Chapitre 1
Fonctions et équations quadratiques

Table 1.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 1…

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître**…/**savoir faire**…	🪨	💎	💍
Reconnaitre une équation quadratique	1	2, 3	
Résoudre une équation quadratique en diversifiant les stratégies			
factoriser par regroupement et identités remarquables	4	5, 6	
factoriser par technique du somme-produit		7, 8	9
par complétion au carré	10, 11	12, 13	
par formule quadratique	14, 15	16, 17	47, 48
Fonctions quadratiques et leurs diverses formes : réduite, canonique et factorisée			
forme canonique et sens de variation	28	31, 30	
forme factorisée, signe et inéquations quadratiques	32	34, 35, 36	37
expression de la somme et produit des racines	58, 59	60, 61	62, 63, 64
Représentation graphique de fonctions quadratiques			
parabole, axe de symétrie et coordonnées du sommet	29, 33		
retrouver une expression à partir de la représentation	40, 41	38, 39	
déterminer les coordonnées de points d'intersection	52	53, 54, 55	56, 57
Applications			
Choisir une forme adaptée	42	43, 44	
Résoudre une équation cubique ayant une racine évidente		18	19, 20, 21
Résoudre des équations se ramenant à une quadratique (bicarée,…)		22	23 à 27
Équations quadratiques à paramètre		45, 46, 49	50, 51
Mises en équation quadratique		65, 66, 67	
Optimisation quadratique		68	

1.1 Équations quadratiques

Définition 1.1 Une équation quadratique d'inconnue x est une équation qui peut s'écrire sous une **forme standard** $ax^2 + bx + c = 0$ ou $a \neq 0$, b et $c \in \mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation sont les **racines** ou les **zéros** de l'expression $ax^2 + bx + c$.

■ **Exemple 1.1** a) L'équation $3x^2 - 5x + 2 = 0$ est sous forme standard.

b) L'équation quadratique $2x^2 = x^2 + 2x + 3$ a une forme standard $x^2 - 2x - 3 = 0$.

c) L'équation quadratique $2(x+3)^2 = 0$ a une forme standard $2x^2 + 12x + 18 = 0$.

d) L'équation $x^2 + 3x = x^2 - 1$ n'est pas quadratique : elle est équivalente à $3x + 1 = 0$.

Pour résoudre une équation quadratique on peut utiliser une des trois méthodes suivantes :

— factoriser pour se ramener à une équation produit nul

— compléter au carré et résoudre à l'aide de la racine carrée.

— utiliser la formule quadratique

1.1.1 Les différentes techniques de factorisation

1. factoriser par regroupement : $3x(2x+5) + 5(2x+5) =$ ....
2. factoriser par différence de carrés : $(2x-3)^2 - 25 =$ ....
3. factoriser par identité remarquable du carré parfait $x^2 - 10x + 25 =$ ....
4. factoriser par somme-produit pour **certaines** expressions du type $1x^2 + bx + c$
5. une variante pour factoriser **certaines** expressions du type $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 1$.

Proposition 1.1 Soit b et c sont deux entiers. Si l'expression $1x^2 + bx + c$ est factorisable sous la forme $(x+p)(x+q)$, avec p et q entiers, alors on a nécessairement $pq = c$ et $p + q = b$.

■ **Exemple 1.2 — technique de factorisation par produit-somme d'expressions du type $1x^2 + bx + c$.**

On cherche deux entiers p et q entiers tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 + 7x + 10 \stackrel{?}{=} (x+p)(x+q)$.

1. Lister des paires de facteurs de $c = 10$
2. Chercher une paire dont la somme est $b = 7$ (cette méthode peut ne pas aboutir)
3. Vérification par double distributivité

p	q	pq	$p+q$	
1	10	10	11	✗
2	5	10	7	✓

$$(x+2)(x+5) = x^2 + 2x + 5x + 10 = x^2 + 7x + 10$$

Proposition 1.2 Soit a, b et c des entiers. Si l'expression $ax^2 + bx + c$ est factorisable sous la forme $(rx+p)(sx+q)$, avec r, s, p et q entiers, alors $ps \times qr = ac$ et $ps + qr = b$.

■ **Exemple 1.3 — technique de factorisation par produit-somme de ax^2+bx+c avec $a \neq 1$.**

On cherche à factoriser $5x^2-18x-8$.

1. Lister des paires de facteurs entiers de $ac=-40$
2. Chercher une paire dont la somme est $b=-18$ (cette méthode peut ne pas aboutir)
3. Écrire bx comme la somme trouvée.
4. Factoriser par regroupement.

p	q	pq	$p+q$	
1	-40	-40	-39	✗
2	-20	-40	-18	✓

$$\begin{aligned} 5x^2-18x-8 &= \underbrace{5x^2+2x}\underbrace{-20x-8} \\ &= x(5x+2)-4(5x+2) \\ &= (x-4)(5x+2) \end{aligned}$$

1.1.2 Compléter au carré

La **complétion au carré** repose sur l'identité suivante :

Lemme 1.3 Pour tout x et $b \in \mathbb{R}$ on a $x^2+bx = \left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2}\right)^2$

Démonstration. $x^2+bx = x(x+b) = \left(x+\dfrac{b}{2}-\dfrac{b}{2}\right)\left(x+\dfrac{b}{2}+\dfrac{b}{2}\right) = \left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2}\right)^2$ ■

1.1.3 La formule quadratique et le discriminant

Définition 1.2 Soit l'équation quadratique $ax^2+bx+c=0$, avec $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$.

On appelle disciminant le réel $\Delta = b^2-4ac$

Théorème 1.4 Soit l'équation quadratique $ax^2+bx+c=0$, avec $a \neq 0$.

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solutions.
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine double $r = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, L'équation admet deux racines distinctes : $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Démonstration. ■

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= 0 \\ x^2+\frac{b}{a}x &= \frac{-c}{a} \\ x\left(x+\tfrac{b}{a}\right) &= \frac{-c}{a} \\ \left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a^2} &= \tfrac{-c}{a} \\ \left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2 &= \tfrac{b^2}{4a^2} + \tfrac{-c}{a} = \tfrac{b^2-4ac}{4a^2} = \tfrac{\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

Si $\Delta \geqslant 0$

$$x+\tfrac{b}{2a} = \tfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x+\tfrac{b}{2a} = -\tfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x = \tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

1.1.4 Exercices : Équations quadratiques et leur résolution

Exercice 1 — concepts.

1. Parmi ses équations, l'équation ....est une équation quadratique à une inconnue.

   (A) $3(x+1)^2 = 2(x+1)$ (B) $x^2+2x = x^2-1$ (C) $ax^2+bx+c=0$ (D) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-2=0$

2. Les équations quadratiques à une inconnue sont ....

   (A) $2x^2=-3x$ (B) $3x^2(x-3)=x$ (C) $\dfrac{2}{x^2}-1=0$ (D) $\dfrac{y^2}{4}=7$ (E) $x^2=9$

3. Une forme standard de l'équation $5x^2=6x-8$ est $5x^2$ .... $=0$.
4. Si 3 est solution de l'équation $\frac{4}{3}x^2-2a+1=0$, inconnue x. Alors $2a=$......................
5. Si $a-b+c=0$ et $a\neq 0$, alors une des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue x est $x=$ ...... car $a(\ldots\ldots)^2+b(\ldots\ldots)+c=$ ....
6. Si l'équation $mx^2+3x-4=0$ est quadratique d'inconnue x, alors $m\neq$ ....
7. Si l'équation $(k-3)x^2+2x-1=0$ est quadratique d'inconnue x, alors $k\neq$ ....
8. Une forme standard de l'équation $x(x+3)=2x-5$ est ....
9. Une forme standard de l'équation $3x^2=x$ est ....
10. Si l'équation $(a^2-1)x^3-(a+1)x^2+4=0$ est quadratique d'inconnue x, alors a vérifie a^2-1 ......0 et $a+1$ ......0. Donc a prend les valeurs ....

Exercice 2 — communiquer. Parmi les valeurs proposées, lesquelles sont solutions de l'équation ?

1. L'équation $3x^2-2x-1=0$ et $\left\{\sqrt{2};\ 1;\ -\dfrac{1}{3}\right\}$
2. L'équation $2x^2-3x+1=0$ et $\left\{\dfrac{1}{2};\ 1;\ 2\right\}$

Exercice 3 Soit le paramètre $k\in\mathbb{R}$, et l'équation $kx^2-k(x+2)=x(2x+3)+1$ d'inconnue x.

1. Écrire l'équation sous forme standard $ax^2+bx+c=0$. Exprimer a, b et c en fonction de k.
2. Pour quelles valeurs de k l'équation est-elle quadratique ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de k l'équation est affine ?
4. Justifier que -1 est solution quelle que soit la valeur de k.
5. Sachant que 0 est solution de l'équation, déterminer k.

■ **Exemple 1.4 — réactivation 2$^{\text{nde}}$: résoudre une équation quadratique par factorisation en produit nul.**

$$(x-4)(3x+7)=0$$
$$x-4=0 \quad \text{ou} \quad 3x+7=0$$
$$x=4 \quad \text{ou} \quad x=-\frac{7}{3}$$
$$\mathscr{S}=\{4\ ;-\frac{7}{3}\}$$

$$21x-3x^2=0$$
$$3x(7-x)=0$$
$$3x=0 \quad \text{ou} \quad 7-x=0$$
$$x=0 \quad \text{ou} \quad 7=x$$
$$\mathscr{S}=\{0\ ;\ 7\}$$

$$x^2-6x+9=0$$
$$x^2-2\times x\times 3+3^2=0$$
$$(x-3)^2=0$$
$$x-3=0$$
$$\mathscr{S}=\{3\}$$

Exercice 4 — réactivation 2$^{\text{nde}}$. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x.

(E_1) $x^2 - x = 0$

(E_2) $5x^2 = 4x$

(E_3) $5(3x+2)(x-5) = 0$

(E_4) $x^2 + 2x + 1 = 0$

(E_5) $x^2 - 4x + 4 = 0$

(E_6) $(x-1)^2 - 9 = 0$

Exercice 5 — entraînement. Transformer chaque équation en produit nul et résoudre.

(E_1) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

(E_2) $(x+4)^2 - (2x-1)^2 = 0$

(E_3) $(2x+1)^2 = (3x-2)^2$

(E_4) $2x(x-3) = 5(x-3)$

(E_5) $x - 2 = x(x-2)$

(E_6) $(3-y)^2 + y^2 = 9$

Exercice 6 — communiquer, raisonner. Expliquer pourquoi les méthodes vues en classe de seconde ne permettent pas de résoudre l'équation $5x^2 - 4x - 1 = 0$.

