Chapitre 9

# Théorème de Thalès et sa réciproque

## 9.1 Le théorème de Thalès

**Théorème 9.1 — Théorème de Thalès.** Géogebra
Pour la configuration de triangles emboités $ABC$ et $APQ$ ci-contre.

Si les droites $(PQ)$ et $(BC)$ sont parallèles alors les 3 longueurs des côtés des triangles $ABC$ et $APQ$ sont respectivement proportionnelles.

$$\text{Si les droites } (BC)//(PQ) \quad \text{alors} \quad \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} = k$$

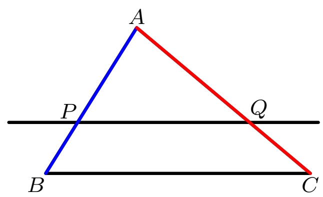



**Figure 9.1** – Exemple de triangles emboités $ABC$ et $APQ$ : $P$ est sur le segment $[AB]$, et $Q$ est sur le segment $[AC]$.

| Côtés du grand triangle $ABC$ | $AB$ | $BC$ | $AC$ |
|---|---|---|---|
| Côtés du petit triangle $APQ$ | | | |

$\times k$

**Table 9.1** – Les longueurs des côtés des triangles sont proportionnelles.

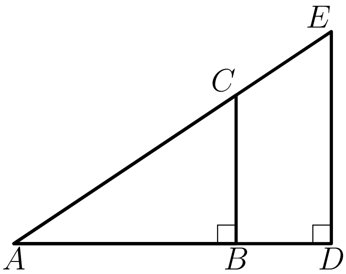
Pour écrire les rapports de Thalès :

a) au numérateur figurent les côtés d'un **même triangle**.

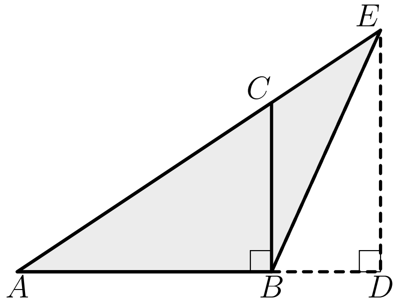
b) chaque rapport est entre deux segments **parallèles**.

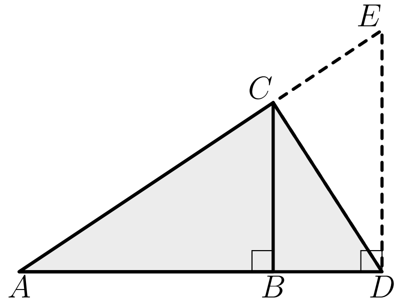
R Si on choisit d'écrire les rapports des longueurs $\frac{\text{« petit »}}{\text{« grand »}}$ on obtient un **coefficient de réduction** $k < 1$.
Si on choisit d'écrire $\frac{\text{« grand »}}{\text{« petit »}}$ on obtient un **coefficient d'agrandissement** $k > 1$.

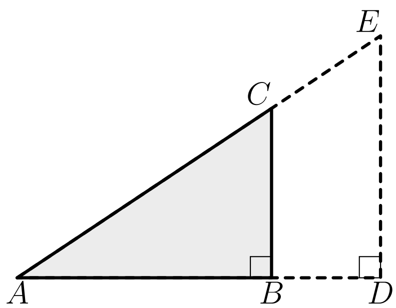
## Activité : Découverte du théorème de Thalès

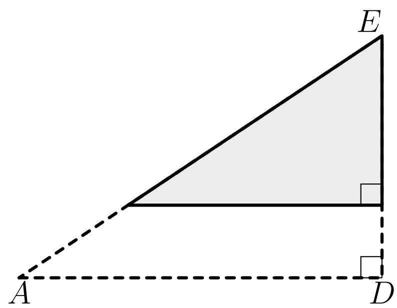



**Cas particulier** Le point $C$ est sur le segment $[AE]$. Le point $B$ est sur le segment $[AD]$.
On suppose que les droites $(BC)$ et $(ED)$ sont perpendiculaires à la droite $(AD)$.

