# Chapitre 1 Fonctions quadratiques

**Définition 1.1** Un monôme en $x$ de **degré** $n(\in \mathbb{N})$ est une expression de la forme $ax^n$. Deux monômes sont semblables s'ils ont le même degré.
Une somme de monômes est **ordonnée réduite** si les monômes sont rangés par degré décroissant et ne sont pas semblables.

■ **Exemple 1.1** • 5, 0 sont des termes constants.
- $4x^3$ est un monôme de degré 3. Le coefficient est 4.
- $-x$ est un monôme de degré 1. Le coefficient est $-1$.

■ **Exemple 1.2** $3x+5$ est un polynôme ordonné réduit de degré 1.[1]
- $-3x^2+2x+5$ est un polynôme ordonné réduit de degré 2.[2]
- $5x^3-x^2+5$ est un polynôme ordonné réduit de degré 3.[3]

[1] expression **affine** en $x$

[2] expression **quadratique** en $x$

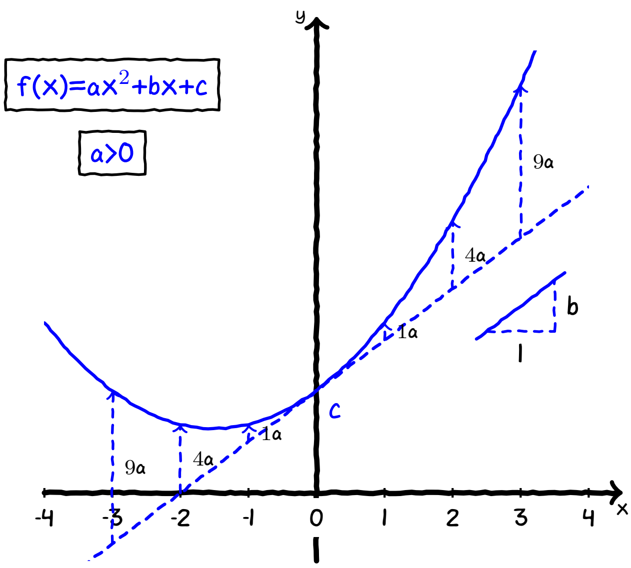
[3] expression **cubique** en $x$

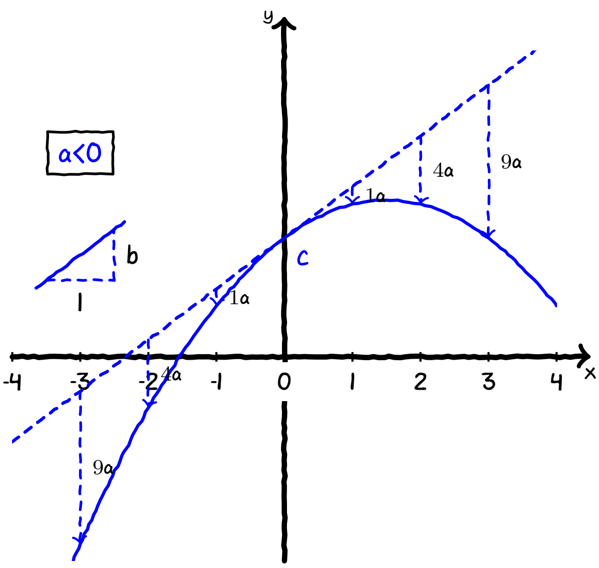
**Définition 1.2** Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme de degré 2 si il existe $a \neq 0$, $b$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que :[4]

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = ax^2+bx+c$$

Sa représentation graphique s'appelle une **parabole** (Desmos V1 et V2).

[4] nous dirons fonction quadratique

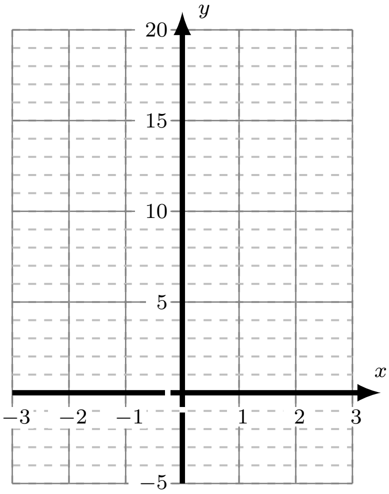


■ **Exemple 1.3** Représentez les courbes $\mathscr{P}$ données par leur équation.

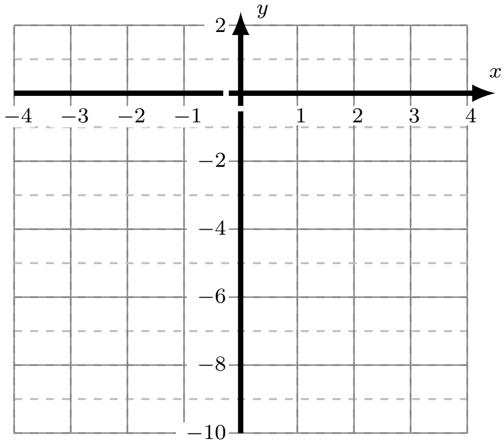
$\mathscr{P}_1 : y = 2x^2$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |



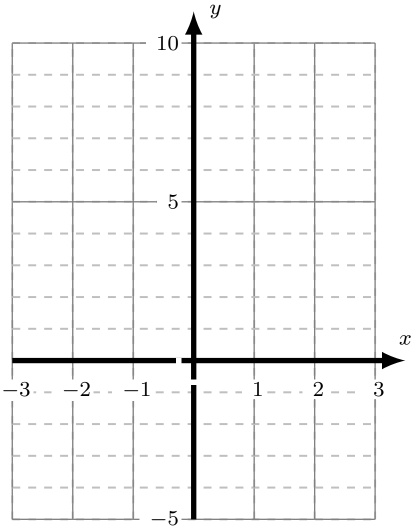

$\mathscr{P}_2 : y = -x^2$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |



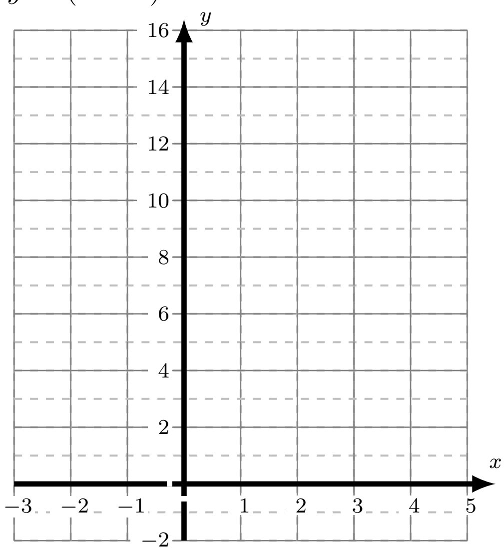

$\mathscr{P}_3 : y = x^2 - 3$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | 1 |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |



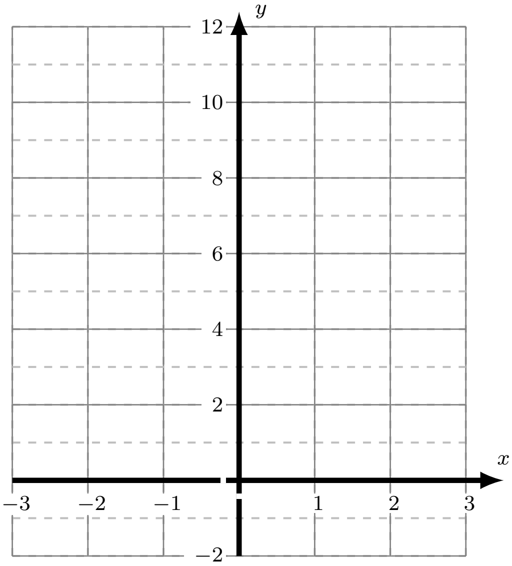

$\mathscr{P}_4 : y = (x-2)^2$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-2$ | -4 |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | -9 |



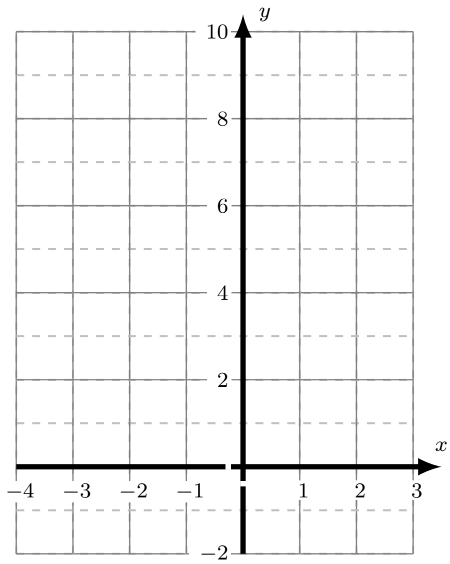

$\mathscr{P}_5 : y = x^2 + 3$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | 7 |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |




$\mathscr{P}_6 : y = (x+1)^2$

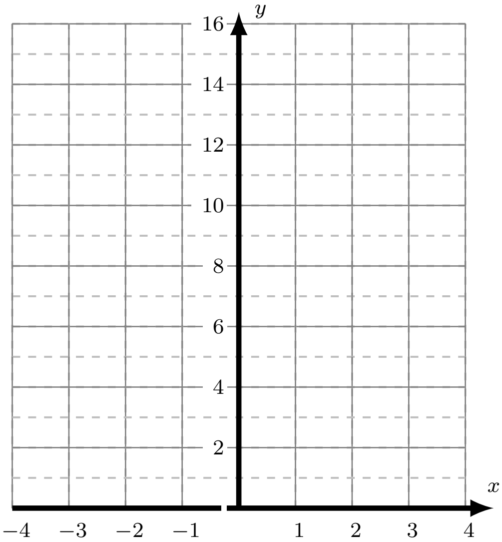
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |



