Chapitre 5

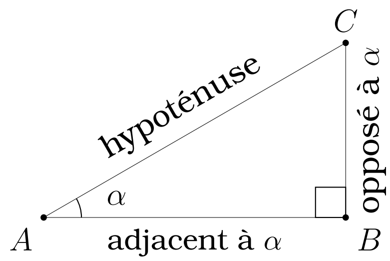
Trigonométrie des triangles rectangles

Table 5.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 5…

	Pour m’entraîner ✍️		
Je dois **connaître**…/**savoir faire**…	🪨	💎	💍
Sens des rapports trigonométriques			
Utiliser les rapports trigonométriques			
Calculs de longueurs dans un triangle rectangle à l’aide d’angles aigus	1, 2	3	
Calculs d’angles dans un triangle rectangle à l’aide des longueurs		4	
Calculs de longueurs et d’angles dans des triangles rectangles		12,13	
Problèmes		5 à 11	14

5.1 Les rapports trigonométriques

Définition 5.1



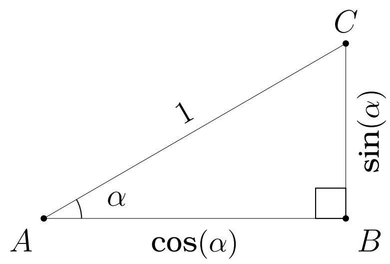
Dans le triangle ABC rectangle en B :

L'hypoténuse AC est le côté opposé à l'angle droit.

Le « côté opposé à $\widehat{BAC}$ » est le côté BC.

Le « côté adjacent à $\widehat{BAC}$ » est le côté de l'angle droit AB.

Définition 5.2 — triangle rectangle d'hypoténuse 1.



Soit le triangle ABC rectangle en B et d'hypoténuse $AC = 1$.

Si $\alpha = \widehat{BAC}$ est la mesure de l'angle aiguë $\widehat{BAC}$, on définit :

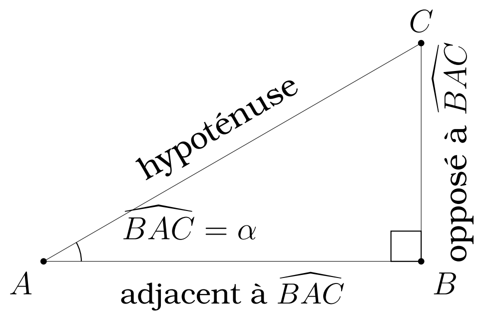
La longueur du côté adjacent s'écrit $\cos(\alpha)$.

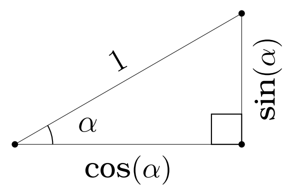
La longueur du côté opposé s'écrit $\sin(\alpha)$.

Le rapport $\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ s'écrit $\tan(\alpha)$.

Le mot trigonométrie vient du grec *trigonos* qui signifie triangulaire et *métron* qui signifie mesure. La trigonométrie étudie les relations entre les angles et les longueurs des côtés d'un triangle.

explications. Deux triangles rectangles qui partagent un même angle aiguë, ont 3 angles homologues égaux. Les triangles sont semblables !

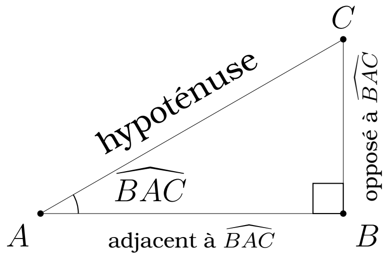




Les longueurs de côtés des deux triangles sont proportionnelles. On a l'égalité des rapports :

$$\frac{1}{\qquad\qquad} = \frac{\cos(\alpha)}{\qquad\qquad} = \frac{\sin(\alpha)}{\qquad\qquad}$$

Définition 5.3 — Rapports trigonométriques.



Dans le triangle ABC rectangle en B :

le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$:

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{BAC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC} \leqslant 1$$

le sinus de l'angle $\widehat{BAC}$:

$$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{BAC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC} \leqslant 1$$

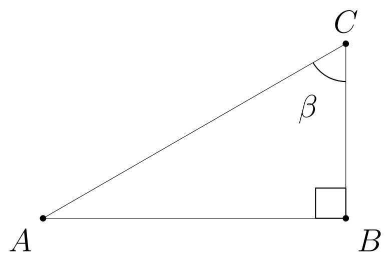
la tangente de l'angle $\widehat{BAC}$:

$$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{BAC}}{\text{côté adjacent à } \widehat{BAC}} = \frac{BC}{AB}$$

Pour mémoriser ces rapports on utilise le moyen mnémotechnique « **CAHSOHTOA** » (Casse-toi !).

R cos, sin et tan sont des rapports trigonométriques d'un angle.

Par exemple si on choisit $\beta = \widehat{BCA}$, alors :

