Chapitre

Géométrie plane 19

19.1 Triangles égaux et semblables

Définition 19.1 — triangles égaux. Deux triangles sont égaux si leurs trois côtés et leur trois angles sont égaux deux à deux.

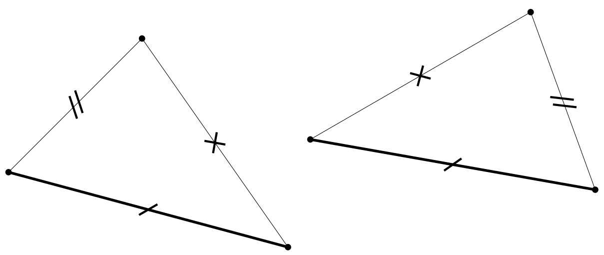


Figure 19.1 – Critère CCC : Si deux triangles ont leurs trois côtés respectivement égaux, alors ils sont égaux.

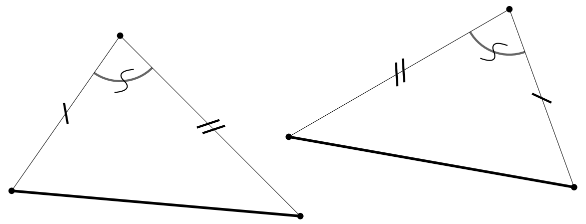


Figure 19.2 – Critère CAC : Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont égaux.

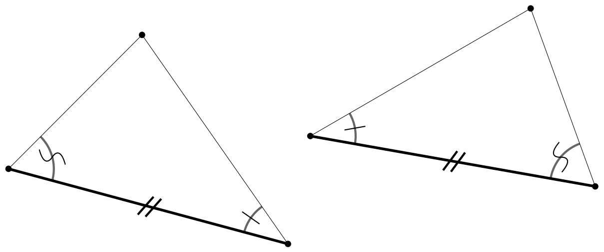


Figure 19.3 – Critère ACA Si deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles respectivement égaux, alors ils sont égaux.

R Cas RHC (Rectangle-Hypoténuse-Côté). Deux triangles rectangles, qui ont même longueur d'hypoténuse et une même longueur d'un côté de l'angle droit sont égaux.

Définition 19.2 Deux triangles sont **semblables** lorsqu'ils ont leurs angles égaux deux à deux et leurs côtés **proportionnels**.

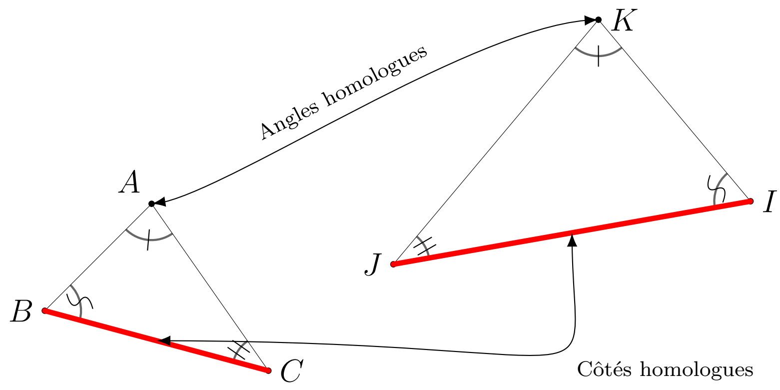


Figure 19.4 – les trianges ABC et IJK sont semblables.

Les **angles correspondants** sont égaux :

$$\widehat{A} = \widehat{K} \qquad \widehat{B} = \widehat{J} \qquad \widehat{C} = \widehat{I}$$

Les **côtés correspondants** sont proportionnels :