**Exemple 1.4** Dans chaque cas, représentez la courbe $\mathscr{P}$ et la droite $d$.

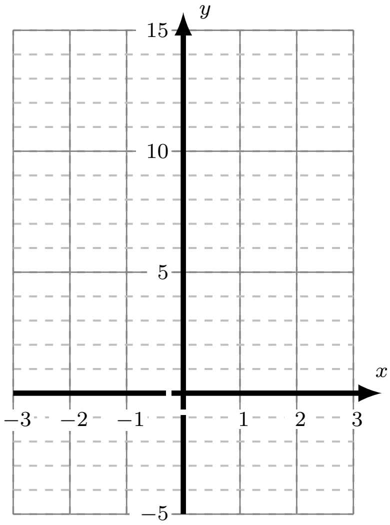
$\mathscr{P}_1\colon y = x^2 - x + 3$ et $d\colon y = -x + 3$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |



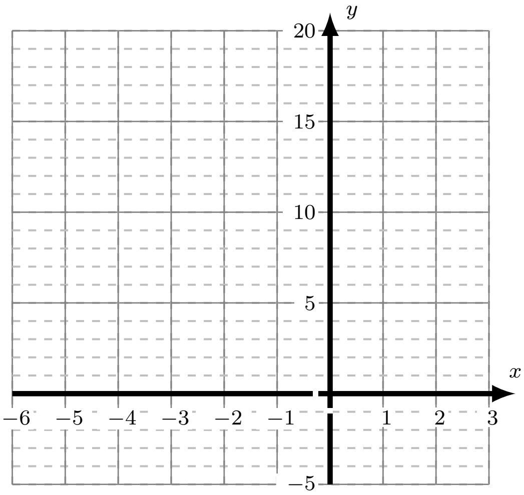

$\mathscr{P}_2\colon y = x^2 + x - 3$ et $d\colon y = x - 3$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |



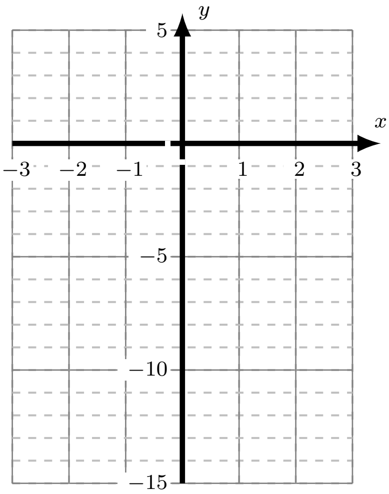

$\mathscr{P}_3\colon y = 2x^2 + 5x$ et $d\colon y = 5x$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-4$ | |
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |



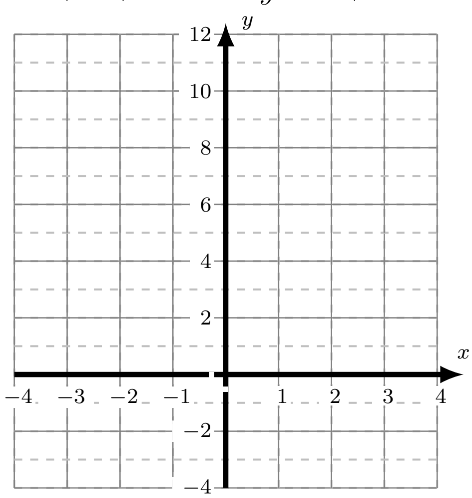

$\mathscr{P}_4\colon y = -x^2 + x$ et $d\colon y = x$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |



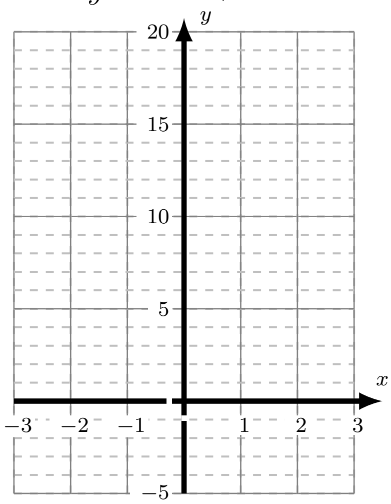

$\mathscr{P}_5\colon y = -x^2 + x + 10$ et $d\colon y = x + 10$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-4$ | |
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |




$\mathscr{P}_6\colon y = x^2 - 2x + 1$ et $d\colon y = -2x + 1$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |

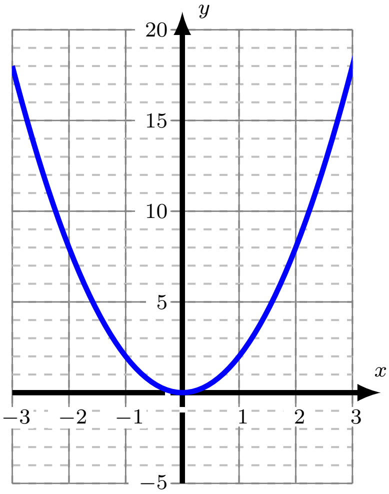



Qu'observez vous ?

## Réponses

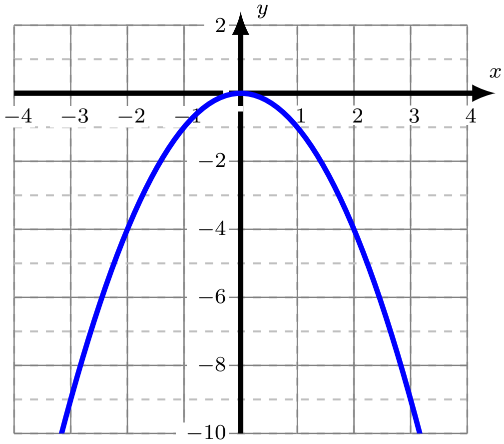
$\mathscr{P}_1 : y = 2x^2$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |



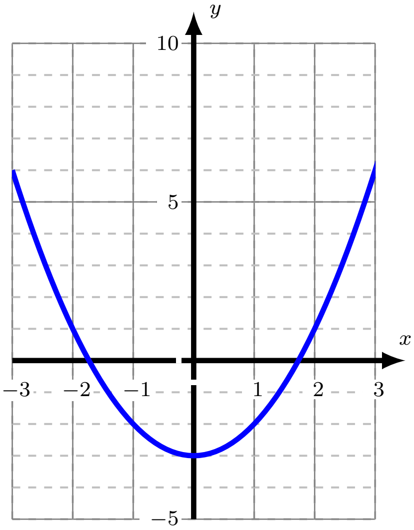
$\mathscr{P}_2 : y = -x^2$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |



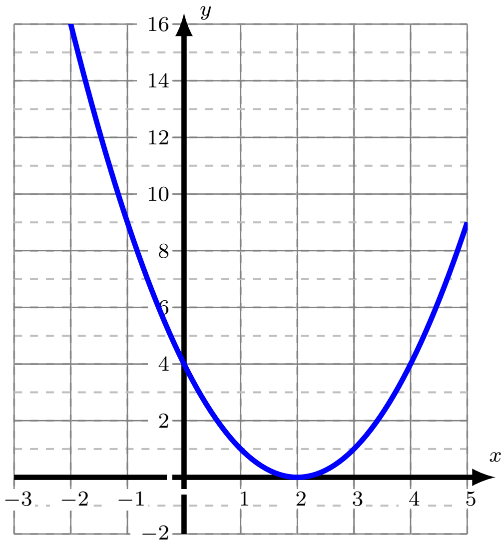
$\mathscr{P}_3 : y = x^2 - 3$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | 1 |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |



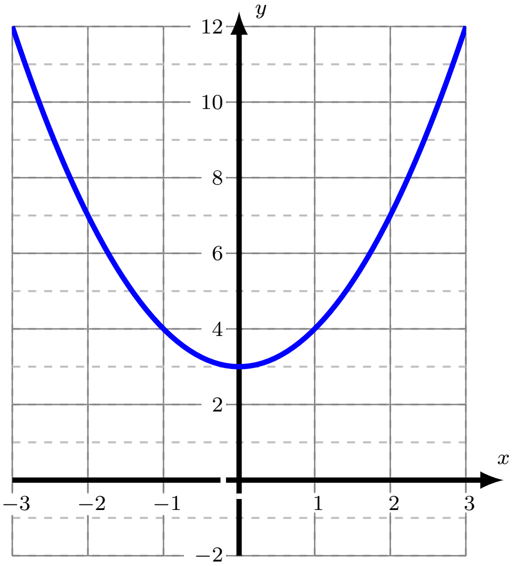
$\mathscr{P}_4 : y = (x-2)^2$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-2$ | -4 |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | -9 |



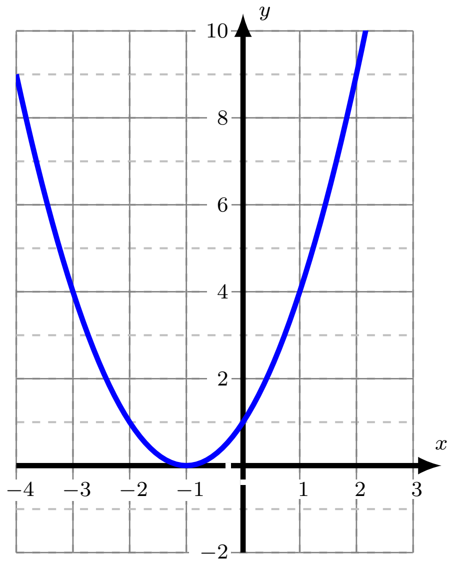
$\mathscr{P}_5 : y = x^2 + 3$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | 7 |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |



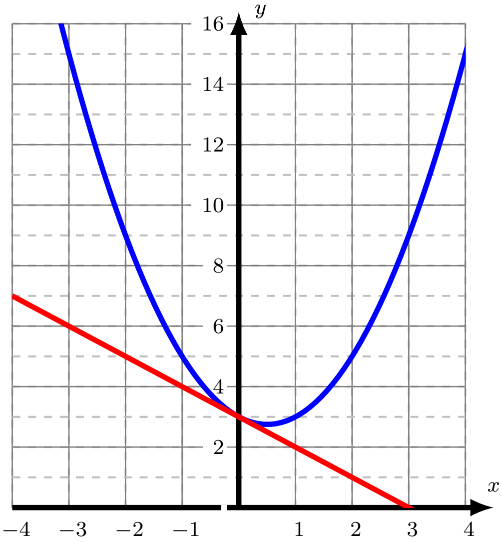
$\mathscr{P}_6 : y = (x+1)^2$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |



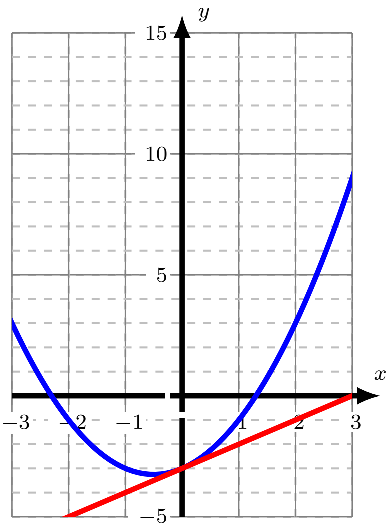
$\mathscr{P}_1\colon y = x^2 - x + 3$ et $d\colon y = -x + 3$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |



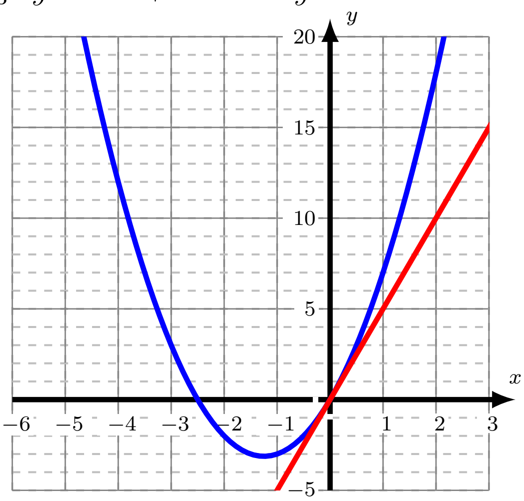

$\mathscr{P}_2\colon y = x^2 + x - 3$ et $d\colon y = x - 3$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |



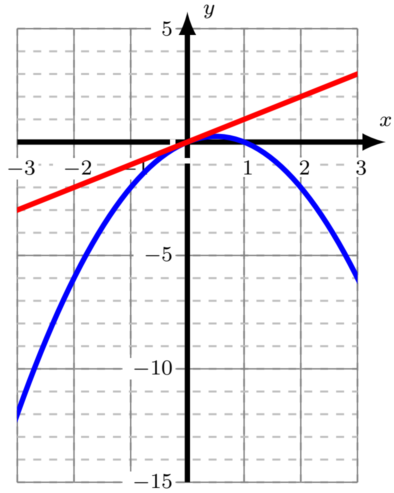

$\mathscr{P}_3\colon y = 2x^2 + 5x$ et $d\colon y = 5x$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-4$ | |
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |



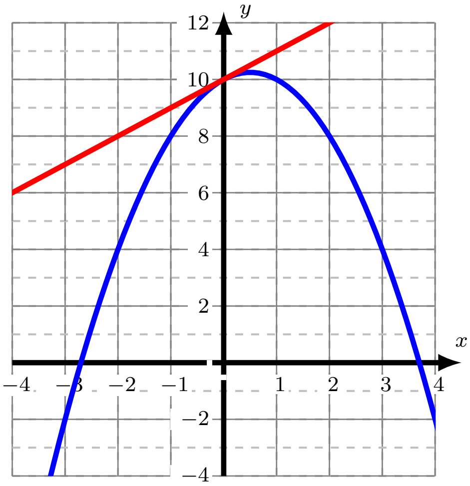

$\mathscr{P}_4\colon y = -x^2 + x$ et $d\colon y = x$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |



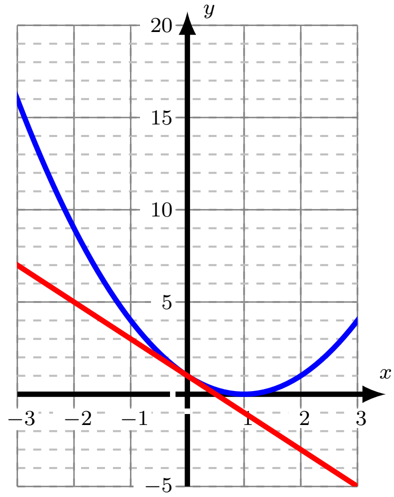

$\mathscr{P}_5\colon y = -x^2 + x + 10$ et $d\colon y = x + 10$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-4$ | |
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |




$\mathscr{P}_6\colon y = x^2 - 2x + 1$ et $d\colon y = -2x + 1$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |



## 1.1 La forme canonique

**Définition 1.3** Soit $a \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
La fonction quadratique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

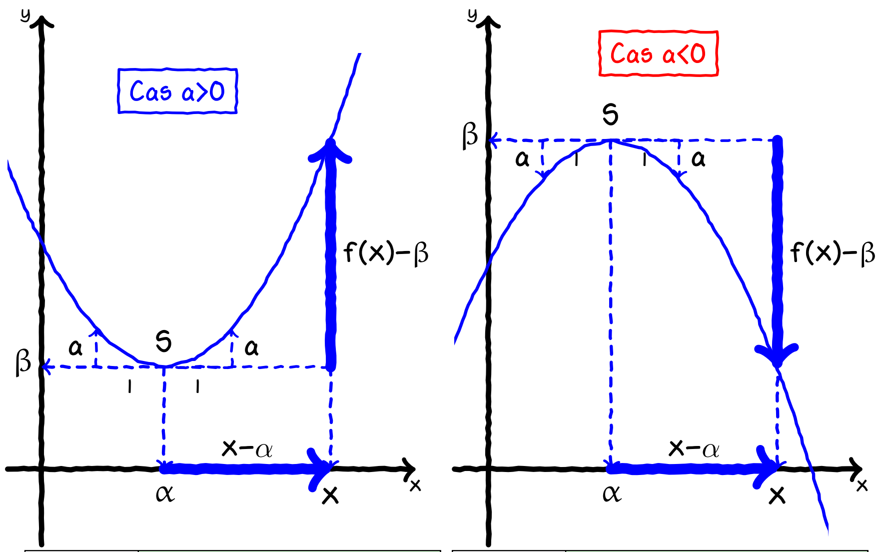
est une fonction monotone sur $]-\infty; \alpha]$ et sur $[\alpha; \infty[$.

*Démonstration.* **Cas** $a > 0$

Soit $\alpha < u < v$ :

$$\begin{aligned}
&\alpha < u < v \\
&\qquad\Big\downarrow -\alpha \\
&0 < u-\alpha < v-\alpha \\
&\qquad\Big\downarrow \textit{La fonction carré est croissante sur } [0;\infty[ \\
&0 < (u-\alpha)^2 < (v-\alpha)^2 \\
&\qquad\Big\downarrow \textit{La fonction } x \mapsto ax+\beta \textit{ est croissante} \\
&\beta < f(u) < f(v)
\end{aligned}$$

$f$ préserve l'ordre sur $[\alpha; \infty[$, elle est croissante.
Les autres cas se traitent de manière similaire. ■




| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $\beta$ | ↗ $+\infty$ |

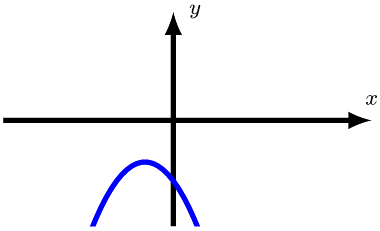
| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $\beta$ | ↘ $-\infty$ |

**Figure 1.1** – Représentation graphique d'une fonction quadratique donné par forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.Desmos V1 et V2

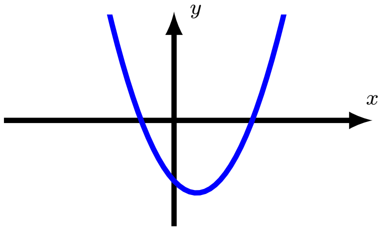
**Proposition 1.1** Soit $a \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
La fonction quadratique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ a pour représentation graphique une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$, un axe de symétrie vertical $d$: $x = \alpha$.
Elle est une translation de la parabole d'équation $y = ax^2$.

## Exercices

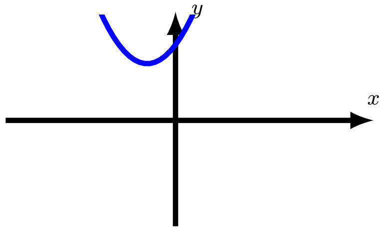
**Exercice 1** Pour chaque représentation cochez la fonction quadratique qui correspond.



