Chapitre

Calcul littéral 8

8.1 Langage algébrique

Une **expression littérale** est une écriture mathématique qui contient des lettres appelées **variables**. Une variable peut prendre n'importe quelle valeur[1].

Définition 8.1 — monômes. Une expression de la forme ax^n est un monôme.

- x est la variable
- n est le degré du monôme
- a est le coefficient.

Une addition de monômes est appelée polynômes.

Le degré d'une somme de monômes est le plus grand degré des monômes.

[1] En mathématiques, on utilise certaines lettres pour différentes type de variables :

- n et m ... pour les entiers positifs ou négatifs
- x, y et z pour des quantités inconnues.
- a, b et c sont réservés à des quantités connues.

■ **Exemple 8.1**

$$5\,\boxed{x^2} + 3\,\boxed{x} + \boxed{2}$$

- 2 est le terme constant
- $3x$ est le terme linéaire. Il est **similaire**[2] à x.
- $3x + 2$ est une expression affine (de degré 1)
- $5x^2$ est le monôme de degré 2. Il est similaire à x^2.
- $5x^2 + 3x + 2$ est une expression quadratique.

[2] proportionnel à

8.1.1 Exercices : le langage algébrique

Un problème algébrique est une quête à la recherche d'une quantité inconnue à l'aide de quantités connues. Pendant longtemps l'algèbre était entière faite à l'aide de phrases, sans aucun symbole !

■ **Exemple 8.2 — Un peu d'histoire.** Au 13ᵉ sciècle, Pise était une importante ville-état sur la côte ouest de l'Italie. C'était un centre de commerce doté d'une flotte marine.

1) À cette époque, Léonard Fibonacci formulait des problèmes algébriques ainsi :

   cinq de plus que le carré d'une chose est égal à quatorze. Combien vaut cette chose ?

   a) Résoudre le problème ....

   b) Traduire le problème sous forme algébrique ....

   c) Écrire le problème ci-dessous sous forme d'une phrase, dans le style de Léonard Fibonacci.

   $$x^2 - 3 = 4x + 2; \quad x = ?$$

   ....

   ....

2) Écrire les problèmes ci-dessous sous forme d'une égalité avec des symboles :

   a) la somme de quatre et du double d'une chose est égal à six fois cette chose.

   ....

   b) le produit de dix et d'une chose est égal à la somme de trois et du cube de cette chose.

   ....

   c) le carré de la différence d'une chose et de un est égal au double de la somme du double de cette chose et de trois.

   ....

3) Trouver une solution (positive) pour chaque cas a) .... b) .... c) ....

> Au 15e, l'Italie est en pleine Renaissance. L'art, la musique, le commerce et la science progrèssent simultanément. La nécessité d'avoir des mathématiques fiables pour le commerce pousse la publication de livres sur l'arithmétique et l'algèbre. Le plus célèbre est *Summa de Aritmetica* de Pacioli (1494) qui est le premier à utiliser des abréviations et symboles pour écrire des expressions.

Exemple 8.3 Pour écrire $x^3 - 2x^2 = 12x + 7$ il écrit : « 1.cu.$\widetilde{m}$.2.ce.—12.co.$\widetilde{p}$.7. ». *co* est une abbreviation de *cosa* (la chose), *ce* est pour *censo* (son carré).

a) Quelle est la signification des autres symboles ?

cu .... $\widetilde{m}$ .... $\widetilde{p}$ ....

b) À quoi servent les points ?

....

c) Écrire « 1.$\widetilde{p}$.7.ce.—2.cu.$\widetilde{m}$.1.co. » en notation moderne ....

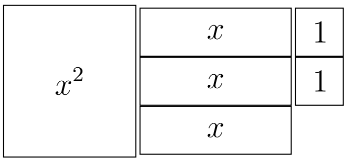
d) Écrire $5x^3 + 3x = x^2 - 2$ en notation de Pacioli ....

> Avec l'invention de l'imprimerie dès 1450, la course est entamée pour simplifer les notations :
> - Vers 1570 François Viète, avocat et conceiller du roi Henri VI, introduit l'utilisation de lettres majuscules pour désigner une variable.
> - Les signes + et − apparaissent en Allemagne au 16e sciècle.
> - L'ecossais Robert Recorde invente le signe = vers 1557.
> - En 1631, Thomas Harriot utilise les lettres minuscules pour les variables. Pour écrire une puissance il répetait la lettre. Par exemple, Harriot écrivait aaa au lieu de a^3.
> - René Déscartes (1637) introduit l'éssentiel des notations algébriques. Il utilise a, b, c ... pour les quantitées connues (des constantes), et x, y, z... pour des inconnues. Il introduit l'exposant avec a^2, a^3.

Exercice 1 Le tableau montre une algébrique donné sous la forme d'une phrase, d'une expression et d'un diagramme. Complète le tableau.

	signification	Diagramme	Expression algébrique
a)	somme de x et de 1	$\boxed{\quad x \quad}\boxed{1}$	$x + 1$
b)	somme de 2 et x	$\boxed{\quad x \quad}\boxed{1}\boxed{1}$	
c)			$x + 4$

d)	différence de x et de 4	$\boxed{x}\boxed{-1}\boxed{-1}\boxed{-1}\boxed{-1}$	
e)	ajoute x à -6	$\boxed{-1}\boxed{-1}\boxed{-1}\boxed{-1}\boxed{-1}\boxed{-1}\boxed{x}$	
f)	différence de x et de 3		
g)	deux lots de x	$\begin{array}{l}\boxed{x}\\\boxed{x}\end{array}$	$2x$
h)	trois lots de x		
i)		$\begin{array}{l}\boxed{-x}\\\boxed{-x}\\\boxed{-x}\\\boxed{-x}\end{array}$	
j)	somme de deux lots de x et de 1	$\begin{array}{ll}\boxed{x} & \boxed{1}\\\boxed{x} & \end{array}$	$2x+1$
k)	somme de trois lots de x et de 4		
l)	somme de deux lots de x et de -3		
m)	somme de trois lots de $-x$ et de -4		
n)		$\begin{array}{ll}\boxed{x} & \boxed{-1}\\\boxed{x} & \boxed{-1}\\\boxed{x} & \boxed{-1}\\ & \boxed{-1}\end{array}$	
p)	trois lots de la somme de x et de 1		
q)	trois lots de la somme de x et de -1		

r)	la somme de x et de trois lots de $-x$ et de quatre	
s)	ajoute le carré de x à trois lots de x et puis deux	
t)	la somme du double du carré de x et de trois lots de $-x$ puis de 4	
u)	la somme de trois lots du carré de x, de deux lots de $-x$ et de un	

Exercice 2

monôme	**coefficient**	**degré**	**calcul**	calcul à faire et résultat si $x=-3$
$3x$	3	1	$3\times x$	$3\times(-3)=-9$
x^2	1	2	$1\times x\times x$	
$-x^5$	-1	5	$-1\times xxxxx$	
$\dfrac{1}{5}x$	$\dfrac{1}{5}$	1		
6	6	0		
$10x$				
$-5x^3$				
$-\frac{1}{2}x^2$				
	5	1		
	$\frac{1}{3}$	1		

■ **Exemple 8.4** Des monômes de même degré sont similaires (proportionnels) :

- $5x$ et $-x$ sont similaires à x.
- $4x^2$, $-3x^2$ et $\frac{1}{2}x^2$ sont similaires à x^2.

Des monômes de degrés différents ne sont pas similaires (pas proportionnels) :

- $3x$ et $3x^2$ ne sont pas similaires :

x	-1	0	1	2	3
$3x$					
$3x^2$					

- x^2, $2x$ ne sont pas similaires :

x	-1	0	1	2	3
$2x$					
x^2					

Exercice 3 Regrouper les monômes similaires :

$$3x; \quad \frac{1}{5}x^2; \quad -x^2; \quad 7x^1; \quad 6x^2; \quad \frac{1}{4}x^2; \quad 3x^2; \quad -x; \quad 6x^2$$

Exercice 4 Calculer les valeurs des expressions suivantes lorsque x prend la valeur donnée :

Si $x = 9$ alors $3x - 2 =$ ....

