Chapitre

Fractions et puissances 2

2.1 Arithmétique sur les nombres rationnels

Entrainement http://mathsmentales.net/

- inverse de décimaux classiques, d'entiers, de fractions avec notation puissance http://bref.jeduque.net/2nwzhd
- multiplication de fractions http://bref.jeduque.net/us89im
- division de fractions http://bref.jeduque.net/0sdpuf
- addition/soustraction de fractions, niveau 5ᵉ http://bref.jeduque.net/log0ei
- addition/soustration et simplification de fractions, niveau 4ᵉ http://bref.jeduque.net/qxlwy1

2.1.1 Exercices fractions et nombres rationnels

Exercice 1 — . Ecrire les inverses demandés sous la forme d'une fraction irréductible.

a) $48^{-1} =$

b) $46^{-1} =$

c) 44^{-1}

d) inverse de $1 =$

e) inverse de $10 =$

f) inverse de $24 =$

g) $13^{-1} =$

h) inverse de $\dfrac{19}{10} =$

i) $\left(\dfrac{-10}{-2}\right)^{-1} =$

j) $\left(\dfrac{2}{14}\right)^{-1} =$

k) $\left(\dfrac{14}{4}\right)^{-1} =$

l) $\left(\dfrac{1}{15}\right)^{-1} =$

m) $\left(\dfrac{1}{20}\right)^{-1} =$

Exercice 2

1) Compléter pour convertir les décimaux suivants en fractions irréductibles.

a) $2{,}25 = \dfrac{\ldots}{100} = \dfrac{4 \times \ldots}{4 \times \ldots} = \dfrac{\ldots}{\ldots}$

b) $1{,}6 = \dfrac{\ldots}{10} = \dfrac{2 \times \ldots}{2 \times \ldots} = \dfrac{\ldots}{\ldots}$

c) $0{,}125 = \dfrac{\ldots}{1000} = \dfrac{125 \times \ldots}{125 \times \ldots} = \dfrac{\ldots}{\ldots}$

d) $0{,}05 = \dfrac{\ldots}{100} = \dfrac{125 \times \ldots}{125 \times \ldots} = \dfrac{\ldots}{\ldots}$

2) Sans aucun calcul supplémentaire, en déduire les inverses suivants :

a) $2{,}25^{-1} =$

b) $\dfrac{1}{1{,}6} =$

c) $0{,}125^{-1} =$

d) $\dfrac{1}{0{,}05} =$

Exercice 3 — . Donner l'écriture décimale de l'inverse de décimaux classiques suivants :

a) $\dfrac{1}{4} =$

b) $\dfrac{1}{40} =$

c) $\dfrac{1}{20} =$

d) $\dfrac{1}{0{,}2} =$

e) $5^{-1} =$

f) $50^{-1} =$

g) $1000^{-1} =$

h) $\dfrac{1}{0{,}01} =$

■ **Exemple 2.1 — , je fais.** Donner l'écriture en fraction irréductible des produits et quotients suivants :

$$A = \frac{10}{9} \times \frac{-7}{2} = \frac{-10 \times 7}{3 \times 3 \times 2} = \frac{-5 \times 2 \times 7}{3 \times 3 \times 2} = \quad = $$

$$B = \frac{11}{7} \times \frac{9}{10} = \quad = \quad = \quad =$$

$$C = \frac{\frac{11}{4}}{\frac{6}{8}} = \quad = \quad = \quad =$$

$$D = \frac{-11}{9} \div \frac{5}{18} = \quad = \quad = \quad =$$

Exercice 4 — . Mêmes consignes

$A = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{8}{-5}$

$B = \dfrac{8}{5} \times \dfrac{3}{10}$

$C = \dfrac{-8}{7} \times \dfrac{5}{5}$

$D = \dfrac{-11}{7} \times \dfrac{-9}{-10}$

$E = \left(\dfrac{5}{6}\right)^2$

$F = \dfrac{2}{3} \div \dfrac{7}{4}$

$G = \dfrac{5}{-8} \div \dfrac{13}{9}$

$H = \dfrac{-13}{9} \div \dfrac{-5}{8}$

■ **Exemple 2.2** — **, je fais.** Donner l'écriture en fraction irréductible des produits et quotients suivants :

$A = 2 + \dfrac{7}{-30}$	$B = 2 \times \dfrac{7}{-30}$	$C = \dfrac{-7}{5} - \dfrac{17}{20}$	$D = \dfrac{2}{6} - \dfrac{7}{18}$
$=$	$=$	$=$	$=$
$=$	$=$	$=$	$=$
$=$	$=$	$=$	$=$

Exercice 5 — . Écrire sous forme d'une fraction irréductible les expressions suivantes. Détailler les étapes.

