Chapitre 4
Dérivation

R [1]

1) On ne dit pas « la fonction $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$ », mais plutôt « la fonction f définie sur D par $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$ ».
   On doit préciser le domaine de la fonction D, et on peut alors utiliser l'**expression** $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$ pour calculer l'image de tout $x \in \mathbb{D}$.
2) « $\mathscr{C}_f : y = 2x^3 - 3x + 2$ » signifie « $M(x; y) \in \mathscr{C}_f \iff y = 2x^3 - 3x + 2$ ».
   $y = 2x^3 - 3x + 2$ est **l'équation de la courbe** représentative.
3) On peut regarder la fonction f comme étant « un ensemble de couples $(x; y)$ qui vérifient l'équation $y = 2x^3 - 3x + 2$ ». Il est correct, **mais peu usuel post-bac en mathématiques**, de dire « soit la fonction d'équation $y = 2x^3 - 3x + 2$ ».

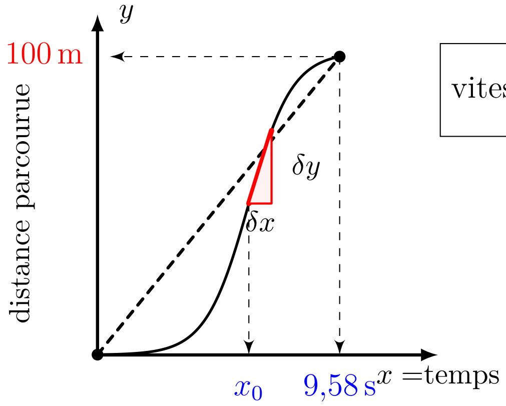
[1] correspond aux chapitres 4, 6 et 9

■ **Exemple 4.1** Faire développer les expressions

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = x + y$$
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

4.1 Le nombre dérivé

■ **Exemple 4.2** Le calcul infinitésimal traite de la variation instantanée. Dans cet exemple, la **vitesse instantanée** est voisin à la variation $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ entre deux instants très prochess de x_0.

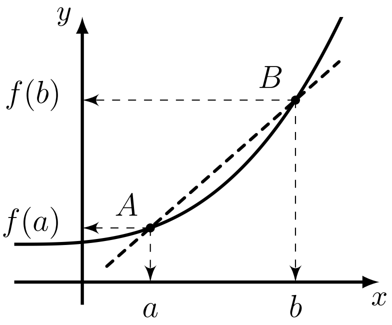


$$\boxed{\text{vitesse moyenne} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{100\,\text{m}}{9{,}58\,\text{s}} \approx 10{,}44\,\text{m/s} = 37{,}50\,\text{km/h}}$$

$$\boxed{\text{vitesse instantanée à l'instant } x_0 = \frac{\delta y}{\delta x}}$$

pic de vitesse instantanée 50 km/h

Figure 4.1 – Ce chapitre traite du calcul de la variation infinitésimale (instantanée) à une abscisse x_0.



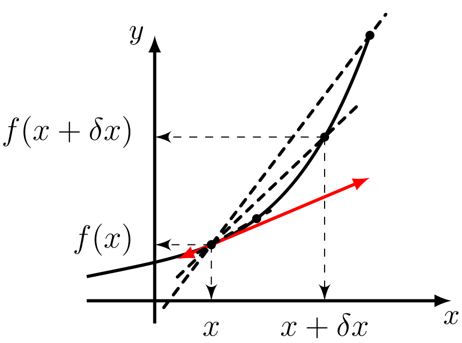
Définition 4.1 Soit f une fonction et $a \neq b$.
Le **taux de variation de f entre a et b** est le rapport

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Graphiquement c'est la pente de la sécante à $\mathscr{C}_f$ passant par les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Soit la fonction f définie sur un intervalle I et $x \in I$. Le taux de variation entre x et $x + \delta x$ pour de très petites valeurs de δx :

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} = ?$$



Définition 4.2 Si pour un x donné, la limite existe, on dira que f est **dérivable** en x. La limite est le **nombre dérivé en** x et on note :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{Lagrange } (1736 - 1813)$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \qquad \text{Leibniz } (1646 - 1716)$$

R La notation de Newton $\dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ pour les variation instantanées.

Attention $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ est un opérateur.

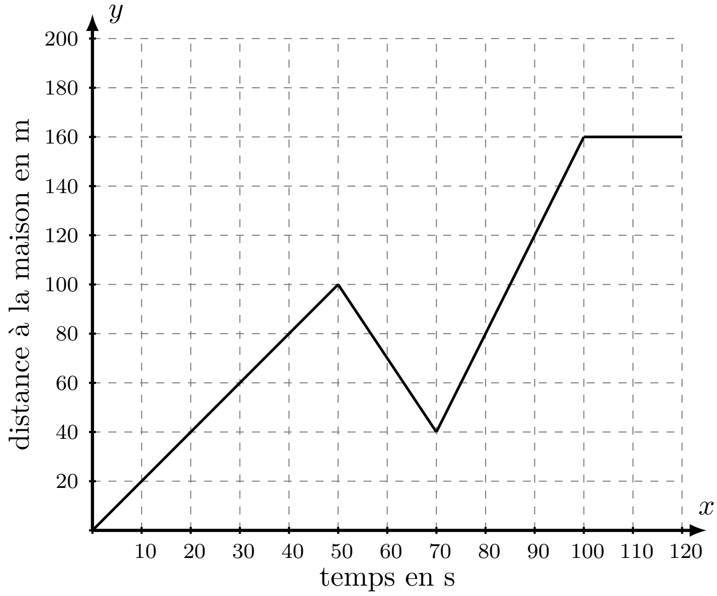
Proposition 4.1 Si f est dérivable en x_0, la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ est une droite non verticale d'équation

$$T \colon y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

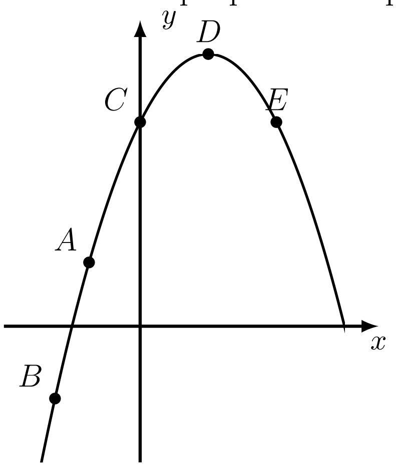
4.1.1 Exercices :nombre dérivé et tangentes

■ **Exemple 4.3 — taux de variation moyen et instantané.**

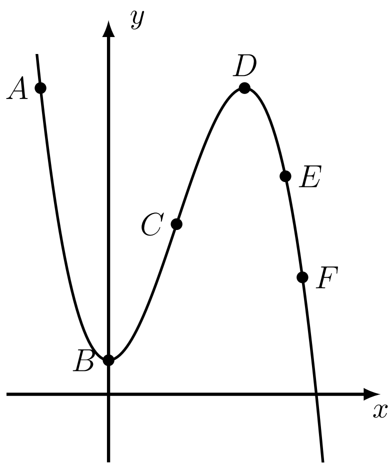
1) Pour se rendre à l'école tous les matin, Tom marche doit faire 160 m depuis sa maison jusqu'à l'arrêt de bus. Le graphique ci-dessous représente son parcours un certain jour. Détermine la pente de chaque segment du graphe, et donc sa vitesse moyenne sur chaque segment du trajet.



2) En réalité, la vitesse est rarement constante, et la représentation de la distance parcourue n'est plus par petits segments droits mais une courbe.
Associer chaque pente à un point de la courbe.



Pente	Points
-4	
4	
0	
10	
8	



Pente	Points
-9	
0	
-10	
3	
-3.75	

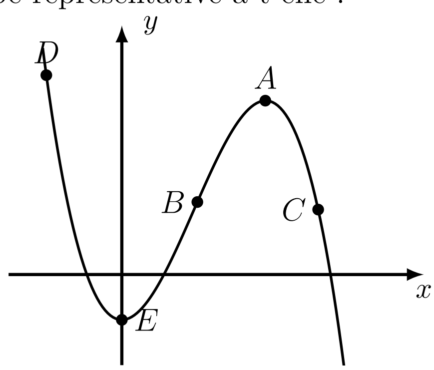
3) Pour la fonction ci-contre,en quel(s) points la courbe représentative a-t-elle :

une pente positive ....

une pente négative ....

la pente la plus grande ....

une pente nulle ....



> Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Et soit $x_0 \in \mathbb{I}$.
> On note $f'(x_0)$, la pente (si elle existe) de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0.
> La tangente à la courbe au point d'abscisse x_0 a pour équation $T\colon y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Exercice 1 Complétez

1) Par lecture graphique déterminer ou comparer :

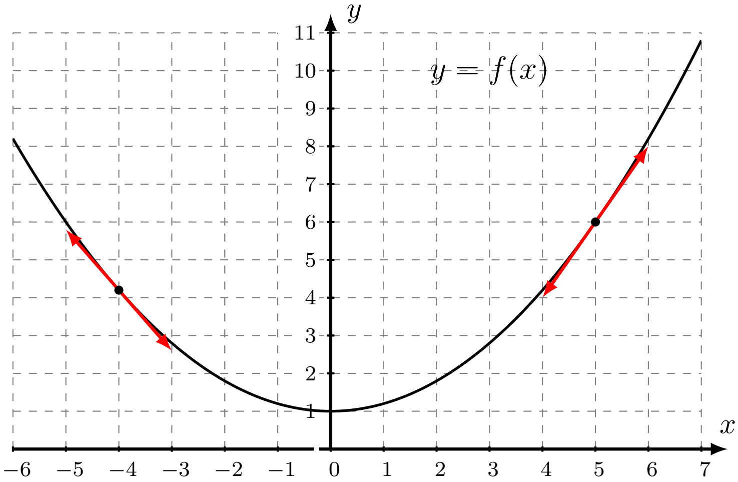
$f(5) = \ldots\ldots$ $\qquad f'(5) = \ldots\ldots$

$f(0) = \ldots\ldots$ $\qquad f'(0) = \ldots\ldots$

$f(-4) = \ldots\ldots$ $\qquad f'(-4) = \ldots\ldots$

$f(2) \ldots\ldots f(5)$ $\qquad f'(2) \ldots\ldots f'(5)$

$f'(-3) \ldots\ldots 0$ $\qquad f'(2) \ldots\ldots 0$



2) Même question avec la fonction g représentée ci-dessous :

