Chapitre 13

Probabilités

Table 13.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 13…

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître…/savoir faire…**	🪨	💎	💍
Lois de probabilités et propriétés			
vocabulaire des événements,		1, 2, 3	
loi des grands nombres		4, 5	
Modéliser une expérience aléatoire			
propriétés des lois de probabilités		6, 7, 8	9, 10, 11
par un tableau croisé d'effectifs		12, 13, 14	
par un diagramme d'univers	15, 16, 17	18, 19, 20	
par un arbre de dénombrement	22, 23	24, 25	
problèmes du Brevet		26, 27, 28	

13.1 Avant-propos

Une *expérience aléatoire* est une expérience *renouvelable à l'identique*, dont on connait les *issues*, et dont le résultat est *imprévisible*[1].

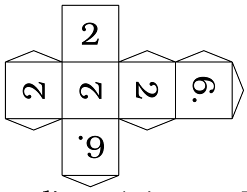
Chaque renouvellement de l'expérience s'appelle *épreuve*.

Définition 13.1 Pour une série de répétition d'une expérience aléatoire, la *fréquence relative* d'une issue est le rapport :

$$f_i = \frac{\text{nombre de réalisations de l'issue}}{\text{nombre total de répétitions}}$$

[1]contrairement à une expérience *déterministe* comme en Physique, où des conditions identiques conduisent à des résultats identiques –aux erreurs de mesure près

■ **Exemple 13.1 — polypad.org/cJZjxu66EX61A.**

On lance le dé cubique bleu d'Efron  et on note le numéro obtenu. Cette expérience a 2 issues : 2 ou 6. On repète l'expérience N fois.

	issue	2	6	Total
fréquences	$N = 12$			12
	$N = 24$			24
	$N = 36$			
	$N = 120$			
	$N = 240$			

	2	6	**Total**
fréquences relatives			1
			1
			1
			1
			1

Table 13.2 – La fréquence relative se rapproche de $\frac{2}{3}$ pour un nombre de répétitions N assez grand.

Les résultats expérimentaux suggèrent l'existence d'une **loi du hasard**. On ne parle pas de nombres liés à une expérience donnée, mais de « nombres idéaux » dont ceux de l'expérience se rapprochent.

Postulat 13.1 — La loi naïve des grands nombres. Lorsqu'une expérience aléatoire a un nombre fini de résultats possibles, chacun des résultats possède une probabilité d'*apparaître*.

Quand on répète un grand nombre de fois l'expérience, la proportion d'apparition de chaque résultat est voisine de sa probabilité.

$$\text{frequence(événement)} \approx P(\text{événement}) \times \text{nbr de répétition}$$

■ **Exemple 13.2**

La probabilité d'obtenir un 2 pour le dé bleu d'Efron est $P(2) = \frac{2}{3}$. Pour $N = 300$ répetitions, on *estime* le nombre d'observation de l'issue 2 à environ $300 \times \frac{2}{3} \approx 200$.

■ **Exemple 13.3**

1. La probabilité que « Jeane du CSJA gagne le 1^er^ prix avec son unique ticket » est $\frac{1}{20\ 000\ 000}$.
2. L'événement « un français a gagné le 1^er^ prix au loto en 2023 » n'a rien d'extraordinaire. En effet, avec environ 750 000 participants par tirage, et 3 tirages par semaine, la loi de grands nombres estime que le nombre annuel de gagnants est environ $750\ 000 \times 3 \times 52 \times \frac{1}{20\ 000\ 000} \approx 6$.

13.2 Vocabulaire des expériences aléatoires

Définition 13.2 Pour une expérience aléatoire :

- **une issue** est notée ω, ou ω_1, $\omega_2, \dots$. à lire « oméga ». n désigne le nombre total d'issues.
- **l'univers** Ω désigne l'ensemble des issues possibles : $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}$.
- **un événement** E est une partie de Ω. Une issue ω ***réalise*** E lorsque ω est dans E
- **événement élémentaire** est un événement réduit à une seule issue.

Notation 13.1

Card(E) est le *cardinal* d'un événement E. C'est le nombre d'issues qui réalisent E.

Définition 13.3 — événements particuliers.

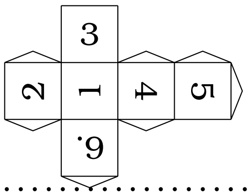
1. $E = \Omega$ est un *événement certain* : toutes les issues réalisent E.
2. $\varnothing$ est l'*événement impossible* : aucune issue réalise $\varnothing$.
3. Deux événements E et F sont *incompatibles* (ou *disjoints*) s'ils ont aucune issue en commun. « E et F »$= \varnothing$.

Définition 13.4 — Événement contraire. Pour un événement A

L'événement $\overline{A}$ est l'événement **contraire** de A.

L'événement ω réalise $\overline{A}$ s'il n'est **PAS** dans A

■ **Exemple 13.4**

Soit l'expérience aléatoire « lancer le dé cubique  et noter le nombre obtenu ».

L'univers est $\Omega = \{ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \}$

L'événement $A =$« obtenir un nombre pair »$= \{ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \}$

L'événement $\overline{\{4\}} = \{ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \}$

L'événement $B =$« obtenir un nombre premier »$= \{ \dots\dots\dots\dots\dots \}$

L'événement $C =$« obtenir un facteur de 36 »$= \{ \dots\dots\dots\dots\dots \}$

$\overline{C} = \{\dots\dots\}$ est un événement ....

$D =$« obtenir un multiple de 9 »$=$ ...... est un événement ....

$E =$ « obtenir cube »$=$ ...... est un événement ....

L'événement « A et E »=....... Les événements E et A sont ....

L'événement « B et C »=....... Les événements B et C ne sont pas ....

13.3 Loi de probabilité

Pour un univers donné, on fixe une loi de probabilité.

Définition 13.5 — définition constructive d'une loi de probabilité. Pour un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

1. on attribue à chaque événement élémentaire ω une probabilité positive $p(\omega) \geqslant 0$
2. la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1 :
$$P(\Omega) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots + p(\omega_n) = 1$$
3. Pour tout événement E, la probabilité $P(E)$ est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le réalisent.

■ **Exemple 13.5** On lance un dé cubique et on note la face obtenue. On choisit la loi de probabilité sur l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$\omega_i \in \Omega$	1	2	3	4	5	6	Total
$p(\omega_i)$	0	0,5	0,1	0,3	0,01	0,09	

$$P(\Omega) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = \ldots\ldots\ldots$$

$A =$ « obtenir un nombre pair », $P(A) = p(2) + p(4) + p(6) = \ldots\ldots\ldots$

$B =$ « obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 » ; $P(B) = \ldots\ldots\ldots$

$C =$ « obtenir un 7 » ; $P(C) = \ldots\ldots\ldots$

$\overline{A} =$ $P(\overline{A}) = \ldots\ldots\ldots$

$\overline{B} =$ $P(\overline{B}) = \ldots\ldots\ldots$

Convention lycée Dans tout exercice où figurent des expressions tel que « dés équilibrés », « tirage au hasard », « urne opaque et jetons indiscernables au toucher »... le modèle choisi sera celui de l'équiprobabilité : tous les événements élémentaires ont la même probabilité. La difficulté est d'identifier les issues équiprobables en question.