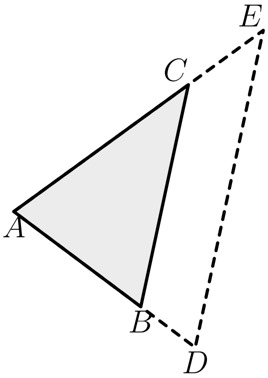


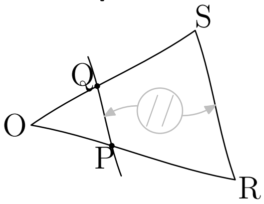




**Cas général**

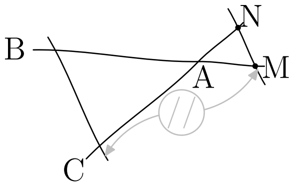


### 9.1.1 Exercices : théorème de Thalès et généralisation

■ **Exemple 9.1** Pour chaque figure donner l'égalité des rapports obtenue en utilisant le théorème de Thalès.

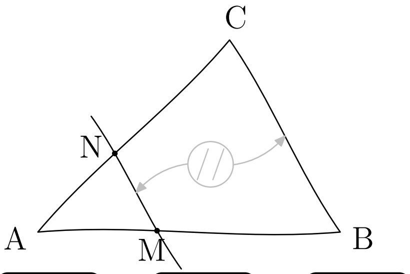


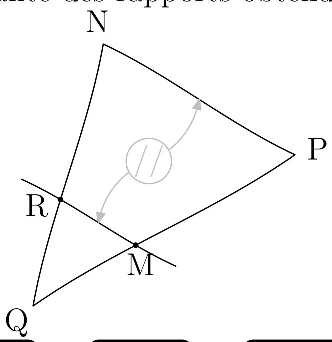

$$\frac{OP}{OR} = \frac{OQ}{OS} = \frac{PQ}{RS}$$

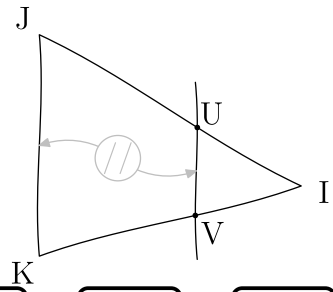



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

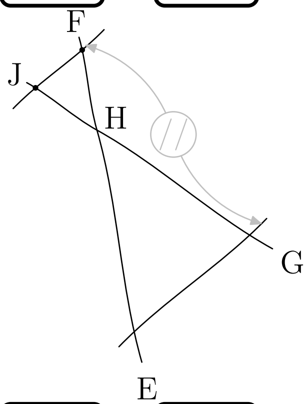
**Exercice 1** Pour chaque figure donner l'égalité des rapports obtenue en utilisant le théorème de Thalès.

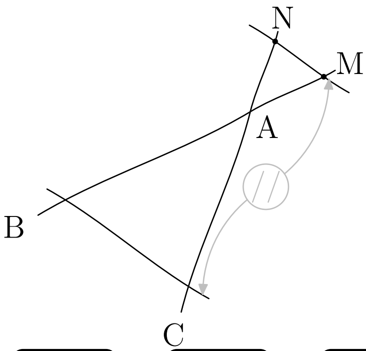


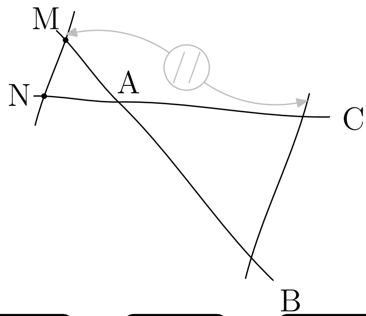



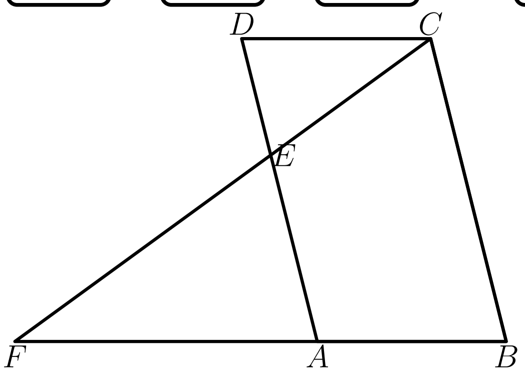

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} \qquad \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} \qquad \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$




$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} \qquad \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} \qquad \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

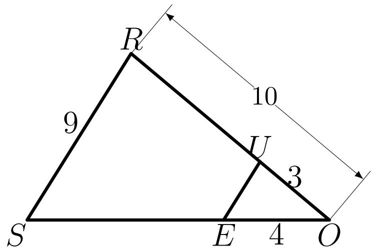


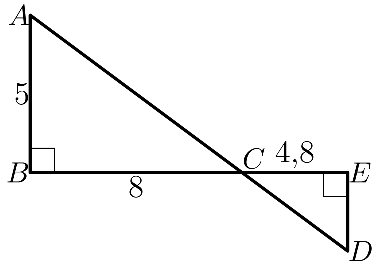

$(AB)//(CD)$ et$(AD)//(BC)$

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

■ **Exemple 9.2 — Exemple rédigé : Calculer d'une longueur à l'aide du théorème de Thalès.** Sur les figures ci-dessous, les droites $(RS)$ et $(UE)$ sont parallèles. Calculer les longueurs $SE$, $UE$ puis $ED$.

