Chapitre

Calculs avec les radicaux 8

8.1 La racine carrée

Exemple 8.1

1) Deux nombres ont pour carré 49 : $(-7)^2 = (7)^2 = 49$.
   On dit que $7 = \sqrt{49}$ est la racine carré de 49.
2) Le nombre -49 est le carré d'aucun nombre. La racine carrée de -49 n'exite pas : l'écriture $\sqrt{-49}$ n'a pas de sens.
3) Deux nombres ont pour carré 50 : la racine carré de 50 et son opposé :
   $$(\sqrt{50})^2 = (-\sqrt{50})^2 = 50$$
4) Deux nombres ont pour carré 10 : la racine carré de 10 et son opposé :
   $$(\sqrt{10})^2 = (-\sqrt{10})^2 = 10$$
5) 0 est le carré de 0 : la racine carrée de 0 est égale à 0.

Définition 8.1 Pour tout réel $a > 0$. Il existe deux nombres réels dont le carré vaut a :

- le nombre **positif** noté $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, c'est « la racine carrée de a ».
- et son opposé $-\sqrt{a} = -a^{\frac{1}{2}}$

à retenir : pour tout $a > 0$
$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Théorème 8.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, sa racine carrée $\sqrt{n}$ est égale à un entier ou un irrationnel.

Exemple 8.2

a) $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{225} = 15$...
b) $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$, $\sqrt{5} \in \mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$ ...

R Objectif du chapitre est d'apprendre à simplifier les écritures de sommes, de produits et de quotients d'expression de la forme $a + b\sqrt{c}$, avec a, b et c des entiers.

8.2 Propriétés de la racine carrée

Démonstration. les deux nombres a et $-a$ ont un carré égal à a^2.

$$(a)^2 = (-a)^2$$

Si $a > 0$ alors $\sqrt{a^2} = a$.
Si $a < 0$, alors $-a > 0$ et $\sqrt{a^2} = -a$. ■

Proposition 8.2 Pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

■ **Exemple 8.3**

a) $\left(3^2\right)^{0,5} = \sqrt{3^2} = 3$
b) $\left((-3)^2\right)^{0,5} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -(-3)$

Théorème 8.3 Pour tout réels positifs non nuls a et $b > 0$:

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Les formules généralisent celles déjà connues pour des produit de puissances à exposant entiers :

$$\left(a \times b\right)^{0,5} = a^{0,5} \times b^{0,5}$$

Démonstration. de la 1re égalité, au programme
$\sqrt{a}\sqrt{b}$ est un nombre positif, dont le carré vaut ab car :

- $\sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0$ car produit de $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $\sqrt{b} \geqslant 0$.
- $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$

Or $\sqrt{ab}$ désigne l'**unique** nombre positif dont le carré vaut ab. Donc on a $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. ■

À vous. Démontrer la 2e égalité. ■

8.2.1 Exercices : racines carrées

■ **Exemple 8.4 — Carrés parfaits à connaitre.** de collège.

$1^2 =$	$4^2 =$	$7^2 =$	$10^2 =$	$13^2 =$
$2^2 =$	$5^2 =$	$8^2 =$	$11^2 =$	$14^2 =$
$3^2 =$	$6^2 =$	$9^2 =$	$12^2 =$	$15^2 =$

Exercice 1 — . Compléter lorsque c'est possible les expressions suivantes.

$\sqrt{36} =$	$\sqrt{100} =$	$\sqrt{5} \times \sqrt{5} =$	$\left(10\sqrt{2}\right)^2 =$ ....
$-\sqrt{64} =$	$(\ldots\ldots)^2 = 5$	$-\sqrt{10}^2 =$	$\left(2\sqrt{10}\right)^2 =$ ....
$\sqrt{-9} =$	$\sqrt{3}^2 =$	$\left(-\sqrt{12}\right)^2 =$	$\left(7\sqrt{2}\right)^2 =$ ....