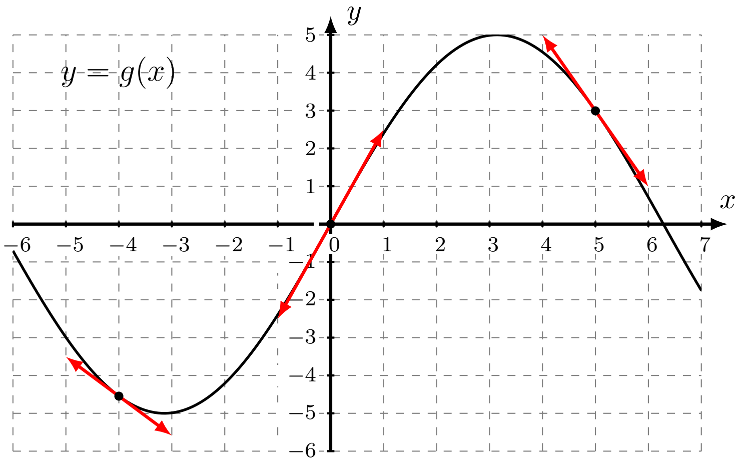
$g(1) = \ldots\ldots$ $\qquad g'(1) = \ldots\ldots$

$g(0) = \ldots\ldots$ $\qquad g'(0) = \ldots\ldots$

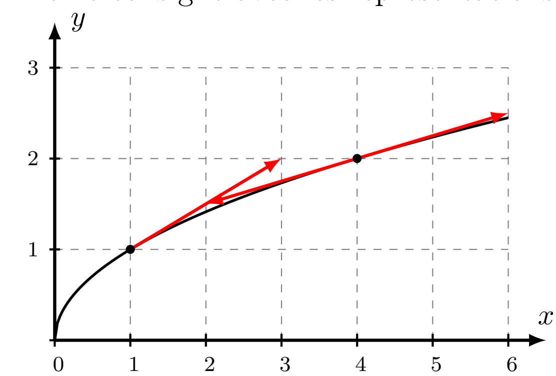
$g(-5) = \ldots\ldots$ $\qquad g'(-5) = \ldots\ldots$

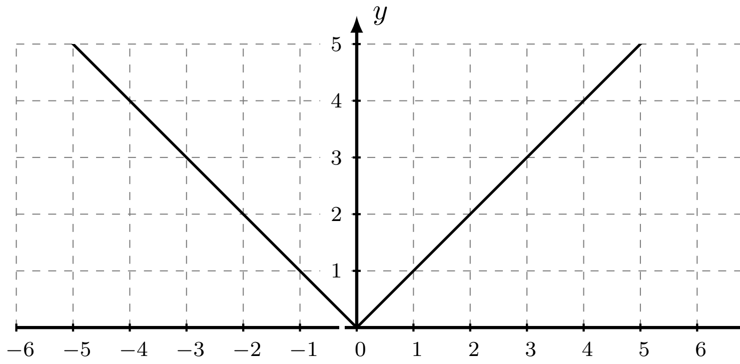
$g(2) \ldots\ldots 0$ $\qquad g'(4) \ldots\ldots g'(6)$

$g'(-3) \ldots\ldots 0$ $\qquad g'(3) \ldots\ldots 0$



3) Même consigne avec les représentations graphiques de la fonction racine carré et valeur absolue :





$f(1) = \ldots\ldots$ $\qquad f'(1) = \ldots\ldots$

$f(4) = \ldots\ldots$ $\qquad f'(4) = \ldots\ldots$

$f(0) = \ldots\ldots$ $\qquad f'(0) = \ldots\ldots$

$f(2.7) = \ldots\ldots$ $\qquad f'(2.7) = \ldots\ldots$

$f(-1.75) = \ldots\ldots$ $\qquad f'(-1.75) = \ldots\ldots$

$f(0) = \ldots\ldots$ $\qquad f'(0) = \ldots\ldots$

Exercice 2 Soit la fonction f et sa représentation graphique $\mathcal{C}_f$. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses. La tangente au point $B(0;2)$ passe par le point de coordonnées $(2;0)$.

1) Donner $f(-2) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

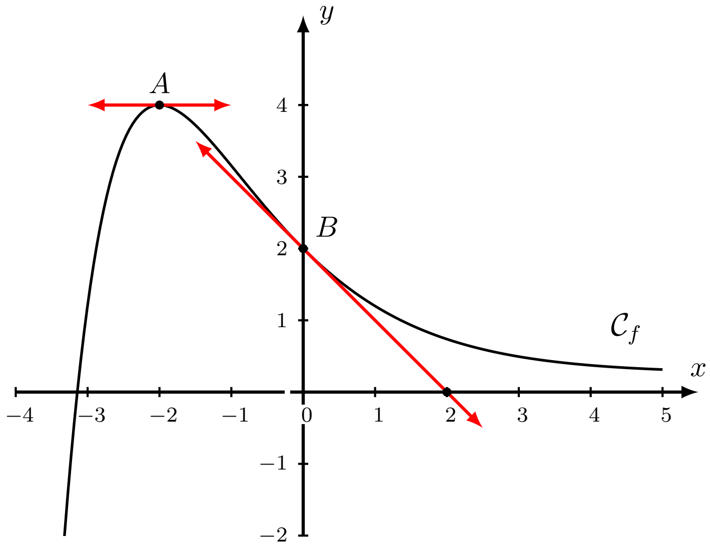
$f'(-2) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$f'(0) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$.

2) En déduire les équations réduites des tangentes à $\mathscr{C}_f$ au point A et au point B :

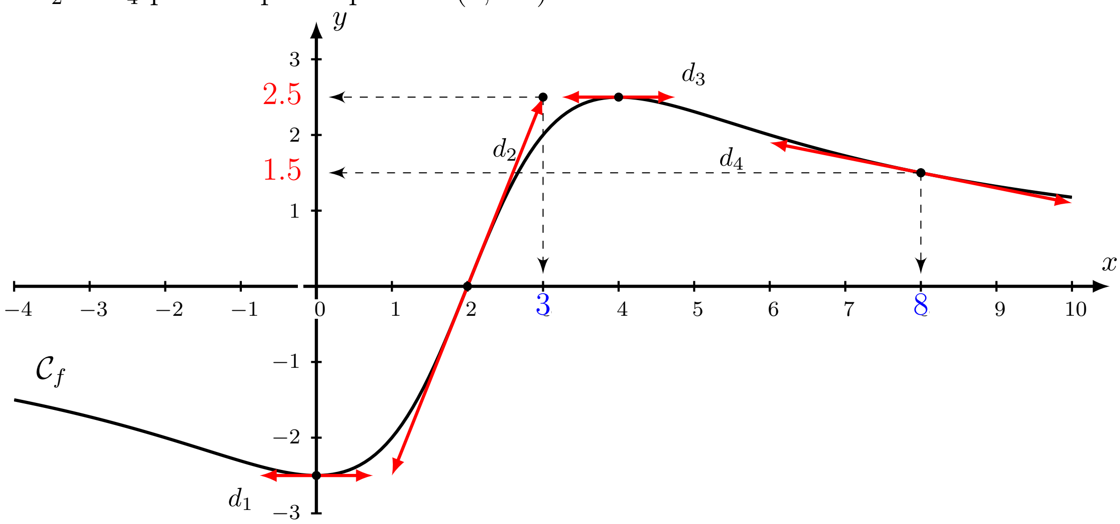
$T_A \colon y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$T_B \colon y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$



Exercice 3

Sur la figure ci-dessous les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f. Les tangentes d_2 et d_4 passent par le point $C(3;2.5)$.



1) Déterminer graphiquement : $f(0) = \dots\dots$, $f(2) = \dots\dots$, $f(4) = \dots\dots$, $f(8) = \dots\dots$

$f'(0) = \dots\dots$, $f'(2) = \dots\dots$, $f'(4) = \dots\dots$, $f'(8) = \dots\dots$

2) En déduire les équations réduites des tangentes d_1, d_2, d_3 et d_4.

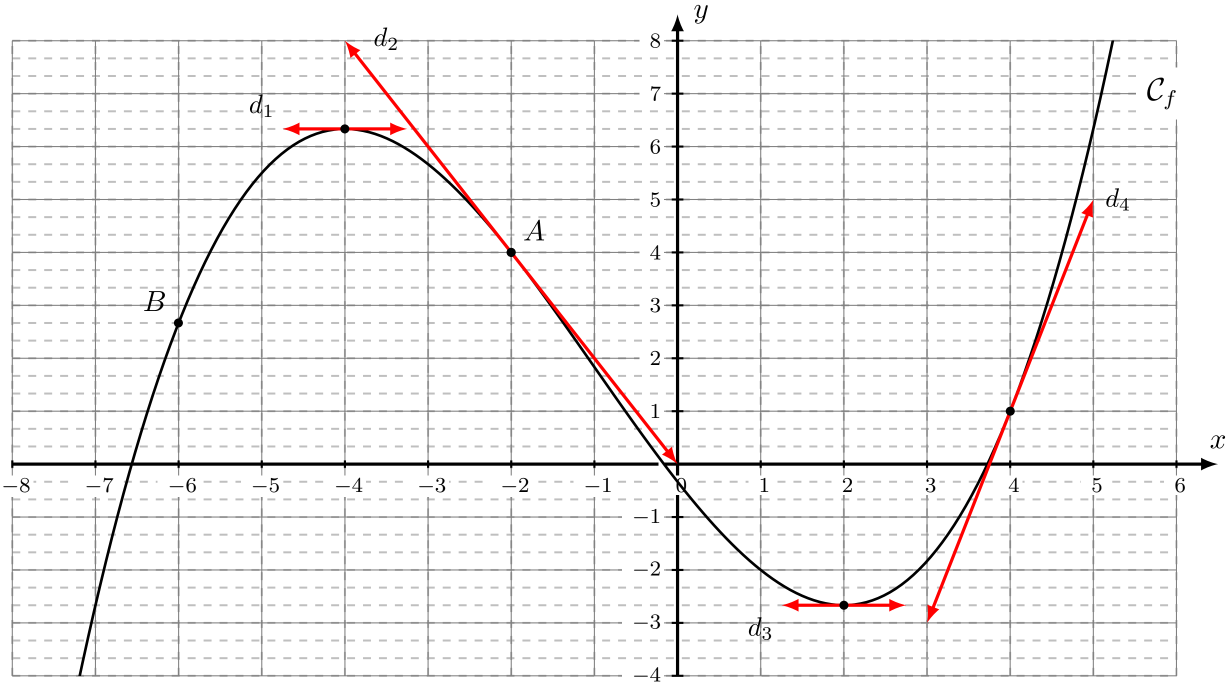
$d_1 \colon y = \dots(x - \dots\dots) + \dots$ $d_2 \colon y = \dots(x - \dots\dots) + \dots$

$y =$ $y =$

$d_3 \colon y = \dots(x - \dots\dots) + \dots$ $d_4 \colon y = \dots(x - \dots\dots) + \dots$

$y =$ $y =$

Exercice 4 Sur la figure ci-dessous, C_f est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. Les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont tangentes à la courbe C_f.