Si $x = 5$ alors $12x - 8 =$ ....

Si $x = -2$ alors $10(x - 2) =$ ....

Si $x = 4$ alors $4(2x + 1) =$ ....

Si $x = -4$ alors $-(2x - 3) =$ ....

Si $x = 4$ alors $x^2 - 9x + 20 =$ ....

Si $x = -2$ alors $5x^2 - 6x =$ ....

Si $x = -4$ alors $-x^2 + 3x =$ ....

Si $x = -1$ alors $-x^2 - 2x + 3 =$ ....

Si $x = -2$ alors $3x^2 - 2x + 5 =$ ....

Exercice 5 — Programmes de calculs.

① Choisir un nombre
② Soustraire 5 à ce nombre
③ Multiplier le résultat par -4

a) Montrer que si le nombre choisi est 7 le résultat est -8.

① Nombre choisi 7 ② .... ③ ....

b) Qu'obtient-on si l'on choisit -3 ?

① Nombre choisi .... ② .... ③ ....

c) x est le nombre choisi. Exprimer le résultat à l'aide de x.

① Nombre choisi x ② .... ③ .... ④ ....

Exercice 6

① Choisir un nombre
② Multiplier le résultat par -4
③ Soustraire le nombre choisi
④ Multiplier par -3

a) Montrer que si le nombre choisi est 2 le résultat est 30.

① Nombre choisi .... ② .... ③ .... ④ ....

b) Qu'obtient-on si l'on choisit -6 ?

① Nombre choisi .... ② .... ③ .... ④ ....

c) x est le nombre choisi. Exprimer le résultat à l'aide de x.

① Nombre choisi .... ② .... ③ .... ④ ....

Exercice 7 — extrait du Brevet, Métropole 2021.

① Choisir un nombre
② Prendre le carré du nombre de départ
③ Ajouter le triple du nombre de départ
④ Soustraire 10 au résultat

a) Montrer que si on choisit 4 le résultat est 18.

① Nombre choisi .... ② .... ③ .... ④ ....

b) Qu'obtient-on si l'on choisit -3 ?

① Nombre choisi .... ② .... ③ .... ④ ....

c) x est le nombre choisi. Exprimer le résultat à l'aide de x.

① Nombre choisi .... ② .... ③ .... ④ ....

Exercice 8 — extrait du Brevet, Polynésie 2020.

① Choisir un nombre
② Ajouter 2 au nombre de départ
③ Élever au carré le résultat

a) Qu'obtient-on si l'on choisit -7 ?

....

b) x est le nombre choisi. Exprimer le résultat à l'aide de x.

....

Exercice 9

① Choisir un nombre
② Calculer son double
③ Lui soustraire 5.
④ Multiplier le résultat par le nombre de départ augmenté de 2.

a) Montrer que si on choisit 1 le résultat est -9.

....

b) x est le nombre choisit. Quelle expression correspond au résultat obtenu par le programme de calcul.

$$A = \left(x^2 - 5\right) \times (x + 2) \qquad B = (2x - 5) \times x + 2$$

$$C = (2x - 5) \times (x + 2) \qquad D = 2x - 5 \times x + 2$$

Exercice 10 Soit le script `Scratch` ci-dessous.

```
demander (Choisis un nombre ...) et attendre
mettre [A] à (réponse)
ajouter (2) à [A]
répéter (2) fois
    mettre [A] à ((A) * (-3))
mettre [A] à ((A) / (-2))
dire (A)
```

a) Montrer que si l'on choisit -7, le script affiche 22,5

....

b) Quelle est la valeur affichée si l'on choisit 0 ?

....

c) x est le nombre choisi. Quelle expression correspond au résultat affiché par le script ?

$$A = x + 2 \times 2 \times (-3) \div (-2) \qquad B = (x + 2) \times (-3) \div (-2)$$

$$C = (x + 2) \times 2(-3) \div (-2) \qquad D = (x + 2) \times (-3)^2 \div (-2)$$

Exercice 11

```
demander (Choisis un nombre ...) et attendre
mettre A à (réponse)
mettre B à ((A) * (2))
ajouter (-5) à B
mettre C à ((A) * (-5))
ajouter (3) à C
mettre D à ((B) * (C))
dire (D)
```

Soit le script `Scratch` ci-contre.

a) Montrer que si on choisit 1 le résultat est 6.

b) Quelle est la valeur affichée si l'on choisit 0 ?

c) x est le nombre choisit. Quelle expression correspond au résultat affiché par le script ?

Choix 1 : $\left(x^2 - 5\right) \times (-5x + 3)$

Choix 2 : $2x - 5 \times -5x + 3$

Choix 3 : $(2x - 5) \times (-5x + 3)$

d) En substituant x dans la bonne expression de la question précédente, expliquer ce qu'affiche le script si l'on choisit -10.

Exercice 12 — programmes de calculs.
Pour chaque script `Scratch`, on notera le nombre choisi par x. Donner une expression de la valeur affichée à l'aide de x.

```
mettre x à (réponse)
mettre y à ((x) * (x))
ajouter ((4) * (x)) à (y)
ajouter (21) à (y)
dire (y)
```

On choisit x
$y =$
$y =$
$y =$
affiche

```
mettre x à (réponse)
mettre y à ((3) * (x))
ajouter (5) à (y)
mettre y à ((2) * (y))
dire (y)
```

On choisit x
$y =$
$y =$
$y =$
affiche

Exercice 13 — programmes de calculs.
Même consignes

```
mettre x à (réponse)
mettre y à ((3) * (x))
ajouter (5) à (y)
dire (y)
```

On choisit x
$y =$
$y =$
affiche

```
mettre x à (réponse)
mettre y à ((5) + (x))
mettre y à ((3) * (y))
dire (y)
```

On choisit x
$y =$
$y =$
affiche

Exercice 14
Compléter l'algorithme ci-dessous afin d'effectuer le calcul donné.

```
1 quand [drapeau] est cliqué
2
3
4
5
```

a) Calculer $A = -2 - 4 \times (-6 - 5)$. Détailler les étapes.

b) Disposer les instructions ci-dessous dans l'ordre pour calculer la valeur de (A).

```
mettre A à ((A) + (-5))
ajouter (-2) à A
mettre A à (-6)
mettre A à ((A) * (-4))
```

8.2 Somme d'expressions

■ **Exemple 8.5**

À la pause midi, les élèves doivent choisir entre un menu burgers ou un menu pizza. Dans le premier groupe, 15 élèves choisissent le menu burger, et 8 le menu pizza. Dans un second groupe 10 élèves choisissent le menu burger, et 5 le menu pizza.

Si b est le prix du menu burger, et p le prix du menu pizza alors :

- $15b + 8p$ est le total payé par le groupe 1.
- $10b + 5p$ est le total payé par le groupe 2.
- $(15b + 8p) + (10b + 5p) = 25b + 13p$ est le total payé par les deux groupes.

Addition de polynômes

1) Ajouter les coefficient des termes similaires.
2) Ajouter les termes constants (sans la variable)

■ **Exemple 8.6**

Le professeur de maths à récolté de l'argent pour acheter 25 manuels et 25 calculatrices. On désigne par m est le prix d'un manuel, et c le prix d'une calculatrice. Par manque de stocks, il n'a pu acheter que 21 manuels et 8 calculatrices.

- $25m + 25c$ est l'argent récolté
- $21m + 8c$ est le montant dépensé.
- $(25m + 25c) - (21m + 8c) = 4m + 17c$ est montant restant.

