

UNIVERSIDADE DO MINHO
DEPARTAMENTO DE PRODUÇÃO E SISTEMAS
MÉTODOS DETERMINÍSTICOS DE INVESTIGAÇÃO
OPERACIONAL

Trabalho 2

Pedro Pereira (A80627)
Sofia Marques (A87963)
Pedro Pereira (A89232)
Eduardo Silva (A89516)
José Martins (A90122)

25 de janeiro de 2021



Pedro Pereira A80627



Sofia Marques A87963



Pedro Pereira A89232



Eduardo Silva A89516



José Martins A90122

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Formulação do problema	4
3	Rede do problema	5
4	Ficheiro input	7
5	Ficheiro Output	8
6	Solução ótima	9
7	Validação do modelo	11
8	Conclusão	13

Introdução

Após a análise dos números dos elementos do grupo, concluímos que o maior número de inscrição é 90122. Sendo assim, e cumprindo a atualização dos valores dos minérios como era pedido, trocaram-se as letras B, C, D e E pelos valores 0, 1, 2, 2, respetivamente. Desta forma ficamos com a seguinte mina:

nível -1						10	8				
nível -2	x				12	14	15	40			x
nível -3	x	x			16			20		x	x
nível -4	x	x	x	3	18			1	x	x	x
nível -5	x	x	x	x	20	2		2	x	x	x

Figura 1.1: Valores positivos da mina

O problema proposto tem por base a exploração de minas a céu aberto. Ao longo desta é imperativo respeitar certas regras relacionadas com a extração de blocos, que para o nosso problema simplificado se traduziu numa regra: para extrair um bloco, é necessário extrair três blocos no nível de profundidade acima (o que está imediatamente por cima e os dois que lhe são adjacentes).

O objetivo deste problema consiste em determinar quais os blocos a ser extraídos de forma a maximizar o lucro da exploração.

-1	-1	-1	-1	-1	-1	9	7	-1	-1	-1	-1
—	-2	-2	-2	-2	10	12	13	38	-2	-2	—
—	—	-3	-3	13	-3	-3	-3	17	-3	—	—
—	—	—	-1	14	-4	-4	-4	-3	—	—	—
—	—	—	—	15	-3	-5	-3	—	—	—	—

Figura 1.2: Mina resultante

Formulação do problema

Após uma análise do problema proposto, e também através de indicações dadas pelo professor, pareceu-nos evidente que este se tratava de um problema de fecho máximo de um grafo. Este pode ser resolvido através da resolução de um problema de fluxo máximo num grafo auxiliar, necessitando de 2 vértices adicionais.

Para o grafo G original, representamos cada bloco da mina como sendo um vértice. Este tem um arco para cada um dos 3 vértices que representam os blocos acima, que serão obrigatórios extrair para que seja possível a extração do bloco referido inicialmente. Estes vértices foram identificados de 1 a 40 de acordo com o mapa seguinte:

nível -1	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
nível -2		19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
nível -3			11	12	13	14	15	16	17	18		
nível -4				5	6	7	8	9	10			
nível -5					1	2	3	4				

Figura 2.1: Mapa de numeração dos blocos da mina

Para a resolução do problema de fluxo máximo, foi necessário adicionar 2 vértices criando um grafo G' . Neste grafo, para além de todos os vértices e arcos presentes no grafo G , foram adicionados os vértices 41 e 42, representando o terminal e a fonte, respetivamente. O vértice da fonte (42) tem um arco para todos os vértices que representam blocos com valor positivo (proveito), tendo como capacidade esse valor. Além disso, todos os vértices com valor negativo (custo) terão um arco para o vértice terminal (41), tendo como capacidade o inverso desse valor (tornando o valor positivo). Adicionalmente, os arcos do grafo original G , passam a ter todos uma capacidade de $+\infty$ no grafo G' . Por fim, foi necessário adicionar um arco do vértice terminal (41) para o da fonte (42) com custo -1 e capacidade $+\infty$ de forma a tornar o grafo num percurso fechado e permitir a minimização do fluxo (uma vez que o Relax4 resolve para minimização).

