Chapitre 4
Triangles égaux

Table 4.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 4…

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître…/savoir faire…**	🪨	💎	💍
Théorème de Pythagore, sa contraposée et sa réciproque			
notation racine carrée	1	2, 3	4
Utiliser le théorème de Pythagore pour calculer une longueur		5, 6	9
Justifier si un triangle est rectangle		7, 8	
Triangles égaux			
connaître les critères d'égalité et les utiliser	10, 11, 12	13	
utiliser les critères d'égalité dans des problèmes		14, 15	

4.1 La racine carrée

Définition 4.1 La racine carrée d'un nombre positif $b \geqslant 0$ est le nombre *positif* noté $\sqrt{b}$ dont le carré vaut b.

$$\left(\sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{b} \times \sqrt{b} = b$$

En géométrie $\sqrt{b}$ est « la longueur du côté d'un carré d'aire b ».

R Pour des nombres positifs $b \geqslant 0$, on peut noter $\sqrt{b} = b^{0,5}$. Cette notation est compatible avec les règles d'opérations sur les exposants :

$$\left(b^{0,5}\right)^2 = b^{0,5\times 2} = b^1 = b \qquad b^{0,5} \times b^{0,5} = b^{0,5+0,5} = b^1 = b$$

4.2 Figures égales

Définition 4.2 — figures égales. Deux figures sont égales si elles sont superposables : elles ont la même forme et la même taille.

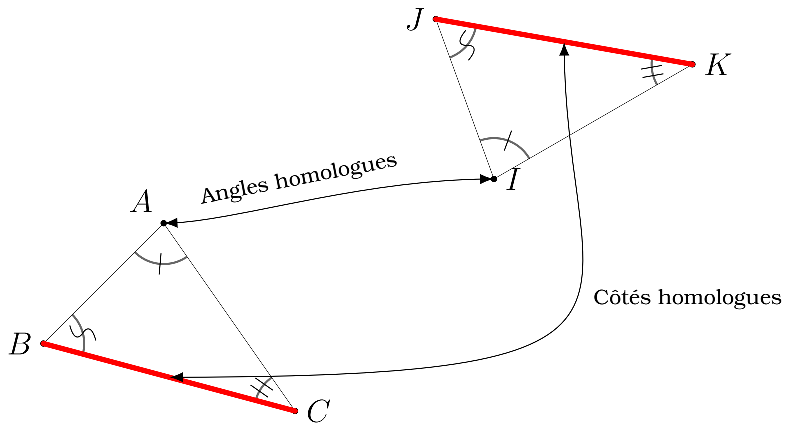


Figure 4.1 – ABC et IJK sont égaux.

■ **Exemple 4.1** Les triangles ABC et IJK de la figure 4.1 sont égaux. On a les 6 égalités suivantes :

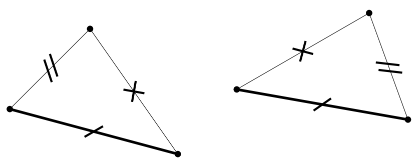
$\widehat{A} = \widehat{I}$ $\quad$ $\widehat{B} = \widehat{J}$ $\quad$ $\widehat{C} = \widehat{K}$

$BC = JK$ $\quad$ $AC = IK$ $\quad$ $AB = IJ$

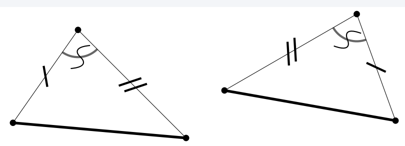
Pour dire que les triangles sont égaux on écrira : $ABC \cong IJK$. Attention à l'ordre à respecter pour signaler les sommets homologues :

$$A \;\; B \; C \cong \; I \;\; J \; K$$

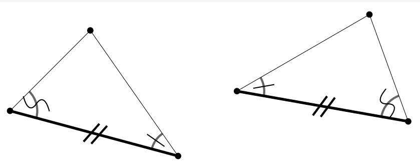
Postulat 4.1 — Critère CCC. Si deux triangles ont leurs trois côtés respectivement égaux, alors ils sont égaux.



Postulat 4.2 — Critère CAC. Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont égaux.



Postulat 4.3 — Critère ACA. Si deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles respectivement égaux, alors ils sont égaux.



R Il n'y a pas de critère ACC

R Avoir 2 ou 3 angles homologues égaux n'est pas suffisant pour dire que les triangles sont égaux.