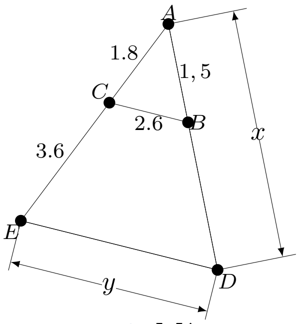



| | Justification | Affirmation |
|---|---|---|
| **Calcul des longueurs $SE$ et $UE$** | | |
| 1 | Les points $O$, $U$ et $R$ sont alignés dans le même ordre que les points $O$, $E$ et $S$. | |
| 2 | | les droites $(UE)$ et $(RS)$ sont parallèles |
| 3 | d'après le théorème de Thalès | $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ |
| 4 | | $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ |
| 5 | | $UE = \frac{\ldots\ldots \times \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ et $OS = \frac{\ldots\ldots \times \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ |
| 6 | | $UE =$ |

| | Justification | Affirmation |
|---|---|---|
| **Calcul de la longueur $ED$** | | |
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ |
| 4 | | $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ |
| 5 | | $ED = \frac{\ldots\ldots \times \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ |
| 6 | | $ED =$ |

### Exercice 2

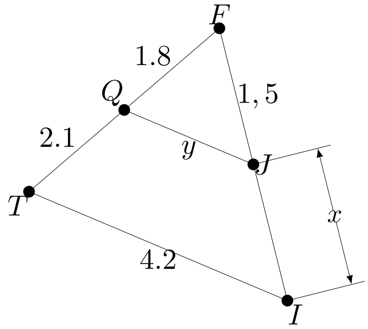



Dans la figure ci-contre, $C$ est sur le segment $[AE]$ et $B$ est sur le segment $[DA]$. Les droites $(BC)$ et $(DE)$ sont parallèles.

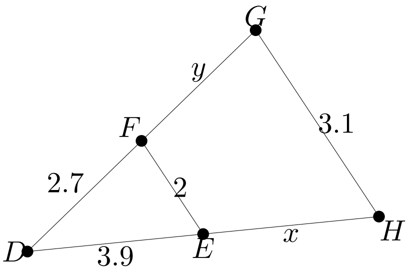
1) Écrire les rapports égaux entre longueurs de segments.
2) Donner une équation vérifiée par $x$, et la résoudre.
3) Même question pour $y$.

### Exercice 3

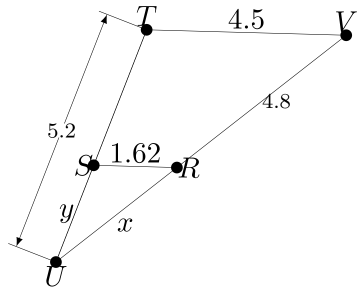
Mêmes questions que l'exercice 2 sur les configurations suivantes :




$(QJ)//(TI)$



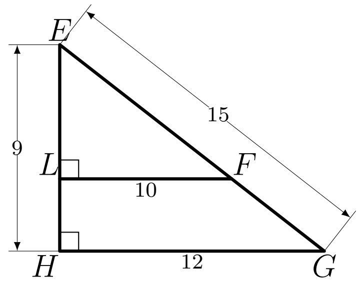

$(FE)//(GH)$




$(SR)//(TV)$

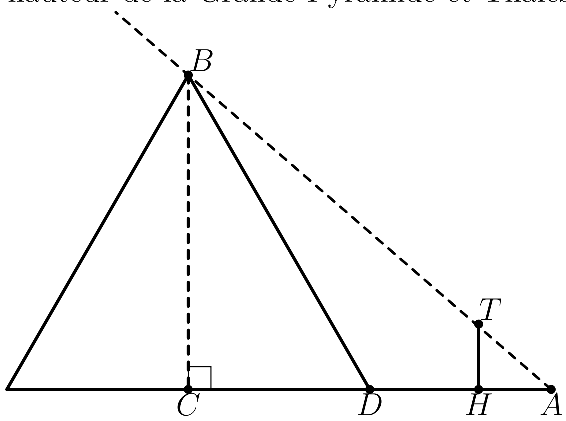
### Exercice 4

1) En tenant compte des données de la figure ci-contre, démontrer que les droites $(LF)$ et $(HG)$ sont parallèles.
2) Calculer EL et EF en rédigeant votre raisonnement.
3) Calculer le périmètre et l'aire du trapèze FGHL