■ **Exemple 1.5 — factoriser par la technique somme-produit pour résoudre les équations $1x^2 + bx + c = 0$.**

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$
$$(x-4)(x-5) = 0$$
$$x - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 5 = 0$$
$$x = 4 \quad \text{ou} \quad x = 5$$
$$\mathscr{S} = \{4\ ;\ 5\}$$

$$x^2 - 9x + 20 \stackrel{?}{=} (x+p)(x+q)$$

p	q	pq	$p+q$	
4	5	20	9	✗
-4	-5	20	-9	✓

Vérification $x^2 - 9x + 20 = (x-4)(x-5)$

$$x^2 - 12x - 13 = 0$$
$$(x-13)(x+1) = 0$$
$$x - 13 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 13 \quad \text{ou} \quad x = -1$$
$$\mathscr{S} = \{13\ ;\ -1\}$$

$$x^2 - 12x - 13 \stackrel{?}{=} (x+p)(x+q)$$

p	q	pq	$p+q$	
13	-1	-13	12	✗
-13	1	-13	-12	✓

Vérification : $(x-13)(x+1) = x^2 - 12x - 13$

Exercice 7 — Cas c>0. Factoriser pour résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

(E_1) $x^2 + 6x + 5 = 0$

(E_2) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(E_3) $x^2 + 10x + 16 = 0$

(E_4) $x^2 - 17x + 16 = 0$

(E_5) $x^2 + 6x + 8 = 0$

(E_6) $x^2 - 7x + 12 = 0$

Exercice 8 — Cas c<0. Factoriser pour résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

(E_1) $x^2 - 14x - 15 = 0$

(E_2) $x^2 + x - 6 = 0$

(E_3) $x^2 - 5x - 14 = 0$

(E_4) $x^2 - 6x - 40 = 0$

(E_5) $x^2 - x - 12 = 0$

(E_6) $x^2 - 5x - 15 = 0$

Exercice 9 — Cas $a \neq 1$. Factoriser pour résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

(E_1) $2x^2 + 7x + 6 = 0$

(E_2) $3x^2 + 14x - 5 = 0$

(E_3) $3x^2 + 7x + 2 = 0$

(E_4) $8x^2 + 2x - 3 = 0$

(E_5) $6x^2 + 7x - 3 = 0$

(E_6) $6x^2 - x - 1 = 0$

■ **Exemple 1.6 — réactivation 2^nde : résoudre par racine carrée.** en présence d'un carré parfait

$3x^2-1=8$	$5-2x^2=11$	$(x+3)^2=36$	$(2x-4)^2=7$
$3x^2=9$	$-2x^2=6$	$x+3=\pm\sqrt{36}$	$2x-4=\pm\sqrt{7}$
$x^2=3$	$x^2=-3$	$x+3=\pm 6$	$2x=4\pm\sqrt{7}$
$x=\pm\sqrt{3}$	pas de solutions	$x=-3\pm 6$	$x=2\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$
$\mathscr{S}=\{\sqrt{3}\,;-\sqrt{3}\}$	$\mathscr{S}=\varnothing$	$\mathscr{S}=\{3\,;-9\}$	$\mathscr{S}=\{4+\sqrt{7}\,;\ 4-\sqrt{7}\}$

Exercice 10 — réactivation 2^nde. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x.

(E_1) $3x^2-6=21$

(E_2) $2x^2+8=0$

(E_3) $(3x)^2-5=0$

(E_4) $(x+1)^2-5=0$

(E_5) $(2x+1)^2=32$

(E_6) $9(x+6)^2+2=0$

(E_7) $\dfrac{1}{3}(2x+1)^2=12$

(E_8) $\dfrac{4}{5}(x-3)^2-5=0$

Exercice 11 — concepts.

1. Si l'équation $(2x-1)^2=a$ admet deux solutions réelles différentes alors $a\ldots\ldots0$ **(>/=/<)**.
2. Si l'équation $5(x-a)^2+b=0$ admet une solution unique alors $b\ldots\ldots0$ **(>/=/<)**.
3. Si l'équation $(3x+1)^2=c$ n'a pas de solutions alors $c\ldots\ldots0$ **(>/=/<)**.
4. Les racines de l'équation $(x+d)^2=10$ sont $x=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $x=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
5. La plus petite des racines de l'équation $(3x-c)^2-60=0$ est $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
6. Si les racines de l'équation $(3x-c)^2-60=0$ sont positives alors $c\geqslant\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
7. Si $ax^2-b=0$ n'a pas de solution réelles, alors a et b vérifient $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
8. Si $(x-a)^2=a^2+2ab+b^2$ alors $x=a+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ou $x=a-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

■ **Exemple 1.7 — compléter au carré pour résoudre.**

$$x^2+4x+1=0$$
$$x(x+4)+1=0$$
$$(x+0)(x+4)+1=0$$

écrire comme produit de conjugués

$$(x+2-2)(x+2+2)+1=0$$

I.R. $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$(x+2)^2-2^2+1=0$$
$$(x+2)^2-3=0$$
$$(x+2)^2=3$$
$$x=-2\pm\sqrt{3}$$
$$\mathscr{S}=\{-2-\sqrt{3}\,;-2+\sqrt{3}\}$$

$$x^2=3x+6$$
$$x^2-3x=6$$
$$x(x-3)=6$$
$$(x-0)(x-3)=6$$
$$\left(x-\tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{2}\right)\left(x-\tfrac{3}{2}-\tfrac{3}{2}\right)=6$$
$$\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-\left(\tfrac{3}{2}\right)^2=6$$
$$\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2=\tfrac{33}{4}$$
$$x=\tfrac{3}{2}\pm\tfrac{\sqrt{33}}{2}$$
$$\mathscr{S}=\left\{\tfrac{3}{2}-\tfrac{\sqrt{33}}{2}\,;\tfrac{3}{2}+\tfrac{\sqrt{33}}{2}\right\}$$

Exercice 12 Compléter les résolutions(si nécessaire, transformer les $-$ en $+$).

$$\begin{aligned}
x^2-4x+1&=0\\
x(x-\ldots)+1&=0\\
(x-0)(x-\ldots)+1&=0\\
(x-\ldots-\ldots)(x-\ldots-\ldots)+1&=0\\
(x-\ldots)^2-\ldots\ldots+1&=0\\
(x-\ldots)^2&=\\
x&=\ldots\pm\ldots\\
\mathscr{S}&=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2+5x&=\tfrac{3}{2}\\
x(x-\ldots)&=\tfrac{3}{2}\\
(x-0)(x-\ldots)&=\tfrac{3}{2}\\
(x-\tfrac{}{2}-\tfrac{}{2})(x-\tfrac{}{2}-\tfrac{}{2})&=\tfrac{3}{2}\\
(x-\tfrac{}{2})^2-\ldots\ldots&=\tfrac{3}{2}\\
(x-\ldots)^2&=\\
x&=\ldots\pm\ldots\\
\mathscr{S}&=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2+6x&=2\\
x(x-\ldots)&=2\\
(x-0)(x-\ldots)&=2\\
(x-\ldots-\ldots)(x-\ldots-\ldots)&=2\\
(x-\ldots)^2-\ldots\ldots&=2\\
(x-\ldots)^2&=\\
x&=\ldots\pm\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2-3x+\tfrac{2}{5}&=0\\
x(x-\ldots)+\tfrac{2}{5}&=0\\
(x-0)(x-\ldots)+\tfrac{2}{5}&=0\\
(x-\tfrac{}{2}-\tfrac{}{2})(x-\tfrac{}{2}-\tfrac{}{2})+\tfrac{2}{5}&=0\\
(x-\tfrac{}{2})^2-\ldots\ldots+\tfrac{2}{5}&=0\\
(x-\ldots)^2&=\\
x&=\ldots\pm\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2x^2+4x+1&=0 && \times\tfrac{1}{2}\\
\frac{2x^2+4x+1}{2}&=0\\
x^2+2x+\tfrac{1}{2}&=0\\
x(x-\ldots)+\tfrac{1}{2}&=0\\
(x-0)(x-\ldots)+\tfrac{1}{2}&=0\\
(x-\ldots-\ldots)(x-\ldots-\ldots)+\tfrac{1}{2}&=0\\
(x-\ldots)^2-\ldots\ldots+\tfrac{1}{2}&=0\\
(x-\ldots)^2&=\\
x&=\ldots\pm\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3x^2-6x&=4 && \times\tfrac{1}{3}\\
\frac{3x^2-6x}{}&=\frac{4}{}\\
x^2-\ldots x&=\ldots\\
x(x-\ldots)&=\ldots\\
(x-0)(x-\ldots)&=\ldots\\
(x-\ldots-\ldots)(x-\ldots-\ldots)&=\ldots\\
(x-\ldots)^2-\ldots\ldots&=\ldots\\
(x-\ldots)^2&=\ldots\\
x&=\ldots\pm\ldots
\end{aligned}$$

Exercice 13 — entrainement. Résoudre par complétion les équations suivantes.

(E_1) $x^2-8x+13=0$	(E_3) $x^2-4x+1=0$	(E_5) $2x^2+3x=7$
(E_2) $x^2+x-1=0$	(E_4) $x^2-0{,}6x-0{,}16=0$	(E_6) $4x^2+3x+1=0$

Pour une équation quadratique sous forme standard $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Si $b^2 - 4ac \geqslant 0$, alors le(s) solution(s) de l'équations quadratique sont données par l'expression :

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exercice 14 — Formule quadratique. Complétez le tableau à l'aide de la formule quadratique.

Equation	**Formule quadratique**	**simplification**	Solutions
$x^2 + 4x + 2 = 0$	$\frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)}$	$\frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2}$	$r_1 = -2 + \sqrt{2}$ $r_2 = -2 - \sqrt{2}$
$x^2 - 5x + 3 = 0$	$\frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)}$	$\frac{5 \pm \sqrt{\quad}}{2}$	$r_1 =$ $r_2 =$
$x^2 + x - 2 = 0$	$\frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)}$	$\frac{\pm \sqrt{\quad}}{\quad}$	$r_1 =$ $r_2 =$
$3x^2 + 4 = 12x$	$\frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)}$	$\frac{\pm \sqrt{\quad}}{\quad}$	$r_1 =$ $r_2 =$
$3x^2 + 2\sqrt{3}x = 2$	$\frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)}$	$\frac{\pm \sqrt{\quad}}{\quad}$	$r_1 =$ $r_2 =$
$x^2 + x + \quad = 0$	$\frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(-3)}}{2(\quad)}$	$\frac{\pm \sqrt{\quad}}{\quad}$	$r_1 =$ $r_2 =$
$2x^2 \quad x \quad = 0$	$\frac{-(7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4(2)(1)}}{2(\quad)}$	$\frac{\pm \sqrt{\quad}}{\quad}$	$r_1 =$ $r_2 =$
$x^2 \quad x \quad = 0$	$\frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)}$	$\frac{\pm \sqrt{\quad}}{\quad}$	$r_1 =$ $r_2 =$
$x^2 \quad x \quad = 0$	$\frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)}$	$\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$	$r_1 =$ $r_2 =$
$x^2 \quad x \quad = 0$	$\frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)}$	$\frac{2 \pm \sqrt{24}}{2}$	$r_1 =$ $r_2 =$
$x^2 \quad x \quad = 0$	$\frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)}$	$\frac{6 \pm \sqrt{28}}{4}$	$r_1 =$ $r_2 =$

Exercice 15 — concepts.