4.3 Exercices

4.3.1 Exercices racine carrée et théorème de Pythagore

> Pour $a > 0$ et $b > 0$. Si $a^2 = b$ alors $\sqrt{b} = \sqrt{a^2} = a$
>
> Pour $a < 0$ et $b > 0$. Si $a^2 = b$ alors $\sqrt{b} = \sqrt{a^2} = -a$

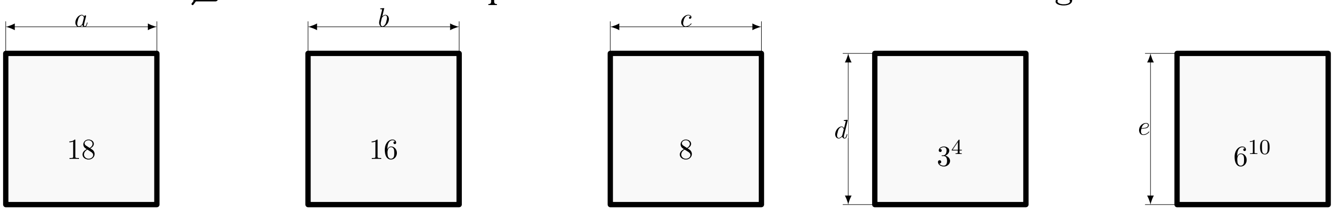
Exercice 1 — carrés parfaits. Compléter :

$1^2 =$; $\sqrt{\quad} = 1$	$6^2 =$; $\sqrt{\quad} = 6$	$11^2 =$; $\sqrt{\quad} = 11$
$2^2 =$; $\sqrt{\quad} = 2$	$7^2 =$; $\sqrt{\quad} = 7$	$12^2 =$; $\sqrt{\quad} = 12$
$3^2 =$; $\sqrt{\quad} = 3$	$8^2 =$; $\sqrt{\quad} = 8$	$13^2 =$; $\sqrt{\quad} = 13$
$4^2 =$; $\sqrt{\quad} = 4$	$9^2 =$; $\sqrt{\quad} = 9$	$14^2 =$; $\sqrt{\quad} = 14$
$5^2 =$; $\sqrt{\quad} = 5$	$10^2 =$; $\sqrt{\quad} = 10$	$15^2 =$; $\sqrt{\quad} = 15$

Exercice 2 — . Exprimer les expressions suivantes à l'aide d'entiers.

$\sqrt{49} = \ldots\ldots\ldots$	$\sqrt{3^2} = \ldots\ldots\ldots$	$\sqrt{100} = \ldots\ldots$	$-\sqrt{9^2} = \ldots\ldots$	$\sqrt{(-9)^2} = \ldots\ldots$	$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \ldots$
$\sqrt{7^2} = \ldots\ldots\ldots$	$\sqrt{100^2} = \ldots\ldots$	$\left(\sqrt{3}\right)^2 = \ldots\ldots$	$\sqrt{-9^2} = \ldots\ldots$	$\left(\sqrt{9}\right)^2 = \ldots\ldots$	$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \ldots$

Exercice 3 — . Le nombre indique l'aire du carré. Déterminer la longueur de son côté.



$a = \sqrt{\quad}$

Exercice 4 Complétez :

$(2\sqrt{3})^2 = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ Donc $\sqrt{\quad} = 2\sqrt{3}$.

$(3\sqrt{2})^2 = 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ Donc $\sqrt{\quad} = 3\sqrt{2}$.

$(3\sqrt{3})^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ Donc $\sqrt{\quad} = 3\sqrt{3}$.

$(10\sqrt{2})^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ Donc $\sqrt{\quad} = 10\sqrt{2}$.

$(3\sqrt{5})^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ Donc $\sqrt{\quad} = 3\sqrt{5}$.

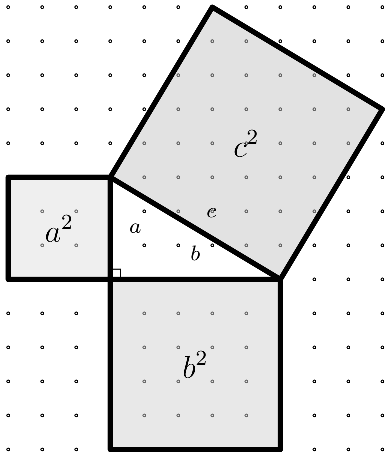
$(3+\sqrt{5})^2 = (3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ Donc $\sqrt{14+6\sqrt{5}} = \ldots\ldots\ldots$

$(2+\sqrt{3})^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ Donc $\sqrt{\quad} = 3+\sqrt{5}$.

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

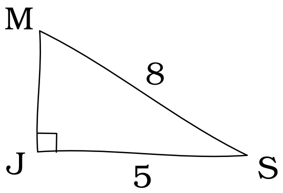
$(5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

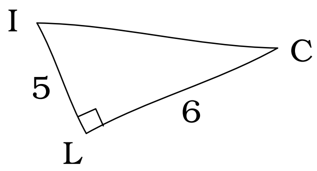
$(\sqrt{8}-\sqrt{3})(\sqrt{8}+\sqrt{3}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



Théorème 4.4 — Théorème de Pythagore. Dans un triangle rectangle, le carré du plus grand côté (l'hypoténuse) est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.