Définition 13.6 — situation d'équiprobabilité. Pour un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ avec issues équiprobables :

1. $p(\omega_1) = p(\omega_2) = \ldots = p(\omega_n) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)}$
2. Pour tout événement E on a $P(E) = \dfrac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}$.

■ **Exemple 13.6** On lance un dé cubique *équilibré* et on note la face obtenue. Ici les faces sont équiprobables, l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a 6 issues équiprobables.

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \dots\dots\dots$$

$$P(\Omega) = \dots\dots\dots$$

$A =$ « obtenir un nombre pair », $\qquad P(A) = \dots\dots\dots$

$B =$ « obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 » ; $\qquad P(B) = \dots\dots\dots$

$C =$ « obtenir un 7 » ; $\qquad P(C) = \dots\dots\dots$

$\overline{A} =$ $\qquad P(\overline{A}) = \dots\dots\dots$

$\overline{B} =$ $\qquad P(\overline{B}) = \dots\dots\dots$

Théorème 13.2 — formulaire. Toute loi de probabilité sur un univers Ω vérifie les propriétés :

(P1) (*loi unitaire*) $P(\Omega) = 1$ et $P(\varnothing) = 0$

(P2) (*loi positive*) Pour tout événement A $\qquad 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

(P3) (*probabilité du complément*) Pour tout événement A $\qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(P4) (*loi additive*) Si A et B sont des événements incompatibles alors :

Si A et $B = \varnothing$ alors $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$

R $P(A \text{ ou } B) \neq P(A) + P(B)$ dans le cas général.

13.4 Simuler une expérience aléatoire

Le travail de répétition d'une expérience aléatoire pour obtenir une fréquence empirique d'événements est fastidieux. On peut s'aider de `Scratch` ou d'un tableur.

■ **Exemple 13.7** L'instruction `lancer dé bleu` permet de simuler le résultat obtenu par le dé cubique bleu d'Efron. La probabilité que la variable `valeur` vaut 2 est de $\frac{4}{6}$. Le script principal détermine la fréquence de l'issue « obtenir 2 »pour une répétition de 120 épreuves. Lien : scratch.mit.edu/-projects/834664253

```
Quand [drapeau] est cliqué
mettre compteur à 0
répéter 120 fois
    lancer dé bleu
    si valeur = 2 alors
        ajouter 1 à compteur
dire compteur / 120
```

```
définir lancer dé bleu
mettre face de dé à nombre aléatoire entre 1 et 6
si face de dé < 5 alors
    mettre valeur à 2
sinon
    mettre valeur à 6
```

13.5 Exercices

Sauf indication contraire, un dé est supposé cubique avec des faces numérotées de 1 à 6

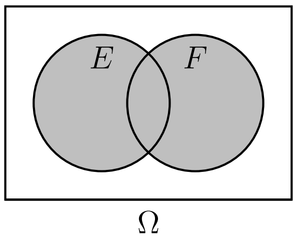
Exercice 1 Entourez la réponse qui convient :

1) L'affirmation incorrecte est :
   - (A) Un événement élémentaire est réalisé par une unique issue de l'expérience aléatoire.
   - (B) Un événement non élémentaire est un événement réalisé par plusieurs issues.
   - (C) L'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'univers.
   - (D) La probabilité d'un événement peu être supérieure à 1 ou inférieure à 0.
2) On lance 2 dés simultanément. L'événement ( ) est un événement impossible :
   - (A) La somme des nombres obtenus est 12.
   - (B) La somme des nombres obtenus est inférieure à 3.
   - (C) La somme des nombres obtenus est supérieure ou égale à 8.
   - (D) La somme des nombres obtenus est 13.
3) On lance 3 dés simultanément. L'événement « les trois dés donnent 3 »est :

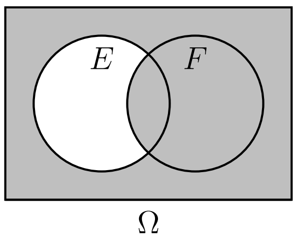
   (A) événement peu probable (B) événement très probable (C) impossible (D) certain
4) Une urne opaque contient 4 boules rouges, 3 blanches et 2 noires indiscernables au toucher.

   On tire 8 boules **sans remise**, l'événement « tirer des boules de chacune des 3 couleurs »est :

   (A) possible (B) probable (C) impossible (D) certain
5) Dans le diagramme de Venn, la partie grisée représente :
   - (A) les issues qui réalisent l'événement E et l'événement F.
   - (B) les issues qui réalisent l'événement E et pas l'événement F.
   - (C) les issues qui réalisent l'événement F et pas l'événement E.
   - (D) les issues qui réalisent l'événement E ou l'événement F.



6) Dans le diagramme de Venn, la partie grisée représente :
   - (A) les issues qui réalisent l'événement E et pas l'événement F.
   - (B) les issues qui réalisent l'événement E ou pas l'événement F.
   - (C) les issues qui réalisent l'événement F et pas l'événement F.
   - (D) les issues qui réalisent l'événement F ou pas l'événement E.



7) On lance un jeton dix fois. L'événement « obtenir 10 fois face »est :

(A) possible (B) probable (C) impossible (D) certain

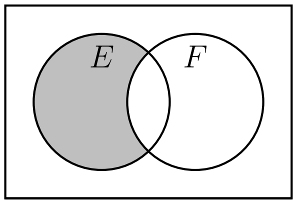
8) Dans le diagramme de Venn, la partie grisée représente :

(A) les issues qui réalisent l'événement E et pas l'événement F.

(B) les issues qui réalisent l'événement E ou pas l'événement F.

(C) les issues qui réalisent l'événement F et pas l'événement F.

(D) les issues qui réalisent l'événement F ou pas l'événement E.



Ω

Exercice 2 Completez :

1. Un événement qui est certain de se réaliser est ....
2. Un événement qui est certain de ne pas se réaliser est ....
3. Un événement qui peut ou pas se produire est ....
4. Deux événements sont ....s'ils ne peuvent se réaliser simultanément.
5. Une urne opaque contient 7 boules rouges, 2 blanches et 1 noire indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard, l'événement « obtenir une boule rouge » est ....
6. Une urne opaque contient 5 boules rouges, 4 blanches indiscernables au toucher. On tire 6 boules au hasard sans remise, l'événement « obtenir des boules de chacune des couleurs rouge et blanche » est ....
7. On lance un dé. L'événement « obtenir un 3 »est un événement .... Les événements « obtenir un nombre pair »et « obtenir un 3 »sont ....
8. On lance deux dés et on ajoute les nombres obtenus. L'événement « le total est 1 » est .... Sa probabilité est ....

Uniquement dans le cas d'issues équiprobables, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent } A}{\text{nombre total d'issues}}$$

Exercice 3

6	7	8	8

1. On tire au hasard une carte parmi :
   a) $P(\text{« choisir le 8 »}) =$ ....
   b) $P(\text{« choisir le 5 »}) =$ ....
   c) $P(\overline{\text{« choisir le 6 »}}) =$ ....
   d) $P(\text{« choisir un nombre pair »}) =$ ....
2. Vrai ou Faux ?

a) « Un événement impossible a pour probabilité -1 » ....

b) « Une probabilité peut être donnée comme fraction, nombre décimal ou pourcentage ».

c) « La probabilité d'un événement certain est 100 ». ....

d) « On lance un jeton. La probabilité d'obtenir pile est $\frac{1}{2}$ » ....

e) « On lance un dé cubique. La probabilité d'obtenir 1 est $\frac{1}{6}$ ». ....

f) « On lance un dé cubique équilibré. La probabilité d'obtenir 2 est $\frac{2}{6}$ » ....

