Chapitre

3 Produit d'expression et identités

3.1 Identités et programmes de calcul

Une **indentité** est une égalité dans laquelle apparaît une ou plusieurs lettres (dites variables) et qui reste vraie quelles que soient les valeurs prises par les variables. [1]

[1] Utiliser l'exerciseur en ligne https://www.mathix.org/exerciseur_calcul_litteral/

> **Règle 1 : Axiome de distributivité**
>
> Pour tout nombres relatifs a,b et x : $(a+b)\times x = (a\times x)+(b\times x)$

interprétation simple : a paquets de x + b paquets de x = $(a+b)$ paquets de x !

> **Règle 2**
>
> Pour tout réel a : $a \times (-1) = (-a)$

Développer est une activité qui consiste à exploiter les 2 règles précédentes jusqu'à plus possible pour écrire une expression égale sous forme d'une **somme de termes**.

Exemple 3.1

$A = -(2x-5) = -2x+5$

> **La double distributivité**
>
> Pour tout réels a,b,x, $y \in \mathbb{R}$:
>
> $$\begin{aligned}(x+y)(a+b) &= x(a+b)+y(a+b)\\ &= xa+xb+ya+yb\end{aligned}$$

Exemple 3.2 Pour $x \in \mathbb{R}$, développer :

$A(x) = (2x-2)\times(3x-1)$	$C(x) = (2x+5)-(3x-1)$
$B(x) = (2x+5)+(3x-1)$	$D(x) = (-5x+1)(3x-1)$

3.1.1 Exercices

Exercice 1 — . Calculer les expressions suivantes :

$a = 5 + 5 \times 9$
$b = (5 + 5) \times 9$
$c = \frac{4}{4} + 3$
$d = \frac{4}{4+3}$

$e = \frac{5}{7+4}$
$f = 4 - \frac{5}{7}$
$g = 6 \times 3 + 7$
$h = -6 \times 3 + 7$

$i = -6 \times (3 + 7)$
$j = -11 \times 12 - 3$
$k = 2 - 8 \times (-15)$
$l = -6 \times 11 + 3$

Exercice 2 — **, substitution.** Calculer les expressions suivantes :

a) $-3 + 5x$ lorsque $x = -6$
b) $-3x - 5$ lorsque $x = -2$
c) $-9 + 7x$ lorsque $x = -7$
d) $-8 + 9x$ lorsque $x = -8$
e) $10 + 9x$ lorsque $x = -6$
f) $(x + y)z$ lorsque $x = 4$, $y = 6$ et $z = -5$.
g) $x^2 - yz$ lorsque $x = -1$, $y = -2$ et $z = 9$.
h) $xy + z^2$ lorsque $x = 10$, $y = -7$ et $z = -5$.

■ **Exemple 3.3**

a) $(2 + 4) \times (x + 2)$ est une $\boxed{}$
b) $7 + 2 \times x + 3$ est une $\boxed{}$
c) Quand on multiplie deux nombres, chaque nombre est un $\boxed{}$ du produit.
d) Quand on ajoute deux nombres, chaque nombre est un $\boxed{}$ de la somme.

Exercice 3 — Somme ou produit ?. Cocher la bonne réponse.

	Produit	Somme
1/ $2 - 5x$	☐	☐
2/ $2 + x \times 3 + 5$	☐	☐
3/ $(5 + 1)^2$	☐	☐
4/ $(3x - 2) + (5x - 4)$	☐	☐

	Produit	Somme
1/ $(2x - 1)(8x + 2)$	☐	☐
2/ $5x + 1$	☐	☐
3/ $x^2 - 25$	☐	☐
4/ $(x - 1)(x + 1)$	☐	☐

Exercice 4 — Identités A.

a) Montrer que les valeurs $x = 1$, $x = 3$ et $x = 5$ rendent l'égalité suivante vraie :

$$7(x - 8) - 3(x - 20) = 4(x + 1)$$

b) Montrer que pour tout x on a $7(x - 8) - 3(x - 20) = 4(x + 1)$

Exercice 5 — Identités B.

a) Montrer que les valeurs $x = 1$, $x = 3$ et $x = 5$ rendent l'égalité suivante vraie :

$$x^3 - 9x^2 + 23x = 15$$

b) Montrer que l'égalité $x^3 - 9x^2 + 23x = 15$ est fausse si $x = 0$ et $x = 4$ ($x^3 - 9x^2 + 23x = 15$ n'est pas une identité).