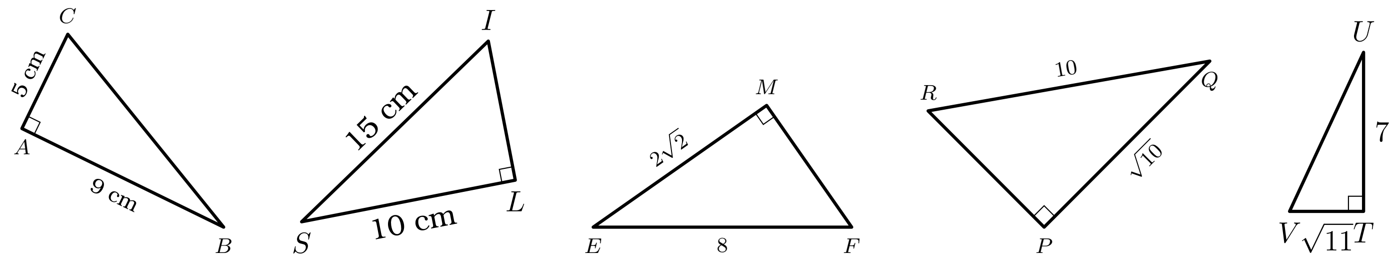
■ **Exemple 4.2 — Calculer la longueur manquante.** de triangles rectangles



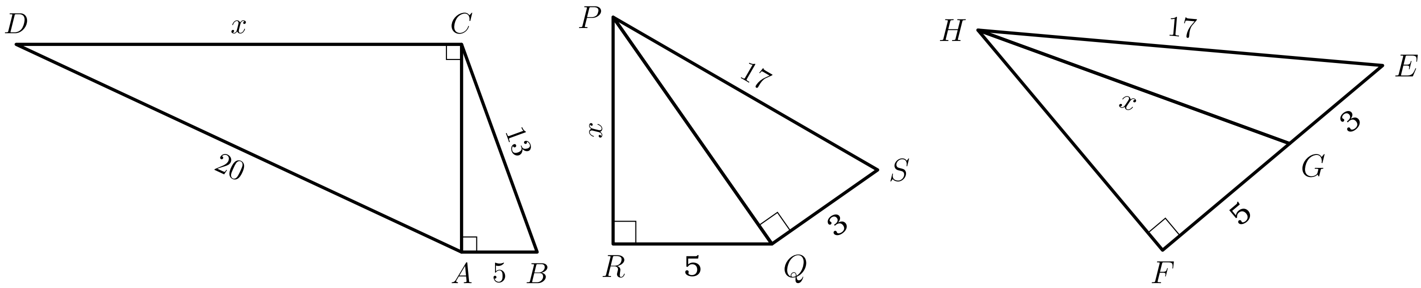


	Justification	Affirmation
Calcul de la longueur du grand côté IC		
1		
2		$(\ldots\ldots)^2 + (\ldots\ldots)^2 = (\ldots\ldots)^2$
3		$IC^2 =$
4		$IC =$
Calcul d'un des côtés de l'angle droit JM		
1		
2		$(\ldots\ldots)^2 + (\ldots\ldots)^2 = (\ldots\ldots)^2$
3		$MJ^2 =$
4		$MJ =$

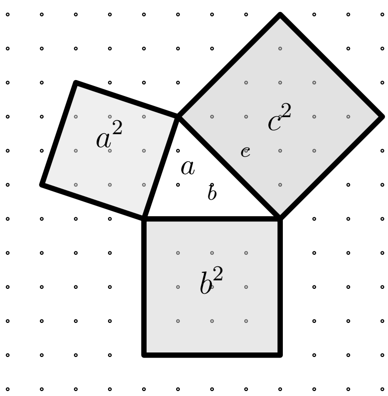
Exercice 5 — . Calculer la valeur exacte des longueurs manquantes ci-dessous.



Exercice 6 Trouvez la longueur x demandée dans chaque cas, arrondir au centième près.

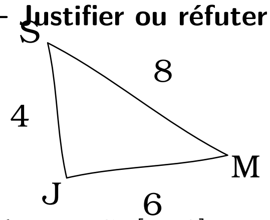


Théorème 4.5 — Réciproque du théorème de Pythagore. Si le carré du plus grand côté **est égal** à la somme des carrés des deux plus petits côtés, alors le **triangle est rectangle** et le plus grand côté est l'hypoténuse.