Exercice 2 — . Corriger les expressions suivantes en rajoutant ou supprimant les $\sqrt{\ }$ (in)appropriés.

$\sqrt{36} = \sqrt{6}$	$\sqrt{4^{10}} = \sqrt{4}^5$ ....
$\sqrt{49}^2 = \sqrt{7}$	$\sqrt{8^6} = 8^3$ ....
$\sqrt{5}^2 = 25$	$3^2\sqrt{5}^2 = \sqrt{45}$ ....
$\sqrt{9^2} = 9$	$\sqrt{18}^2 = \sqrt{3}^2\sqrt{2}^2$ ....

Exercice 3 — . Simplifier les racines de carrés suivantes :

$\sqrt{5^2} = \lvert 5\rvert =$	$\sqrt{\left(2-\frac{5}{3}\right)^2} =$ ....
$\sqrt{(-5)^2} = \lvert -5\rvert =$	$\sqrt{\left(1-\frac{5}{3}\right)^2} =$ ....
$\sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = \left\lvert 3-\sqrt{2}\right\rvert =$	$\sqrt{(1-\pi)^2} =$ ....
$\sqrt{(-9)^2} =$	$\sqrt{(3{,}14-\pi)^2} =$ ....
$\sqrt{(1-\pi)^2} =$	$-\left(-\sqrt{3^2}\right)^2 =$ ....

Exercice 4 Complétez pour trouver le meilleur encadement de x.

L'expression $\sqrt{-2x}$ est définie lorsque .... $\geqslant 0$, donc pour $x \in$ ....

L'expression $\sqrt{x-2}$ est définie lorsque .... $\geqslant 0$, donc pour $x \in$ ....

Si $\sqrt{x^2} = x$ alors x .... ; si $\sqrt{x^2} = -x$ alors x ....

Si $\sqrt{(x-2)^2} = x-2$ alors .... ; si $\sqrt{(x-2)^2} = 2-x$ alors ....

Si $\sqrt{(3-2x)^2} = 3-2x$ alors ....

> Pour $a, b > 0$, on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

■ **Exemple 8.5 — Simplifier : Écrire une expression avec le terme sous la racine le plus petit possible.**

$A = \sqrt{12}$

identifier le plus grand carré facteur de 12

$= \sqrt{4 \times 3}$

utiliser $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$= \sqrt{4}\sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3}$

$B = \sqrt{75}$

$=$

$=$

$=$

$C = 2\sqrt{18}$

$=$

$=$

$=$

Exercice 5 — À vous. Complétez par des entiers, afin de rendre les égalités vraies.

$\sqrt{8} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{32} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{27} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{50} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{48} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{200} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{288} = \sqrt{144}\sqrt{\square} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{98} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{900} =$ ....

$\sqrt{8100} =$ ....

$\sqrt{2500} =$ ....

$\sqrt{160} =$ ....

$\sqrt{49 \times 10^4} =$ ....

$\sqrt{\square} = \sqrt{36}\sqrt{2} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{\square} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = 2\sqrt{6}$

$\sqrt{\square} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = 15\sqrt{2}$

$\sqrt{\square} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = 8\sqrt{5}$

$\sqrt{0{,}25} = \sqrt{\dfrac{25}{100}} = \dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}} = \dfrac{\square}{\square}$

$\sqrt{0{,}36} = \sqrt{\dfrac{36}{100}} = \dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}} = \dfrac{\square}{\square} =$ ....

$\sqrt{1{,}96} = \sqrt{\dfrac{\square}{\square}} = \dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}} = \dfrac{\square}{\square} =$ ....

$\sqrt{0{,}16} =$ ....

$\sqrt{1{,}21} =$ ....

$\sqrt{0{,}64} =$ ....