$A = 3 + \dfrac{-7}{5}$

$B = 3 \times \dfrac{-7}{5}$

$C = \dfrac{3}{25} - 2$

$D = \dfrac{8}{11} \div 5$

$E = -\dfrac{2}{7} + \dfrac{5}{21}$

$F = 3 + \dfrac{-7}{5} \times \dfrac{17}{20}$

$G = \dfrac{9}{8} + \dfrac{15}{24}$

$H = \dfrac{7}{12} - \dfrac{1}{8}$

$I = \dfrac{1}{8} - \dfrac{7}{12}$

$J = -\dfrac{4}{15} + \dfrac{7}{-30}$

$K = \dfrac{3}{20} + \dfrac{4}{25}$

$L = 1 - \dfrac{4}{15} \times \dfrac{7}{6}$

Exercice 6 Une population de bactéries est multipliée par 5 à chaque heure quand les conditions sont bonnes.

1) Par quel nombre est multipliée la population en 2 h ? en 6 h? en x heures ? en $2x$ heures ?
2) On décide d'éliminer les 90% des bactéries toutes les deux heures.
   Par quel nombre est multipliée la population globale après 2 h ? 4 h ? après $2x$ heures ?

2.2 Notation puissances

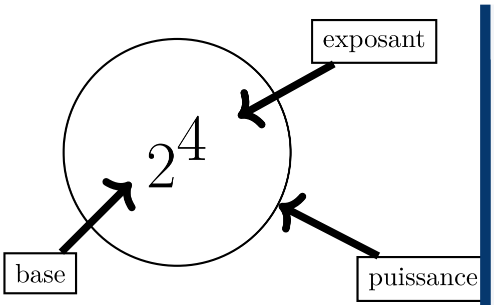


Figure 2.1 – « 2 à la puissance 4 »
« 2 élevée à la puissance 4 »
« 2 puissance 4 »
« 2 exposant 4 »

Les puissances de a

Pour tout nombre positif ou négatif a :

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^2 = a \times a$

$a^3 = a \times a \times a$

$a^4 = a \times a \times a \times a$

$a^5 = a \times a \times a \times a \times a$

Pour tout nombre a non nul, a^{-1} désigne l' « inverse de a ».

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad \frac{1}{a^{-1}} = a$$

Pour tout entier n négatif.

a^{-n} désigne l' « inverse de a^n » ou encore « (inverse de a) à la puissance n ».

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad \frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

■ **Exemple 2.3** Pour tout nombre non nul a :

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a \times a} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a \times a \times a} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)^3$$

$$a^{-4} = \frac{1}{a^4} = \left(\frac{1}{a}\right)^4$$

$5^{-1} =$	$5^{-2} =$
$\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} =$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} =$
$\left(\frac{-1}{5}\right)^{-2} =$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} =$
$\left(\frac{-2}{3}\right)^{-1} =$	$\left(\frac{-2}{3}\right)^{-4} =$

2.3 Opérations sur les puissances

Théorème 2.4 — Multiplication de puissances de même base. Pour tous entiers m, n (positifs ou négatifs), et tous nombres a, b non nuls :

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

« je multiplie des puissances, les bases sont les mêmes, j'ajoute les exposants »

■ **Exemple 2.5**

$$\begin{aligned} a^2 \times a^3 &= a \times a \times a \times a \times a \\ &= a^5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5a^2 \times 7a^3 &= 5aa \times 7aaa \\ &= 5 \times 7 \times aaaaa \\ &= 35a^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 \times a^{-3} &= \frac{a^2}{a^3} \\ &= \frac{aa}{aaa} \\ &= \frac{1}{a} = a^{-1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a^{-2} \times a^3 &= \frac{a^3}{a^2} \\ &= \frac{aaa}{aa} \\ &= a \end{aligned}$$

Théorème 2.6 — Puissance d'une puissance. Pour tous entiers m, n (positifs ou négatifs), et tous nombres a, b non nuls :

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Théorème 2.7 — Multiplication de puissances de même exposant. Pour tous entiers m, n (positifs ou négatifs), et tous nombres a, b non nuls :

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

« la puissance d'un produit est le produit des puissances »

R Retenir surtout le cas particulier $n = 2$:

$$(ab)^2 = a^2 b^2 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

2.3.1 Exercices puissances de base quelconque

■ **Exemple 2.8 — , je fais.** Donner l'écriture entière les expressions suivantes.

$A = (-4)^2$ | $B = -4^2$ | $C = (-4)^3 \dfrac{-7}{5} - \dfrac{17}{20}$ | $D = -4^3$

$=$ | $=$ | $=$ | $=$

$=$ | $=$ | $=$ | $=$

Exercice 1 — , à vous. Donner l'écriture entière les expressions suivantes.

