Chapitre

Théorème de Thalès et sa réciproque 9

9.1 Le théorème de Thalès

Théorème 9.1 — Théorème de Thalès. Géogebra
Pour la configuration de triangles emboités ABC et APQ ci-contre.

Si les droites (PQ) et (BC) sont parallèles alors les 3 longueurs des côtés des triangles ABC et APQ sont respectivement proportionnelles.

$$\text{Si les droites } (BC)//(PQ) \quad \text{alors} \quad \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} = k$$

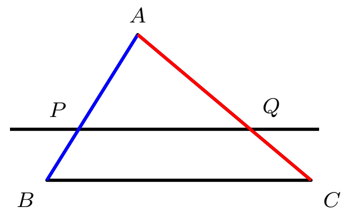


Figure 9.1 – Exemple de triangles emboités ABC et APQ : P est sur le segment $[AB]$, et Q est sur le segment $[AC]$.

Côtés du grand triangle ABC	AB	BC	AC
Côtés du petit triangle APQ			

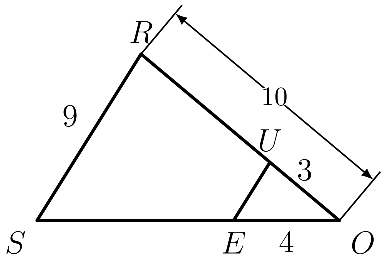
$\times k$

Table 9.1 – Les longueurs des côtés des triangles sont proportionnelles.

Pour écrire les rapports de Thalès :

a) au numérateur figurent les côtés d'un **même triangle**.
b) chaque rapport est entre deux segments **parallèles**.

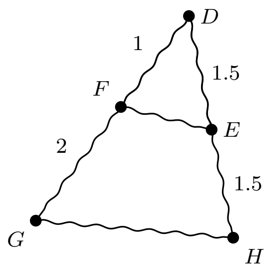
R Si on choisit d'écrire les rapports des longueurs $\frac{\text{« petit »}}{\text{« grand »}}$ on obtient un **coefficient de réduction** $k < 1$.
Si on choisit d'écrire $\frac{\text{« grand »}}{\text{« petit »}}$ on obtient un **coefficient d'agrandissement** $k > 1$.



■ **Exemple 9.2 — Exemple rédigé : Calculer d'une longueur.** Sur la figure ci-contre, U appartient au segment $[RO]$ et E à $[SO]$. Les triangles RSO et OUE sont emboités. Les segments $[RO]$ et $[UE]$ sont parallèles.

Calculer les longueurs SE et UE.

	Affirmation	**Justification**
1		
2		
3	$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$	
4	$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$	
5	$OS = \frac{\ldots\ldots \times \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ et $UE =$	
6	$SE = \ldots\ldots$ et $UE = \ldots\ldots$	



Théorème 9.3 — La contraposée du théorème de Thalès. Si dans une configuration de triangles emboités, les longueurs des côtés ABC et APQ **ne sont pas proportionnelles**, alors les droites (BC) et (PQ) **ne sont pas parallèles**.

■ **Exemple 9.4 — Exemple rédigé : montrer que deux droites ne sont pas parallèles.** les droites (FE) et (GH) sont elles parallèles ?

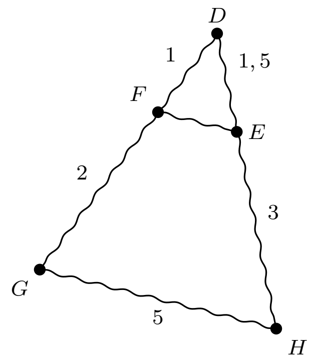
	Affirmation	**Justification**
1		
2	$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} =$	
3	$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} =$	
4	$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$	
5	(FE) et (GH) ...	

9.2 La réciproque du Théorème de Thalès

Théorème 9.5 — La réciproque du théorème de Thalès. Pour les configurations de triangles emboités ABC et APQ ci-contre.

$$\text{Si} \quad \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} \quad \text{alors} \quad (BC)//(PQ)$$

R Pour déduire de la réciproque du théorème de Thalès, que les droites sont parallèles, il suffit de vérifier que les 2 rapports des longueurs issues du sommet commun à ABC et APQ sont égaux.
Une fois que nous avons établi que $(BC)//(PQ)$, on conclut à l'égalité des 3 rapports $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$.