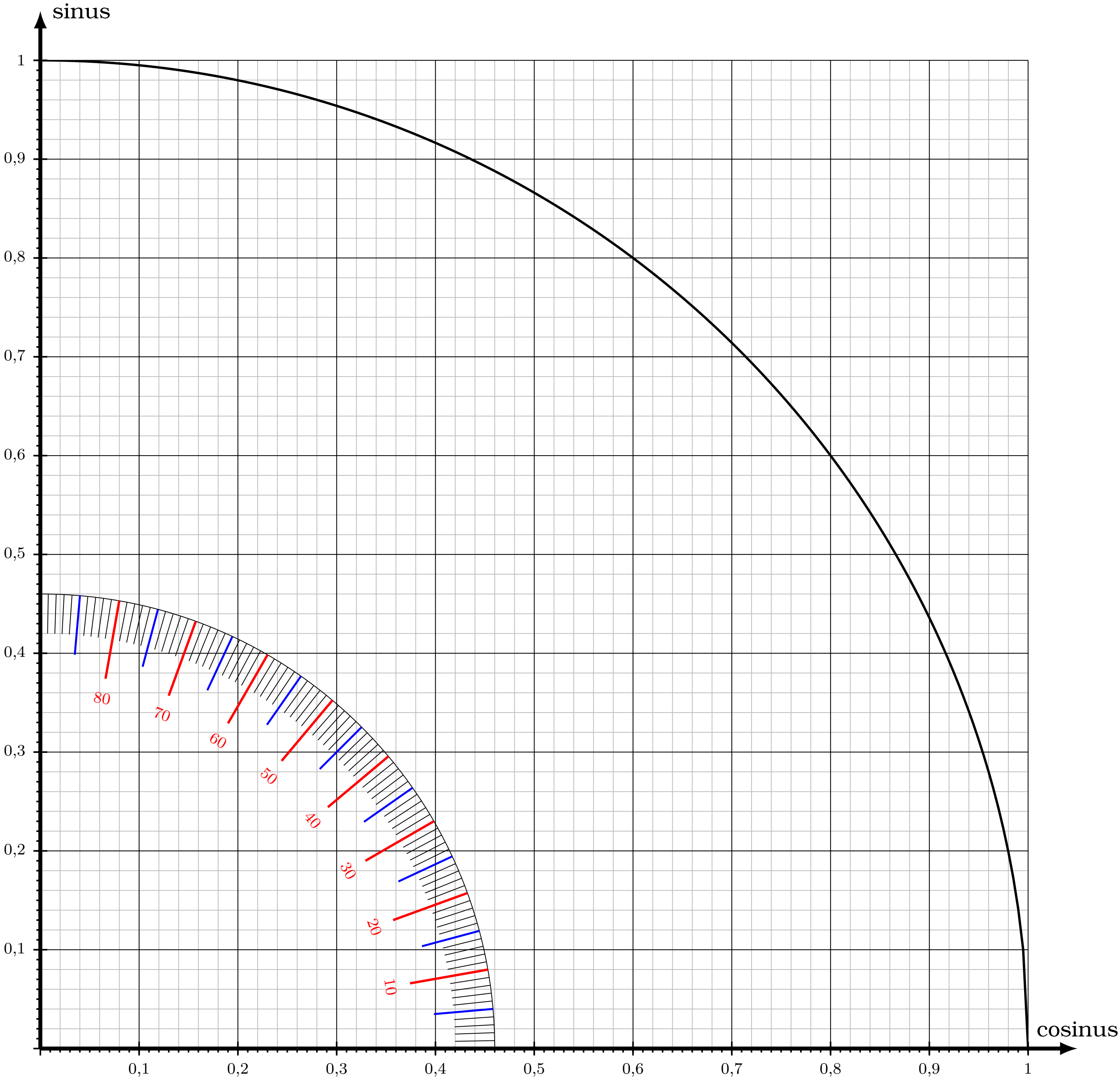


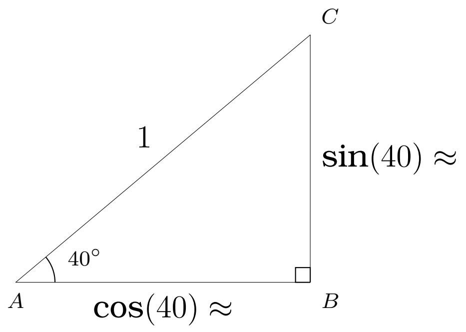
$\cos(\beta) =$

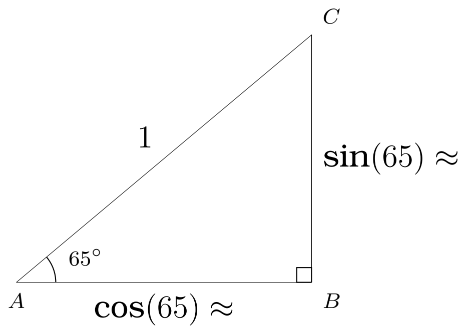
$\sin(\beta) =$

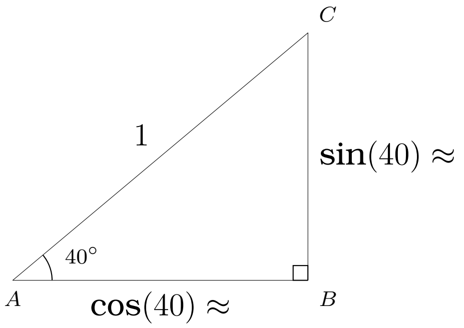
$\tan(\beta) =$

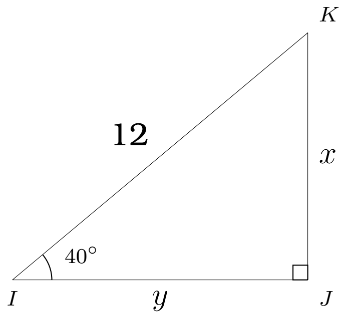
5.1.1 Activité : le quart de cercle trigonométrique









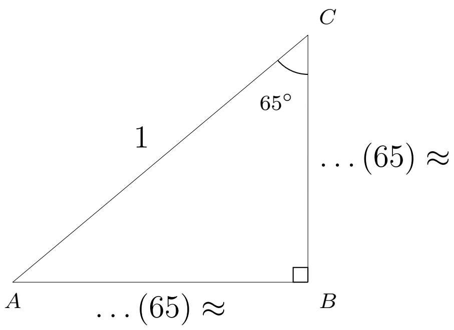


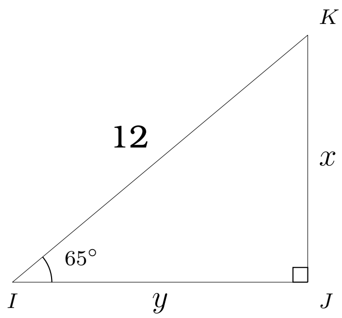
Les triangles ABC et IJK ont 3 paires d'angles homologues égaux.

Les triangles ABC et IJK sont semblables.

Les longueurs des côtés sont ....

On a l'égalité des raports : $\dfrac{1}{} = \dfrac{\cos(40)}{} = \dfrac{\sin(40)}{}$.