### Exercice 5

La légende raconte que le pharaon Amasis aurait dit que personne n'était en mesure de savoir quelle était la hauteur de la Grande Pyramide et Thalès de Milet aurait relevé le défi en utilisant son ombre et sa tête.




Calculer la hauteur $BC$ de la pyramide.

$HT = 1.8$m est la taille de Thalès.

$HA = 3.5$ m est la longueur de son ombre.

L'ombre du sommet $B$ de la pyramide à cette heure de la journée est $A$.

$BC$ est la hauteur de la pyramide.

$CD = 115$ m est la demi-largeur de la pyramide.

Enfin $DH = 163.4$ m

## 9.2 Rudiments de logique

■ **Exemple 9.3** Lire soigneusement les exemples suivants :

| **Affirmation « A »** | **Affirmation contraire** « non $A$ » |
|---|---|
| Je n'ai pas de bananes | J'ai des bananes |
| **Aucune** poule ne sait nager | **Certaines** poules savent nager |
| J'ai **parfois** le blues | Je n'ai **jamais** le blues |
| **Tous** mes chats attrapent des souris | **Certains** de mes chats n'attrapent pas de souris |

**Exercice 6** Donner le contraire de chacune des affirmations suivantes.

$A =$ Certaines pommes sont rouges.

non $A =$ ..........................................................................................

$B =$ Béa suivra 4 cours ou plus de danse

non $B =$ ..........................................................................................

$C =$ Christophe est toujours prêt à faire la fête

non $C =$ ..........................................................................................

$D =$ Danny porte parfois un chapeau

non $D =$ ..........................................................................................

$E =$ Tous les diplomates sont polis

non $F =$ ..........................................................................................

> Une **implication** est un énoncé de la forme « Si $A$ alors $B$ ».
> Sa **réciproque** est l'énoncé « Si $B$ alors $A$ ».
> Sa **contraposée** est l'énoncé « Si non $B$ alors non $A$ ».

■ **Exemple 9.4** Lire soigneusement les exemples suivants :

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/ Implication** Si le rhino est en colère, alors le rhino attaque. | ☐ | ☐ |
| **2/ Réciproque** Si le rhino attaque, alors le rhino est en colère. | ☐ | ☐ |
| **3/ Contraposée** Si le rhino n'attaque pas, alors le rhino n'est pas en colère. | ☐ | ☐ |

On mélange souvent la contraposée avec l'énoncé : « Si le rhino n'est pas en colère alors le rhino n'attaque pas » (ceci est la contraposée de la réciproque !).

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/ Implication** Si c'est un ours polaire, alors l'animal sait nager. | ☐ | ☐ |
| **2/ Réciproque** Si l'animal sait nager, alors c'est un ours polaire | ☐ | ☐ |
| **3/ Contraposée** Si l'animal ne sait pas nager, alors ce n'est pas un ours polaire | ☐ | ☐ |

**Exercice 7 — À vous.** Pour chacune des implications suivantes rédiger la réciproque et la contraposée et préciser si elles sont vraies ou fausses.

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| 1/ **Implication** Si l'animal est une poule, alors l'animal pond des oeufs. | ☐ | ☐ |
| 2/ **Réciproque** | ☐ | ☐ |
| 3/ **Contraposée** | ☐ | ☐ |

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| 1/ **Implication** Si j'écoute de la musique, alors je suis zen. | ☐ | ☐ |
| 2/ **Réciproque** | ☐ | ☐ |
| 3/ **Contraposée** | ☐ | ☐ |

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| 1/ **Implication** Si les lumières sont éteintes, alors tu ne peux pas lire. | ☐ | ☐ |
| 2/ **Réciproque** | ☐ | ☐ |
| 3/ **Contraposée** | ☐ | ☐ |