■ **Exemple 9.6 — Exemple rédigé.**
1. Montrer que (EF) et (GH) sont parallèles.
2. En déduire la longueur (EF).

Solution.

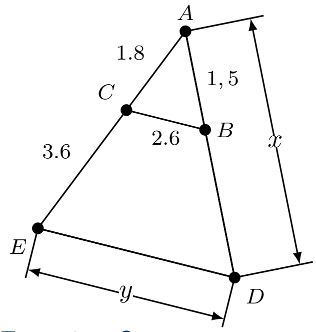
	Affirmation	Justification
1		
2	$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} =$	
3	$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} =$	
4	$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$	
5	(FE) et (GH) ...	

■

Activité : Découverte du théorème de Thalès

Exercices : Théorème de Thalès et sa récoproque

Exercice 1

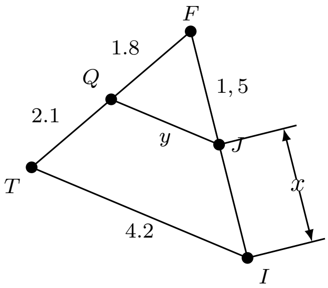


Dans la figure ci-contre, C est sur le segment $[AE]$ et B est sur le segment $[DA]$. Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

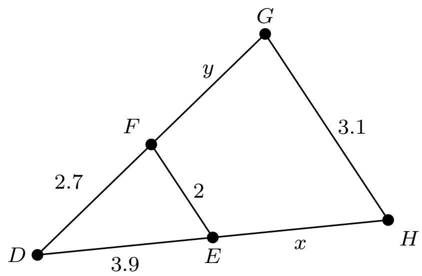
1) Écrire les rapports égaux entre longueurs de segments.
2) Donner une équation vérifiée par x, et la résoudre.
3) Même question pour y.

Exercice 2

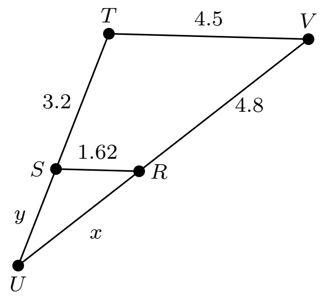
Mêmes questions que l'exercice 1 sur les configurations suivantes :



$(QJ)//(TI)$

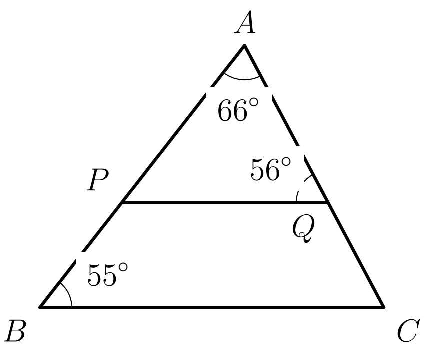


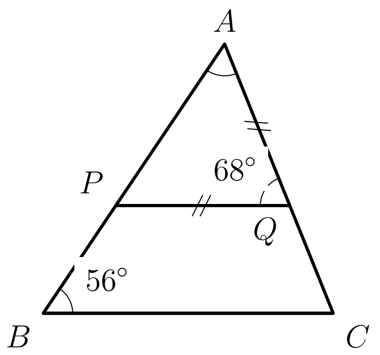
$(FE)//(GH)$

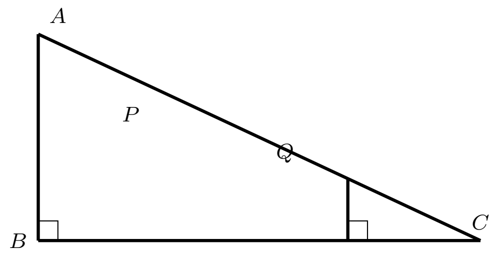


$(SR)//(TV)$

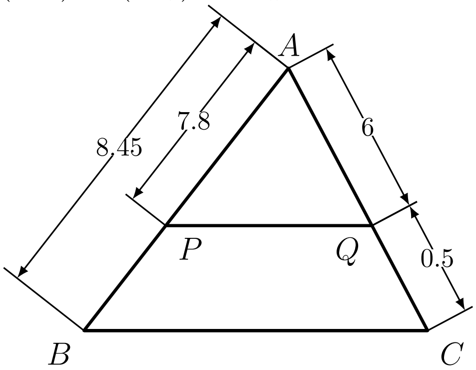
Exercice 3 — Parallélisme et angles. Justifier sur les figures ci-dessous si les droites (AB) et (PQ) sont parallèles ou non.