Soustraction de polynômes

1) Ajouter les opposés des termes du polynomes que l'on soustrait.
2) Simplifie les termes similaires
3) Ajouter les termes constants

Théorème 8.1 — Bilan.

Ajouter une somme algébrique c'est ajouter chacun de ses termes.

Soustraire une somme algébrique c'est ajouter l'opposé de chacun de ses termes.

8.2.1 Exercices : Somme d'expressions

Addition de polynômes

1) Ajouter les coefficient des termes similaires.
2) Ajouter les termes constants (sans la variable)

■ **Exemple 8.7**

$A = (3x+4)+(-2x+7)$

$= 3x+4-2x+7$

$=$

$B(x) = (7x^2+2x-3)+(-6x^2+8x-9)$

$= 7x^2+2x-3)-6x^2+8x-9$

$=$

Exercice 15 Ajouter et simplifier les sommes suivantes :

$A(x) = (3x+3)+(4x+2)$

$B(x) = (x^2+2x+1)+(x^2-x-1)$

$C(x) = (-2x+3)+(8x^2+x+1)$

$D(x) = (8x^2+3)+(-4x^2+x+7)$

$E(x) = (x-3)+(-x-4)$

$F(x) = (4x^2+3x+5)+(-x^2-2x-3)$

$G(x) = (8x^2-9)+(x^2+4)$

$H(x) = (3x^2+2x-10)+(-x-7)$

$I(x) = (3x-5)+(-3x^2-6x+8)$

$J(x) = (x^2+7x-12)+(3x^2-9)$

Soustraction de polynômes

1) Ajouter les opposés des termes du polynomes que l'on soustrait.
2) Simplifie les termes similaires
3) Ajouter les termes constants

■ **Exemple 8.8**

$A = (4x-7)-(3x-4)$

$= 4x-7-3x-(-4)$

$=$

$B(x) = (3x^2-4x+1)-(-2x^2+7x-9)$

$= 3x^2-4x+1-(-2x^2))-7x-(-9)$

$=$

Exercice 16 Ajouter et simplifier les sommes suivantes :

$A(x) = (7x-1)-(2x-6)$

$B(x) = (8x-4)-(6x+9)$

$C(x) = (-3x^2+9)-(4x^2-2)$

$D(x) = (-3x^2-7)-(6x^2-9)$

$E(x) = (4x^2-3x-1)-(2x^2-7x-8)$

$F(x) = (3x^2+4x-10)-(4x^2-5x+1)$

$G(x) = (-x+4)-(4x^2+10x-12)$

$H(x) = (x^2-7)-(3x^2+10x-1)$

$I(x) = (12x^2-3x+4)-(-12x^2+4x-1)$

$J(x) = (x^2-x+1)+(3x^2-7x-12)$

8.3 Multiplication d'expressions

Deux types d'erreurs courantes lors d'une multiplication : ajouter les coefficients et multiplier les exposants.

■ Exemple 8.9 — multipler deux monômes.

- $3x^2 \times 5x = 3 \times x \times x \times 5 \times x = 3 \times 5 \times x \times \times x = 15x^3$
- $2x \times (-3x) = 2 \times x \times (-3) \times x = 2 \times (-3) \times x \times x = -6x^2$
- $5 \times x^2 \times 4 \times x^4 = 5xx \times 4xxxx = 5 \times 4 \times xxxxxx = 20x^6$

Postulat 8.2 — axiome de distributivité. Quelles que soient les valeurs de a,b et x on a :

$$(a+b) \times x = (a \times x) + (b \times x)$$

Distribuer un produit :

$$a \times (c+d) = ac + ad \qquad a \times (c-d) = ac - ad$$

(R) Ne pas utiliser différentes couleurs pour les lettres. Privilégier des flèches en couleur, et souligner de la même couleur le produit correspondant.

Théorème 8.3 — La distributivité double. Pour tous nombres relatifs (c'est à dire positifs ou négatifs) a, b, c et d on a l'identité :

$$(a+b) \times (c+d) = ac + ad + bc + bd$$

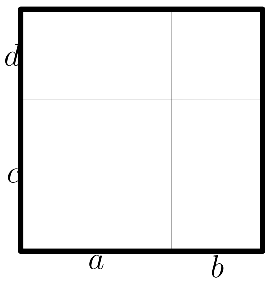


Figure 8.1 – Illustration géométrique de la double distributivité dans le cas de nombres positifs.

■ Exemple 8.10

$$\begin{aligned} A(x) &= (x+3)(x-2) \\ &= x \times x + x \times (-2) + 3 \times x + 3 \times (-2) \\ &= x^2 - 2x + 3x - 6 \\ &= x^2 + x - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= (x+3)(2-3x) \\ &= x \times 2 + x \times (-3x) + 3 \times 2 + 3 \times (-3x) \\ &= 2x - 3x^2 + 6 - 9x \\ &= -3x^2 - 7x + 6 \end{aligned}$$

8.3.1 Exercices : multiplications d'expressions

■ Exemple 8.11 — multipler deux monômes.

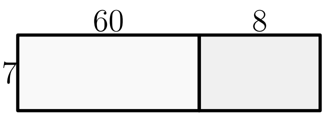
- $3x^2 \times 5x = 3 \times x \times x \times 5 \times x = 3 \times 5 \times x \times \times x = 15x^3$
- $2x \times (-3x) = 2 \times x \times (-3) \times x = 2 \times (-3) \times x \times x = -6x^2$
- $5 \times x^2 \times 4 \times x^4 = 5xx \times 4xxxx = 5 \times 4 \times xxxxxx = 20x^6$
- $(2x^3)(4x^2) =$ ....
- $(-3x^4)(6x) =$ ....

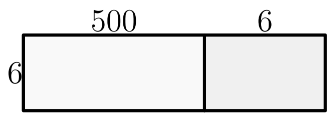
Exercice 17 Somplifier les produits et sommes de monômes suivants :

$A(x) = (7x^2)(3x^2)$	$C(x) = (7x^2) + (3x^2)$	$E(x) = (-2x^3)(9x)$	$G(x) = (3x^4)(7x)(6x^2)$
$B(x) = (-2x)(3x^2)$	$D(x) = (5x) + (3x^2)$	$F(x) = (-x)(-3x)(8x)$	$H(x) = (3x^2)^2$

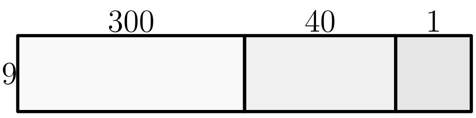
■ Exemple 8.12 — distributivité simple.

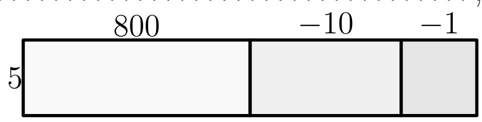
Utilise les aires des tuilles pour calculer les produits suivants :



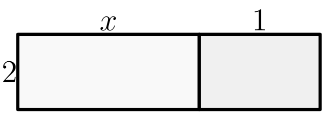


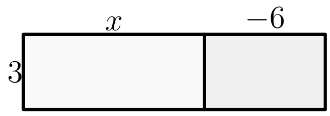
$7 \times 68 =$ .... ; $8 \times 506 =$ .... ;





$9 \times 341 =$ .... ; $5 \times 789 =$ ....