Théorème 4.6 — Contraposée du théorème de Pythagore. Si le carré du plus grand côté **n'est pas égal** à la somme des carrés des deux plus petits côtés, alors le triangle **n'est pas rectangle**

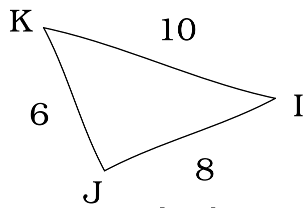
■ **Exemple 4.3 — Justifier ou réfuter si un triangle est rectangle.**



Dans le triangle MJS, $[MS]$ est le plus grand côté.

MS^2	MJ^2	$+$	JS^2
8^2	6^2	$+$	4^2
	36	$+$	16
64		52	

Comme $MS^2 \neq MJ^2 + JS^2$, alors le triangle MJS n'est pas rectangle d'après la contraposée du théorème de Pythagore.

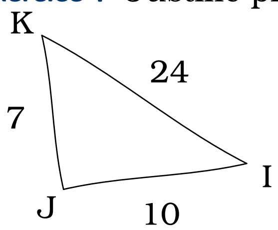


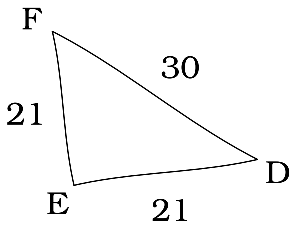
Dans le triangle IJK, $[IK]$ est le plus grand côté.

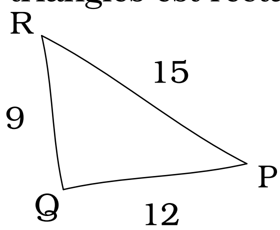
IK^2	IJ^2	$+$	JK^2
10^2	8^2	$+$	6^2
	64	$+$	36
100		100	

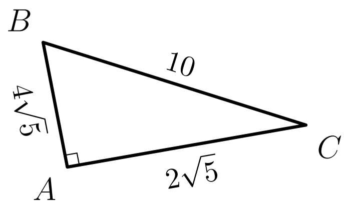
Comme $IK^2 = IJ^2 + JK^2$, alors le triangle IJK est rectangle en J d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Exercice 7 Justifie proprement si chacun de ses triangles est rectangle ou pas.

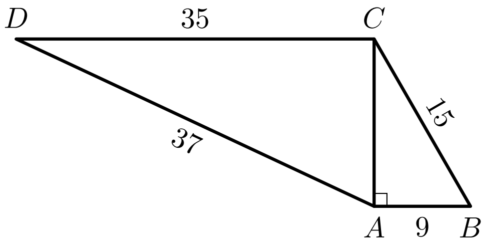


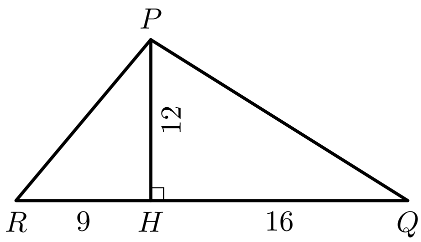




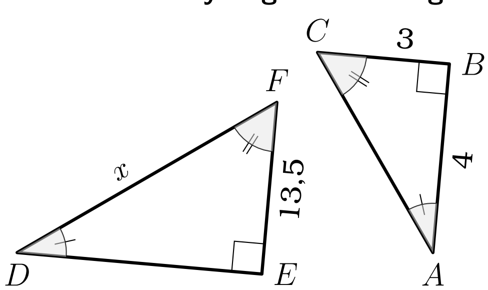


Exercice 8 Calculer AC, PQ et PR puis démontrer que les triangles ACD et PQR sont rectangles.





Exercice 9 — Pythagore et triangles semblables (vu au chapitre 1).



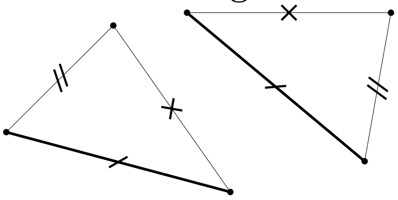
Les triangles ABC et EFD ci-contre sont semblables.

1. Calculer la longueur AC.
2. Écrire les rapports des longueurs égales pour les triangles ABC et DEF.
3. En déduire la valeur de x.