3. On lance un dé équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20, complétez les probabilités :

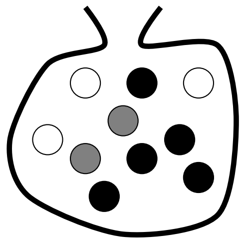
A « obtenir 6 ». $P(A) =$ ....

B « obtenir un nombre premier ». $P(B) =$ ....

C $=$ $\overline{\text{« obtenir } 4}$ ». $P(D) =$ ....

D « obtenir un nombre inférieur à 6 ». $P(E) =$ ....

4. On tire un jeton au hasard de l'urne opaque ci-dessous.

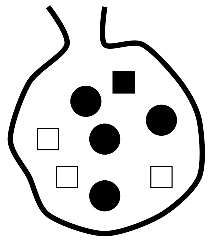


a) La probabilité de « le jeton choisit est .... »vaut 0.3

b) La probabilité de « le jeton choisit est blanc ou .... »vaut 50%

c) La probabilité de « le jeton choisit est blanc,gris ou noir »vaut ....

5. Un sac contenant des jetons est représenté ci-dessous. On choisit un jeton au hasard, déterminer les probabilités des événements suivants :



P(noir) = ... P(noir et rond) = ...

P(blanc ou rond) = ... P(carré et pas noir) = ...

6. Dans une assemblée il y a 28 femmes pour 52 hommes. On choisit une personne au hasard. La probabilité de « personne choisie est une femme » vaut ....

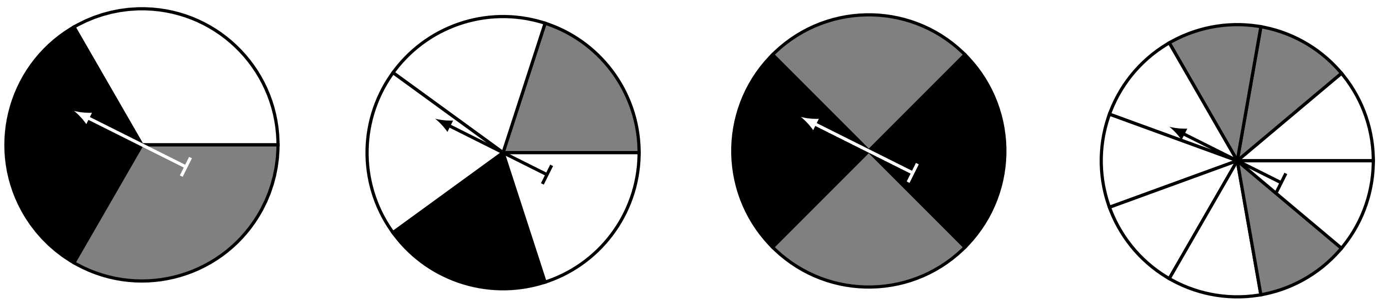
7. Dans un club de vacances, 26% des personnes font de l'équitation. On choisit une personne au hasard. La probabilité de l'événement contraire de « la personne choisie fait de l'équitation » vaut ....

8. Un sac contient 2 fois plus de jetons rouges que de jetons noirs. On tire un jeton au hasard. La probabilité de tirer un jeton rouge est ....

9. Un sac contient 10 fois plus de jetons rouges que de jetons noirs. On tire un jeton au hasard. La probabilité de tirer un jeton noir est ....

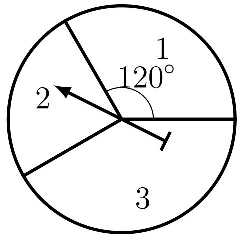
10. Un sac contient des jetons rouges et noirs dans le ratio $3:4$. On tire un jeton au hasar. La probabilité de tirer un jeton rouge est ....

11. On fait tourner une aiguille, elle pointe au hasard sur un des secteurs.



$P(\text{blanc}) =$ $P(\text{blanc}) =$ $P(\text{blanc}) =$ $P(\text{blanc}) =$

Exercice 4



On fait tourner une auiguille sur une roue partagée en 3 secteurs non égaux.

1. Déterminer la probabilité que l'aiguille pointe sur le secteur 1.
2. On repéte l'expérience 216 fois. Estimer le nombre de fois ou l'aiguille pointe sur le secteur 1.
3. En répétant l'expérience 650 fois, l'aiguille s'arrète 278 fois sur le secteur 3. Donner une estimation de la probabilité de l'événement « aiguille pointe sur le secteur 3 ».
4. En déduire une estimation en degré de l'angle au centre du secteur 3.

Exercice 5

Préciser le rôle des scripts ci-dessous et donner une estimation des valeurs affichées :

```
Quand [drapeau] est cliqué
mettre compteur à 0
répéter 1000 fois
    mettre face à nombre aléatoire entre 1 et 12
    si valeur < 5 alors
        ajouter 1 à compteur
dire compteur / 1000
```

```
Quand [drapeau] est cliqué
mettre compteur à 0
répéter 500 fois
    mettre face à nombre aléatoire entre 1 et 10
    si valeur > 8 alors
        ajouter 1 à compteur
dire compteur
```

Exercice 6

On lance un dé cubique pipé. Le tableau ci-contre représente la loi de probabilité de cette expérience. Calculer la probabilités des événements : (écrire $P(..)$ =...)

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\omega)$	$\frac{4}{33}$	$\frac{7}{33}$	$\frac{8}{33}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{3}{33}$	$\frac{7}{33}$

$A =$ « le résultat est pair » $P(A) = \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$B =$ « le résultat est au plus égal à 3 » $P(B) = \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$C =$ « le résultat est premier » $P(C) = \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D =$ « A ou B » $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$E =$ « B et C » $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$F =$ « $\overline{A}$ » $P(F) = 1 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 7

La loi de probabilité ci-contre décrit le gain possible à une loterie. Le montant de la participation est 50 €.

ω	0	5	10	100	500
$P(\omega)$	$\frac{20}{65}$	$\frac{17}{65}$	$\frac{16}{65}$	$\frac{8}{65}$	$\frac{4}{65}$

Calculer la probabilités des événements : (écrire $P(..)$ =...)

$A =$ « le joueur remporte de l'argent » $P(A) = \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$B =$ « le joueur a gagné au plus 10 euros » $P(B) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$C =$ « le joueur n'a pas remporté 500€ » $P(C) = 1 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D =$ « le joueur a remporté plus que sa participation » $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

On lance un dé cubique pipé. Le tableau ci-contre représente la loi de probabilité de cette expérience. Déterminer $P(6)$.

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\omega)$	$\frac{2}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{9}{30}$	?

Exercice 9

On lance un dé cubique pipé. Le tableau ci-contre représente la loi de probabilité de cette expérience.

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\omega)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	a	$\frac{1}{36}$	$2a$	$\frac{9}{36}$

Donner une équation vérifiée par a et la résoudre.

Exercice 10

On lance un dé cubique pipé. Le tableau ci-contre représente la loi de probabilité de cette expérience.

