

# Fractions : sommes, comparaisons et applications

## 6.1 Comparaison de fractions

Pour comparer des fractions en général, il est pratique de comparer d'écrire des fractions égales qui ont le même dénominateur.

■ **Exemple 6.1** Pour comparer  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{5}{6}$  et  $\frac{6}{8}$ .

Multiples de 4 :

Multiples de 6 :

Multiples de 8 :

Plus petit multiple commun de 4, 6 et 8 est 24.

$$\frac{3}{4} = \frac{\quad}{4 \times \dots} = \frac{\quad}{24} \quad \frac{5}{6} = \frac{\quad}{6 \times \dots} = \frac{\quad}{24} \quad \frac{6}{8} = \frac{\quad}{8 \times \dots} = \frac{\quad}{24}$$

**R** Les comparaisons naïves induisent des erreurs :

$$\frac{2}{3} < \frac{5}{6} \quad \text{mais} \quad \frac{2}{3} > \frac{5}{10}$$

## 6.2 Sommes de fractions de même dénominateur

**Théorème 6.1** — **Somme de fractions de même dénominateur.** Pour tout nombres  $x$ ,  $a$  et  $b$  ( $b$  non nul) :

$$\frac{x}{b} + \frac{a}{b} = \frac{x+a}{b}$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{b} + \frac{a}{b} &= x \times \frac{1}{b} + a \times \frac{1}{b} && x \text{ } b\text{-ièmes et } a \text{ } b\text{-ièmes} \\
 &= (x + a) \times \frac{1}{b} && (x + a) \text{ } b\text{-ièmes} \\
 &= \frac{x + a}{b}
 \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 6.2**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{5}{23} - \frac{20}{23} &= \frac{5}{23} + \frac{-20}{23} = \frac{5 - 20}{23} = \frac{-15}{23} = -\frac{15}{23} \\
 \text{b) } \frac{7}{9} - \frac{-4}{9} &= \frac{7}{9} + \frac{-(-4)}{9} = \frac{7 + 4}{9} = \frac{11}{9} \\
 \text{c) } 2 - \frac{4}{7} &= 2 \times \frac{7}{7} - \frac{4}{7} = \frac{2 \times 7 - 4}{7} = \frac{10}{7}
 \end{aligned}$$

**Théorème 6.2** — règle d'addition pour dénominateurs différents. Pour tout nombres  $a, b, x$  et  $y$ , sans zéros aux dénominateurs :

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay + bx}{by}$$

■ **Exemple 6.3** Faire l'effort de trouver le plus petit dénominateur

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{7}{30} + \frac{2}{12} \\
 &= \frac{7 \times 12}{30 \times 12} + \frac{2 \times 30}{12 \times 30} \\
 &= \frac{84}{360} + \frac{60}{360} \\
 &= \frac{84 + 60}{360} \\
 &= \frac{144}{360} \\
 &= \frac{144 \div \dots}{36 \div \dots} \\
 &= \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{7}{30} + \frac{2}{12} \\
 &= \frac{7 \times \dots}{30 \times \dots} + \frac{2 \times \dots}{12 \times \dots} \\
 &= \frac{\dots}{60} + \frac{\dots}{60} \\
 &= \frac{14 + 10}{60} \\
 &= \frac{24}{60} \\
 &= \frac{24 \div \dots}{60 \div \dots} \\
 &= \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

## 6.2.1 Exercices : sommes de fractions

## Niveau 1 : Point méthode

1. Écrire l'expression pour avoir que des additions de fractions de dénominateur positifs
2. Vérifie que les fractions ont même dénominateur
3. Ajoute les numérateurs. Respecte les règles d'addition de relatifs.
4. Écrire la somme sur le dénominateur

■ **Exemple 6.4 — Je fais.** Écrire sous forme d'une fraction irréductible ou d'un entier les expressions suivantes :