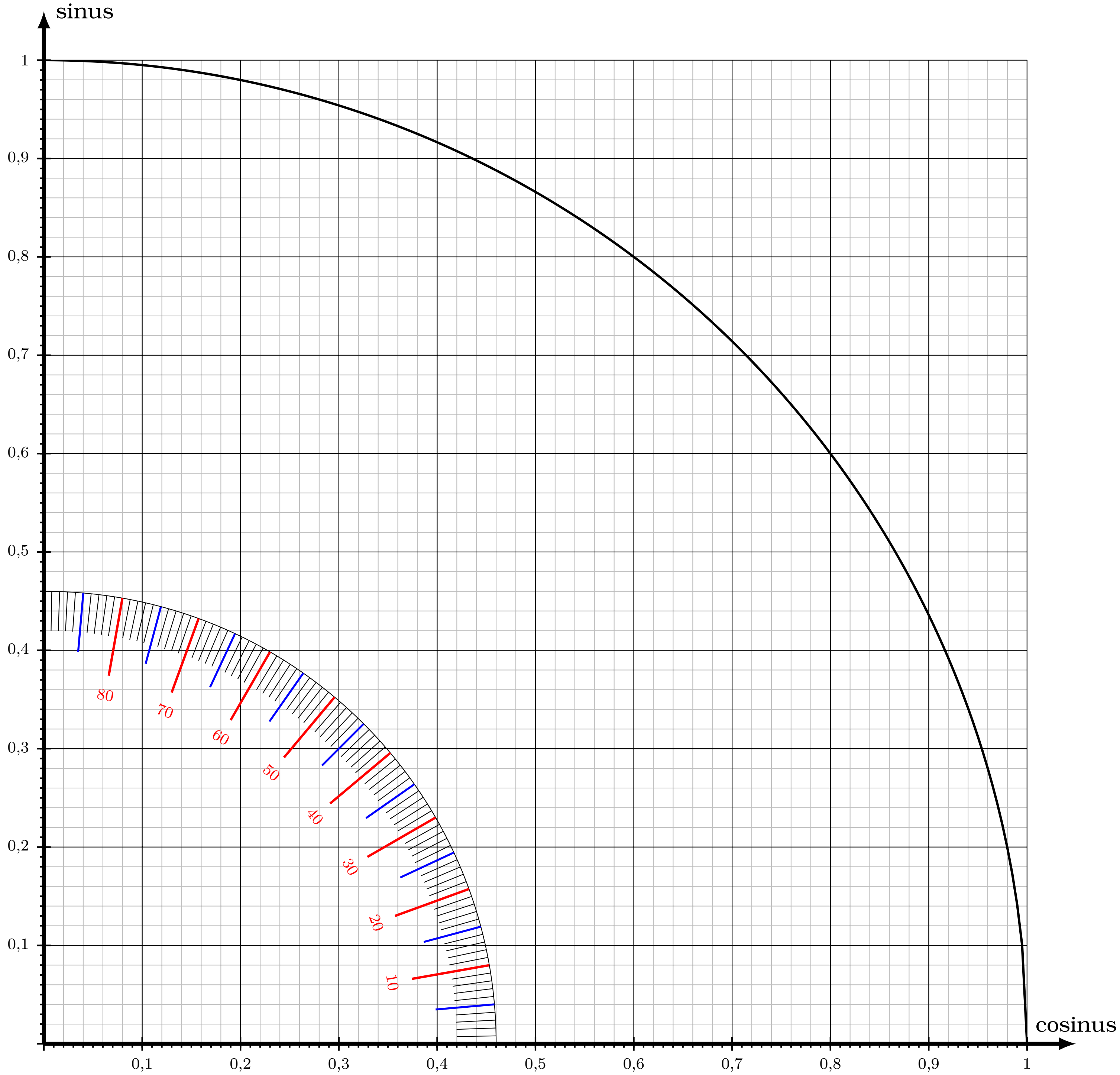


Les triangles ABC et IJK ont 3 paires d'angles homologues égaux.

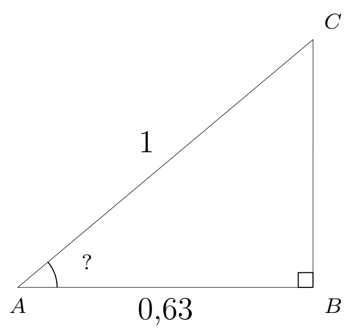
Les triangles ABC et IJK sont semblables.

Les longueurs des côtés sont ....

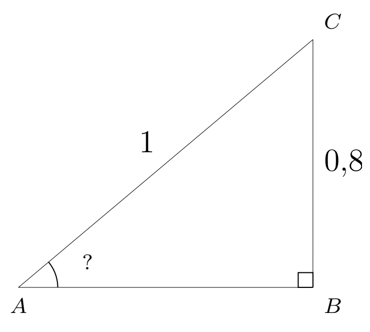
On a l'égalité des raports : $\dfrac{1}{} = \dfrac{\cos(65)}{} = \dfrac{\sin(65)}{}$.



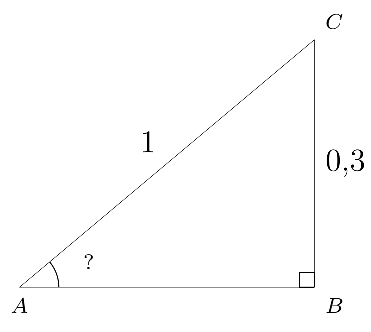
sinus
cosinus
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
80
70
60
50
40
30
20
10



C
1
?
A
0,63
B

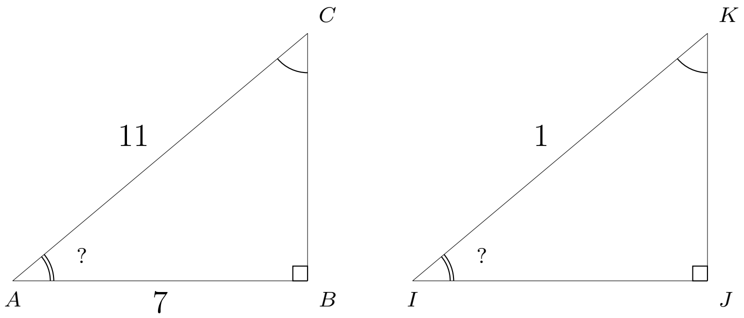


C
1
0,8
?
A
B



C
1
0,3
?
A
B

■ **Exemple 5.1** Les triangles ABC et IJK sont semblables, déterminer la mesure de $\widehat{BAC}$.



Les longueurs des côtés sont ....

On a : $\dfrac{IJ}{} = \dfrac{IK}{}$.

$\dfrac{IJ}{} = \dfrac{1}{}$

$IJ =$

L'angle $\widehat{JIK} \approx$ ....

L'angle homologue à $\widehat{JIK}$ est $\widehat{\dots\dots\dots} =$.

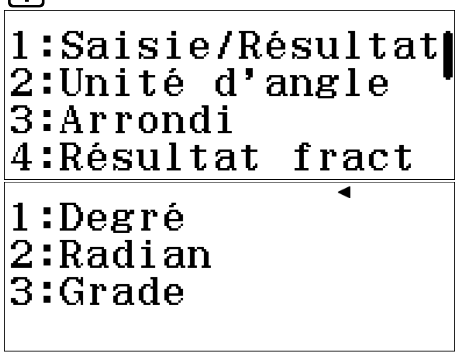
R Aujourd'hui, la calculatrice dispose d'algorithmes qui donnent la correspondance entre mesure d'un angle et ses rapports trigonométriques :

- Si je connais la mesure α d'un angle aigu alors je peux calculer une valeur (approchée le plus souvent) de $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ à l'aide les touches sin cos tan.
- Si je connais la valeur de l'UN des rapports trigonométrique $\cos(\alpha)$, ou $\sin(\alpha)$ ou $\tan(\alpha)$ alors je peux calculer une valeur (approchée le plus souvent) de l'angle **aigu** à l'aide des touches (Arcsin) (Arccos) (Arctan) .