$\sqrt{\dfrac{\square}{\square}} = \dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}} = \dfrac{2}{3}$

$\sqrt{\dfrac{\square}{\square}} = \dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}} = \dfrac{5}{7}$

$\sqrt{\dfrac{\square}{\square}} = \dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}} = \dfrac{5^2}{7^3}$

Exercice 6 — . Simplifier en rendant le terme sous la racine le plus petit possible.

$3\sqrt{50} = 3 \times \sqrt{25}\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

$2\sqrt{48} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$5\sqrt{63} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$10\sqrt{8} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$2\sqrt{12} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$3\sqrt{20} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$4\sqrt{27} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$5\sqrt{18} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$5\sqrt{200} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$3\sqrt{125} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$3\sqrt{80} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$10\sqrt{96} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$7\sqrt{88} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$10\sqrt{75} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

■ **Exemple 8.6 — Simplifier des produits ou quotients de radicaux.**

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2} \times 3 \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned} \quad \textit{mettre la racine après le coefficient}$$

$$\begin{aligned} B &= 3\sqrt{2} \times \sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{6} \end{aligned} \quad \textit{utiliser l'identité } \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\begin{aligned} C &= 2\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Exercice 7 — .

$\sqrt{7} \times \sqrt{5} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\sqrt{5} \times 5 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\sqrt{5} \times \sqrt{2} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\sqrt{11} \times 2 \times \sqrt{3} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$5\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\sqrt{5} \times \sqrt{45} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$5\sqrt{21} \times 2\sqrt{3} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$2\sqrt{3} \times \sqrt{27} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$(\sqrt{7})^3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\sqrt{3^8} = \sqrt{\left(3^4\right)^2} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\sqrt{4^5} = \sqrt{4^4 \times 4} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\sqrt{5^{10}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\sqrt{36^3} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$(\sqrt{6})^4 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$(6\sqrt{5})^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$(7\sqrt{2})^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$(2\sqrt{5})^3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\sqrt{10^{-9}} \times \sqrt{10^{15}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\sqrt{5^7} \times \sqrt{5^{-4}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\sqrt{5^{-7}} \times \sqrt{5^{-4}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exercice 8 — Comparer. Écrire sous forme $\sqrt{k}$ ou $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la médiane de la série de nombres ?

$8\sqrt{2} = \dots\dots\dots\dots$

$7\sqrt{3} = \dots\dots\dots\dots$

$5\sqrt{5} = \dots\dots\dots\dots$

$5\sqrt{6} = \dots\dots\dots\dots$

$4\sqrt{10} = \dots\dots\dots\dots$

$3\sqrt{17} = \dots\dots\dots\dots$

$2\sqrt{37} = \dots\dots\dots\dots$

■ **Exemple 8.7 — Réduire des sommes de radicaux.** Réduire les expressions suivantes :

$A = \sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2}$ *comme pour réduire $x + 3x$*

$B = \sqrt{27} + 5\sqrt{3}$

$= \sqrt{9}\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ *simplifier les racines*

$= 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

$C = 4\sqrt{2} - 7\sqrt{5} + \sqrt{5}$

$=$

$D = 5\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} + 5$

$=$

$E = 2\sqrt{27} - 5\sqrt{12}$

$=$

$=$

$=$

Exercice 9 — . Mêmes consignes :

$\sqrt{3} + \sqrt{3} =$	$7\sqrt{8} + 3\sqrt{2} =$ ....
$6\sqrt{7} + 3\sqrt{7} =$	$2\sqrt{80} - 3\sqrt{20} =$ ....
$10\sqrt{3} - \sqrt{3} =$	$2\sqrt{2} + 8 - \sqrt{2} + 1 =$ ....
$\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 6\sqrt{3} =$	$7\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2 =$ ....
$\sqrt{27} - 2\sqrt{3} =$	$10 + 4\sqrt{7} - 2 + \sqrt{7} =$ ....
$9\sqrt{7} + \sqrt{63} =$	$\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} =$ ....

