

UNIVERSIDADE DO MINHO  
DEPARTAMENTO DE PRODUÇÃO E SISTEMAS  
MÉTODOS DETERMINÍSTICOS DE INVESTIGAÇÃO  
OPERACIONAL

Trabalho 1

Pedro Pereira (A80627)  
Sofia Marques (A87963)  
Pedro Pereira (A89232)  
Eduardo Silva (A89516)  
José Martins (A90122)

25 de janeiro de 2021



Pedro Pereira A80627



Sofia Marques A87963



Pedro Pereira A89232



Eduardo Silva A89516



José Martins A90122

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Formulação do problema</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Modelo</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Ficheiro input</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Ficheiro Output</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Solução ótima</b>	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>Validação do modelo</b>	<b>10</b>
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>11</b>

## Introdução

Após a análise dos números dos elementos do grupo, concluímos que o maior número de inscrição é 90122. Sendo assim, e cumprindo a remoção das arestas de acordo com o que era pedido, removeram-se as arestas B, D e E ficamos com a seguinte rede:

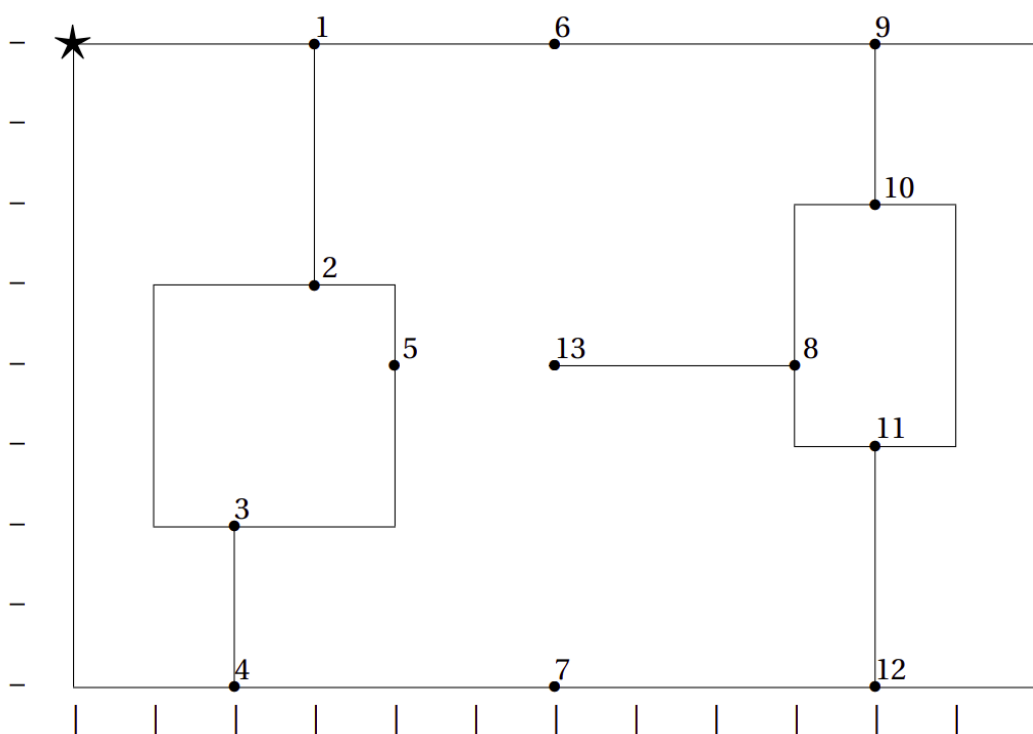


Figura 1.1: Rede de caminhos a percorrer.

## Formulação do problema

O problema proposto tem por base a inspeção de linhas de alta tensão por um veículo não tripulado. Para o efeito, é imperativo que todas as linhas sejam inspecionadas independentemente do sentido. No entanto, uma vez que o veículo é um drone, este pode deslocar-se entre pontos sem ter de percorrer necessariamente uma linha. O drone parte de um ponto inicial ao qual tem de regressar depois de concluir a inspeção.