1. Le discriminant de l'équation $2x^2+4x-1=0$ vaut $\Delta=$......................................
2. Le discriminant de l'équation $\frac{2}{3}x-x^2-\frac{1}{3}=0$ est $\Delta=$ ....
3. Le discriminant de l'équation $x^2-x=\frac{1}{2}$ vaut $\Delta=$..

   La plus grande des deux solutions est $x=$..
4. L'équation quadratique $x^2+2bx+c=0$ est sous forme .... Son discriminant est

   $\Delta=$...

   Si $b^2<c$ alors Δ est .... , et l'équation admet ....

   Si Δ......0, la plus petite des deux solutions est $x=$..
5. Entourez les équations quadratiques ayant deux solutions réelles distinctes.

   (A) $x^2+1=0$ (B) $x^2+2x+3=0$ (C) $x^2+2x+1=0$ (D) $x^2+2x-2=0$
6. Entourez les équations quadratiques ayant une solution réelles unique.

   (A) $x^2+2=0$ (B) $x^2+x+3=0$ (C) $x^2+x-1=0$ (D) $4x^2-4x+1=0$
7. Le discriminant de l'équation $x^2+4x+a=0$ vaut $\Delta=$......................................

   Si l'équation admet une unique solution alors $a=$..
8. Le discriminant de l'équation $x^2-2mx+4(m-1)=0$ vaut $\Delta=$...........................

   $\Delta=$.. (.............)^2

   Si $m=\ldots$, alors l'équation admet une solution unique $r=$................................

■ **Exemple 1.8 — résoudre par la formule quadratique.** les équations suivantes d'inconnue x :

$3x^2-5x-1=0$	$4x^2+12x+9=0$	$x^2+2x+2=0$
$a=3$ $b=-5$ $c=-1$	$a=4$ $b=12$ $c=9$	$a=1$ $b=2$ $c=2$
$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(3)(-1)=37$	$\Delta=b^2-4ac=(12)^2-4(4)(9)$	$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4(1)(2)$
$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta=-4$
2 solutions distinctes $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$	1 solution $x=\frac{-b}{2a}$	$\Delta<0$
$x=\frac{5-\sqrt{37}}{6}$ $x=\frac{5+\sqrt{37}}{6}$	$x=\frac{-12}{8}=\frac{-3}{2}$	pas de solutions dans $\mathbb{R}$

Exercice 16 — entrainement. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x.

(E_1) $x^2-3x-4=0$	(E_3) $x^2-4\sqrt{3}x+10=0$	(E_5) $5x^2-2x=7$
(E_2) $x^2=2(x-1)$	(E_4) $-5x^2-3x+2=0$	(E_6) $6x+1=2x^2$

Exercice 17 Utiliser le discriminant pour déterminer le nombre de solutions de l'équation.

(E_1) $x^2-6x+1=0$	(E_3) $3x^2=6x-9$	(E_5) $3x^2=2(2x-1)$
(E_2) $4x^2+5x+\frac{13}{8}=0$	(E_4) $4x(x-1)-3=0$	(E_6) $x^2+rx-s=0$ ($s>0$)

> Soit f une fonction polynôme. Si r est une racine $f(r) = 0$ alors f est factorisable par $(x - r)$.

■ **Exemple 1.9 — Factorisation et racines d'une cubique.** On cherche à résoudre $x^3 - 3x + 2 = 0$.

1. 1 est une racine du polynome $f(x) = x^3 - 3x + 2$ car $f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$.
2. On cherche a, b et $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

$$x^3 - 3x + 2 = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$$

$$x^3 - 3x + 2 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

Il faut $1 = a$; $0 = b - a$; $-3 = c - b$ et $2 = -c$, d'où $a = 1$, $b = 1$ et $c = -2$.

$\therefore f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$ et

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 &= 0 \\ (x-1)(x^2+x-2) &= 0 \\ x - 1 = 0 \quad &\text{ou} \quad x^2 + x - 2 = 0 \\ x = 1 \quad &\text{ou} \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -2 \end{aligned}$$

Exercice 18 Soit la fonction cubique $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

1. Montrer que $f(3) = 0$.
2. En développant le membre de droite, déterminer a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x-3)(ax^2 + bx + c)$$

3. Résoudre l'équation $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$.

Exercice 19 Soit la fonction cubique $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$.

1. Montrer que $f(-1) = 0$.
2. En développant le membre de droite, déterminer a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad x^3 - 2x^2 + 3 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$

3. Montrer que l'équation $x^3 - 2x^2 + 3 = 0$ admet une unique solution.

Exercice 20 — entraînement. Soit la fonction cubique $f(x) = -x^3 + 8x^2 + 11x - 18$.

1. Montrer que $f(-2) = 0$.
2. En développant le membre de droite, déterminer a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad -x^3 + 8x^2 + 11x - 18 = (x+2)(ax^2 + bx + c)$$

3. Quel est le nombre de racines de f ?

Exercice 21 — entraînement. Soit la fonction cubique $f(x) = -2x^3 + 10x^2 - 16 + 8$.

1. Montrer que $f(1) = 0$.
2. Déterminer a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\qquad -2x^3 + 10x^2 - 16 + 8 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$
3. Quel est le nombre de racines de f ?

■ **Exemple 1.10 — Résolution d'équation bicarrée.**

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$\text{On pose } t = x^2 \qquad t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t = 1 \quad \text{ou} \quad t = 5$$

$$x^2 = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 = 5$$

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad -1 \qquad x = \sqrt{5} \quad \text{ou} \quad -\sqrt{5}$$

$$\mathscr{S} = \{1; -1; \sqrt{5}; -\sqrt{5}\}$$

Exercice 22 En suivant la démarche précédente, résoudre dans $\mathbb{R}$:

(E_1) $x^4 - 13x^2 + 40 = 0$ | (E_2) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ | (E_3) $2x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

Exercice 23 Suivre la démarche indiquée et résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation les équation :

(E_1) $3x + 8\sqrt{x} - 3 = 0$ | (E_2) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

1. Par changement de variable $t = \sqrt{x}$ (et $t^2 = x$), trouver une équation vérifiée par t.
2. Résoudre l'équation vérifiée par t
3. Déduire les valeurs possibles de x.

Exercice 24 Suivre la démarche indiquée pour résoudre l'équation $x + \dfrac{1}{x} = 4$, inconnue x.

1. Transformer en une équation équivalente avec un membre de droite nul.
2. Ramener au même dénominateur le membre non nul
3. Résoudre l'équation quotient nul.

Exercice 25 Suivre la démarche indiquée pour résoudre l'équation $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2} = 0$, inconnue x.

1. Préciser les valeurs interdites.
2. Ramener au même dénominateur le membre non nul
3. Résoudre l'équation quotient nul.

Exercice 26 Suivre la démarche indiquée pour résoudre l'équation $\sqrt{2x+1} + 1 = x$, inconnue x.

1. Isoler le radical
2. Élever au carré les deux membres et écrire l'équation quadratique sous forme standard.
3. Résoudre l'équation.

Exercice 27 Suivre la démarche indiquée pour résoudre l'équation $x + 1 = \dfrac{1}{x+4}$, inconnue x.

1. Transformer en une équation équivalente avec un membre de droite nul.
2. Ramener au même dénominateur le membre non nul.
3. Résoudre l'équation quotient nul.

1.2 Fonctions quadratiques

Définition 1.3 — forme réduite. Une **fonction polynôme de degré 2**, ou simplement « fonction quadratique » est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \neq 0$, b et $c \in \mathbb{R}$:

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = ax^2 + bx + c$$

Sa représentation graphique s'appelle une **parabole** (Desmos V1 et V2).

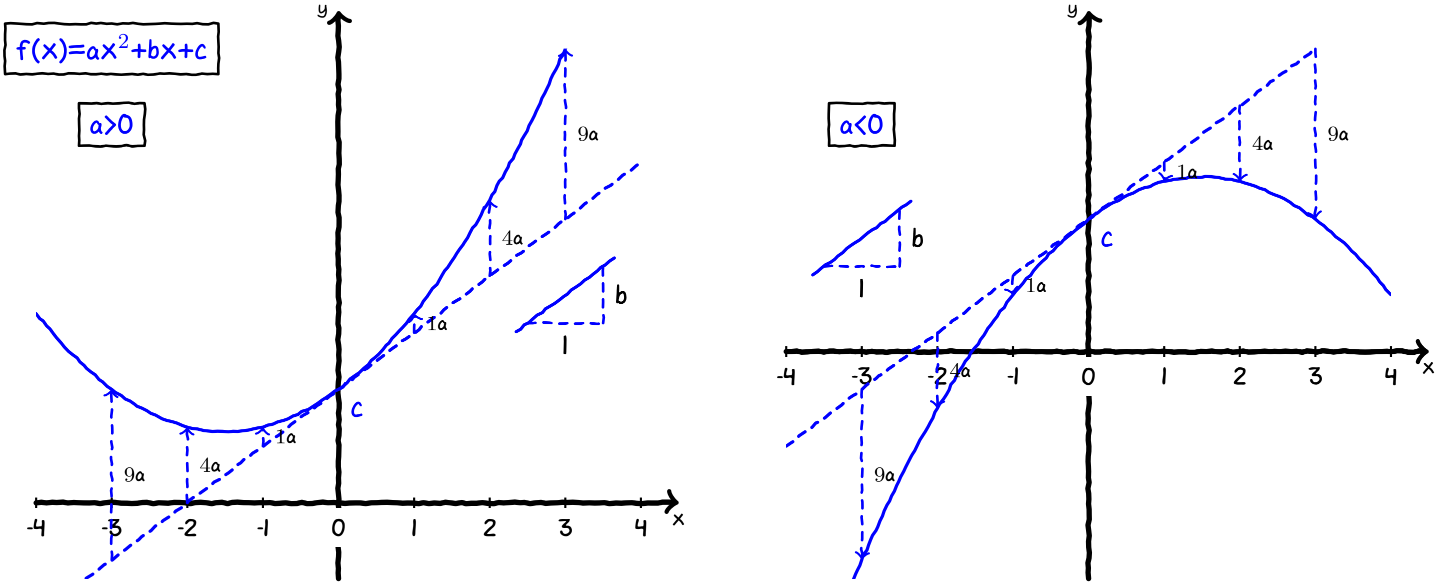


Figure 1.1 – Représentation graphique d'une fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$, cas $a > 0$ et $a < 0$.

Théorème 1.5 — forme canonique. Pour toute fonction quadratique définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), il existe deux réels α et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Cette écriture s'appelle la **forme canonique** de f et s'obtient par **complétion au carré**.