$$\frac{JK}{AB} = \frac{IJ}{BC} = \frac{IK}{AC} = k$$

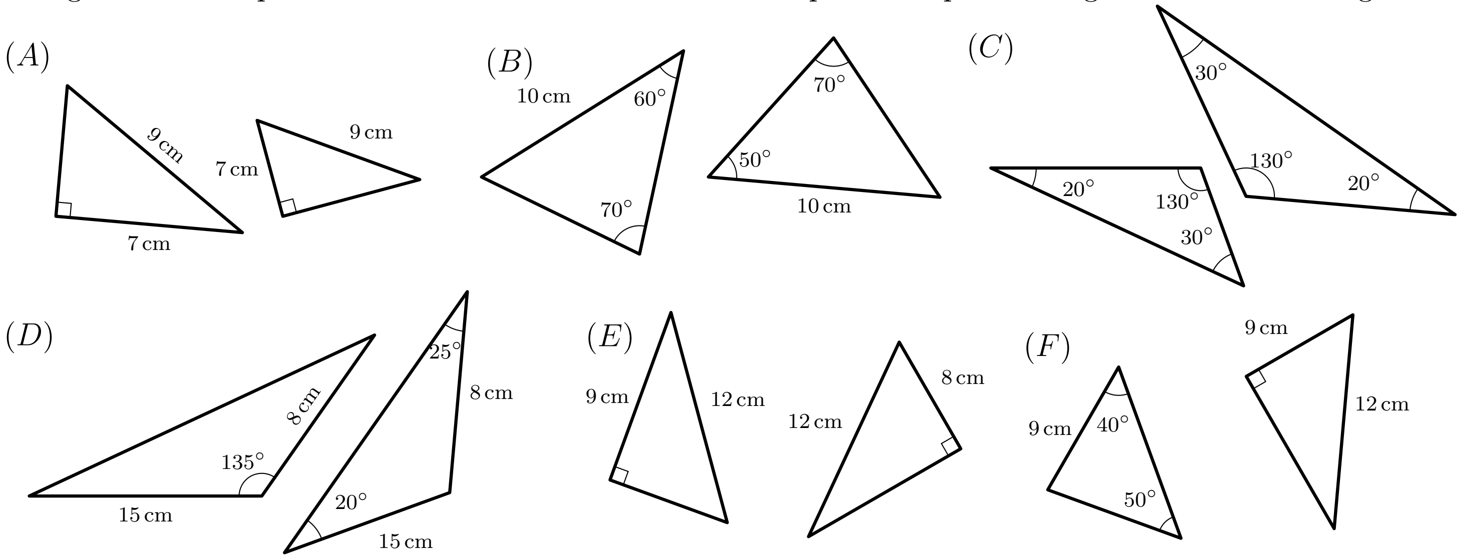
Postulat 19.1 — Critère de similitude CCC. Si les longueurs des 3 côtés d'un triangle T_1 sont **proportionnelles** aux longueurs respectives des 3 côtés d'un triangle T_2, alors les deux triangles sont semblables.

Postulat 19.2 — Critère CAC-Semblable. Si deux triangles T_1 et T_2 ont un angle égal compris entre 2 côtés respectivement proportionnels, alors les deux triangles sont semblables.

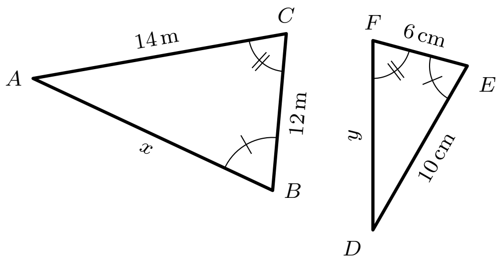
Postulat 19.3 — Critère de similitude AA. Si 2 angles d'un triangle T_1 sont **respectivement égaux** à 2 angles d'un triangle T_2. Alors les deux triangles sont semblables.

19.1.1 Exercices : calculs algébriques et géométrie

Exercice 1 — Triangles égaux : à l'oral. Si possible, démontrer pour chaque cas que les triangles sont égaux. Les figures ne sont pas à l'échelle. Utiliser la même couleur pour indiquer les angles et côtés homologues.



Exercice 2 — Révision triangles semblables.

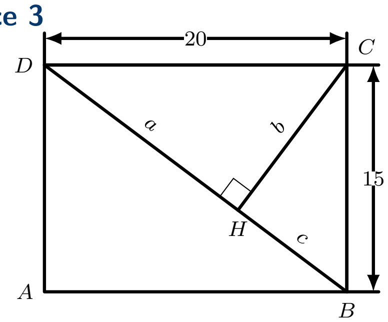


a) Justifier que les triangles ACB et FED sont semblables.

b) Écrire les égalités des rapports entre les côtés homologues.

c) Calculer les longueurs x et y.

