Chapitre 9
Fonctions trigonométriques

9.1 Le cercle unité

Définition 9.1 Le cercle trigonométrique (ou cercle unité) est le cercle de rayon 1 centré à l'origine d'équation $\mathscr{C}: x^2 + y^2 = 1$.
Le cercle est orienté dans le sens direct (antihoraire).

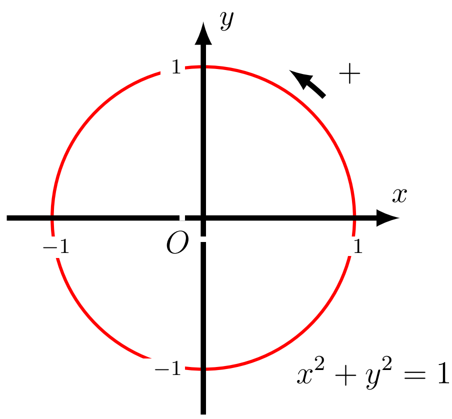


Figure 9.1 – Cercle unité

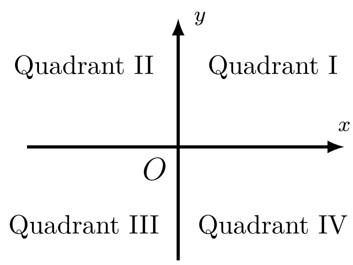


Figure 9.2 – Les quadrants de 1 à 4

■ **Exemple 9.1** Montrer que le point $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \in \mathscr{C}$.

solution. Nous devons vérifiez que les cordonnées de P vérifient l'équation du cercle unité :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} + \frac{6}{9} = 1$$

■

Définition 9.2 Dans un plan muni d'un repère orthonormé, les portions du plan délimitées par les axes du repères s'appellent **quadrants**.

■ **Exemple 9.2** Le point $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ y\right)$ appartient au cercle unité et au quadrant IV. Déterminer y.

solution. $P \in \mathscr{C}$, y vérifie $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 1$.

$$y^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y = \pm\frac{1}{2}$$

Le point $P \in$ Quadrant IV, y est négatif. Donc $y = -\frac{1}{2}$. ■

L'enroulement de la droite des réels sur le cercle unité
Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t \geqslant 0$, on place le point $P(x\ ;\ y)$ à la distance t le long du cercle $\mathscr{C}$, en partant de $I(1\ ;\ 0)$ et en se déplaçant dans le sens **positif**.
Si $t < 0$, on se déplace d'une distance $|t|$ dans le sens **négatif**. t est la mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{IP}$.

Le rayon du cercle unité étant 2π :

- 0 et 2π correspondent avec le point $P(1\ ;\ 0)$.
- $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4}$ correspond avec le point $P(0\ ;\ 1)$

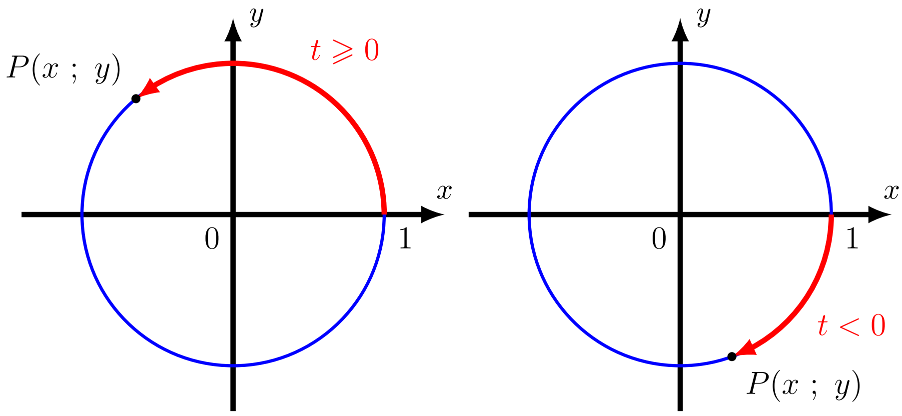


Figure 9.3 – Point $P(x\ ;\ y)$ du cercle unité représentant le réel t dans les cas $t > 0$ et $t < 0$.

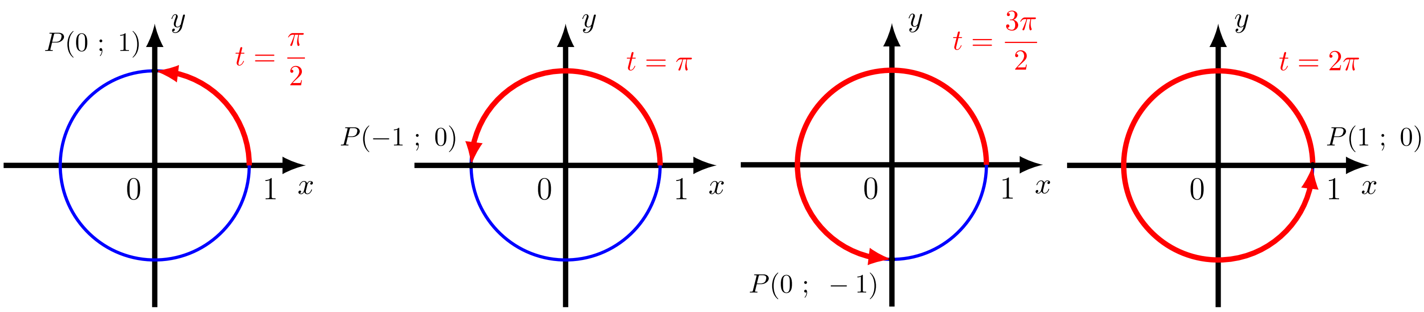


Figure 9.4 – Points associés aux réels $t = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4}$ quart de tour, $\pi = \frac{2\pi}{2}$ demi tour, $\frac{3\pi}{2}$ (3 quarts de tour) et 2π (tour complet).