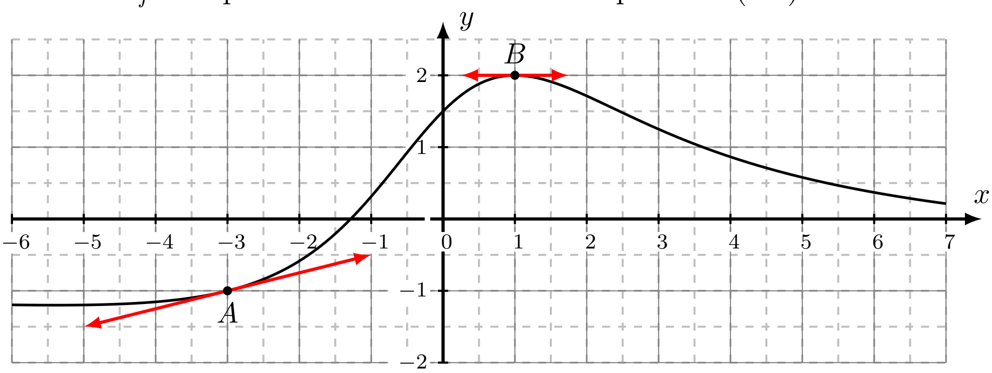
1) Déterminer graphiquement $f(-4)$, $f(-2)$ et $f(2)$.
2) Déterminer graphiquement les nombres dérivés $f'(-4)$ et $f'(2)$.
3) La tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse -2 passe par l'origine du repère. Déterminer $f'(-2)$.
4) La tangente T à la courbe C_f au point $B\left(-6; \dfrac{8}{3}\right)$ est parallèle à la droite d_4.

   Déterminer $f'(-6)$ puis, donner une équation de la tangente T à la courbe au point B.

   Tracer cette droite sur le graphique précédent.

Exercice 5

On a représenté ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points A et B d'abscisses respectives (-3) et 1.



1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer graphiquement $f'(1)$ et $f'(-3)$.
2) On sait que $f'(0) = 1$. Le point de coordonnées $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$ appartient-il à la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?
3) Vrai ou Faux ? « $f'(-2) \leqslant f'(3)$ »

Exercice 6

$T: y = -7x + 9$ est la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe $\mathscr{C}_f$ représenative de f. Déterminez $f'(1)$ et $f(1)$.

4.1.2 Exercices : calcul du nombre dérivé à l'aide du premier principe

■ **Exemple 4.4** Soit la fontion carrée f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Calculer le taux de variation entre a et b puis entre x et $x+h$.

Le taux de variation entre a et b est :

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)}{a-b} = a+b$$

Le taux de variation entre a et $a+h$ est :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$$

Exercice 7

Pour les fonctions suivantes calculer le taux de variation demandé :

1) Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$, taux de variation entre -1 et 1.
2) Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3$, taux de variation entre 1 et 3.
3) Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6$, taux de variation entre 2 et 6.
4) Pour f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, taux de variation entre 3 et 7

Exercice 8

Soit la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$. Calculer le taux de variation entre a et b.

Exercice 9

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2$, calculer le taux de variation entre x et $x+h$.

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= (x+h)^3 + 2 = (x+h)^2(x+h) + 2 = (\qquad\qquad\qquad\qquad)(x+h) + 2 \\
&= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&= (\dots x^3 + \dots x^2h + \dots xh^2 + \dots h^3) + 2 \\
f(x+h) - f(x) &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Factoriser numérateur

Exercice 10 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 4$

$$\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{h\to\dots} \frac{f(3+\dots) - f(\dots)}{h} \\
&= \lim_{h\to\dots} \frac{\left[(3+\dots)^2 + 2(3+\dots) - 4\right] - \left[3^2 + 2\times 3 - 4\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to\dots} \frac{\left[(3+\dots)^2 + 2(3+\dots) - 4\right] - \left[3^2 + 2\times 3 - 4\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to\dots} \frac{\dots h^2 + \dots h}{h} \\
&= \lim_{h\to\dots} \frac{h(\dots h + \dots)}{h} \\
&= \lim_{h\to\dots} (\dots h + \dots) = 8
\end{aligned}$$

Développer

Factoriser le numérateur

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to\ldots} \frac{f(\ldots+\ldots)-f(\ldots)}{h}\\
&= \lim_{h\to\ldots} \frac{\left[(\ldots+\ldots)^2+2(\ldots+\ldots)-4\right]-\left[\ldots^2+2\times\ldots-4\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to\ldots} \frac{\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right]-\left[\qquad\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to\ldots} \frac{\ldots h^2+\ldots h}{h} = \lim_{h\to\ldots} \frac{h(\ldots h+\ldots)}{h} = \lim_{h\to\ldots} (\ldots h+\ldots)\\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(-2) &= \lim_{h\to\ldots} \frac{f(\ldots+\ldots)-f(\ldots)}{h}\\
&= \lim_{h\to\ldots} \frac{\left[(\ldots+\ldots)^2+2(\ldots+\ldots)-4\right]-\left[\ldots^2+2\times\ldots-4\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to\ldots} \frac{\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right]-\left[\qquad\quad\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to\ldots} \frac{\ldots h^2+\ldots h}{h} = \lim_{h\to\ldots} \frac{h(\ldots h+\ldots)}{h} = \lim_{h\to\ldots} (\ldots h+\ldots)\\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Exercice 11

Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables en x_0 et détérminez le nombre dérivé.

1) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5-3x^2$, et $x_0 = -3$.
2) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3-2x$, et $x_0 = 1$.
3) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+8x-2$, et $x_0 = -2$.
4) f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2}{x}$ et $x_0 = 2$.
5) f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ et $x_0 = 3$.

Problème 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = px^2+qx+r$.

1) Montrer que le taux de variation entre a et b est égal à $p(a+b)+q$.
2) Exprimer $f'(c)$ en fonction de p, q et c.
3) On suppose que le taux de variation entre a et b est égal à $f'(c)$. Quelle est la relation entre a, b et c ?
4) Expliquer comment tracer la tangente à une parabole en un point d'abscisse 0 sans calculer le nombre dérivée $f'(0)$ de la fonction quadratique représentée.

Exercice 12 — Point calculatrice.

1) Tracer sur votre pythonette la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{-9}{2x^2-4x+3}$
2) À l'aide de la touche (paste"), aller au point d'abscisse -2
   À l'aide de la touche (paste"), tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.
   Relever une valeur approchée de $f'(-2) \approx \ldots\ldots\ldots\ldots$; $f'(-1) \approx \ldots\ldots\ldots\ldots$; $f'(0) \approx \ldots\ldots\ldots\ldots$
3) Aller dans l'onglet calcul, utiliser les touches (copy ; var)(paste") et pour calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))\Big|_{x=\frac{2}{3}} \approx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4.2 Dérivées des fonctions de référence

Définition 4.3 Pour une fonction f définie sur un intervalle $D \in \mathbb{R}$.
L'ensemble $D' \subset D$ des abscisses x pour lesquelles f est dérivable en x est le **domaine de dérivabilité**.
La fonction dérivée f' est définie sur D' par $f' \colon x \mapsto f'(x)$.

Proposition 4.2 Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx+p$.
f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a $f'(x) = m$.

Démonstration. d'après l'ex. 8 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} m = m$ ■

Proposition 4.3 Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 2x$.

Démonstration. l'exemple 4.4 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(2x+h) = 2x$ ■

Proposition 4.4 — admis. $n \in \mathbb{N}$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = nx^{n-1}$

Proposition 4.5 — admis. $n \in \mathbb{N}$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -nx^{-n-1} = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$

R La formule précédente permet de retrouver l'expression de la fonction dérivée dans les cas n non entier.
Par exemple la fonction $f(x) = \sqrt{x} = x^{0.5}$, $f'(x) = 0.5x^{0.5-1} = 0.5x^{-0.5} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{x^{0.5}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

4.2.1 Exercices : fonction dérivée

Exercice 13 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 5x - 2$. Complétez :

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= \left[(x+h)^2 + 5(x+h) - 2\right] - \left[x^2 + 5x - 2\right] \\
&= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&= \dots xh + \dots h + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{\delta y}{\delta x} &= \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\delta x} \\
\lim_{\dots\dots\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{\dots\dots\to 0} (\dots x + \dots + h) \\
&= \dots x + \dots
\end{aligned}$$

La limite existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exercice 14 Montrer que la fonction est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et détérminer $f'(x)$.

1) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 7$
2) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x - 3$

Exercice 15 — fonction valeur absolue. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. On rappelle que si x est positif, $|x| = x$ et si x est négatif, $|x| = -x$.

1) Si $\delta x > 0$ ontrer que la taux de variation de f entre 0 et δx est égale à 1.
2) Si $\delta x < 0$ ontrer que la taux de variation de f entre 0 et δx est égale à -1.
3) La fonction valeur absolue est-elle dérivable en 0 ? Justifier.

Exercice 16 — dérivée de la fonction cube. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 3x^2$

Exercice 17 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 4x^3$

Exercice 18 — dérivée de la fonction inverse. Complétez

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \\
&= \frac{1 \times (\qquad\qquad)}{(x+\delta x)(\qquad\qquad)} - \frac{1 \times (\qquad\qquad)}{x \times (\qquad\qquad)} \\
&= \frac{\qquad\qquad\qquad}{x(x+h)} \\
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\qquad\qquad\qquad}{h \times x(x+h)} =
\end{aligned}$$

mettre au même dé

Pour $x \neq 0$ alors $\displaystyle\lim_{\dots\dots\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$

La fonction inverse f est dérivable pour tout $x \neq 0$ et $f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exercice 19 — dérivée de la fonction racine carrée. Soit la fonction racine carrée f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{h}\times\frac{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{(\qquad\qquad)^2-(\qquad\qquad)^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{\qquad}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \underline{\qquad\qquad}\end{aligned}$$

Si $x\neq 0$, alors $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$ .... La fonction est dérivable et $f'(x)=$ ....