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\omega)$	$\frac{9}{32}$	$3a$	$\frac{1}{32}$	$2a$	$3a$	$3a$

Déterminer a puis la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Exercice 11

Soit un dé cubique équilibré dont trois faces sont bleues, deux sont blanches et une est rouge.

On lance le dé et on note la couleur obtenue.

1. Les trois couleurs sont-elles équiprobables?
2. Déterminer la probabilité d'apparition de chaque couleur (écrire $P(\ldots) = \ldots$).

Exercice 12

La répartition des participants à une compétition est décrite dans le tableau croisé des effectifs ci-contre. On choisit au hasard une personne de ce groupe.

	Hommes	Femmes	**Total**
Le péage	29	78	
Salaise	17	34	
Total			

1. Quelles sont les issues de cette expérience aléatoire. Sont-elles équiprobables ?
2. Complétez le tableau croisé des effectifs.
3. On note A l'événement « la personne choisie est un homme ». Calculer $P(A)$.
4. Décrire par une phrase l'événement $\overline{A}$ et donner sa probabilité $P(\overline{A})$.
5. On note B l'événement « la personne choisie est originaire de Salaise ». Calculer $P(\overline{A}$ et $B)$.
6. Donner deux événements incompatibles.

Exercice 13

Dans une classe de 32 élèves, la repartition des élèves selon leur sexe et la langue LVB est décrite dans le tableau croisé des effectifs ci-contre. On choisit au hasard un élève.

	Filles	Garçons	**Total**
espagnol	6		26
pas espagnol	5		
Total			32

1. Quelles sont les issues de cette expérience aléatoire. Sont-elles équiprobables ?
2. Complétez le tableau puis déterminer les probabilités :

   $A =$ « élève choisit est un garçon » $P(A) =$ ....

   $B =$ « élève choisit est une fille n'apprenant pas l'espagnol » $P(B) =$ ....

   $C =$ « élève choisit est un garçon ou apprend l'espagnol » $P(C) =$ ....

   $D =$ « élève choisit n'est ni un garçon ni apprend l'espagnol » $P(D) =$ ....

Exercice 14

Il y a 11 garçons et 15 filles dans une classe de CE1, et 13 garçons et 10 filles dans la classe de CE2. On considère l'expérience aléatoire « choisir un élève au hasard parmi les élèves ». Soit les événements $A =$« l'élève choisi est une fille » et $B =$ « l'élève choisi est en CE2 ».

	A	$\overline{A}$	**Total**
B			
$\overline{B}$			
Total			

1. Compléter le tableau double entrée par les effectifs correspondants.

2. Décrire les événements suivants par une courte phrase puis déterminer leur probabilité.

$P(A) =$ .... $P(B) =$ ....

$\overline{A} =$ .... $P(\overline{A}) =$

A et $\overline{B} =$ .... $P(A \text{ et } \overline{B}) =$

$\overline{A \text{ et } B} =$ .... $P(\overline{A \text{ et } B}) =$

A ou $B =$ .... $P(A \text{ ou } B) =$

$\overline{A}$ ou $\overline{B} =$ .... $P(\overline{A} \text{ ou } \overline{B}) =$

Exercice 15

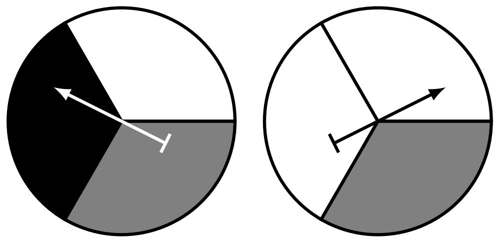
On lance un jeton et un dé cubique équilibrés. Compléter le diagramme de l'univers des issues possibles et déterminer :

P(« obtenir face ou un diviseur de 12 ») = ..

		issues équiprobables du dé					
		1					
issues équiprobables de la pièce	Pile	P1					

Exercice 16

On fait tourner deux aiguilles et on note le couple de couleurs obtenues. On suppose que les aiguilles s'arrètent au hasard sur les secteurs de même taille.



Aiguille n° 1 Aiguille n° 2

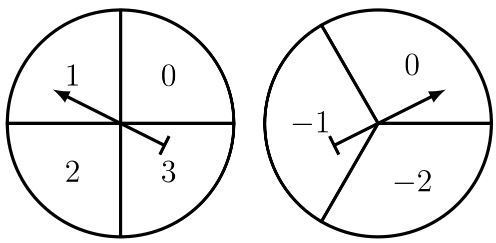
1. Complète le diagramme d'univers de cette expérience :

		issues équiprobables aiguille n° 2		
		Blanc		
issues équiprobables aiguille n° 1	Noir	(N ; B)		

2. P(« obtenir deux couleurs identiques ») = ...
3. P(« obtenir deux couleurs différentes ») = ...

Exercice 17 — jeux équitables.

Deux joueurs A et B font tourner deux aiguilles 1 et 2 sur les roues respectivement partagées en 4 et 3 secteurs égaux. Si la somme des deux valeurs obtenues vaut 0 alors le joueur A gagne, sinon c'est le joueur B qui est déclaré vainqueur.



Aiguille n° 1 Aiguille n° 2

Déterminer si le jeu est équitable c.à.d. si chacun des joueurs a la même probabilité de gagner.

Exercice 18 — Avec deux dés.

On lance simultanément un dé Noir et un dé Bleu (cubiques) et on note la somme S des deux nombres obtenus. On cherche la loi de probabilité des sommes possibles.

		Dé n° 2					
		1	2	3	4	5	6
Dé n° 1	1						
	2						
	3						
	4			7			
	5						
	6						

1. Complète le tableau à double entrée ci-contre avec les sommes obtenues.
2. Sachant que les deux dés sont équilibrés, en déduire la loi de probabilité des sommes obtenues :

k	2											Total
$P(S=k)$												

3. Représenter dans le graphique ci-dessous la loi de probabilité de la somme.
4. Déterminer les probabilités des événements suivants (ÉCRIRE CLAIREMENT $P(\ldots) = \ldots$) :

   $A =$ « somme égale à 4 » ....

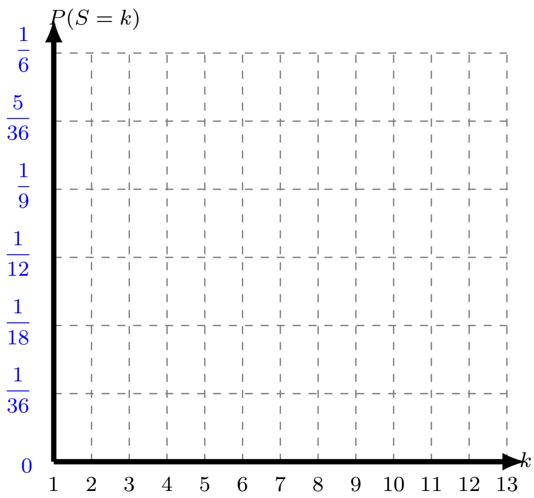
   $B =$ « somme égale à 12 » ....

   $C =$ « somme supérieure ou égale à 7 » ....

   $D =$ « somme strictement inférieure à 4 » ....

   $E =$ « somme paire » ....

   $F =$ « somme égale à 7 et produit égal à 12 » ....



Exercice 19 — entrainement.

