Chapitre 10
Repères et distances

Vers la géométrie repérée

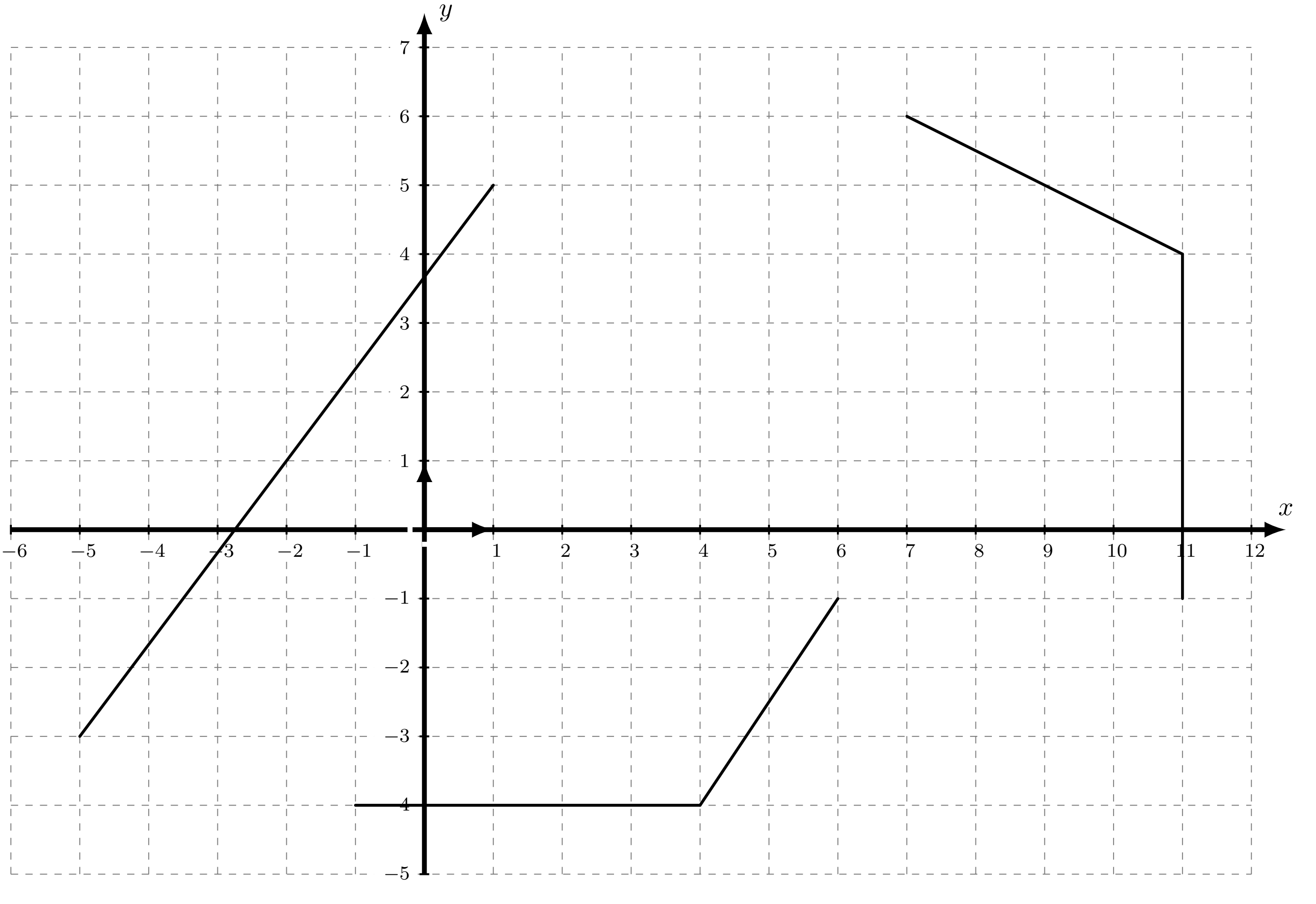


Figure 10.1 – Quel chemin est le plus long ? (d'abord sans quadrillage, puis avec quadrillage et conclure en rajoutant le repère.)

10.1 Repères et repères orthonormés

O, I et J trois points non alignés. Un repère $(O; I, J)$ (ou $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$), du plan est formé de :

① origine O du repère

② (OI) est l'axe gradué des abscisse (des x)

③ (OJ) est l'axe gradué des ordonnées (OJ)

Chaque point M du plan correspond à un unique couple de coordonnées $\big(x(M); y(M)\big) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ces coordonnées se lisent sur les deux axes en tracant leurs parallèles passant par M.

