A.5.4 Savoir-faire 4 : dérivée d'une composée par une fonction affine

■ **Exemple A.26 — composée par une fonction affine.**

$f(x)$	$f'(x)$
$x \mapsto u(ax+b)$	$x \mapsto au'(ax+b)$

Exercice 1

Pour la fonction composée $f\colon x \to u(v(x))$, préciser les expressions de u et v dans chaque cas.

1. $f(x) = (3x+10)^3$
2. $f(x) = \dfrac{1}{2x+4}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$
4. $f(x) = \dfrac{10}{(3x-x^2)^3}$

■ **Exemple A.27 — dérivée d'une composée.**

Donner le domaine de dérivabilité et l'expressoin de la dérivée dans les cas suivants :

1. $f(x) = (5x+3)^3$

   composée $u(v(x))$ *de* $u\colon x \mapsto x^3$ *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $v\colon x \mapsto 5x+3$

   $D = \mathbb{R}$ et $D' = \mathbb{R}$

   $u'(x) = 3x^2$

   $f'(x) = 5u'(5x+3) = 15(5x+3)^2$

2. $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$

   composée $u(v(x))$ *de* $u\colon x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et* $v\colon x \mapsto 2x-1$

   $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ et $D' = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

   $u'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

   $f'(x) = 2u'(2x-1) = \dfrac{-2}{(2x-1)^2}$

3. $f(x) = \sqrt{4x-1} = u(4x-1)$

   il faut $4x-1 \geqslant 0$

   $D = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$

   $u\colon x \mapsto \sqrt{x}$ *n'est pas dérivable en* 0

   $D' = \left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$

   $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

   $f'(x) = 4u'(x) = \dfrac{4}{2\sqrt{4x-1}}$

Exercice 2

Déterminer le domaine de définition et de dérivation de chaque fonction, ainsi que l'expression de la fonction dérivée f' .

1. $f(x) = \dfrac{1}{3x+6}$
2. $f(x) = (3x+4)^3$
3. $f(x) = (5-3x)^2$
4. $f(x) = \sqrt{5x-3}$
5. $f(x) = 5x + \sqrt{3x+18}$
6. $f(x) = (ax+b)^3$
7. $f(x) = \dfrac{5}{(2x-5)^2}$
8. $f(x) = 3x+1+\dfrac{1}{2x+8}$
9. $f(x) = \sqrt{-3x+12}$

correction exercice 2.

$f_1'(x) = -\dfrac{1}{3\left(x+2\right)^2}$; $f_2'(x) = 9\left(3x+4\right)^2$; $f_3'(x) = 6\cdot\left(3x-5\right)$; $f_4'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-3}}$; $f_5'(x) = \dfrac{10\sqrt{x+6}+\sqrt{3}}{2\sqrt{x+6}}$; $f_6'(x) = 3a\left(ax+b\right)^2$; $f_7'(x) = -\dfrac{20}{\left(2x-5\right)^3}$; $f_8'(x) = \dfrac{6x^2+48x+95}{2\left(x+4\right)^2}$; $f_9'(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4-x}}$; ■