$$A = \frac{3}{5} + \frac{-8}{5}$$

$$B = \frac{-7}{3} - \frac{5}{3}$$

$$C = \frac{7}{-6} - \frac{-3}{6}$$

$$D = -\frac{2}{9} + \frac{3}{-9}$$

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

**Exercice 1** même consignes

$$A = \frac{9}{8} + \frac{5}{8}$$

$$D = \frac{-6}{5} + \frac{-3}{5}$$

$$G = -\frac{6}{5} + \frac{-3}{5}$$

$$J = -\frac{1}{12} + \frac{11}{12}$$

$$B = -\frac{9}{10} + \frac{1}{10}$$

$$E = \frac{-6}{5} - \frac{3}{5}$$

$$H = \frac{8}{9} - \frac{13}{9}$$

$$K = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2} - \frac{-7}{2}$$

$$C = \frac{5}{3} - \frac{7}{3}$$

$$F = \frac{-6}{5} - \frac{-3}{5}$$

$$I = \frac{-1}{12} - \frac{7}{12}$$

$$L = \frac{7}{9} - \frac{-4}{9} + \frac{5}{9}$$

**Exercice 2** même consignes

$$A = 2 \div \frac{4}{7}$$

$$D = 4 + \frac{3}{4}$$

$$G = -7 + \frac{3}{4}$$

$$J = -14 + \frac{5}{7}$$

$$B = -2 + \frac{4}{7}$$

$$E = 2 + \frac{-5}{6}$$

$$H = 2 - \frac{-5}{6}$$

$$K = -14 \times \frac{5}{7}$$

$$C = 2 + \frac{4}{15}$$

$$F = 4 - \frac{3}{7}$$

$$I = 2 \div \frac{-5}{6}$$

$$L = 3 - \frac{2}{5} \times 4$$

**Exercice 3**

$$A = 3 \times \left( \frac{2}{5} - 4 \right)$$

$$D = \frac{7}{12} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$$

$$G = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$$

$$I = \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{3}$$

$$B = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2}$$

$$E = \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$H = \left( \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \right)^2$$

$$J = \frac{9}{20} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$$

$$C = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{8}$$

$$F = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$$

**Niveau 2 : Point méthode**

1. Écrire l'expression pour avoir que des additions de fractions de dénominateur positifs
2. Trouver le plus petit dénominateur commun et écrire les fractions équivalentes
3. Ajoute les numérateurs. Respecte les règles d'addition de relatifs.
4. Écrire la somme sur le dénominateur.
5. Simplifie si possible la réponse obtenue

■ **Exemple 6.5 — Je fais.** Écrire sous forme d'une fraction irréductible ou d'un entier les expressions suivantes. Montrer les calculs.

$$A = -\frac{3}{7} - \frac{5}{14}$$

=

=

=

=

$$C = \frac{1}{5} - \frac{3}{7}$$

=

=

=

=

$$B = \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + \frac{1}{9}$$

=

=

=

=

**Exercice 4** Mêmes consignes.

$$A = \frac{1}{7} - \frac{1}{4}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{-1}{3}$$

$$C = -\frac{1}{-8} + \frac{1}{5}$$

$$D = \frac{1}{21} - \frac{1}{-7}$$

$$E = -\frac{4}{7} + \frac{3}{-7}$$

$$F = \frac{13}{20} - \frac{13}{5}$$

$$G = \frac{-8}{15} - \frac{9}{5}$$

$$H = \frac{5}{6} - \frac{4}{-11}$$

$$I = \frac{9}{6} - \frac{-3}{7}$$

$$J = \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$

$$K = -\frac{8}{5} + \frac{9}{15} + \frac{3}{10}$$

$$L = \frac{4}{12} - \frac{9}{-8} - \frac{1}{4}$$

**Exercice 5 — mélange d'opérations.** Mêmes consignes. Attention aux priorités.

$$A = 3 \div \left( \frac{2}{5} - 4 \right)$$

$$B = -\frac{2}{5} + \frac{5}{4} \times \frac{3}{2}$$

$$C = 3 \times \frac{3}{4} + \frac{8}{5}$$

$$D = 3 \times \frac{11}{12} - \frac{3}{10}$$

$$E = \left( 2 + \frac{1}{4} \right) \times \left( 1 + \frac{1}{3} \right)$$

$$F = \frac{\left( 1 + \frac{1}{5} \right)}{\left( 2 + \frac{3}{4} \right)}$$

$$G = -5 + \frac{3}{7} - \frac{25}{7}$$

$$H = -2 + \frac{3}{4} - \left( 1 + \frac{4}{5} \right)$$

$$I = \frac{4}{-3} + \frac{-7}{6} \times \frac{-2}{5}$$

$$J = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{7}{8}}$$

$$K = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{7}{8}}$$

**Exercice 6** Ramener au même dénominateur puis ranger dans l'ordre croissant les nombres :  $\frac{4}{9}$ ;  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{6}{7}$ ;  $\frac{2}{3}$ ;  $\frac{5}{8}$ .

## ■ Exemple 6.6

Pour le dessert, 320 invités à une cérémonie doivent choisir parmi une glace, un gâteau ou un brownie.

$\frac{1}{4}$  des invités choisissent la glace, 40% choisissent le gâteau.

- 1) Combien d'invités ont choisi un brownie pour le dessert ?
- 2) Quelle fraction des invités a choisi un brownie pour le dessert ?