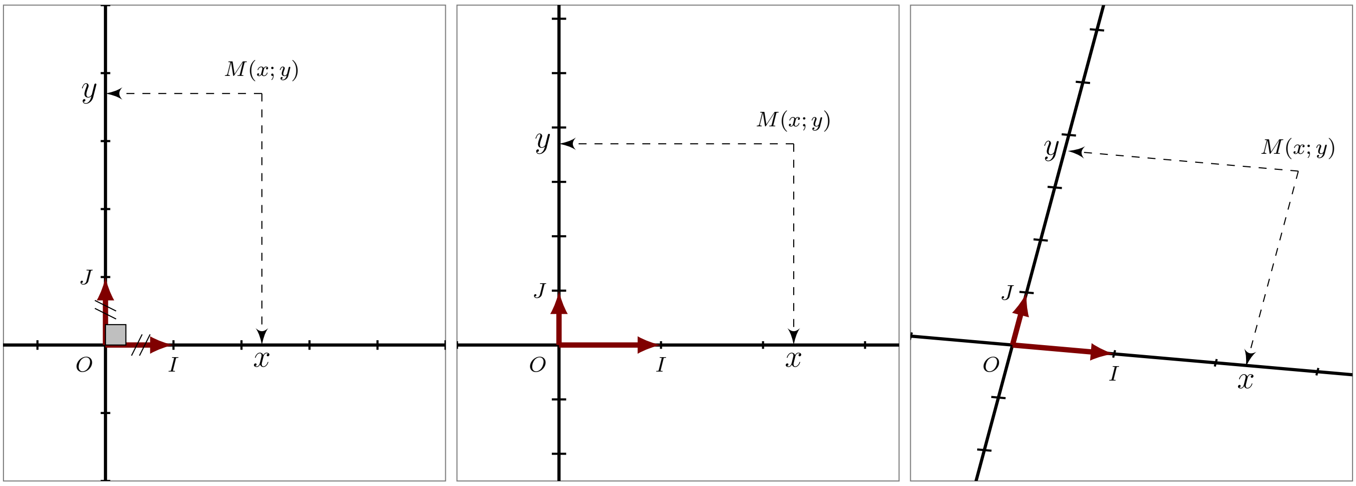


Figure 10.2 – Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, le triangle OIJ est rectangle isocèle (gauche). Le repère $(O; I, J)$ est orthogonal si OIJ est rectangle mais pas isocèle (milieu). Les repères peuvent être obliques (droite).

Par la suite, on travaille avec des **repères orthonormés** :

ortho-gonal les axes sont perpendiculaires

normé la longueur des segments unitaires sur les deux axes est la mêmes

10.2 Distance dans les repères orthonormés

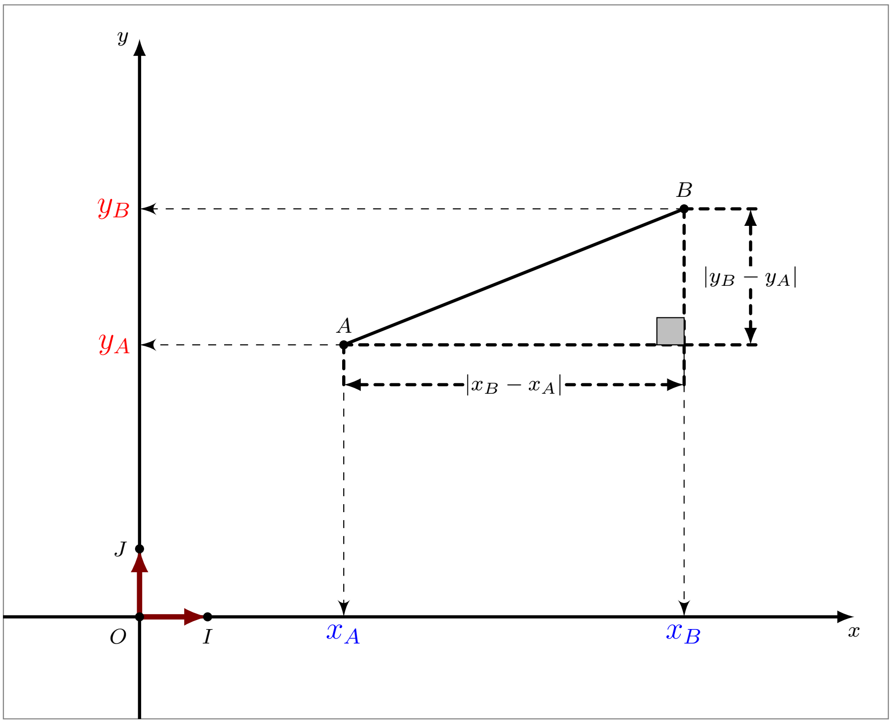


Figure 10.3 – Le plan est muni d'un repère **orthonormé** (O, I, J).
ABC est rectangle en C.