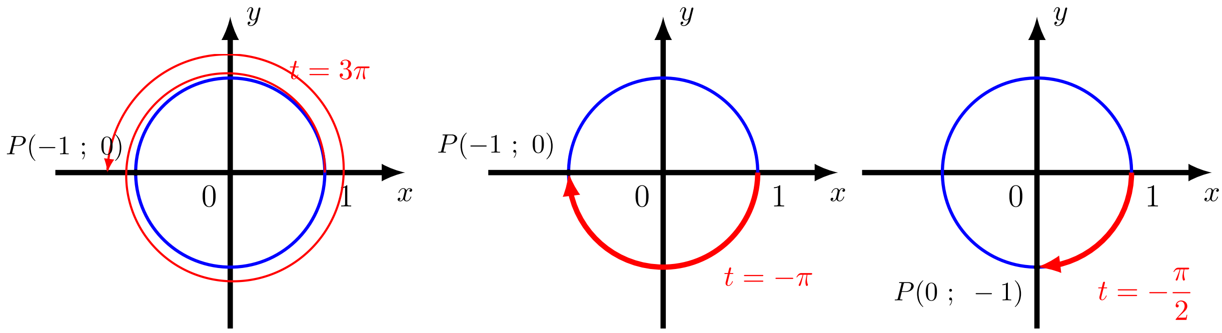


Figure 9.5 – Les points correspondant aux réels $t = 3\pi,\ -\pi$ et $-\frac{\pi}{2}$.

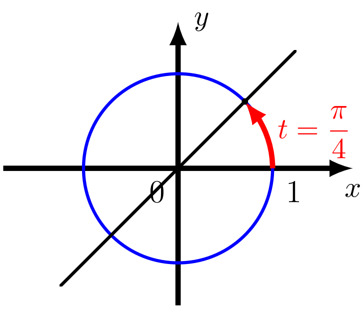


Figure 9.6 – $t = \frac{\pi}{4}$

■ **Exemple 9.3** Donner les coordonnées du point associé à $t = \frac{\pi}{4}$.

solution. $P(x\ ;\ y)$ est sur la droite d'équation $y = x$.

x vérifie $x^2 + x^2 = 1$

$$2x^2 = 1$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

P est dans le quadrant I, x et y sont positifs et $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ■

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
point P	$(1\ ;\ 0)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$(0\ ;\ 1)$

Table 9.1 – Valeurs à retenir ❤

9.1.1 Exercices cercle trigonométrique

Exercice 1 — concepts. Complétez

Le cercle trigonométrique est un cercle de centre .... et de rayon ....

Dans un repère orthonormé, l'équation du cercle trigonométrique est ....

Les points $A(1\ ;\ \ldots\ldots)$, $B(-1\ ;\ \ldots\ldots)$,$C(\ldots\ldots\ ;\ 1)$ et $D(\ldots\ldots\ ;\ -1)$ sont sur $\mathscr{C}$.

Les points correspondants aux réels $\frac{\pi}{2}$; π; $-\frac{\pi}{2}$ et 2π ont respectivement pour coordonnées ...., ..., ... et ....

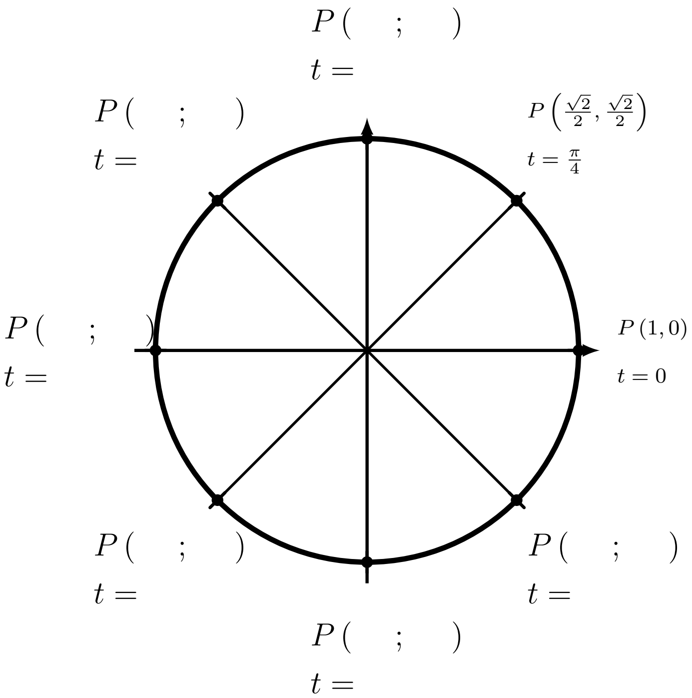
Exercice 2 Montrer que le point donné est sur le cercle unité.

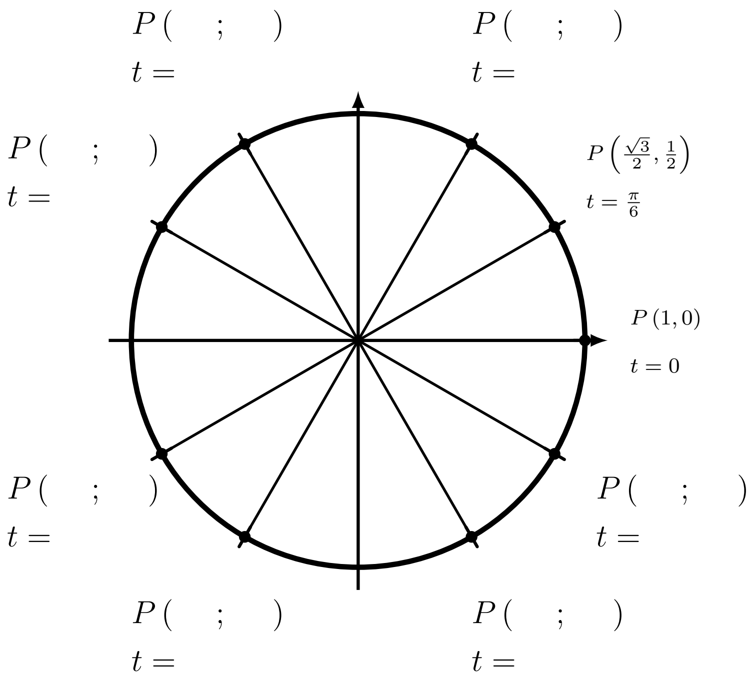
1) $A\left(\frac{3}{5}\ ;\ -\frac{4}{5}\right)$ | 2) $B\left(\frac{-24}{25}\ ;\ -\frac{7}{25}\right)$ | 3) $C\left(\frac{3}{4}\ ;\ -\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ | 4) $D\left(-\frac{5}{7}\ ;\ -\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$

Exercice 3 Déterminer la coordonnée manquante sachant que $P \in \mathscr{C}$ et le quadrant indiqué.