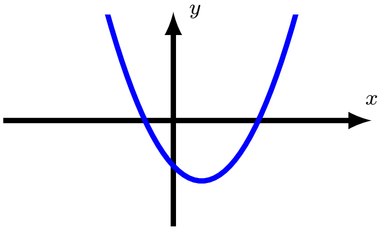

❏ $f: x \mapsto -5x^2 - 5x + 4$
❏ $f: x \mapsto -5x^2 - 5x - 4$
❏ $f: x \mapsto -5x^2 + 5x - 4$
❏ $f: x \mapsto 5x^2 + 5x - 4$



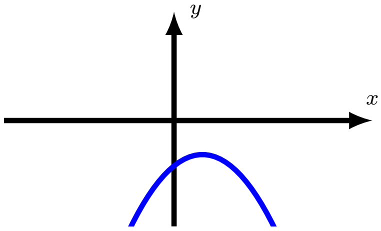

❏ $f: x \mapsto 5x^2 - 4x + 4$
❏ $f: x \mapsto 5x^2 - 4x - 4$
❏ $f: x \mapsto -5x^2 + 4x - 4$
❏ $f: x \mapsto 5x^2 + 4x - 4$



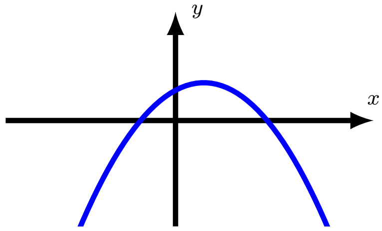

❏ $f: x \mapsto 5x^2 - 5x + 5$
❏ $f: x \mapsto 5x^2 + 5x + 5$
❏ $f: x \mapsto -5x^2 - 5x + 5$
❏ $f: x \mapsto -5x^2 + 5x + 5$




❏ $f: x \mapsto -4x^2 - 4x - 3$
❏ $f: x \mapsto 4x^2 - 4x - 3$
❏ $f: x \mapsto 4x^2 + 4x - 3$
❏ $f: x \mapsto -4x^2 + 4x - 3$

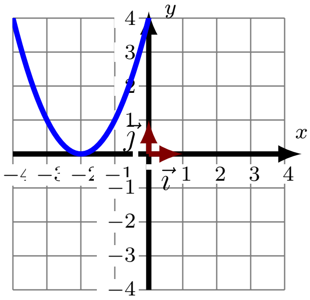



❏ $f: x \mapsto -3x^2 - 3x + 3$
❏ $f: x \mapsto -3x^2 - 3x - 3$
❏ $f: x \mapsto -3x^2 + 3x - 3$
❏ $f: x \mapsto -3x^2 + 3x + 3$

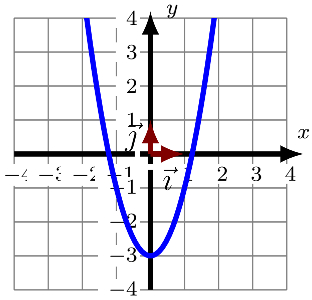



❏ $f: x \mapsto 2x^2 + 2x + 2$
❏ $f: x \mapsto -2x^2 + 2x - 2$
❏ $f: x \mapsto -2x^2 - 2x + 2$
❏ $f: x \mapsto -2x^2 + 2x + 2$

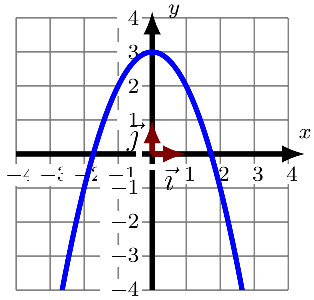
**Exercice 2** Pour chaque représentation cochez la fonction quadratique qui correspond.



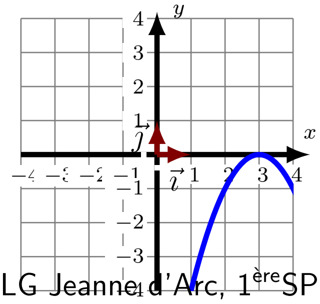
❏ $f: x \mapsto (x-2)^2$
❏ $f: x \mapsto (x+2)^2$
❏ $f: x \mapsto x^2 + 2$
❏ $f: x \mapsto x^2 - 2$



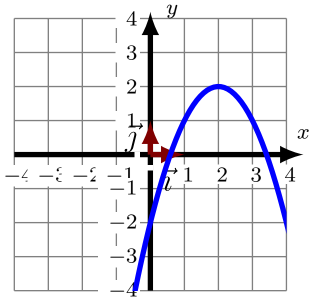
❏ $f: x \mapsto x^2 - 3$
❏ $f: x \mapsto 2x^2 - 3$
❏ $f: x \mapsto 3x^2 - 3$
❏ $f: x \mapsto 4x^2 - 3$



❏ $f: x \mapsto x^2 + 3$
❏ $f: x \mapsto (-x)^2 - 3$
❏ $f: x \mapsto (-x)^2 + 2$
❏ $f: x \mapsto -x^2 + 2$

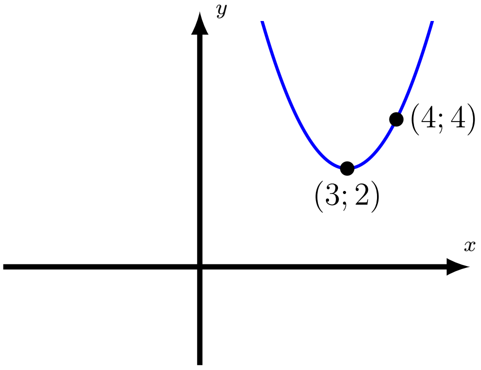


❏ $f: x \mapsto (x-3)^2$
❏ $f: x \mapsto (-x+3)^2$
❏ $f: x \mapsto -(x-3)^2$
❏ $f: x \mapsto -(x+3)^2$



❏ $f: x \mapsto (x-2)^2 + 2$
❏ $f: x \mapsto -(x+2)^2 - 2$
❏ $f: x \mapsto -(x-2)^2 - 2$
❏ $f: x \mapsto (x+2)^2 + 2$

■ **Exemple 1.5** Complétez et retrouvez l'expression réduite de la fonction quadratique représentée ci-dessous.




$f(x) - \ldots\ldots = \ldots\ldots (x - \ldots\ldots)^2$

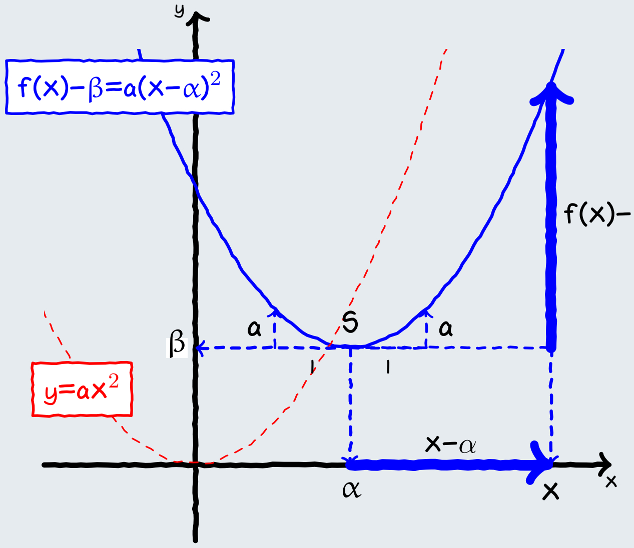
$f(x) = \ldots\ldots (x - \ldots\ldots)^2 + \ldots\ldots$

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

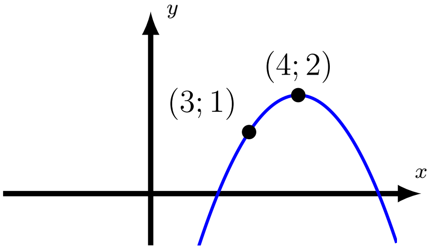
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

est une fonction quadratique dont la représentation $\mathscr{C}_f$ est une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$.

$\mathscr{C}_f$ est une translation de la parabole $\mathscr{P} : y = ax^2$.

