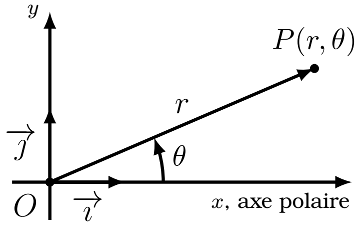
## A.3 Compléments : trigonométrie

**Définition A.1** $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$ est un repère orthonormé.

Le couple de coordonnées polaires $(r\ ;\ \theta)$ détermine un point $P$ du plan tel que :

la **coordonnée radiale** $r = OP$

la **coordonnée angulaire** $\theta$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{\imath}\ ;\ \overrightarrow{OP})$.



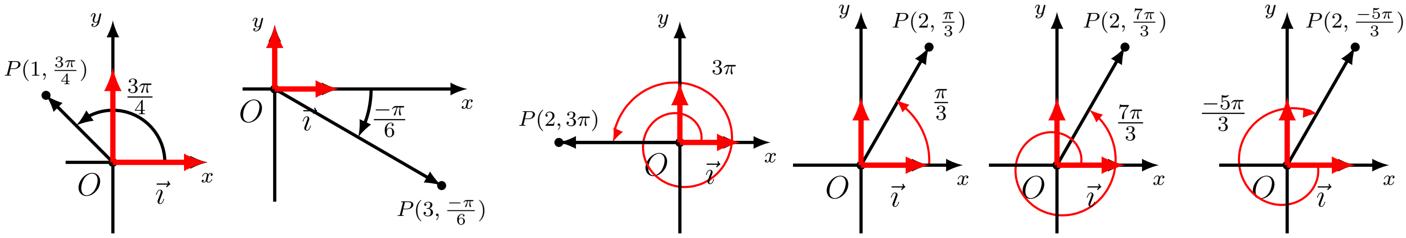
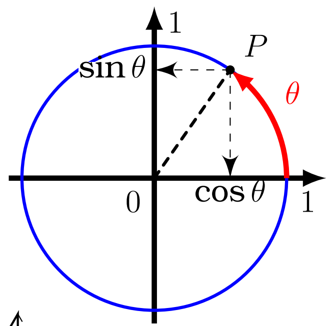




**Figure A.1** – Représentation de points données par leur coordonnées polaires. Différentes coordonnées peuvent représenter le même point.

Les relations entre coordonnées cartésiennes et polaires sont :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \quad (x \neq 0) \end{cases}$$

Pour $P$ sur le cercle unité : $\theta = (\vec{\imath}; \overrightarrow{OP})$, $r = 1$, $x = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$.



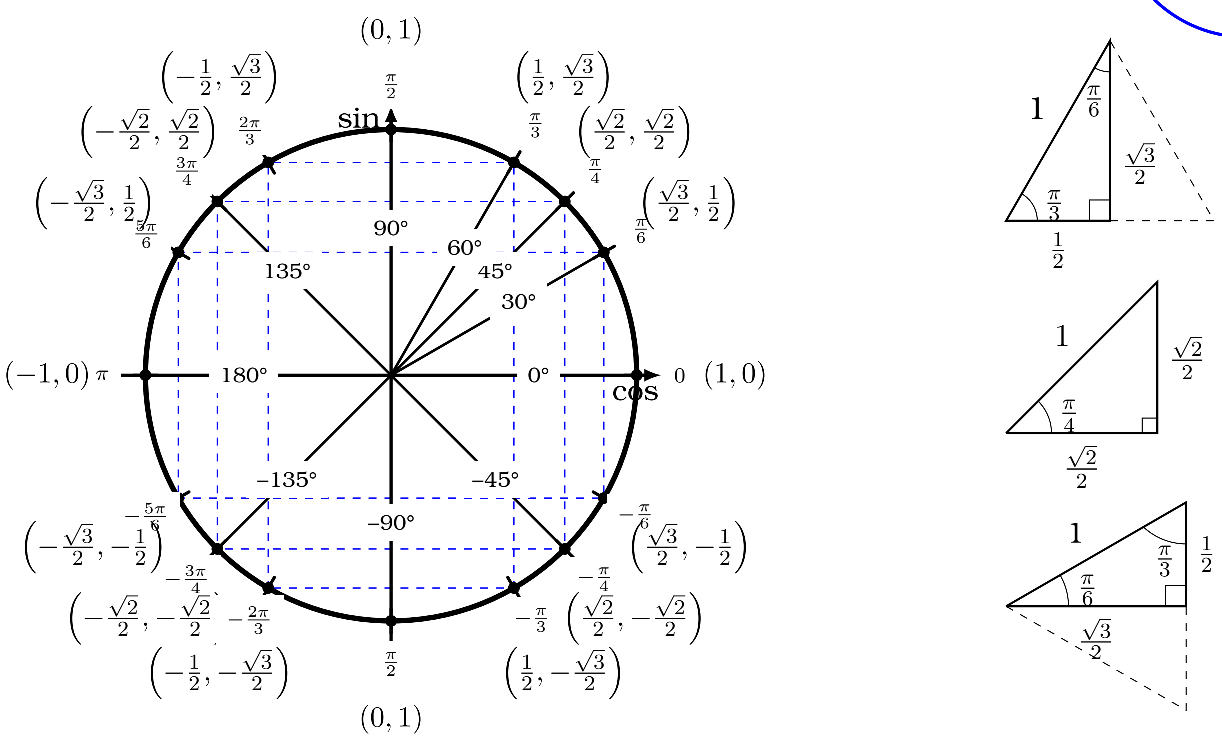
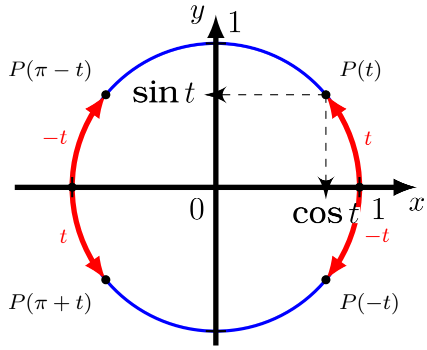