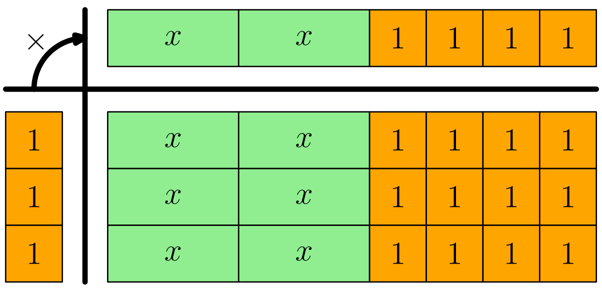


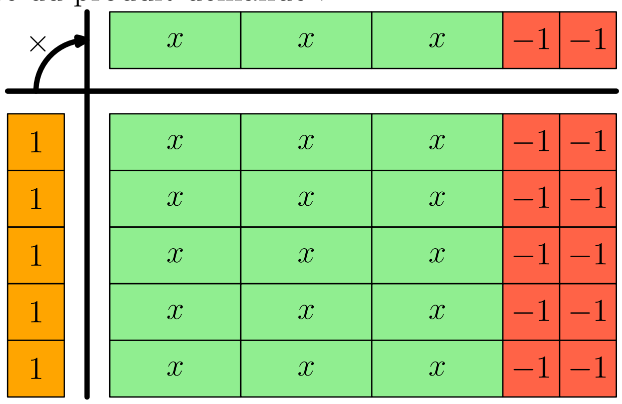


$2(x+1) =$ .... ; $3(x-6) =$ ....

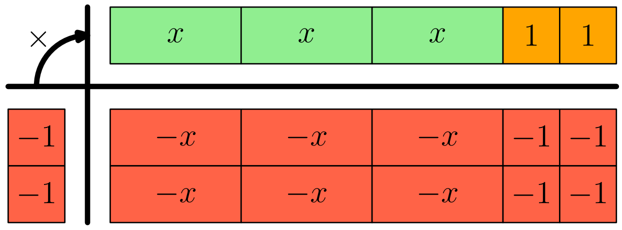
■ Exemple 8.13 — multiplier polynôme avec un monôme.

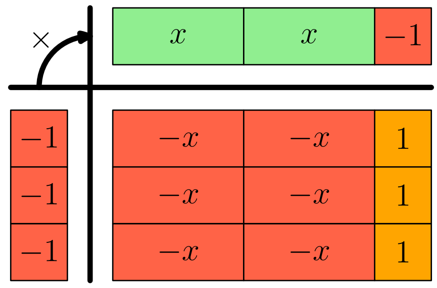
Compléter les tuilles pour retrouver l'expression simplifiée du produit demandé :



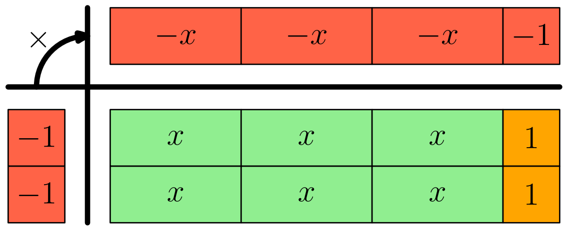


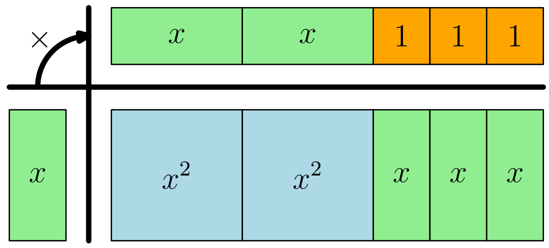
$3(2x+4) =$ .... ; $5(3x-2) =$ ....



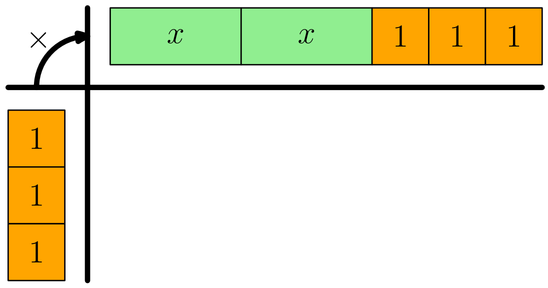


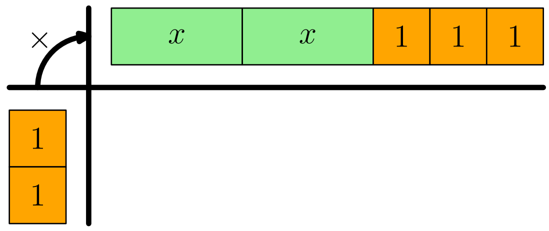
$-2(3x+2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $-3(2x-1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



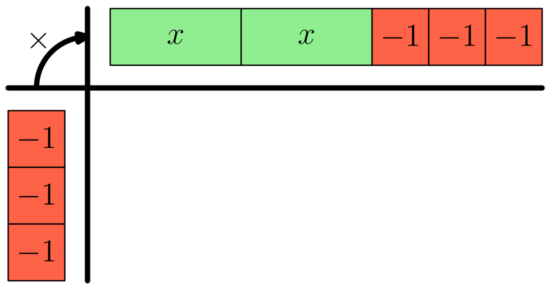


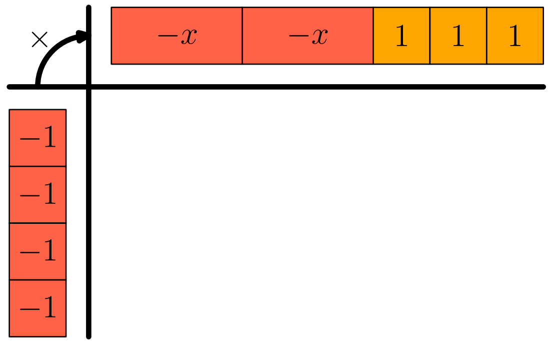
$-2(-3x-1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $x(2x+3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



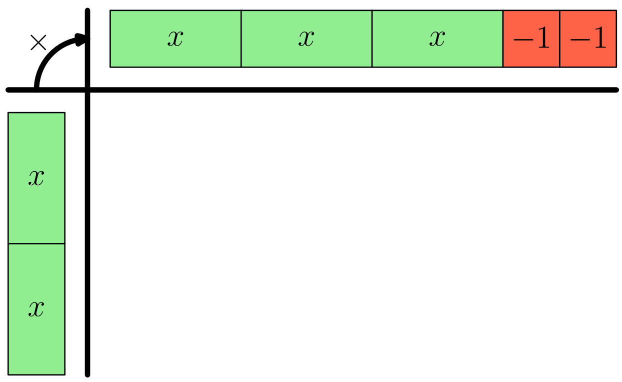


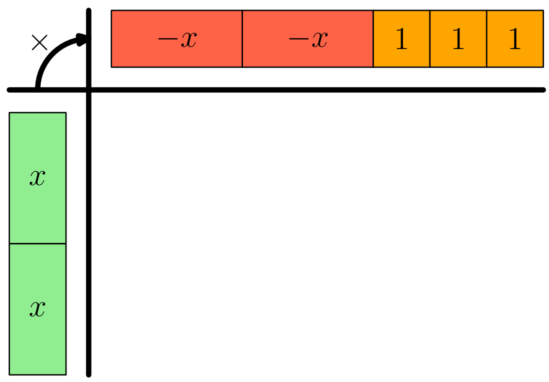
$3(2x+3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $2(2x+3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$





$-3(x-3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $-4(-2x+3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