Exercice 6 En testant pour $x = -1$, $x = 0$ et $x = 1$, montrer que les égalités suivantes ne sont pas des identités.

a) $2 + 8x = 10x$
b) $x + x = x^2$
c) $-3(x + 5) = -3x + 15$
d) $10x - 9(x - 1) = x - 9$
e) $2(4x - 2) + (3x - 4) = 8(x - 1)$
f) $2(2 + 4x) + 6(3x - 4) = 10(3x - 2)$
g) $6(x - 4) - (2 - 4x) = 2(5x - 13)$
h) $6(x - 4) - (2 - 4x) = 10(x - 3)$

Exercice 7 Développer simplifier et réduire les deux membres séparément et en déduire que les égalités suivantes sont des identités :

a) $(2 + 8)x = 10x$
b) $x + x = 2x$
c) $-3(x + 5) = -3x - 15$
d) $10x - 9(x - 1) = x + 9$
e) $2x + 2 + 3(x - 4) = 5(x - 2)$
f) $2(4x + 2) + 6(3x + 4) = 2(13x + 14)$
g) $6(x - 4) + (2 - 4x) = 2(x - 11)$
h) $6(x - 4) - (2 - 4x) = 2(5x - 13)$

Exercice 8 — Un classique : programmes de calcul.

```
Quand [drapeau] est cliqué
demander (Choisir un nombre) et attendre
mettre x à (réponse)
mettre y à ((0) − (x))
mettre y à ((y) + (25))
mettre y à ((y) * (−3))
dire (y) pendant (5) secondes
```

```
Quand [drapeau] est cliqué
demander (Choisir un nombre) et attendre
mettre x à (réponse)
mettre y à ((3) * (x))
mettre y à ((y) − (75))
dire (y) pendant (5) secondes
```

a) Montrer que si on saisit le nombre 10 alors les deux scripts affichent -45
b) Que retourne les deux scripts si on saisit le nombre -10 ?
c) Exprimer la variable y à l'aide de x pour chacun des 2 programmes.
d) Développer simplifier réduire les expressions obtenues et en déduire que les 2 scripts affichent les mêmes valeurs si on saisit le même nombre en entrée.

Exercice 9

x désigne un nombre. Développer simplifier réduire chacune des expressions suivantes.

$A(x) = (2x + 1)(6x + 1)$
$B(x) = (2x + 1) + (6x + 1)$
$C(x) = (5x - 3)(3x + 2)$
$D(x) = (5x - 3) - (3x + 2)$
$E(x) = (4x - 1)(2x - 5)$
$F(x) = (3x - 4)(2x - 1)$
$G(x) = 7x(4x + 5) - 9(4x + 5)$
$H(x) = (7x - 9)(4x + 5)$

solution de l'exercice 9. ■

3.2 Identités remarquables

■ **Exemple 3.4 — Les identités remarquables.** A et B sont deux nombres. Développer les expressions suivantes.

$$(A+B)^2 \qquad (A-B)^2$$

Le carré d'une somme

a et b sont deux nombres quelconques. On a l'égalité suivante :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

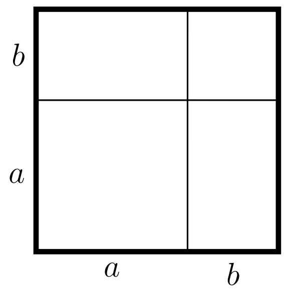

Figure 3.1 – Illustration géométrique du carré de la somme de nombres positifs $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$