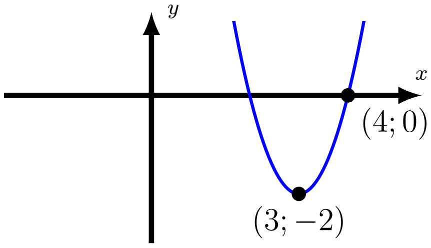



**Exercice 3** Mêmes consignes.



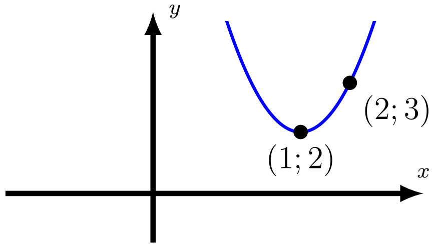

$f(x) - \ldots = \ldots (x - \ldots\ldots)^2$

$f(x) = \ldots (x - \ldots\ldots)^2 + \ldots$



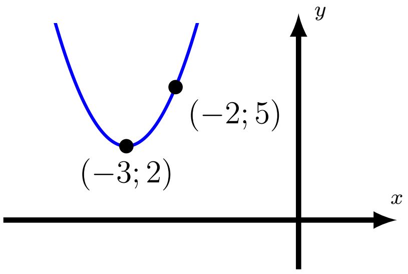

$f(x) - \ldots = \ldots (x - \ldots\ldots)^2$

$f(x) = \ldots (x - \ldots\ldots)^2 + \ldots$



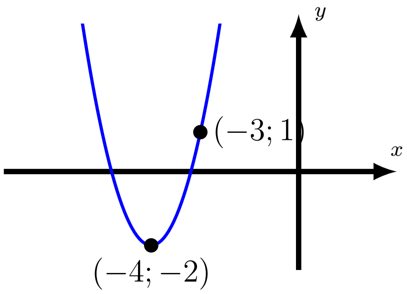

$f(x) - \ldots = \ldots (x - \ldots\ldots)^2$

$f(x) = \ldots (x - \ldots\ldots)^2 + \ldots$



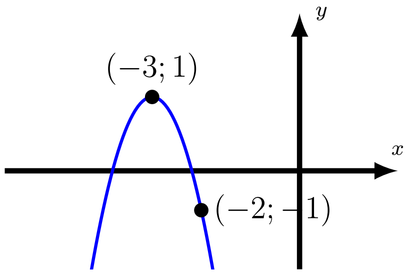

$f(x) - \ldots = \ldots (x - \ldots\ldots)^2$

$f(x) = \ldots (x - \ldots\ldots)^2 + \ldots$




$f(x) - \ldots = \ldots (x - \ldots\ldots)^2$

$f(x) = \ldots (x - \ldots\ldots)^2 + \ldots$




$f(x) - \ldots = \ldots (x - \ldots\ldots)^2$

$f(x) = \ldots (x - \ldots\ldots)^2 + \ldots$

**Défi calculatrice** Pouvez-vous retrouver la forme canonique de $2x^2 - 4x + 5$ ? $x^2 - \sqrt{2}x + 5$ ?

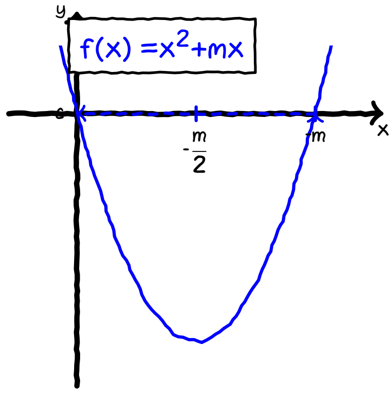
## 1.2 Complétion au carré et forme canonique

**Théorème 1.2 — au programme.** Pour tout $x$ et $m \in \mathbb{R}$ on a l'identité :

$$x^2 + mx = x(x+m) = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

La fonction quadratique donnée par $f(x) = x^2 + mx$ :

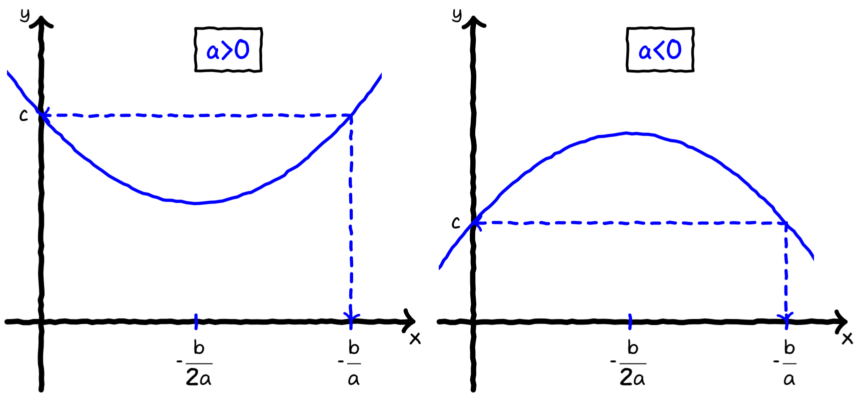
- admet pour racines $x = 0$ et $-m$.
- atteint son extremum en $x = -\dfrac{m}{2}$ d'après la forme canonique.




**Conséquence** La fonction quadratique de forme réduite

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x\right) + c$$

- $f(0) = f(-\frac{b}{a}) = c$
- atteint son extremum en $x = \alpha = -\dfrac{b}{2a}$.
- l'extremum $\beta = f(\alpha)$ est un maximum si $a > 0$, et un minimum si $a < 0$.




**Théorème 1.3 — forme canonique.** [5] Pour tout fonction quadratique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, il existe deux réels $\alpha$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

De plus $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

[5] non exigible

## Exercices : Compléter au carré

La complétion au carré est une technique qui permet d'obtenir la forme canonique à partir de la forme réduite d'une fonction quadratique.

■ **Exemple 1.6 — complétion au carré cas $a = 1$.** (les $-$ sont parfois à transformer en $+$)

$f(x) = x^2 + 10$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 10x \\ &= x(x+10) \\ &= (x + \ldots - \ldots)(x + 5 + 5) \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x \\ &= x(x - \ldots) \\ &= (x - \ldots + \ldots)(x - \ldots - \ldots) \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 5x \\ &= x(x - \ldots) \\ &= (x - \ldots - \ldots)(x - \ldots - \ldots) \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3x \\ &= x(x - \ldots) \\ &= (x - \ldots - \ldots)(x - \ldots - \ldots) \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 7x + 5 \\ &= x(x - \ldots) + 5 \\ &= (x - \ldots - \ldots)(x - \ldots - \ldots) + 5 \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 12x - 2 \\ &= \ldots x(x - \ldots) - 2 \\ &= (x - \ldots - \ldots)(x - \ldots - \ldots) - 2 \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

**Exercice 4** Retrouvez par complétion au carré la forme quadratique des fonctions suivantes :

| $f_1(x) = x^2 + 4x$ | $f_2(x) = x^2 - 10x$ | $f_3(x) = x^2 + 3x + 1$ | $f_4(x) = x^2 - 5x - 3$ |
|---|---|---|---|

■ **Exemple 1.7** (les $-$ sont parfois à transformer en $+$)

$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
$= 2\left[x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\right]$

$f(x) = -x^2 + 12x - 2$
$= -\left[x^2 \dots 12x \dots 2\right]$

$f(x) = -x^2 + 10x - 25$
$= -\left[x^2 \dots 10x \dots 25\right]$

**Exercice 5** Retrouvez par complétion au carré la forme quadratique des fonctions suivantes :

| $f_1(x) = 3x^2 + 9x + 5$ | $f_2(x) = -2x^2 + 2x + 2$ | $f_3(x) = -x^2 - 8x + 7$ | $f_4(x) = -x^2 + 2x - 3$ |
|---|---|---|---|

**Exercice 6** Pour chaque fonction quadratique :

a) Déterminez la forme canonique par complétion au carré.
b) Complétez le tableau de variation.
c) Justifiez le sens de variation sur l'intervalle $[1;2]$.
d) Donner selon les valeurs de $k$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ d'inconnue $x$.

| $f_1(x) = x^2 - \dfrac{4}{3}x$ | $f_2(x) = -x^2 + 5x + 2$ | $f_3(x) = 2x^2 + 9x + 11$ |
|---|---|---|

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f_1(x)$ | |

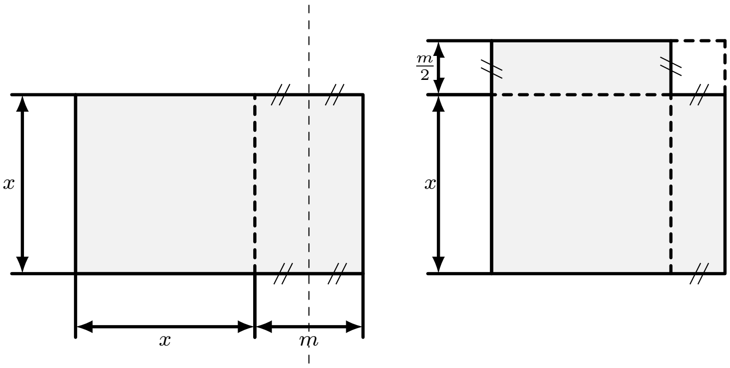
| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f_1(x)$ | |

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f_1(x)$ | |

**Exercice 7**

a) Complétez pour retrouver l'identité illustrée par la figure ci-contre.

$$x^2 + \dots\dots = \left(\dots \quad \dots\right)^2 - \left(\dots\dots\right)^2$$




b) Démontrer algébriquement cette identité.
c) Retrouver la forme canonique de $ax^2 + bx$.

**Exercice 8** Suivre la démarche proposée pour trouver la forme réduite de la fonction quadratique $f$ dont la représentation graphique est une parabole de sommet $S(-2;3)$ et passant par $A(5,8)$.

a) On pose $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ la forme canonique de $f$.
Préciser les valeurs de $\alpha$ et $\beta$.
b) Donner une équation vérifiée par $a$ et la résoudre.
c) Développer la forme canonique et conclure.

**Problème 1** Dans le repère orthonormé $(O;I,J)$, soit la droite $d\colon y = 2x + 3$ et $M(x;y) \in d$.

a) Démontrer que $OM^2 = 5x^2 + 12x + 9$. ([1])
b) Déterminer la forme canonique par une complétion au carré.
c) Quelle est la distance minimale qui sépare la droite $d$ de l'origine du repère ?

