Universidade do Minho

Departamento de Produção e Sistemas

Métodos Determinísticos de Investigação Operacional

Trabalho 3

Pedro Pereira (A80627)
Sofia Marques (A87963)
Pedro Pereira (A89232)
Eduardo Silva (A89516)
José Martins (A90122)

25 de janeiro de 2021

Pedro Pereira A80627

Sofia Marques A87963

Pedro Pereira A89232

Eduardo Silva A89516

José Martins A90122

Conteúdo

Introdução

Após a análise dos números dos elementos do grupo, concluímos que o maior número de inscrição é 90122. Sendo assim, e tendo em conta que as letras D e E identificam a mesma atividade 2, obtivemos a seguinte rede:

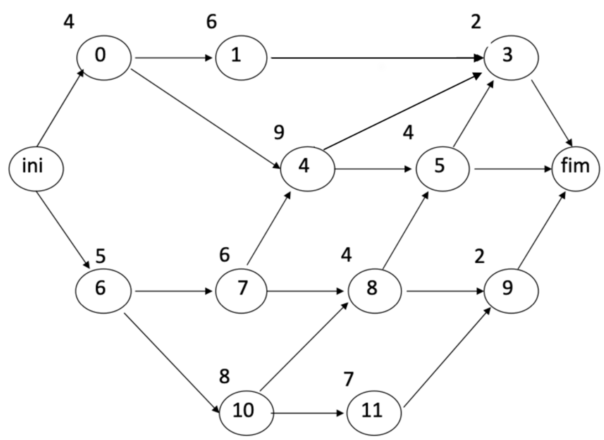

Figura 1.1: Rede

Analisando a nova rede, e utilizando um modelo com variáveis de decisão $ti, \forall i$, obtemos então o seguinte diagrama de Gantt:

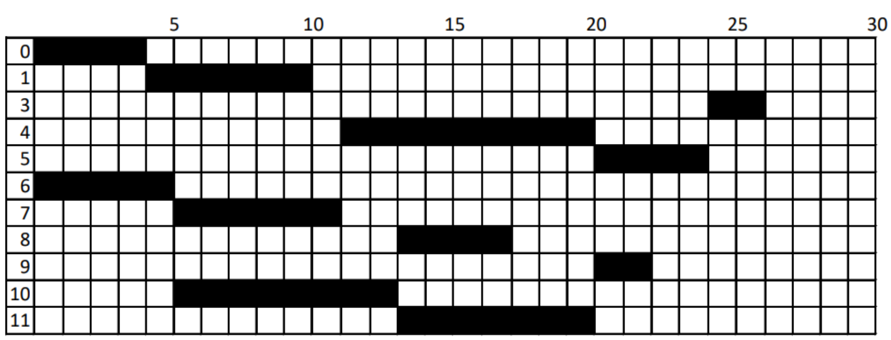

Figura 1.2: Diagrama de Gantt

Posto isto, o caminho crítico passa a corresponder às atividades 6,7,4,5,3 e o projeto passa a ter uma duração de 26 unidades de tempo.

Formulação do problema

O problema proposto tem por base o método do caminho crítico. Ao longo do projeto é imperativo obedecer a algumas restrições de precedência as quais traduzem o facto de o instante em que se pode dar início a uma dada actividade ter de ser posterior aos instantes em que terminam as actividades que lhe são precedentes.

O objetivo do problema consiste em decidir como devem ser reduzidas as durações das atividades, de modo a realizar o projeto na nova duração desejada, com um custo suplementar mínimo. A nova duração desejada será 23 U.T..

As novas variáveis de decisão utilizadas serão variáveis binárias, que representam a escolha ou não da redução da duração de uma atividade. Estas farão parte do objetivo, sendo multiplicadas pelo custo associado à redução, representando assim o custo da escolha de reduzir a duração de uma atividade.

Para além da alterações feitas às restrições referentes ao tempo inicial das atividades, que passarão a refletir a possível redução das durações, serão necessárias restrições adicionais que garantam que as 2ª reduções possíveis para cada atividade apenas sejam escolhidas após ser escolhida a 1ª redução, exceto no caso das atividades 7 e 9, em que serão necessárias restrições que garantem que apenas uma das duas reduções possíveis é escolhida.

