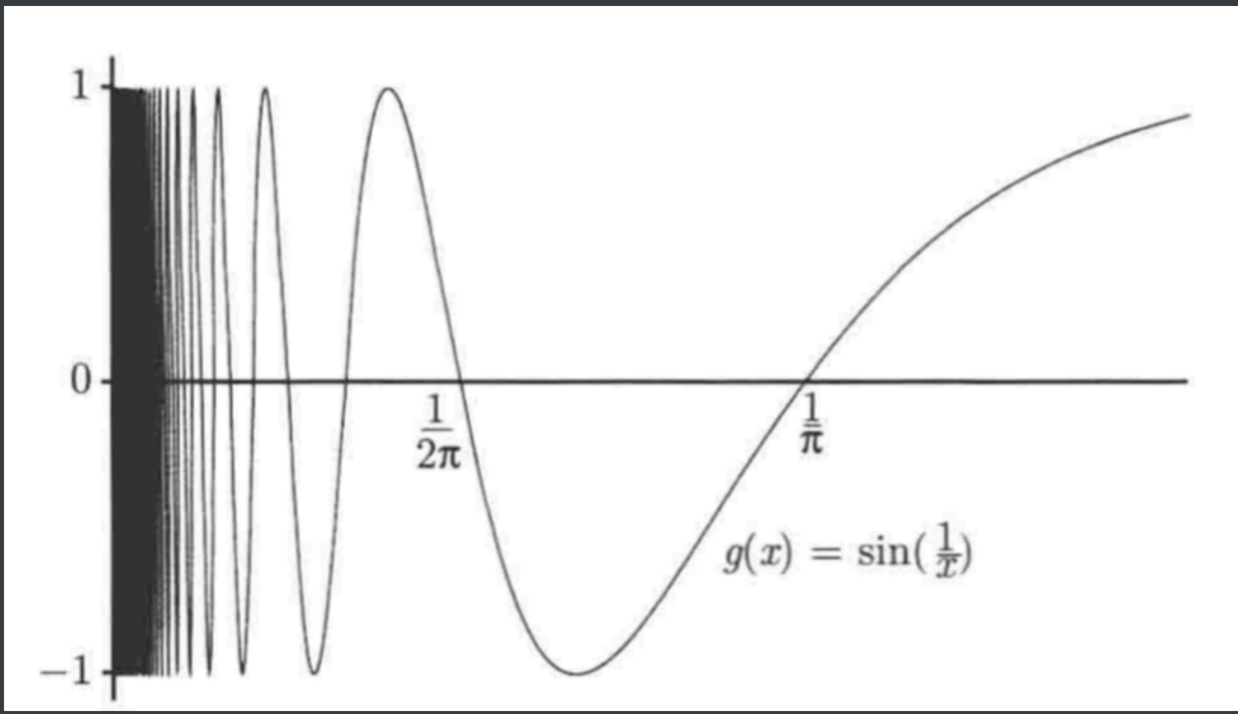


在 x 趋近于 0 时，这个函数的左右极限都是 ∞ ，所以双侧极限是 ∞ 。这里顺便引出【垂直渐近线】的概

> 念： f 在 $x = a$ 处有一条垂直渐近线指的是，$\lim_{x \to a^-}$ 和 $\lim_{x \to a^+}$ 中，至少有一个是 ∞ 或 $-\infty$ 。

那么是否有不存在左极限或者右极限的函数呢？答案是有，考虑这个函数：

$$g(x) = sin(\frac{1}{x})$$



其 y 轴右侧图像如上图所示，x 轴的截距分别是： $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \cdots$ ，越接近 0 时越挤，而在每个 x 轴截距之间，都会走到函数值为 1 或者 -1，也就是整个函数一直在 1 和 -1 之间摆荡，所以当 x 从右侧趋近于 0 时，函数不趋近于任何值，只会在 1 和 -1 之间摆荡，所以没有右极限。

在 ∞ 和 $-\infty$ 处的极限

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ 表示当 x 非常负时，$f(x)$ 趋近于 L，这表示函数图像有一条左侧水平渐近线，同理，$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ 表示当 x 非常大时，$f(x)$ 趋近于 L，这表示函数有一条右侧水平渐渐近线。也就是说：