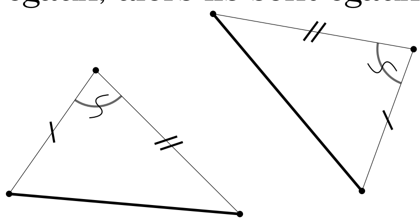
4.3.2 Exercices : triangles égaux

> Pour établir que deux figures sont égales, il faut démontrer qu'elles ont la même forme et la même taille. Pour des triangles, il suffit de satisfaire une des trois conditions suivantes :

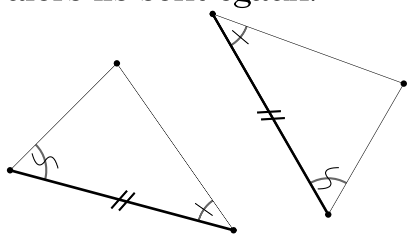
Critère CCC Si deux triangles ont leurs trois côtés respectivement égaux, alors ils sont égaux.



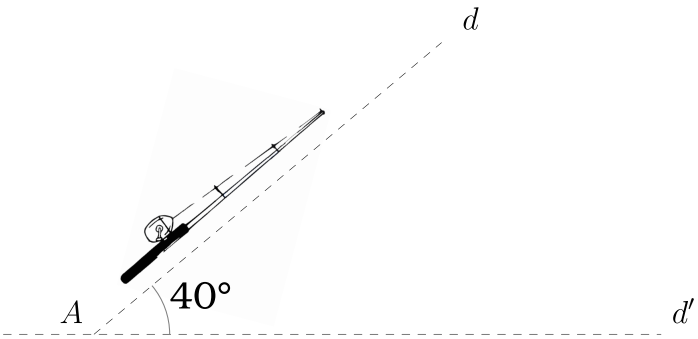
Critère CAC Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont égaux.



Critère ACA Si deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles respectivement égaux, alors ils sont égaux.

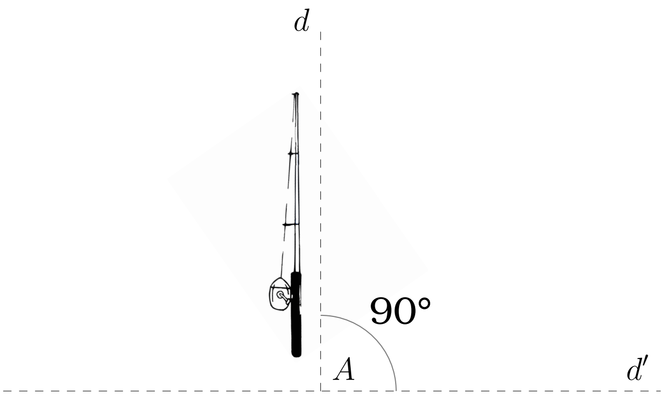


Exercice 10 — Un critère ACC ?.



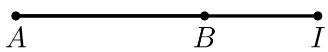
1. Placer le point B sur la demi-droite $[Ad)$ tel que $AB = 4{,}5$ cm.
2. Tracer l'arc de cercle de centre B et de rayon 3,5 cm et placer les intersections C et D de l'arc de cercle avec (Ad').
3. Complétez : $\widehat{CAB} \ldots \widehat{DAB} \ldots 40°$; $BC = \ldots\ldots$.
   Les trianles ABC et ABD ....

Exercice 11 — Un critère RHC ?.



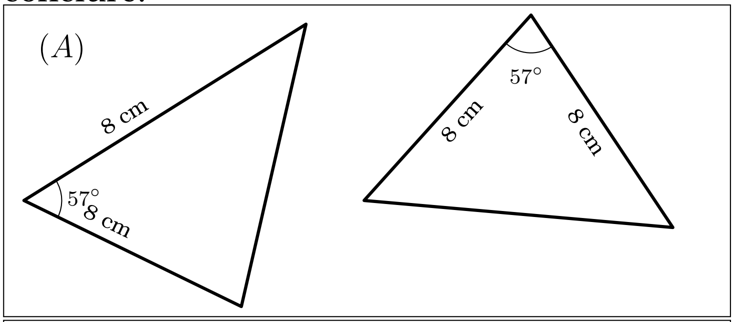
1. Placer le point B sur la demi-droite $[Ad)$ tel que $AB = 3$ cm.
2. Tracer l'arc de cercle de centre B et de rayon 4 cm et placer les intersections C et D de l'arc de cercle avec (Ad').
3. Complétez : $\widehat{CAB} \ldots \widehat{DAB} \ldots 90°$; $BC = \ldots\ldots$.
   Les trianles ABC et ABD ....