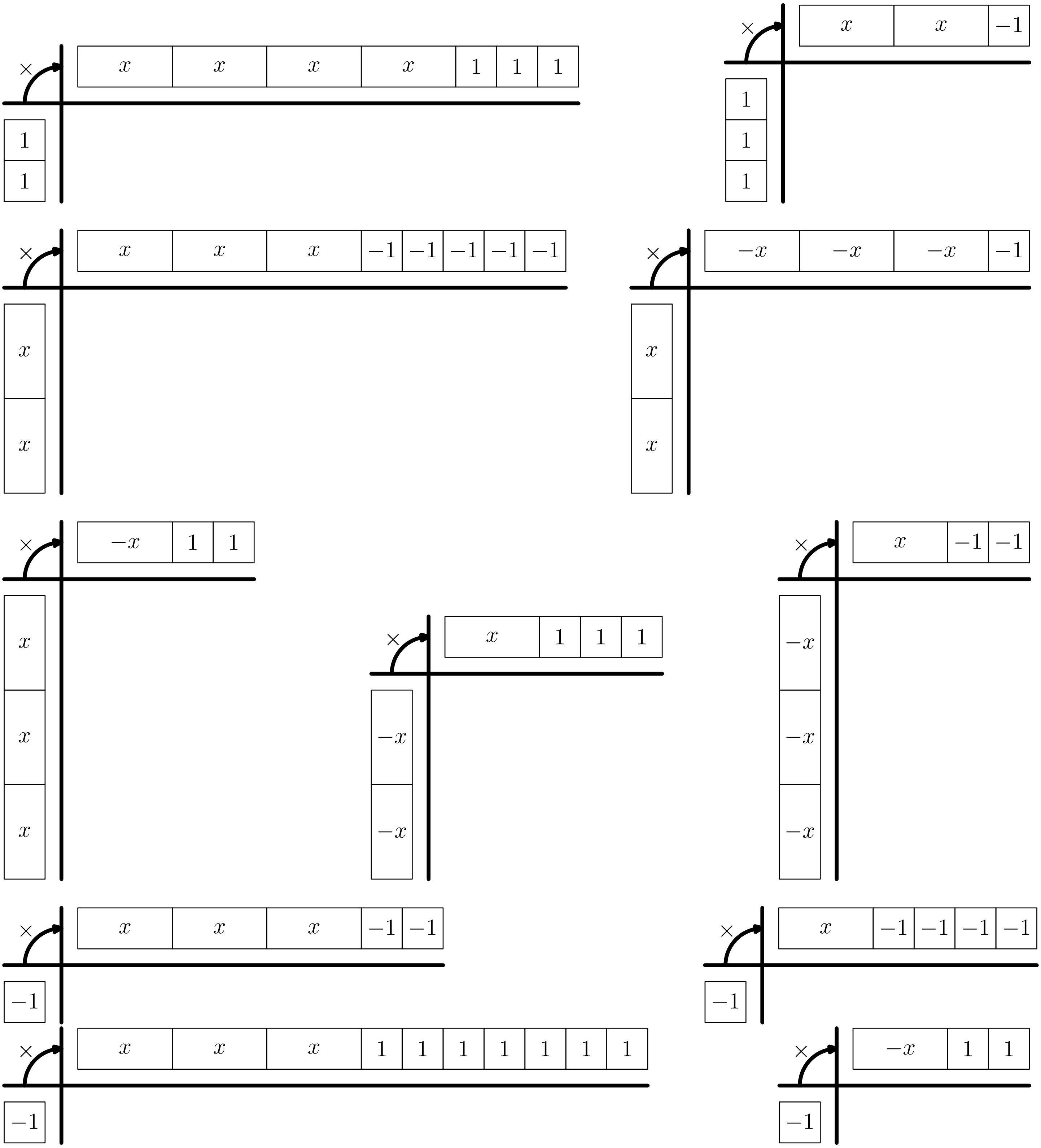




$2x(3x-2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $2x(-2x+3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 18 Mêmes consignes

$E_1 = 2(4x+3)$	$E_4 = 2x(-3x-1)$	$E_7 = -3x(x-2)$	$E_{10} = -(3x+7)$
$E_2 = 3(2x-1)$	$E_5 = 3x(-x+2)$	$E_8 = -1(3x-2)$	$E_{11} = -(-x+2)$
$E_3 = 2x(3x-5)$	$E_6 = -2x(x+3)$	$E_9 = -(x-4)$	$E_{12} = -x(-5x+3)$



■ **Exemple 8.14**

$A = 2(x+1) + 3(x-4)$

$=$

$=$

$=$

$B(x) = 4(-4x+1) - 2(7x-9)$

$=$

$=$

$=$

Exercice 19 Recopier sur votre cahier, puis développer, simplifier et réduire les expressions suivantes.

$A = 2(4x+2) + 6(3x+4)$

$B = 2(4x+2) + 6(3x-4)$

$C = -2(2+4x) + 6(3x-4)$

$D = 6(3x-4) + 2(2+4x)$

$E = 6(3x-4) - 2(2-4x)$

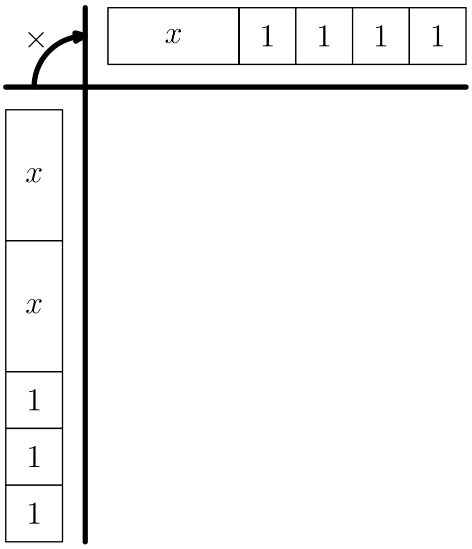
$F = -6(3x-4) - 2(2-4x)$

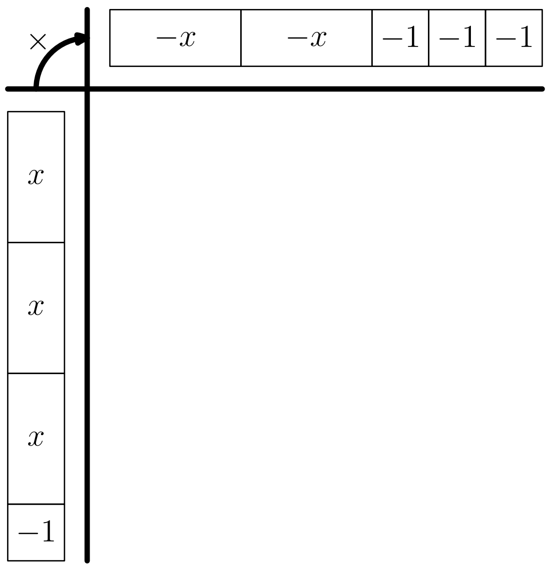
$G = 5x(3x-4) - 2(2 - \dfrac{4}{x})$

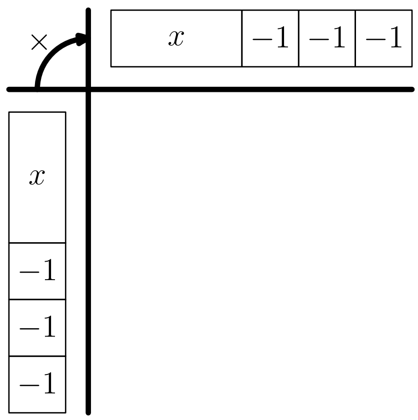
$H = -6x(x-4) + x(2 - \dfrac{4}{x})$

$I = 6x(x-4) - 2x(\dfrac{2}{x} - 4x)$

■ **Exemple 8.15**







$A = (2x+3)(x+4)$

$=$

$=$

$=$

$B(x) = (3x-1)(-2x-3)$

$=$

$=$

$=$

$C(x) = (x-3)^2$

$=$

$=$

$=$

Exercice 20 Développer simplifier et réduire les expressions suivantes :

$A = (x+5)(x+3)$

$B = (x-3)(x+5)$

$C = (x+3) + (x+5)$

$D = (x+3)(-x+3)$

$E = (2x-1)(x-2)$

$F = (3x+1)(-5x+1)$

$G = (2x+1)(3x-2)$

$H = (2x-1) - (x+4)$

$I = (x+7)^2$

Exercice 21 Développer simplifier réduire les expressions suivantes :