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| 1/ **Implication** Si Jim n'est pas timide, alors il proposerait un date à Jadzia. | ☐ | ☐ |
| 2/ **Réciproque** | ☐ | ☐ |
| 3/ **Contraposée** | ☐ | ☐ |

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| 1/ **Implication** Si c'est un quadrilatère-carré alors le quadrilatère a 4 angles droits. | ☐ | ☐ |
| 2/ **Réciproque** | ☐ | ☐ |
| 3/ **Contraposée** | ☐ | ☐ |

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| 1/ **Implication** Si le triangle $ABC$ est rectangle en $A$, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$. | ☐ | ☐ |
| 2/ **Réciproque** | ☐ | ☐ |
| 3/ **Contraposée** | ☐ | ☐ |

## 9.3 La contraposée du théorème de Thalès

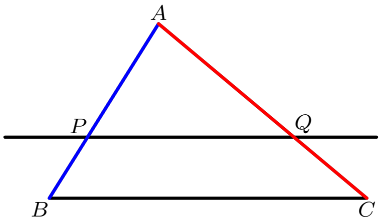



**Figure 9.2** – Exemple de triangles emboités $ABC$ et $APQ$ : $P$ est sur le segment $[AB]$, et $Q$ est sur le segment $[AC]$.

Soit deux triangles $ABC$ et $APQ$ emboités comme sur la figure ci-contre.

**Théorème 9.2 — La contraposée du théorème de Thalès.**

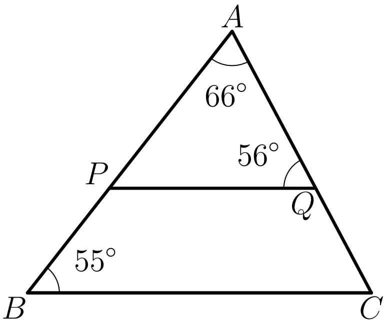
## 9.4 La réciproque du Théorème de Thalès

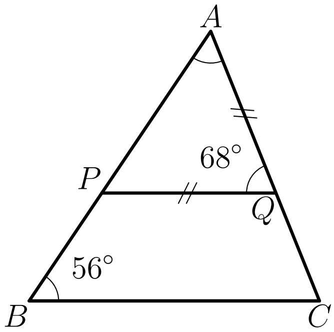
**Théorème 9.3 — La réciproque du théorème de Thalès.**

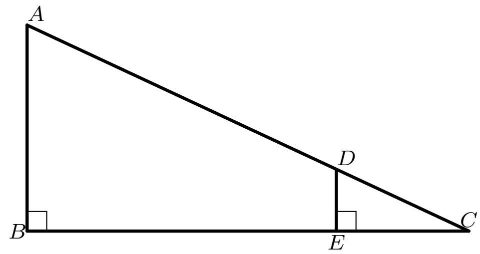
### 9.4.1 Exercices : Utiliser la réciproque et la contraposée du théorème de Thalès

En plus du théorème de Thalès et sa réciproque, on peut comparer les angles correspondants pour démontrer si deux droites sont parallèles ou non.

**Exercice 8 — Parallélisme et angles.** Justifier sur les figures ci-dessous si les droites $(AB)$ et $(PQ)$ sont parallèles ou non.

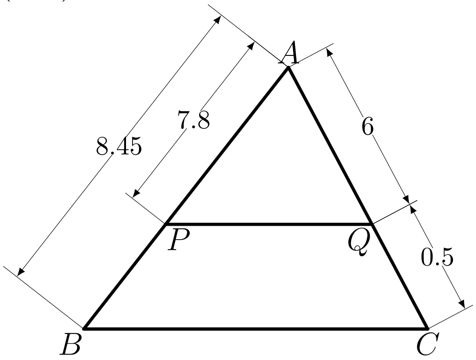


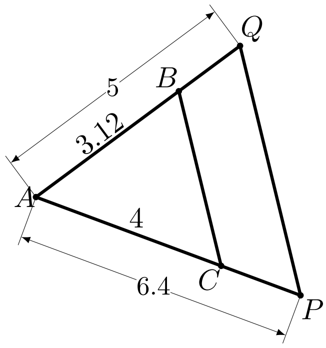



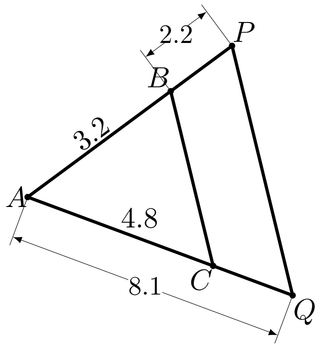




| | | | |
|---|---|---|---|
| **Je compare** | | | |
| **avec** | | | |
| **Je constate** | | | |
| **J'en déduis** | | | |