Si $x=0$, alors la $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$; $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$.... La fonction n'est pas dérivable en 0.

Exercice 20

Soit f définie sur $[-1;\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+1}$. Déterminer le domaine de dérivabilité et l'expression de f'.

Exercice 21 — Appliquer les formules des dérivées.

Pour chaque cas : donner le domaine, le domaine de dérivabilité et l'expression de la fonction dérivée f'

1) $f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$. $D=$ .... $D'=$ .... $f'(x)=$ ....
2) $f(x)=x^6$. $D=$ .... $D'=$ .... $f'(x)=$ ....
3) $f(x)=x^7$. $D=$ .... $D'=$ .... $f'(x)=$ ....
4) $f(x)=\frac{1}{x^3}=$ .... $D=$ .... $D'=$ .... $f'(x)=$ ....
5) $f(x)=\frac{1}{x^9}=$ .... $D=$ .... $D'=$ .... $f'(x)=$ ....
6) $f(x)=x^9$. $D=$ .... $D'=$ .... $f'(x)=$ ....

Exercice 22 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^5$.

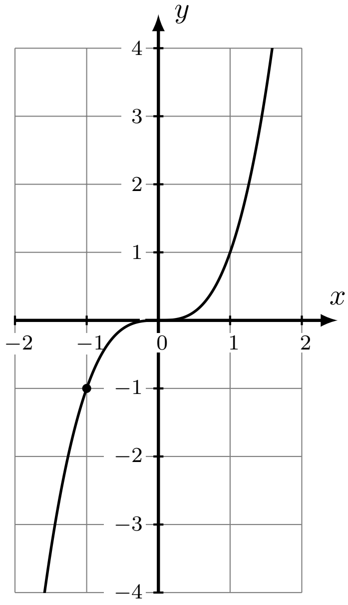
1) Déterminer le domaine de dérivabilité et l'expression de la fonction dérivée.
2) Déterminez les coordonnées du point d'abscisse 1.
3) Calculer $f'(1)$. Déduire l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1.

Exercice 23 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{x^4}$.

1) Déterminer le domaine de dérivabilité et l'expression de la fonction dérivée.
2) Utilisez l'expression pour déterminez $f'(1)$.
3) Déterminez l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1.

Exercice 24 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$.

1) Déterminer le domaine de dérivabilité et l'expression de la fonction dérivée.
2) Déterminez l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse -1.
3) Tracer la sur le graphe ci=contre.



4.3 Dérivées et opérations (1)

Définition 4.4 Soit u et v deux fonctions dévinies sur un intervalle I. $k \in \mathbb{R}$ un réel.
On défini les fonctions $(u+v)$, (uv) et (ku) sur l'intervalle I par :

- $(u+v)\colon x \mapsto u(x)+v(x)$ (somme)
- $(ku)\colon x \mapsto k \times u(x)$ (multiplier par constante)
- $(uv)\colon x \mapsto u(x) \times v(x)$ (produit)
- $\left(\frac{1}{v}\right) : x \mapsto \frac{1}{v(x)}$ (inverse)
- $\left(\frac{u}{v}\right) : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ (quotient)

Proposition 4.6 — dérivée d'une somme. Si les fonctions u et v sont dérivable en x, alors les fonctions uv, ku, et uv sont aussi dérivable en x et

$$\begin{aligned} (k)' &= 0 \\ (ku)'(x) &= k \times u'(x) \\ (u+v)'(x) &= u'(x)+v'(x) \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{\delta(ku)}{\delta x} &= \frac{(ku)(x+\delta x)-(ku)(x)}{\delta x} \\ &= \frac{ku(x+\delta x)-ku(x)}{\delta x} \\ &= \frac{k\big(u(x+\delta x)-u(x)\big)}{\delta x} \\ \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta(ku)}{\delta x} &= \lim_{\delta x \to 0} \frac{k\big(u(x+\delta x)-u(x)\big)}{\delta x} \\ \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta(ku)}{\delta x} &= k \lim_{\delta x \to 0} \frac{\big(u(x+\delta x)-u(x)\big)}{\delta x} \\ &= ku'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta(u+v)}{\delta x} &= \frac{(u+v)(x+\delta x)-(u+v)(x)}{\delta x} \\ &= \frac{u(x+\delta x)+v(x+\delta x)-u(x)-v(x)}{\delta x} \\ &= \frac{u(x+\delta x)-u(x)+v(x+\delta x)-v(x)}{\delta x} \\ \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta(u+v)}{\delta x} &= \lim_{\delta x \to 0} \frac{u(x+\delta x)-u(x)}{\delta x} + \frac{v(x+\delta x)-v(x)}{\delta x} \\ &= \lim_{\delta x \to 0} \frac{u(x+\delta x)-u(x)}{\delta x} + \lim_{\delta x \to 0} \frac{v(x+\delta x)-v(x)}{\delta x} \\ &= u'(x)+v'(x) \end{aligned}$$

■

Proposition 4.7 — Dérivée d'une composée. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle J. On suppose que l'expression $u(ax+b)$ est définie pour x appartenant à un intervalle I.

Alors la fonction f définie sur I par $f(x)=u(ax+b)$ est dérivable sur I et

$$f'(x)=au'(ax+b)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta f}{\delta x} &= \frac{u\big(a(x+\delta x)+b\big)-u\big(ax+b\big)}{\delta x}\\
&= \frac{u\big(ax+b+a\delta x\big)-u\big(ax+b\big)}{\delta x}\\
&= a\frac{u\big(ax+b+a\delta x\big)-u\big(ax+b\big)}{a\delta x}\\
\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta f}{\delta x} &= a\lim_{\delta x\to 0}\left(\frac{u\big(ax+b+a\delta x\big)-u\big(ax+b\big)}{a\delta x}\right)\\
&= a\lim_{a\delta x\to 0}\left(\frac{u\big(ax+b+a\delta x\big)-u\big(ax+b\big)}{a\delta x}\right)\\
&= a\lim_{h\to 0}\left(\frac{u\big(ax+b+h\big)-u\big(ax+b\big)}{h}\right)\\
\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta f}{\delta x} &= au'(ax+b)
\end{aligned}$$

■

4.3.1 Exercices : dérivée et opérations (1)

■ **Exemple 4.5 — addition et multiplicaton par constante.** Donner le domaine de définition puis de dérivabilité et l'expressoin de la dérivée dans les cas suivants :

$f(x) = 3x^2 - 2x + 4$

$D = \mathbb{R} \quad D' = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3(2x) - 2(1) + 0$

$= 6x - 2$

$f(x) = \sqrt{x} + 2x$

$D' =]0; +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2(1)$

$f(x) = 7x - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^3}$

$D = \mathbb{R}^* \quad D' = \mathbb{R}^*$

$f(x) = 7x - 4x^{-1} + 3x^{-3}$

$f'(x) = 7(1) - 4(-x^{-2}) + 3(-3x^{-4})$

$f'(x) = 7 + 4x^{-2} - 9x^{-4}$

$f'(x) = 7 + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{9}{x^4}$

$f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x}$

$D = \mathbb{R}^* \quad D' = \mathbb{R}^*$

$f(x) = \dfrac{x^2}{x} + 4 - \dfrac{5}{x}$

$f(x) = x + 4 - 5x^{-1}$

$f'(x) = (1) + 0 - 5(-x^{-2})$

$f'(x) = 1 + \dfrac{5}{x^2}$

Exercice 25 Mêmes consignes.

1) $f(x) = 4x^3 - x$	4) $f(x) = 2x^3$	7) $f(x) = 7x^2$	10) $f(x) = x^2 + x$
2) $f(x) = 4 - 2x^2$	5) $f(x) = x^2 + 3x - 5$	8) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2}$	11) $f(x) = x^3+3x^2+4x-1$
3) $f(x) = 3 - \dfrac{6}{x}$	6) $f(x) = \dfrac{x^3+5}{x}$	9) $f(x) = 5x^4 - 6x^2$	12) $f(x) = \dfrac{x^3+x-3}{x}$

Exercice 26 Dérive la fonction donnée et détermine la valeur du nombre dérivé demandé.

1) $f(x) = x^2$, $f'(x) =$ .... $f'(2) =$ ....

2) $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$, $f'(x) =$ .... $f'(-1) =$ ....

3) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 - 2$, $f'(x) =$ .... $f'(-1) =$ ....

4) $f(x) = \dfrac{8}{x^2}$, $f'(x) =$ .... $f'(9) =$ ....

5) $f(x) = 2x - \dfrac{5}{x}$, $f'(x) =$ .... $f'(2) =$ ....

6) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x - 8}{x^2}$, $f'(x) =$ .... $f'(-1) =$ ....

■ **Exemple 4.6 — dérivée d'une composée.** Donner le domaine de dérivabilité et l'expressoin de la dérivée dans les cas suivants :

$f(x) = (5x+3)^3 \quad u(x) = x^3$

$D = \mathbb{R}$

$D' = \mathbb{R}$

$f'(x) = (5x+3)'u'(5x+3)$

$= (5(1)+0) \times 3(5x+3)^2$

$= 15(5x+3)^2$

$f(x) = \dfrac{1}{2x-1} \quad u(x) = \dfrac{1}{x}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

$D' = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

$f'(x) = (2x-1)'u'(2x-1)$

$f'(x) = 2\dfrac{-1}{(2x-1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-2}{(2x-1)^2}$

$f(x) = \sqrt{2x-1} \quad u(x) = \sqrt{x}$

$D = [\frac{1}{2}; +\infty[$

$D' =]\frac{1}{2}; +\infty[$

$f'(x) = (2x-1)'u'(2x-1)$

$f'(x) = 2\dfrac{1}{2\sqrt{2x-1}}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

Exercice 27 Déterminer le domaine de définition et de dérivation de chaque fonction, ainsi que l'expression de la fonction dérivée f' .