Através do valor do corte mínimo obtido pela resolução deste problema, será possível obter o lucro máximo possível na exploração da mina, que será a diferença entre a soma dos lucros dos blocos lucrativos e o valor corte mínimo.

Rede do problema

Para mais facilmente se visualizar a rede do problema, decidimos separá-la em 2 redes. Uma que representa o grafo G original com os valores de capacidade utilizados no G' , e outra que representa os arcos adicionais do grafo G' . A rede utilizada para a resolução do problema será a junção destas duas.

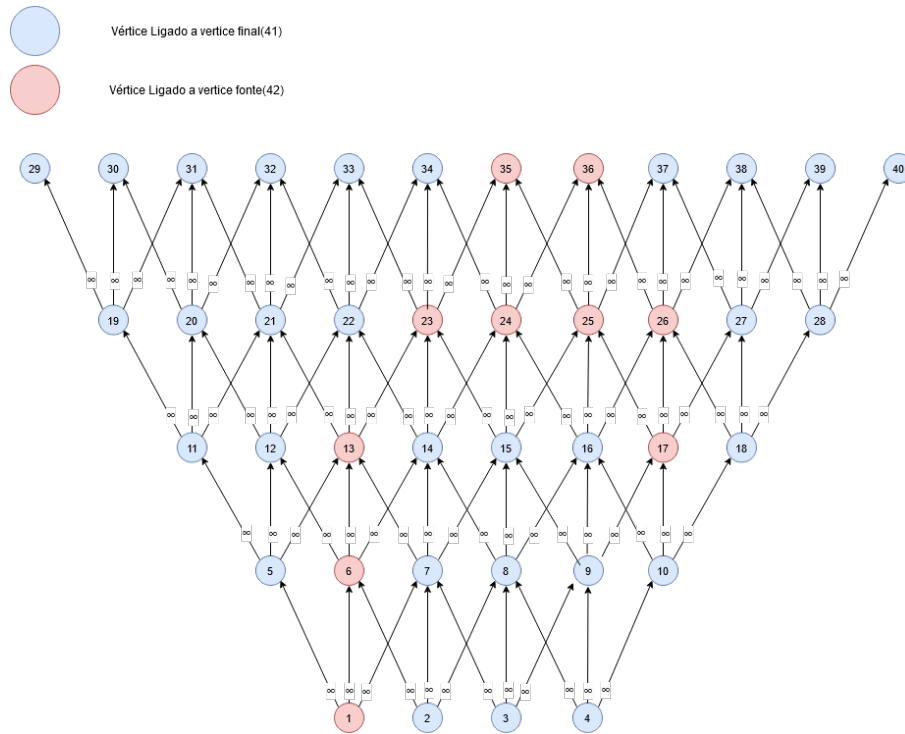


Figura 3.1: Grafo G

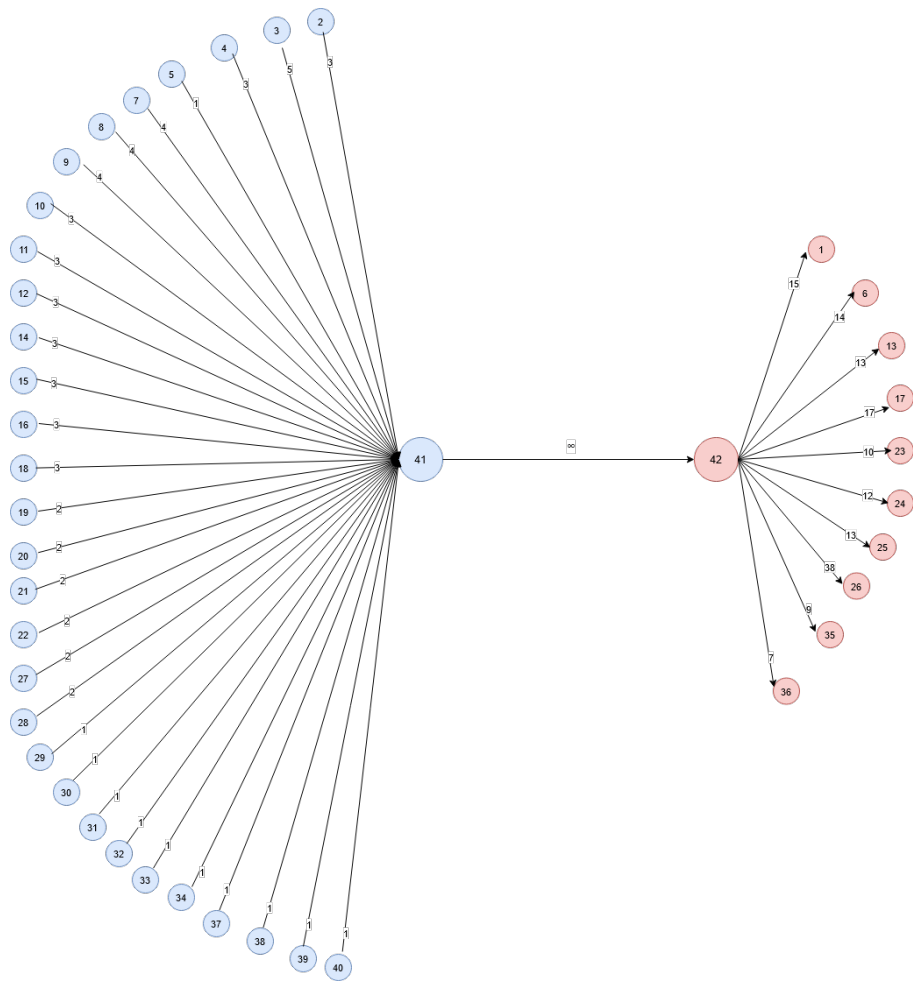


Figura 3.2: Grafo G' simplificado

Ficheiro input

42
125
1 5 0 1000
1 6 0 1000
1 7 0 1000
2 6 0 1000
2 7 0 1000
2 8 0 1000
3 7 0 1000
3 8 0 1000
3 9 0 1000
4 8 0 1000
4 9 0 1000
4 10 0 1000
5 11 0 1000
5 12 0 1000
5 13 0 1000
6 12 0 1000
6 13 0 1000
6 14 0 1000
7 13 0 1000
7 14 0 1000
7 15 0 1000
8 14 0 1000
8 15 0 1000
8 16 0 1000
9 15 0 1000
9 16 0 1000
9 17 0 1000
10 16 0 1000
10 17 0 1000
10 18 0 1000
11 19 0 1000
11 20 0 1000