■ **Exemple 5.2** À l'aide de la calculatrice complète le tableau suivant

Rapport trigonométrique (au centième près)	**Mesure de l'angle aigu** (au dixième près)
$\cos(\dots) \approx$	$a = 25°$
$\cos(\dots) \approx$	$a = 75°$
$\sin(\dots) \approx$	$a = 35°$
$\sin(\dots) \approx$	$a = 85°$
$\cos(a) = 0.5$	$a \approx$
$\sin(a) = 0.3$	$a \approx$
$\cos(a) = 1.75$	$a \approx$
$\tan(a) =$	$a = 45°$
$\tan(a) = 0.5$	$a \approx$
$\tan(a) = 1.75$	$a \approx$

Régler la calculatrice pour que les mesures des angles soient en degrés : SECONDE MENU 2 puis 1



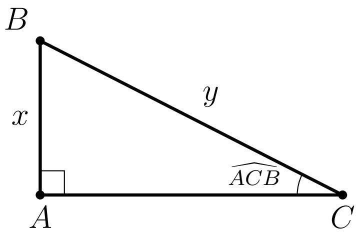
5.2 Exercices

Exercice 1 Compléter le tableau à l'aide de la calculatrice. Arrondir les mesure des angles au **dixième** près, et les rapports trigonométriques au **centième**.

α	56°			45°				30°	60°
$\cos(\alpha)$			1,21						
$\sin(\alpha)$		0,76				0,15			
$\tan(\alpha)$					15%		$\sqrt{3}$		

■ **Exemple 5.3** — http://bref.jeduque.net/n38wvx.

Écrire pour chaque triangle le rapport trigonométrique qui relie les grandeurs indiquées.

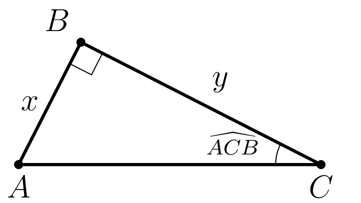


$x =$ côté **opposé** à $\widehat{ACB}$

$y =$ Hypoténuse

CAH**SOH**TOA

$\sin(\widehat{ACB}) = \dfrac{AB}{BC}$

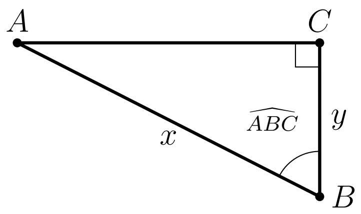


$x =$ côté **opposé** à $\widehat{ACB}$

$y =$ côté **adjacent** à $\widehat{ACB}$

CAHSOH**TOA**

$\tan(\widehat{ACB}) = \dfrac{AB}{BC}$



$x =$ hypoténuse

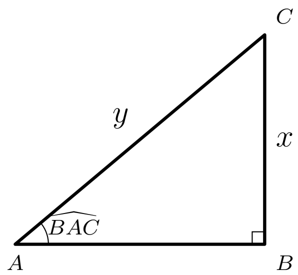
$y =$ côté **adjacent** à $\widehat{ABC}$

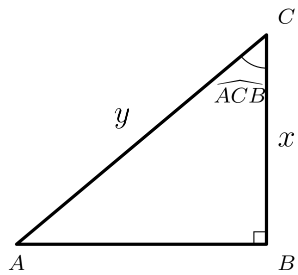
CAHSOHTOA

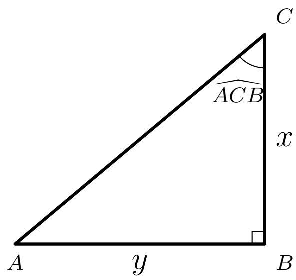
$\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{BC}{AB}$

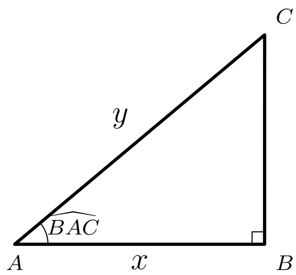
Exercice 2

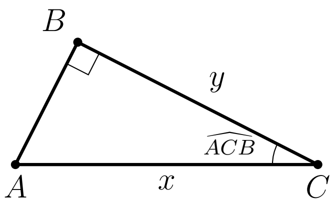
Écrire pour chaque triangle le rapport trigonométrique qui relie les grandeurs indiquées.

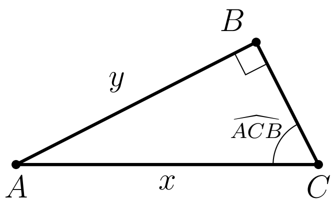


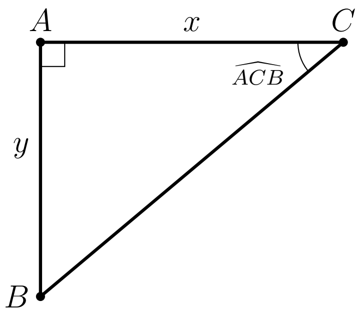


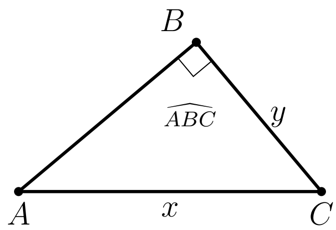






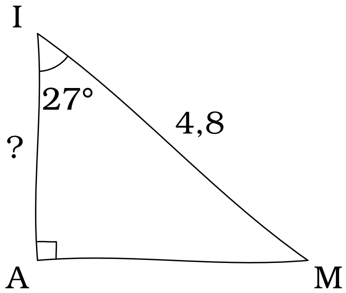






■ **Exemple 5.4 — Calculer une longueur manquante connaissant la mesure d'un angle aiguë et la longueur d'un côté d'un triangle rectangle.**

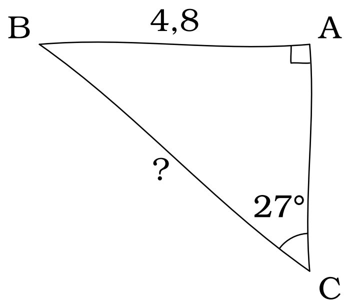
La figure est donnée à titre indicatif.