■ **Exemple 8.8 — Je fais.** Développer simplifier et réduire les produits de radicaux :

$A = (\sqrt{3} - 2)(\sqrt{6} + 5) =$

$B = (\sqrt{8} + 3)(\sqrt{2} - 1) =$

Exercice 10 — . Même consignes

$3(4 + \sqrt{2}) =$ .... $\sqrt{3}(4 + \sqrt{3}) =$ ....

$\sqrt{3}(\sqrt{12} + 2\sqrt{3}) =$ ....

$(\sqrt{7} + 3)(\sqrt{3} + 5) =$ ....

$(3 + \sqrt{11})(3 - \sqrt{11}) =$ ....

$(3 - 2\sqrt{5})^2 =$ ....

$(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) =$ ....

$(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2) =$ ....

$(\sqrt{8} - \sqrt{12})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) =$ ....

$(4\sqrt{5} - \sqrt{2})(3\sqrt{2} - \sqrt{5}) =$ ....

■ **Exemple 8.9** Transformer les fractions suivantes en une fraction égale ayant un dénominateur entier :

$$\frac{7}{3\sqrt{5}} = \frac{7\times\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3\times\sqrt{12}}{\sqrt{12}\times\sqrt{12}} = \frac{3\sqrt{12}}{12} = \frac{3\sqrt{4}\sqrt{3}}{12} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4\times\sqrt{8}}{\sqrt{8}\times\sqrt{8}} = \frac{4\times\sqrt{4}\sqrt{2}}{8} = \frac{8\sqrt{2}}{8} = \sqrt{2}$$

Exercice 11 — À vous. Mêmes consignes.

$\frac{5}{\sqrt{7}} =$ ....

$\frac{10}{\sqrt{6}} =$ ....

$\frac{2}{\sqrt{10}} =$ ....

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} =$ ....

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} =$ ....

$\frac{-\sqrt{9}}{\sqrt{3}} =$ ....

$\frac{14}{3\sqrt{7}} =$ ....

$\frac{7}{2\sqrt{3}} =$ ....

$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} =$ ....

$\frac{\sqrt{18}}{2\sqrt{2}} =$ ....

■ **Exemple 8.10** Mêmes consignes.

$$\frac{3}{2+\sqrt{3}} = \frac{3(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{6-3\sqrt{3})}{2^2-\sqrt{3}^2} = \frac{6-3\sqrt{3})}{4-3} = 6-3\sqrt{3}$$

$$\frac{4}{\sqrt{5}-2} = \frac{4(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{4\sqrt{5}+8}{\sqrt{5}^2-2^2} = \frac{4\sqrt{5}+8}{5-4} = 4\sqrt{5}+8$$

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{6\sqrt{5}+6\sqrt{2}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2} = \frac{6\sqrt{5}+6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$$

Exercice 12 — . Mêmes consignes.

$\frac{2}{4+\sqrt{3}} =$ ....

$\frac{5}{7-\sqrt{5}} =$ ....

$\frac{10}{5+\sqrt{2}} =$ ....

$\frac{15}{\sqrt{7}-5} =$ ....

$\frac{4}{3\sqrt{2}-10} =$ ....

$\frac{3}{7-4\sqrt{3}} =$ ....

$\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} =$ ....

$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$ ....

Bilan à retenir Pour rendre rationnel le dénominateur d'une fraction :

- si le dénominateur est un produit ayant pour facteur $\sqrt{a}$, alors on multiplie par $\sqrt{a}$.
- si le dénominateur est de la forme $a \pm \sqrt{b}$ (ou $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$) alors on multipliera par le conjugué.

Exercice 13 Complétez.