1. On rappelle que dans un repère orthonormé $AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$.

*solution de l'exercice 4 .* $f_1(x) = (x+2)^2 - 4$; $f_2(x) = (x-5)^2 - 25$; $f_3(x) = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$; $f_4(x) = \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{37}{4}$; ■

*solution de l'exercice 5 .* $f_1(x) = 3\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}$; $f_2(x) = \frac{5}{2} - 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$; $f_3(x) = 23 - (x+4)^2$; $f_4(x) = -(x-1)^2 - 2$; ■

*solution partielle de l'exercice 11 .* $f_1(x) = \left(x-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}$; $f_2(x) = (x-7)^2 - 58$; $f_3(x) = \frac{33}{4} - \left(x-\frac{5}{2}\right)^2$; ■

## 1.3 La forme factorisée

**Définition 1.4** Soit $f$ une fonction quadratique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$.
$f$ est dite factorisable, s'il existe $r_1$ et $r_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

$r_1$ et $r_2$ sont les racines de $f$ :

$$f(r_1) = 0 \qquad f(r_2) = 0$$

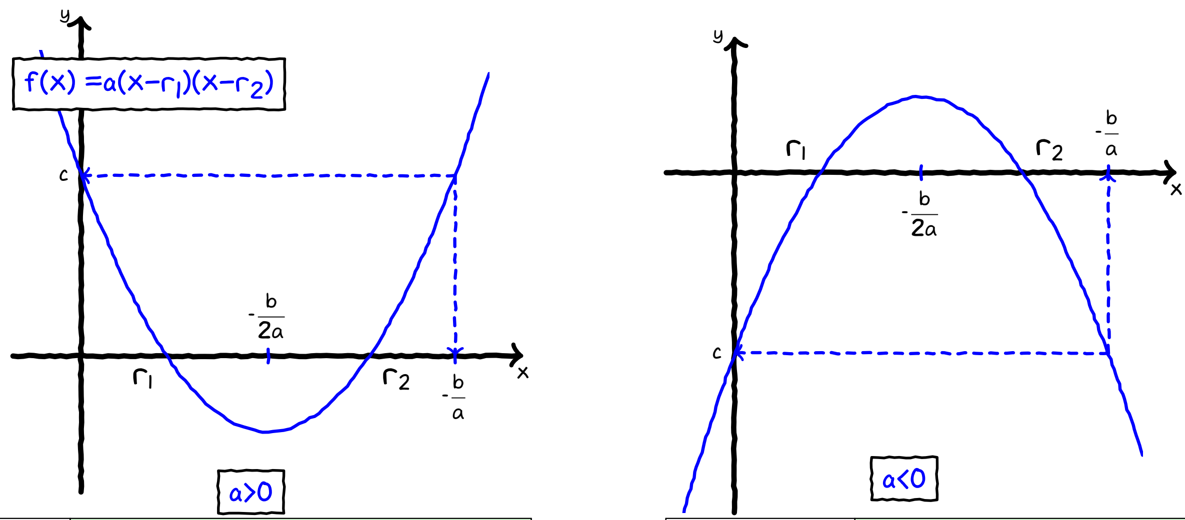
■ **Exemple 1.8**

a) $f(x) = (3x - 7)(2x + 5)$

$$= 3\left(x - \frac{7}{3}\right) \times 2\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

$$f(x) = 6\left(x - \frac{7}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) \qquad \text{forme factorisée de la défintion 1.4}$$

b) Pour $f(x) = 2(x - 7)^2$, 7 est une racine double : $r_1 = r_2 = 7$.




| $x$ | $-\infty$ | | $r_1$ | | $r_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $r_1$ | | $r_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**Figure 1.2** – Représentation graphique d'une fonction quadratique donnée par forme factorisée $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.

**Proposition 1.4** Une fonction quadratique qui ne s'annule pour aucune valeur de $x$, n'a pas de forme factorisée.

■ **Exemple 1.9** Les fonctions définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -(x + 5)^2 - 5$ ne sont pas factorisables dans $\mathbb{R}$.

## Exercices : la forme factorisée

**Exercice 9** Écrire chaque fonction quadratique sous la forme factorisée $a(x - r_1)(x - r_2)$. Préciser le signe de $a$, et les racines.

$f_1(x) = 2(x+3)(x-5)$

$f_2(x) = (x-3)(x+3)$

$f_3(x) = (5x-2)(x-4)$

$f_4(x) = (2x-10)(3x+15)$

$f_5(x) = (5x-2)(3x-7)$

$f_6(x) = 4(-x+5)(2x+3)$

$f_7(x) = x^2 - 5x$

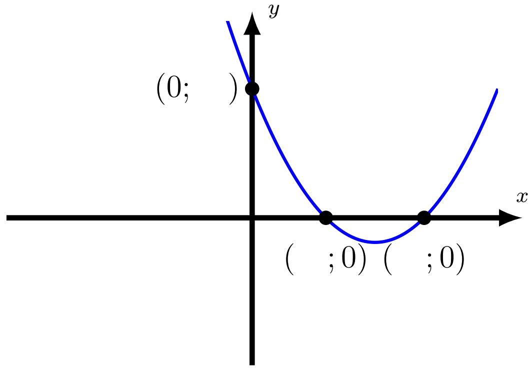
$f_8(x) = 5x^2 + 2x$

$f_9(x) = -x^2 + 3x$

■ **Exemple 1.10** Représentez schématiquement la fonction quadratique donnée.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-1)(x-3) \\ &= 2(x - \tfrac{1}{2})(x-3) \quad \text{forme factorisée} \\ &= 2x^2 - 6x - x + 3 \\ &= 2x^2 - 7x + 3 \quad \text{forme réduite} \end{aligned}$$

*développer*




Avec une expression factorisée : $f(x) = 0$

$$(2x-1)(x-3) = 0$$

$$2x - 1 = 0 \qquad\qquad x - 3 = 0$$

$$r_1 = \ldots \qquad\qquad r_2 = \ldots$$

Avec la forme réduite : on a $a \ldots 0$ et $f(0) = \ldots 3$

**Exercice 10** Pour chacune des fonctions quadratiques factorisées, donner la forme réduite, et compléter le schéma en précisant les points d'intersection avec les axes du repère.

$f_1(x) = (x-5)(x-1)$

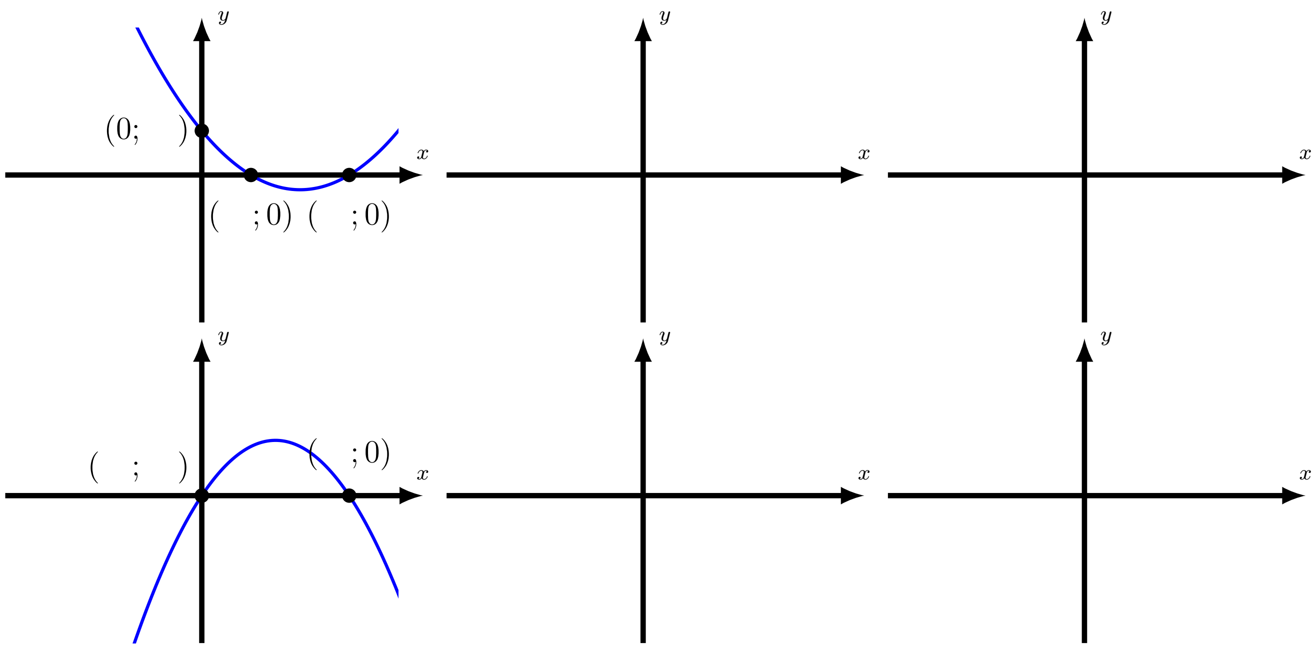
$f_2(x) = -3x(2x-7)$

$f_3(x) = (5-x)(x+2)$

$f_4(x) = (5-2x)(2x+5)$

$f_5(x) = (2x+1)^2$

$f_6(x) = (2-x)^2$



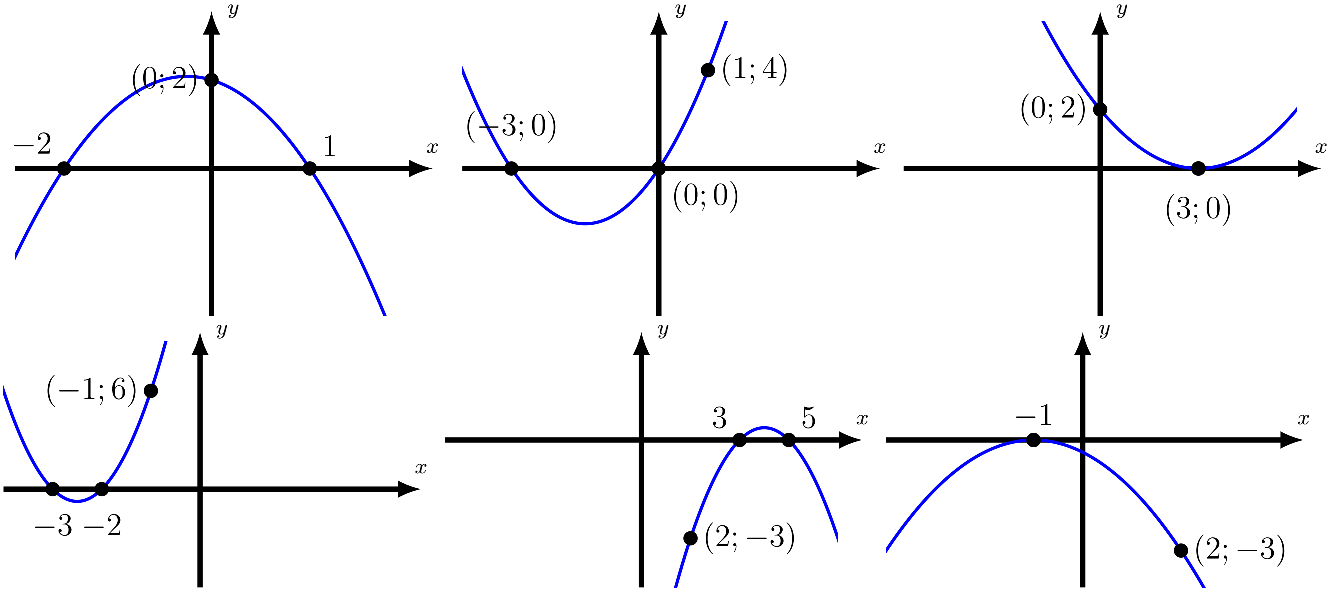
### Exercice 11

Suivre la démarche proposée pour trouver la forme factorisée $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ des fonctions quadratiques représentées ci-dessous.

a) Donnner par lecture graphique le(s) racine(s) de $f$.

b) Donner une équation vérifiée par $a$ et la résoudre.

c) Donner la forme réduite de la fonction $f$.