Exercice 3



a) Calculer la longueur de la diagonale du rectangle $ABCD$.

b) Justifier que les triangles ABD et DHC sont semblables.

c) Écrire les égalités des côtés homologues.

d) Déduire les valeurs de a, b et c.

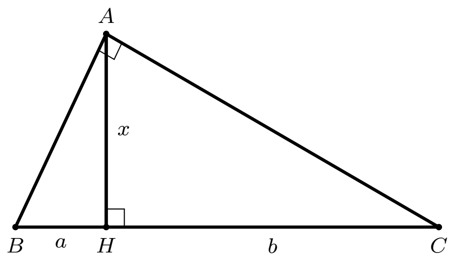
Exercice 4 — Quadrature du rectangle.

Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC est rectangle en A, et (AH) est perpendiculaire à (BC).

a) Démontrer que les triangles ACH et ABH sont semblables.

b) Écrire les rapports égaux.

c) En déduire que $x = \sqrt{ab}$.



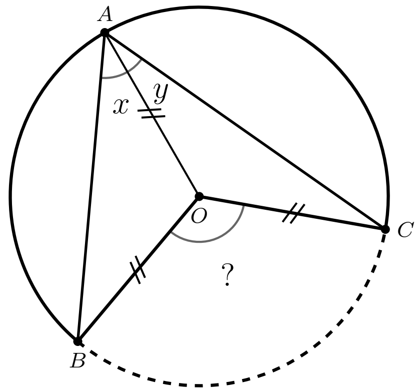
Exercice 5 — théorème de l'angle au centre. Soit un cercle de centre O passant par les points A, B et C. Nous voulons démontrer le théorème suivant :

> Dans un cercle, un angle au centre mesure le double d'un angle inscrit interceptant le même arc.

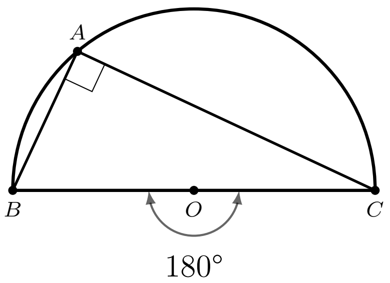
Pour simplifier on suppose que le centre O est intérieur à l'angle aigu $\widehat{BAC}$. Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BOC}$ (intérieur) interceptent le même arc de cercle BC.

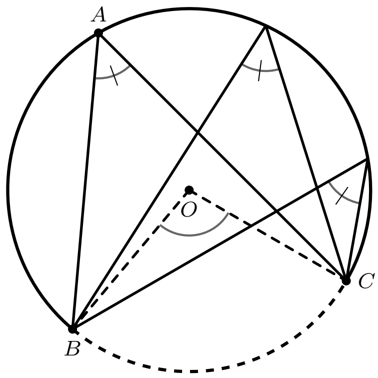
On pose $x = \widehat{BAO}$ et $y = \widehat{OAC}$.

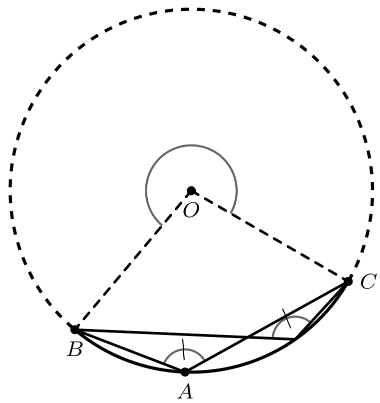
a) Exprimer les angles du triangle OAB à l'aide de x.
b) Exprimer les angles du triangle AOC à l'aide de y.
c) Montrer que la mesure de l'angle au centre recherché est égal à $2\widehat{BAC}$.



> **Théorème 19.4 — théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle.** Si le point A appartient au cercle de diamètre $[BC]$ alors le triangle ABC est rectangle en A.