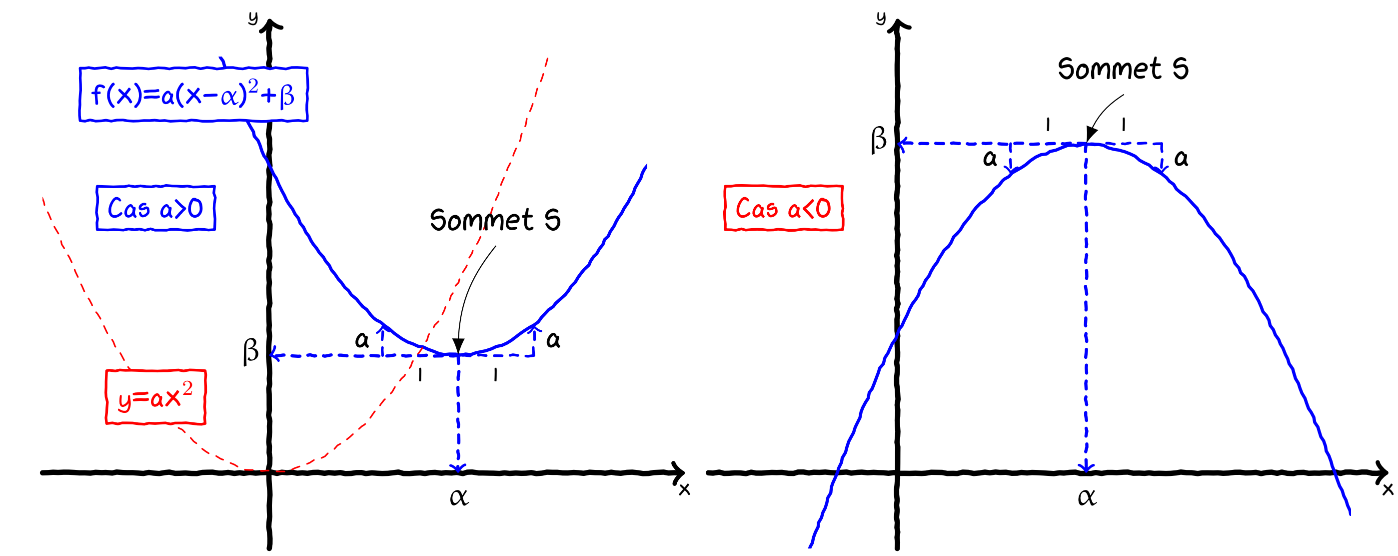


Figure 1.2 – Représentation graphique de f donnée sous forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Desmos1, v2

Proposition 1.6 — admise. Soit $a \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La fonction quadratique donnée par sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est une fonction monotone sur $]-\infty;\alpha]$ et sur $[\alpha;\infty[$.

- Si $a > 0$ alors f admet un **minimum** β atteint en $x = \alpha$.
- Si $a < 0$ alors f admet un **maximum** β atteint en $x = \alpha$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
ax^2+bx+c ($a > 0$)	$+\infty$ ↘	$\beta = f(\alpha)$	↗ $+\infty$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
ax^2+bx+c ($a < 0$)	$-\infty$ ↗	$\beta = f(\alpha)$	↘ $-\infty$

Proposition 1.7 Pour $a \neq 0$, b et $c \in \mathbb{R}$, on pose $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = \dfrac{-\Delta}{4a}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2+\beta$.

Démonstration. $ax^2+bx+c = ax\left(x+\dfrac{b}{a}\right)+c$ ■

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

Définition 1.4 — forme factorisée. Soit f une fonction quadratique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$, avec $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$. f est **factorisable**, s'il existe r_1 et $r_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$$

r_1 et r_2 sont les racines de f : $f(r_1) = 0 \qquad f(r_2) = 0$

■ **Exemple 1.11** a) $f(x) = (3x-7)(2x+5) = 3\left(x-\dfrac{7}{3}\right) \times 2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$

$f(x) = 6\left(x-\dfrac{7}{3}\right)\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$ forme factorisée au sens de la défintion 1.4

b) Pour $f(x) = 2(x-7)^2$, 7 est une racine double : $r_1 = r_2 = 7$.

Théorème 1.8 — forme factorisée. Soit la fonction quadratique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son déterminant.

- Si $\Delta < 0$, f n'a pas de racines, n'est pas factorisable. Elle reste du même signe que a.
- Si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x-r)^2$ admet une racine double $r = -\dfrac{b}{2a}$. f est du même signe que a.
- Si $\Delta > 0$. $f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$ avec deux racines distinctes $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  f est du même signe de a à l'extérieur des racines.

1.2.1 Exercices : Fonction quadratiques

Exercice 28 — concepts.

1. Pour la fonction quadratique donnne par sa forme canonique $f(x) = a(x-s)^2 + r$:

   Le sommet de sa représentation graphique a pour coordonnées ....
2. La représentation graphique de f définie par $f(x) = 3(x-2)^2 - 6$ est de sommet $S(\ldots\ldots\ ;\ \ldots\ldots)$, et $f(2) = \ldots\ldots$ est le (minimum/maximum) de f.
3. La représentation graphique de f définie par $f(x) = -3(x+5)^2 + 1$ est de sommet $S(\ldots\ldots\ ;\ \ldots\ldots)$, et $f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$ est le (minimum/maximum) de f.

■ **Exemple 1.12 — représenter connaissant la forme canonique.** Soit la représentation graphique de la fonction définie par $f(x) = -2(x+1)^2 + 4$. (1) Déterminer les coordonnées du sommet (2) de l'intersection avec l'axe des ordonnées (3) l'axe de symétrie (4) représenter à main levée.

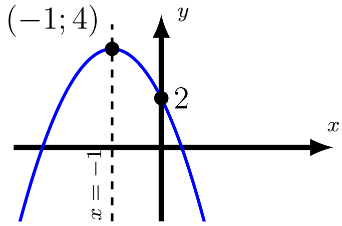
Solution. forme canonique : $f(x) = -2(x-(-1))^2 + 4$ avec $\alpha = -1$ et $\beta = 4$

— Le sommet de la parabole est $S(-1\ ;\ 4)$.

— L'axe de symétrie est d: $x = -1$.

— Si $x = 0$, alors $y = f(0) = -2(1)^2 + 4 = 2$. Passe par $(0\ ;2)$.

— $a < 0$, la parabole est orientée vers le bas $\frown$



■

Exercice 29 Mêmes consignes pour les fonctions suivantes.

1) $f(x) = (x-1)^2 + 3$	3) $f(x) = 2(x+2)^2 + 1$	5) $f(x) = -2(x-1)^2 - 3$
2) $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$	4) $f(x) = \frac{-1}{3}(x-1)^2 + 4$	6) $f(x) = \frac{-1}{10}(x+2)^2 - 3$

■ **Exemple 1.13 — variation à partir de la forme réduite.** (1) déterminer la forme canonique *par complétion au carré* (2) dresser son tableau de variation (3) préciser le maximum ou le minimum de la fonction quadratique définie par $f(x) = 5x^2 - 30x + 49$.

Solution.
$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 30x + 49 \\ &= 5(x^2 - 6x) + 49 \\ &= 5((x-3)^2 - 3^2) + 49 \\ &= 5(x-3)^2 - 40 + 49 \end{aligned}$$

Donc $f(x) = 5(x-3)^2 + 9$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	9	$\nearrow$

9 est le minimum de f ■

Exercice 30 Mêmes consignes pour les fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$	3) $f(x) = 3x^2 + 5$	5) $f(x) = x(x+8)$
2) $f(x) = 5x^2 + 30x + 4$	4) $f(x) = -x^2 - 3x + 3$	6) $f(x) = 1 - x - x^2$

Pour $a \neq 0$, b et $c \in \mathbb{R}$, on pose $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = \dfrac{-\Delta}{4a}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Exercice 31 Donner la forme canonique et préciser les extremums des fonctions suivantes.

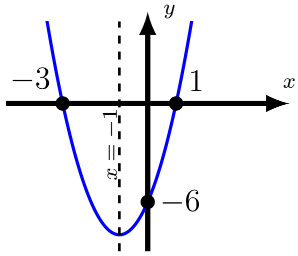
1) $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$	2) $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$	3) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{5}{3}$

Exercice 32 — la forme factorisée. Écrire chaque fonction quadratique sous la forme factorisée $a(x-r_1)(x-r_2)$ et préciser les racines.

1) $f(x) = 2(x+3)(x-5)$	3) $f(x) = (2x-10)(3x+15)$	5) $f(x) = 5x^2 + 2x$
2) $f(x) = (5x-2)(x-4)$	4) $f(x) = 4(-x+5)(2x+3)$	6) $f(x) = -x^2 + 3x$

■ **Exemple 1.14 — représenter connaissant la forme factorisée.** Soit la représentation graphique de la fonction définie par $f(x) = 2(x+3)(x-1)$. (1) Déterminer les coordonnées des intersection avec les axes du repère (2) représenter à main levée.

Solution.
— $f(x) = 0$ lorsque $x = -3$ ou $x = 1$. $A(-3;0)$ et $B(1;0) \in \mathscr{P}$.
— Si $x = 0$ alors $y = f(0) = 2(3)(-1) = -6$. $C(0\,;-6) \in \mathscr{P}$
— $\dfrac{r_1+r_2}{2} = \dfrac{-3+1}{2} = -1$, L'axe de symétrie est $d\colon x = -1$.
— $a > 0$, la parabole est orientée vers le haut $\smile$



■

Exercice 33 Mêmes consignes pour les fonctions suivantes.

1) $f(x) = -2(x-1)(x-2)$	3) $f(x) = -3x(x+4)$	5) $f(x) = 2(x+3)(x+5)$
2) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2$	4) $f(x) = -2(x+3)^2$	6) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2$

■ **Exemple 1.15** Résoudre les inéquations quadratiques suivantes.

$(I_1)\colon 2x^2 + 3x - 6 \geqslant 0$

On pose $f(x) = 2x^2 + 3x - 6$

$\Delta = (3)^2 - 4(2)(-6) = 57 > 0$

f a deux racines distinctes $r = \frac{-3\pm\sqrt{57}}{4}$

f est du signe de $a > 0$ ($\smile$) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{57}}{4}$		$\frac{-3+\sqrt{57}}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\therefore \mathscr{S} = \left[-\infty; \frac{-3-\sqrt{57}}{4}\right[\cup \left]\frac{-3-\sqrt{57}}{4}; +\infty\right]$.

$(I_2)\colon 2x^2 + 3x > -5 \quad\Longleftrightarrow\quad 2x^2 + 3x + 5 > 0$

On pose $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$.

$\Delta = (3)^2 - 4(2)(5) = -31 < 0$. f n'a pas de racines réelles. f est toujours du signe de $a > 0$.

$\therefore \mathscr{S} = \mathbb{R}$.

$(I_3)\colon (2x-1)(x+4) \leqslant 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 2(x-\frac{1}{2})(x+4) \leqslant 0$

On pose $f(x) = 2(x-\frac{1}{2})(x+4)$.

f a deux racines distinces $\frac{1}{2}$ et -4. f est du signe de $a > 0$ à l'extérieur des racines.