O principal objetivo do problema é minimizar a distância percorrida pelo drone tendo em conta que este tem de percorrer todas as linhas de alta tensão.

As variáveis de decisão escolhidas representam a travessia entre pontos. Estas foram distinguidas entre travessias de inspeção das linhas de alta tensão (obrigatórias), e travessias de reposicionamento (não obrigatórias). O valor destas variáveis traduzem-se no número de vezes que essa ligação é percorrida.

Tendo tudo isto em conta, no desenvolvimento do projeto foi-nos evidente desde o início a necessidade de criar uma função que nos permitisse minimizar o custo associado ao percurso percorrido na inspeção. Esta função consiste no somatório das multiplicações da distância de cada ligação pelas vezes que foi percorrida. De modo a que esta função dê uma solução ótima que vá de encontro ao problema real, formulamos um conjunto de restrições.

Inicialmente garantimos que todas as linhas de alta tensão fossem percorridas pelo menos uma vez. As restantes ligações não podem ser percorridas um número negativo de vezes, no entanto, isso já é predefinido pelo *LPSolve*.

De forma a garantir um Circuito Euleriano na rede, permitindo percorrer todas as linhas uma vez, com o mesmo ponto inicial e final, certificamo-nos que o grau de cada vértice da rede era par. Para o efeito, nos pontos com grau ímpar, foi feito o emparelhamento com um outro vértice.

## Modelo

Variáveis de decisão:

- $x_{i-j}$ : ligações possíveis de reposicionamento entre os pontos  $i$  e  $j$  pelo ar;
- $x_{i-jA}$ : ligações possíveis de inspeção entre os pontos  $i$  e  $j$ ;

Parâmetros:

- $c_{ij}$  : custo da ligação  $x_{i-j}$ ;
- $c_{ijA}$  : custo da ligação  $x_{i-jA}$ ;

Função objetivo:

$$\bullet \min z = \sum c_{ij} * x_{i-j} + \sum c_{ijA} * x_{i-jA}$$

Restrições:

- $x_{i-jA} = 1$  : obriga a travessia das ligações de inspeção;
- $\forall k$  de grau ímpar,  $\sum x_{i-j} = 1, i \vee j = k$  : obriga a uma ligação adicional nos pontos com grau ímpar.

## Ficheiro input

```
min : 3.00x0_1A + 3.00x1_2 + 3.00x1_2A + 6.08x1_3 + 8.06x1_4 + 4.12x1_5 + 3.00x1_6 + 3.00x1_6A
      + 8.54x1_7 + 7.21x1_8 + 7.00x1_9 + 7.28x1_10 + 8.60x1_11 + 10.63x1_12 + 5.00x1_13
      + 6.00x2_3A + 3.16x2_3 + 5.10x2_4 + 2.00x2_5A + 1.41x2_5 + 4.24x2_6 + 5.83x2_7 + 6.08x2_8
      + 7.62x2_9 + 7.07x2_10 + 7.28x2_11 + 8.60x2_12 + 3.16x2_13
      + 2.00x3_4 + 2.00x3_4A + 4.00x3_5A + 2.83x3_5 + 7.21x3_6 + 4.47x3_7 + 7.28x3_8 + 10.00x3_9
      + 8.94x3_10 + 8.06x3_11 + 8.25x3_12 + 4.47x3_13
      + 10.00x0_4A + 4.47x4_5 + 8.94x4_6 + 4.00x4_7 + 4.00x4_7A + 8.06x4_8 + 11.31x4_9 + 10.00x4_10
      + 8.54x4_11 + 8.00x4_12 + 5.66x4_13
      + 4.47x5_6 + 4.47x5_7 + 5.00x5_8 + 7.21x5_9 + 6.32x5_10 + 6.08x5_11 + 7.21x5_12 + 2.00x5_13
      + 8.00x6_7 + 5.00x6_8 + 4.00x6_9 + 4.00x6_9A + 4.47x6_10 + 6.40x6_11 + 8.94x6_12 + 4.00x6_13
      + 5.00x7_8 + 8.94x7_9 + 7.21x7_10 + 5.00x7_11 + 4.00x7_12 + 4.00x7_12A + 4.00x7_13
      + 4.12x8_9 + 3.00x8_10A + 2.24x8_10 + 2.00x8_11A + 1.41x8_11 + 4.12x8_12 + 3.00x8_13 + 3.00x8_13A
      + 2.00x9_10 + 2.00x9_10A + 5.00x9_11 + 8.00x9_12 + 12.00x9_12A + 5.66x9_13
      + 3.00x10_11 + 5.00x10_11A + 6.00x10_12 + 4.47x10_13
      + 3.00x11_12 + 3.00x11_12A + 4.12x11_13
      + 5.66x12_13;
```