Dans le triangle IAM, rectangle en A, on a :

$$\cos(\widehat{AIM}) = \frac{IA}{IM}$$
$$\cos(27°) = \frac{IA}{4{,}8}$$
$$4{,}8 \times \cos(27°) = IA$$
$$4{,}28 \text{ cm} \approx IA$$

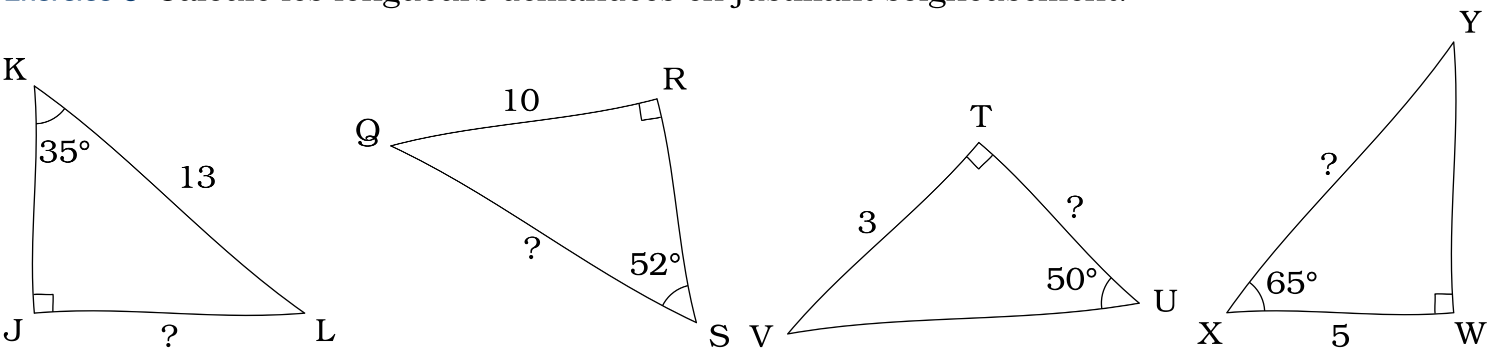
La figure est donnée à titre indicatif.



Dans le triangle CAB, rectangle en A, on a :

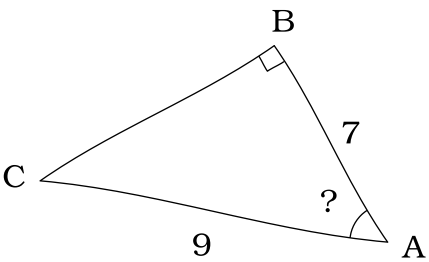
$$\sin(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{CB}$$
$$\sin(27°) = \frac{4{,}8}{CB}$$
$$CB = \frac{4{,}8}{\sin(27°)}$$
$$CB \approx 10{,}57 \text{ cm}$$

Exercice 3 Calcule les longueurs demandées en justifiant soigneusement.



■ **Exemple 5.5 — Calculer un angle aiguë connaissant les longueurs de 2 côtés d'un triangle rectangle.**

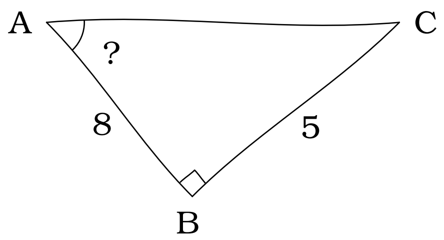
La figure est donnée à titre indicatif.



Dans le triangle ABC, rectangle en B, on a :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC}$$
$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{7}{9}$$
$$\widehat{BAC} \approx 39°$$

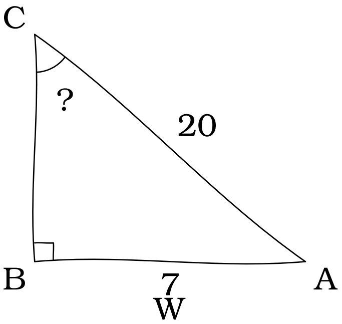
La figure est donnée à titre indicatif.

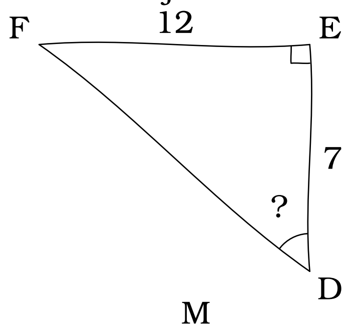


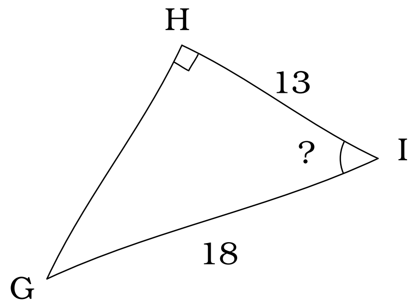
Dans le triangle ABC, rectangle en B, on a :

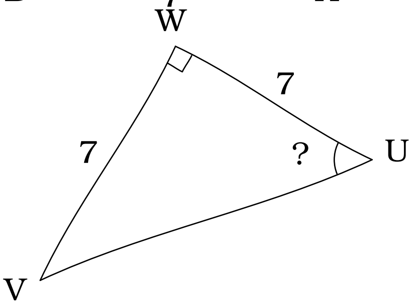
$$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB}$$
$$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{5}{8}$$
$$\widehat{BAC} \approx 32°$$

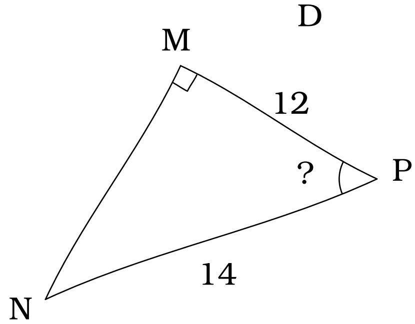
Exercice 4 Calcule les angles demandés en justifiant soigneusement.

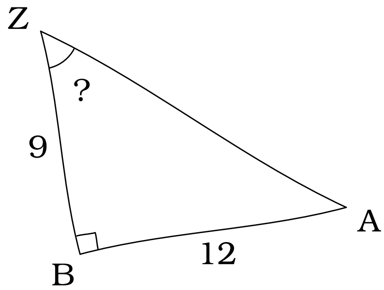




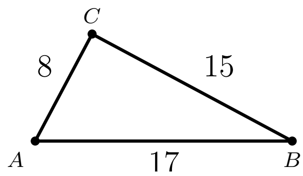






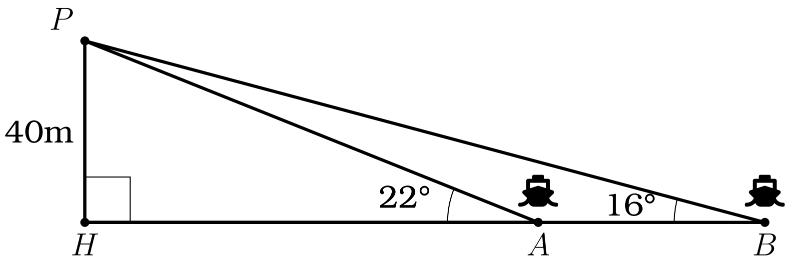


Exercice 5 Soit le triangle ABC ci-dessous :



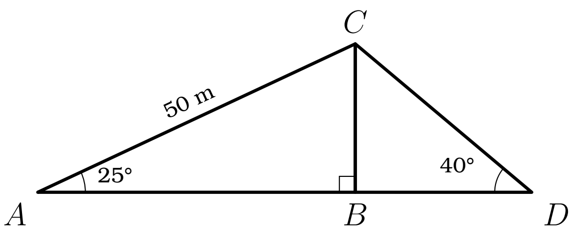
1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.
2. Calculer tous les rapports trigonométriques des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$.
3. Calculer la mesure de chacun des angles de ce triangle au degré près.