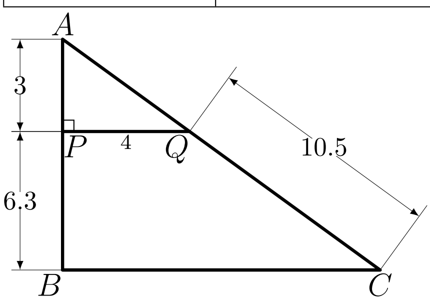
**Exercice 9 — Parallélisme et rapport de longueurs.** Justifier sur les figures ci-dessous si les droites $(AB)$ et $(PQ)$ sont parallèles ou non.



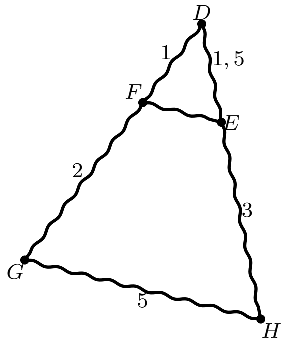



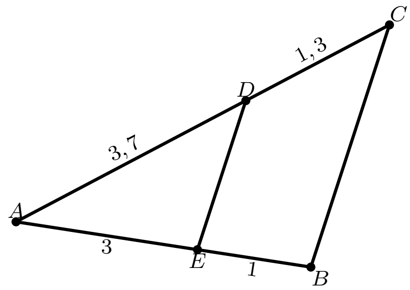

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Je compare** | | | |
| **avec** | | | |
| **Je constate** | | | |
| **J'en déduis** | | | |




| | |
|---|---|
| **Je compare** | |
| **avec** | |
| **Je constate** | |
| **J'en déduis** | |

■ **Exemple 9.5 — Exemples rédigés .** Utiliser les tableaux pour justifier si les droites sont parallèles ou non.

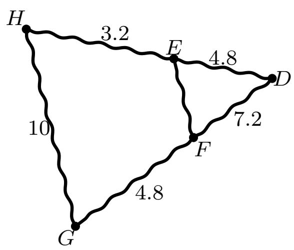



| | **Justification** | **Affirmation** |
|---|---|---|
| | **$(FE)$ et $(GH)$ sont elles parallèles ?** | |
| 1 | Les points ………….sont alignés dans le même ordre que les points ………….. | |
| 2 | | $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} =$ |
| 3 | | $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} =$ |
| 4 | | $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ |
| 5 | d'après | les droites $(FE)$ et $(GH)$ |

| | **Justification** | **Affirmation** |
|---|---|---|
| | **$(DE)$ et $(BC)$ sont elles parallèles ?** | |
| 1 | Les points ………….sont alignés dans le même ordre que les points ………….. | |
| 2 | | $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} =$ |
| 3 | | $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} =$ |
| 4 | | $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ |
| 5 | d'après | les droites $(DE)$ et $(BC)$ |

### Exercice 10




1) Montrer que $(EF)$ et $(GH)$ sont parallèles.
2) En déduire la longueur $(EF)$.

## 9.5 Triangles semblables

**Définition 9.1** Deux triangles sont **semblables** lorsqu'ils ont leurs angles égaux deux à deux et leurs côtés **proportionnels**.

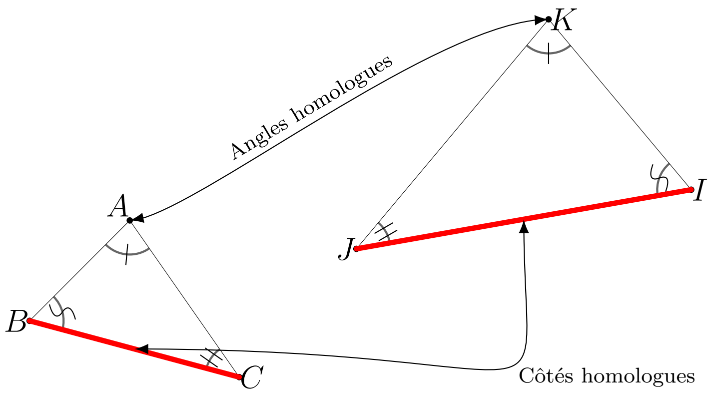



**Figure 9.3** – les trianges $ABC$ et $IJK$ sont semblables.

1. Les **angles homologues** sont égaux :

$$\widehat{A}=\widehat{K} \qquad \widehat{B}=\widehat{J} \qquad \widehat{C}=\widehat{I}$$