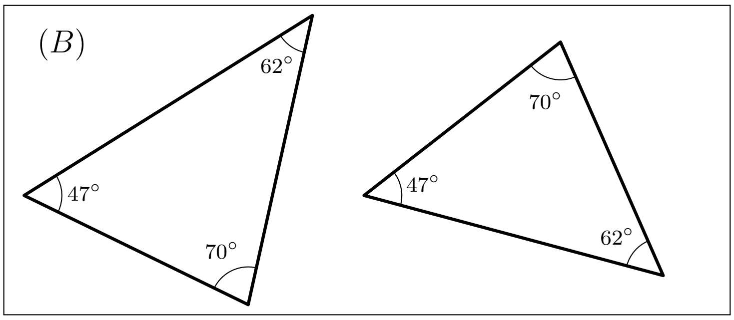
Exercice 12 — Un critère AAA ?.

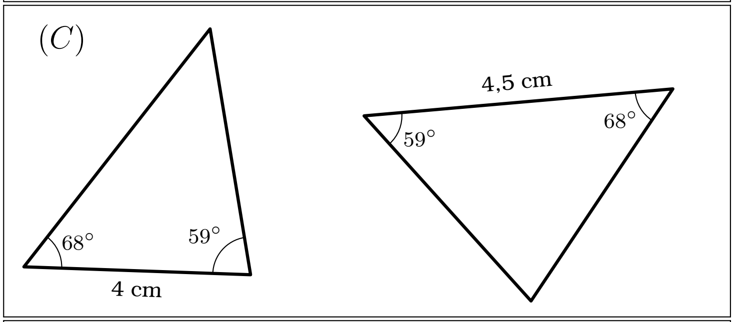


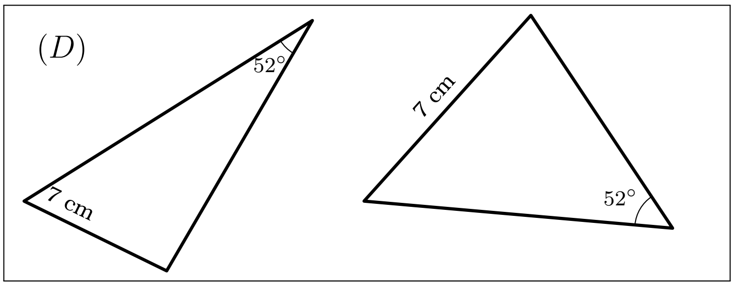
1. Placer C et J afin que les triangle ABC et AIJ soient équilatéraux.
2. Complétez : $\widehat{BAC} \ldots \widehat{IAJ}$; $\widehat{ABC} \ldots \widehat{\quad\quad}$; $\widehat{ACB} \ldots \widehat{\quad\quad}$.
   Les trianles ABC et IJK .... égaux.

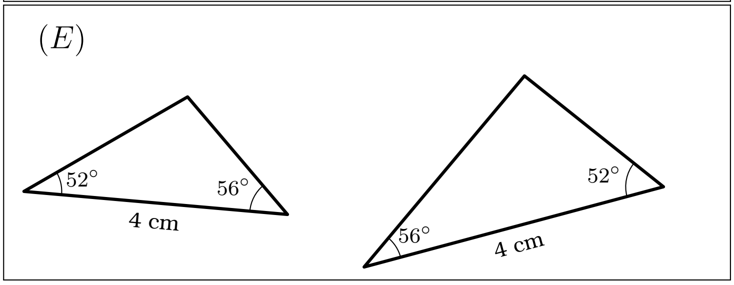
Exercice 13 Préciser pour chaque paire de triangles **(1)** si les triangles sont égaux et donner le critère utilisé **(2)** si les triangles ne sont pas égaux **(3)** si on manque d'informations pour conclure.