Exercice 6 Calculer la distance AB qui sépare les deux bateaux.

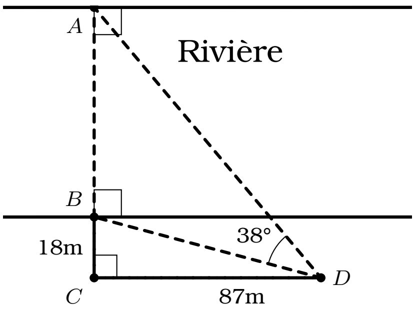


Exercice 7 Calculer la longueur AD arrondie au centième près. Montrer les calculs.

Indication On pourra commencer par calculer AB et BC.



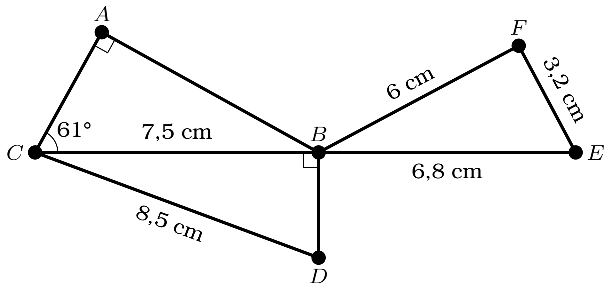
Exercice 8



Dukat se trouve sur la rive droite d'un fleuve. Il souhaite calculer sa largeur et a pris diverses mesures : $BC = 18$m, $CD = 87$m, $\widehat{ADB} = 38°$.

Calculer la largeur AB de la rivière au centimètre près.

Exercice 9 — Brevet. Réunion, 2018. *environ 10 min*



La figure ci-dessous n'est pas représentée en vraie grandeur.

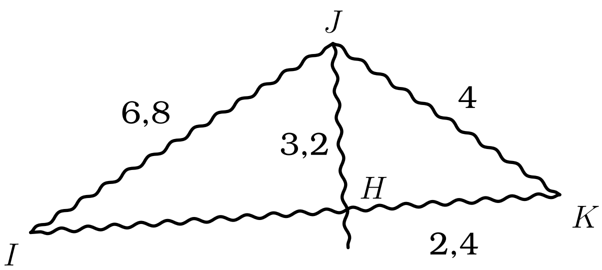
Les points B, C et E sont alignés.

Le triangle ABC est rectangle en A.

Le triangle BDC est rectangle en B.

1. Montrer que la longueur BD est égale à 4cm.
2. Montrer que les triangles CBD et BFE sont semblables.
3. Sophie affirme que l'angle $\widehat{BFE}$ est un angle droit. A-t-elle raison ?
4. Max affirme que l'angle $\widehat{ACD}$ est un angle droite. A-t-il raison ?

Exercice 10 — Brevet. Polynésie, 2015. *environ 25 min*



On considère la figure ci-contre dessinée à main levée.

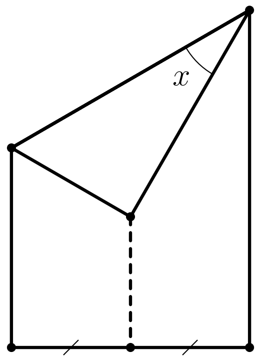
L'unité utilisée est le centimètre.

Les points I, H et K sont alignés.

1. Construire la figure ci-dessus en vraie grandeur.
2. Démontrer que les droites (IK) et (JH) sont perpendiculaires.
3. Démontrer que $IH = 6$ cm.
4. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{\text{HJK}}$, arrondie au degré.
5. La parallèle à (IJ) passant par K coupe (JH) en L. Compléter la figure.
6. Expliquer pourquoi $LK = 0,4 \times IJ$.

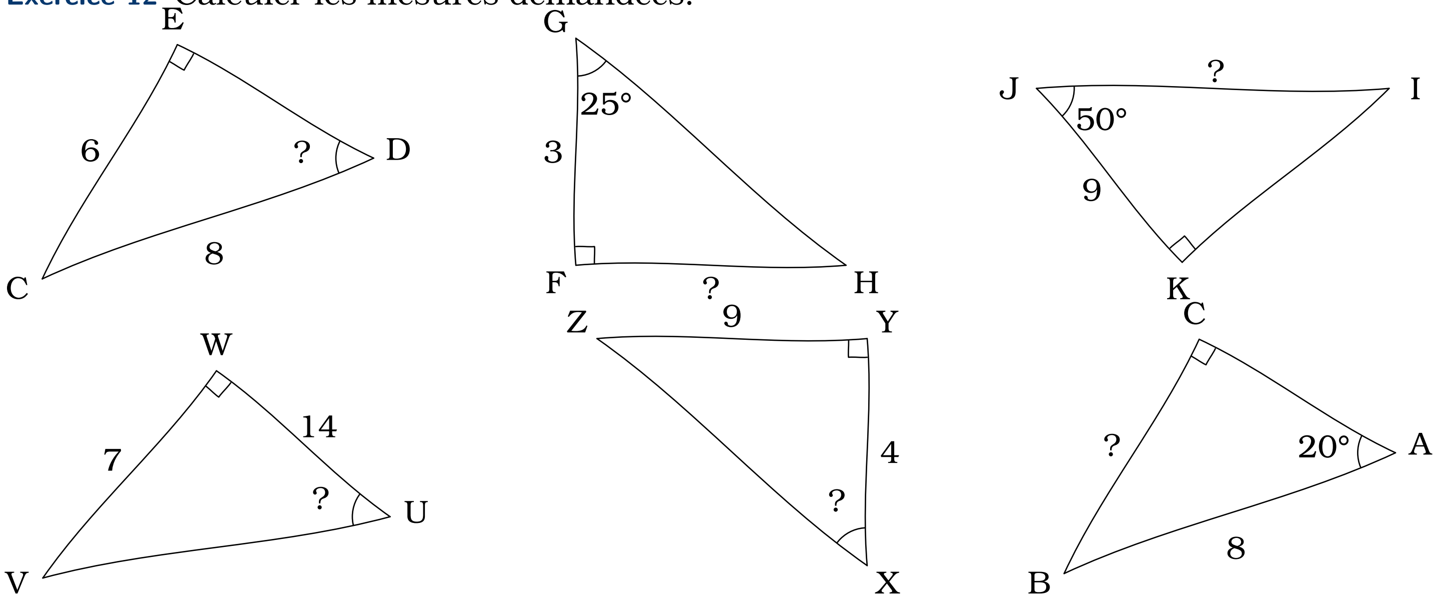
Exercice 11 Les dimensions d'une feuille A4 sont de $210\text{mm} \times 297\text{mm}$. On plie une feuille A4 dans le sens de la longueur (pointillés) puis on rabat un coin sur la marque comme sur la figure ci-dessous.