Théorème 3.5 — Différence de deux carrés. A et B sont deux nombres quelconques. On a l'égalité suivante :

$$(A-B)(A+B) = (A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$(A-B)$ est le terme conjugué de $(A+B)$.
$(A+B)$ est le terme conjugué de $(A-B)$

Démonstration. Développer $(A+B)(A-B)$. ■

3.3 Exercices double distributivité et identité remarquable

■ **Exemple 3.6 — je fais.** Développer simplifier réduire chacune l'expression suivante.

$A(x) = (x+5)(x+8)$

$=$

$=$

$=$

$=$

$A(x) = (2x-1)(x+7)$

$=$

$=$

$=$

$=$

Exercice 1 x désigne un nombre. Développer simplifier réduire chacune des expressions suivantes.

$A(x) = (x-3)(x+5)$	$C(x) = (x-1)(x-6)$	$E(x) = (-2x+3)(x-8)$
$B(x) = (x+8)(x+7)$	$D(x) = (2x+1)(4x-3)$	$F(x) = (x^2+1)(x+3)$

> Corriger le développement suivant : $(x-3)(x+4) = x^2+4x+3x+12 = x^2+7x+12$.

■ **Exemple 3.7 — je fais.** Développer simplifier réduire chacune l'expression suivante.

$A(x) = (3x^2-4)(2x^2+5x-1)$

$=$

$=$

$=$

$=$

Exercice 2 x désigne un nombre. Développer simplifier réduire chacune des expressions suivantes.

$A(x) = (2x+1)(4x^2-3x+2)$	$D(x) = (2x+5)(x^2-3x+4)$	$G(x) = (x^2-1)(x^2-3x+1)$
$B(x) = (x+2)(x^2+3x+1)$	$E(x) = (3x-2)(x^2-4x+3)$	$H(x) = (x^3-4)(x^2-7x+2)$
$C(x) = (x-3)(x^2-x+1)$	$F(x) = (2x^2-1)(x^2-3x-3)$	$I(x) = (x^2-x)(x^2+8x-1)$

> Jim développe $(x-3)(x^2-x-1)$ et obtient x^3+2x^2-4x-3. A-t'il raison ? Sinon explique son erreur et donner la bonne réponse.

Exercice 3 — Utiliser la double distributivité pour calculer les carrés demandés :

$44^2 = (40+4)^2 \qquad 98^2 = (100-2)^2 \qquad 504^2 \qquad 3{,}1^2 \qquad 6{,}5^2$

Exercice 4 — Grand classique : programmes de calculs.

Ci-dessous, 2 programmes de calculs, l'un est donné par son script `Scratch`.

Programme A

① Choisir un nombre

② Soustraire 3 à ce nombre

③ Multiplier le résultat par 4

④ Ajouter le carré du nombre de départ

Programme B

```
1 demander (Choisis un nombre ...) et attendre
2 mettre x à (réponse)
3 mettre y à ((x) + (2))
4 mettre y à ((y) * (y))
5 ajouter (-16) à y
6 dire (y)
```

a) Montrer que les deux programmes donnent « -16 » lorsqu'on choisit « -2 » comme nombre de départ :

Programme A : $-2 \rightarrow \qquad \rightarrow \qquad \rightarrow \qquad \rightarrow$

Programme B : $-2 \rightarrow \qquad \rightarrow \qquad \rightarrow \qquad \rightarrow$

b) Justifier que les deux programmes donnent le même résultat final lorsqu'on choisit -5 comme nombre de départ.

c) Si l'on appelle « x » le nombre choisi au départ du programme A, écrire en fonction de x l' expression obtenue à la fin du programme A. Donne la forme développée réduite.

d) Pour le programme B, donne l'expression développée simplifiée réduite de y en fonction de x.

e) Ces programmes donnent-ils toujours le même résultat quelle que soit la valeur de x ? Justifier.