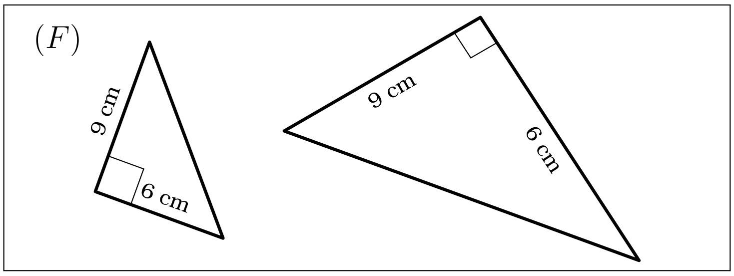


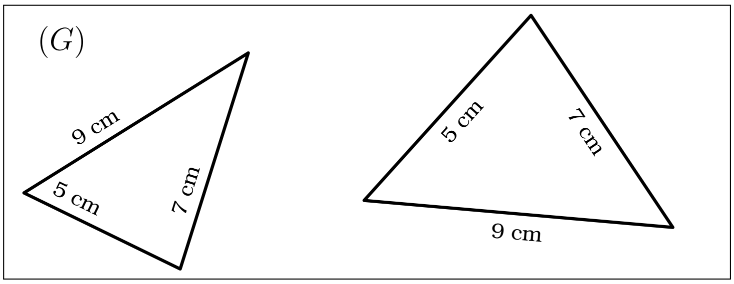


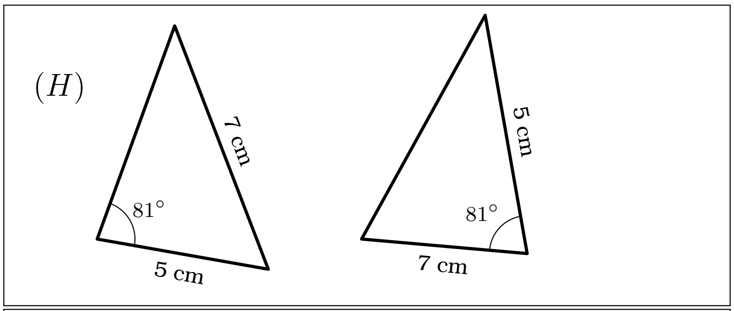


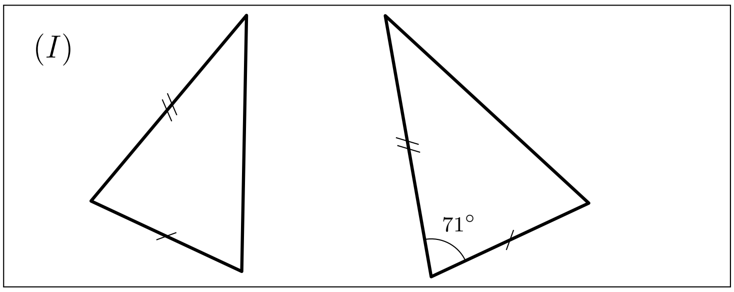


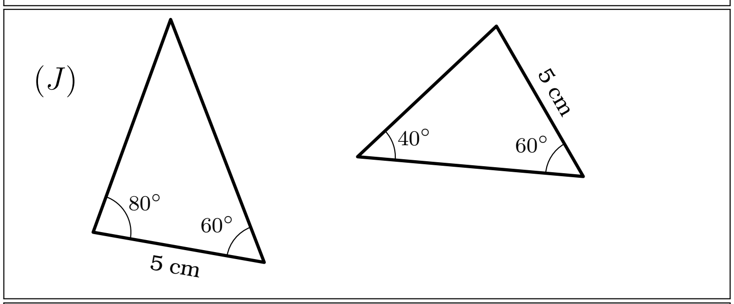


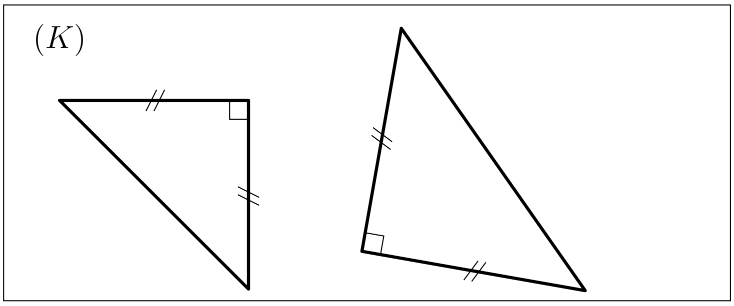


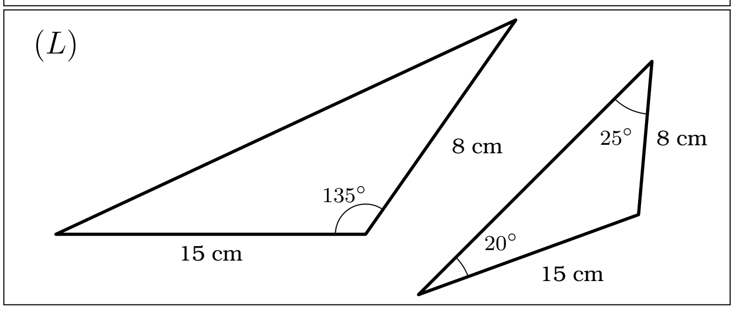


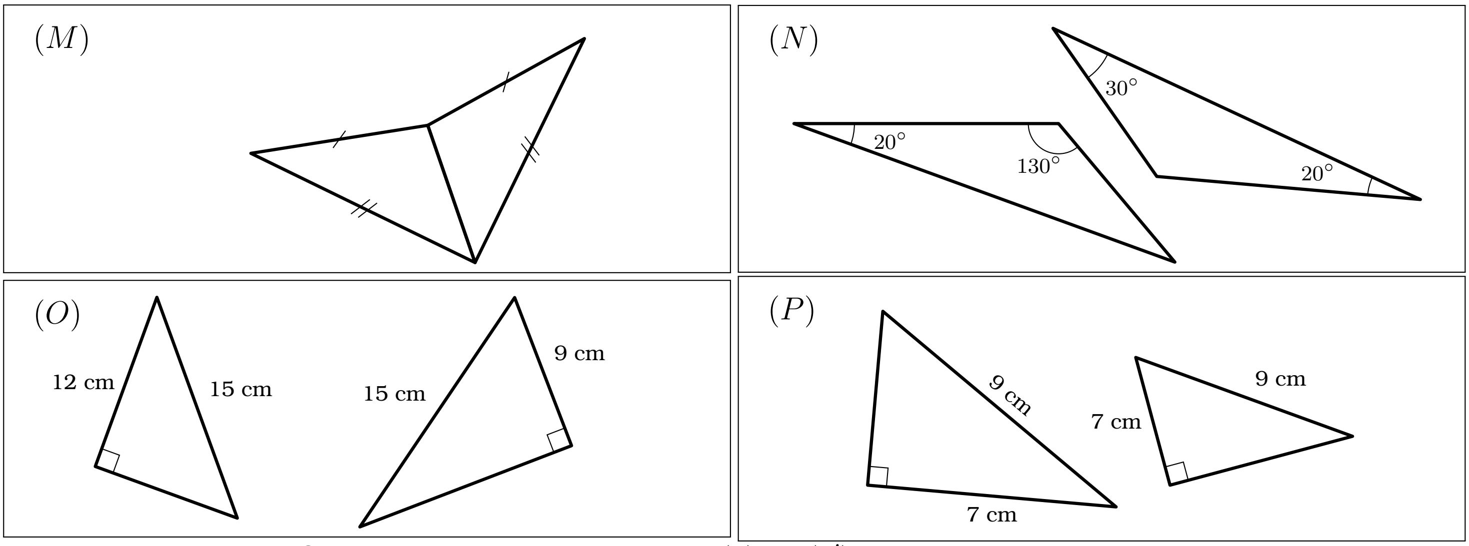




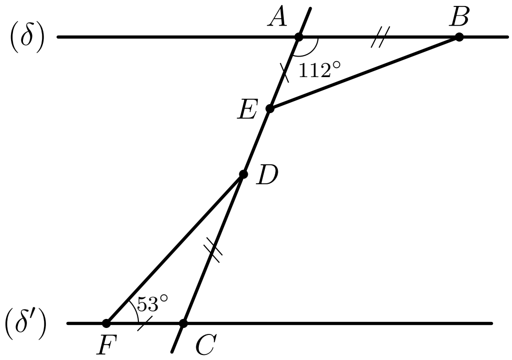








Exercice 14 Dans la figure ci-contre, les droites (δ) et (δ') sont parallèles, $AE = FC$ et $AB = CD$. Complétez pour **justifier** qur $\widehat{ABE} = 15°$



Les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{FCD}$ sont égaux car se sont deux angles (homologues/correspondants).

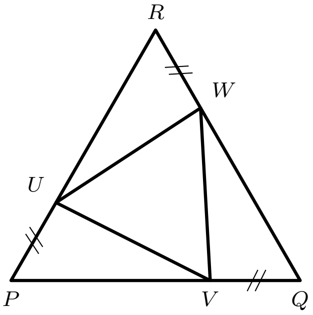
$FC = \ldots\ldots$, $AB = \ldots\ldots$, et $\widehat{EAB} = \widehat{FCD}$.

Les triangles FCD et AEB sont égaux d'après le critère ....

Les angles .... (homologues/correspondants) sont égaux : $\widehat{ABE} = \ldots\ldots$ et $\widehat{AEB} = \ldots\ldots$.

La somme des angles d'un triangle est égale à ...... On a $\widehat{AEB} = \ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots$

Exercice 15 Dans la figure ci-contre, PRQ est un triangle équilatéral de côté 4. On suppose que $PU = RW = VQ = 1$. Complétez pour **justifier** que UVW est aussi un triangle équilatéral.



Le triangle PRQ est équilatéral, on peut écrire : .... = ... = ... ,

et $\widehat{VPU} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\widehat{RQP} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\widehat{PRQ} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$PV = \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots$. De même $QR = RU = \ldots$.

On a $\widehat{UPV} = \ldots\ldots$, $UP = \ldots\ldots$ et $PV = \ldots\ldots$.

D'après le critère ....les triangles UPV et VQW sont égaux.

On a $\widehat{UPV} = \ldots\ldots$, $UP = \ldots\ldots$ et $PV = \ldots\ldots$. D'après le critère ...les triangles UPV et RUW sont égaux. Les côtés ....UV, VW et UW sont de même longueurs.

Le triangle UVW est équilatéral.