$A = 2(x-1)(x-4)$

$B = 3(x-1)(x+4)$

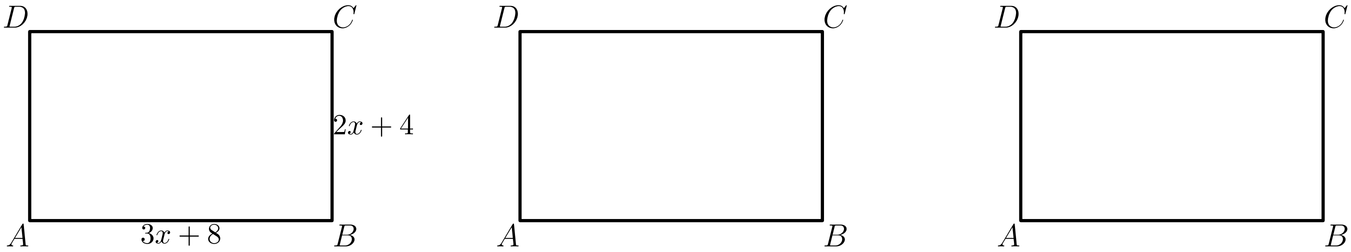
$C = 3(x+1)(2x-1)$

$D = 2(x-1)(x-4)$

$E = 3(x-1)(x-4)$

$F = 5(x-2)(x+4)$

Exercice 22



Les 4 questions sont indépendantes.

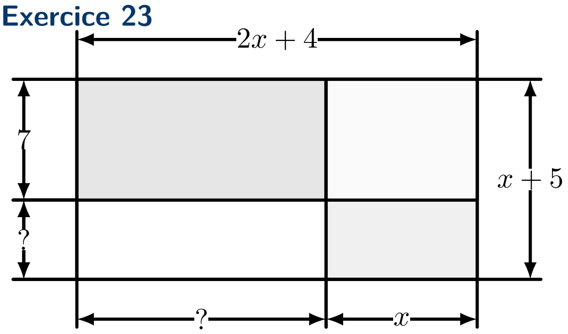
a) Si $x = 5$, donne les dimensions du rectangle $ABCD$.

b) Si $x = 2$, calculer la longueur de la diagonale $[AC]$. Arrondir au centième près.

c) Donner sous forme développée réduite une expression en x du périmètre du rectangle ci-dessous.

d) Donner sous forme développée réduite une expression de l'aire du rectangle.

Exercice 23



a) Exprimer les longueurs demandées à l'aide de x.

b) Exprimer les aires des 4 rectangles à l'aide de x. Donner l'expression sous forme développée réduite.

Une **identité** est une égalité qui reste vraie quelles que soit les valeurs prises par les lettres.

■ **Exemple 8.16** Soit les deux égalités

$3(x+1)+2 = 3(x+2)-1$

$MG = 3(x+1)+2$ $\qquad$ $MD = 3(x+2)-1$

$=$ $\qquad$ $=$

$=$ $\qquad$ $=$

$2(x+1)+2 = 3(x+2)-x$

$MG = 2(x+1)+2$ $\qquad$ $MD = 3(x+2)-x$

$=$ $\qquad$ $=$

$=$ $\qquad$ $=$

Exercice 24 Développer simplifier et réduire les deux membres **séparément** et en déduire que les égalités suivantes sont des identités :

a) $-3(x+5) = -3x-15$

b) $10x - 9(x-1) = x+9$

c) $2x+2+3(x-4) = 5(x-2)$

d) $2(4x+2)+6(3x+4) = 2(13x+14)$

e) $6(x-4)+(2-4x) = 2(x-11)$

f) $6(x-4)-(2-4x) = 2(5x-13)$

8.4 AP n° 01 Programmes de calculs. Calculs algébriques.

Exercice 25 Pour les programmes ci-dessous, le nombre choisi est dénoté par x. Donner l'expression du résultat final en fonction de x. Développer simplifier réduire et ordonner les expressions.

Programme A

1) Choisir un nombre,
2) Le multiplier par 3,
3) Ajouter le carré du nombre choisi,
4) Multiplier le résultat par 2

$A(x) =$

Programme C

1) Choisir un nombre,
2) Lui ajouter 3,
3) Prendre le double du résultat,
4) Soustraire le carré du nombre choisi,

$C(x) =$

Programme B

1) Choisir un nombre,
2) Lui ajouter 3,
3) Prendre le carré du résultat,
4) Soustraire le triple du nombre choisi,

$B(x) =$

$=$

$=$

$=$

Programme D

1) Choisir un nombre,
2) Ajouter 5 au triple du nombre choisi,
3) Multiplier le résultat par la somme du nombre choisi et -5

$D(x) =$

$=$

$=$

$=$

Vérifier une propriété sur des exemples ne permet pas d'affirmer qu'elle est **toujours** vraie.

Exercice 26

1) Montrer que pour tout nombre choisi, le programe A retournera toujours 13.
2) Montrer que pour tout nombre choisi, le programme B retournera toujours 8.

Programme A

① Choisir un nombre
② le doubler
③ ajouter 2 au résultat
④ prendre la moitié du résultat
⑤ ajouter 12 au résultat.
⑥ soustraire le nombre de départ

Programme B

① Choisir un nombre
② lui ajouter 3
③ doubler le résultat
④ soustraire le nombre de départ
⑤ ajouter 2 au résultat
⑥ soustraire le nombre de départ

Exercice 27 — en binôme. Développez simplifiez les expressions ci-dessous. Les réponses obtenues pour chaque ligne sont identiques. Si vos réponses ne sont pas concordantes, travaillez à deux pour retrouver vos erreurs.

	Expression A, élève côté fenètre	**Expression B, élève côté fenètre**	Réponse
1	$(-7x+2-3x)-(5+x-8)$	$(3x-2-5x)-(4+9x-11)$	
2	$4(2x-3)-2(x+5)$	$14(x-3)-4(2x-5)$	
3	$-15x(3x^2-6x)$	$-9x(5x^2-10x)$	
4	$(3x-1)(7x+1)-x(11x+2)$	$(5x-3)(2x-3)+5(3x-2)$	

Exercice 28 Ajouter des parenthèses de sécurité puis développer les expressions suivantes.

$A(x)=(2x-5)(5x+4)+(x+3)(2x-5)$ $\qquad$ $B(x)=(2x-5)(5x+4)-(x+3)(4x-5)$

Exercice 29 — 59 page 98 du manuel. le tour de magie

8.5 Factoriser une expression par facteur commun

Factoriser une somme:

$$ac + ad = a \times (c + d) \qquad ac - ad = a \times (c - d)$$

Il s'agit de regrouper une somme de termes à l'aide d'un facteur commun à tous les termes.