$A = -6^2$	$D = -5^3$	$G = (-1)^2$	$J = -(3)^4$
$B = (-6)^2$	$E = (-5)^3$	$H = -(-1)^2$	$K = -(-4)^2$
$C = 5^3$	$F = -1^2$	$I = -2^3$	$L = (-8)^2$

■ **Exemple 2.9 — , je fais.** Donner l'écriture simplifiée des expressions suivantes sous forme d'entiers ou de fractions irréductibles

$A = 4^0$ | $B = (-2)^0$ | $C = \left(\dfrac{1}{5}\right)^0$ | $D = 4^{-2}$ | $E = \dfrac{1}{5^{-2}}$

$=$ | $=$ | $=$ | $=$ | $=$

$=$ | $=$ | $=$ | $=$ | $=$

Exercice 2 — , à vous. Donner l'écriture entière les expressions suivantes.

$A = 5^{-2}$	$D = -3^{-4}$	$G = -4^{-2}$	$J = \frac{1}{6^{-2}}$
$B = 6^0$	$E = \left(\frac{2}{3}\right)^0$	$H = (-4)^{-2}$	$K = (-2)^{-3}$
$C = (-3)^{-4}$	$F = \frac{1}{7^{-2}}$	$I = \left(\frac{3}{8}\right)^{-2}$	$L = 2^{-3}$

> Vrai ou faux ? $-5^0 = (-5)^0$ Justifie.

■ **Exemple 2.10 — , je fais.** En utilisant les identités $\dfrac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$ et $\left(\dfrac{x}{y}\right)^p = \dfrac{x^p}{y^p}$ (pour x et $y \neq 0$), simplifier sous forme de fractions irréductibles ou d'entiers les expressions suivantes :

$A = \dfrac{4^7}{4^2}$ | $B = \dfrac{5^2}{5^5}$ | $C = \left(\dfrac{5}{7}\right)^3$ | $D = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-4}$

$=$ | $=$ | $=$ | $=$

$=$ | $=$ | $=$ | $=$

$=$ | $=$ | $=$ | $=$

Exercice 3 — , à vous. Mêmes consignes

$A = 5^{-2}$

$B = 6^{0}$

$C = (-3)^{-4}$

$D = -3^{-4}$

$E = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{0}$

$F = \dfrac{1}{7^{-2}}$

$G = -4^{-2}$

$H = (-4)^{-2}$

$I = \left(\dfrac{3}{8}\right)^{-2}$

$J = \dfrac{1}{6^{-2}}$

$K = (-2)^{-3}$

$L = 2^{-3}$

> Tasha applique l'identité des quotients de puissances de même base pour simplifier $\dfrac{8^5}{8^5}$. Elle écrit $8^{5-5} = 8^0 = 1$. Phil dit que la $\dfrac{8^5}{8^5}$ a un numérateur et un dénominateur égaux, donc elle vaut 1. Qui a raison ?

Exercice 4 — . En utilisant les identités $x^p x^q = x^{p+q}$ et $(xy)^p = x^p y^p$ et $\left(x^p\right)^q = x^{pq}$, compléter les pointillés par un entier :

a) $2^2 \times 2^4 = 2^{\cdots}$

b) $7^5 \times 7^{-8} = 7^{\cdots}$

c) $5^{-3} \times 5 = 5^{\cdots}$

d) $(3^2)^3 = 3^{\cdots}$

e) $2^5 \times 2^{-8} = 2^{\cdots}$

f) $\dfrac{5^2 \times 5}{5^3} = 5^{\cdots}$

g) $(6^{-1})^2 = \dfrac{1}{6^{\cdots}}$

h) $(5 \times 2)^3 = \ldots \times 8$

i) $\dfrac{2^3}{2^{-1}} = 2^{\cdots}$

j) $\dfrac{7^2}{7^{-3}} = 7^{\cdots}$

k) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\cdots} = \dfrac{4}{9}$

l) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\cdots} = \dfrac{125}{8}$

m) $5^{\cdots} \times 8^{\cdots} = 40^5$

Exercice 5 — . On donne la décomposition en facteur premiers de $A = 540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ et $B = 126 = 2 \times 3^2 \times 7$. Déduire les décompositions en facteurs premiers de AB, A^2 et B^3.

Exercice 6

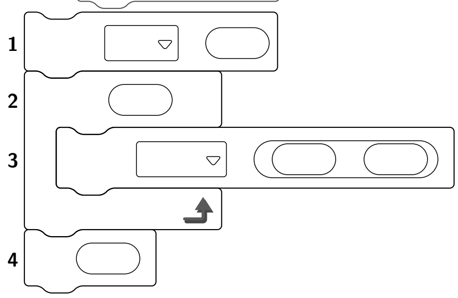
a) Exécuter à la main les scripts suivants et déterminer pour chacun le nombre affiché.

```
mettre nbr à 1
répéter 5 fois
    mettre nbr à (nbr * 3)
dire nbr
```

```
mettre nbr à 1
répéter 3 fois
    mettre nbr à (nbr * 5)
dire nbr
```

```
mettre nbr à 1
répéter 3 fois
    mettre nbr à (nbr * 5)
dire (1 / nbr)
```

b) Compléter le script `Scratch` pour calculer $(-7)^4$.