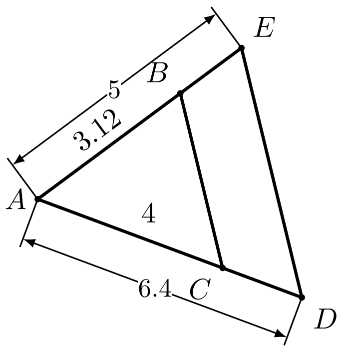


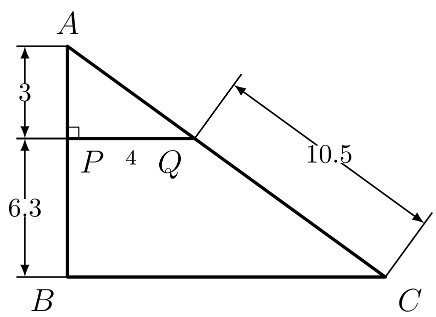




Exercice 4 — Parallélisme et rapport de longueurs. Justifier sur les figures ci-dessous si les droites (AB) et (PQ) sont parallèles ou non.

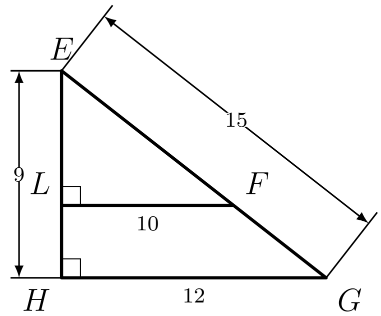






Exercice 5

1) En tenant compte des données de la figure ci-contre, démontrer que les droites (LF) et (HG) sont parallèles.
2) Calculer en rédigeant votre raisonnement EL et EF.
3) Calculer le périmètre et l'aire du trapèze FGHL



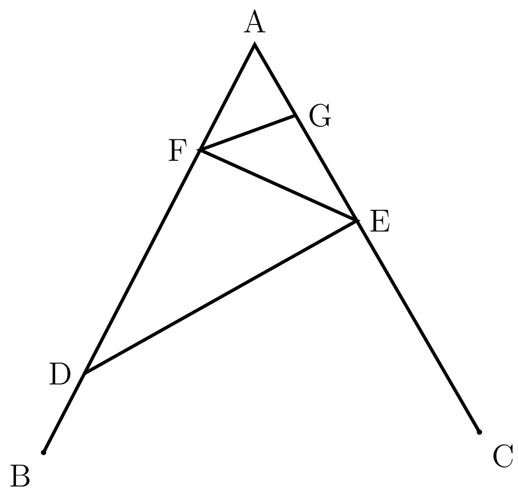
Exercice 6

vers le Brevet

La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur. On donne les informations suivantes :

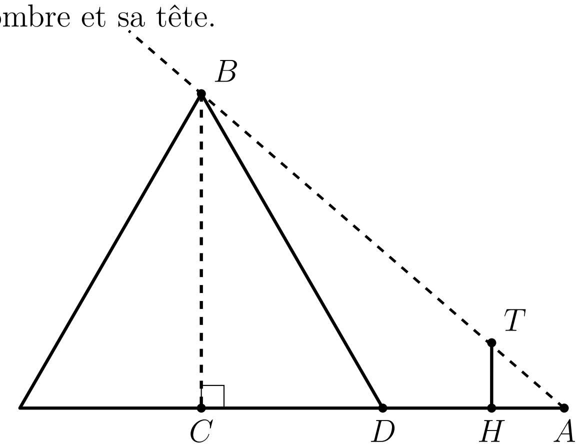
— Le triangle ADE a pour dimensions :
AD = 7 cm, AE = 4,2 cm et DE = 5,6 cm.
— F est le point de [AD] tel que AF = 2,5 cm.
— B est le point de [AD) et C est le point de [AE) tels que : AB = AC = 9 cm.
— La droite (FG) est parallèle à la droite (DE).