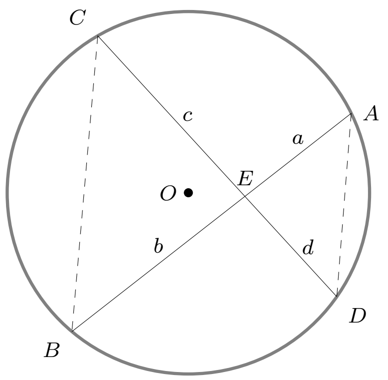






> **Théorème 19.5 — Théorème de l'angle inscrit.** Les angles inscrits interceptant le même arc de cercle ont la même mesure

Exercice 6

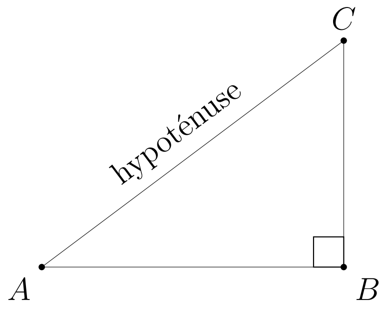


A, B, C et D sont des points d'un cercle de centre O. On suppose que les cordes $[AB]$ et $[CD]$ se coupent en E situé à l'intérieur du cercle.

a) À l'aide du théorème de l'angle inscrit, justifier que $\widehat{EDA} = \widehat{EBD}$.
b) Montrer que les triangles EAD et EBC sont semblables.
c) Écrire les égalités des rapports des côtés homologues.
d) En déduire que $ab = cd$.

19.2 Triangles rectangles

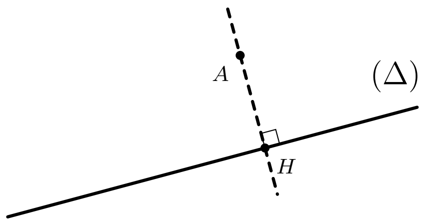
Définition 19.3 L'hypoténuse d'un triangle rectangle est le côté opposé à l'angle droit.



Théorème 19.6 — Théorème de Pythagore. Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

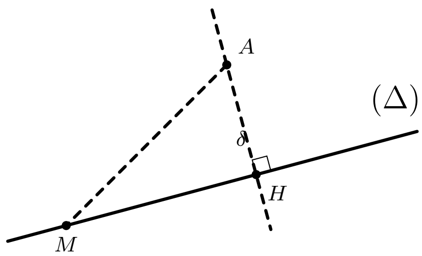
R Conséquence : l'hypoténuse est bien le plus grand côté.

Définition 19.4 Soit une droite (Δ) et un point A du plan. Le **projeté orthogonal** H de A sur (Δ) est le point d'intersection de Δ et de la perpendiculaire à (Δ) passant par A.



Théorème 19.7 Soit une droite (Δ) et A un point n'appartenant pas à (Δ). H le projeté orthogonal de A sur (Δ).
La distance ente A et la droite (Δ) est égale à AH. C'est la plus petite distance entre A et un point de la droite (Δ).

Démonstration. au programme Pour tout point $M \in (Delta)$, AMH est un triangle rectangle d'hypoténuse AM, et $AM \geqslant AH$. ■



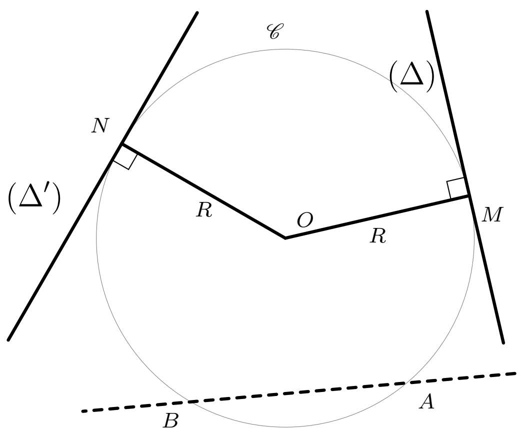
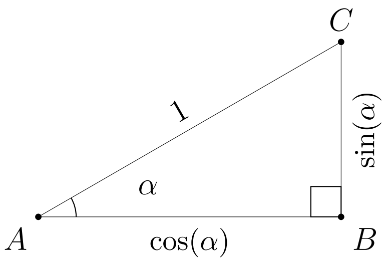


Figure 19.5 – La droite (AB) est sécante au cercle $\mathscr{C}$.
Les droites (Δ) et (Δ') sont dites tangentes au cercle.
La tangente en M au cercle en M est perpendiculaire au rayon OM.
La distance entre une tangente et le centre du cercle est égale au rayon R.
M est le projeté orthogonal du centre O sur droite (Δ).