1) $f(x) = \dfrac{1}{3x+6}$

2) $f(x) = (3x+4)^3$

3) $f(x) = (5-3x)^2$

4) $f(x) = \sqrt{5x-3}$

5) $f(x) = 5x + \sqrt{3x+18}$

6) $f(x) = (ax+b)^3$

7) $f(x) = \dfrac{5}{(2x-5)^2}$

8) $f(x) = 3x+1+\dfrac{1}{2x+8}$

9) $f(x) = \sqrt{-3x+12}$

Exercice 28 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1) Donner le domaine de dérivabilité et déterminer l'expression de la fonction dérivée f'.
2) Pour chaque affirmation entourer l'équation vraie :
   a) $A(0;1) \in \mathscr{C}_f$: $f(1) = 0$ $f'(1) = 0$ $f(0) = 1$ $f'(0) = 1$
   b) La pente de la tangente en A est 3 : $f'(3) = 0$ $f'(3) = 1$ $f'(0) = 3$ $f'(1) = 3$
   c) $B(2,-13) \in \mathscr{C}_f$: $f'(2) = -13$ $f'(-13) = 2$ $f(-13) = 5$ $f(2) = -13$
3) Écrire le système vérifié par a, b et c et donner l'expression de la fonction f.

Exercice 29 La représentation graphique $\mathscr{C}_f$de la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx + cx + d$ passe par $A(0, 1.2)$ et $B(2;0)$ et les tangentes en A et B sont parallèles à l'axe des abscisses.

1) Déterminer l'expression de f'.
2) Donner $f(0)$ et $f'(0)$ et en déduire les valeurs de c et d.
3) Donner $f(2)$ et $f'(2)$ et en déduire que a et b vérifient $\begin{cases} 8a+4b+1.2=0 \\ 12a+4b=0 \end{cases}$.
4) Trouver a et b et retrouver l'expression de f.

Exercice 30 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 4$.

1) Donner le domaine de dérivabilité et déterminer l'expression de la fonction dérivée f'.
2) On suppose $f(2) = 0$, $f'(1) = 0$ et $f'(-2) = 0$. Écrire 3 équations vérifiées par les inconnues a, b et c.
3) Résoudre le système obtenu et donner l'expression de la fonction f.

Exercice 31 Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + bx + c$.

1) Donner le domaine de définition de la fonction f.
2) Donner le domaine de dérivabilité et déterminer l'expression de la fonction dérivée f'.
3) Pour chaque affirmation entourer l'équation vraie :
   a) $A(0;5) \in \mathscr{C}_f$: $f(5) = 0$ $f'(5) = 0$ $f(0) = 5$ $f'(0) = 5$
   b) La pente de la tangente en A est -9 : $f'(-9) = 0$ $f'(5) = -9$ $f'(0) = -9$ $f'(-9) = 5$
   c) $B(2, -\frac{23}{3}) \in \mathscr{C}_f$: $f(2) = -\frac{23}{3}$ $f'(2) = -\frac{23}{3}$ $f(-\frac{23}{3}) = 5$ $f'(-\frac{23}{3}) = 2$
4) Traduire les 3 affirmations précédente par un système d'inconnue a, b et c.
5) Résoudre le système et déduire l'expression de la fonction f.

Exercice 32

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$.

Les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B ont pour pente $-\dfrac{1}{2}$, avec $x_A < x_B$. On note x l'abscisse du point A.

1) Donner une équation vérifiée par x.
2) Résoudre l'équation et détérminer les abscisses de A et de B.

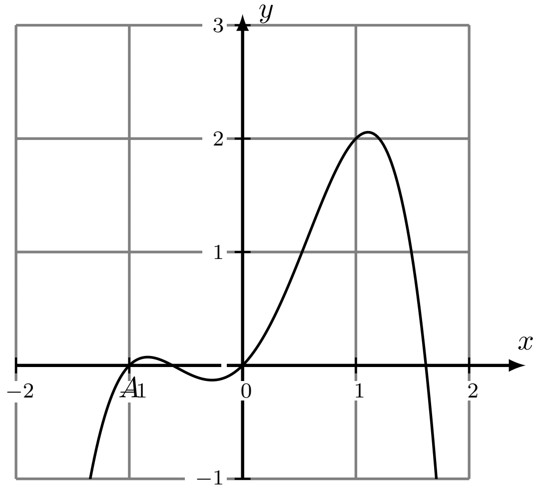
4.4 Exercices : Application 1 sur les droites tangentes

> Si f est dérivable en x_0. La tangente à la courbe $\mathscr{C}: y = f(x)$ au point $(x_0; f(x_0)$ est :
> $$T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Exercice 33

Soit la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$.

1) Déterminer l'expression de f'.
2) Déterminez l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -1 puis tracer T.
3) Démontrer que T coupe $\mathscr{C}_f$ en un autre point B dont on donnera les coordonnées.
4) Montrer que T est aussi tangente à $\mathscr{C}_f$ en B.



Exercice 34

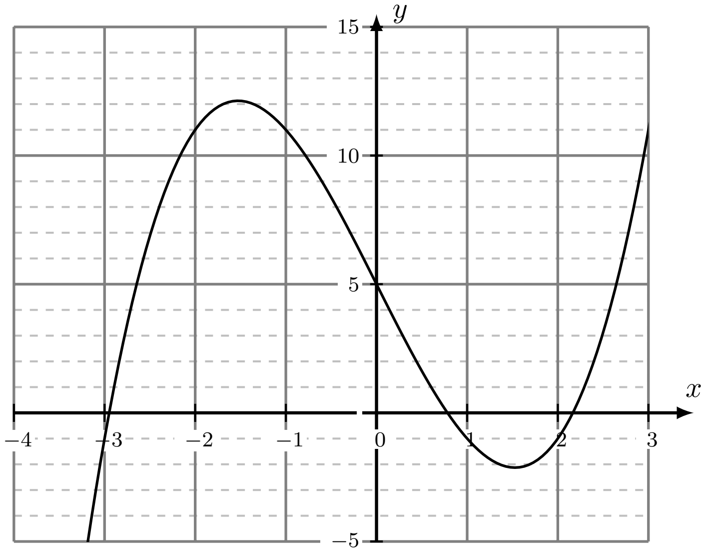
Soit les représentation graphique $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$ et $g(x) = x^2 - 4x + 6$.

1) Démontrer qu'il existe un unique point A intersection $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et déterminer ses coordonnées.
2) Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent une tangente commune en A.

Exercice 35

Ci-dessous la représentation $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 7x + 5$.

1) Déterminez l'expression de f'.
2) Déterminez l'équation réduite de(s) tangente(s) au point d'abscisse 2.
3) Déterminez l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ de pente -4.
4) Tracer toutes ces tangentes sur le graphique ci-dessus.



Exercice 36 Déterminer les équations réduites des tangentes à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 dans les cas suivants :

1) $f(x) = -2x^2 + 10$
2) $f(x) = 5 + x - x^3$

Exercice 37 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x + 4$. Déterminer les équations réduites des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite $D: y = 3x + 1$

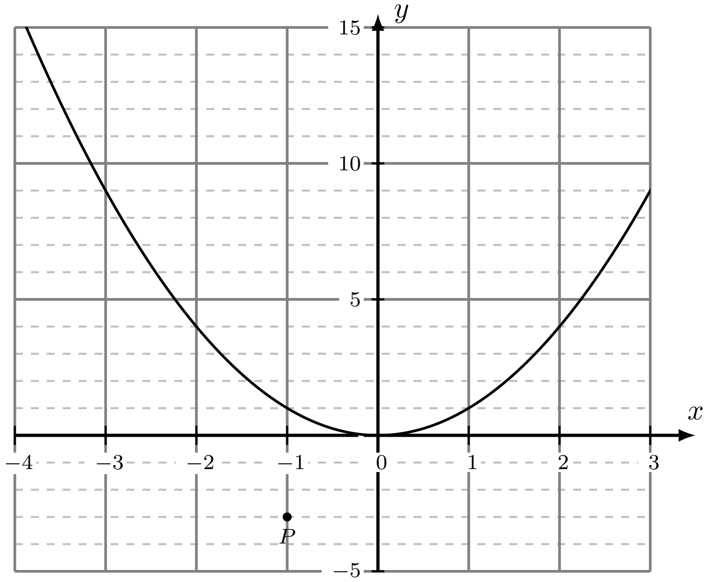
Exercice 38 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x$.

1) Montrer que $A(1, -3) \in \mathscr{C}_f$.
2) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point A.
3) Montrer que la droite T coupe $\mathscr{C}_f$ en un second point. *Écrire un système d'équations*

Exercice 39 — un classique. https://www.desmos.com/calculator/uw53iiqhtg

Soit la fonction carrée f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et sa parabole $\mathscr{C}_f$.

1) Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée f'.
2) a) Soit $A(a, f(a)) \in \mathscr{C}_f$. Montrer que la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point A a pour équation $y = 2ax - a^2$
   b) Sachant que T passe par $P(-1; -3)$, montrer que a vérifie $a^2 + 2a - 3 = 0$
   c) Déterminer les équations des tangentes à $\mathscr{C}$ passant par $P(-1; -3)$.
   d) Tracer les deux tangentes sur le graphe ci-contre.

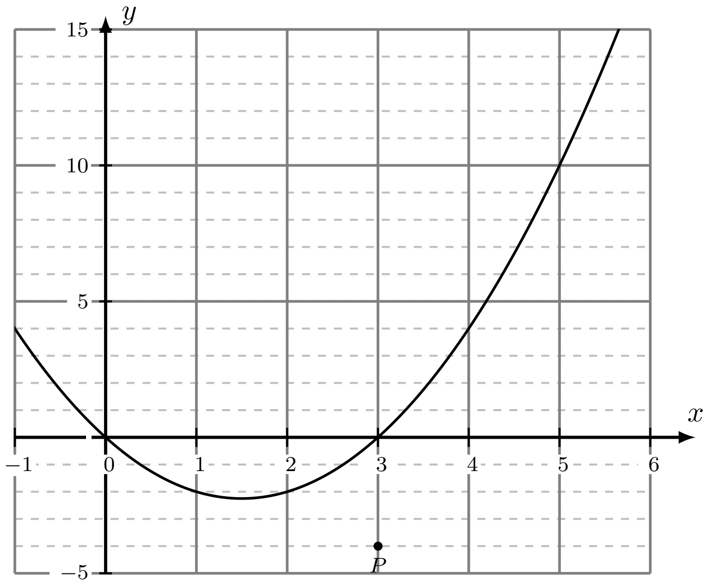


Exercice 40

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x$. On cherche à trouver les tangentes à $\mathscr{C}_f$ qui passent par le point $P(3; -4)$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $A(a; a^2 - 3a) \in \mathscr{C}_f$ le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a, et T la tangente en A.