Exercice 5 — Grand classique : programmes de calcul version tableur et `scratch`.

C1 ▼ ✗ ✔ f_x = B1+1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	$A = (3x-4)(x+7)$	-52	-50	-42	-28	-8	18	50
3	$B = 3x^2 + 17x - 28$	-52	-50	-42	-28	-8	18	50

a) Dans la cellule C1 on saisit la formule = B1+1 et on étire vers la gauche. Quelle est la formule dans la cellule H1.

b) Entourer la formule écrite dans la cellule B2 puis étirée vers la gauche ?

-52 | (3*(-3)-4)(-3+7) | =(3*(-3)-4)(-3+7) | (3*x-4)(x+7) | =(3*x-4)*(x+7) | = (3*B1-4)*(B1+7)

c) Quelle formules a-t-on écrit dans la cellule C2 puis étirée vers la gauche ?

d) La tableau semble indiquer que les deux expressions prennent la même valeur quelle que soit la valeur de x.

Démontrer cette conjecture.

solution de l'exercice 1. ■

solution de l'exercice 2. ■

3.4 Factoriser par regroupement

Il s'agit de regrouper une somme de termes à l'aide d'un facteur commun à tous les termes.[2]

[2] Utiliser l'exerciseur en ligne https://www.mathix.org/exerciseur_calcul_litteral/

■ **Exemple 3.8 — Application directe.**

$$\begin{aligned} &3\times x-3\times 15 \\ &=3\times(x-15) \end{aligned}\qquad \begin{aligned} &2xy+3xz \\ &=x(2y+3z) \end{aligned}\qquad \begin{aligned} &2x(3x+2)+3x(2x-1) \\ &=x\left(2(3x+2)+3(2x-1)\right) \\ &=x\left(6x+4+6x-3)\right) \\ &=x\left(12+1)\right) \end{aligned}$$

■ **Exemple 3.9 — Puissances.** En présence de puissances, les écrire comme produit :

$$\begin{aligned} &3\times x+3^2 \\ &=3\times x+3\times 3 \\ &=3\times(x+3) \end{aligned}\qquad \begin{aligned} &x^2-3x \\ &=x\times x-3x \\ &=x(x-3) \end{aligned}\qquad \begin{aligned} &(2x-3)^2-5(2x-3) \\ &=(2x-3)\times(2x-3)-5(2x-3) \\ &=(2x-3)\left((2x-3)-5\right) \\ &=(2x-3)\left(2x-8\right) \end{aligned}$$

■ **Exemple 3.10 — règle du 1.**

$$\begin{aligned} 3\times x+3 &= 3\times x+3\times 1 \\ &=3\times(x+1) \end{aligned}\qquad \begin{aligned} &2(x-3)y-(x-3) \\ &=(x-3)(2y-1) \end{aligned}$$

■ **Exemple 3.11 — factorisations à 2 étapes.**

$$\begin{aligned} 3x(5x-2)^2-2(2-5x) &= \\ &= \\ &= \\ (2x-3)^2-5(4x-6) &= (2x-3)(2x-3)-5(4x-6) \\ &= \\ &= \\ &= \\ (2x-3)(5x-2)-5x+2 &= \end{aligned}$$

Exercices 34 à 39 pages 77

3.4.1 Exercices factorisations et applications

Exercice 1 Recopier sur votre cahier, puis factoriser au maximum les expressions suivantes.