1) $P(-\frac{3}{5}\ ;\ \ldots) \in$ Quadrant III | 2) $P(\ldots\ ;\ -\frac{7}{25}) \in$ Quadrant IV | 3) $P(\ldots\ ;\ \frac{1}{3}) \in$ Quadrant II

Exercice 4 Les cercles trigonométriques sont marqués avec t augmentant par incréments de $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$ respectivement. Complétez les coordonnées des points indqués.





Exercice 5 — modèle. Déterminer les coordonnées des points correspondants aux réels.

a) $t = -\frac{\pi}{4}$ | b) $t = \frac{3\pi}{4}$ | c) $t = -\frac{5\pi}{6}$

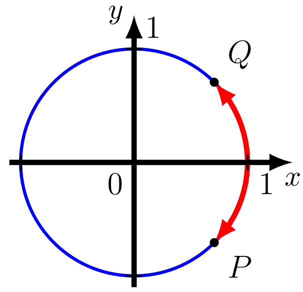
solution. Complétez :

a) P le point correspondant à $-\frac{\pi}{4}$, et Q le point correspondant à $\frac{\pi}{4}$.

(placer P et Q sur le cercle trigonométrique)

Les points sont symétriques par rapport ....

Comme $Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, on a donc P ....

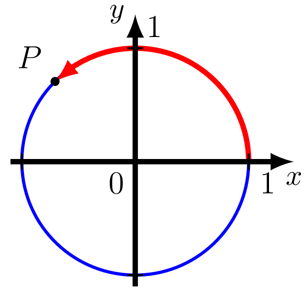


b) P le point correspondant à $\frac{3\pi}{4}$, et Q le point correspondant à $\frac{\pi}{4}$.

(placer P et Q sur le cercle trigonométrique)

Les points sont symétriques par rapport ....

Comme $Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, on a donc P ....



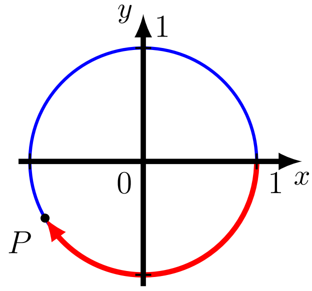
■

c) P le point correspondant à $-\frac{5\pi}{6}$, et Q le point correspondant à $\frac{\pi}{6}$.

(placer P et Q sur le cercle trigonométrique)

Les points sont symétriques par rapport ....

Comme Q (;   ), on a donc P ....



Exercice 6 Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, tracer un cercle trigonométrique à main levée et retrouver les coordonnées du point associé :

1) $t = 4\pi$	2) $t = -\frac{\pi}{6}$	3) $t = \frac{3\pi}{2}$	4) $t = -3\pi$	5) $t = \frac{4\pi}{3}$

Exercice 7 — entrainement. Mêmes consignes

1) $t = \frac{5\pi}{2}$	2) $t = \frac{5\pi}{4}$	3) $t = -\frac{7\pi}{4}$	4) $t = \frac{11\pi}{6}$	5) $t = \frac{5\pi}{3}$

■ **Exemple 9.4 — modèle.** Pour chaque t, retrouver $-\pi < t' \leqslant \pi$ tel que $t = t' + 2k\pi$ ou $k \in \mathbb{Z}$ et déduire les coordonnées du point associé à t.

solution. Lire la solution. Pouquoi avoir entouré 4π et -10π ?

$$t = \frac{25\pi}{6}$$
$$3\pi < \frac{25\pi}{6} \leqslant 4\pi$$
$$-4\pi$$
$$-\pi < \frac{25\pi}{6} - 4\pi \leqslant 0$$
$$-\pi < \frac{\pi}{6} \leqslant 0$$

Le point associé à $\frac{25\pi}{6}$ est $P(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2})$.

$$t = -\frac{39\pi}{4}$$
$$-10\pi < -\frac{39\pi}{4} \leqslant -9\pi$$
$$+10\pi$$
$$0 < -\frac{39\pi}{4} + 10\pi \leqslant \pi$$
$$0 < \frac{\pi}{4} \leqslant \pi$$

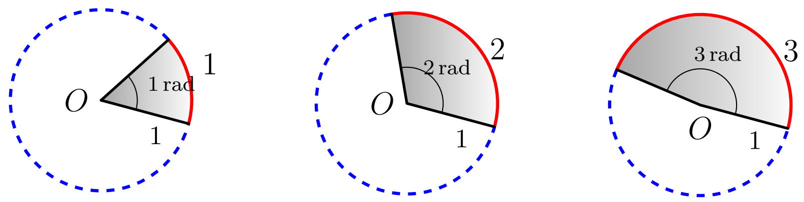
Le point associé à $\frac{\pi}{4}$ est $P(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2})$. ■

Exercice 8 — à vous. Mêmes consignes

1) $t = \frac{13\pi}{6}$	2) $t = \frac{41\pi}{6}$	3) $t = -\frac{11\pi}{3}$	4) $t = \frac{31\pi}{6}$	5) $t = -\frac{41\pi}{4}$

9.2 Mesure d'angles orientés

Définition 9.3 — le radian. On trace un cercle de rayon 1. La mesure en rad de l'angle $\widehat{AOB}$ est égale à longueur de l'arc intercepté.



Un angle plat correspond à 180°, soit une mesure en radian de π :

$$180° = \pi \text{ rad}$$

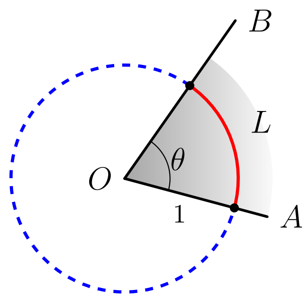


Figure 9.7 – L'angle $\widehat{AOB}$ est une partie du plan délimité par deux deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$.

