Chapitre 2

Probabilité conditionnelles et indépendance

2.1 Lois de probabilités (vu en 2nde)

Une **expérience aléatoire** est une expérience **renouvelable à l'identique**, dont on connait les **issues**, et dont le résultat est **imprévisible**.

Chaque renouvellement de l'expérience s'appelle **épreuve**.

- une issue est notée ω, ou ω_1, $\omega_2, \ldots$. à lire « oméga »
- l'univers Ω désigne l'ensemble des issues possibles

  $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \ldots; \omega_n\}$.

  n désigne le nombre total d'issues.
- un événement E est une partie de Ω : $E \subset \Omega$
- ω **réalise** l'événement E signifie $\omega \in E$.

Définition 2.1 — définition constructive d'une loi de probabilité. Pour un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

a) on attribue à chaque événement élémentaire ω une probabilité positive $p(\omega) \geqslant 0$

b) la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1 :

$p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots + p(\omega_n) = 1$

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

c) Pour tout événement E, la probabilité $P(E)$ est égale à la probabilité des événements élémentaires qui le composent.

$$P(\{\omega\}) = p(\omega)$$

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega)$$

Convention lycée Dans tout exercice où figurent des expressions tel que « dés équilibrés », « tirage au hasard », « urnes opaque et jetons indiscernables au toucher »... le modèle choisi sera celui de l'équiprobabilité : tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Définition 2.2 — situation d'équiprobabilité. Pour un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

a) $p(\omega_1) = p(\omega_2) = \ldots = p(\omega_n) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)}$

b) Pour tout événement E on a $P(E) = \dfrac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Le $\text{Card}(E)$ (lire **cardinal**) est le nombre d'issues qui réalisent E.

Théorème 2.1 — formulaire. Toute loi de probabilité sur un univers Ω vérifie les propriétés suivantes :

(P1) $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$ — loi unitaire

(P2) Pour tout événement A $\quad 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ — loi positive

(P3) Pour tout événement A

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

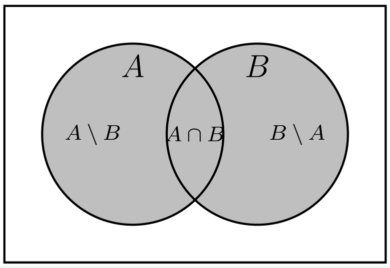
$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

(P4) Si A et B sont des événements incompatibles alors : — loi additive

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(P5) Pour tous événements A et B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



R Écriture alternative de P5 :

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

Postulat 2.2 — La loi naïve des grands nombres. Lorsqu'une expérience aléatoire a un nombre fini de résultats possibles, chacun de ces résultats possède une probabilité d'**apparaître**.

Quand on répète un grand nombre de fois l'expérience, la proportion d'apparition de chaque résultat est voisine de sa probabilité.

Principe fondamental. Vous en verrez d'autres versions plus formalisées au lycée et au delà.

$$\text{frequence}^1(\text{événement}) \approx P(\text{événement}) \times \text{nbr de répétition}$$

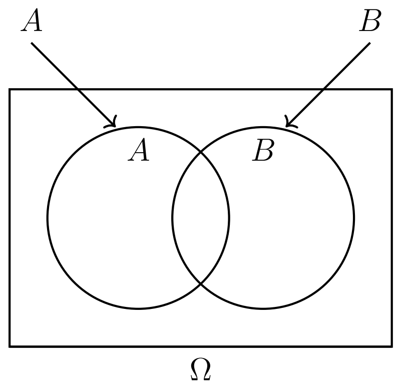
[1] fréquence absolue $\neq$ fréquence relative

2.1.1 Exercices : rappels de seconde

Exercice 1

On lance un dé équilibré à 10 faces. On considère les événements $A =$« obtenir des carrés parfaits » et $B =$« obtenir des nombres impairs ».