**Figure A.2** – Coordonnées des points du cercle unité et valeurs particulières de cos et sin

**Propriété A.1 — parité.** Pour tout $t \in \mathbb{R}$




$$\cos(-t) = \cos(t) \qquad \text{la fonction cos est paire}$$

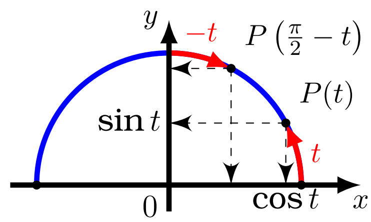
$$\sin(-t) = -\sin(t) \qquad \text{la fonction sin est impaire}$$

**Propriété A.2** Pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\cos(\pi + t) = -\cos(t) \qquad \sin(\pi + t) = -\sin(t)$$

$$\cos(\pi - t) = -\cos(t) \qquad \sin(\pi - t) = \sin(t)$$

**Propriété A.3 — cofonctions.** Pour tout $t \in \mathbb{R}$ :




$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) =$$

**Propriété A.4 — formules d'addition.**

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ :

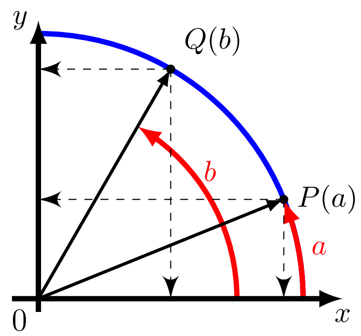
$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \qquad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

*Démonstration.*




Soit $P(a)$ et $Q(b)$ les points du cercle trigonométriques associés aux angles $a = (\vec{\imath}; \overrightarrow{OP})$ et $b = (\vec{\imath}; \overrightarrow{OQ})$ : $P(\cos(a);\ \sin(a))$ et $Q(\cos(b);\ \sin(b))$.

Calculons le produit scalaire de deux manières différentes :

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \cos(b - a)\|\overrightarrow{OP}\|\|\overrightarrow{OQ}\| = \cos(a - b)$

$\therefore \cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

■

## A.3.1 Exercices

## A.3.2 Exercices : trigonométrie

**Exemple A.1 —** $t$ est situé dans le Quadrant IV. Déterminer $\sin(t)$ sachant que $\cos(t) = \frac{3}{5}$.

*solution.* $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ donc $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$, $\sin(t) = \pm\frac{4}{5}$.

$t$ est dans le Quadrant IV, $\sin(t) < 0$ et on a $\sin(t) = -\frac{4}{5}$. ■

**Exercice 1 —** Dans chaque cas, déterminer l'image demandée :

1. $\cos(t) = -\frac{7}{25}$, déterminer $\sin(t)$ avec $t \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$.
2. $\sin(t) = 0.8$, déterminer $\cos(t)$ avec $t \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$.