Modelo do problema

Variáveis de decisão:

- ri_j binária: escolha da redução nº i da atividade j, $i = 1, 2$; $j = \{1, 11\} \setminus 2$
- $tj \geq 0$: tempo de início de execução da actividade j, ou tempo inicial (ti) ou tempo final (tf), $j = \{1, 11\} \setminus 2 \vee j = i, f$

Parâmetros:

- ci_j: custo da redução nº i da atividade j, $i = 1, 2$; $j = \{1, 11\} \setminus 2$
- ti_j: tempo reduzido pela redução nº i da atividade j, $i = 1, 2$; $j = \{1, 11\} \setminus 2$
- dj: duração da atividade j, $j = \{1, 11\} \setminus 2$

Função objetivo:

- $min \sum ci\_j * ri\_j$: minimização do custo das reduções escolhidas

Restrições:

- $\forall\ arco\_ij,\ tj >= ti - t1\_i * r1\_i - t2\_i * r2\_i + di$: garante que o tempo inicial de uma atividade é após a conclusão da sua precedente
- $r1\_j - r2\_j \geq 0$: garante que a 2ª restrição é feita apenas após a 1ª, $j = \{1..11\} \setminus \{2, 7, 9\}$
- $r1\_i + r2\_i \leq 1$, $i = \{7, 9\}$: garante que para as atividades 7 e 9 só é possível efetuar uma das 2 reduções possíveis.
- $tf \leq 23$: garante que o tempo final é no máximo 23

Ficheiro Input

```
// custo associado à redução das durações das actividades
min: 200 r1_0 + 100 r2_0 + 600 r1_1 + 300 r2_1 + 200 r1_3 + 100r2_3 + 800 r1_4 + 400 r2_4
 + 1600 r1_5 + 800 r2_5 + 180 r1_6 + 90 r2_6 + 300 r1_7 + 1100 r2_7 + 200 r1_8 + 100 r2_8
 + 200 r1_9 + 400 r2_9 + 1000 r1_10 + 500 r2_10 + 600 r1_11 + 300 r2_11;

// tempo máximo para concluir o projecto
tf <= 23;

// relações de precedência
arco_01: t1 >= t0 - 0.5 r1_0 - 0.5 r2_0 + 4;
arco_13: t3 >= t1 - r1_1 - r2_1 + 6;
arco_i0: t0 >= ti + 0 ;
arco_04: t4 >= t0 - 0.5 r1_0 - 0.5 r2_0 + 4;
arco_43: t3 >= t4 - 2 r1_4 - r2_4 + 9;
arco_53: t3 >= t5 - 0.5 r1_5 - 0.5 r2_5 + 4;
arco_3f: tf >= t3 - 0.5 r1_3 - 0.5 r2_3 + 2;
arco_45: t5 >= t4 - 2 r1_4 - r2_4 + 9;
arco_5f: tf >= t5 - 0.5 r1_5 - 0.5 r2_5 + 4;
arco_i6: t6 >= ti + 0;
arco_74: t4 >= t7 - r1_7 - 2 r2_7 + 6;
arco_85: t5 >= t8 - 0.5 r1_8 - 0.5 r2_8 + 4;
arco_9f: tf >= t9 - r1_9 - 2 r2_9 + 2;
arco_67: t7 >= t6 - r1_6 - r2_6 + 5;
arco_78: t8 >= t7 - r1_7 - 2 r2_7 + 6;
arco_89: t9 >= t8 - 0.5 r1_8 - 0.5 r2_8 + 4;
arco_610: t10 >= t6 - r1_6 - r2_6 + 5;
arco_108: t8 >= t10 - 0.5 r1_10 - 0.5 r2_10 + 8;
arco_119: t9 >= t11 - r1_11 - r2_11 + 7;
arco_1011: t11 >= t10 - 0.5 r1_10 - 0.5 r2_10 + 8;


//redução 2 apenas após redução 1
r1_0 - r2_0 >= 0;
r1_1 - r2_1 >= 0;
r1_3 - r2_3 >= 0;
r1_4 - r2_4 >= 0;
r1_5 - r2_5 >= 0;
r1_6 - r2_6 >= 0;
r1_8 - r2_8 >= 0;
r1_10 - r2_10 >= 0;
r1_11 - r2_11 >= 0;

// Garantir que só efetua 1 redução nas atividades 7 e 9
r1_7 + r2_7 <= 1;
r1_9 + r2_9 <= 1;

BIN r1_0, r2_0, r1_1, r2_1, r1_3, r2_3, r1_4, r2_4, r1_5, r2_5, r1_6, r2_6,
    r1_7, r2_7, r1_8, r2_8, r1_9, r2_9, r1_10, r2_10, r1_11, r2_11;
```