Démonstration. Le repère est orthonormé, le triangle ABC rectangle en C. D'après théorème de Pythagore :

$$AC = |x_B - x_A| \qquad BC = |y_B - y_A|$$

$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

$$AB^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \qquad |a|^2 = a^2$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

■

Théorème 10.1 Dans un repère orthonormé. La distance entre les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est donnée par les formules :

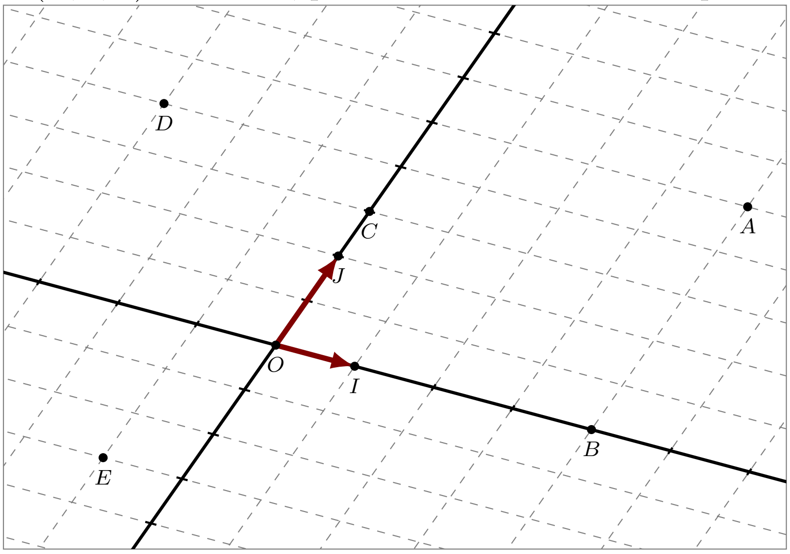
$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

10.2.1 Exercices : formule de la distance

Exercice 1 Dans le repère oblique $(O; I, J)$ ci-dessous, préciser les coordonnées des points suivants :

$O($; $)$
$I($; $)$
$J($; $)$
$A($; $)$
$B($; $)$
$C($; $)$
$D($; $)$
$E($; $)$



Dans les exercices suivants, le repère $(O; I, J)$ est orthonormé.

Exercice 2 Dans un repère orthonormé, $A(1; 5)$ et $B(-2; 7)$:

a) Cocher les expressions vraies.

	Vrai	Faux
1/ $AB^2 = (1+2)^2 - (5-7)^2 =$	☐	☐
2/ $AB^2 = (1-2)^2 + (5-7)^2 =$	☐	☐
3/ $AB^2 = (1-5)^2 + (-2-7)^2 =$	☐	☐
4/ $AB^2 = (1+2)^2 + (5-7)^2 =$	☐	☐
5/ $AB = (1-(-2))^2 + (5-7)^2 =$	☐	☐
6/ $AB^2 = (-2-1)^2 + (7-5)^2 =$	☐	☐

b) Calculer AB.

Travail en autonomie.

— pour 3 et 4, n'hésiter pas à représenter à main levée la figure puis calculer.
— 5, 6 et 7 tournent autour de la nature d'un triangle.
— 8 et 9 travaillent le cercle.
— 10. La tangente en A au cercle de centre O est LA droite perpendiculaire au rayon $[OA]$. Faire un dessin.
— 11 est un prétexte pour revenir sur les développements d'expressions avec racines carrées.

Exercice 3 Soit les points $A(3; 4)$, $B(3; -2)$ et $C(-5; -2)$.

a) Préciser un segment horizontal, un segment vertical et donner leurs longueurs.
b) Calculer la longueur du segment restant.
c) Calculer les angles du triangle au dixième de degré près.

Exercice 4 Soit les points $A(1;8)$, $B(4;1)$ et $C(7;1)$ dans un repère orthonormé $(O;I,J)$.