1) Réaliser une figure en vraie grandeur.
2) Prouver que ADE est un triangle rectangle en E.
3) Calculer la longueur FG.



Exercice 7

La légende raconte que le pharaon Amasis aurait dit que personne n'était en mesure de savoir quelle était la hauteur de la Grande Pyramide et Thalès de Milet aurait relevé le défi en utilisant son ombre et sa tête.



$HT = 1.8$m est la taille de Thalès.
$HA = 3.5$ m est la longueur de son ombre.
L'ombre du sommet B de la pyramide à cette heure de la journée est A.
BC est la hauteur de la pyramide.
$CD = 115$ m est la demi-largeur de la pyramide.
Enfin $DH = 163.4$ m

Calculer la hauteur BC de la pyramide.

9.3 Triangles semblables

Définition 9.1 Deux triangles sont **semblables** lorsqu'ils ont leurs angles égaux deux à deux et leurs côtés **proportionnels**.

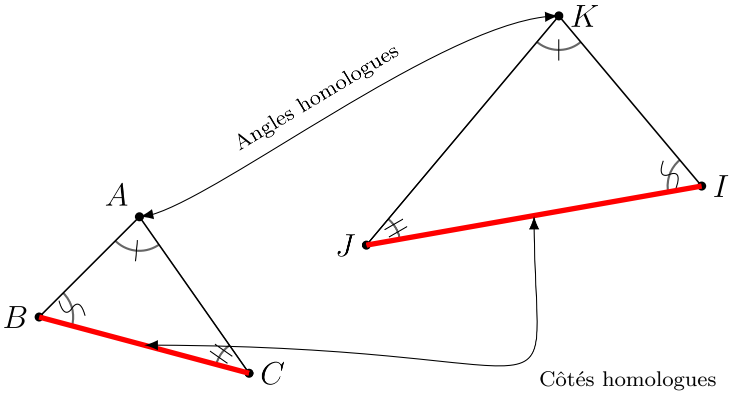


Figure 9.2 – les trianges ABC et IJK sont semblables.

1. Les **angles homologues** sont égaux :

$$\widehat{A} = \widehat{K} \qquad \widehat{B} = \widehat{J} \qquad \widehat{C} = \widehat{I}$$

2. Les **côtés correspondants** sont proportionnels :

Côtés du grand triangle ABC	AB	BC	AC
Côtés du petit triangle APQ	JK	IJ	IK

$\times k$

Table 9.2 – Si $k > 1$, le triangle IJK est un *agrandissement* de ABC. Si $k < 1$, le triangle IJK est une *réduction* de ABC.

$$\frac{JK}{AB} = \frac{IJ}{BC} = \frac{IK}{AC} = k$$

Postulat 9.7 — Critère de similitude CCC. Si les longueurs des 3 côtés d'un triangle T_1 sont **proportionnelles** aux longueurs respectives des 3 côtés d'un triangle T_2, alors les deux triangles sont semblables.

Postulat 9.8 — Critère de similitude AA. Si 2 angles d'un triangle T_1 sont **respectivement égaux** à 2 angles d'un triangle T_2. Alors les deux triangles sont semblables.

9.3.1 Exercices : Triangles semblables

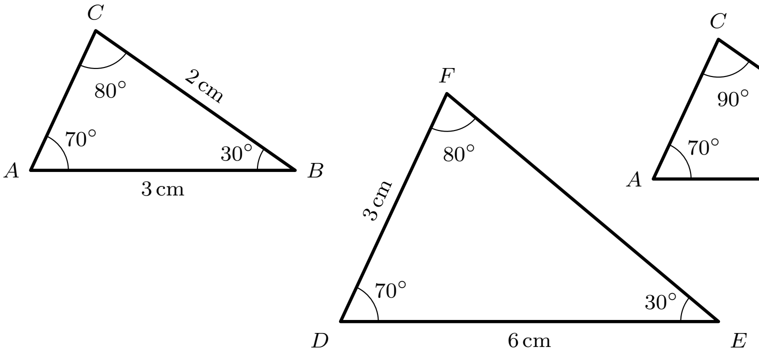
■ **Exemple 9.9 — Triangles semblables.** Si possible, démontrer que les paires de triangles sont semblables.

a) Préciser les angles de même mesure et les angles correspondants.