**Exercice 2 —** Trouver dans chaque cas le réel $t$ demandé.

$(E_1)$ $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in [-\pi; 0]$

$(E_2)$ $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ et $x \in [\pi; 2\pi]$

$(E_3)$ $2\sin(x) = 1$ et $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$

$(E_4)$ $\sin(x) = \frac{1}{2}$ et $x \in [-\pi; 0]$

**Exemple A.2** Analyser les résolutions dans $\mathbb{R}$ des équations d'inconnue $x$ suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt{2}\cos(x) + 1 = 0$ | $2\sin(x) = 1$ | |
| $\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\sin(x) = \frac{1}{2}$ | *isoler* $\cos(x)$ *ou* $\sin(x)$ |
| $\cos(x) = \cos(\frac{3\pi}{4})$ | $\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{6})$ | $\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ |
| $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $-\frac{3\pi}{4} + 2k'\pi$ | $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\pi - \frac{\pi}{6} + 2k'\pi$ | |

**Exercice 3 —** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1)$ $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ | $(E_2)$ $\cos(x) = -1$ | $(E_3)$ $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Exemple A.3 — formules d'addition.** Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

*solution.* On note que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned}\cos\left(\tfrac{5\pi}{12}\right) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{6}\right)\\ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{6}\right)\\ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

■

**Exercice 4** Utiliser les formules d'addition pour déterminer les expressions suivantes :

1. $\sin(18°)\cos(27°) + \cos(18°)\sin(27°)$
2. $\cos(10°)\cos(80°) - \sin(10°)\sin(80°)$
3. $\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{21}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{21}\right)$
4. $\cos\left(\frac{13\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{-\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{13\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{-\pi}{5}\right)$

**Exercice 5** Déterminer les valeurs suivantes à l'aide des formules d'addition.

1. $\sin(75°)$, *indication* : $75° = 30° + 45°$
2. $\sin(15°)$, *indication* : $15° = 45° - \dots$
3. $\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)$, *indication* : $\frac{19\pi}{12} = \frac{4\pi}{3} + \dots$
4. $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)$, *indication* : $\frac{17\pi}{12} = \frac{7\pi}{6} + \dots$
5. $\sin\left(\frac{-5\pi}{12}\right)$, *indication* : $\frac{-5\pi}{12} = \frac{-\pi}{6} + \dots$
6. $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, *indication* : $\frac{11\pi}{12} = \frac{\dots\pi}{3} + \dots$

**Exercice 6** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

**Exercice 7** Démontrer les identités suivantes pour $x \in \mathbb{R}$ :

1. $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$
2. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$
3. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$
4. $\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos(x)\sin(y)$
5. $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos(x)\cos(y)$
6. $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2(x) - \sin^2(y)$

**Exercice 8** Utiliser les formules de duplications pour simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos^2(2x) - \sin^2(2x)$
2. $\frac{1-\cos(2x)}{2}$
3. $6\sin(x)\cos(x)$
4. $(\sin(x) + \cos(y))^2 - 1$

**Exercice 9** Déterminer $\sin(2x)$ et $\cos(2x)$ sachant que $\sin(x) = -\frac{4}{5}$ et $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Exprimer une expression de la forme $A\sin(x) + B\cos(x)$ uniquement à l'aide de sin.

$$\begin{aligned} A\sin(x) + B\cos(x) &= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(x) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(x)\right) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos(\varphi)\sin(x) + \sin(\varphi)\sin(x)) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\sin(\varphi + x) \end{aligned}$$

Où $\varphi$ est tel que $\cos(\varphi) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\sin(\varphi) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

■ **Exemple A.4** $\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

$$\begin{aligned} 3\sin(x) + 4\cos(x) &= \sqrt{3^2+4^2}\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin(x) + \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos(x)\right) \\ &= 5\left(\frac{3}{5}\sin(x) + \frac{4}{5}\cos(x)\right) \\ &= 5(\cos(\varphi)\sin(x) + \sin(\varphi)\cos(x)) \\ &= 5\sin(\varphi + x) \end{aligned}$$

$(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$, *il existe* $\varphi$ *tel que :* $\cos(\varphi) > 0$ *et* $\sin(\varphi) > 0$,

$\varphi \approx 0.927$ rad $\approx 53{,}1°$

**Exercice 10** Écrire les expressions suivantes à l'aide de sin uniquement.

1. $-\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x)$
2. $5(\sin(2x) - \cos(2x))$
3. $\sin(x) - \cos(x)$
4. $3\sin(\pi x) + 3\sqrt{3}\cos(\pi x)$