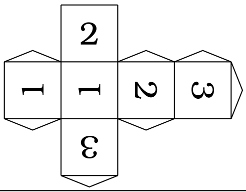
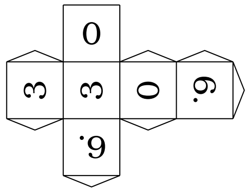
On lance deux dés et on note la somme des faces. On suppose que les dés sont équilibrés. Pour chaque paire :

— Compléter le diagramme d'univers de l'expérience aléatoire.

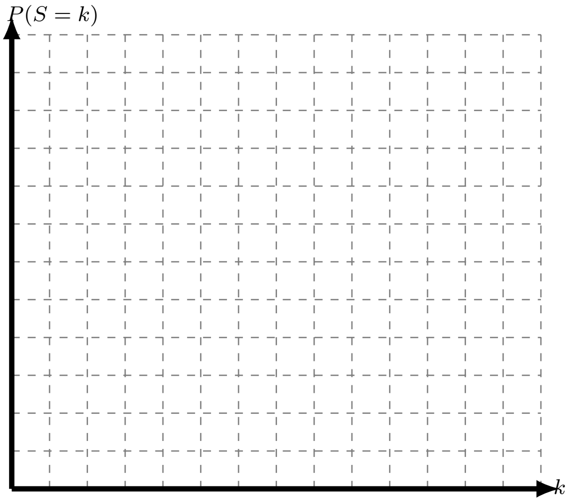
— Déduire la loi de probabilité de la somme en complétant le tableau.

— Représenter dans le graphique la loi de probabilité de la somme.

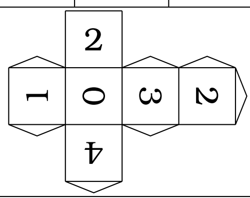
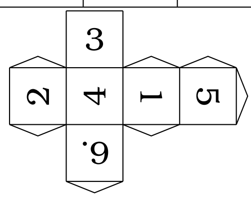
À vous de préciser l'échelle verticale.

1. dé cubique bleu de patron  et un rouge 

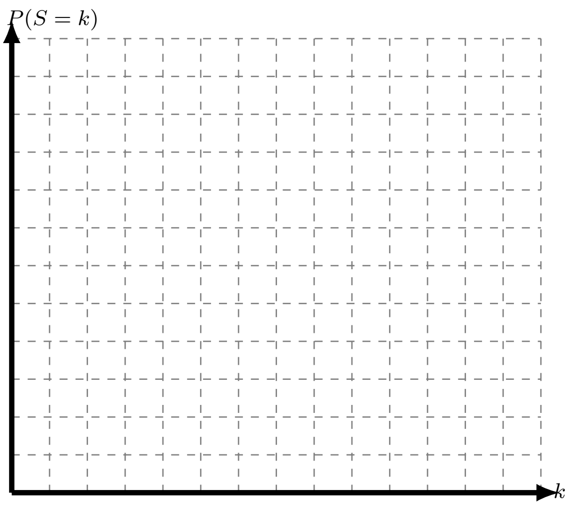
		Dé n° 2
Dé n° 1		



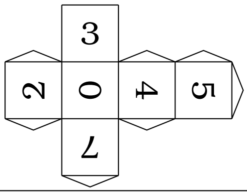
k												Total
$P(S = k)$												

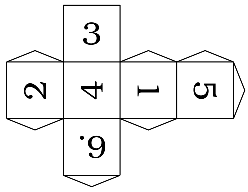
2. dé cubique rouge d6 de patron  et un noir d6 

		Dé n° 2
Dé n° 1		

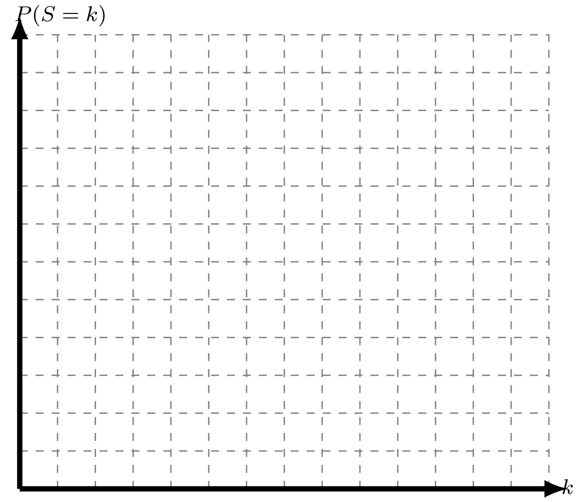


k												Total
$P(S = k)$												

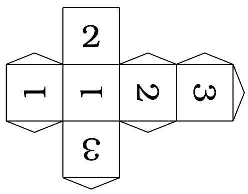
3. dé cubique bleu d6 de patron 

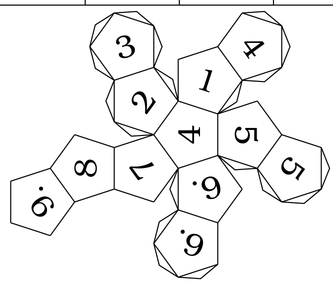
et un noir d6 

		Dé nº 2
Dé nº 1		

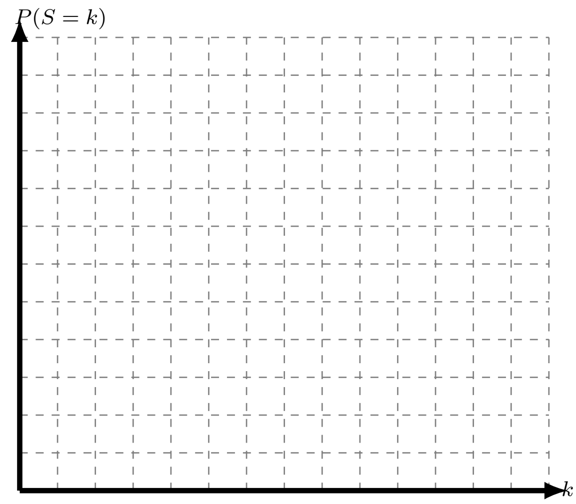


k											Total
$P(S=k)$											

4. dé cubique noir d6 de patron 

et un noir d12 

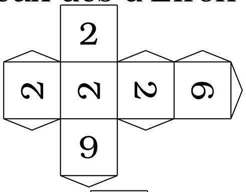
		Dé nº 2
Dé nº 1		

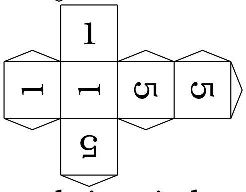


k											Total
$P(S=k)$											

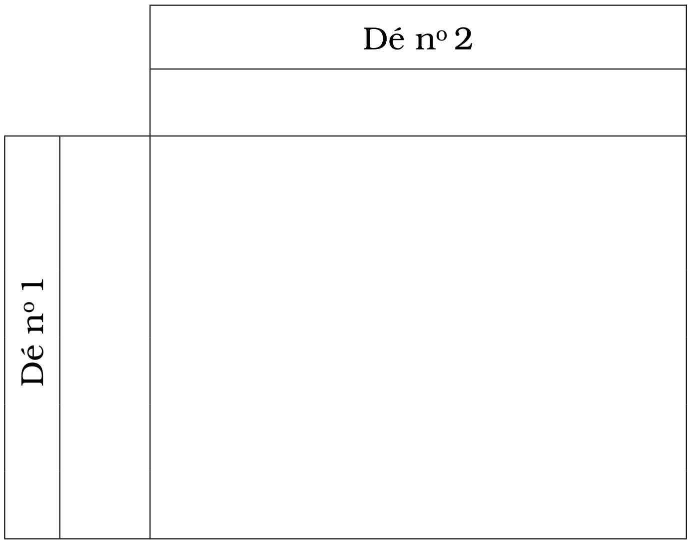
Exercice 20

On lance deux dés d'Efron :

— un bleu 

— et un vert 

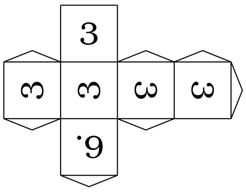
puis on note celui qui donne le plus grand nombre.