11 21 0 1000
12 20 0 1000
12 21 0 1000
12 22 0 1000
13 21 0 1000
13 22 0 1000
13 23 0 1000
14 22 0 1000

(a)

14	23	0	1000
14	24	0	1000
15	23	0	1000
15	24	0	1000
15	25	0	1000
16	24	0	1000
16	25	0	1000
16	26	0	1000
17	25	0	1000
17	26	0	1000
17	27	0	1000
18	26	0	1000
18	27	0	1000
18	28	0	1000
19	29	0	1000
19	30	0	1000
19	31	0	1000
20	30	0	1000
20	31	0	1000
20	32	0	1000
21	31	0	1000
21	32	0	1000
21	33	0	1000
22	32	0	1000
22	33	0	1000
22	34	0	1000
23	33	0	1000
23	34	0	1000
23	35	0	1000
24	34	0	1000
24	35	0	1000
24	36	0	1000
25	35	0	1000
25	36	0	1000
25	37	0	1000
26	36	0	1000
26	37	0	1000
26	38	0	1000
27	37	0	1000
27	38	0	1000
27	39	0	1000
28	38	0	1000

(b)

28 39 0 1000
28 40 0 1000
42 1 0 15
42 6 0 14
42 13 0 13
42 17 0 17
42 23 0 10
42 24 0 12
42 25 0 13
42 26 0 38
42 35 0 9
42 36 0 7
2 41 0 3
3 41 0 5
4 41 0 3
5 41 0 1
7 41 0 4
8 41 0 4
9 41 0 4
10 41 0 3
11 41 0 3
12 41 0 3
14 41 0 3
15 41 0 3
16 41 0 3
18 41 0 3
19 41 0 2
20 41 0 2
21 41 0 2
22 41 0 2
27 41 0 2
28 41 0 2
29 41 0 1
30 41 0 1
31 41 0 1
32 41 0 1
33 41 0 1
34 41 0 1
37 41 0 1
38 41 0 1
39 41 0 1
40 41 0 1