Calculer le périmètre et l'aire du triangle ABC.

Exercice 5

Soit $A(4;-11)$, $B(10;-10)$ et $C(2;1)$.

a) Calculer AB^2, AC^2 et BC^2

b) Écrire les longueurs AB, AC et BC sous la forme $a\sqrt{k}$, $a, k \in \mathbb{N}$, k le plus petit possible.

c) Préciser et justifier la nature du triangle ABC (équilatéral non isocèle, isocèle, rectangle).

Exercice 6 Même questions pour les points $A(1;3)$, $B(13;19)$ et $C(17;15)$.

Exercice 7 Même questions pour les points $A(1;20)$, $B(21;35)$ et $C(-14;40)$.

Exercice 8

Déterminer le rayon du cercle de diamètre $[BC]$ pour $B(-6;-1)$ et $C(-2;7)$.

Exercice 9

Déterminer si le point $B(-6;5)$ est intérieur, extérieur ou appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(8;-2)$ de rayon $\frac{7}{3}\sqrt{15}$.

Exercice 10

Soit $A(12;6)$ et $M(-12;24)$. Montrer que la droite (AM) est tangente au cercle de centre A passant par O, et préciser la distance entre A et (OM)

Exercice 11

Calculer PQ dans chacun des cas suivants. Exprimer la longueur sous la forme d'un entier ou $a\sqrt{k}$, avec k un entier le plus petit possible, et a entier.

a) $P(2;1)$ et $Q(1;5)$

b) $P(-2;1)$ et $Q(3;7)$

c) $P(-3;-4)$ et $Q(-6;-7)$

d) $P(2;7)$ et $Q(-1;-2)$

e) $P(9;5\sqrt{3})$ et $Q(2;7\sqrt{3})$

f) $P(7\sqrt{2};4\sqrt{2})$ et $Q(3\sqrt{2};-4\sqrt{2})$

Exercice 12

$\mathscr{C}(O;7)$ est le cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 7. Justifier soigneusement qu'un point $M(x;y)$ est sur le cercle si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation $x^2+y^2=49$.

Exercice 13

$\mathscr{C}(A;4)$ est le cercle de centre $A(1;2)$ et de rayon 4. Justifier soigneusement qu'un point $M(x;y)$ est sur le cercle si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation $x^2-2x+y^2-4y=11$.

solution de l'exercice 2.

	Vrai	Faux
1/ $AB^2 = (1+2)^2 - (5-7)^2 =$	☐	☒
2/ $AB^2 = (1-2)^2 + (5-7)^2 =$	☐	☒
3/ $AB^2 = (1-5)^2 + (-2-7)^2 =$	☐	☒
4/ $AB^2 = (1+2)^2 + (5-7)^2 =$	☒	☐
5/ $AB = (1-(-2))^2 + (5-7)^2 =$	☐	☒
6/ $AB^2 = (-2-1)^2 + (7-5)^2 =$	☒	☐

$$AB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

■

solution de l'exercice 5. $AB = \sqrt{37}$. $AC = 2\sqrt{37}$. $BC = \sqrt{185}$. Triangle rectangle. ■

solution de l'exercice 6. $AB = AC = 20$. $BC = 4\sqrt{2}$. Triangle isocèle. ■

solution de l'exercice 7. $AB = AC = 25$. $BC = 25\sqrt{2}$. Triangle rectangle isocèle. ■

solution de l'exercice 8 . $r = 2\sqrt{5}$. ■

solution de l'exercice 9. $BC = 7\sqrt{5}$. Point extérieur au cercle. ■

solution de l'exercice 11.

a) $PQ = \sqrt{17}$
b) $PQ = \sqrt{61}$
c) $PQ = 2\sqrt{3}$
d) $PQ = 10$
e) $PQ = \sqrt{61}$
f) $PQ = 4\sqrt{10}$

■

solution de l'exercice 12.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in \mathscr{C}(O;7) &\iff OM = 7 \\ &\iff OM^2 = 49 \\ &\iff \left(x-0\right)^2 + \left(y-0\right)^2 = 49 \\ &\iff x^2 + y^2 = 49 \end{aligned}$$

L'équation $x^2 + y^2 = 49$ sur les coordonnées $(x;y)$ caractérise les points du cercle.
On dira que le cercle $\mathscr{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 = 49$. En abrégé :$\mathscr{C}(O;7)\colon x^2 + y^2 = 49$ ■