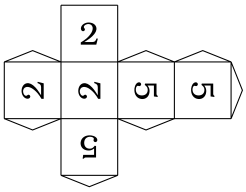


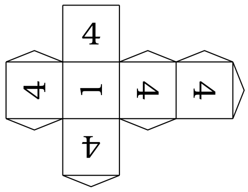
Compléter le diagramme d'univers et déterminer la probabilité que le dé Bleu l'emporte.

Exercice 21 — 3 dés non transitifs.

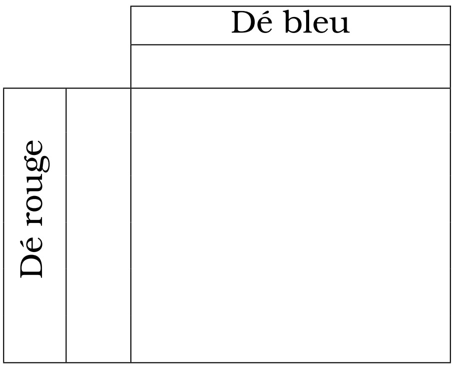
Deux joueurs s'affrontent dans une bataille de dés. Le joueur A choisit en premier un dé, le joueur B choisit un dé parmi ceux restants. Le vainqueur de la manche est celui qui obtient le plus grand nombre. On joue avec le triplet classique de dés :

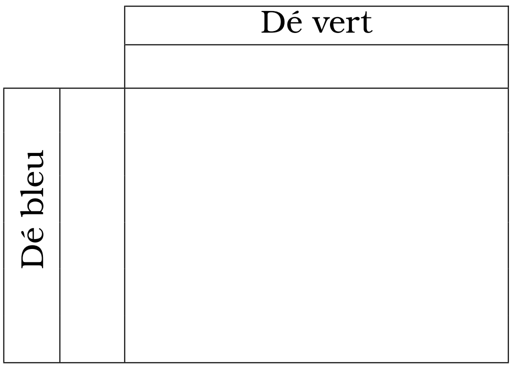
— un rouge 

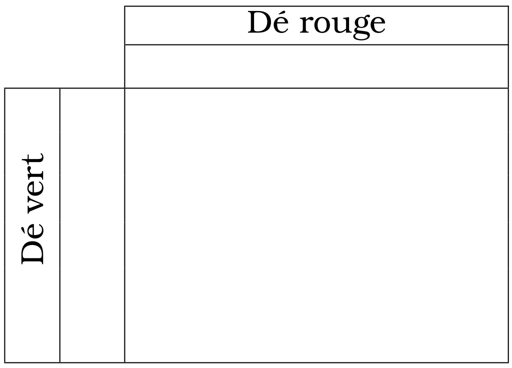
— un bleu 

— et un vert 

1. À l'aide d'un diagramme d'univers, déterminer pour chaque combinaison de dés celui qui a le plus de chance de gagner :







2. Quelle est la stratégie gagnante à adopter par le joeur qui choisit en dernier ?

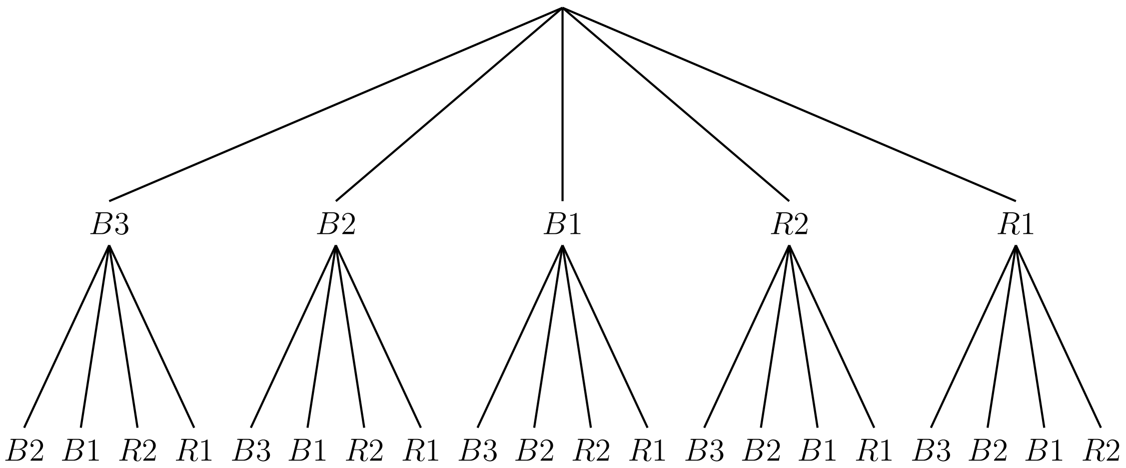
■ **Exemple 13.8 — Modéliser à l'aide d'un arbre de dénombrement.**

Une boite opaque contient 2 rubans rouges et 3 rubans bleus. On tire au hasard 1 premier ruban de la boite sans regarder (et sans le remettre), puis un second, et on note les couleurs de chaque.

On compte 4 issues possibles :

- $BB =$ « tirer deux rubans bleus »
- $RR =$ « tirer deux rubans rouges »
- $BR =$ « tirer un ruban bleu puis un rouge »
- $RB =$ « tirer un ruban rouge puis un bleu »

Ces issues ne sont pas équiprobbles ! Il y a plus de rubans bleus que de rouges !)



Notez que :

— L'expérience aléatoire est constituée de 2 expériences aléatoires élémentaires (1^er^tirage ...).

— Chaque niveau correspond à une expérience aléatoire élémentaire.

— Les bifurcations à chaque niveau correspondent aux issues possibles d'une l'expérience élémentaire.

— Chaque chemin le long de l'arbre correspond à une issue. Le chemin $R1B3$ correspond à l'issue « $R1$ au tirage n° 1 PUIS $B3$ au tirage n° 2 ».

— Les chemins différents sont des issues *incompatibles*.

— Les issues sont *équiprobables si le nombre de bifurcations à chaque niveau est le même pour tous les noeuds*. Ici $\frac{1}{20}$.

$P(RR) = P(R1R2) + P(R2R1) = \dfrac{2}{20}$,

$P(BR) = P(\{R1B1, R2B1, R1B2, R2B2, R1B3, R2B3\}) = \dfrac{6}{20}$.

$P(RB) =$ ....

$P(BB) =$ ....

$P($un ruban rouge est tiré au premier tirage$) =$ ....