Si $x \ldots 0$ et $y \ldots 0$ alors $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ et $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

Si $a < 0$ alors $\sqrt{16a^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Si $a < 0$ et $b \geqslant 0$ alors $\sqrt{a^2 b} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Si $a > 0$ et $b \geqslant 0$ alors $\sqrt{\dfrac{4b^2}{9a^2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

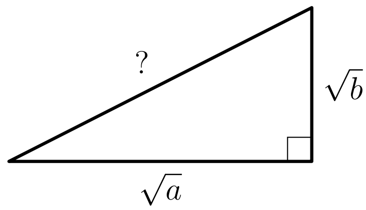
Si $a > 0$ et $b < 0$ alors $\sqrt{\frac{25b^4}{36a^2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Problème 1 — classique.

1) Développer simplifier et réduire $(3+5\sqrt{2})^2$. En déduire une écriture simplifiée de $\sqrt{59+30\sqrt{2}}$.
2) Développer simplifier et réduire $(2-\sqrt{5})^2$. En déduire une écriture simplifiée de $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

Problème 2

1) À l'aide du théorème de Pythagore, exprimer la longueur de l'hypoténuse à l'aide de a et b.
2) Expliquer pourquoi cette figure illustre l'inégalité pour tout a et $b > 0$, on a $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.



solution de l'exercice 6. $a = 8\sqrt{3}$; $b = 15\sqrt{7}$; $c = 20\sqrt{2}$; $d = 6\sqrt{5}$; $e = 12\sqrt{3}$; $f = 50\sqrt{2}$; $g = 15\sqrt{5}$; $h = 12\sqrt{5}$; $i = 40\sqrt{6}$; $j = 14\sqrt{22}$. ■

solution de l'exercice 7. $a = \sqrt{35}$; $b = 5\sqrt{5}$; $c = \sqrt{10}$; $d = 2\sqrt{33}$; $e = 10$; $f = 15$; $g = 20\sqrt{7}$; $h = 18$; $h = 7\sqrt{7}$; $h = 3^4$; $i = 32$; $j = 5^5$; $k = 6^3$; $l = 36$; $m = 36 \times 5$;$n = 98$; $p = 40$; $q = 1000$; $r = 5\sqrt{5}$; $s = 5^5\sqrt{5}$ ■

solution de l'exercice 9. $A = 2\sqrt{2}$; $B = 9\sqrt{7}$; $C = 9\sqrt{3}$; $D = -\sqrt{2}+11\sqrt{3}$; $E = \sqrt{3}$; $F = 12\sqrt{7}$; $G = 17\sqrt{2}$; $H = 2\sqrt{5}$; $I = 1+\sqrt{2}$; $J = -2+8\sqrt{3}$; $K = 8+5\sqrt{7}$; $L = -\sqrt{2}+\sqrt{3}$; ■

solution de l'exercice 10. $A = 3\sqrt{2}+12$; $B = 3+4\sqrt{3}$; $C = 12$; $D = \sqrt{21}+3\sqrt{3}+5\sqrt{7}+15$; $E = -2$; $F = 53-12\sqrt{11}$; $G = 1$; $H = -2\sqrt{3}-3+\sqrt{15}+2\sqrt{5}$; $I = 10-4\sqrt{6}$; $J = -26+13\sqrt{10}$; ■

solution de l'exercice 11. $A = \frac{5\sqrt{7}}{7}$; $B = \frac{5\sqrt{6}}{3}$; $C = \frac{\sqrt{10}}{5}$; $D = \frac{\sqrt{15}}{5}$; $E = \frac{\sqrt{21}}{7}$; $F = -\sqrt{3}$; $G = \frac{2\sqrt{7}}{3}$; $H = \frac{7\sqrt{3}}{6}$; $I = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $J = \frac{3}{2}$; ■

solution de l'exercice 12. $A = \frac{8-2\sqrt{3}}{13}$; $B = \frac{5\sqrt{5}+35}{44}$; $C = \frac{50-10\sqrt{2}}{23}$; $D = \frac{-25-5\sqrt{7}}{6}$; $E = \frac{-20-6\sqrt{2}}{41}$; $F = 12\sqrt{3}+21$; $G = 4\sqrt{2}+8$; $H = 5-2\sqrt{6}$; ■

8.3 Club maths : puissances et multiplications de radicaux

Exercice 14 Pour chaque cas trouver des nombres entiers a, b ou c qui rendent l'égalité vraie.