$\therefore\ \mathscr{S} = [-4; \frac{1}{2}]$

Exercice 34 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x.

(I_1) $-2x^2+3x+1 \geqslant 0$

(I_2) $2x^2+3x+5>0$

(I_3) $x^2-3x<5$

(I_4) $-5x(x+2) \geqslant 0$

(I_5) $3x^2-4x+\dfrac{4}{3} \leqslant 0$

(I_6) $-2(x-8)(3x+5)<0$

(I_7) $6-7x-3x^2 \leqslant 0$

(I_8) $x^2-2x-15 \leqslant 1$

(I_9) $x^2-\sqrt{2}x-5<0$

Exercice 35 — concepts.

1. Donner une équation $ax^2+bx+c=0$ dont les solutions sont -2 et 7
2. En déduire une inéquation de la forme $ax^2+bx+c>0$ dont les solutions $\mathscr{S}=\left]-2;7\right[$.

Exercice 36 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x.

(I_1) $(3x^2+x+2)(x+3) \leqslant 0$

(I_2) $(-5x^2+x+4)(3-2x)<0$

(I_3) $(-x^2+x-7)(3x^2-x+2) \geqslant 0$

(I_4) $\dfrac{3x^2-4x+7}{2x+1} \leqslant 0$

(I_5) $\dfrac{3x^2+9x+6}{(x+3)^2}<0$

(I_6) $\dfrac{1-4x}{x^2+x+1} \leqslant 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x^2+x+2$		
$x+3$		
$\times$		

x	$-\infty$	$+\infty$
$-5x^2+x+4$		
$3-2x$		
$\times$		

x	$-\infty$	$+\infty$
$-x^2+x-7$		
$3x^2-x+2$		
$\times$		

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x^2-4x+7$		
$2x+1$		
$\dfrac{3x^2-4x+7}{2x+1}$		

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x^2+9x+6$		
$(x+3)^2$		
$\dfrac{3x^2+9x+6}{(x+3)^2}$		

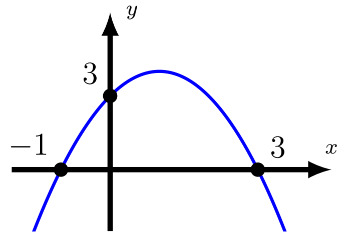
x	$-\infty$	$+\infty$
$1-4x$		
x^2+x+1		
$\dfrac{1-4x}{x^2+x+1}$		

Exercice 37 Résoudre les systèmes suivants :

(I_1) $\begin{cases} 3x^2-11x-4<0 \\ 2x^2+x-1 \geqslant 0 \end{cases}$

(I_2) $\begin{cases} x^2-6x+5 \leqslant 0 \\ x^2-9x+14<0 \end{cases}$

■ **Exemple 1.16 — trouver la forme factorisée à partir de la représentation $\mathscr{P}$.**

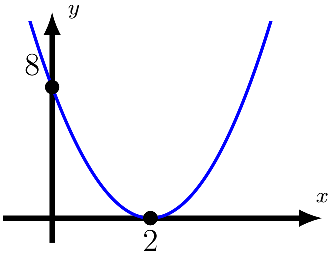


1. Par lecture graphique les racines de f sont -1 et 3.

   Pour tout x : $f(x) = a(x-(-1))(x-3) = a(x+1)(x-3)$, avec $a < 0$.

   $A(0\,;3) \in \mathscr{P} \iff f(0) = 3 \iff a(0+1)(0-3) = 3 \iff -3a = 3.$

   $\therefore a = -1$ et f est définie par $f(x) = -(x+1)(x-3)$

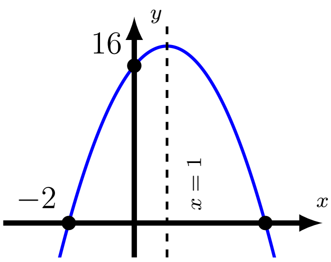


2. Par lecture graphique f a une racine double $r = 2$.

   Pour tout x : $f(x) = a(x-2)^2$, avec $a > 0$.

   $A(0\,;8) \in \mathscr{P} \iff f(0) = 8 \iff a(0+2)^2 = 8 \iff 4a = 8.$

   $\therefore a = 2$ et f est définie par $f(x) = 2(x-2)^2$



3. Par lecture graphique une des racines est -2.

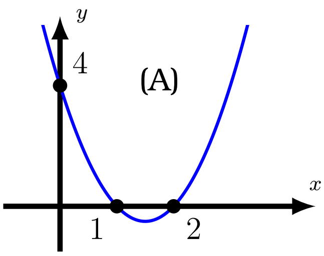
   L'axe de symétrie est d: $x = 1$, l'autre racine est donc 4.

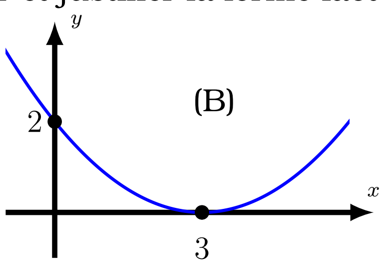
   Pour tout x : $f(x) = a(x-(-2))(x-4) = a(x+2)(x-4)$, avec $a < 0$.

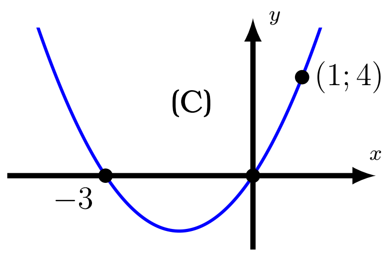
   $A(0;16) \in \mathscr{P} \iff f(0) = 16 \iff a(0+2)(0-4) = 16 \iff -8a = 16$

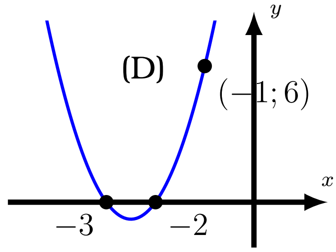
   $\therefore a = -2$ et f est définie par $f(x) = -2(x+2)(x-4)$

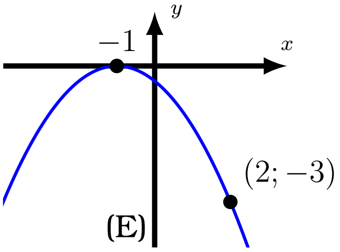
Exercice 38 Déterminer et justifier la forme factorisée des fonctions quadratiques représentées.

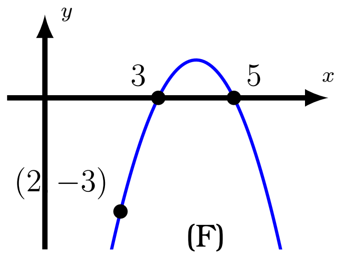


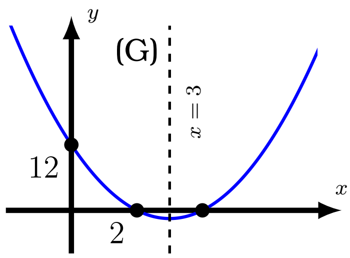


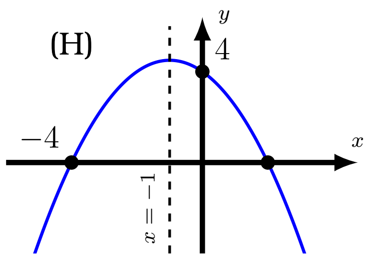




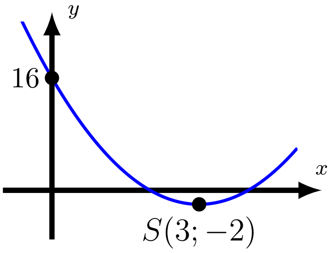








■ **Exemple 1.17 — trouver la forme canonique à partir de la représentation $\mathscr{P}$.**

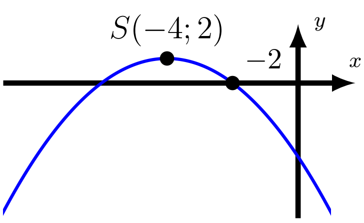


1. Sommet $S(3;-2)$, donc $\alpha = 3$ et $\beta = -2$.

   Pour tout x : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = a(x-3)^2 + (-2)$, avec $a > 0$.

   $A(0\,;16) \in \mathscr{P} \iff f(0) = 16 \iff a(0-3)^2 - 2 = 16 \iff 9a - 2 = 16.$

   $\therefore a = 2$ et f est définie par $f(x) = 2(x-3)^2 - 2$



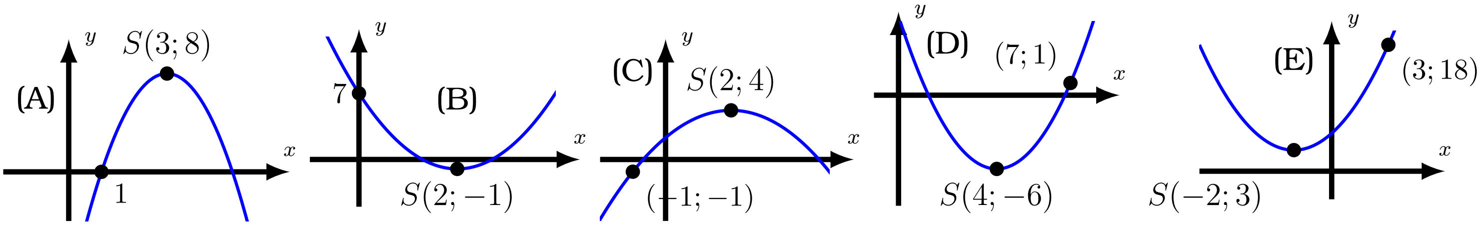
2. Sommet $S(-4;2)$, donc $\alpha = -4$ et $\beta = 2$.

   Pour tout x : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = a(x-(-4))^2 + 2$, avec $a < 0$.

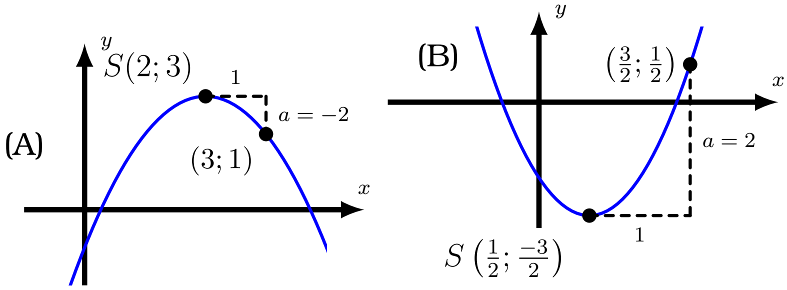
   $A(-2;0) \in \mathscr{P} \iff f(-2) = 0 \iff a(-2+4)^2 + 2 = 0 \iff 4a + 2 = 0$

   $\therefore a = -\frac{1}{2}$ et f est définie par $f(x) = -\frac{1}{2}(x+4)^2 + 2$

Exercice 39 Déterminer en justifiant les formes canoniques des fonctions quadratiques représentées ci-dessous. Pour chaque parabole, S est son sommet.