2.4 Puissances de 10 et écriture scientifique

Définition 2.1 — Cas particulier des puissances de 10. Pour tout entier positif n, on note:

- $10^n = 1 \underbrace{\times 10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n\,\text{fois}}$
- $10^0 = 1$
- $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^n$. En particulier $10^{-1} = \dfrac{1}{10}$

Table 2.1 – Les préfixes associés aux différentes puissances de 10.
$10^9 = 10 \times \ldots \times 10 = 1\ 000\ 000\ 000$ (« 1 » puis « 9 zéros »)
$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \dfrac{1}{100\ 000} = 0{,}000\ 01$ (« 5 zéros »)

Puissance	écriture décimale	Nom	Préfixe	Symbole
10^9	1 000 000 000	milliard	giga	G
10^6	1 000 000	million	méga	M
10^3	1 000	mille	kilo	k
10^2	100	cent	hecto	h
10^1	10	dix	déca	da
10^0	1	un		
10^{-1}	0,1	dixième	déci	d
10^{-2}	0,01	centième	centi	c
10^{-3}	0,001	millième	milli	m
10^{-6}	0,000 001	millionnième	micro	µ
10^{-9}	0,000 000 001	milliardième	nano	n

Théorème 2.11 — Écriture scientifique d'un décimal. Tout nombre décimal s'écrit sous la forme « $a \times 10^n$ ».

a est un nombre décimal (positif ou négatif) ayant **exactement un chiffre non nul à gauche** de la virgule.

n est un entier relatif (positif ou négatif).

L'**ordre de grandeur** de ce nombre est le produit de l'entier le plus proche du décimal de l'écriture scientifique par la puissance de 10 de cette écriture scientifique.

■ **Exemple 2.12**

$$1\ 234{,}5 = 1{,}234\ 5 \quad \times 10^{\cdots}$$ **L'ordre de grandeur est**

$$12{,}5 = 1{,}25 \quad \times 10^{\cdots}$$

$$0{,}345 = 3{,}45 \quad \times 10^{\cdots}$$

$$0{,}056\ 4 = 5{,}64 \quad \times 10^{\cdots}$$

$$0{,}000\ 042\ 1 = 4{,}21 \quad \times 10^{\cdots}$$

2.4.1 Exercices Puissances de 10 et écriture scientifique

Exercice 1 Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

a) $6{,}08 \times 10^5$
b) $67{,}04 \times 10^{-1}$
c) $-87{,}5 \times 10^3$
d) -965×10^{-2}
e) $0{,}008\ 75 \times 10^7$
f) $6{,}15 \times 10^4$
g) $6{,}04 \times 10^{-7}$
h) $5{,}64 \times 10^{-6}$
i) $6{,}54 \times 10^{-7}$

Exercice 2 Compléter les pointillés :

a) $924 = 9{,}24 \times 10^{\cdots}$
b) $32\ 910 = 3{,}291 \times 10^{\cdots}$
c) $608\ 000 = 6{,}08 \times 10^{\cdots}$
d) $875{,}2 = 8{,}752 \times 10^{\cdots}$
e) $764{,}9 = 7{,}649 \times 10^{\cdots}$
f) $0{,}009\ 85 = 9{,}875 \times 10^{\cdots}$
g) $0{,}495 = 4{,}95 \times 10^{\cdots}$
h) $0{,}040\ 3 = 4{,}03 \times 10^{\cdots}$
i) $0{,}000\ 003\ 28 = 3{,}28 \times 10^{\cdots}$

Exercice 3 Donner l'écriture scientifique des nombres décimaux suivants :

a) 540 000 000 000
b) 1 048 000 000 000
c) 673,2
d) 0,700 6
e) 650 000 000
f) 0,000 002 64
g) 8 070 000 000
h) 0,000 000 006
i) 4 050

Exercice 4 Exprimer sous la forme d'une puissance de dix.

$A = 10 \times 10^2$

$B = 10^4 \times 10^2$

$C = 10^{-4} \times 10^2$

$D = 10^3 \times 10^{-2} \times 10^4$

$E = \left(10^4\right)^3$

$F = 2^7 \times 5^7$

$G = \left(10^{-3}\right)^{-5}$

$H = \left(\dfrac{1}{10^2}\right)^{-3}$

$I = \left(10^{-2}\right)^{-3}$

$J = (100)^{-2}$

$K = 0{,}001^3$

$L = \dfrac{10^2}{10^5}$

$M = \dfrac{10^3}{10^5}$

$N = \dfrac{10^3}{10^2}$

$O = \dfrac{10^5}{10^{-2}}$

$P = \dfrac{2^3}{5^{-3}}$

Exemple 2.13

$A = (5 \times 10^3) \times (3 \times 10^{-2})$

$B = (3 \times 10^3) \div (5 \times 10^{-2})$

$C = (5 \times 10^3) - (3 \times 10^{-2})$

$A = (5 \times 10^3) \times (3 \times 10^2)$

$B = (3 \times 10^{-2}) \div (5 \times 10^{-2})$

$C = (5 \times 10^3) + (3 \times 10^{-2})$

Exercice 5 Exprime les expressions suivantes sous forme d'une notation scientifique. Montrer les étapes.