*solution.*

1)  $\frac{1}{4}$  de 320 = 80 personnes

$$40\% \text{ de } 320 = \frac{40}{100} \times 320 = \frac{40 \times 320}{100} = 4 \times 32 = 128$$

Il reste  $320 - 80 - 128 = 112$  personnes pour les brownies.

2) La fraction des invités qui ont un brownie pour dessert est  $\frac{112}{320} = \frac{7}{20}$



## Exercice 7

Une boîte contient 120 boutons. Un bouton est soit rouge, orange ou jaune. 20% des boutons sont rouge,  $\frac{1}{3}$  des boutons sont orange.

- 1) Combien de boutons jaune y-t-il dans la boîte ?
- 2) Quelle fraction des boutons dans la boîte sont jaunes ?

## Exercice 8

Jade a vendu au marché  $\frac{1}{3}$  de ses pommes de terre le lundi et  $\frac{2}{5}$  le mardi. Mercredi elle vend tout le reste.

- a) Quelle fraction de la quantité de pommes de départ vend-elle mercredi ?
- b) Quel jour a-t-elle vendu le plus ?


## Exercice 9

Jade a vendu au marché  $\frac{1}{3}$  de ses pommes de terre le lundi et  $\frac{2}{5}$  de ce qui lui restait le mardi. Mercredi elle vend tout le reste.

- a) Quelle fraction de la quantité de pommes de départ vend-elle mardi ?
- b) Quelle fraction de la quantité de pommes de départ vend-elle mercredi ?
- c) Quel jour a-t-elle vendu le plus ?


## Exercice 10

Parmi 2000 collégiens, 25% font partie d'un club le mardi soir après les cours alors que  $\frac{1}{10}$  restent au collège pour devoirs faits.

- 1) Combien de collégiens retournent directement chez eux le mardi à la fin des cours ?
- 2) Donner la fraction de collégiens qui retournent directement chez eux le mardi à la fin des cours.

## Exercice 11

Théo a 117 billes, il en donne letiers à Owen et la moitié du reste à Ben.

Donne un seul calcul pour trouver le nombre de billes que Ben recupère.

**Exercice 12**

Stéphane reçoit un revenu mensuel de 1840 €. Son loyer représente  $\frac{3}{7}$  de ses revenus et les achats alimentaires  $\frac{1}{4}$  de ses revenus.

Donne un seul calcul pour retrouver ce qu'il lui reste après avoir payé le loyer et les achats alimentaires.

**Exercice 13**

Un théâtre vend 400 billets pour un spectacle.  $\frac{2}{5}$  des billets ont été vendus à plein tarif. 30% **des billets restants** l'ont été à tarif réduit.

- 1) Donne un seul calcul pour retrouver le nombre de billets invendus.
- 2) Quelle est la fraction de billets invendus ?

**Exercice 14**

Jadzia, Kira et Tasha se partagent 800 €. Jadzia prend  $\frac{1}{10}$  du total. Kira prend 20% du reste.

- 1) Combien restera-t-il pour Tasha ?
- 2) Quelle fraction du montant de départ reste-t-il pour Tasha ?

**Exercice 15**

À l'élection de Miss Math 2021, Yasmine a remporté  $\frac{1}{10}$  des suffrages, Corinne  $\frac{9}{80}$  et Marina tous les autres. Qui a été élue ?

**Exercice 16**

Nadia colorie un mandala selon les proportions suivantes :  $\frac{1}{4}$  en carmin,  $\frac{11}{40}$  en ocre jaune,  $\frac{13}{40}$  en turquoise et le reste en pourpre.

Quelle est elle la couleur qui recouvre le plus de surface ?

**Exercice 17**

Trois internautes sur dix utilisent le navigateur Firefox. Et parmi ces utilisateurs, les  $\frac{2}{45}$  ont la dernière version en date de ce navigateur.

Quelle est la proportion d'internautes utilisant la dernière version de Firefox ?

**Exercice 18**

Maxime refait la tapisserie de son salon. Il pose  $\frac{4}{15}$  du papier peint le premier jour,  $\frac{2}{5}$  le deuxième jour, et  $\frac{1}{6}$  le troisième jour. A-t-il fini ?

**Exercice 19**

Les  $\frac{9}{16}$  des habitants d'un village ont un téléphone portable. Parmi eux, les  $\frac{2}{3}$  l'utilisent chaque jour.

- 1) Quelle est la fraction des habitants qui n'ont pas de téléphone portable ?
- 2) Calculer la proportion des habitants de ce village qui utilisent chaque jour leur téléphone portable.

**Exercice 20 — Je révise.**

4 frères se partagent 1200 €. Jason garde  $\frac{1}{3}$  du total. Kyle garde 20% de ce que Jason a laissé. Liam et Marc se partagent le reste au ratio 5 : 3.

Déterminer les parts de chacun.