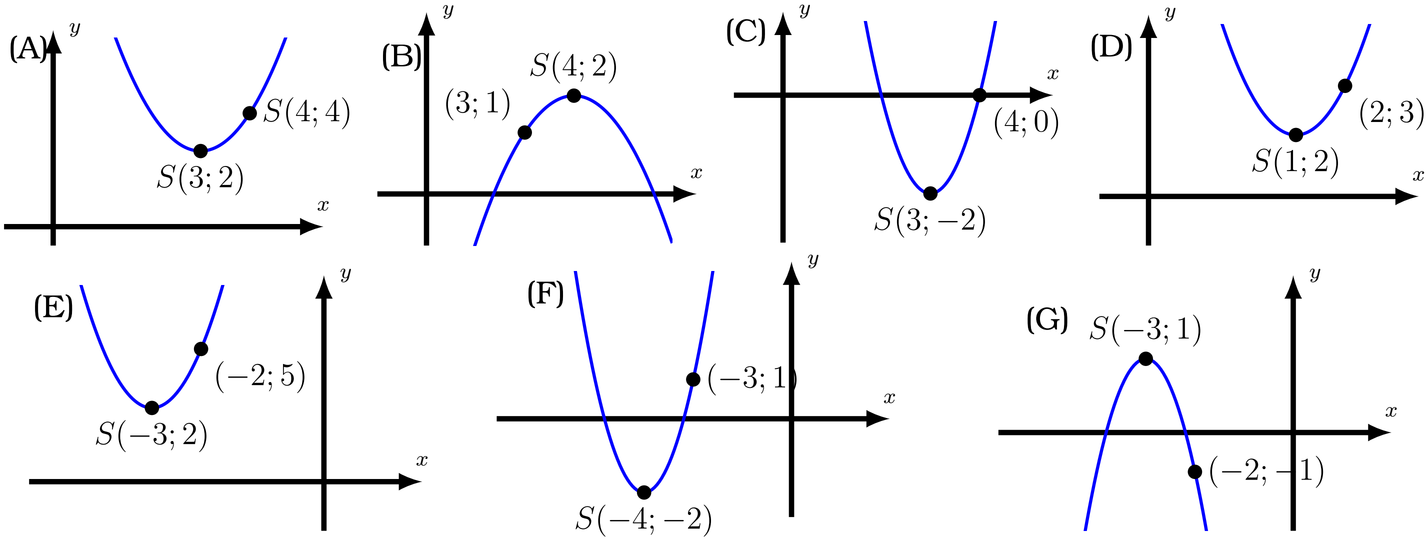
■ **Exemple 1.18** Dans certains cas, le coefficient a de la forme factorisée/réduite/factorisée peut être déterminé par lecture graphique :



(A) Pour tout x : $f(x)=-2(x-3)^2+3$.

(B) Pour tout x : $f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}$.

Exercice 40 Donner par lecture graphique la forme canonique des fonctions quadratiques représentées.



Exercice 41 — comuniquer. Associez chaque fonction donnée par son expression à sa représentation. Justifiez votre choix.

$f_1(x)=\ (x-1)(x-3)$

$f_2(x)=\ x^2+2x-3$

$f_3(x)=\ (x+1)^2+2$

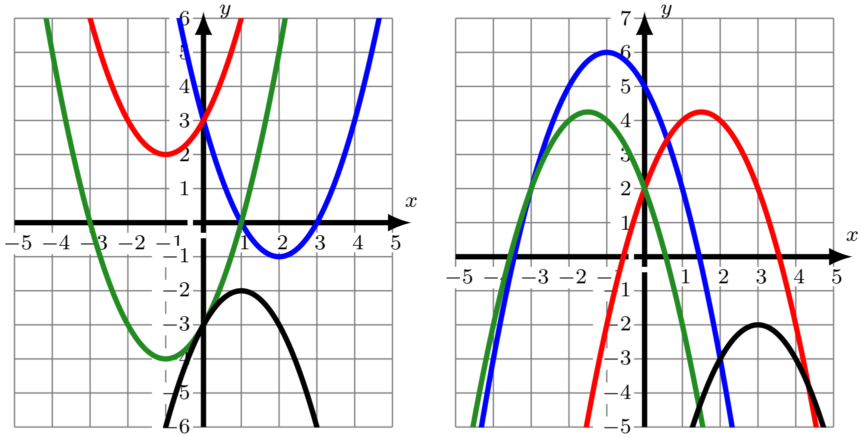
$f_4(x)=\ -x^2+2x-3$

$f_5(x)=\ -(x-1)(x+3)+2$

$f_6(x)=\ -x(x+3)+2$

$f_7(x)=\ -(x-3)^2-2$

$f_8(x)=\ -x^2+3x+2$



Forme réduite	Forme canonique	Forme factorisée
évaluer $f(k)$	extremums, sommet de $\mathscr{P}$	existe si $\Delta \geqslant 0$
formule quadratique pour résoudre $f(x)=0$	Pour tout $k \in \mathbb{R}$, racine carrée pour résoudre $f(x)=k$	résolution directe de $f(x)=0$

Exercice 42 — Grand classique. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2+4x-16$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x)=2(x+4)(x-2)$
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x)=2(x+1)^2-18$
3) Choisir la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :

a) Complétez le tableau de variation de f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	

b) Résoudre l'équation $f(x)=0$.

c) Calculez $f(0)$.

d) Quel est le minimum de f sur $\mathbb{R}$?

e) Résoudre l'équation $f(x)=-16$.

f) Résoudre l'inéquation $f(x)>0$.

Exercice 43 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+14x+15$ et sa représentation $\mathscr{P}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x)=(x+3)(3x+5)$.
2. Montrer par complétion au carré que $f(x)=3\left(x+\frac{7}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$
3. Choisir la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :

a) Quel est le sommet de la parabole $\mathscr{P}$.

b) Résoudre l'équation $f(x)=0$.

c) Calculer $f(\sqrt{2})$.

d) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x)=-1$?

e) Complétez le tableau de signe :

x	$-\infty$			$+\infty$
$f(x)$				

f) Résoudre l'équation $f(x)=15$.

Exercice 44 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^2+8x+3$ et sa représentation $\mathscr{P}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x)=(2x+1)(2x+3)$.
2. Montrer par complétion au carré que $f(x)=4(x+1)^2-1$
3. Choisir la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :

a) Quel est le sommet de $\mathscr{P}$?

b) Calculer $f(-\sqrt{2})$ et $f(0)$.

c) Montrer que pour tout x, $f(x) \geqslant -1$.

d) Résoudre l'inéquation $f(x)<0$.

e) Résoudre l'inéquation $f(x)<3$.

f) Résoudre l'équation $f(x)=9$.

■ **Exemple 1.19 — équation à paramètre.** $k \in \mathbb{R}$. Soit l'équation $kx^2 + (k+3)x - 1 = 0$ d'inconnue x.

1. On suppose $k \neq 0$, exprimer le discriminant de l'équation en fonction de k
2. Déterminer les valeurs de k pour les quelles l'équation admet (1) une racine double (2) deux racines distinces (3) aucune racine réelle.

Solution.

1. $\Delta = (k+3)^2 - 4(k)(-1) = k^2 + 6k + 9 + 4k = k^2 + 10k + 9 = (k+1)(k+9)$
2. (1) L'équation admet une racine double si $\Delta = 0$, donc $k = -1$ ou $k = -9$.

   (2) L'équation admet deux racines distinctes si $\Delta > 0$, donc $k < -9$ ou $k > -1$

   (3) L'équation n'a pas de racines réelles si $\Delta < 0$, donc $-9 < k < -1$.

■

Exercice 45 Déterminer les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles

1. l'équation $x^2 + 4x + m = 0$ d'inconnue x admet 2 solutions réelles distinctes.
2. l'équation $mx^2 + 3x + 2 = 0$ d'inconnue x n'a pas de solutions réelles.
3. l'équation $mx^2 - 3x + 1 = 0$ d'inconnue x a une solution réelle unique ($m \neq 0$).
4. l'expression $2x^2 - 3x + m + 1$ est factorisable.

Exercice 46 Déterminer les valeurs du paramètre $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles

1. l'équation $2x^2 + kx - k = 0$ admet de(s) solution(s) réelle(s).
2. l'équation $kx^2 - 2x + k = 0$ admet deux solutions réelles distinctes ($k \neq 0$).
3. l'équation $x^2 + (k+2)x + 4 = 0$ n'a pas de solutions réelles.
4. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 + (k-2)x + 2 \geqslant 0$.

Exercice 47 Soit $m \neq 0$. Exprimer en fonction de m les solutions de l'équation quadratique $mx^2 + (4m+1)x + 4m + 2 = 0$ d'inconnue x.

Exercice 48 L'équation $x^2 - \sqrt{2k+4}x + k = 0$ admet deux solutions réelles distinctes.

1. Déterminer les valeurs possibles de k
2. Simplifier $\sqrt{k^2 + 4k + 4}$ et $\sqrt{k^2 - 4k + 4}$.

Exercice 49 Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$ l'équation $x^2 - mx + \frac{1}{2}m^2 + m + \frac{3}{2} = 0$ d'inconnue x n'admet pas de solutions réelles.

Exercice 50 Soit l'équation $x^2 - 2mx + 4(m-1) = 0$ d'inconnue x.

1. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation admet de(s) racine(s) réelles.
2. Exprimer en fonction de m les solutions de l'équation.

Exercice 51 Soit $m \in \mathbb{R}$ tel que l'équation $x^2 - 2x - m = 0$ d'inconnue x n'a pas de solutions réelles. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2 + 2mx + m(m+1) = 0$.

■ **Exemple 1.20 — problèmes d'intersection et systèmes.** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole $\mathscr{P}\colon y = 2x^2 + 12x - 29$ et la droite $d\colon y = -8x + 19$

Le point $M(x;y)$ est intersection de $\mathscr{P}$ et d alors :

$$\begin{cases} y = -8x + 19 & \text{car } M(x;y) \in d \\ y = 2x^2 + 12x - 29 & \text{car } M(x;y) \in \mathscr{P} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -8x + 19 \\ -8x + 19 = 2x^2 + 12x - 29 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -8x + 19 \\ 0 = 2x^2 + 20x - 48 \end{cases}$$

$\Delta = (-20)^2 - 4(2)(-48) = 784 > 0$

deux valeurs possible pour x

$$\iff \begin{cases} y = -8x + 19 \\ x = 2 \text{ ou } x = -12 \end{cases}$$

$$\iff (x = 2; y = 3) \text{ ou } (x = -12; y = 115)$$

Exercice 52 Déterminer les coordonnées des points d'intersection de :

1. la parabole $\mathscr{P}\colon y = x^2 - 2x + 8$ et la droite $d\colon y = x + 6$
2. la parabole $\mathscr{P}\colon y = 2x^2 - 3x + 2$ et la droite $d\colon y = 3x - 2$
3. la parabole $\mathscr{P}\colon y = 3x^2 - 5x + 2$ et la droite $d\colon y = x - 1$
4. les paraboles $\mathscr{P}\colon y = x^2 - 3x + 4$ et $\mathscr{Q}\colon y = -x^2 + 4x - 1$

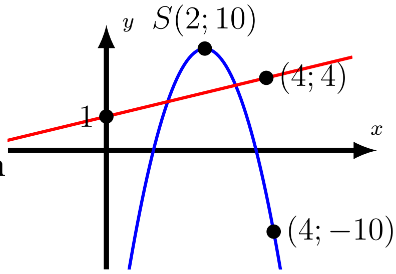
Exercice 53 Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la parabole $\mathscr{P}\colon y = 2x^2 - 3x - 7$ et la droite $d\colon y = x + m$ n'ont pas de points d'intersection.