1. Que vaut l'angle x ? Justifier le par le calcul.
2. Le résultat reste-t-il toujours vrai si la feuille n'est pas au format A4 ?

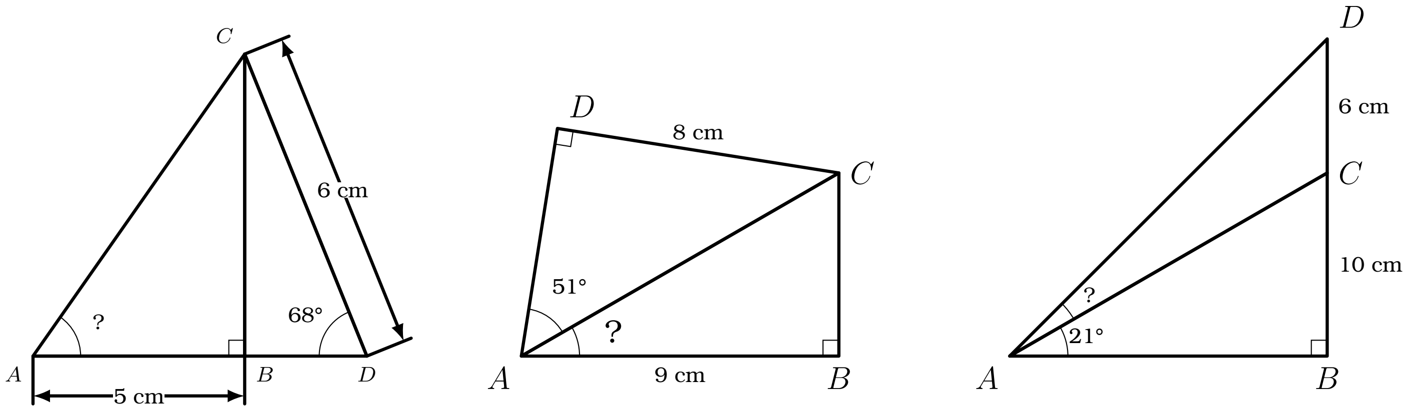


5.3 AP Trigonométrie

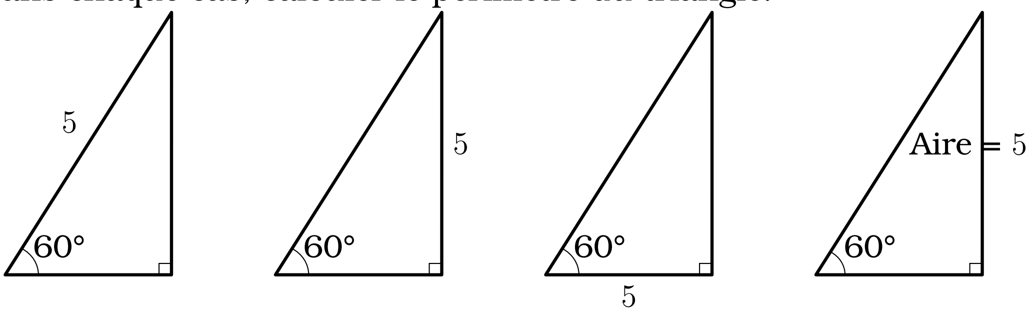
Exercice 12 Calculer les mesures demandées.



Exercice 13 Calculer la valeur demandée.



Exercice 14 Dans chaque cas, calculer le périmètre du triangle.



5.4 Exercices : solutions et éléments de réponse

Il faut toujours vérifier que les calculs de rapports trigonométriques se font dans un triangle rectangle.

Pour les premiers exemples d'illustrations, la figure contient un unique triangle rectangle.

On vérifie enfin la cohérence des résultats : l'hypoténuse est le plus grand coté d'un triangle rectangle.

solution de l'exercice 3.

Dans le triangle KJL, rectangle en J, on a :

$$\begin{aligned}\sin(\widehat{JKL}) &= \frac{JL}{KL}\\ \sin(35°) &= \frac{JL}{13}\\ 13\times\sin(35°) &= JL\\ 7{,}46\text{ cm} &\approx JL\end{aligned}$$

La longueur JL mesure environ 7.46.

Dans le triangle SRQ, rectangle en R, on a :

$$\begin{aligned}\sin(\widehat{RSQ}) &= \frac{RQ}{SQ}\\ \sin(52°) &= \frac{10}{SQ}\\ SQ &= \frac{10}{\sin(52°)}\\ SQ &\approx 12{,}69\text{ cm}\end{aligned}$$

La longueur QS mesure environ 12.69.

Dans le triangle UTV, rectangle en T, on a :

$$\begin{aligned}\tan(\widehat{TUV}) &= \frac{TV}{UT}\\ \tan(50°) &= \frac{3}{UT}\\ UT &= \frac{3}{\tan(50°)}\\ UT &\approx 2{,}52\text{ cm}\end{aligned}$$

La longueur TU mesure environ 2.52.

Dans le triangle XWY, rectangle en W, on a :

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{WXY}) &= \frac{XW}{XY}\\ \cos(65°) &= \frac{5}{XY}\\ XY &= \frac{5}{\cos(65°)}\\ XY &\approx 11{,}83\text{ cm}\end{aligned}$$

La longueur XY mesure environ 11.83.

■

solution de l'exercice 4.

Dans le triangle CBA, rectangle en B, on a :

$$\begin{aligned}\sin(\widehat{BCA}) &= \frac{BA}{CA}\\ \sin(\widehat{BCA}) &= \frac{7}{20}\\ \widehat{BCA} &\approx 20^\circ\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{ACB}$ mesure environ 20.49.

Dans le triangle DEF, rectangle en E, on a :

$$\begin{aligned}\tan(\widehat{EDF}) &= \frac{EF}{DE}\\ \tan(\widehat{EDF}) &= \frac{12}{7}\\ \widehat{EDF} &\approx 60^\circ\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{EDF}$ mesure environ 60.