■ **Exemple 9.5 — convertir rad ↔ degrés.** 60° en rad, et $\frac{\pi}{6}$ rad en degrés.

mesure en degrés°	360	180	90	60	45	
mesure en rad	2π	π	$\frac{\pi}{2}$			$\frac{\pi}{6}$

solution. $60° = 60 \times \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{\pi}{3}$ rad et $\frac{\pi}{6}$ rad $= \frac{\pi}{6} \times \dfrac{180}{\pi} = 30°$. ■

R Pour référence : 1 rad ≈ 57,30° et 1° ≈ 0,017 45 rad

Propriété 9.1 — longueur d'un arc. Pour un cercle de rayon r. La longueur s d'un arc d'**angle au centre** θ (exprimé en rad) est :

$$s = r\theta$$

Démonstration. $s = \frac{\theta}{2\pi} \times$ périmètre $= \frac{\theta}{2\pi} \times 2\pi r = r\theta$. ■

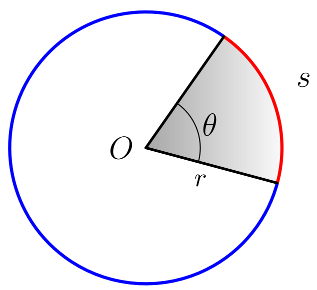


Figure 9.8 – $s = r\theta$.

■ **Exemple 9.6 — longueur d'un arc ↔ angle au centre.**

a) Détermine la longueur de l'arc d'un cercle de rayon 10 m d'angle au centre 30°

b) Détermine l'angle au centre en rad et en degrés pour un arc de longueur 6 m sur un cercle de rayon 4 m.

solution. a) D'après 9.5 : $30° = \frac{\pi}{6}$ rad d'où $s = r\theta = 10 \times \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$ m
b) $\theta = \frac{s}{r} = \frac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ rad $= \frac{3}{2} \times \frac{180}{\pi} \approx 86°$. ■

Définition 9.4 L'angle orienté $(\overrightarrow{OR_1}\ ;\ \overrightarrow{OR_2})$ est défini par un sommet O, une demi-droite $[OR_1)$ initiale, et une demi-droite finale $[OR_2)$.

Pour mesurer un angle orienté, on regarde l'angle de la rotation qui transforme $[OR_1)$ en $[OR_2)$. Si la rotation se fait dans le sens positif, la mesure de l'angle est positive.
Si la rotation se fait dans le sens négatif, la mesure de l'angle est négative.

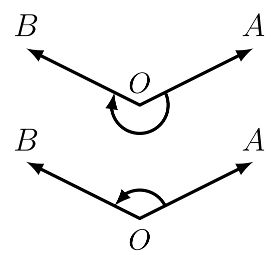


Figure 9.9 – Angle orienté $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$ avec une mesure positive ou négative

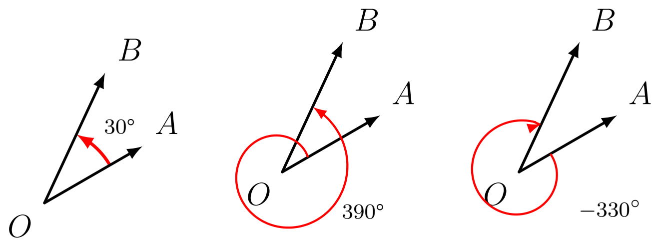


Figure 9.10 – L'angle orienté $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$ a plusieurs mesures.

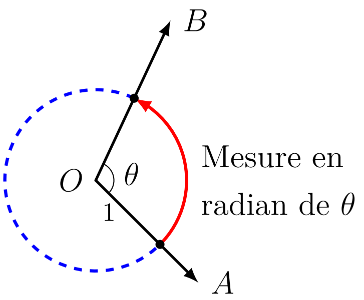


Figure 9.11

Définition 9.5 — mesure principale en radian d'un angle $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$.
On trace le cercle de centre O et de rayon 1.
La **mesure principale** θ de l'angle $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$ est la longueur du plus court arc de cercle orienté intercepté.
La **mesure principale** vérifie $-\pi < \theta \leqslant \pi$.
L'angle $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$ a une infinité de mesures de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Le k détermine en fait un nombre de tours que l'on effectue sans le sens direct si $k > 0$, et dans le sens indirect si $k < 0$.

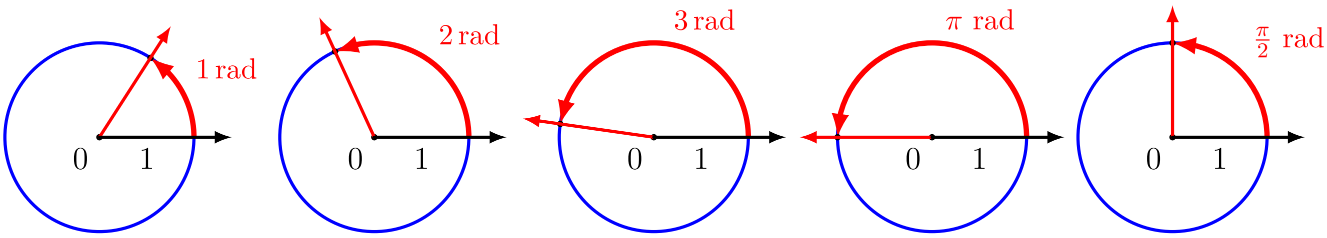
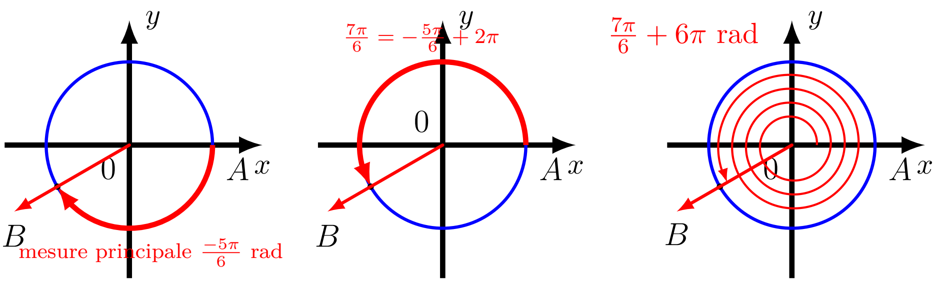


Figure 9.12 – Dans un plan repéré et orienté, il est usuel de représenter un angle orienté en prenant comme demi-droite initiale l'axe $[Ox)$ des abscisses.