$A(x) = 3x + 15$	$E(x) = 35x + 20$	$I(x) = 12x - 6x^2$
$B(x) = x^2 + 4$	$F(x) = 35x + 21$	$J(x) = 24x - 27x^2$
$C(x) = 30x - 18$	$G(x) = 24x - 27$	$K(x) = 20x^2 - 10x + 40$
$D(x) = 30x - 19$	$H(x) = 49x^2 - x$	$L(x) = 20x^2 - 10x + 40x^3$

■ **Exemple 3.12** Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$A(x) = 2(x+5) + (2x-3)(x+5)$

$=$

$=$

$=$

$B(x) = (2-8x)(7-x) - (7-x)(3-x)$

$=$

$=$

$=$

$=$

Exercice 2 Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$A = (2x+3)(2x-5) + x(2x-51)$	$E = (2x-15)(6x+1) - 3(6x+1)$
$B = 8(x-2) + (x-2)(x-5)$	$F = (7-5x)(2+3x) - (7-5x)^2$
$C = (5x-2)(x+7) + (5x-2)^2$	$G = (x+4)(2x+3) - (x+4)(x-6)$
$D = (x+3)(x-2) + (x+3)$	$H = 3(x-4)(2x+3) - 2(x-4)(x+6)$

■ **Exemple 3.13 — je fais.** Factoriser à l'aide de l'identité remarquable :

$A(x) = x^2 - 36$

$=$

$= \left(\ldots\ldots\right)^2 - \left(\ldots\ldots\right)^2$

$=$

$B(x) = 4x^2 - 36$

$=$

$= \left(\ldots\ldots\right)^2 - \left(\ldots\ldots\right)^2$

$=$

$C(x) = 25 - 9x^8$

$=$

$= \left(\ldots\ldots\right)^2 - \left(\ldots\ldots\right)^2$

$=$

$D(x) = (4x+1)^2 - 36$

$= \left(\ldots\ldots\ldots\right)^2 - \left(\ldots\ldots\ldots\right)^2$

$=$

$B(x) = 4(x+1)^2 - 36$

$=$

$= \left(\ldots\ldots\ldots\right)^2 - \left(\ldots\ldots\ldots\right)^2$

$=$

Exercice 3 Factoriser au maximum les expressions suivantes.

$A(x) = x^2 - 100$	$E(x) = 64 - x^2$	$I(x) = (x+5)^2 - 1$
$B(x) = 1 - 16x^10$	$F(x) = 4x^2 - 25$	$J(x) = (x-5)^2 - 9$
$C(x) = 49 - x^{12}$	$G(x) = 144 - 4x^8$	$K(x) = (x+3)^2 - 25$
$D(x) = 9 - 100x^2$	$H(x) = 9x^6 - 121$	$L(x) = 100(x+2)^2 - 16$

Exercice 4 n désigne un entier. Quelles séries de nombres sont obligatoirement 3 entiers pairs consécutifs :

a) $n\,;\quad n+1;\quad n+2$	c) $2n-2;\quad 2n;\quad ,\,2n+2$	e) $2n;\quad 2n+2;\quad 2n+4$
b) $n-1;\quad n;\quad n+1$	d) $2n;\quad 2n+1;\quad 2n+2$	f) $3n;\quad 3n+2;\quad 3n+4$

■ **Exemple 3.14** La somme de 3 nombres consécutifs impairs quelconques est toujours un multiple de 3.

■ **Exemple 3.15 — à vous.** Montrer que la somme de 4 nombres impairs consécutifs est un multiple de 8.

solution. Soit n un entier.
3 nombres consécutifs impairs peuvent s'écrire :

matières à réflexion :
- Pourquoi $2n+1$ est nécésserement impair ?
- Pourquoi le nombre impair suivant n'est pas $2n+2$?
- Pourquoi ajouter les 3 expressions ?
- Pourquoi factoriser par 3 ?

■

Exercice 5
Montre algébriquement que la somme de deux nombres entier consécutifs est un nombre impair.

Exercice 6
Montre algébriquement que pour tout entier n le nombre $(n+1)^2 - n^2$ est toujours un nombre impair.

Exercice 7
Montre algébriquement que pour tout entier n le nombre $(2n+3)^2 - (2n-3)^2$ est un multiple de 12.