$A = (5 \times 10^{-3}) \times (3 \times 10^{2})$

$B = (5 \times 10^{-3}) \times (3 \times 10^{-2})$

$C = (3 \times 10^{-2}) \times (5 \times 10^{-2})$

$D = (4,9 \times 10^{-7}) \times (-6 \times 10^{8})$

$E = (0,48 \times 10^{-7}) \div (-6 \times 10^{8})$

$F = (0,6 \times 10^{-3}) \times (3 \times 10^{-10})$

$G = (3,7 \times 10^{-2}) \times (5 \times 10^{5})$

$H = (3,3 \times 10^{-6}) \times (-2 \times 10^{-4})$

$I = (-1,5 \times 10^{-4}) \div (4 \times 10^{-2})$

$J = (-2,7 \times 10^{-8}) \div (9 \times 10^{9})$

$K = (-6,4 \times 10^{-10}) \div (-2 \times 10^{-2})$

$L = (1,9 \times 10) \div (-2 \times 10^{-2})$

Exercice 6

1 L d'air pèse environ 1,30 g. La masse moyenne d'une des molécules qui le constituent est environ $25{,}7 \times 10^{-24}$ g. Calculer le nombre N de molécules contenues dans un litre d'air.

Exercice 7

Voici les diamètres de deux bactéries et deux virus :

- Bactérie typique $t = 0{,}2 \times 10^{-7}$m
- Nano bactérie $n = 50 \times 10^{-9}$m
- Virus de la varicelle $v = 1\ 750 \times 10^{-10}$m
- Virus de la gastro-entérite $g = 0{,}017 \times 10^{-6}$m

Donnner la notation scientifique de chaque diamètre puis ranger ces diamètres dans l'ordre croissant.

■ **Exemple 2.14 — type brevet.** Calculer et écrire l'écriture scientifique et décimale de

$$A = \frac{60 \times 10^{9} \times 7 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{2}} \qquad B = \frac{60 \times 10^{9} + 7 \times 10^{7}}{5 \times 10^{2}}$$

Exercice 8 — à vous. Calculer et donner le résultat sous forme scientifique puis décimale :

$$A = 15 \times \left(10^{7}\right) \times 3 \times 10^{-9}$$

$$B = \frac{3 \times 10^{3} \times 2 \times 10^{-2}}{12 \times 10^{-2}}$$

$$C = \frac{10^{-8} \times 42 \times 10^{12}}{7 \times 10^{5}}$$

$$D = 6 \times 10^{-4} + 9 \times 10^{-3}$$

$$E = \frac{45 \times \left(10^{-3}\right)^{5} \times 13 \times 10^{-3}}{9 \times \left(10^{2}\right)^{-6}}$$

$$F = \frac{39 \times 10^{7} - 231 \times 10^{6}}{3 \times 10^{-5}}$$

Contrôler vos réponses à l'aide de la touche (a×10ⁿ) de la calculatrice.

Exercice 9 Exprimer sous la forme 10^{k} ou k est une expression simplifiée réduite de x :

$A = 2^{3x} \times 5^{3x}$

$B = \left(10^{2x}\right)^{3}$

$C = \left(10^{5x-3}\right)^{2}$

$D = \left(10^{4x+1}\right)^{7}$

$E = \left(10^{2x-1}\right)^{3}$

$F = \dfrac{1}{10^{5x}}$

$G = \dfrac{1}{10^{2x+1}}$

$H = \dfrac{10^{3x+5}}{10^{2x+3}}$

2.5 AP Conversions, Puissances

Exercice 1 Compléter les pointillés par une puissance de 10.