Exercice 54 La parabole $\mathscr{P}\colon y = x^2 - 5x + 7$ et la droite $d\colon y = 3x + m$ ont un unique point commun. Déterminer les valeurs possibles de m.

Exercice 55 La parabole $\mathscr{P}\colon y = x^2 - 4x + 2$ et la droite $d\colon y = mx - 2$ ont un unique point commun. Déterminer les valeurs possibles de m.

Exercice 56 On a représenté dans le repère ci-contre, la parabole de sommet $S(2;10)$ passant par $R(4;-10)$ et la droite d.

1. Donner l'équation réduite de la droite d
2. Déterminer une équation (canonique) de la parabole $\mathscr{P}$.
3. Ecrire le système vérifié par les coordonnées des points d'intersection de d et $\mathscr{P}$ et le résoudre.



Exercice 57 — entrainement. Résoudre les systèmes suivants par substitution.

$$\begin{cases} y &= x + 1 \\ xy &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y &= 2x + 5 \\ xy &= 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 &= 17 \\ y &= x + 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y &= \dfrac{1}{x} \\ y &= -2x + 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 &= 13 \\ x + y &= 5 \end{cases}$$

Proposition 1.9 Les racines r_1 et r_2 de $f(x) = ax^2 + bx + c$ vérifient $r_1 + r_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $r_1r_2 = \dfrac{c}{a}$

Démonstration. $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2) = a(x^2 - r_1x - r_2x + r_1r_2) = ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2$ ■

■ **Exemple 1.21** Donner la somme et le produit des solutions de l'équation $25x^2 - 20x + 1 = 0$.

Solution. $r_1 + r_2 = \frac{-b}{a} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

$r_1r_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{25}$.

Vérification : $\Delta = (-20)^2 - 4(25)(1) = 300$.

$r_1 = \frac{20-\sqrt{300}}{50} = \frac{2-\sqrt{3}}{5}$ et $r_2 = \frac{2+\sqrt{3}}{5}$

$r_1 + r_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{5} + \frac{2+\sqrt{3}}{5} = \frac{4}{5}$ et $r_1r_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{5}\frac{2+\sqrt{3}}{5} = \frac{2^2-3}{25} = \frac{1}{25}$. ■

Exercice 58 Déterminer, si elles existent, la somme et le produit des racines réelles.

1) $3x^2 - 2x + 7 = 0$ | **2)** $x^2 + 11x - 13 = 0$ | **3)** $5x^2 - 6x - 14 = 0$

Exercice 59 Le produit des racines de l'équation $2x^2 + 8x - m^2 = 0$, d'inconnue x, est inférieur à 4. Déterminer les valeurs possibles du paramètre m.

Exercice 60 Déterminer m sachant que la somme des racines de l'équation quadratique $x^2 - (m + 4)x - 5 = 0$, d'inconnue x est 0.

■ **Exemple 1.22 — racine évidente.** Identifier une racine évidente, et déduire la forme factorisée.

$f(x) = 3x^2 + 10x + 8$

$f(-2) = 3(-2)^2 + 10(-2) + 8 = 0 \quad r_1 = -2$

$r_1r_2 = \frac{8}{3} \quad r_2 = \frac{-4}{3}$

$f(x) = 3(x + 2)(x + \frac{4}{3})$

$f(x) = 3x^2 + 14x + 8$

$f(-4) = 3(-4)^2 + 14(-4) + 8 = 0 \quad r_1 = -4$

$r_1r_2 = \frac{8}{3} \quad r_2 = \frac{-2}{3}$

$f(x) = 3(x + 4)(x + \frac{2}{3})$

Exercice 61 Factoriser les expressions suivantes en identifiant une racine évidente.

$f_1(x) = 2x^2 + 3x + 1$

$f_2(x) = 2x^2 - 3x - 2$

$f_3(x) = 2x^2 - 5x + 3$

$f_4(x) = 4x^2 + 5x + 1$

$f_5(x) = 6x^2 + 2x - 4$

Exercice 62 — communiquer. Soit $m > n > 0$, et l'équation $x^2 + 2mx + n^2 = 0$ d'inconnue x. Montrer que l'équation admet deux racines négatives.

Exercice 63 On cherche deux nombres x et y dont la somme vaut 6 et le produit vaut 4.

1. Écrire un système d'équations vérifié par x et y
2. Déduire une équation quadratique dont la somme des racines vaut 6 et le produit 4.
3. Déterminer x et y.

Exercice 64

1. Donner une équation quadratique dont la samme des racines est 40 et le produit 80.
2. Résoudre et déterminer les racines.

1.3 Problèmes

Pour simplifier des expressions de la forme $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ on peut chercher deux entiers m et n solution de $m+n=a$ et $mn=b$

■ **Exemple 1.23 — explications.** Pour simplifier l'expression $\sqrt{52+16\sqrt{3}}$ nous chercherons deux entiers m et n tel que : $52+16\sqrt{3} = 52+2\times 8\sqrt{3} = (\sqrt{m}+\sqrt{n})^2$

$$52+2\sqrt{192} = m+2\sqrt{mn}+n$$

Il **suffit** de trouver m et n vérifiant $\begin{cases} m+n=52 \\ mn=192 \end{cases}$, donc solutions de l'équation $x^2-52x+192=0$, $\therefore m=48$ et $n=4$:

$$52+16\sqrt{3} = (\sqrt{48}+\sqrt{4})^2 = (4\sqrt{3}+2)^2 \qquad \text{donc} \qquad \sqrt{52+16\sqrt{3}} = |4\sqrt{3}+2| = 4\sqrt{3}+2$$

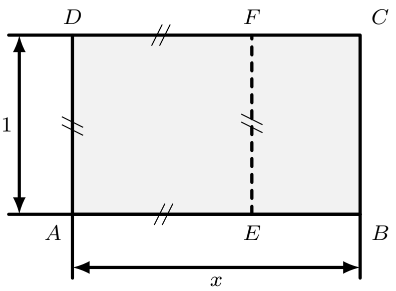
Exercice 65

1. En suivant la démarche précédente trouver m et n tel que $7-4\sqrt{3} = (\sqrt{m}-\sqrt{n})^2$.
2. Simplifier au maximum l'expression $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

Exercice 66

La somme du nombre x et de son inverse vaut $5{,}2$. Déterminer les valeurs possibles de x.

Exercice 67 $ABCD$ est un rectangle de largeur x et longueur 1. $AEFD$ est un carré. $ABCD$ est un *rectangle d'or* : le rectangle $EFCB$ est semblable à $ABCD$.



1. Montrer que x vérifie l'équation $\frac{x}{1} = \frac{a}{bx+c}$, ou a, b et c sont des entiers à déterminer.
2. Déterminer la solution admissible x. Cette valeur est le *nombre d'or*.

Exercice 68 — problème de l'enclos. Ayant trouvé 40 m de grillage dans son garage, M. LeProf a décidé de les utiliser pour construire un enclos rectangulaire pour ses poules. Afin d'obtenir un enclos plus grand, il utilise le mur du jardin qui formerait un côté, le grillage formant les trois autres côtés.

On note x la profondeur de l'enclos.

1. Montrer que l'aire de enclos est donnée par :
$$A(x) = x(40-2x)\text{m}^2$$
2. Déterminer les dimensions réalisables de l'enclos pour lesquelles l'aire de l'enclos est la plus grande.

1.4 Exercices : solutions et éléments de réponse

solution de l'exercice 1. ■

solution de l'exercice 2. ■

solution de l'exercice 3. ■

solution de l'exercice 4. $S_1 = \{0, 1\}$; $S_2 = \left\{0, \frac{4}{5}\right\}$; $S_3 = \left\{-\frac{2}{3}, 5\right\}$; $S_4 = \{-1\}$; $S_5 = \{2\}$; $S_6 = \{-2, 4\}$; ■

solution de l'exercice 5. $S_1 = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$; $S_2 = \{-1, 5\}$; $S_3 = \left\{\frac{1}{5}, 3\right\}$; $S_4 = \left\{\frac{5}{2}, 3\right\}$; $S_5 = \{1, 2\}$; $S_6 = \{\}$; ■

solution de l'exercice 6. L'expression $5x^2 - 4x - 1$ n'est pas factorisable par regroupement, et n'est pas une identité remarquable (car le terme constant $c = -1$ est négatif). ■

solution de l'exercice 7. $(E_1)\,(x+1)\,(x+5) = 0$ et $S_1 = \{-5, -1\}$; $(E_2)\,(x-3)\,(x-2) = 0$ et $S_2 = \{2, 3\}$; $(E_3)\,(x+2)\,(x+8) = 0$ et $S_3 = \{-8, -2\}$; $(E_4)\,(x-16)\,(x-1) = 0$ et $S_4 = \{1, 16\}$; $(E_5)\,(x+2)\,(x+4) = 0$ et $S_5 = \{-4, -2\}$; $(E_6)\,(x-4)\,(x-3) = 0$ et $S_6 = \{3, 4\}$; ■

solution de l'exercice 8. $(E_1)\,(x-15)\,(x+1) = 0$ et $S_1 = \{-1, 15\}$; $(E_2)\,(x-2)\,(x+3) = 0$ et $S_2 = \{-3, 2\}$; $(E_3)\,(x-7)\,(x+2) = 0$ et $S_3 = \{-2, 7\}$; $(E_4)\,(x-10)\,(x+4) = 0$ et $S_4 = \{-4, 10\}$; $(E_5)\,(x-4)\,(x+3) = 0$ et $S_5 = \{-3, 4\}$; $(E_6) x^2 - 5x - 15 = 0$ et $S_6 = \left\{\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{85}}{2}, \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{85}}{2}\right\}$; ■

solution de l'exercice 9. $(E_1)\,(x+2)\,(2x+3) = 0$ et $S_1 = \left\{-2, -\frac{3}{2}\right\}$; $(E_2)\,(x+5)\,(3x-1) = 0$ et $S_2 = \left\{-5, \frac{1}{3}\right\}$; $(E_3)\,(x+2)\,(3x+1) = 0$ et $S_3 = \left\{-2, -\frac{1}{3}\right\}$; $(E_4)\,(2x-1)\,(4x+3) = 0$ et $S_4 = \left\{-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right\}$; $(E_5)\,(2x+3)\,(3x-1) = 0$ et $S_5 = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right\}$; $(E_6)\,(2x-1)\,(3x+1) = 0$ et $S_6 = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$; ■