Définition 19.5 Dans un triangle rectangle d'hypoténuse 1. α un angle aigu. On designe par :

- $\cos(\alpha)$ la longueur du côté adjacent à α
- $\sin(\alpha)$ la longueur du côté opposé à α



Théorème 19.8 Pour tout valeur de l'angle α on a :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

démonstration. (*au programme*) Conséquence directe du théorème de Pythagore ! ■

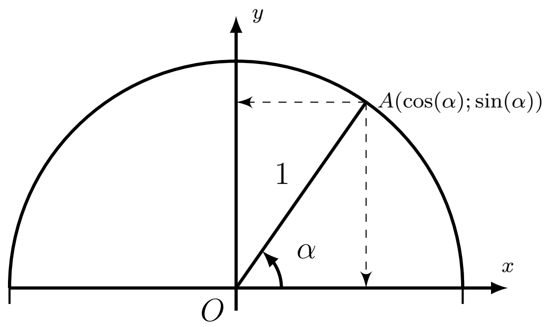


Figure 19.6 – Pour des angles obtus.

Définition 19.6 Soit le triangle ABC rectangle en B.
le **sinus** de l'angle α

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé à} \quad \alpha}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC} \leqslant 1$$

le **cosinus** de l'angle α :

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent à} \quad \alpha}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC} \leqslant 1$$

la **tangente** de l'angle α :

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{côté opposé à} \quad \widehat{BAC}}{\text{côté adjacent à} \quad \alpha} = \frac{BC}{AB}$$

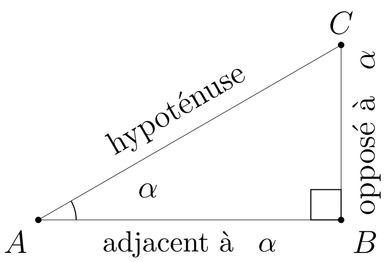
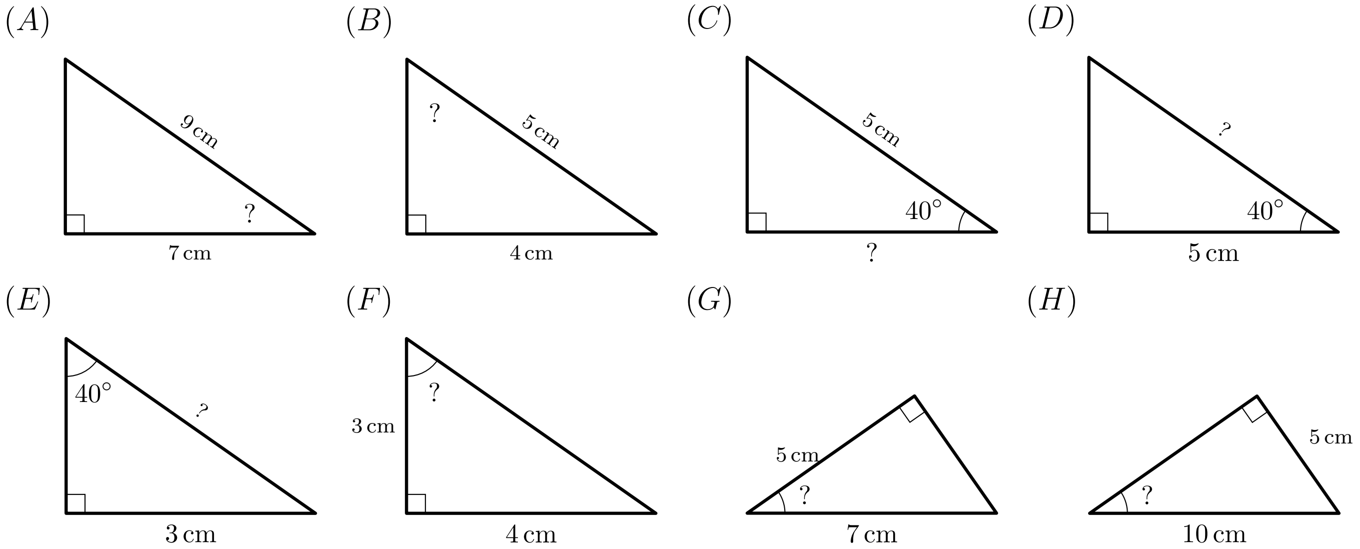


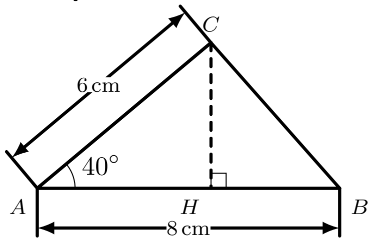
Figure 19.7 – En 2^{nd}, on calcule des rapports trigonométriques d'angles aigus.