**Exercice 12** Pour chaque fonction quadratique ci-dessous :

a) Déterminez les racines.

b) Déterminez le signe du coefficient $a$ de $x^2$ dans la forme réduite.

c) Complétez le tableau de signe.

$f_1(x) = 5(x + 1)(x - 6)$

| $x$ | $-\infty$ | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | |

$f_2(x) = -2(x - 2)(x - 9)$

| $x$ | $-\infty$ | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_2(x)$ | | | | |

$f_3(x) = -5x(x + 2)$

| $x$ | $-\infty$ | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_3(x)$ | | | | |

$f_4(x) = (2x - 7)(2x + 7)$

| $x$ | $-\infty$ | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_4(x)$ | | | | |

**Exercice 13** Sans dresser un tableau de signe, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations d'inconnue $x$.

$(I_1)$ $(x - 1)(x - 4) > 0$

$(I_2)$ $(x - 10)(x + 5) < 0$

$(I_3)$ $-2(x + 8)(x + 7) \geqslant 0$

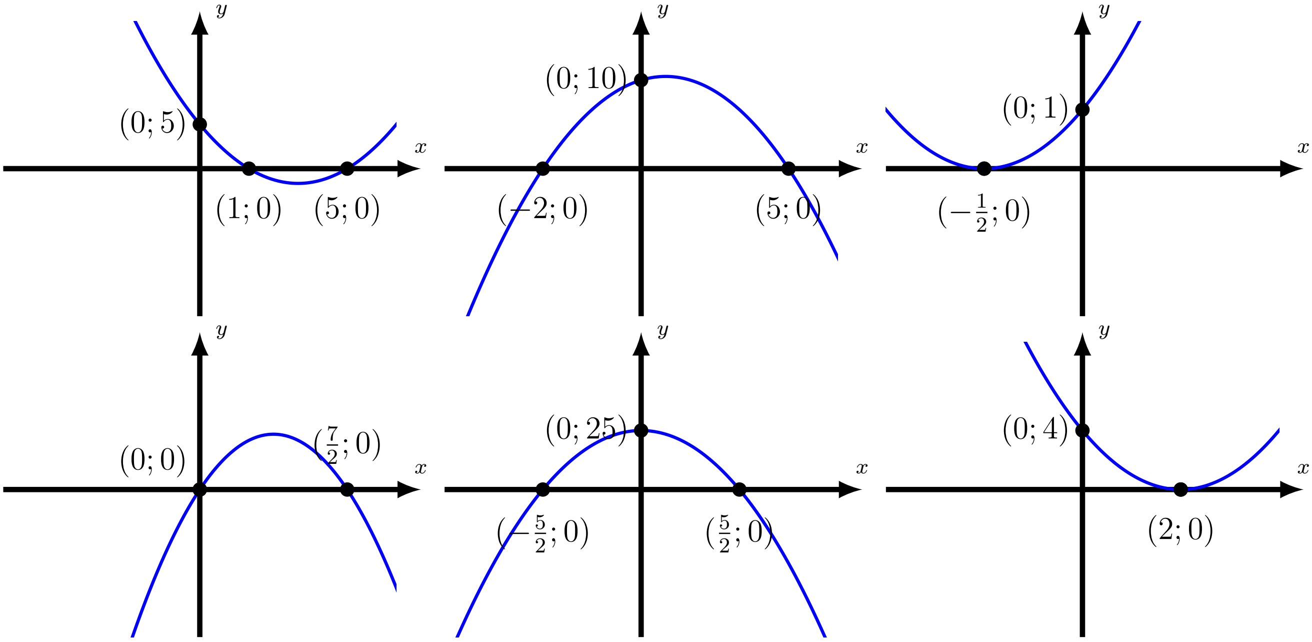
$(I_4)$ $(3x + 5)(-2x + 1) \leqslant 0$

**Défi** Trouvez une (ou plusieurs) fonction quadratique $f$ tel que $f(3) = 5$ et $f(4) = 5$.

*solution de l'exercice 9 .*

$f_1(x) = 2(x-5)(x+3)$; $f_2(x) = (x-3)(x+3)$; $f_3(x) = (x-4)(5x-2)$; $f_4(x) = 6(x-5)(x+5)$; $f_5(x) = (3x-7)(5x-2)$; $f_6(x) = -4(x-5)(2x+3)$; $f_7(x) = x(x-5)$; $f_8(x) = x(5x+2)$; $f_9(x) = -x(x-3)$; ■

*solution de l'exercice 10 .*




■

*solution de l'exercice 11 .*

$f_1(x) = -(x+2)(x-1) = -x^2 - x + 2$

$f_2(x) = x(x+3) = x^2 + 3x$

$f_3(x) = \frac{2}{9}(x-3)^2 = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$

$f_4(x) = 3(x+3)(x+2) = 3x^2 + 15x + 18$

$f_5(x) = -(x-3)(x-5) = -x^2 + 8x - 15$

$f_6(x) = -\frac{1}{3}(x+1)^2 = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

■

*solution de l'exercice 12 .*

■

*solution de l'exercice 13 .*

$(I_1)$ $\mathscr{S}_1 = ]-\infty, 1[ \cup ]4, \infty[$

$(I_2)$ $\mathscr{S}_2 = ]-5, 10[$

$(I_3)$ $\mathscr{S}_3 = [-8, -7]$

$(I_4)$ $\mathscr{S}_4 = \left]-\infty, -\frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right[$

■

## 1.4 La forme factorisée : produit et somme des racines

*Les exercices de cette section peuvent être écourtés.* Soit $f$ fonction quadratique factorisable, de racines $r_1$ et $r_2$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - r_1)(x - r_2) \\ &= a(x^2 - r_1 x - r_2 x + r_1 r_2) \\ &= ax^2 - a(r_1 + r_2)x + a r_1 r_2 \\ &= ax^2 - asx + ap \end{aligned}$$

**Théorème 1.5** Les racines $r_1$ et $r_2$ d'une fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ doivent vérifier :

- La somme des racines $s = r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a}$.
- Le produit des racines $p = r_1 r_2 = \dfrac{c}{a}$

### 1.4.1 Exercices : la forme factorisée et somme et produit des racines

Pour $x$, $r_1$ et $r_2 \in \mathbb{R}$ :

Pour factoriser : $f(x) = 1x^2 - sx + p$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-r_1)(x-r_2) \quad &\textit{développer} \\ &= \quad &\textit{réduire} \\ &= x^2 + \ldots\ldots\ldots x + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

■ **Exemple 1.11 — Cas p>0.** Factoriser en cherchant des racines entières $r_1$ et $r_2$ de même signe.

$f(x) = x^2 + 7x + 10$ $\qquad$ $g(x) = x^2 - 9x + 20$

**Exercice 14 — À vous.** Mêmes consignes

$f_1(x) = x^2 + 6x + 5$

$f_2(x) = x^2 + 10x + 16$

$f_3(x) = x^2 - 17x + 16$

$f_4(x) = x^2 + 6x + 8$

$f_5(x) = x^2 + 7x + 10$

$f_6(x) = x^2 - 7x + 12$

■ **Exemple 1.12 — Cas p<0.** Factoriser en cherchant des racines entières $r_1$ et $r_2$ de signes contraires.

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ $\qquad$ $g(x) = x^2 - 14x - 15$

**Exercice 15 — À vous.** Mêmes consignes

$f_1(x) = x^2 + x - 6$

$f_2(x) = x^2 - 5x - 14$

$f_3(x) = x^2 - 6x - 40$

$f_4(x) = x^2 - x - 12$

$f_5(x) = x^2 + 2x - 8$

$f_6(x) = x^2 + 5x - 24$

**Exercice 16** On se donne une fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$, factorisable de racines $r_1$ et $r_2$. Cochez, dans chaque cas la bonne réponse.

| | $r_1$ et $r_2 < 0$ | $r_1 < 0 < r_2$ | $r_1$ et $r_2 > 0$ |
|---|---|---|---|
| **1/** $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| **2/** $a > 0$, $b < 0$ et $c > 0$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| **3/** $a < 0$, $b > 0$ et $c < 0$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| **4/** $a < 0$, $b > 0$ et $c > 0$ | ☐ | ☐ | ☐ |

■ **Exemple 1.13 — racines évidentes.** Certaines fonctions quadratiques ont une racine évidente, en déduire la seconde est immédiat.