Figura 4.1: Função objetivo

```
x1_2 + x1_3 + x1_4 + x1_5 + x1_6 + x1_7 + x1_8 + x1_9 + x1_10 + x1_11 + x1_12 + x1_13 = 1;
x1_2 + x2_3 + x2_4 + x2_5 + x2_6 + x2_7 + x2_8 + x2_9 + x2_10 + x2_11 + x2_12 + x2_13 = 1;
x1_3 + x2_3 + x3_4 + x3_5 + x3_6 + x3_7 + x3_8 + x3_9 + x3_10 + x3_11 + x3_12 + x3_13 = 1;
x1_4 + x2_4 + x3_4 + x4_5 + x4_6 + x4_7 + x4_8 + x4_9 + x4_10 + x4_11 + x4_12 + x4_13 = 1;
x1_8 + x2_8 + x3_8 + x4_8 + x5_8 + x6_8 + x7_8 + x8_9 + x8_10 + x8_11 + x8_12 + x8_13 = 1;
x1_9 + x2_9 + x3_9 + x4_9 + x5_9 + x6_9 + x7_9 + x8_9 + x9_10 + x9_11 + x9_12 + x9_13 = 1;
x1_10 + x2_10 + x3_10 + x4_10 + x5_10 + x6_10 + x7_10 + x8_10 + x9_10 + x10_11 + x10_12 + x10_13 = 1;
x1_11 + x2_11 + x3_11 + x4_11 + x5_11 + x6_11 + x7_11 + x8_11 + x9_11 + x10_11 + x11_13 + x11_12 = 1;
x1_12 + x2_12 + x3_12 + x4_12 + x5_12 + x6_12 + x7_12 + x8_12 + x9_12 + x10_12 + x11_12 + x12_13 = 1;
x1_13 + x2_13 + x3_13 + x4_13 + x5_13 + x6_13 + x7_13 + x8_13 + x9_13 + x10_13 + x11_13 + x12_13 = 1;
```

Figura 4.2: Restrições que forçam a existencia de emparelhamento nos vértices com grau ímpar

```
x0_1A = 1;  
x0_4A = 1;  
x1_2A = 1;  
x1_6A = 1;  
x2_3A = 1;  
x2_5A = 1;  
x3_4A = 1;  
x3_5A = 1;  
x4_7A = 1;  
x6_9A = 1;  
x7_12A = 1;  
x8_10A = 1;  
x8_11A = 1;  
x8_13A = 1;  
x9_10A = 1;  
x9_12A = 1;  
x10_11A = 1;  
x11_12A = 1;
```

Figura 4.3: Restrições que forçam a passagem do drone sobre as linhas de alta tensão