solution de l'exercice 10. $S_1 = \{-3, 3\}$; $S_2 = \{\}$; $S_3 = \left\{-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right\}$; $S_4 = \left\{-1 + \sqrt{5}, -\sqrt{5} - 1\right\}$; $S_5 = \left\{-\frac{1}{2} + 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right\}$; $S_6 = \{\}$; $S_7 = \left\{-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right\}$; $S_8 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right\}$; ■

solution de l'exercice 11. ■

solution de l'exercice 12. ■

solution de l'exercice 13. ■

solution de l'exercice 14. ■

solution de l'exercice 15. ■

solution de l'exercice 16. $S_1 = \{-1, 4\}$; $S_2 = \{\}$; $S_3 = \left\{-\sqrt{2}+2\sqrt{3}, \sqrt{2}+2\sqrt{3}\right\}$; $S_4 = \left\{-1, \frac{2}{5}\right\}$; $S_5 = \left\{-1, \frac{7}{5}\right\}$; $S_6 = \left\{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}\right\}$; ■

solution de l'exercice 17. $S_1 = \left\{3 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 3\right\}$; $S_2 = \{\}$; $S_3 = \{-1, 3\}$; $S_4 = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$; $S_5 = \{\}$; $S_6 = \{\}$; ■

solution de l'exercice 18. ■

solution de l'exercice 19. ■

solution de l'exercice 20. ■

solution de l'exercice 21. ■

solution de l'exercice 22. ■

solution de l'exercice 23. ■

solution de l'exercice 24. ■

solution de l'exercice 25. ■

solution de l'exercice 26. ■

solution de l'exercice 27. ■

solution de l'exercice 28. ■

solution de l'exercice 29. ■

solution de l'exercice 30. ■

solution de l'exercice 31. ■

solution de l'exercice 32. ■

solution de l'exercice 33. ■

solution de l'exercice 34. $\mathscr{S}_1 = \left[\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}, \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right]$; $\mathscr{S}_2 =]-\infty, \infty[$; $\mathscr{S}_3 = \left]\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}\right[$; $\mathscr{S}_4 = [-2, 0]$; $\mathscr{S}_5 = \left\{\frac{2}{3}\right\}$; $\mathscr{S}_6 = \left]-\infty, -\frac{5}{3}\right[\cup]8, \infty[$; $\mathscr{S}_7 =]-\infty, -3] \cup \left[\frac{2}{3}, \infty\right[$; $\mathscr{S}_8 = \left[1 - \sqrt{17}, 1 + \sqrt{17}\right]$; $\mathscr{S}_9 = \left]-\frac{\sqrt{22}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{22}}{2}\right[$; ■

solution de l'exercice 35. ■

solution de l'exercice 36. $\mathscr{S}_1 =]-\infty, -3]$; $\mathscr{S}_2 = \left]-\infty, -\frac{4}{5}\right[\cup \left]1, \frac{3}{2}\right[$; $\mathscr{S}_3 = \emptyset$; $\mathscr{S}_4 = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$; $\mathscr{S}_5 =]-2, -1[$; $\mathscr{S}_6 = \left[\frac{1}{4}, \infty\right[$; ■

solution de l'exercice 37. $\mathscr{S}_1 =]-\infty, -1] \cup \left]-\frac{1}{3}, \infty\right[$; $\mathscr{S}_2 = [1, 7[$; ■

solution de l'exercice 38. 1. $f_1(x) = 2(x - (1))(x - (2))$

2. $f_2(x) = \frac{2}{9}(x - (3))^2$
3. $f_3(x) = \frac{1}{2}(x - (0))(x - (-3))$
4. $f_4(x) = 3(x - (-3))(x - (-2))$
5. $f_5(x) = \frac{-1}{3}(x - (-1))(x - (-1))$
6. $f_6(x) = -(x - (3))(x - (5))$
7. $f_7(x) = \frac{2}{3}(x - (2))(x - (4))$
8. $f_8(x) = \frac{-1}{2}(x - (-4))(x - (2))$

■

solution de l'exercice 39. 1. $f_1(x) = -2(x - (3))^2 + 8$

2. $f_2(x) = 2(x - (2))^2 + (-1)$
3. $f_3(x) = \frac{-5}{9}(x - (2))^2 + (4)$
4. $f_4(x) = \frac{7}{9}(x - (4))^2 + (-6)$
5. $f_5(x) = \frac{3}{5}(x - (-2))^2 + (3)$

■

solution de l'exercice 40. 1. $f_1(x) = 1(x - (2))^2 + (3)$

2. $f_2(x) = -1(x - (2))^2 + (4)$
3. $f_3(x) = 2(x - (3))^2 + (-2)$
4. $f_4(x) = 1(x - (1))^2 + (2)$
5. $f_5(x) = 1(x - (-3))^2 + (2)$

6. $f_6(x) = 3(x - (-4))^2 + (-2)$
7. $f_7(x) = -2(x - (-3))^2 + (1)$

■

solution de l'exercice 41. ■

solution de l'exercice 42. ■

solution de l'exercice 43. ■

solution de l'exercice 44. ■

solution de l'exercice 45. 1. L'équation $m + x^2 + 4x = 0$ admet deux solutions réelles si $\Delta(m) = 16 - 4m \geqslant 0$, $\therefore m \in \left]-\infty, 4\right[$
2. L'équation $mx^2 + 3x + 2 = 0$ n'a pas de solutions réelles si $\Delta(m) = 16 - 4m < 0$, $\therefore m \in \left]\frac{9}{8}, \infty\right[$
3. L'équation $mx^2 - 3x + 1 = 0$ a une solution réelle unique si $\Delta(m) = 9 - 4m = 0$, $\therefore m \in \left\{\frac{9}{4}\right\}$
4. L'équation $m + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ est factorisable si $\Delta(m) = 1 - 8m \geqslant 0$, $\therefore m \in \left]-\infty, \frac{1}{8}\right]$

■

solution de l'exercice 46. 1. L'équation $kx - k + 2x^2 = 0$ admet des solutions réelles si $\Delta(k) = k^2 + 8k \geqslant 0$, $\therefore k \in \left]-\infty, -8\right] \cup \left[0, \infty\right[$
2. L'équation $kx^2 + k - 2x = 0$ admet deux solutions réelles si $\Delta(k) = 4 - 4k^2 > 0$, $\therefore k \in \left]-1, 1\right[$
3. L'équation $x^2 + x\,(k+2) + 4 = 0$ admet deux solutions réelles si $\Delta(k) = k^2 + 4k - 12 < 0$, $\therefore k \in \left]-6, 2\right[$
4. L'équation $2x^2 + x\,(k-2) + 2$ est toujours du même signe que $a = 2$ si $\Delta(k) = k^2 - 4k - 12 < 0$, $\therefore k \in (-2, 6)$

■

solution de l'exercice 47. Si $m \neq 0$ alors l'équation est quadratique.
Le discriminant est $\Delta = 1 > 0$. Il y a deux solutions $\mathscr{S} = \left\{-2, \frac{-2m-1}{m}\right\}$.
Si $m = 0$, l'équation devient : $x + 2 = 0$ admet une unique solution $x = -2$. ■

solution de l'exercice 48. L'équation a un sens si $2k + 4 \geqslant 0$: $k \geqslant -2$.
Le discriminant est $\Delta = 4 - 2k$. Si $k \in \{2\}$ alors $\Delta = 0$ et la solution est unique. Si $k \in [-2, 2[$ alors $\Delta > 0$ et l'équation admet deux solutions $S = \left\{-\frac{\sqrt{2}\sqrt{2-k}}{2} - \frac{\sqrt{2k+4}}{2}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{2-k}}{2} - \frac{\sqrt{2k+4}}{2}\right\}$. ■

solution de l'exercice 49.

Le discriminant est $\Delta(m) = -m^2 - 4m - 6$.

Son discriminant est $\delta = -8 < 0$, Donc $\Delta(m)$ est toujours du même signe que $-1 < 0$ et reste négative. D'ailleurs $\Delta(m) = -m^2 - 4m - 6 = -(m+2)^2 - 2$.

L'équation de départ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. ■

solution de l'exercice 50.

1. L'équation est quadratique. $\Delta(m) = 4m^2 - 16m + 16 = 4(m-2)^2 \geqslant 0$. L'équation admet une ou deux racines réelles.
2. Par la formule quadratique $r = \dfrac{4m \pm \sqrt{4(m-2)^2}}{8} = \dfrac{2m \pm |2(m-2)|}{2}$ donc $\mathscr{S} = \{2, 2m-2\}$

■

solution de l'exercice 51.

$-m + x^2 - 2x$ n'a pas de solutions réelles, son discriminant vérifie $\Delta(m) = 4m + 4 < 0 \therefore m < -1$. Le discriminant de l'équation $2mx + m(m+1) + x^2 = 0$ est $\delta(m) = -4m > 4$. Donc 2 solutions réelles. ■

solution de l'exercice 52.

1. $(x = 1; y = 7)$ et $(x = 2; y = 8)$
2. $(x = 1; y = 1)$ et $(x = 2; y = 4)$
3. $(x = 1; y = 0)$
4. $(x = 1; y = 2)$ et $(x = 5/2; y = 11/4)$

■

solution de l'exercice 53. On cherche m tel que l'équation $(-m + 2x^2 - 4x - 7 = 0$ n'a pas de solution. Donc $\Delta(m) = 8m + 72 < 0$. $\therefore m < -9$ ■

solution de l'exercice 54. On cherche m tel que l'équation $(-m + x^2 - 8x + 7 = 0$ a une solution réelle unique. Donc $\Delta(m) = 4m + 36 = 0$. $\therefore m \in \{-9\}$ ■

solution de l'exercice 55. On cherche m tel que l'équation $(-mx + x^2 - 4x + 4 = 0$ a une solution réelle unique. Donc $\Delta(m) = m^2 + 8m = 0$. $\therefore m \in \{-8, 0\}$ ■

solution de l'exercice 56. ■

solution de l'exercice 57. 1. $(x = -2; y = -1)$ et $(x = 1; y = 2)$

2. $(x = -4; y = -3)$ et $(x = 3/2; y = 8)$
3. $(x = -4; y = 1)$ et $(x = -1; y = 4)$
4. $(x = 1/2; y = 2)$ et $(x = 1; y = 1)$
5. $(x = 2; y = 3)$ et $(x = 3; y = 2)$

■

solution de l'exercice 58. ■

solution de l'exercice 59. ■

solution de l'exercice 60. ■

solution de l'exercice 61. ■

solution de l'exercice 62. ■

solution de l'exercice 63. ■

solution de l'exercice 64. ■

solution de l'exercice 65. ■

solution de l'exercice 66. ■

solution de l'exercice 67. ■

solution de l'exercice 68. ■