Figure 9.13 – $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}) = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$



■ **Exemple 9.7 — déterminer la valeur principale d'un angle.**
Retrouver les valeurs principales des angles $\frac{7\pi}{2}$ et $-\frac{7\pi}{4}$.

solution.

$$\begin{aligned} 3\pi < \tfrac{7\pi}{2} &\leqslant 4\pi \\ -\pi < \tfrac{7\pi}{2} - 4\pi &\leqslant 0 \\ -\pi < -\tfrac{\pi}{2} &\leqslant 0 \end{aligned} \quad -4\pi$$

$$\begin{aligned} -2\pi < -\tfrac{7\pi}{4} &\leqslant -\pi \\ 0 < -\tfrac{7\pi}{4} + 2\pi &\leqslant \pi \\ 0 < \tfrac{\pi}{4} &\leqslant \pi \end{aligned} \quad +2$$

Les mesures principales sont $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$ ■

9.2.1 Exercices angles et radians

Exercice 9 — concepts. Complétez

La mesure en radian d'un angle θ est ......de l'arc intercepté par l'angle sur un cercle de rayon ......

Pour convertir en radians il faut multiplier les mesures données en degrés par ....

Si l'angle au centre est θ et le rayon du cercle r, alors la longueur de l'arc intercepté est ....

La mesure principale d'un angle orienté est toujours comprise entre ....

$(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OP}) = \theta + 2k\pi$. Si $\theta \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ alors $P \in$ Quadrant ....

Exercice 10 Convertir en degrés les mesures données en rad

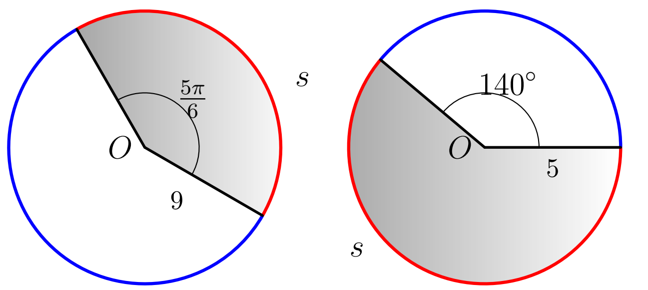
$\theta_1 = \frac{5\pi}{3}$ rad	$\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$ rad	$\theta_3 = \frac{5\pi}{6}$ rad	$\theta_4 = 3$ rad	$\theta_5 = 2$ rad

Exercice 11 Convertir en rad les mesures données en degrés

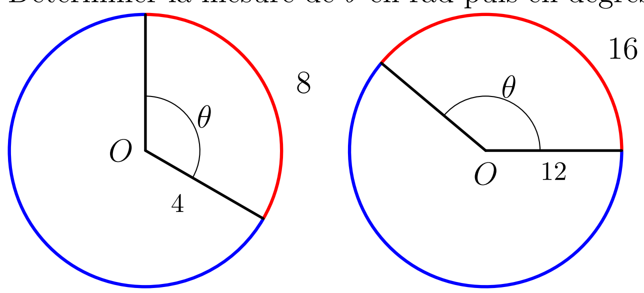
$\theta_1 = 15°$	$\theta_2 = 36°$	$\theta_3 = 54°$	$\theta_4 = 75°$	$\theta_5 = 3\,600°$

Exercice 12

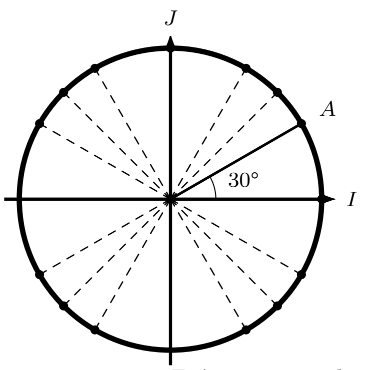
1) Dans chaque cas déterminer la longueur s de l'arc



2) Déterminer la mesure de θ en rad puis en degrés :



Exercice 13 $\mathscr{C}$ est le cercle unité dans le repère $(O;\ I, J)$ Placer les points P_i sur $\mathscr{C}$ sachant que :



$(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OP_1}) = -\frac{5\pi}{6}$
$(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OP_2}) = \frac{\pi}{2} - 6\pi$
$(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OP_3}) = \pi - (\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OA})$
$(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OP_4}) = \pi + (\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OA})$

$(\overrightarrow{OJ}\ ;\ \overrightarrow{OP_5}) = \frac{7\pi}{4} + 10\pi$
$(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OP_6}) = 2023\pi$
$(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OP_7}) = -\frac{3\pi}{2} + 5\pi$
$(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OP_8}) = -\frac{5\pi}{4} + 7\pi$

Exercice 14 Déterminer la mesure principale des angles orientés donnés en rad.

$\theta_1 = 173\pi$	$\theta_2 = -250\pi$	$\theta_3 = \frac{7\pi}{3}$	$\theta_4 = -\frac{17\pi}{6}$	$\theta_5 = \frac{53\pi}{2}$

Exercice 15 P est un point du plan repéré. Dans chaque cas déterminez à quel quadrant il appartient.

1) $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OP}) = \frac{21\pi}{2}$	2) $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OP}) = \frac{14\pi}{3}$	3) $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OP}) = \frac{-13\pi}{4}$	4) $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OP}) = \frac{5\pi}{3} - 2\pi$

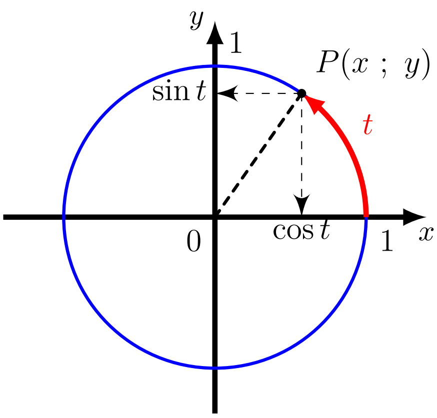


Figure 9.14 – Définition de cos et sin

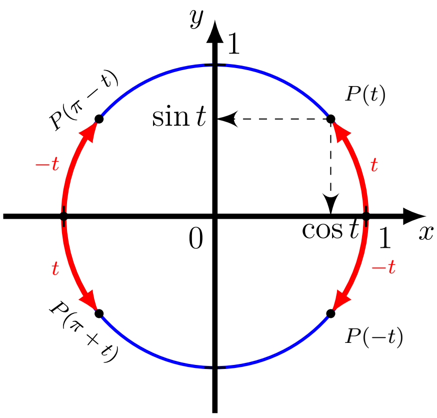


Figure 9.15 – Parité

9.3 Fonctions trigonométriques

Définition 9.6 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(x\ ;\ y)$ désigne l'unique point correspondant à t sur le cercle unité :

- Le **cosinus** de t, est l'abscisse de P $\qquad \cos t = x$
- Le **sinus** de t, est l'ordonnée de P $\qquad \sin t = x$

Les coordonnées de P sont : $P(\cos(t)\ ;\ \sin(t))$.