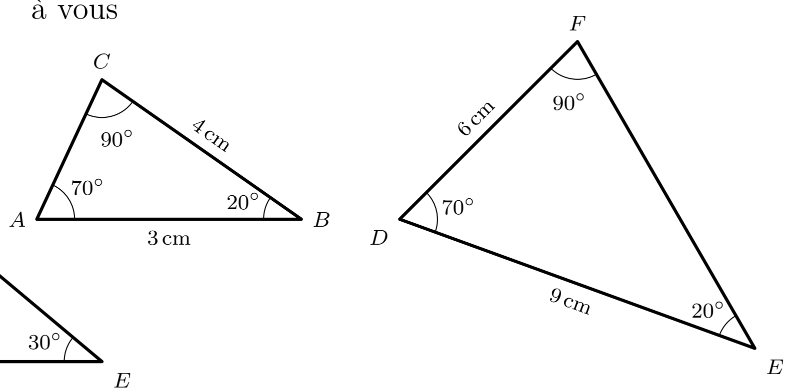
b) Écrire les rapports égaux et donner un rapport de réduction ou d'agrandissement.

c) Calculer les longueurs manquantes.

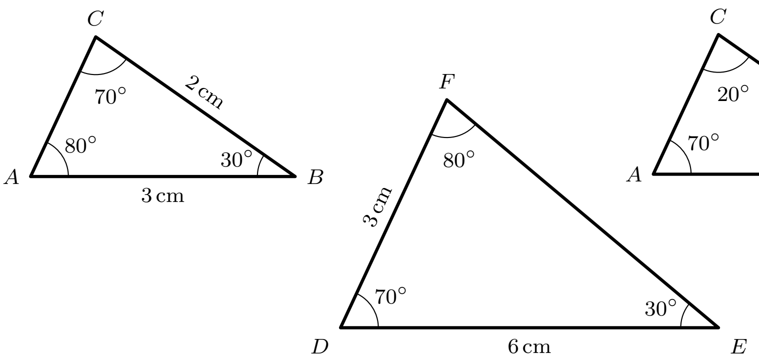
(A)



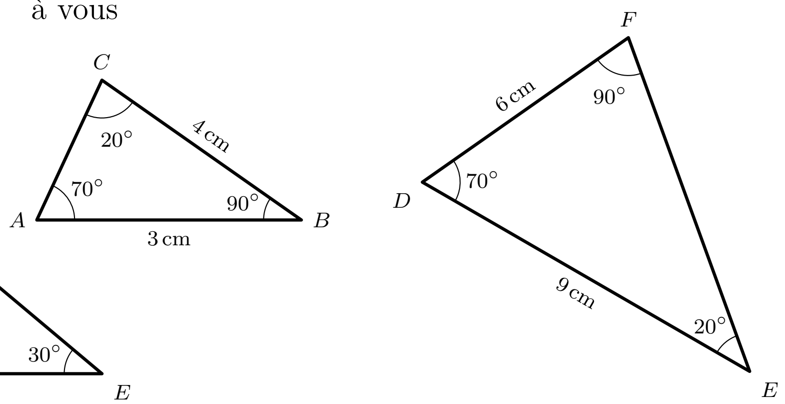
à vous



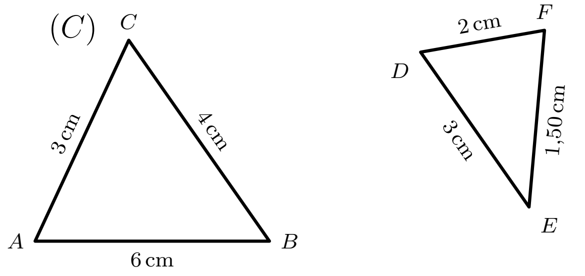
(B)