$P($un ruban rouge est tiré au second tirage$) =$ ....

Exercice 22

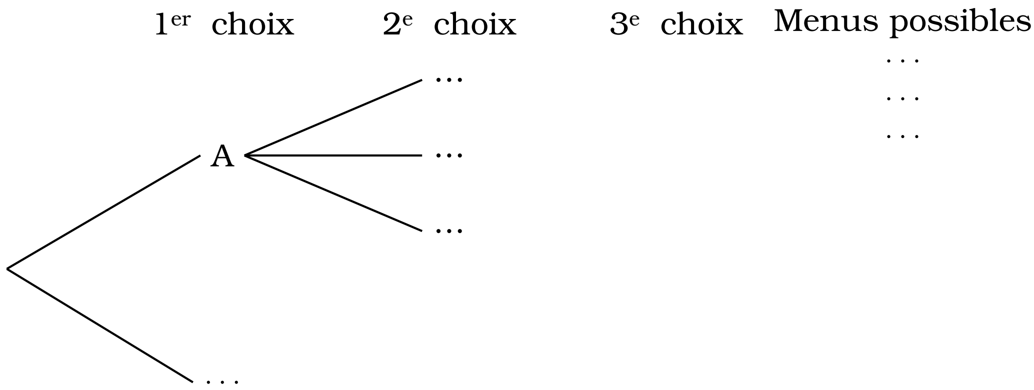
On reprend l'exemple précédent avec une boite opaque contenant 2 rubans rouges, 3 rubans bleus, mais cette fois on remet dans la boite le premier ruban tiré.

1. Comment est modifié l'arbre précédent ? Rajouter en rouge les branches supplémentaires.
2. Déduire la nouvelle valeur de $P(RR) =$ ....
3. Quelle est la probabilité de tirer aucun ruban rouge ? ....
4. $P($un ruban rouge est tiré au second tirage$) =$ ....

Exercice 23 — le menu.

Au restaurant scolaire le menu se compose forcement d'une entrée, d'un plat et d'un dessert. Les élèves doivent choisir une entrée parmi Artichaut (A) ou Betterave (B), puis choisir un plat parmi Cheval (C), Daube (D) ou Escalope (E) et choisir un dessert parmi Fromage (F) ou Gâteau (G).

1. Compléter l'arbre et identifier tous menus possibles.



2. On choisit un menu au hasard. Déterminez les probabilités :
   a) $P(E) =$ ....
   b) $P(A \cup F) =$ ....
   c) $P(\overline{C}) =$ ....
   d) $P(\overline{A} \cap \overline{F}) =$ ....

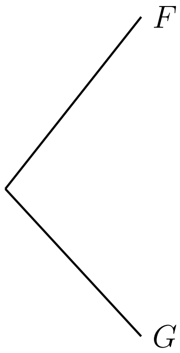
Exercice 24 — Garçons ou filles ?.

On s'intérèsse aux familles de trois enfants, sans jumeaux, et en ne tenant compte que du sexe des enfants. On suppose qu'à chacune des 3 naissances, les issues $F =$ « l'enfant est une fille » ou $G =$ « l'enfant est un garçon » sont équiprobables.

1. Complétez l'arbre des probabilités correspondant à la situation décrite (famille de 3 enfants)

et donner les issues possibles.

Enfant n° 1 Enfant n° 2 Enfant n° 3 Issues



2. Déterminer, sans justifier, la probabilité de chacun des évènements suivants :

   a) A : « la famille n'a aucune fille » ....

   b) B : « la famille a exactement deux filles » ....

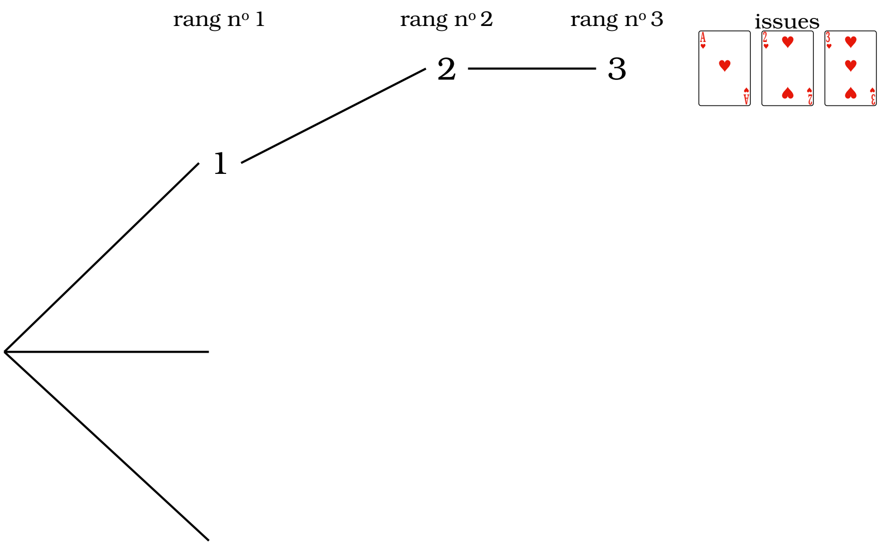
   c) C : « la famille a au moins deux filles » ....

   d) D : « la famille a une unique fille » ....

Exercice 25

On tire au hasard successivement 3 cartes numérotées de 1 à 3 et on note les valeurs des cartes dans l'ordre d'apparition.

1. Compléter l'arbre et identifier tous les ordres de tirages possibles.



2. Déterminer, sans justifier, la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « le rang de chaque carte est égal à sa valeur » ....

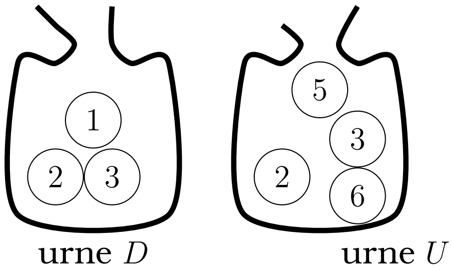
B : « exactement deux cartes ont leur rang égal à leur valeur » ....

C : « au moins 1 carte a son rang égal à sa valeur » ....

D : « aucune des cartes n'a son rang égal à sa valeur » ....

Exercice 26 — Brevet. Juin 2018 - Amérique du Nord .

Deux urnes contiennet des boules numérotées indiscernables au toucher. Le schéma ci-contre représente le contenu de chacune des urnes. On forme un nombre entier à deux chiffres en tirant au hasard une boule dans chaque urne :



- Le chiffre des dizaine est le numéro de la boule issue de l'urne D
- Le chiffre des unités est le numéro de la boule issue de l'urne U.

Exemple : en tirant la boule 1 de l'urne D et la boule 5 de l'urne U, on forme le nombre 15.

1. À l'aide d'arbre ou d'un tableau à double entrée identifier les issues possibles
2. A-t-on plus de chance de former un nombre pair que de former un nombre impair ?
3. Quelle est la probabilité de tirer un nombre premier ?
4. Donner un événement de probabilité égale à $\frac{1}{3}$

Exercice 27

Une urne opaque contient des boules indiscernables au toucher. On compte 2 boules rouges, 1 jaune et un nombre x de vertes.

1. Sachant que la probabilité de tirer une boule rouge est de $\frac{1}{2}$, donner x.
2. On effectue deux tirages successifs et sans remise de 2 boules. Déterminer à l'aide d'un arbre la probabilité d'obtenir deux rouges.