## Ficheiro Output

```

Model name:  'LPSolver' - run #1
Objective:   Minimize (R0)

SUBMITTED
Model size:      10 constraints,      96 variables,      120 non-zeros.
Sets:           0 GUB,                0 SOS.

Using DUAL simplex for phase 1 and PRIMAL simplex for phase 2.
The primal and dual simplex pricing strategy set to 'Devex'.

Relaxed solution      88 after      6 iter is B&B base.

Feasible solution      88 after      6 iter,      0 nodes (gap 0.0%)

Optimal solution      88 after      6 iter,      0 nodes (gap 0.0%).
Relative numeric accuracy ||*|| = 1.11022e-016

```

Figura 5.1: Mensagem de output do modelo no *LPSolve*

Variables	MILP ...	re... ▼
	88	88
x0_1A	1	1
x1_2	1	1
x1_2A	1	1
x1_6A	1	1
x2_3A	1	1
x3_4	1	1
x0_4A	1	1
x8_10A	1	1
x8_13	1	1
x8_13A	1	1
x9_10	1	1
x9_12A	1	1
x10_11A	1	1
x11_12	1	1
x11_12A	1	1
x2_5A	1	1
x3_4A	1	1
x3_5A	1	1
x4_7A	1	1
x6_9A	1	1
x7_12A	1	1
x8_11A	1	1
x9_10A	1	1

Figura 5.2: Variáveis com valor 1 na solução ótima obtida pelo *LPSolve*



## Solução ótima

A solução ótima indica-nos o número de vezes que o drone percorre cada ligação possível de forma a obter o caminho mais econômico, sendo um exemplo de percurso ótimo representado na figura abaixo.

### Percurso do drone

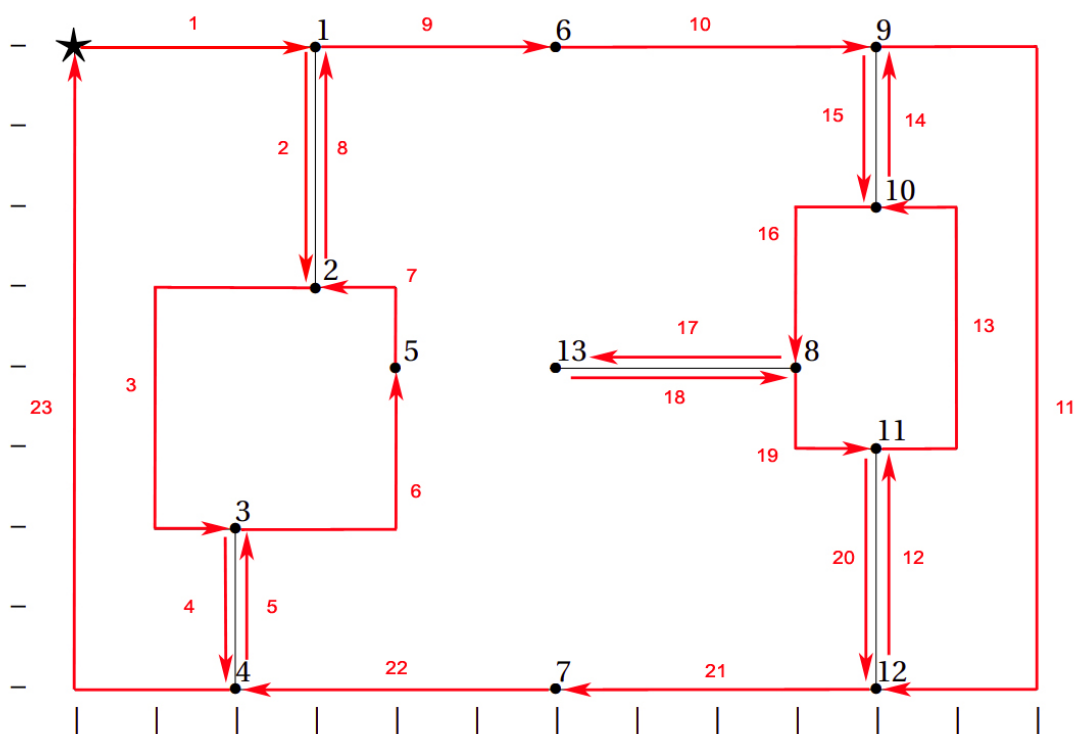


Figura 6.1: Caminho ótimo possível percorrido na rede.