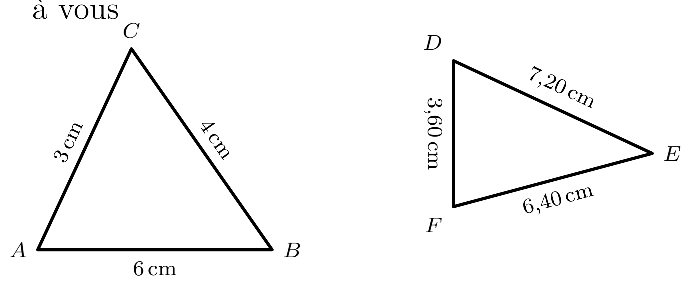
à vous



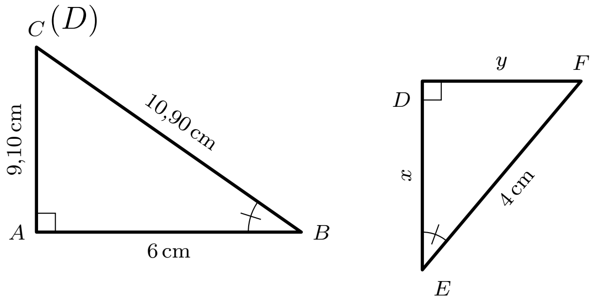
(C)



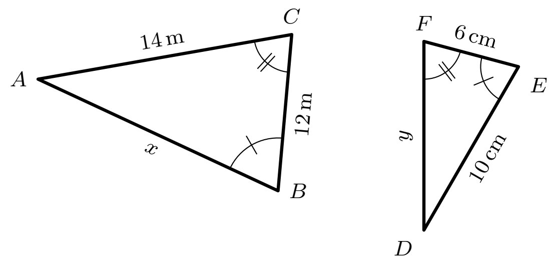
à vous



(D)

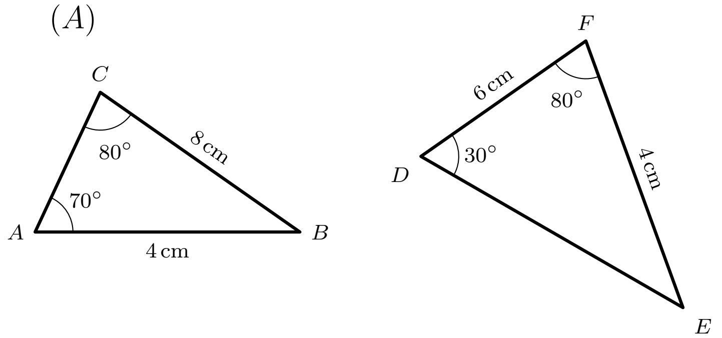


à vous

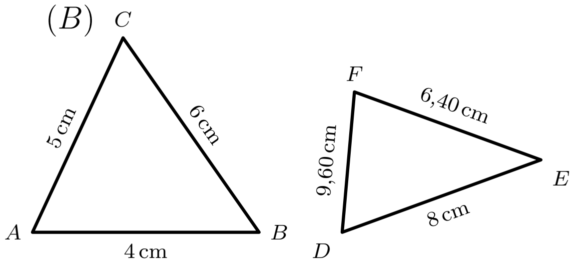


Exercice 1 — mêmes consignes.

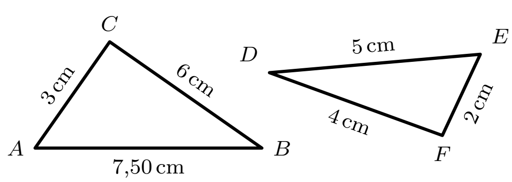
(A)



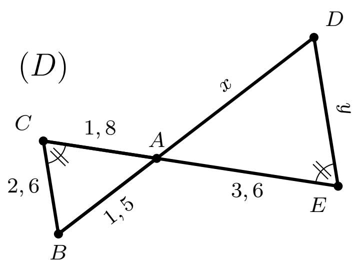
(B)



(C)



(D)



(E)