Propriété 9.2 Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $-1 \leqslant \cos t\ ;\ \sin t \leqslant 1$ et

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R} \qquad \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

Propriété 9.3 Les fonctions cos et sin sont périodiques de **période** 2π :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{Z} \qquad \cos(t + 2n\pi) = \cos(t)$$
$$\sin(t + 2n\pi) = \sin(t)$$

Propriété 9.4 — parité. Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$\cos(-t) = \cos(t)$ $\qquad$ la fonction cos est paire

$\sin(-t) = -\sin(t)$ $\qquad$ la fonction sin est impaire

Propriété 9.5 Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$\cos(\pi + t) = -\cos(t)$ $\qquad$ $\sin(\pi + t) = -\sin(t)$

$\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ $\qquad$ $\sin(\pi - t) = \sin(t)$

R $k \in [-1; 1]$ a une infinité d'antécédents par cos ou sin.

- $\arccos(k)$ est l'antécédent de k par cos sur $[0; \pi]$.
- $\arcsin(k)$ est l'antécédent de k par sin sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

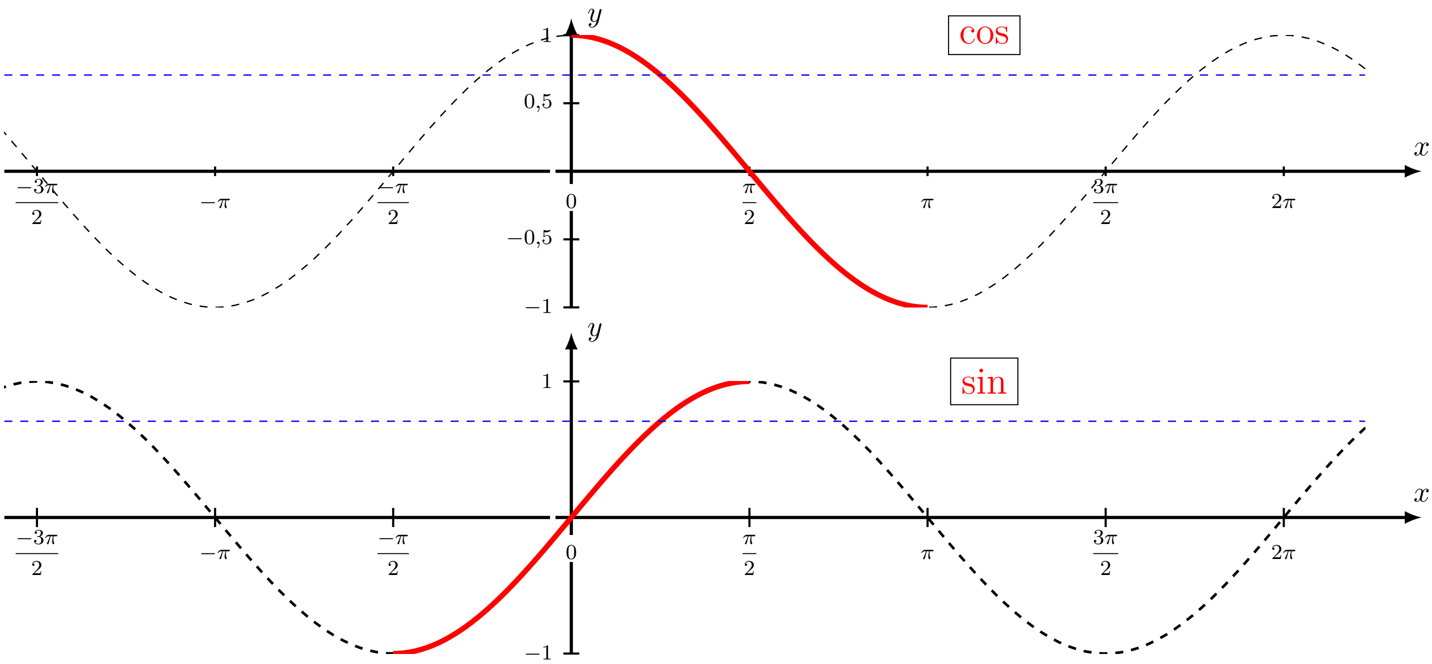
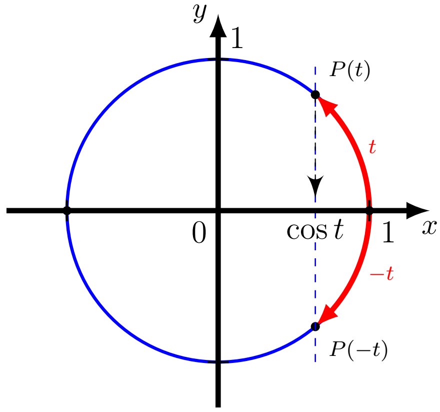
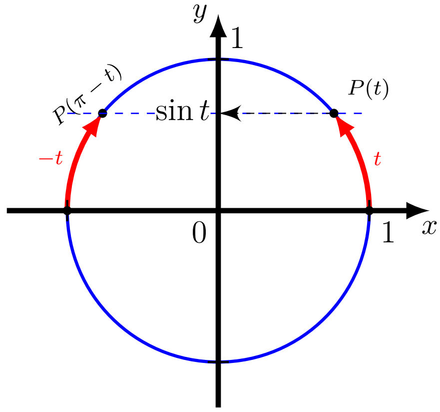