1) Quelles sont les issues possibles ? Sont-elles équiprobables ?
2) Placer les issues dans le diagramme de Venn.
3) Enumérer les événements et donner leur probabilité.
   a) $A = \{ \quad \}$; $P(A) =$
   b) $\overline{B} = \{ \quad \}$; $P(\overline{B}) =$
   c) $A \cap B = \{ \quad \}$; $P(A \cap B) =$
   d) $A \cap \overline{B} = \{ \quad \}$; $P(A \cap \overline{B}) =$
   e) $\overline{A \cup B} = \{ \quad \}$; $P(\overline{A \cup B}) =$



Exercice 2

Le tableau croisé montre la répartition des effectifs selon leur déjeuner et le moyen utilisé pour venir à l'école. On considère l'expérience aléatoire : « choisir un élève au hasard ».

On considère les événements suivants.

- F: « l'élève prend un déjeuner froid »;
- C : « l'élève prend un déjeuner chaud »;
- R : « l'élève ne prend pas de déjeuner »;
- M : « l'élève vient à l'école à pied »;
- B : « l'élève vient à l'école en bus »;
- V : « l'élève est déposé en voiture ».

	Froid	Chaud	Aucun	Total
à Pied	0	6		24
en Bus		14	5	32
en Voiture	20		10	
Total	33	94		160

1) Compléter le tableau des effectifs.
2) Décrire les événements suivants par une courte phrase puis déterminer leur probabilité.
   a) $P(F) =$ .... $P(B) =$ ....
   b) $\overline{B}=$ .... $P(\overline{B}) =$
   c) $\overline{R}=$ .... $P(\overline{R}) =$
   d) $B \cup M =$ .... $P(B \cup M) =$
   e) $F \cap M =$ .... $P(F \cap M) =$
   f) $R \cap \overline{M} =$ .... $P(R \cap \overline{M}) =$
   g) $C \cap V =$ .... $P(C \cap V) =$
   h) $\overline{C \cap V} =$ .... $P(\overline{C \cap V}) =$
   i) $F \cup B =$ .... $P(F \cup B) =$
   j) $\overline{F \cup B} =$ .... $P(\overline{F \cup B}) =$

Exercice 3 Complétez

1) $P(\Omega) =$ .... L'événement impossible est noté .... Sa probabilité est ....

2) Deux événements A et B sont disjoints lorsque ....

3) Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) =$ ...... + ...

4) $\overline{B}$ est l'événement .... $P(\overline{B}) = 1-$ ....

5) Si $P(A) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.2$ et $P(B) = 0.5$ alors $P(\overline{B}) = 1 - P(......) =$ ....

et $P(A \cup B) = P(......) + P(......) - P(......) =$ ....

6) Les événements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont ...., et $P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) =$ ....

7) Si $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,5$, $P(A \cap B) = 0,3$ alors :

$P(\overline{A}) = 1 - P(......) =$ ....

$P(\overline{A} \cap B) = P(.........) - P(.........) =$ ....

$P(\overline{A} \cup B) = P(......) + P(......) - P(......) =$ ....

Exercice 4

On lance un dé cubique pipé. Le tableau ci-contre représente la loi de probabilité de cette expérience.

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\omega)$	0.1	0,15	0,2		0,3	0,05

1) Calculer $P(4)$.
2) Calculer la probabilités des événements suivants : $A =$« La face obtenue est paire »
$B =$ « la face obtenue est supérieur ou égale à 4 » et $C =$ « La face obtenue est un carré parfait »
3) On lance ce dé 50 fois. Estimer le nombre d'observation de l'événement C.

Exercice 5

On considère la loi de probabilité suivante ($0 < a < 1$) :

x_i	1	2	3	4	5
$p(x_i)$	$3a$	$2a$	$0,01$	a	$3a$

Calculer la valeur de a.

Exercice 6 — Entrainement formules.

1) $P(E) = 0,34$, $P(E \cup F) = 0,65$ et $P(E \cap F) = 0,23$. Calculer $P(F)$.
2) $P(E) = 0.3$, $P(F) = 0.6$ et $P(E \cup F) = 0.8$. Calculer $P(E \cap F)$
3) $P(E) = 0.3$, $P(\overline{F}) = 0.65$ et $P(E \cap F) = 0.2$. Calculer $P(E \cup F)$.
4) $P(E) = 0,5$, $P(F) = 0,24$ et $P(E \cap F) = 0,1$. Calculer $P(\overline{E \cup F})$.