a) $15\,\text{km} = 1{,}5 \times \ldots\ldots\,\text{m}$

b) $7\ 000\ 000\text{m} = 7 \times \ldots\ldots\,\text{m}$

c) 5 Mo = 5 × . . . . . . octets

d) 6 Go = 6 × . . . . . . octets

e) 57 ko = 57 × . . . . . . octets

f) 57 ko = 5,7 × . . . . . . octets

g) 3,2mm = 3,2 × . . . . . . cm

h) 3,2mm = 3,2 × . . . . . . dm

i) 3,2mm = 3,2 × . . . . . . m

j) 3,2mm =3,2 × . . . . . . km

k) $5\,\text{km} = 5 \times \ldots\ldots\,\text{cm}$

l) $7\ 000\ 000\text{m} = 7 \times \ldots\ldots\,\text{mm}$

m) $1\,\text{m}^2 = \ldots\ldots\,\text{mm}^2$

n) $57\,\text{L} = 5{,}7 \times \ldots\ldots\,\text{cL}$

o) $4\,\text{L} = 4 \times \ldots\ldots\,\text{mL}$

p) $1{,}50\,\text{cL} = 1{,}5 \times \ldots\ldots\,\text{L}$

q) $0{,}52\,\text{kg} = 5{,}2 \times \ldots\ldots\,\text{g}$

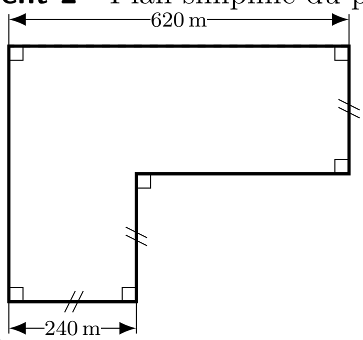
r) $1\,\text{m}^3 = \ldots\ldots\,\text{mm}^3$

Exercice 2 — Brevet Septembre 2015 - Polynésie. *environ* 20 min

Laurent s'installe comme éleveur de chèvres pour produire du lait afin de fabriquer des fromages.

Document 1 Chèvre de race alpine :
Production de lait : 1,8 litre de lait par jour et par chèvre en moyenne
Pâturage : 12 chèvres maximum par hectare

Document 2 Plan simplifié du pâturage



1) a) Prouver que Laurent peut posséder au maximum 247 chèvres.
   b) Dans ces conditions, combien de litres de lait peut-il espérer produire par jour en moyenne ?
2) Laurent veut acheter une cuve cylindrique pour stocker le lait de ses chèvres. Il a le choix entre 2 modèles :
   - cuve A : contenance 585 litres
   - cuve B : diamètre 100 cm, hauteur 76 cm

   a) Prouver que Laurent peut posséder au maximum 247 chèvres.
   b) Dans ces conditions, combien de litres de lait peut-il espérer produire par jour en moyenne ?

   Il choisit la cuve ayant la plus grande contenance. Laquelle va-t-il acheter ?

Indications : Formule du volume du cylindre : $V = \pi \times r^2 \times h$

Conversions : 1 hectare = 10 000 m et $1\ \text{dm}^3 = 1\,\text{L}$

Exercice 3 — Brevet Juin 2016 - Centres étrangers. *environ* 10 min

Un macaron est composé de deux biscuits et d'une couche de crème. Cette couche de crème peut être assimilée à un cylindre de rayon 20 mm et de hauteur 5 mm.

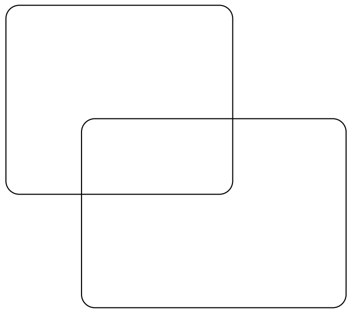
a) Vérifier que le volume de crème contenu dans un macaron est $2\ 000\pi\ \text{mm}^3$.

b) Alexis a dans son saladier 30 cL de crème. Combien de macarons peut-il confectionner ?

■ **Exemple 2.15 — je fais.** Soit les décompositions en facteurs premiers de

$294 = 2^1 \times 3^1 \times 7^2$

$364 = 2^2 \times 7^1 \times 13^1$



$$\text{plus petit commun multiple}(294; 364) =$$

$$\text{plus grand diviseur}(294; 364) =$$

Exercice 4 — . Pour chacun des couples de nombres suivants, donner la décomposition en facteurs premiers de leur plus grand commun diviseur, et de leur plus petit commun multiple.