1) Montrer que $T\colon y = (2a - 3)x - a^2$.
2) Sachant que T passe par P, donner l'équation l'équation vérifiée par a.
3) Résoudre en a, et déterminer les équations réduites des deux tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par P
4) Tracer les deux tangentes sur le graphe ci-contre.



Exercice 41

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Montrer qu'il existe une unique tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par $P(1; 5)$

Exercice 42

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$. Déterminer les équations réduites des tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par $P(-1; -7)$

Exercice 43

Soit la fonction carrée f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ et sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$.

1) Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée f'.
2) Soit $A(a, f(a)) \in \mathscr{C}_f$, et T la tangente T à $\mathscr{C}_f$
   a) Montrer que T a pour équation $y = (3a^2 + 6a + 2)x - 2a^3 - 3a^2$
   b) Déterminer le(s) abscisse(s) a pour lesquelles la tangente T est parallèle à $D_1\colon y = 2x$.
   c) Déterminer le(s) abscisse(s) a pour lesquelles la tangente T est parallèle à $D_2\colon y = -x$.
   d) Démontrer que la droite $D_3\colon y = 11x - 4$ avec $\mathscr{C}_f$ est tangente à $\mathscr{C}_f$.

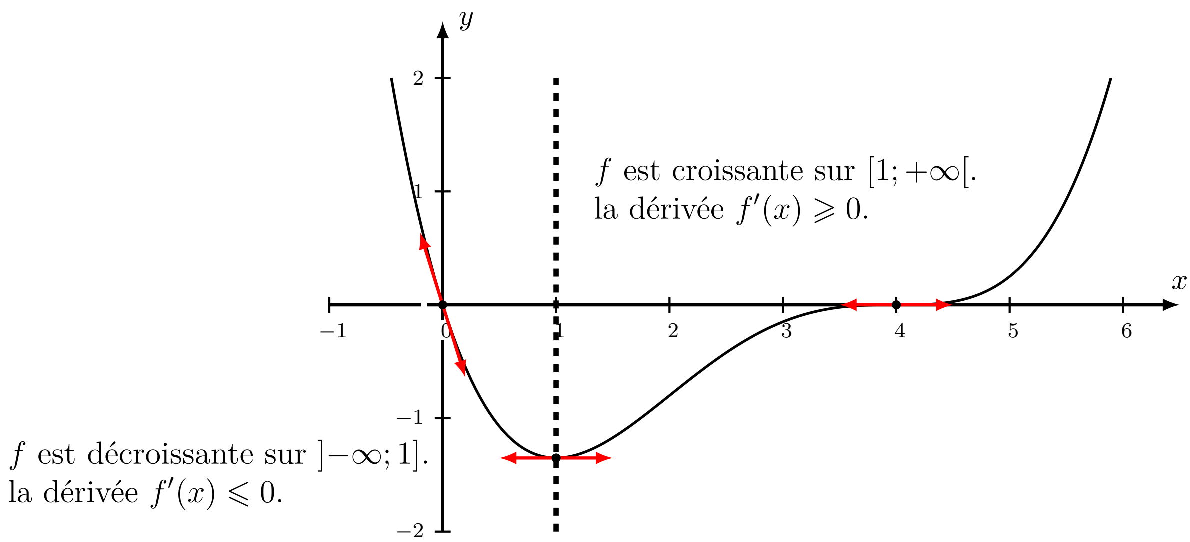
4.5 Application 2 : sens de variation d'une fonction

R Si f est une fonction strictement croissante et dérivable sur l'intervalle $[a;b]$, alors pour tout $a < x_0 < b$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x)}{\delta x_0} \geqslant 0$$

Si f est une fonction strictement décroissante et dérivable sur l'intervalle $[a;b]$, alors pour tout $a < x < b$: $f'(x) \leqslant 0$.

Si f est constante sur $[a;b]$, alors pour tout $a < x < b$: $f'(x) = 0$.



Théorème 4.8 — admis. Pour une fonction f définie sur intervalle $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$.

- Si pour tout $x \in]a;b[$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur $[a;b]$
- Si pour tout $x \in]a;b[$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $[a;b]$
- Si pour tout $x \in]a;b[$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur $[a;b]$

Définition 4.5 Pour une fonction f représentée par $\mathscr{C} : y = f(x)$, on appelle **point critique** les points $(x;y)$ tel que :

$$f'(x) = 0 \qquad \text{ou} \qquad f' \text{ n'est pas définie}$$

Si $f'(x) = 0$ et **la dérivée change de signe**, x est un **extremum** local.

Si $f'(x) = 0$ et **la dérivée ne change pas de signe**, on parle d'un point d'inflection.

R Exercices du manuel pour associer propriétés de f et propriétés de sa dérivée de 143 à 150.

- à l'oral 15, 16, 17 pp 143
- Flash 25,27,28,26
- 21, 22
- De f vers f' : 29 et 30
- De f' vers f : 32 et 33, 34, 38, 39, 40, 36
- 54 : raisonnement
- Entrainement : 57, 58, 70, 73, 79, 80

4.5.1 Exercices : application de la dérivation à l'étude du sens de variation

Exercice 44 Complétez et étudier le sens de variation des fonctions f données :

1) f est définie définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 1$

f est un polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Les valeurs critiques :

$$f'(x) = 0$$

$$\ldots\ldots x \quad \ldots\ldots = 0$$

$$x =$$

x	
signe de $f'(x)$	0
variation de f	

La fonction f admet un $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ en $x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2) f est définie définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x - 7$

f est un polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Pour tout x : $f'(x) \ldots\ldots 0$.

f est $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ sur $\mathbb{R}$.

x			
signe de $f'(x)$			
variation de f			

3) f est définie définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$

f est un polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Je factorise l'éxpression de $f'(x)$:

$f'(x) = \ldots(x - \ldots\ldots)(x - \ldots\ldots)$

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

x			
signe de $f'(x)$			
variation de f			

f admet un maximum local en $x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et minimum local en $x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 45

Pour chacune des fonctions f suivantes :

- déterminer sa dérivée f', factoriser f' et complétez le tableau de signe de f'.
- déterminer le sens de variation de f et préciser les extremum locaux.

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

2) $f(x) = 3x - x^3$

3) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 4$

4) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - x^2$

5) $f(x) = x^4 + 2x^3$

Exercice 46 Pour chacune des fonction définie sur $\mathbb{R}$, déterminez les points critiques et les extremums locaux des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$

2) $f(x) = x^2(x-1)(x+1)$

3) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 9$

4) $f(x) = x^6 - 3x^2$

Exercice 47 Montrer que les fonctions suivantes sont monotones sur $\mathbb{R}$ sans d'extremums locaux :

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$

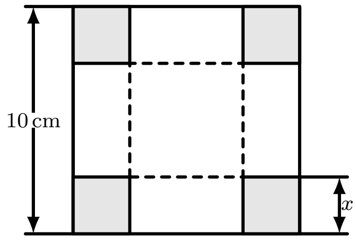
2) $f(x) = -x^5 - 5x^3 - 10x$

Exercice 48 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1) Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$
2) En déduire le maximum et le minimum de f sur l'intervalle $[1; 3]$.
3) Même question sur l'intervalle $[-2; 4]$.

Exercice 49 — un exemple d'optimisation. On dispose d'un carton carré de longueur de côté 10 cm. Pour fabriquer une boite sans couvercle on enlève 4 coins carrés identiques de côté x et on relève les bords par pliage.

1) Exprime à l'aide de x les dimensions de la boite.
2) Montrer que le volume de la boite $f(x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$.
3) Expliquer pourquoi $x \in [0; 5]$.
4) Déterminer f' et étudier le sens de variation de f sur $[0; 5]$
5) Déterminer x pour laquelle le volume est maximal et que le maximum vaut $\frac{2000}{7}$.



Exercice 50 Complétez afin d'étudier le sens de variation de la fonction d'expression $f(x) = x + \dfrac{1}{3x+2}$:

f est définie définie pour $x \neq \ldots\ldots$, donc $D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

f est dérivable sur $D' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$f'(x) = \frac{\ldots\ldots x^2 + \ldots\ldots x + \ldots\ldots}{(3x+2)^2}$$

Les racines du numérateur sont :

$r_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $r_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

x							
$\cdots$		0				0	
$(3x+2)^2$				0			
signe de $f'(x)$							
variation de f							

f admet un maximum local en $x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et minimum local en $x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 51 Pour chacune des fonctions f suivantes :

- préciser le domaine de définition et de dérivabilité
- déterminer sa dérivée f', ramener au même dénominateur pour complétez le tableau de signe de f'.
- déterminer le sens de variation de f et préciser les extremum locaux.

1) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

2) $f(x) = x - \dfrac{4}{x}$

3) $f(x) = 4 + \dfrac{1}{x-2}$

4) $f(x) = x - \dfrac{1}{2x-1}$

5) $f(x) = x - \sqrt{x}$

6) $f(x) = x^5 + \sqrt{x}$

4.6 Dérivées et opérations (2)

Proposition 4.9 — dérivée d'un produit. Si les fonctions u et v sont dérivables pour tout $x \in I$, alors uv est aussi dérivable sur I.
Si $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont aussi dérivables sur I et on a :

$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{(v)^2}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{(v)^2}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta(uv)}{\delta x} &= \frac{(uv)(x+\delta x) - (uv)(x)}{\delta x} \\
&= \frac{u(x+\delta x)v(x+\delta x) - u(x)v(x)}{\delta x} \\
&= \frac{\big(u(x+\delta x) - u(x)\big)v(x+\delta x) + u(x)\big(v(x+\delta x) - v(x)}{\delta x} \\
&= \frac{\big(u(x+\delta x) - u(x)\big)}{\delta x} v(x+\delta x) + u(x)\frac{\big(v(x+\delta x) - v(x}{\delta x}
\end{aligned}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta(uv)}{\delta x}(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

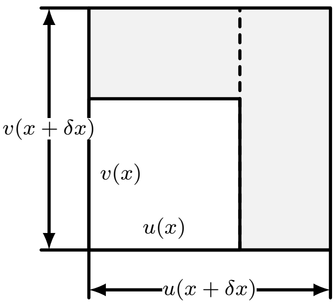


Figure 4.2 – Illustration de la différence $(uv)(x+\delta x) - (uv)(x)$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta(\frac{1}{v})}{\delta x} &= \frac{\frac{1}{v(x+\delta x)} - \frac{1}{v(x)}}{\delta x} = \frac{1}{\delta x}\frac{v(x) - v(x+\delta x)}{v(x+\delta x)(v(x))} \\
&= -\frac{1}{v(x)v(x+\delta x)}\frac{v(x+\delta x) - v(x)}{\delta x}
\end{aligned}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta \frac{1}{v}}{\delta x}(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \left(u\frac{1}{v}\right)' \\
&= (u)'\frac{1}{v} + u\left(\frac{1}{v}\right)' \\
&= \frac{u'}{v} + u\frac{-v'}{v^2} \\
&= \frac{u'v - uv'}{v^2}
\end{aligned}$$

■

4.6.1 Exercices : dérivée et opérations (2)

■ **Exemple 4.7 — dérivation d'un produit.**

Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée dans les cas suivants :

$$\begin{aligned} f(x) &= (8x-1)(2x^2-5x-3) \\ D' &= \mathbb{R} \\ f'(x) &= (8x-1)'(2x^2-5x-3)+(8x-1)(2x^2-5x-3)' \\ &= 8(2x^2-5x-3)+(8x-1)\big(2(2x)-5(1)+0\big) \\ &= 16x^2-40x-24+(8x-1)\big(4x-5\big) \\ &= 48x^2-84x-19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (8x-2)(8x^2+5x) \\ D' &= \mathbb{R} \\ f'(x) &= (8x-2)'(8x^2+5x)+(8x-2)(8x^2+5x)' \\ f'(x) &= (8(1)+0)(8x^2+5x)+(8x-2)(8(2x)+5(1)) \\ f'(x) &= 8(8x^2+5x)+(8x-2)(16x+5) \\ f'(x) &= 192*x^2+48*x-10 \end{aligned}$$

Exercice 52 Dériver en utilisant la règle de la dérivé d'un produit.

1) $f(x) = (x+1)(3x+2)$

2) $f(x) = x^5(3x-1)^2$

3) $f(x) = x^2(7-3x^2)$

4) $f(x) = (4x-1)(3x-2)$

5) $f(x) = x\sqrt{x}$

6) $f(x) = (8-9x)\sqrt{x}$

7) $f(x) = \sqrt{x}(x^2+1)$

8) $f(x) = \sqrt{3x-12}(x^2-1)$

9) $f(x) = x\sqrt{3x-15}$

■ **Exemple 4.8 — dérivation d'un inverse.** Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée dans les cas suivants :

$$f(x) = \frac{1}{(5x+3)^2} \qquad v(x) = (5x+3)^2$$

$$D = D' = \mathbb{R}\setminus\{-\tfrac{3}{5}\}$$

on applique $(\frac{1}{v})' = \dfrac{-v'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{-((5x+3)^2)'}{\big((5x+3)^2\big)^2} \qquad u(x) = x^2$$

On dérive $(u(5x+3))' = 5u'(5x+3)$

$$= \frac{-(5x+3)'\times 2(5x+3)}{(5x+3)^4}$$

on simplifie le numérateur sans développer le dénominateur

$$= \frac{-10(5x+3)}{(5x+3)^4} = \frac{-10}{(5x+3)^3}$$

Exercice 53 Donner les domaines de définition et de dérivabilité, puis dériver les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{2}{3x-1}$

2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

3) $f(x) = \dfrac{-5}{x^2-1}$

4) $f(x) = \dfrac{3}{2-3x}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

6) $f(x) = \dfrac{-5}{3x^2+2}$

■ **Exemple 4.9 — dérivation d'un quotient.** Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée dans les cas suivants :

$$f(x) = \frac{1-2x}{3x+3} \qquad u(x) = 1-2x \qquad v(x) = 3x+3$$

$$D = \mathbb{R}\setminus\{-1\} \quad D' = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

on applique $(\frac{u}{v})' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(1-2x)'(3x+3)-(1-2x)(3x+3)'}{(3x+3)^2}$$

on simplifie le numérateur sans développer le dénominateur

$$= \frac{-2(3x+3)-(1-2x)\times 3}{(3x+3)^2} = \frac{-9}{(3x+3)^2}$$

Exercice 54 Donner les domaines de définition et de dérivabilité, puis dériver les fonctions suivantes.

1) $f(x) = \dfrac{5x-2}{x+2}$

2) $f(x) = \dfrac{3-x}{1+4x}$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

5) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$

6) $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+x-1}$

Exercice 55 https://www.desmos.com/calculator/41mewad8w7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x}$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

1) Justifier le domaine de définition, et donner le domaine de dérivabilité.
2) Déterminer l'expression de la dérivée f'.
3) Déterminer les points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangeante à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = 4x$.
4) a) Soit $A(a, f(a)) \in \mathscr{C}_f$. Montrer que la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point A a pour équation
$$y = \frac{2}{(a+1)^2}x + \frac{2a^2}{(a+1)^2}$$
   b) Sachant que T passe par $B(3;3)$, montrer que a vérifie $a^2 + 6a - 5 = 0$
   c) Combien de tangentes passant par $B(3;3)$ existe-t-il ? Justifiez.

Exercice 56 https://www.desmos.com/calculator/6ebphfnom5

Soit la fonction inverse f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{k}{x}$ et son hyperbole $\mathscr{H} : xy = k$.

1) Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée f'.
2) a) Soit $A(a, f(a)) \in \mathscr{C}_f$. Déterminez l'équation de la tangente T à $\mathscr{H}$ au point A.
   b) Montrer que l'intersection de T avec l'axe des abscisses est $B(2a;0)$
   c) Donner un moyen simple pour tracer la tangente à tout point de la courbe $\mathscr{H}$.

Exercice 57 Complétez afin d'étudier le sens de variation de la fonction d'expression $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$:

f est définie définie pour $x \neq \ldots\ldots$, donc $D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

f est dérivable sur $D' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$f'(x) =$

$=$

$=$

$f'(x) = \dfrac{\quad}{(x-1)^2}$

x	
$\ldots$	
$(x-1)^2$	0
signe de $f'(x)$	
variation de f	

Exercice 58 — entrainement exercices page 147 du manuel. Pour chacune des fonctions f suivantes :

- préciser le domaine de définition et de dérivabilité
- déterminer sa dérivée f', factoriser le numérateur.
- déterminer le sens de variation de f et préciser les extremum locaux.

1) $f(x) = \dfrac{-4}{x^2+1}$

2) $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-2}$

3) $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{2}{x-1}$

4) $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$

5) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$

6) $f(x) = \dfrac{-x^2+8x-13}{x^2-4x+5}$

4.7 Exercices : indications et solutions

correction exercice 25. $f_1'(x) = 12x^2 - 1$; $f_2'(x) = 16x$; $f_3'(x) = -\dfrac{1}{6}$; $f_4'(x) = 6x^2$; $f_5'(x) = 2x + 3$; $f_6'(x) = 3x - \dfrac{x^3+5}{x^2}$; $f_7'(x) = 20x^3 - 12x$; $f_8'(x) = 2x + 1$; $f_9'(x) = 3x^2 + 6x + 4$; $f_{10}'(x) = \dfrac{3x^2+1}{x} - \dfrac{x^3+x-3}{x^2}$; ■

correction exercice 27. $f_1'(x) = -\dfrac{3}{(3x+6)^2}$; $f_2'(x) = 9(3x+4)^2$; $f_3'(x) = 18x - 30$; $f_4'(x) = \dfrac{2.5}{(5x-3)^{0.5}}$; $f_5'(x) = \dfrac{1.5}{(3x+18)^{0.5}} + 5$; $f_6'(x) = 3a(ax+b)^2$; $f_7'(x) = -\dfrac{20}{(2x-5)^3}$; $f_8'(x) = 3 - \dfrac{2}{(2x+8)^2}$; $f_9'(x) = -\dfrac{1.5}{(12-3x)^{0.5}}$; ■

correction exercice 28. $a = -5$, $b = 3$ et $c = 1$. ■

correction exercice 31. $a = 4$, $b = -5$ et $c = 1$. ■

correction exercice 32 . $x_A = -\dfrac{1}{2}$ et $x_B = \dfrac{3}{2}$ ■

correction exercice 34 . $A(1,3)$ ■

correction exercice 33 . $A(-1,0)$, $T : y = x + 1$, $B(1,2)$ ■

correction de l'exercice 35. 1) $f'(x) = 3x^2 - 7$
2) $f(2) = -1$, $f'(2) = 5$, $T\colon y = 5(x-2) + (-1) = 5x - 11$
3) On résout $f'(x) = -4$, $3x^2 - 7 = -4$. $x = \pm 1$.
4) $T_{-1}\colon y = -4x + 7$ et $T_1\colon y = -4x + 3$.

■

correction de l'exercice 39. $T_{-1}\colon y = -5x - 9$ et $T_1\colon y = 2x - 1$ ■

correction de l'exercice 40. $T_{-1}\colon y = -x - 1$ et $T_5\colon y = 7x - 25$ ■

correction de l'exercice 41. La tangente à la cubique au point d'abscisse a a pour équation $T_a\colon y = 3a^2x - 2a^2$.