Ficheiro Output

Variables	MILP ...	result
	570,0...	570,0...
r1_0	0	0
r2_0	0	0
r1_1	0	0
r2_1	0	0
r1_3	0	0
r2_3	0	0
r1_4	0	0
r2_4	0	0
r1_5	0	0
r2_5	0	0
r1_6	1	1
r2_6	1	1
r1_7	1	1
r2_7	0	0
r1_8	0	0
r2_8	0	0
r1_9	0	0
r2_9	0	0
r1_10	0	0
r2_10	0	0
r1_11	0	0
r2_11	0	0
tf	23	23
t1	4	4
t0	0	0
t3	21	21
ti	0	0
t4	8	8
t5	17	17
t6	0	0
t7	3	3
t8	11	11
t9	18	18
t10	3	3
t11	11	11

Plano de execução

Para a visualização da solução ótima, desenhamos o diagrama de Gantt abaixo representado:

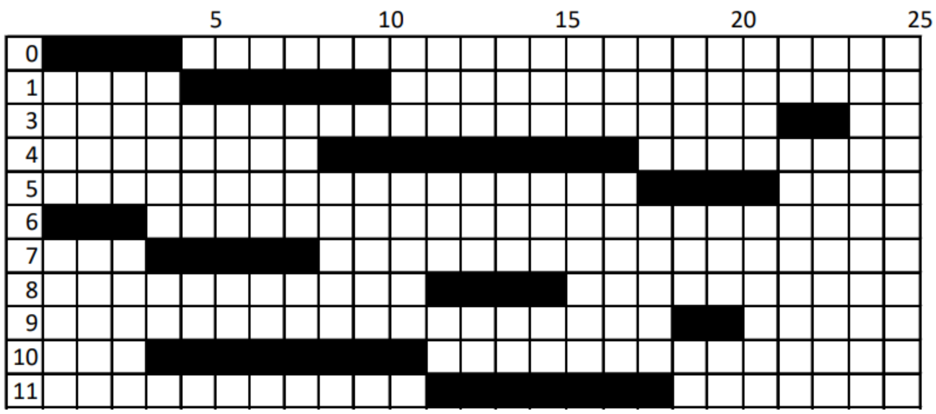

Figura 6.1: Diagrama de Gantt: Plano de execução

Verificação do custo de solução

Para a verificação do custo de solução primeiro verificámos que as reduções obtidas realmente resultam num caminho crítico com comprimento 23. Para isso actualizámos as durações das atividades 6 e 7 no modelo utilizado anteriormente na Parte 0. O resultado obtido, apresentado abaixo, comprova o que era esperado.

Variables	result
	23
tf	23
t1	4
t0	0
t3	21
ti	0
t4	8
t5	17
t6	0
t7	3
t8	11
t9	18
t10	3
t11	11

Após confirmar que as reduções obtidas realmente resultam num caminho crítico com o comprimento desejado, confirmámos o custo obtido das reduções. Uma vez que a 1ª redução da atividade 6 tem um custo de 180 U.M., a 2ª redução desta mesma tem um custo de 90 U.M. e a 1ª redução da atividade 7 tem um custo de 300 U.M., o valor total de 570 U.M. corresponde com o valor obtido como solução ótima do modelo utilizado.

Conclusão

Neste terceiro trabalho prático foi-nos proposto um problema de um projeto decomposto em várias atividades, no qual tivemos de descobrir quais as durações das atividades que tínhamos de reduzir de forma a respeitar o novo tempo pedido e minimizando o custo relativo a essas reduções.

No decorrer deste trabalho não nos deparámos com grandes dificuldades, pelo que conseguimos perceber rapidamente o que o problema exigia e quais os passos a seguir de forma a o concluir com sucesso. Sendo assim pensámos ter alcançado o pretendido, graças a um grande esforço e trabalho de equipa e ajuda por parte do professor.

Em suma, este projeto permitiu-nos ter um maior conhecimento sobre a matéria lecionada, em particular sobre problemas de caminho crítico, e comprovar na prática o que havia sido falado nas aulas teóricas e teórico-práticas, consolidado num estudo autónomo realizado por cada elemento do grupo.