a) $2 \times 5^2 \times 7$ et $2 \times 5 \times 7$

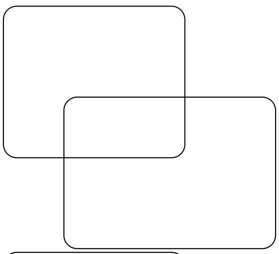
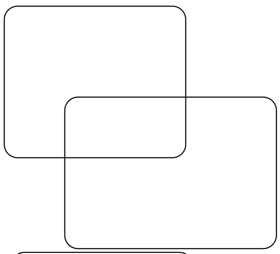
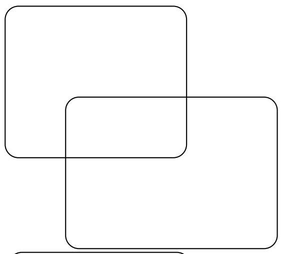
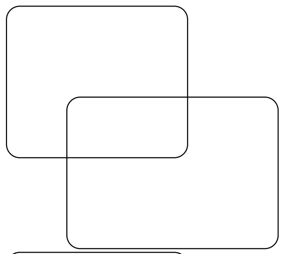
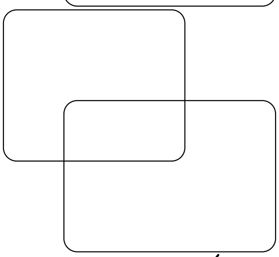
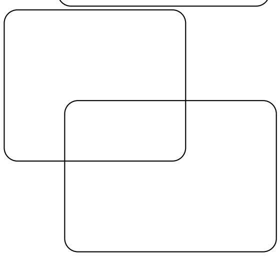
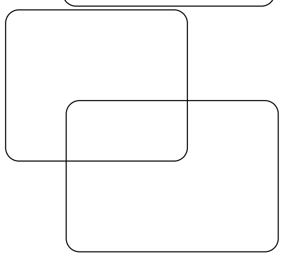
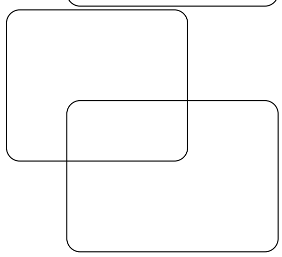
b) $2 \times 5^2 \times 7$ et $2 \times 5 \times 7^2$

c) 2×3 et $2 \times 3 \times 5$.

d) $2 \times 3 \times 5$ et $3 \times 5 \times 5$

e) $2 \times 3^2 \times 5$ et $3 \times 5 \times 5$

f) $2 \times 3^2 \times 5^3$ et $3^5 \times 5$

Exercice 5 — .

a) $196 = 2^2 \times 7^2$. Donner la décomposition en facteurs premiers de 1960.

b) La comète de Bailey est visible depuis la terre tous les 196 ans. Celle de Cayley est visible tous les 70 ans. Sachant que les comètes ont été vues en 1170. Quand pourra-t-on apercevoir les 2 comètes dans la même année ?

Exercice 6 — Brevet Métropole 2019. Le capitaine d'un navire possède un trésor constituée de 69 diamants, 1 150 perles et 4 140 pièces d'or.

a) À l'aide de la calculatrice, décomposer 69 ; 1 150 et 4 140 en produits de facteurs premiers.

b) Le capitaine partage équitablement le trésor entre les marins.

Combien y-a-t-il de marins sachant que toutes les pièces, perles et diamants ont été distribués ?

solution de l'exercice 2.

1) a) Aire totale : $620 \times 240 + 240^2 = 206\ 400$ m^2, soit 20,64 ha ; donc on peut y faire paître au maximum : $20,64 \times 12 = 247,68$, soit un maximum de 247 chèvres.
   b) Les 247 chèvres donneront en moyenne par jour : $247 \times 1,8 = 444,6$ litres de lait.
2) Volume de la cuve B : $V_{\text{B}} = \pi \times 5^2 \times 7,6 = 190\pi \approx 596,9$ dm^3. Il va donc acheter une cuve B.

■

solution de l'exercice 3.

1. $V_{\text{crème}} = 20^2 \times \pi \times = 400 \times 5 \times \pi = 2\ 000\pi$ mm^3.
   Le volume de crème contenu dans un macaron est de $2\ 000\pi$ $\left(\text{mm}^3\right)$.
2. 1L = 1 dm^3 soit 100 cL = 1 000 000 mm^3 ou 1 cL = 10 000 mm^3.
   30 cL de crème correspondent donc à $30 \times 10\ 000 = 300\ 000$ mm^3..
   Je calcule : $\dfrac{300\ 000}{2\ 000\pi} \approx 47,7$ (macarons).
   Alexis peut confectionner 47 macarons.

■

Pour obtenir la décomposition en facteurs premiers du plus petit commun multiple :
- Je décompose les deux nombres en facteurs premiers
- J'établis la liste de tous les nombres premiers présents dans les deux décompositions
- Si un facteur premier n'apparaît qu'une fois dans une des décomposition, il garde son ordre de multiplicité.
- Si un facteur premier apparaît dans les deux listes, on lui attribue l'ordre de multiplicité le plus grand.

Pour obtenir la décomposition en facteurs premiers du plus grand commun diviseur :
- Je décompose les deux nombres en facteurs premiers
- J'établis la liste de tous les nombres premiers présents dans les deux décompositions
- Seul un facteur premier commun aux deux décompositions sera facteurs premiers du PGCD. Sa multiplicité est la plus petite des multiplicités.