(c)

[illegible]

(d)

Ficheiro Output

```

END OF READING
NUMBER OF NODES = 42, NUMBER OF ARCS = 125
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
1 5 7.
1 7 7.
5 11 6.
6 12 6.
6 14 3.
7 15 3.
11 19 3.
12 20 3.
13 21 4.
13 22 3.
17 27 3.
19 29 1.
20 30 1.
21 31 1.
21 33 1.
22 32 1.
24 34 1.
25 37 1.
26 38 1.
27 39 1.
42 1 14.
42 6 9.
42 13 7.
42 17 3.

```

(a)

```

42 24 1.
42 25 1.
42 26 1.
5 41 1.
7 41 4.
11 41 3.
12 41 3.
14 41 3.
15 41 3.
19 41 2.
20 41 2.
21 41 2.
22 41 2.
27 41 2.
29 41 1.
30 41 1.
31 41 1.
32 41 1.
33 41 1.
34 41 1.
37 41 1.
38 41 1.
39 41 1.
41 42 36.
OPTIMAL COST = -36.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 54
NUMBER OF ITERATIONS = 69
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 18
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 3
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 15
*****

```

(b)

Solução ótima

Para a visualização da solução ótima, realizamos um corte no grafo, atravessando os arcos saturados:

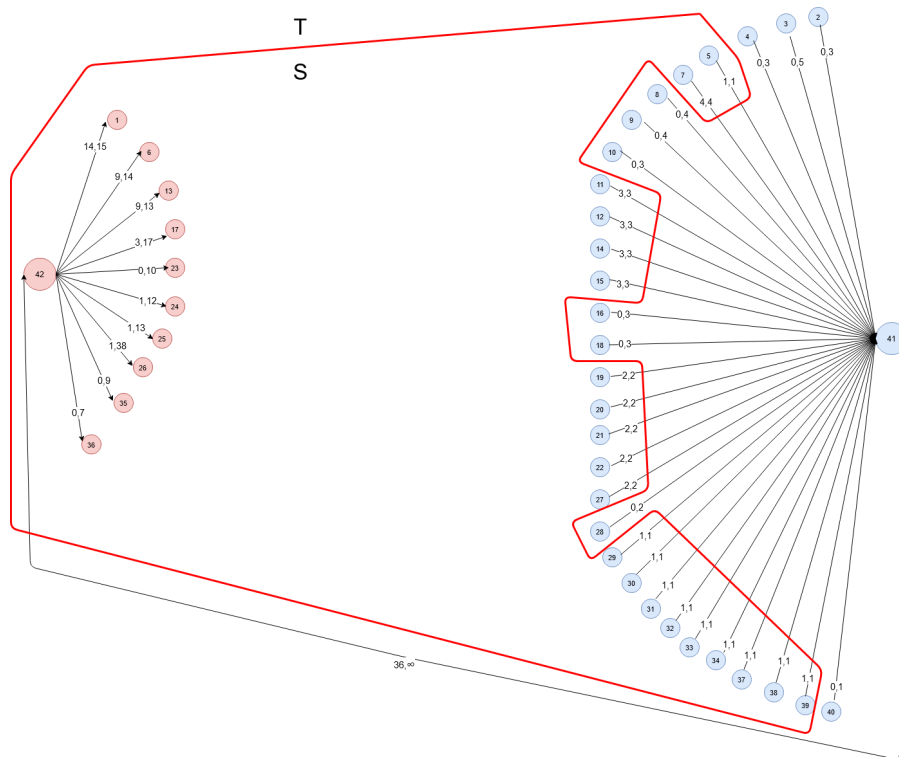


Figura 6.1: Corte no Grafo G' simplificado

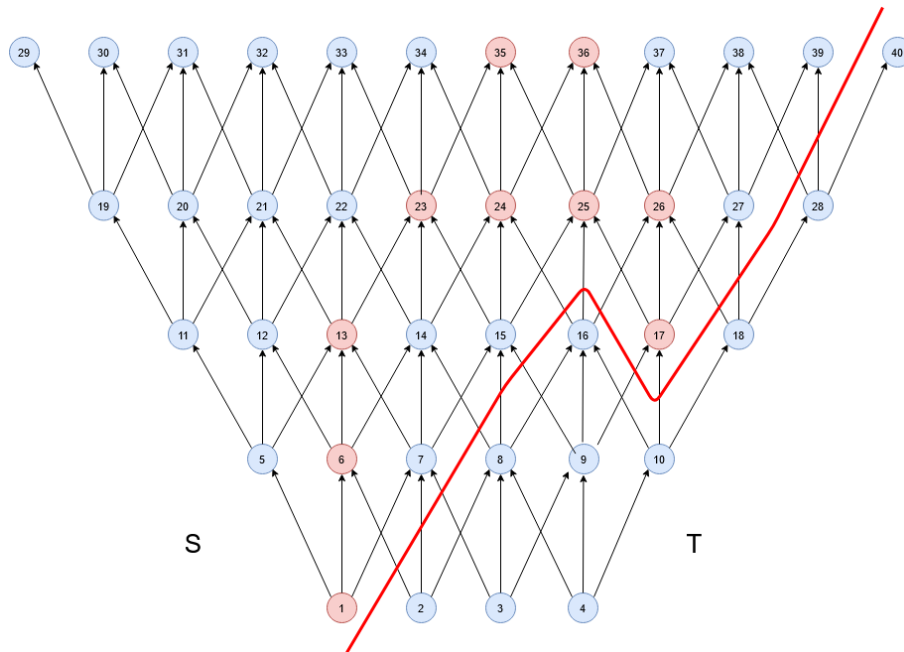


Figura 6.2: Corte no grafo G

Os blocos a serem explorados podem ser encontrados no output de 2 maneiras, dependendo se têm valor positivo ou negativo. Os blocos de valor positivo a serem explorados têm um fluxo vindo da fonte (42) inferior à sua capacidade. No caso deste fluxo ser 0, esse arco não é apresentado no output, mas o bloco é ainda assim um bloco a ser explorado. Já os blocos de valor negativo a serem explorados são encontrados no output pelos arcos até ao terminal (41) cujo fluxo é igual à sua capacidade.

O optimal cost corresponde ao custo total de remoção dos blocos não lucrativos (arcos com corte). Sendo assim, o lucro obtido é a diferença entre o proveito total dos blocos lucrativos e o custo de remoção dos blocos não lucrativos.

Plano de escavação da mina

29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
—	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	—
—	—	11	12	13	14	15	16	17	18	—	—
—	—	—	5	6	7	8	9	10	—	—	—
—	—	—	—	1	2	3	4	—	—	—	—

Figura 6.3: Plano de escavação da mina com blocos a extrair pintados.

Lucro, proveito e custo de operação

Os blocos extraídos que dão proveito são 1, 6, 13, 17, 23, 24, 25, 26, 35 e 36, que totalizam 148.

Os blocos extraídos que têm apenas custo são 5, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 20, 21, 22, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 37, 38 e 39, que totalizam 36.

Sendo assim o lucro, que é a diferença destes dois valores, é de 112.

Validação do modelo

Para realizar a validação do modelo criado, formulámos o problema de uma forma alternativa: como um problema de programação linear com variáveis binárias. Para a função objetivo maximizamos a soma, para todos os blocos da mina, da multiplicação do valor do bloco pela variável binária que decide se o bloco vai ser explorado ou não.