Dans le triangle IHG, rectangle en H, on a :

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{HIG}) &= \frac{IH}{IG}\\ \cos(\widehat{HIG}) &= \frac{13}{18}\\ \widehat{HIG} &\approx 44^\circ\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{HIG}$ mesure environ 43.76.

Dans le triangle UWV, rectangle en W, on a :

$$\begin{aligned}\tan(\widehat{WUV}) &= \frac{WV}{UW}\\ \tan(\widehat{WUV}) &= \frac{7}{7}\\ \widehat{WUV} &= 45^\circ\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{WUV}$ mesure environ 45.

Dans le triangle PMN, rectangle en M, on a :

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{MPN}) &= \frac{PM}{PN}\\ \cos(\widehat{MPN}) &= \frac{12}{14}\\ \widehat{MPN} &\approx 31^\circ\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{MPN}$ mesure environ 31.

Dans le triangle ZBA, rectangle en B, on a :

$$\begin{aligned}\tan(\widehat{BZA}) &= \frac{BA}{ZB}\\ \tan(\widehat{BZA}) &= \frac{12}{9}\\ \widehat{BZA} &\approx 53^\circ\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{ZBA}$ mesure environ 53.

■

solution de l'exercice 9.

a) Dans le triangle CBD rectangle en B, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$
\begin{aligned}
CD^2 &= CB^2 + BD^2 \\
8{,}5^2 &= CB^2 + 7{,}5^2 \\
72{,}25 &= CB^2 + 56{,}25 \\
CB^2 &= 72{,}25 - 56{,}25 \\
CB^2 &= 16 \\
CB &= \sqrt{16} \\
CB &= 4 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\frac{BE}{CD} &= \frac{6.8}{8.5} = \frac{4}{5} \\
\frac{BF}{BC} &= \frac{6}{7.5} = \frac{4}{5} \\
\frac{EF}{BD} &= \frac{3.2}{4} = \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

On a $\frac{BE}{CD} = \frac{BF}{BC} = \frac{EF}{BD}$. Les longueurs des côtés des triangles CBD et EFB sont proportionnelles. Les triangles sont semblables.

c) Les triangles étant semblables, ils ont des angles homologues égaux, en particulier $\widehat{CBD} = \widehat{BFE} = 90°$. Sophie a raison.

d) Dans le triangle CBD, rectangle en B, on a :

$$
\begin{aligned}
\cos(\widehat{BCD}) &= \frac{CB}{CD} \\
\cos(\widehat{BCD}) &= \frac{7{,}5}{8{,}5} \\
\widehat{BCD} &\approx 28°
\end{aligned}
$$

$\widehat{ACD} \neq 90°$, Max a tord.

■

solution de l'exercice 12 de l'AP.

Dans le triangle DEC, rectangle en E, on a :

$$\sin(\widehat{EDC}) = \frac{EC}{DC}$$
$$\sin(\widehat{EDC}) = \frac{6}{8}$$
$$\widehat{EDC} \approx 49°$$

L'angle $\widehat{CDE}$ mesure environ 48.59.

Dans le triangle GFH, rectangle en F, on a :

$$\tan(\widehat{FGH}) = \frac{FH}{GF}$$
$$\tan(25°) = \frac{FH}{3}$$
$$3 \times \tan(25°) = FH$$
$$1{,}4 \text{ cm} \approx FH$$

La longueur HF mesure environ 1.4.

Dans le triangle JKI, rectangle en K, on a :

$$\cos(\widehat{KJI}) = \frac{JK}{JI}$$
$$\cos(50°) = \frac{9}{JI}$$
$$JI = \frac{9}{\cos(50°)}$$
$$JI \approx 14 \text{ cm}$$

La longueur IJ mesure environ 14.

Dans le triangle UWV, rectangle en W, on a :

$$\tan(\widehat{WUV}) = \frac{WV}{UW}$$
$$\tan(\widehat{WUV}) = \frac{7}{14}$$
$$\widehat{WUV} \approx 27°$$

L'angle $\widehat{WUV}$ mesure environ 27.

Dans le triangle XYZ, rectangle en Y, on a :

$$\tan(\widehat{YXZ}) = \frac{YZ}{XY}$$
$$\tan(\widehat{YXZ}) = \frac{9}{4}$$
$$\widehat{YXZ} \approx 66°$$

L'angle $\widehat{YXZ}$ mesure environ 66.

Dans le triangle ACB, rectangle en C, on a :

$$\sin(\widehat{CAB}) = \frac{CB}{AB}$$
$$\sin(20°) = \frac{CB}{8}$$
$$8 \times \sin(20°) = CB$$
$$2{,}74 \text{ cm} \approx CB$$

La longueur CB mesure environ 2.74.

■

solution de l'exercice 13 de l'AP.

figure 1 Dans le triangle DBC, rectangle en B, on a :

$$\sin(\widehat{BDC}) = \frac{BC}{DC}$$
$$\sin(68°) = \frac{BC}{6}$$
$$6 \times \sin(68°) = BC$$
$$5{,}56 \text{ cm} \approx BC$$

La longueur BC mesure environ 5.56. Dans le triangle ABC, rectangle en B, on a :

$$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB}$$
$$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{5{,}56}{5}$$
$$\widehat{BAC} \approx 48°$$

L'angle $\widehat{BAC}$ mesure environ 48.

figure 2 Dans le triangle ADC, rectangle en D, on a :

$$\sin(\widehat{DAC}) = \frac{DC}{AC}$$
$$\sin(51°) = \frac{8}{AC}$$
$$AC = \frac{8}{\sin(51°)}$$
$$AC \approx 10{,}29 \text{ cm}$$

La longueur AC mesure environ 10.29. Dans le triangle ABC, rectangle en B, on a :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC}$$
$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{9}{10{,}29}$$
$$\widehat{BAC} \approx 29°$$

L'angle $\widehat{BAC}$ mesure environ 29.

figure 3 Dans le triangle ABC, rectangle en B, on a :

$$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB}$$
$$\tan(21°) = \frac{10}{AB}$$
$$AB = \frac{10}{\tan(21°)}$$
$$AB \approx 26{,}05 \text{ cm}$$

La longueur AB mesure environ 26.05.

Dans le triangle ABD, rectangle en B, on a :

$$\tan(\widehat{BAD}) = \frac{BD}{AB}$$
$$\tan(\widehat{BAD}) = \frac{16}{26{,}05}$$
$$\widehat{BAD} \approx 32°$$

$\widehat{CAD} = 32 - 21 = 10{,}6°$.

■