$\times 10$ $\times 10$ $\times 10$ $\times 10$ $\times 10$ $\times 10$

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

$\times 10$ $\times 10$ $\times 10$ $\times 10$ $\times 10$ $\times 10$

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

$\times 100$ $\times 100$ $\times 100$ $\times 100$ $\times 100$ $\times 100$

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
	ha	a				

$\times 1\,000$ $\times 1\,000$ $\times 1\,000$ $\times 1\,000$ $\times 1\,000$ $\times 1\,000$

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3			cm^3			mm^3
				hL	daL	L	dL	cL	mL	

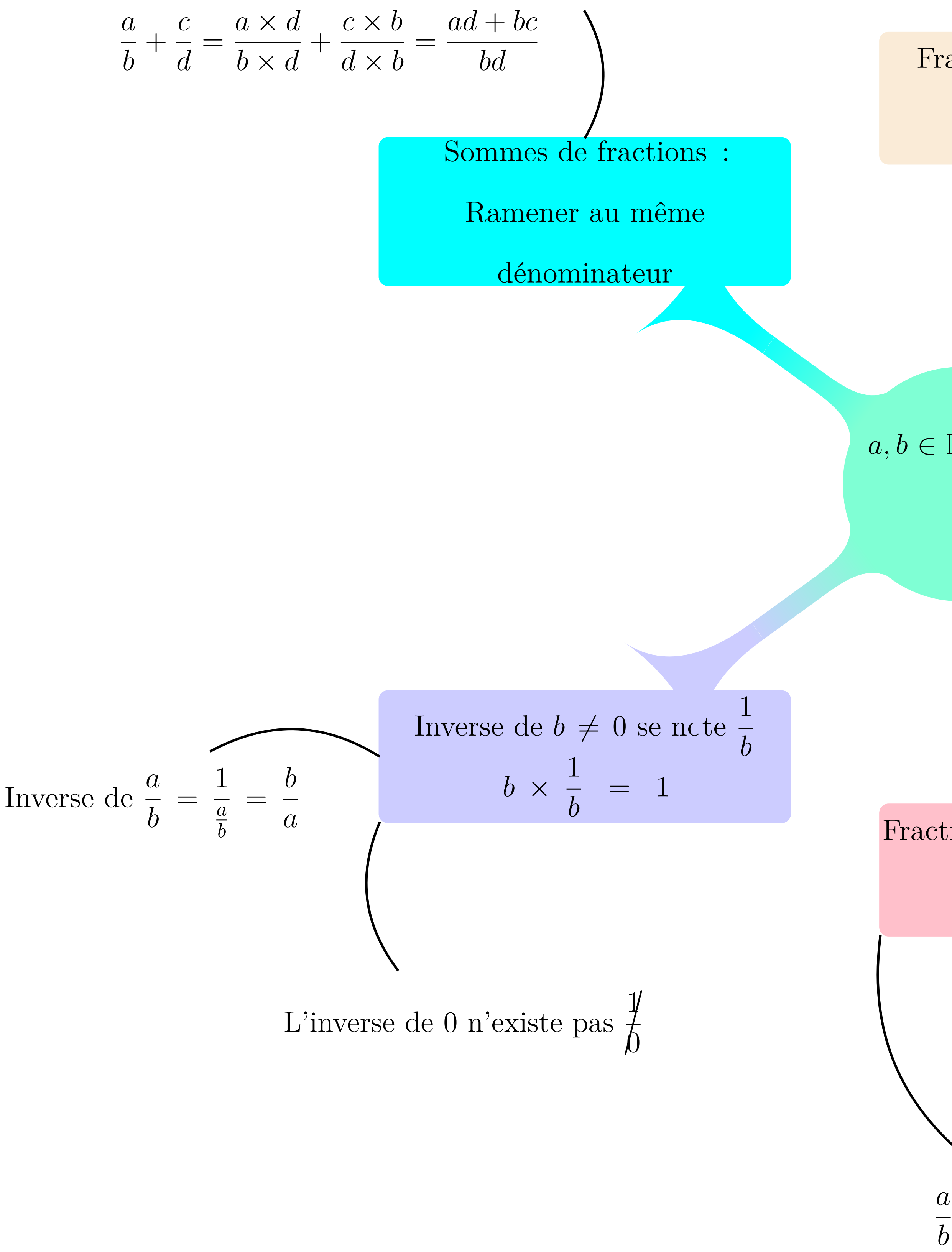


Figure 2.2 – Règles opératoires des écritures fractionnaires

Diviser revient à multiplier par l'inverse :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

ction comme quotient :

$$\frac{a}{b} = a \div b$$

Simplification/Amplification :

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{c} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

$\mathbb{R}$, $b \neq 0$

Multiplication de fractions :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Règles des signes :

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

L'unité :

$$\frac{b}{b} = b \times \frac{1}{b} = 1$$

on comme multiplication :

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Fractions de fractions :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\times c = \frac{a \times c}{b} = a \times \frac{c}{b}$$

Figure 2.3 – Partie 2