Figure 9.16 – Représentations graphiques des fonctions cos et sin

Propriété 9.6 — Équation $\cos t = \cos a$ et $\sin t = \sin a$. Soit t et $a \in \mathbb{R}$:

- $\cos(t) = \cos(a) \iff t = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad t = -a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$





- $\sin(t) = \sin(a) \iff t = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad t = \pi - a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

■ **Exemple 9.8** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

solution.

$$\begin{aligned} & \sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \iff & \sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \textit{on note que } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \iff & x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k'\pi \end{aligned}$$

■

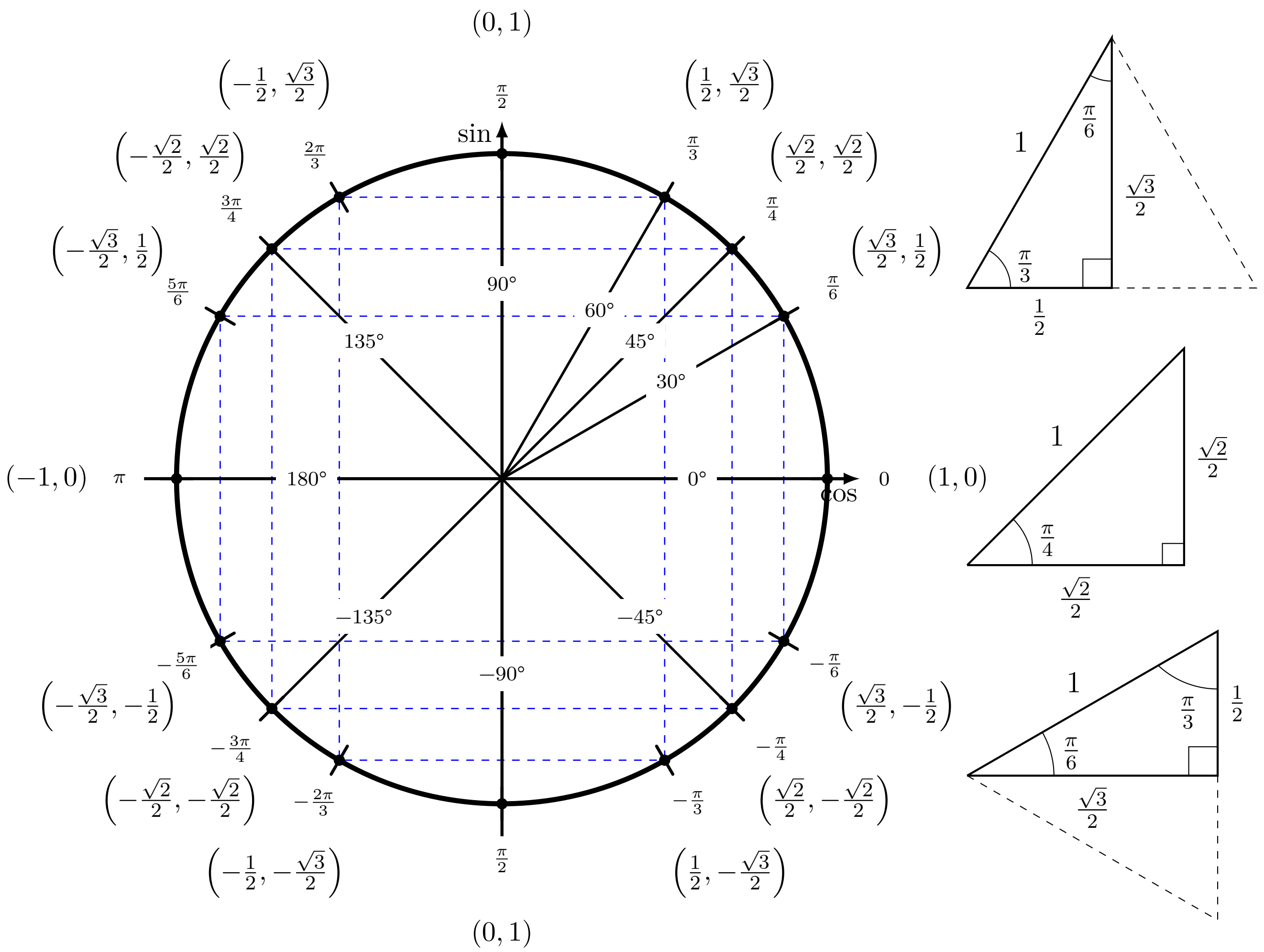


Figure 9.17 – à mémoriser ❤ Coordonnées des points du cercle unité et valeurs particulières de $\cos$ et $\sin$

9.3.1 Exercices fonctions trigonométriques

Dans ses exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ I, J)$ et du cercle unité orienté $\mathscr{C}$.

Exercice 16 — concepts. Complétez

a) Pour $P(x\ ;\ y)$ un point du cercle, et si $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OP}) = t + 2k\pi$ alors $\sin t = \dots\dots\dots$ et $\cos t = \dots\dots\dots$

b) Si $P(x\ ;\ y) \in \mathscr{C}$ alors $x^2 + y^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ Donc $\cos^2 t + \sin^2 t = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

c) Si $\sin(t) = 0.6$, alors $\cos^2(t) = \dots\dots\dots\dots\dots$ Donc $\cos(t) = \dots\dots\dots\dots\dots$ ou $\cos(t) = \dots\dots\dots\dots\dots$

d) Si $P \in$ Quadrant I et $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OP}) = t + 2k\pi$, alors $\cos t \dots 0$ et $\sin t \dots 0$.