■ **Exemple 8.17 — Application directe.**

$$\begin{aligned} &3 \times x - 3 \times 15 \\ &= 3 \times (x - 15) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &2xy + 3xz \\ &= x(2y + 3z) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &2x(3x + 2) + 3x(2x - 1) \\ &= x\,(2(3x + 2) + 3(2x - 1)) \\ &= x\,(6x + 4 + 6x - 3)) \\ &= x\,(12 + 1)) \end{aligned}$$

■ **Exemple 8.18 — Puissances.** En présence de puissances, les écrire comme produit :

$$\begin{aligned} &3 \times x + 3^2 \\ &= 3 \times x + 3 \times 3 \\ &= 3 \times (x + 3) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &x^2 - 3x \\ &= x \times x - 3x \\ &= x(x - 3) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &(2x - 3)^2 - 5(2x - 3) \\ &= (2x - 3) \times (2x - 3) - 5(2x - 3) \\ &= (2x - 3)\,((2x - 3) - 5) \\ &= (2x - 3)\,(2x - 8) \end{aligned}$$

■ **Exemple 8.19 — règle du 1.**

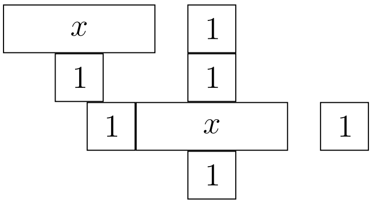
$$\begin{aligned} 3 \times x + 3 &= 3 \times x + 3 \times 1 \\ &= 3 \times (x + 1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &2(x - 3)y - (x - 3) \\ &= (x - 3)(2y - 1) \end{aligned}$$

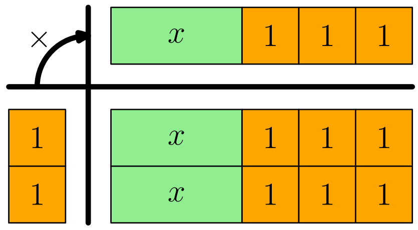
Exercice 30 Déterminez le plus grand facteur commun aux expressions suivantes :

a) $4x^2$ et $8x$	c) $3a$ et $12b$	e) ab^2 et a^2b ....
b) $2xy$ et $9xy$	d) $10y^3$ et $8y$	f) x^2y^2 et $3xy^3$ ....

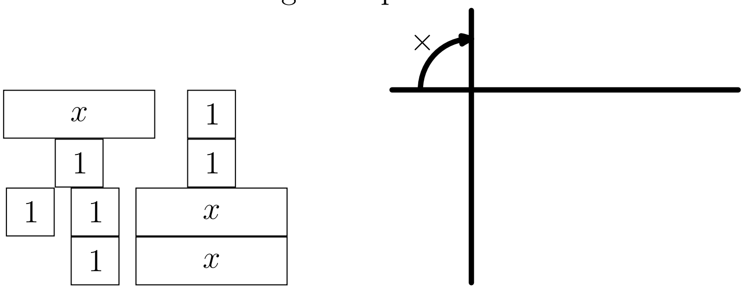
8.5.1 Exercices : Factoriser une somme. Applications

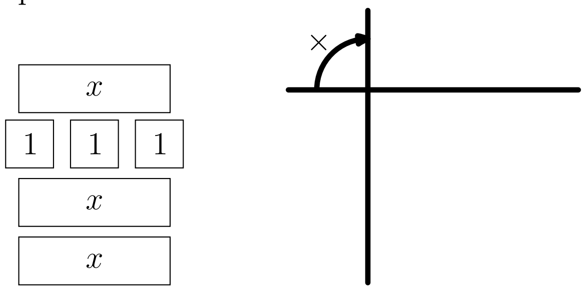
■ **Exemple 8.20** Réarranger l'expression et l'écrire sous forme d'un produit de deux facteurs.



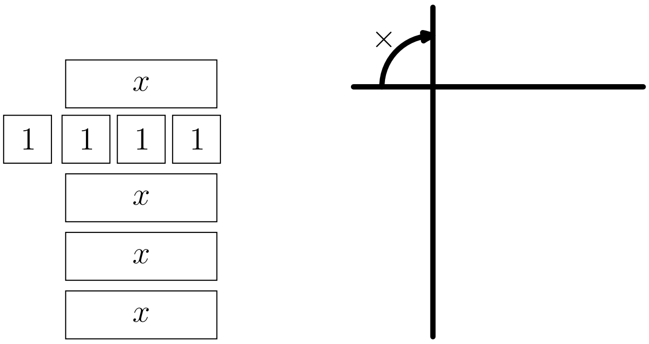


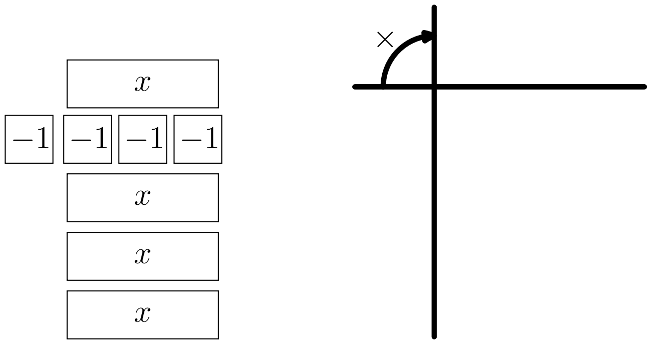
Exercice 31 Réarranger l'expression et l'écrire sous forme d'un produit de deux facteurs.



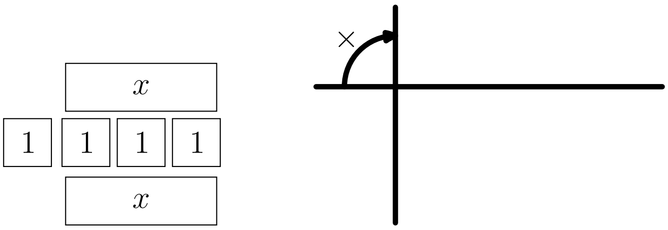


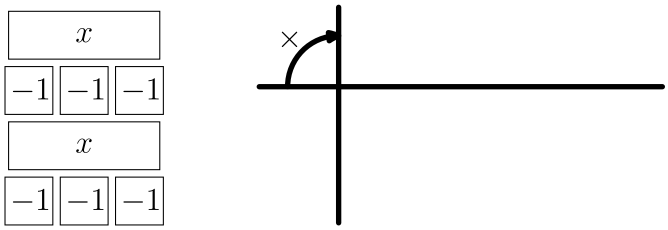
. . . . = ... ; . . . . = ...



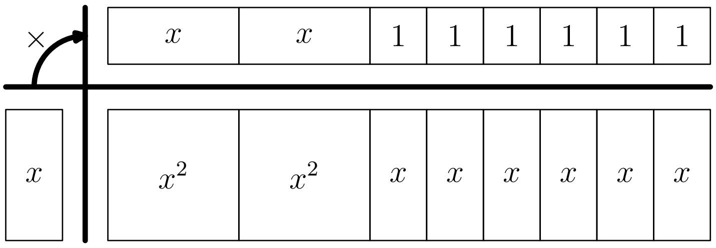


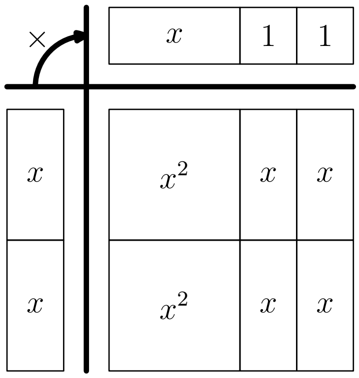
. . . . = ... ; . . . . = ...





. . . . = ... ; . . . . = ...





. . . . = ... = ...

Plus grand facteur commun de monômes

1) décomposer les coefficients en facteurs premiers.
2) écrire les puissances sous forme étendue.
3) identifier les facteurs communs, et le nombre de répétitions.

■ **Exemple 8.21** Trouver le plus grand facteur commun des monômes $20x^2yz^3$ et $30z^5y^2$:

$A = 20x^2yz^3 =$ $\qquad$ $B = 30x^5y^2 =$ $\qquad$ $PGFC =$

Exercice 32 Trouver le plus grand facteur commun pour chaque paire :

Paire	PGFC	Paire	PGFC
$4x$ et $6x$		$10x$ et $15x$	
$6x$ et $9x$		$12x$ et $20x^2$	
$8x$ et $12x$		$3x^2$ et $5x^2$	
18 et $12x$		$9x^2$ et $16x^3$	
$16x$ et $24x$		$7a^2$ et $14b^2$	
$7x$ et $11x$		$24x^2$ et $30x^3$	
$36x$ et $45x$		$15x^4$ et $45x$	
$8x^2$ et $14x^2$		$27x^4$ et $45x^3$	
$3x^2$ et $2x$		$2x^2y^2$ et x^2y	
$12x^3$ et $15x^2$		$24x^5y^2$ et $32x^3y^3$	

Tasha dit que xy est le plus grand facteur commun de x^2y et $(2xy)^2$. A-t-elle raison ?