19.2.1 Exercices : trigonométrie

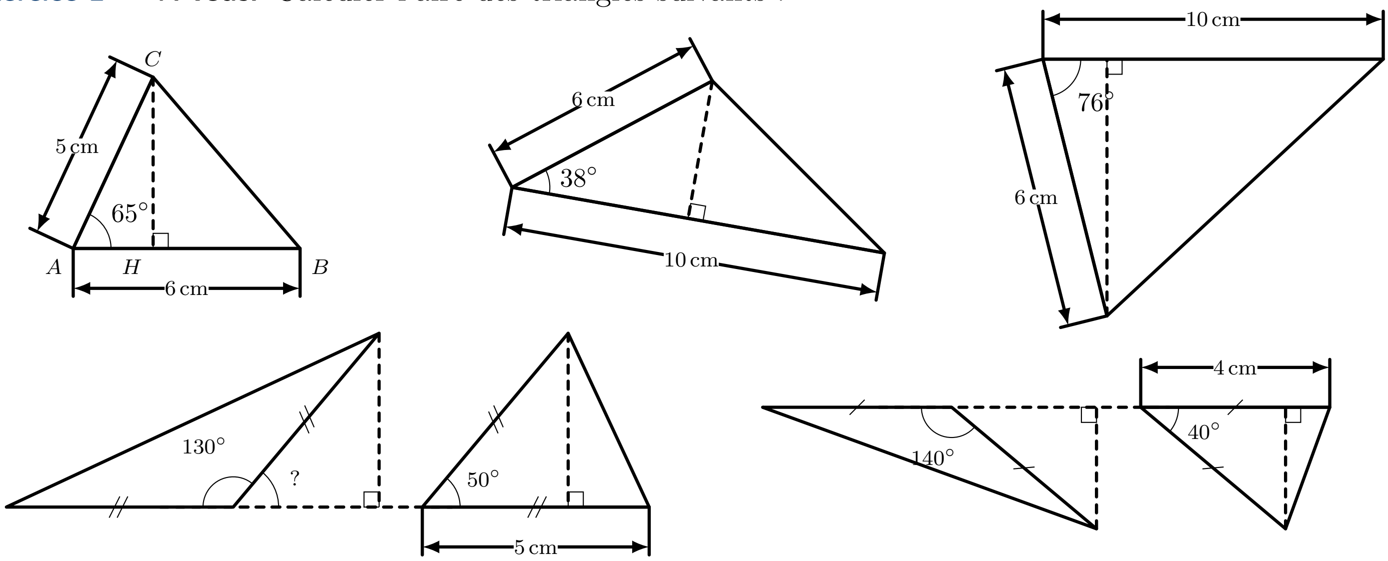
Exercice 1 — Trigonométrie. Écrire le rapport trigonométrique adapté et calculer les valeurs demandées.



■ **Exemple 19.9 — Calcul d'une aire.** Calculer l'aire du triangle ABC ci-dessous.

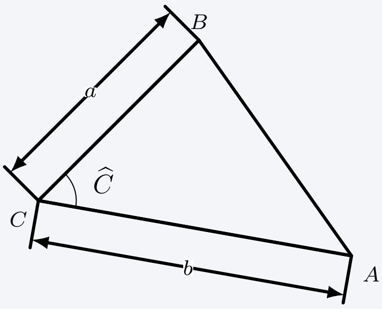


Exercice 2 — À vous. Calculer l'aire des triangles suivants :



R On peut calculer des rapports trigonométriques d'angles obtus (>90°). Comparer sin(130°),sin(50°).

Formule de l'aire

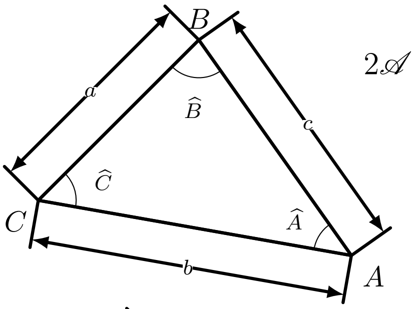


La formule est valable pour des angles aigus, mais aussi des angles obtus !