Si $P \in$ Quadrant IV et $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OP}) = t + 2k\pi$, alors $\cos t \dots 0$ et $\sin t \dots 0$.

e) La fonction cos est de période $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ Donc $\cos(t + \dots\dots) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

f) La fonction sin est $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\sin(-t) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

g) $\sin(\pi) = \dots\dots\dots$ $\sin\frac{\pi}{4} = \dots\dots\dots$ $\sin\frac{\pi}{3} = \dots\dots\dots$ $\cos(0) = \dots\dots\dots$ $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \dots\dots\dots$ $\cos\frac{\pi}{3} = \dots\dots\dots$

Si $\cos(t) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(t) > 0$, alors la mesure principale de t est $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Si $\sin(t) = \frac{1}{2}$, alors la mesure principale de t est $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ ou $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exercice 17 Complétez :

1) Si $\sin(t) = 0.2$ alors $\sin(-t) = \dots\dots\dots\dots\dots$

2) Si $\sin(t) = 0.35$ alors $\sin(\pi - t) = \dots\dots\dots\dots\dots$

3) Si $\sin(t) = -0.6$ alors $\sin(\pi + t) = \dots\dots\dots\dots\dots$

4) Si $\cos(t) = 0.8$ alors $\cos(-t) = \dots\dots\dots\dots\dots$

5) Si $\cos(t) = -0.8$ alors $\cos(\pi - t) = \dots\dots\dots\dots\dots$

6) Si $\cos(t) = 0.1$ alors $\cos(3\pi + t) = \dots\dots\dots\dots\dots$

7) Si $\cos(t - 4\pi) = 0.3$ alors $\cos(t) = \dots\dots\dots\dots\dots$

8) Si $\sin(\pi - t) = 0.4$ alors $\sin(t) = \dots\dots\dots\dots\dots$

Exercice 18 Complétez afin de déterminer

a) $\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \sin\left(\dots\dots + 2\pi\right) = \sin\left(\dots\dots\right) = \sin\left(\pi - \dots\dots\right) = \dots\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

b) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\dots\dots + \pi\right) = \dots\cos\left(\dots\dots\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

c) $\sin\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \dots\sin(\frac{3\pi}{4} + \dots) = \dots\sin(\frac{3\pi}{4}) = \sin\left(\pi - \dots\dots\dots\right) = \dots\sin\left(\dots\dots\right) = \dots\dots\dots\dots\dots$

d) $\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \dots\dots\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exercice 19 — ▦. Déterminer les images suivantes en détaillant les étapes.

1) $\sin\frac{5\pi}{3}$

2) $\cos\frac{11\pi}{3}$

3) $\sin\frac{11\pi}{4}$

4) $\sin(25\pi)$

5) $\cos(-250\pi)$

6) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

7) $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

8) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

9) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

10) $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$

■ **Exemple 9.9** — . t est situé dans le Quadrant IV. Déterminer $\sin(t)$ sachant que $\cos(t) = \frac{3}{5}$.

Démonstration. $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ donc $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$, $\sin(t) = \pm\frac{4}{5}$.
t est dans le Quadrant IV, $\sin(t) < 0$ et on a $\sin(t) = -\frac{4}{5}$. ■

Exercice 20 — . Dans chaque cas, déterminer l'image demandée :

1) $\sin(t) = -\frac{4}{5}$, déterminer $\cos(t)$ sachant que t est dans le Quadrant IV.

2) $\cos(t) = -\frac{7}{25}$, déterminer $\sin(t)$ sachant que t est dans le Quadrant III.

3) $\sin(t) = -\frac{1}{4}$, déterminer $\cos(t)$ sachant que $\cos(t) < 0$.

4) $\cos(t) = -\frac{1}{3}$, déterminer $\sin(t)$ sachant que t est dans le Quadrant IV.

5) $\sin(t) = 0.8$, déterminer $\cos(t)$ sachant que $t \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$.

Exercice 21 — . Trouver dans chaque cas le réel t demandé.

(E_1) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in [-\pi; 0]$	(E_3) $\sin(x) = 1$ et $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$	(E_5) $\sin(x) = \frac{1}{2}$ et $x \in [-\pi; 0]$
(E_2) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ et $x \in [\pi; 2\pi]$	(E_4) $2\sin(x) = 1$ et $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$	(E_6) $2\cos(x) = \sqrt{2}$ et $x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$

■ **Exemple 9.10** Analyser les résolutions dans $\mathbb{R}$ des équations d'inconnue x suivantes :

$\sqrt{2}\cos(x) + 1 = 0$	$2\sin(x) = 1$	
$\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(x) = \frac{1}{2}$	*isoler* $\cos(x)$ *ou* $\sin(x)$
$\cos(x) = \cos(\frac{3\pi}{4})$	$\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{6})$	$\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$
$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $-\frac{3\pi}{4} + 2k'\pi$	$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\pi - \frac{\pi}{6} + 2k'\pi$	

Exercice 22 — . Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$	(E_2) $\cos(x) = -1$	(E_3) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	(E_4) $2\sin(x) + \sqrt{3} = 0$

Exercice 23 — **parité.** Pour chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$, comparer les expressions de $f(x)$ et $f(-x)$ puis déterminer si la fonction est paire, impaire ou aucun des deux. Vérifiez graphiquement sur la numworks.

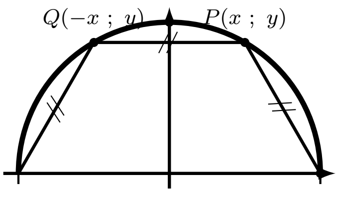
$f_1(x) = x^2\sin(x)$	$f_2(x) = \sin(x)\cos(x)$	$f_3(x) = x^3 + \cos(x)$.	$f_4(x) = x^2\cos(2x)$

> Les fonctions du type $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$ on une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ c.f. lien

Exercice 24 Pour chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$, comparer les expressions de $f(x+T)$ avec $f(x)$. En déduire si la fonction est périodique et une période.

$f_1(x) = \sin(x)\cos(x)$ avec $T = \pi$	$f_2(x) = \cos(5x+3)$ avec $T = \frac{2\pi}{5}$	$f_3(x) = 2\sin(3x-1)$ avec $T = \frac{2\pi}{3}$

Exercice 25 — **calcul de $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{3}$.** Soit un repère orthonormé $(O\ ;\ I, J)$ orienté, et le cercle trigonométrique et les point $P(x\ ;\ y)$ correspondant à $\frac{\pi}{3}$ et Q celui pour $\frac{2\pi}{3}$. Par symétrie on peut écrire $Q(-x\ ;\ y)$.



1) Utilisez la formule de la distance, exprimer PQ^2 et IP^2 en fonction de x.

2) Justifiez que x et y vérifient le système : $\begin{cases} 4x^2 &= (x-1)^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$.

3) Par substitution, montrer que x est solution de $2x^2 + x - 1 = 0$

4) Résoudre et déduire les valeurs admissibles pour x et y.

9.3.2 Corrections et éléments de réponses