Exercice 8
Soit n un entier. Quel est le reste de la division de $15n + 13$ par 5 ?

Exercice 9
Soit n un entier. Quel est le reste de la division de $(2n+1)^2$ par 4 ?

solution de l'exercice 1. ■

solution de l'exercice 1. ■

solution de l'exercice 2. ■

3.5 TD Programmes de calculs et tableurs

■ **Exemple 3.16 — je fais.** Fichier de travail G Spreadsheets

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	5	10	15	20	25	30
2	b	8	9	10	11	12	13
3	$a \div b$	0.625					
4	$b^2 + 2a$	41					
5	reste de la division de a par b	5					
6	nombre aléatoire entre 1 et 12	7					

G3 contient :

G4 contient :

G5 contient :

G6 contient :

Exercice 1 Préciser les valeurs qui s'afficheront dans chaque cellule selon la formule utilisée :

	A	B	C
1	8	=3*A1+2	=3*B1+2
2	3	=5*A2-2	=5*A2^2+3*A2+1
3	-2	=A3^2+3	=(A3-3)*(3*A3+5)

B1 affiche : C1 affiche

B2 affiche : C2 affiche

B3 affiche : C3 affiche

Exercice 2 On souhaite exécuter le programme ci-dessous à l'aide d'un tableur :

① Choisir un nombre

② Multiplier par 5

③ Ajouter 7 au résultat

④ Diviser par 2

	A	B	C	D	E	F
1	Nombre choisi	1	2	3	4	5
2	Résultat du programme	6	8.5	11	13.5	16

a) Quelle formule a-t-on écrite dans la cellule C1 puis étirée vers la droite ?

b) Quelle formula a-t-on écrite dans la cellule B2 puis étirée vers la droite ?

Exercice 3

On veut calculer le 3e angle d'un triangle connaissant les mesures des deux autres en degré.
Quelle formule a-t-on écrite dans la cellule C2 puis étirée vers le bas ?

	A	B	C
1	1 angle	2 angle	3 angle
2	37	53	
3	144	36	
4	113	48	

Problème 1 https://docshare.dgpad.net/ code : M7b9

Feuille 1 Connectez vous à l'aide de vos logins et remplir le tableau ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Mon nombre est...	-2	-1	0	1	2	3	4
2	le triple de son carré							
3	le double de son inverse							
4	la moitié de son opposé							

Feuille 02 et suivantes Description de la procédure à effectuer :

① Affiche la feuille 2.

② Rentre la formule =B1∗A2 dans la cellule B2

③ Sélectionne B2 (juste clique dessus)

④ Copie depuis la barre des outils (Ctrl+C)

⑤ Sélectionne les cellules B2:E5 (clique et glisse)

⑥ Choisis « coller » depuis la barre des outils (Ctrl+V). Le tableur complétera le tableau.

⑦ Reporte les résultats dans les tableaux ci-dessous, utilise les feuilles 3 à 5.

⑧ Répète cette procédure pour les 3 cas suivant, cette fois en utilisant dans la case B2 les formules =B$1∗A2, =$B1∗A2 puis =$B$1∗A2.

Question En comparant les formules que le tableur a utilisées pour compléter le tableau, explique l'effet de l'utilisation du $.

B2 ▼ ✗ ✔ f_x =B1∗A2

	A	B	C	D	E
1		2	3	5	7
2	3				
3	4				
4	7				
5	9				

B2 ▼ ✗ ✔ f_x =B$1∗A2

	A	B	C	D	E
1		2	3	5	7
2	3				
3	4				
4	7				
5	9				

B2 ▼ ✗ ✔ f_x =$B1∗A2

	A	B	C	D	E
1		2	3	5	7
2	3				
3	4				
4	7				
5	9				

B2 ▼ ✗ ✔ f_x =$B$1∗A2

	A	B	C	D	E
1		2	3	5	7
2	3				
3	4				
4	7				
5	9				