1) $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=3$
2) $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=1$
3) $(3+b\sqrt{c})(3-b\sqrt{c})=1$
4) $(8+b\sqrt{c})(8-b\sqrt{c})=1$
5) $(a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3})=1$
6) $(a+b\sqrt{5})(a-b\sqrt{5})=1$ (b est différent de 0)

Exercice 15 Mêmes consignes. Un peu plus dur !

1) $(a+b\sqrt{11})(a-b\sqrt{11})=1$
2) $(a+b\sqrt{c})(a-b\sqrt{c})=4$ (b et c sont $\neq$ de 1 et 0)
3) $(a+b\sqrt{c})(a-b\sqrt{c})=5$
4) $(a+b\sqrt{c})(a-b\sqrt{c})=13$

Exercice 16 — préliminaire. Montrer que pour tout a et $b\in\mathbb{R}$ on a $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$.

> Pour simplifier l'expression $\sqrt{52+16\sqrt{3}}$ nous chercherons deux nombres (entiers ?) a et b tel que :
> $$52+16\sqrt{3}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$$52+2\sqrt{192}=a+2\sqrt{ab}+b$$

Il **suffit** de trouver a et b solutions du système **non linéaire** $\begin{cases} a+b=52 \\ ab=192 \end{cases}$. Si **on ne peut pas deviner une solution**, on transformera le système à l'aide de l'identité de l'exercice 16 :

$$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=52^2-4\times 192=1936 \qquad \text{donc} \qquad a-b=44$$

a et b sont aussi solutions de $\begin{cases} a+b=52 \\ a-b=44 \end{cases}$, ce qui donne $a=48$ et $b=4$.

$$52+16\sqrt{3}=(\sqrt{48}+\sqrt{4})^2=(4\sqrt{3}+2)^2 \qquad \text{donc} \qquad \sqrt{52+16\sqrt{3}}=\left|4\sqrt{3}+2\right|=4\sqrt{3}+2$$

Exercice 17

1) En suivant la démarche précédente trouver a et b tel que $52+16\sqrt{3}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.
2) Simplifier au maximum l'expression $\sqrt{52+16\sqrt{3}}$

Exercice 18 — Entrainement. Déterminer les racines carrées des radicaux suivants :

$A=9+4\sqrt{5}$	$F=36+16\sqrt{2}$	$K=11+4\sqrt{6}$
$B=25+4\sqrt{21}$	$G=49+20\sqrt{6}$	$L=8-2\sqrt{15}$
$C=7-4\sqrt{3}$	$H=29-12\sqrt{5}$	$M=18-12\sqrt{2}$
$D=8+2\sqrt{7}$	$I=52+16\sqrt{3}$	$N=55+30\sqrt{2}$
$E=36-10\sqrt{11}$	$J=64-24\sqrt{7}$	$O=42-24\sqrt{3}$

Exercice 19 Simplifier les expressions suivantes.

$A=\dfrac{1}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$ | $B=\dfrac{1}{\sqrt{9+6\sqrt{2}}}$ | $C=\dfrac{1}{\sqrt{15-10\sqrt{2}}}$

Exercice 20 — racine cubique.
En adaptant la démarche précédente trouver a et b tel que $26 + 15\sqrt{3} = (a + \sqrt{b})^3$.

Exercice 21 — Entrainement. Déterminer les racines cubiques des radicaux suivants :

$A = 26 + 15\sqrt{3}$

$B = 7 - 5\sqrt{2}$

$C = 38 + 17\sqrt{5}$

$D = 54 - 30\sqrt{3}$

$E = 9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$