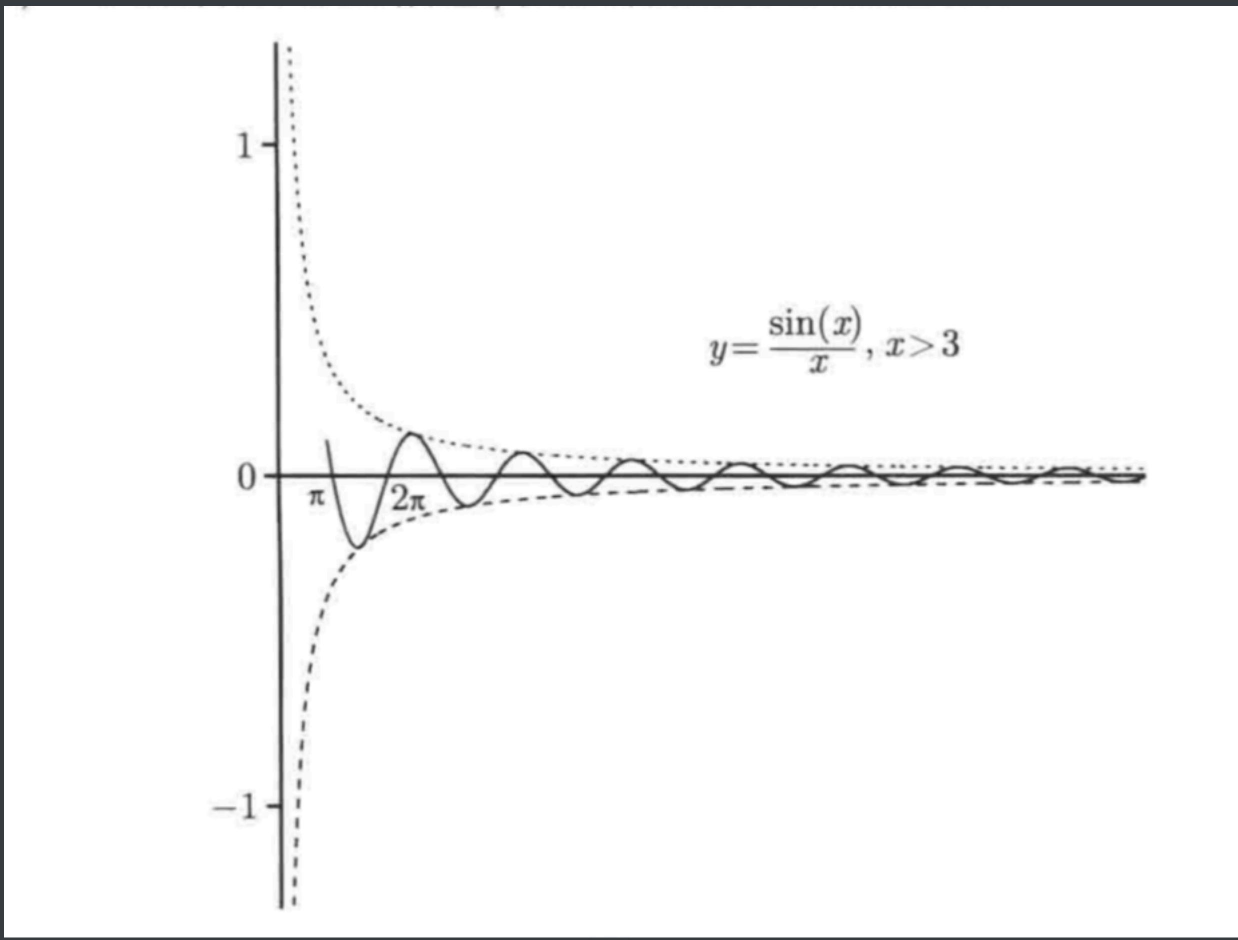
> f 在 $y = L$ 处有一条右侧水平渐近线意味着 $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$
>
> f 在 $y =$M 处有一条左侧水平渐近线意味着 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$

显然，像 $y = x^2$ 这样的函数没有任何水平渐近线，因为随着 x 的增大，y 也越来越大，可以表示为：$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$ 。除此之外，极限也可能不存在，例如 $sin(x)$ ，随着 x 的增大，函数值一直在 1 和 -1 之间波动。

关于渐近线的两个常见的误解

一个函数不一定要在左右两侧有相同的水平渐近线，函数在 $x = -\infty$ 处和 $x = \infty$ 处的极限不同，水平渐近线就不同。当然， 函数也可能只有一条水平渐近线，也可能一条没有，例如 $y = 2^x$ 有一条左侧水平渐近线，但没有右侧水平渐近线。一个函数最多只有两条水平渐近线，但可以有多条垂直渐近线，例如正切函数的图像就有多条垂直渐近线。

另一个误解是，函数不会和水平渐近线相交。考虑函数 $y = \frac{sin(x)}{x}$ ，其图像如下：



考虑 x 大于 0 时，当 x 无限大时，$sin(x)$ 在 1 和 -1 之间摆动，所以该函数在 ∞ 处的极限是 0（下一节会证明这个），也就是说该函数的右侧水平渐近线是 x 轴，但因为 $sin(x)$ 有正有负，所以整个函数也有正有负，则必有和 x 轴相交的点。

三明治定理

三明治定理（又称作夹逼定理），是说：

> 对于所有在 a 附近的 x，都有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ，且 $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ ，则 $\lim_{x\to a} h(x) = L$ 。

这个定理也适用于左极限和右极限。

下面让我们用这个定理来证明上一节的等式 $\lim_{x\to\infty} \frac{sin(x)}{x} = 0$ ：

首先有，$-1 \leq sin(x) \leq 1$ ，对于所有的 x 大于 0，不等式同时处以 x，则有 $\frac{-1}{x} \leq \frac{sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$ ，当 x 趋近于无穷大时，$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x} = 0$ ，$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ，根据三明治定理，$\lim_{x\to\infty} \frac{sin(x)}{x} = 0$ 。

结尾

这一章从直观理解的角度介绍了极限的基本知识，下一张复习求解多项式的极限。

这个系列主要还是我自己用来记录复习笔记的，我会坚持写下去，如果对这个系列有什么建议，欢迎提出来～

感谢阅读，如果发现错误，还请通知我，谢谢～