Como restrições, temos, para todos os blocos abaixo no nível -1, uma restrição que se traduz numa implicação, sendo esta $3 * x_i - x_j - x_k - x_l \leq 0$, sendo que j, k e l são os blocos acima de i , que devem ser retirados obrigatoriamente para a exploração de i . Ficámos então com o seguinte ficheiro do lpsolve:

```
/* Objective function */
max: 15*x1 - 3*x2 - 5*x3 - 3*x4 - 1*x5 + 14*x6 - 4*x7 - 4*x8 - 4*x9 - 3*x10 - 3*x11 - 3*x12 + 13*x13 -
      3*x14 - 3*x15 - 3*x16 + 17*x17 - 3*x18 - 2*x19 - 2*x20 - 2*x21 - 2*x22 + 10*x23 + 12*x24 + 13*x25
      + 38*x26 - 2*x27 - 2*x28 - 1*x29 - 1*x30 - 1*x31 - 1*x32 - 1*x33 - 1*x34 + 9*x35 + 7*x36 - 1*x37
      - 1*x38 - 1*x39 - 1*x40;

/* Variable bounds */
3*x1 - x5 - x6 - x7 <= 0;
3*x2 - x6 - x7 - x8 <= 0;
3*x3 - x7 - x8 - x9 <= 0;
3*x4 - x8 - x9 - x10 <= 0;
3*x5 - x11 - x12 - x13 <= 0;
3*x6 - x12 - x13 - x14 <= 0;
3*x7 - x13 - x14 - x15 <= 0;
3*x8 - x14 - x15 - x16 <= 0;
3*x9 - x15 - x16 - x17 <= 0;
3*x10 - x16 - x17 - x18 <= 0;
3*x11 - x19 - x20 - x21 <= 0;
3*x12 - x20 - x21 - x22 <= 0;
3*x13 - x21 - x22 - x23 <= 0;
3*x14 - x22 - x23 - x24 <= 0;
3*x15 - x23 - x24 - x25 <= 0;
3*x16 - x24 - x25 - x26 <= 0;
3*x17 - x25 - x26 - x27 <= 0;
3*x18 - x26 - x27 - x28 <= 0;
3*x19 - x29 - x30 - x31 <= 0;
3*x20 - x30 - x31 - x32 <= 0;
3*x21 - x31 - x32 - x33 <= 0;
3*x22 - x32 - x33 - x34 <= 0;
3*x23 - x33 - x34 - x35 <= 0;
3*x24 - x34 - x35 - x36 <= 0;
3*x25 - x35 - x36 - x37 <= 0;
3*x26 - x36 - x37 - x38 <= 0;
3*x27 - x37 - x38 - x39 <= 0;
3*x28 - x38 - x39 - x40 <= 0;

Bin x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9,
    x10, x11, x12, x13, x14, x15, x16, x17, x18, x19,
    x20, x21, x22, x23, x24, x25, x26, x27, x28, x29,
    x30, x31, x32, x33, x34, x35, x36, x37, x38, x39, x40;
```

Variables	M... ▼	result
	112	112
x1	1	1
x5	1	1
x6	1	1
x7	1	1
x11	1	1
x12	1	1
x13	1	1
x14	1	1
x15	1	1
x17	1	1
x19	1	1
x20	1	1
x21	1	1
x22	1	1
x23	1	1
x24	1	1
x25	1	1
x26	1	1
x27	1	1
x29	1	1
x30	1	1
x31	1	1
x32	1	1
x33	1	1
x34	1	1
x35	1	1
x36	1	1
x37	1	1
x38	1	1
x39	1	1

Figura 7.1: Output obtido

Analisando o output obtido, concluímos que os blocos explorados são os mesmos que os que obtivemos através do modelo de redes resolvido utilizando o Relax4, e também que o lucro obtido é o mesmo que foi calculado utilizando o resultado obtido no Relax4, validando assim o modelo.

Conclusão

Neste segundo trabalho prático foi-nos proposto um problema sobre uma exploração de mina a céu aberto, onde tivemos de descobrir os blocos que devíamos escavar de forma a maximizar o lucro obtido. No decorrer deste projeto deparamo-nos com algumas dificuldades. Inicialmente foi-nos difícil perceber a forma mais adequada de abordar o problema. Outro obstáculo encontrado residiu na interpretação do output obtido no Relax4. Por fim, foi também difícil desvendar a melhor maneira de efetuar a verificação do resultado. No entanto, apesar de alguns contratemplos, pensamos tê-los ultrapassado graças a ajuda por parte do professor e também graças a um grande esforço e trabalho de equipa.

Em suma, este projeto permitiu-nos ter um maior conhecimento sobre a matéria lecionada, em particular sobre redes com capacidade, e comprovar na prática o que havia sido falado nas aulas teóricas e teórico-práticas, e consolidado num estudo autónomo realizado por cada elemento do grupo.