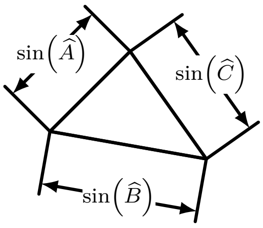
$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}ab\sin\left(\widehat{C}\right)$$

On a aussi l'égalité : $\sin\left(\widehat{C}\right) = \sin\left(180^\circ - \widehat{C}\right)$

■ **Exemple 19.10 — je fais : loi des sinus.**

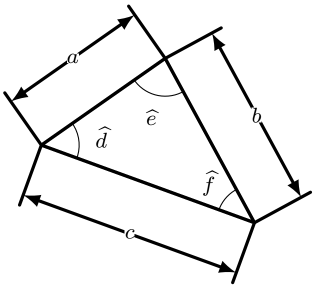


$$2\mathscr{A} = ab\sin\left(\widehat{C}\right) =$$



Exercice 3

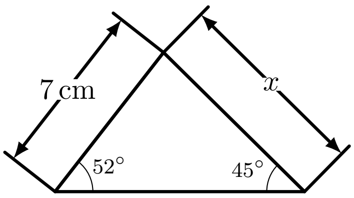
On considère la figure ci-dessous. Cocher les cases pour les formules vraies.

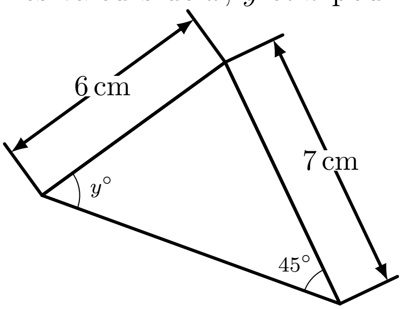


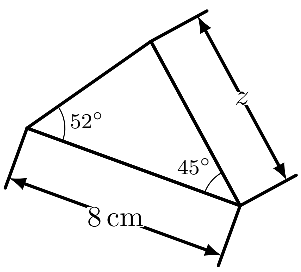
	Vrai	Faux
1/ $\dfrac{\sin(d)}{b} = \dfrac{\sin(e)}{c}$	☐	☐
2/ $\dfrac{a}{\sin(f)} = \dfrac{b}{\sin(c)}$	☐	☐
3/ $\dfrac{c}{\sin(e)} = \dfrac{b}{\sin(d)}$	☐	☐

Exercice 4

En utilisant la loi des sinus, trouver les valeurs de x, y et z pour chacune des figures suivantes.







solution de l'exercice 1.

A) $\cos(x) = \dfrac{7}{9}$.
$x = \arccos\left(\frac{7}{9}\right) \approx 39°$.

B) $\sin(x) = \dfrac{4}{5}$.
$x = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) \approx 53°$

C) $x = 5\cos(40°) \approx 3{,}83$.

D) $x = \dfrac{5}{\cos(40°)} \approx 6{,}53$.

E) $x = \dfrac{3}{\sin(40°)} \approx 4{,}67$.

F) $\tan(x) = \dfrac{4}{3}$.
$x = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53{,}10°$.

G) $\cos(x) = \dfrac{5}{7}$
$x = \arccos\left(\frac{5}{7}\right) = 44{,}40°$.

H) $\sin(x) = \dfrac{5}{10}$, $x = 30°$.

■

solution de l'exercice 2.

$A \approx 13{,}60\,\text{cm}^2$; $B \approx 18{,}50\,\text{cm}^2$; $C \approx 29{,}10\,\text{cm}^2$; $D \approx 9{,}58\,\text{cm}^2$; $E \approx 5{,}14\,\text{cm}^2$; ■

solution de l'exercice 3.