### Valor da distância total percorrida

A distancia total percorrida obtida é 88 u.m. Destas, 75 correspondem as travessias obrigatórias e o restante 13 corresponde aos caminhos escolhidos pelo drone para reposicionamento.

## Validação do modelo

Observando o ficheiro output e verificando o percurso no mapa facilmente chegamos à conclusão de que as restrições foram satisfeitas e que a solução é válida, uma vez que todas as arestas da rede foram percorridas. Além disso pode ser observado que as arestas duplicadas resultam na paridade dos vértices que na rede original possuíam grau ímpar. Sendo assim, verificamos que as restrições estabelecidas foram, de facto, cumpridas.

De maneira a confirmar o valor de distância percorrida obtido, procedemos à realização do seguinte cálculo, substituindo o valor da travessia de cada aresta obtido pelo modelo na função objetivo:

$$\begin{aligned} & 3.00*1 + 3.00*1 + 3.00*1 + 6.08*0 + 8.06*0 + 4.12*0 + 3.00*0 + 3.00*1 + 8.54*0 + 7.21*0 + \\ & 7.00*0 + 7.28*0 + 8.60*0 + 10.63*0 + 5.00*0 + 6.00*1 + 3.16*0 + 5.10*0 + 2.00*1 + 1.41*0 + \\ & 4.24*0 + 5.83*0 + 6.08*0 + 7.62*0 + 7.07*0 + 7.28*0 + 8.60*0 + 3.16*0 + 2.00*1 + 2.00*1 + \\ & 4.00*1 + 2.83*0 + 7.21*0 + 4.47*0 + 7.28*0 + 10.00*0 + 8.94*0 + 8.06*0 + 8.25*0 + 4.47*0 + \\ & 10.00*1 + 4.47*0 + 8.94*0 + 4.00*0 + 4.00*1 + 8.06*0 + 11.31*0 + 10.0*0 + 8.54*0 + 8.00*0 + \\ & 5.66*0 + 4.47*0 + 4.47*0 + 5.00*0 + 7.21*0 + 6.32*0 + 6.08*0 + 7.21*0 + 2.00*0 + 8.00*0 + \\ & 5.00*0 + 4.00*0 + 4.00*1 + 4.47*0 + 6.40*0 + 8.94*0 + 4.00*0 + 5.00*0 + 8.94*0 + 7.21*0 + \\ & 5.00*0 + 4.00*0 + 4.00*1 + 4.00*0 + 4.12*0 + 3.00*1 + 2.24*0 + 2.00*1 + 1.41*0 + 4.12*0 + \\ & 3.00*1 + 3.00*1 + 2.00*1 + 2.00*1 + 5.00*0 + 8.00*0 + 12.00*1 + 5.66*0 + 3.00*0 + 5.00*1 + \\ & 6.00*0 + 4.47*0 + 3.00*1 + 3.00*1 + 4.12*0 + 5.66*0 \end{aligned}$$

Assim como esperado, o valor obtido foi 88, validando o valor obtido pelo modelo.

## Conclusão

Neste primeiro trabalho prático foi-nos proposto um problema do carteiro chinês onde tivemos de procurar o caminho mais curto para um drone inspecionar a rede de linhas de alta tensão. No decorrer deste projeto deparamo-nos com algumas dificuldades, sendo elas principalmente ao nível da formulação do modelo de programação linear. No entanto, apesar de alguns contratemplos, pensamos tê-los ultrapassado graças a ajuda por parte do professor e também graças a um grande esforço e trabalho de equipa.

Em suma, este projeto permitiu-nos ter um maior conhecimento sobre a matéria lecionada e comprovar na prática o que havia sido falado nas aulas teóricas e teórico-práticas, e consolidado num estudo autónomo realizado por cada elemento do grupo.