$f(x) = 3x^2 + 10x + 8$ $\qquad$ $g(x) = 3x^2 + 14x + 8$

$f(\dots) =$ $\qquad$ $g(\dots) =$

**Exercice 17** Factoriser les expressions suivantes en identifiant une racine évidente.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f_1(x) = 2x^2 - 3x - 2$ | $f_2(x) = 2x^2 - 5x + 3$ | $f_3(x) = 4x^2 + 5x + 1$ | $f_4(x) = 6x^2 + 2x - 4$ |

> Soit $P(x)$ un polynôme de degré quelconque. Si $r$ est une racine : $P(r) = 0$, alors il existe un polynôme $Q$ tel que $P(x) = (x - r)Q(x)$.

**Exercice 18** Soit la fonction cubique $f(x) = -x^3 + 8x^2 + 11 - 18$.

a) Montrer que $P(-2) = 0$.
b) Développer ordonner et réduire l'expression $(x + 2)(ax^2 + bx + c)$
c) Trouver les réels $a$, $b$ et $c$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$P(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$$

d) On pose $Q(x) = -x^2 + 10x - 9$. À l'aide d'une racine évidente, factoriser $Q$.
e) Quel est le nombre de racines du polynôme $P$ ?

**Exercice 19 — entraînement.** Soit la fonction cubique $f(x) = -2x^3 + 10x^2 - 16 + 8$.

a) Montrer que $P(1) = 0$.
b) Développer ordonner et réduire l'expression $(x - 1)(ax^2 + bx + c)$
c) Trouver les réels $a$, $b$ et $c$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

d) On pose $Q(x) = -2x^2 + 8x - 8$. À l'aide d'une racine évidente, factoriser $Q$.
e) Quel est le nombre de racines du polynôme $P$ ?

*solution de l'exercice 14 .* $f_1(x) = (x+1)(x+5)$; $f_2(x) = (x+2)(x+8)$; $f_3(x) = (x-16)(x-1)$; $f_4(x) = (x+2)(x+4)$; $f_5(x) = (x+2)(x+5)$; $f_6(x) = (x-4)(x-3)$; $f_7(x) = (x+2)(x+6)$; $f_8(x) = (x-8)(x-5)$; ■

*solution de l'exercice 15 .* $f_1(x) = (x-2)(x+3)$; $f_2(x) = (x-7)(x+2)$; $f_3(x) = (x-10)(x+4)$; $f_4(x) = (x-4)(x+3)$; $f_5(x) = (x-2)(x+4)$; $f_6(x) = (x-3)(x+8)$; $f_7(x) = (x-5)(x+6)$; $f_8(x) = (x-20)(x+1)$; ■

*solution de l'exercice 17 .* $f_1(x) = (x-2)(2x+1)$; $f_2(x) = (x-1)(2x-3)$; $f_3(x) = (x+1)(4x+1)$; $f_4(x) = 2(x+1)(3x-2)$; ■

## 1.5 Exercices classiques : choisir la forme adaptée

**Exercice 20 — Grand classique.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = 2(x+4)(x-2)$
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = 2(x+1)^2 - 18$
3) Choisir la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :
   a) Complétez le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | |

   b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$, inconnue $x$.
   c) Calculez $f(0)$.
   d) Quel est le minimum de $f$ sur $\mathbb{R}$.
   e) Résoudre l'équation $f(x) = -16$, inconne $x$.
   f) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$, inconne $x$.

**Exercice 21** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 14x + 15$ et $\mathscr{P}$ sa représentation graphique.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = (x+3)(3x+5)$.
2) Montrer par complétion au carré que $f(x) = 3\left(x + \frac{7}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}$
3) Choisir la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :
   a) Quel est le sommet de la parabole $\mathscr{P}$.
   b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$, inconnue $x$.
   c) Calculer $f(\sqrt{2})$.
   d) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -1$, inconnue $x$.
   e) Complétez le tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | |

   f) Résoudre l'équation $f(x) = 15$, inconnue $x$.

**Exercice 22** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 8x + 3$ et $\mathscr{P}$ sa représentation graphique.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = (2x+1)(2x+3)$.
2) Montrer par complétion au carré que $f(x) = 4\,(x+1)^2 - 1$
3) Choisir la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :
   a) Quel est le sommet de $\mathscr{P}$ ?
   b) Calculer $f(-\sqrt{2})$ et $f(0)$.
   c) Montrer que pour tout $x$, $f(x) \geqslant -1$.
   d) Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$, inconnue $x$.
   e) Résoudre l'inéquation $f(x) < 3$, inconnue $x$.
   f) Résoudre l'équation $f(x) = 9$, inconnue $x$.

**Exercice 23** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+5)^2 - (3x-4)(x+5)$.

1) Factoriser et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -2(x+5)(x - \frac{9}{2})$.
2) Montrer que $f(x) = -2x^2 - x + 45$.
3) Montrer par complétion au carré que $f(x) = -2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + 45{,}125$.
4) Choisir la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :
   a) Calculer $f(0)$ et $f(-1)$.
   b) Donner l'équation réduite de l'axe de symétrie de la représentation graphique $\mathscr{P}$.
   c) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$, inconnue $x$.
   d) Résoudre l'équation $f(x) = 45$, inconnue $x$.
   e) Quel est le maximum de $f$ ?

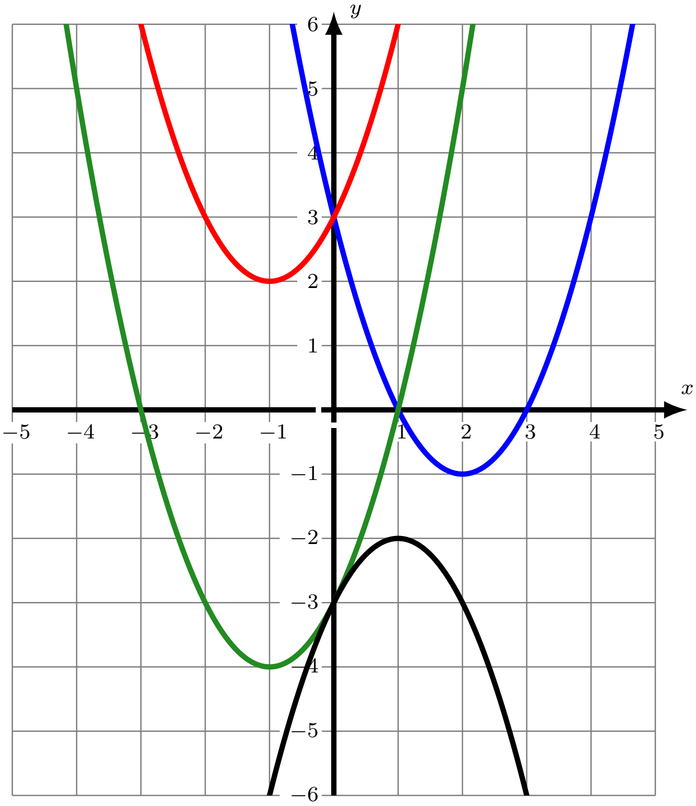
**Exercice 24 — Rapidité et sans calculatrice.** Associez chaque fonction donnée par son expression à sa représentation. Justifiez votre choix.

$f_1(x) = (x-1)(x-3)$

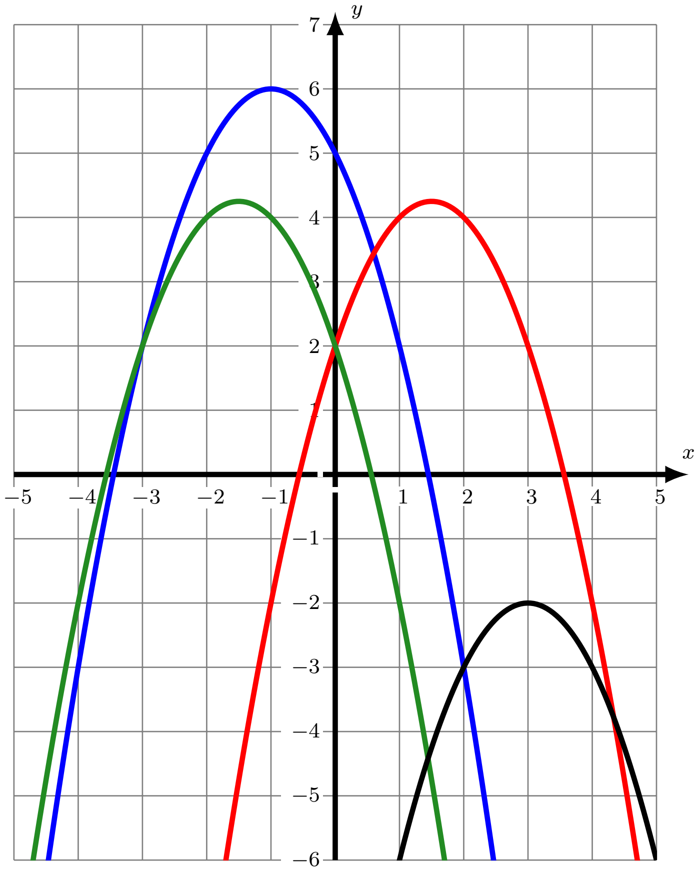
$f_2(x) = x^2 + 2x - 3$

$f_3(x) = (x+1)^2 + 2$

$f_4(x) = -x^2 + 2x - 3$



**Exercice 25 — Rapidité et sans calculatrice.** Associez chaque fonction donnée par son expression à sa représentation. Justifiez votre choix.



$f_1(x) = -(x-1)(x+3) + 2$

$f_2(x) = -x(x+3) + 2$

$f_3(x) = -(x-3)^2 - 2$

$f_4(x) = -x^2 + 3x + 2$