■ **Exemple 8.22** Factoriser au maximum les expressions suivantes en utisant des polynômes à coefficients entiers. Si impossible, écrire qu'il ne peut être factorisé davantage.

$A = -6x^2 + 12x$ $\qquad$ $B = 30x - 18$ $\qquad$ $C = 2x^3 - 6x^2 + 10x$

$=$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $=$

$=$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $=$

Exercice 33 Factoriser au maximum les expressions suivantes : :

$3x+15=$ ....

$x^2+4x=$ ....

$8x-3x^2=$ ....

$2x^2+6x=$ ....

$30x-18=$ ....

$-30x+20=$ ....

$9x^2-9=$ ....

$3x^2-15x=$ ....

$4x^2+24x=$ ....

$15x^2-25x=$ ....

$12x-6x^2=$ ....

$30x-24x^2=$ ....

$20x^2-10x+40x^3=$ ....

$12x^3+8x^2=$ ....

$20x^2-15x^3=$ ....

$49x^2-x=$ ....

Exercice 34 — règle du 1 et factoriser par -1. Compléter le tableau suivant.

Forme factorisée (produit)		Forme développée(somme)
$3(x-1)$		
		$4x+4$
$5(x-1)$		
		$10x-10$
$-(x+1)$		
		$12x+6$
		$18x-6$
		$-x-10$
		$-2x^2+3x$
		$3x-3$
		$2x^2+x$
		$-2x^2-x$
		$3x^2-3x$

Exercice 35
Soit n un entier. Montrer que $18n + 42$ est toujours un multiple de 3.

Exercice 36
Soit n un entier. Montrer que $15n + 40$ est toujours un multiple de 5.

Exercice 37
Soit n un entier. Que pouvez-vous dire de $18n + 12$?

Exercice 38
Soit n un entier. Montrer que $(2n + 1)^2 - 1$ est toujours un multiple de 4.

Exercice 39 Dans cet exercice n désigne un entier positif.

a) Trouver une valeur possible de n tel que $3n + 1$ soit paire.
b) Peut-on affirmer que pour tout entier n, le nombre $5n + 3$ est toujours un nombre impair ?

> Une expression est paire si elle peut s'écrire $2 \times$ (un entier).
> Une expression est impaire si elle peut s'écrire $2 \times$ (un entier) $+ 1$

Exercice 40 Comment peut-on interpréter le résultat de l'exercice 9 ?

Exercice 41 n désigne un entier. Quelles séries de nombres sont obligatoirement 3 entiers pairs consécutifs :

a) $n\,;\quad n + 1;\quad n + 2$
b) $n - 1;\quad n;\quad n + 1$
c) $2n - 2;\quad 2n;\quad , 2n + 2$
d) $2n;\quad 2n + 1;\quad 2n + 2$
e) $2n;\quad 2n + 2;\quad 2n + 4$
f) $3n;\quad 3n + 2;\quad 3n + 4$

■ **Exemple 8.23** La somme de 3 nombres consécutifs impairs quelconques est toujours un multiple de 3.

solution. Soit n un entier.
3 nombres consécutifs impairs peuvent s'écrire :

matières à réflexion :
- Pourquoi $2n + 1$ est nécéssement impair ?
- Pourquoi le nombre impair suivant n'est pas $2n + 2$?
- Pourquoi ajouter les 3 expressions ?
- Pourquoi factoriser par 3 ?

■

■ **Exemple 8.24 — à vous.** Montrer que la somme de 4 nombres impairs consécutifs est un multiple de 8.

Exercice 42 Montrez que la somme de deux entiers consécutifs est toujours un nombre impair.

Exercice 43 Montrez que la somme de deux entiers impairs consécutifs est toujours un multiple de 4.

Exercice 44 Montrez que la différence du carré de deux entiers consécutifs est toujours un nombre impair.

8.5.2 Solutions et indications de exercices

solution de l'ex. 15. $A(x) = 7x+5$; $B(x) = 2x^2+x$; $C(x) = 8x^2-x+4$; $D(x) = 4x^2+x+10$; $E(x) = -7$; $F(x) = 3x^2+x+3$; $G(x) = 9x^2-5$; $H(x) = 3x^2-x-12$; $I(x) = -3x^2-3x+3$; $J(x) = 4x^2+7x-21$; ■

solution de l'ex. 16. $A(x) = 5x+5$; $B(x) = 2x-13$; $C(x) = -3x^2-4x+11$; $D(x) = 2-9x^2$; $E(x) = 2x^2+4x+7$; $F(x) = -x^2+9x-11$; $G(x) = -4x^2-11x+16$; $H(x) = -2x^2-16$; $I(x) = 24x^2-7x+5$; $J(x) = 4x^2-8x-11$; ■

solution de l'ex. 17. $A(x) = 21x^4$; $B(x) = -6x^3$; $C(x) = 10x^2$; $D(x) = 3x^2+5x$; $E(x) = -18x^4$; $F(x) = 24x^3$; $G(x) = 126x^7$; $H(x) = 9x^4$; ■

solution de l'ex. 18. $A(x) = 8x+6$; $B(x) = 6x-3$; $C(x) = 6x^2-10x$; $D(x) = -6x^2-2x$; $E(x) = -3x^2+6x$; $F(x) = -2x^2-6x$; $G(x) = -3x^2+6x$; $H(x) = 2-3x$; $I(x) = 4-x$; $J(x) = -3x-7$; $K(x) = x-2$; $L(x) = 5x^2-3x$; ■

solution de l'ex. 19. $A(x) = 26x+28$; $B(x) = 26x-20$; $C(x) = 10x-28$; $D(x) = 26x-20$; $E(x) = 26x-28$; $F(x) = 20-10x$; $G(x) = 15x^2-24x+8$; $H(x) = -4x^2+24x-4$; $I(x) = 6x^2-32x+4$; ■

solution de l'ex. 20. $A(x) = x^2+8x+15$; $B(x) = x^2+2x-15$; $C(x) = 2x+8$; $D(x) = 9-x^2$; $E(x) = 2x^2-5x+2$; $F(x) = -15x^2-2x+1$; $G(x) = 6x^2-x-2$; $H(x) = x-5$; $I(x) = x^2+14x+49$; ■

solution de l'ex. 21. $A(x) = 2x^2-10x+8$; $B(x) = 3x^2+9x-12$; $C(x) = 6x^2+3x-3$; $D(x) = 2x^2-10x+8$; $E(x) = 3x^2-15x+12$; $F(x) = 5x^2+10x-40$; ■

solution de l'ex. 33. $E_0 = 3x+15 = 3(x+5)$; $E_1 = x^2+4x = x(x+4)$; $E_2 = -3x^2+8x = -x(3x-8)$; $E_3 = 2x^2+6x = 2x(x+3)$; $E_4 = 30x-18 = 6(5x-3)$; $E_5 = 20-30x = -10(3x-2)$; $E_6 = 9x^2-9 = 9(x-1)(x+1)$; $E_7 = 3x^2-15x = 3x(x-5)$; $E_8 = 4x^2+24x = 4x(x+6)$; $E_9 = 15x^2-25x = 5x(3x-5)$; $E_{10} = -6x^2+12x = -6x(x-2)$; $E_{11} = -24x^2+30x = -6x(4x-5)$; $E_{12} = 40x^3+20x^2-10x = 10x\left(4x^2+2x-1\right)$; $E_{13} = 12x^3+8x^2 = 4x^2(3x+2)$; $E_{14} = 49x^2-x = x(49x-1)$; ■