2. Les **côtés correspondants** sont proportionnels :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Côtés du grand triangle $ABC$ | $AB$ | $BC$ | $AC$ |
| Côtés du petit triangle $APQ$ | $JK$ | $IJ$ | $IK$ |

$\times k$

**Table 9.2** – Si $k>1$, le triangle $IJK$ est un *agrandissement* de $ABC$. Si $k<1$, le triangle $IJK$ est une *réduction* de $ABC$.

$$\frac{JK}{AB}=\frac{IJ}{BC}=\frac{IK}{AC}=k$$

**Postulat 9.4 — Critère de similitude CCC.** Si les longueurs des 3 côtés d'un triangle $T_1$ sont **proportionnelles** aux longueurs respectives des 3 côtés d'un triangle $T_2$, alors les deux triangles sont semblables.

**Postulat 9.5 — Critère de similitude AA.** Si 2 angles d'un triangle $T_1$ sont **respectivement égaux** à 2 angles d'un triangle $T_2$. Alors les deux triangles sont semblables.

### 9.5.1 Exercices : Triangles semblables

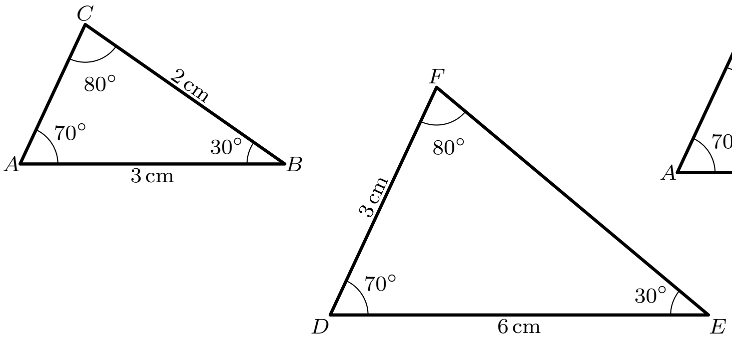
■ **Exemple 9.6 — Triangles semblables.** Si possible, démontrer que les paires de triangles sont semblables.

a) Préciser les angles de même mesure et les angles correspondants.

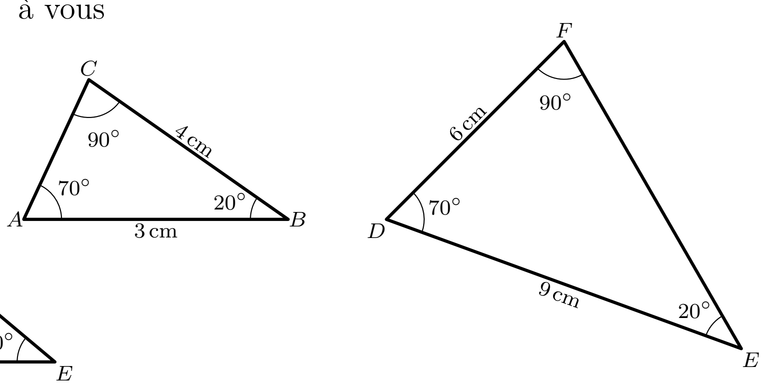
b) Écrire les rapports égaux et donner un rapport de réduction ou d'agrandissement.

c) Calculer les longueurs manquantes.