Exercice 28 — Brevet. Juin 2018. Centres étrangers. Thomas possède une montre qu'il compose en assemblant des cadrans et des bracelets de plusieurs couleurs. Pour cela, Il dispose de :

— deux cadrans: un rouge et un jaune ;

— quatre bracelets: un rouge, un jaune, un vert et un noir.

Il choisit au hasard un cadran et un bracelet pour composer sa montre.

1. Combien y a-t-il d'assemblages possibles ?
2. Déterminer la probabilité d'obtenir une montre toute rouge.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir une montre d'une seule couleur.
4. Déterminer la probabilité d'avoir une montre de deux couleurs.

13.6 Exercices : solutions et éléments de réponse

solution de l'exercice 1. ■

solution de l'exercice 2. ■

solution de l'exercice 3. ■

solution de l'exercice 4. ■

solution de l'exercice 5. ■

solution de l'exercice 6. ■

solution de l'exercice 7. ■

solution de l'exercice 8. ■

solution de l'exercice 9. ■

solution de l'exercice 10. ■

solution de l'exercice 11. ■

solution de l'exercice 12. ■

solution de l'exercice 13. ■

solution de l'exercice 14. ■

solution de l'exercice 15. ■

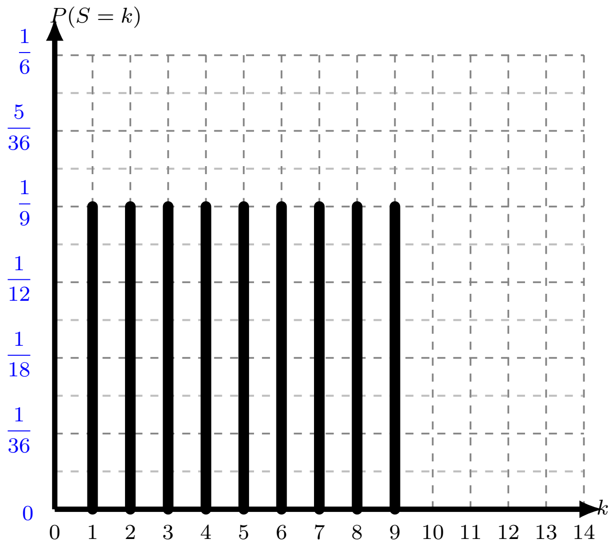
solution de l'exercice 16. ■

solution de l'exercice 17. ■

solution de l'exercice 18.

Rouge et Bleu

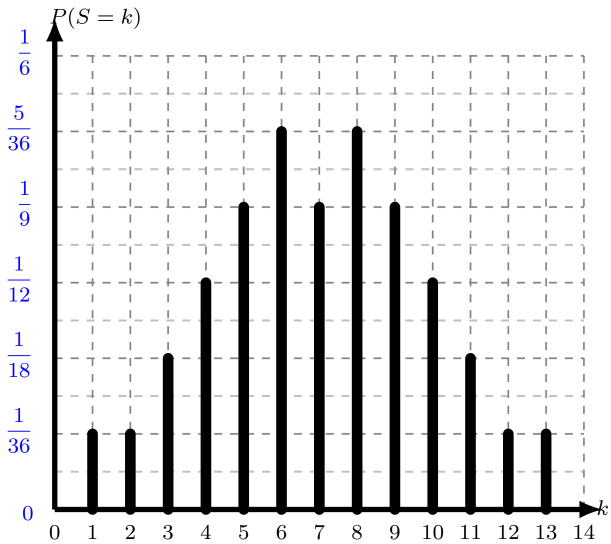
		Dé Bleu					
		1	2	3			
Dé Red	0	1	2	3			
	3	4	5	6			
	6	7	8	9			



k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Total
$P(S = k)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$					$\frac{36}{36} = 1$

Bleu et Noir

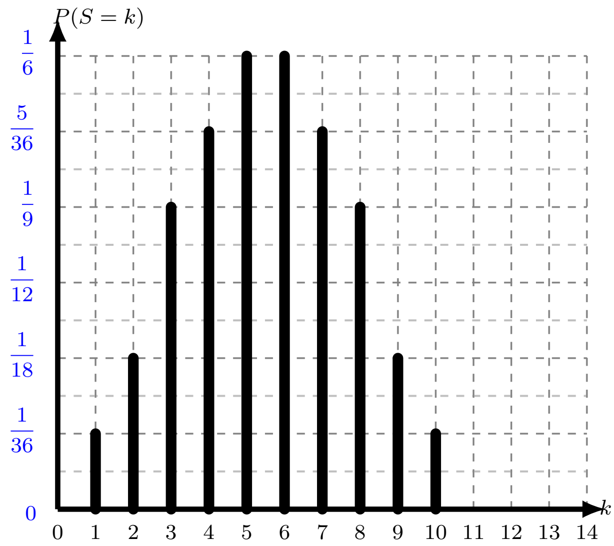
		Dé Bleu					
		0	2	3	4	5	7
Dé Noir	1	1	3	4	5	6	8
	2	2	4	5	6	7	9
	3	3	5	6	7	8	10
	4	4	6	7	8	9	11
	5	5	7	8	9	10	12
	6	6	8	9	10	11	13



k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Total
$P(S = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$

Rouge et Noir

		Dé Rouge					
		0	1	2	2	3	4
Dé Noir	1	1	2	3	3	4	5
	2	2	3	4	4	5	6
	3	3	4	5	5	6	7
	4	4	5	6	6	7	8
	5	5	6	7	7	8	9
	6	6	7	8	8	9	10

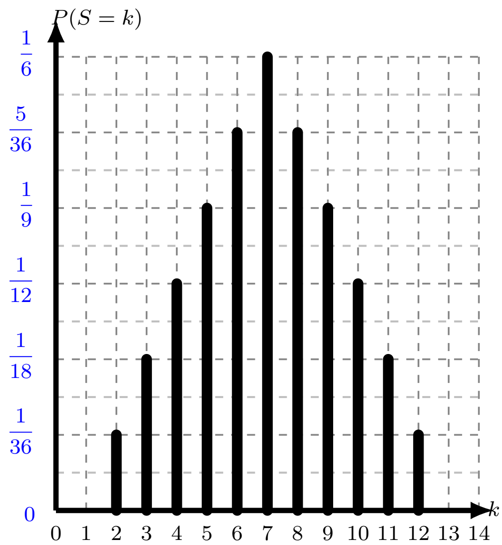


k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Total
$P(S=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$				$\frac{36}{36}=1$

d6 et d6 de Sicherman

d3 standard et d12 non standard

		Dé d12											
		1	2	3	4	4	5	5	6	6	7	8	9
Dé d3	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	9	10
	2	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	10	11
	3	4	5	6	7	7	8	8	9	9	10	11	12



■

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Total
$P(S=k)$		$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$		$\frac{36}{36}=1$

solution de l'exercice 19. ■

solution de l'exercice 20. ■

solution de l'exercice 21. ■

solution de l'exercice 22. ■

solution de l'exercice 23. ■

solution de l'exercice 24. ■

solution de l'exercice 25. ■

solution de l'exercice 26. ■

solution de l'exercice 27. ■

solution de l'exercice 28. ■