	Vrai	Faux
1/ $\dfrac{\sin(d)}{b} = \dfrac{\sin(e)}{c}$	☒	☐
2/ $\dfrac{a}{\sin(f)} = \dfrac{b}{\sin(c)}$	☐	☒
3/ $\dfrac{c}{\sin(e)} = \dfrac{b}{\sin(d)}$	☒	☐

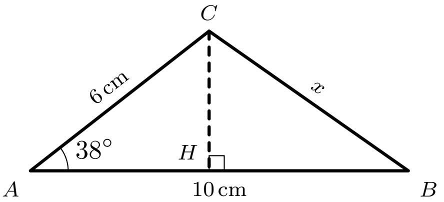
■

solution de l'exercice 4.

$x = 6{,}30\,\text{cm}$, $y \approx 55{,}60°$ et $z \approx 6{,}35\,\text{cm}$ ■

19.2.2 La loi des cosinus

Exercice 5 — un classique de 3ᵉ.

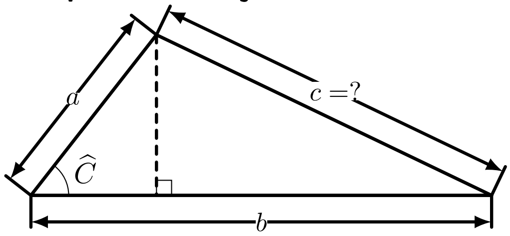


Dans la figure ci-contre, H est le pied de la hauteur issue de C.

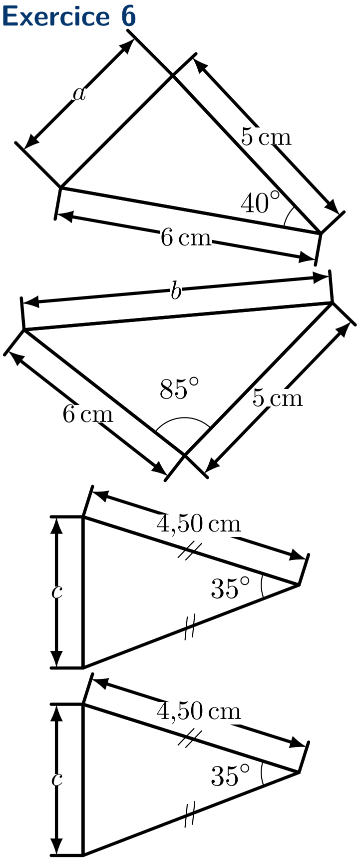
a) Calculer les longueurs CH et HB.

b) En déduire HB, puis une valeur approchée de x au dixième de cm.

■ **Exemple 19.11 — je fais, loi des cosinus.**



Exercice 6



$a^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos(40°)$

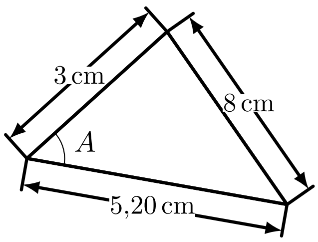
$a =$

$b^2 =$

$b =$

$c^2 =$

$c =$

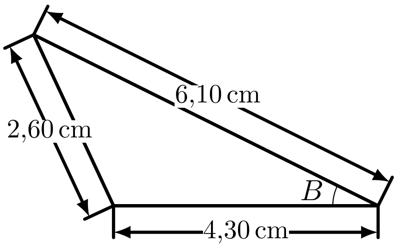


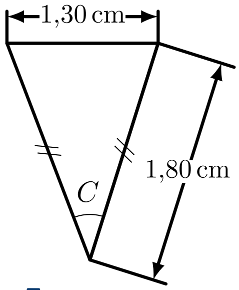
$$(\quad)^2 = (\quad)^2 + (\quad)^2 - 2 \times \quad \times \quad \times \cos(A)$$

$$=$$

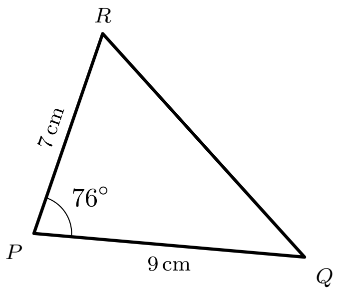
$$\cos(A) =$$

$$A =$$





Exercice 7



Dans le triangle PQR, $\widehat{QPR} = 76°$, $PQ = 9\,\text{cm}$ et $PR = 7\,\text{cm}$.

a) Calculer QR au millimètre près.

b) À l'aide de la loi des sinus, calculer les valeurs approchées à 10^{-1} près des angles $\widehat{PQR}$ et $\widehat{PRQ}$.