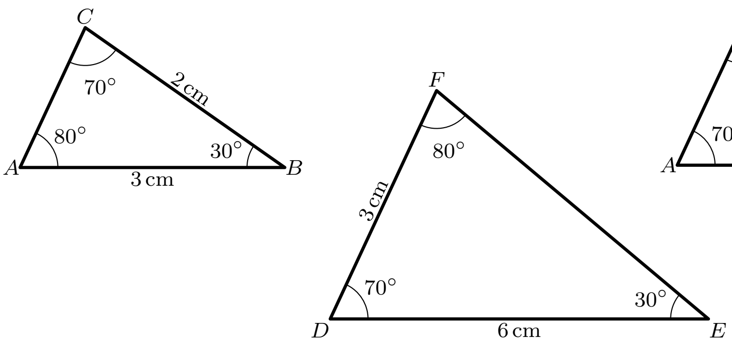
$(A)$



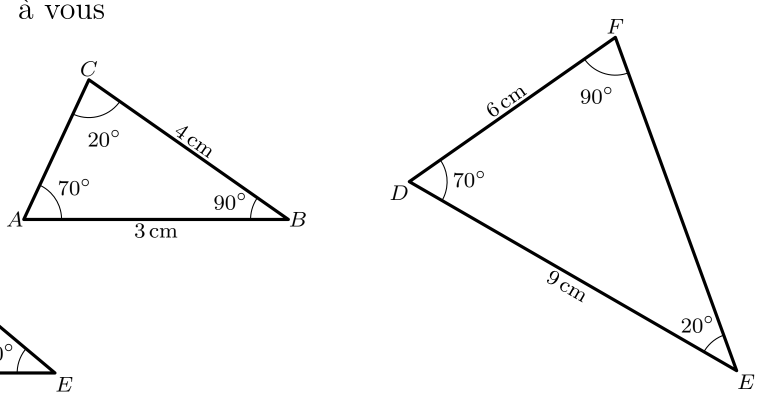

à vous



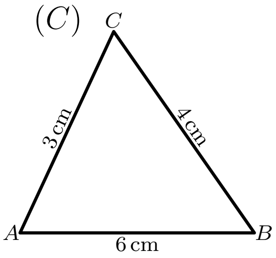

$(B)$

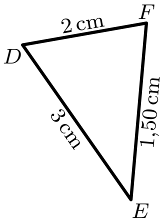



à vous

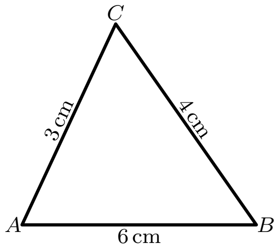


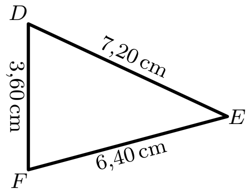
$(C)$



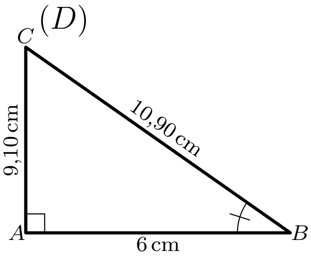



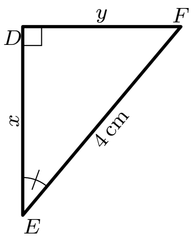

à vous



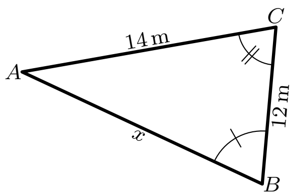



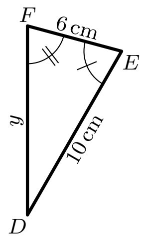

$(D)$



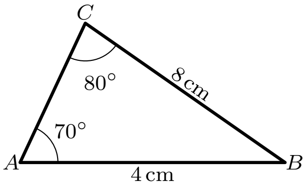

à vous

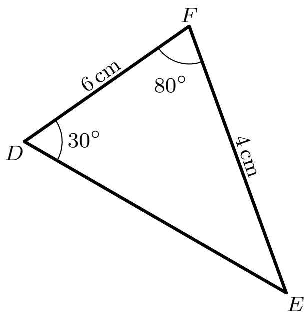


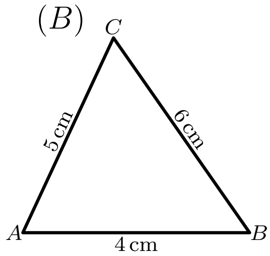

**Exercice 11 — mêmes consignes.**

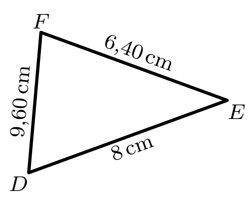
$(A)$



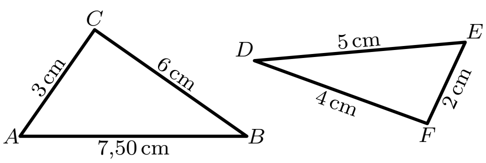




$(B)$

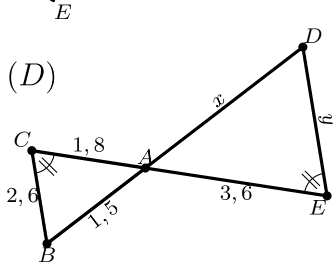



$(C)$




$(D)$




$(E)$