$P(1;5) \in T_a$ si

$$\begin{aligned} 2a^3 - 3a^2 + 5 &= 0 \quad . \qquad -1 \textit{ est solution triviale} \\ (a-(-1))(2a^2 - a + 5) &= 0 \\ (a+1)(2a^2 - a + 5) &= 0 \\ a = -1 \qquad \text{ou} \qquad 2a^2 - a + 5 &= 0 \qquad \Delta < 0 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

Solution unique possible. T_{-1} est la seule tangente passant par P. ■

correction de l'exercice 42. $T_2\colon y = 4x - 3$ et $T_{-4}\colon y = -8x - 15$ ■

correction exercice 43 . Les tangentes aux points $A(-2;1)$ et $B(0,1)$ ont pour pente 2 et sont parallèles à D_1. La tangente à $C(-2;1)$ a pour pente -1 et sont parallèles à D_2. Les tangentes aux points d'abscisse 1 et -3 on pour pente 11. T passe par le point $D(1,7)$ et est tangente à $\mathscr{C}_f$. ■

correction exercice 45. $f_1'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3x^2 + 6x - 9 = 3\left(x - 1\right)\left(x + 3\right)$; $f_2'(x) = 3x^2 + 6x = 3x^2 + 6x = 3x\left(x + 2\right)$; $f_3'(x) = 3 - 3x^2 = 3 - 3x^2 = -3\left(x - 1\right)\left(x + 1\right)$; $f_4'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 3x^2 + 12x - 15 = 3\left(x - 1\right)\left(x + 5\right)$; $f_5'(x) = x^3 - 1.5x^2 - 2x = x^3 - 1.5x^2 - 2x = 2.0x\left(0.5x^2 - 0.75x - 1.0\right)$; $f_6'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 4x^3 + 6x^2 = 2x^2\left(2x + 3\right)$; ■

correction exercice 46. $f_1'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2\left(x - 3\right)$; $f_2'(x) = x^2\left(x - 1\right) + x^2\left(x + 1\right) + 2x\left(x - 1\right)\left(x + 1\right) = 4x^3 - 2x = 2x\left(2x^2 - 1\right)$; $f_3'(x) = 4x^3 - 12x + 8 = 4x^3 - 12x + 8 = 4\left(x - 1\right)^2\left(x + 2\right)$; $f_4'(x) = 6x^5 - 6x = 6x^5 - 6x = 6x\left(x - 1\right)\left(x + 1\right)\left(x^2 + 1\right)$; ■

correction exercice 47. $f_1'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3x^2 - 6x + 3 = 3\left(x - 1\right)^2$; $f_2'(x) = -5x^4 - 15x^2 - 10 = -5x^4 - 15x^2 - 10 = -5\left(x^2 + 1\right)\left(x^2 + 2\right)$; ■

correction exercice 51. $f_1'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{\left(x - 1\right)\left(x + 1\right)}{x^2}$; $f_2'(x) = 1 + \frac{4}{x^2} = 1 + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2}$; $f_3'(x) = -\frac{1}{\left(x - 2\right)^2} = -\frac{1}{x^2 - 4x + 4} = -\frac{1}{\left(x - 2\right)^2}$; $f_4'(x) = 1 + \frac{2}{\left(2x - 1\right)^2} = 1 + \frac{2}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{4x^2 - 4x + 3}{\left(2x - 1\right)^2}$; $f_5'(x) = 1 - \frac{0.5}{x^{0.5}} = 1 - \frac{0.5}{x^{0.5}} = -1.0\left(\frac{0.5}{x^{0.5}} - 1.0\right)$; $f_6'(x) = \frac{0.5}{x^{0.5}} + 5x^4 = \frac{0.5}{x^{0.5}} + 5x^4 = 5.0\left(\frac{0.1}{x^{0.5}} + 1.0x^4\right)$; ■

correction exercice 52. $f_1'(x) = 6x + 5$; $f_2'(x) = x^5\left(18x - 6\right) + 5x^4\left(3x - 1\right)^2$; $f_3'(x) = -6x^3 + 2x\left(7 - 3x^2\right)$; $f_4'(x) = 24x - 5$; $f_5'(x) = 1.5x^{0.5}$; $f_6'(x) = \frac{0.5\left(8 - 9x\right)}{x^{0.5}} - 9x^{0.5}$; $f_7'(x) = \frac{0.5\left(x^2 + 1\right)}{x^{0.5}} + 2x^{1.5}$; $f_8'(x) = 2x\left(3x - 12\right)^{0.5} + \frac{1.5\left(x^2 - 1\right)}{\left(3x - 12\right)^{0.5}}$; $f_9'(x) = \frac{1.5x}{\left(3x - 15\right)^{0.5}} + \left(3x - 15\right)^{0.5}$; ■

correction exercice 53. $f_1'(x) = -\frac{6}{\left(3x - 1\right)^2} = -\frac{6}{9x^2 - 6x + 1} = -\frac{6}{\left(3x - 1\right)^2}$; $f_2'(x) = -\frac{0.5}{x^{1.5}} = -\frac{0.5}{x^{1.5}} = -\frac{0.5}{x^{1.5}}$; $f_3'(x) = \frac{10x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{10x}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{10x}{\left(x - 1\right)^2\left(x + 1\right)^2}$; $f_4'(x) = \frac{9}{\left(2 - 3x\right)^2} = \frac{9}{9x^2 - 12x + 4} = \frac{9}{\left(3x - 2\right)^2}$; $f_5'(x) = -\frac{1.0}{\left(2x - 3\right)^{1.5}} = -\frac{1.0}{\left(2x - 3\right)^{1.5}} = -\frac{1.0}{\left(2x - 3\right)^{1.5}}$; $f_6'(x) = \frac{90x}{\left(3x^2 + 2\right)^4} = \frac{90x}{81x^8 + 216x^6 + 216x^4 + 96x^2 + 16} = \frac{90x}{\left(3x^2 + 2\right)^4}$; ■

correction exercice 54. $f_1'(x) = \frac{12}{\left(x + 2\right)^2}$; $f_2'(x) = -\frac{13}{\left(4x + 1\right)^2}$; $f_3'(x) = -\frac{0.5\left(\frac{1.0}{x^{0.5}} + 1.0x^{0.5}\right)}{\left(x - 1\right)^2}$; $f_4'(x) = \frac{1.5\left(\frac{0.333333333333333}{x^{0.5}} - 1.0x^{1.5}\right)}{\left(x^2 + 1\right)^2}$; $f_5'(x) = -\frac{\left(x - 1\right)\left(x + 1\right)}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}$; $f_6'(x) = -\frac{5\left(x^2 + 1\right)}{\left(x^2 + x - 1\right)^2}$;

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
$f_1'(x) = \dfrac{12}{(x+2)^2}$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
12		$+$		$+$	
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$	
signe de $f_1'(x) = \frac{12}{(x+2)^2}$		$+$	$\Vert$	$+$	
variation de f_1		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4}\}$
$f_2'(x) = -\dfrac{13}{(4x+1)^2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
-13		$-$		$-$	
$(4x+1)^2$		$+$	0	$+$	
signe de $f_2'(x) = \frac{-13}{(4x+1)^2}$		$-$	$\Vert$	$-$	
variation de f_2		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

$D = [0;1[\, \cup \,]1;\infty[$
$D' = \,]0;1[\, \cup \,]1;\infty[$ et $f_3'(x) = -\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$

x	0		1		$+\infty$
$-x-1$		$-$		$-$	
$\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
signe de $f_3'(x) = \frac{-13}{(4x+1)^2}$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
variation de f_3	0	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

$D = [0;\infty[$
$D' = \,]0;\infty[$ et $f_4'(x) = \dfrac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$

x	0		$\sqrt{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
$-3x^2+1$		$+$	0	$-$	
$\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$	
signe de $f_4'(x) = \frac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
variation de f_4	0	$\nearrow$	$\frac{3^{0.75}}{4}$	$\searrow$	

$D = D' = \mathbb{R}$

$f_5'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-x^2 + 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2 + x + 1)^2$		$+$		$+$		$+$	
signe de $f_5'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation de f_5		$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$

$f_6'(x) = \dfrac{-5x^2-5}{(x^2+x-1)^2}$

x	$-\infty$		$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$-5x^2 - 5$		$-$		$-$		$-$	
$(x^2 + x - 1)^2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
signe de $f_6'(x) = \dfrac{-5x^2-5}{(x^2+x-1)^2}$		$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	
variation de f_6		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

■

correction exercice 58. $f_1'(x) = \dfrac{8x}{\left(x^2+1\right)^2}$; $f_2'(x) = \dfrac{x\,(x-4)}{(x-2)^2}$; $f_3'(x) = \dfrac{2x\,(x-2)}{(x-1)^2}$; $f_4'(x) = -\dfrac{x-5}{(x-1)^3}$; $f_5'(x) = \dfrac{(x-1)\,(x+3)}{(x+1)^2}$; $f_6'(x) = -\dfrac{4\,(x-3)\,(x-1)}{\left(x^2-4x+5\right)^2}$;

$D = D' = \mathbb{R}$

$f_1(x) = \dfrac{-4}{x^2+1}$

$f_1'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$8x$		$-$	0	$+$	
$x^2 + 1$		$+$		$+$	
signe de $f_1'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$		$-$	0	$+$	
variation de f_1		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
$f_2(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-2}$
$f_2'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$x(x-4)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de $f_2'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variation de f_2		$\nearrow$	-3	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	5	$\nearrow$	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$f_3(x) = 2x - 3 + \dfrac{2}{x-1}$
$f_3'(x) = \dfrac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$2x(x-2)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de $f_3'(x) = \dfrac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variation de f_3		$\nearrow$	-5	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	3	$\nearrow$	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$f_4(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{(x-1)^2}$
$f_4'(x) = \dfrac{-x+5}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$-x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x-1)^3$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $f_4'(x) = \dfrac{-x+5}{(x-1)^3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
variation de f_4		$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$\dfrac{9}{8}$	$\searrow$	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$f_5(x) = \dfrac{(x^2+3)}{x+1}$
$f_5'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$(x-1)(x+3)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de $f_5'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variation de f_5		$\nearrow$	-6	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$f_6(x) = \dfrac{-x^2+8x-13}{x^2-4x+5}$
$f_6'(x) = \dfrac{-4(x-3)(x-1)}{(x^2-4x+5)^2}$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-4(x-3)(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2-4x+5)^2$		$+$		$+$		$+$	
signe de $f_6'(x) = \dfrac{-4(x-3)(x-1)}{(x^2-4x+5)^2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation de f_6		$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	

■

4.8 Formulaire de dérivation pour la première

Premier principe Nombre dérivé de f en x :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ Notation de Lagrange $(1736-1813)$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{\delta x\to 0} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$ Notation de Leibniz $(1646-1716)$

Equation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $A(x_0, f(x_0))$ a pour équation

$$T\colon y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Dérivées des fonctions de référence			
Fonction f	**Domaine de définition**	**Fonction dérivée f'**	**Domaine de dérivabilité**
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	
x	$\mathbb{R}$	1	
x^2	$\mathbb{R}$		
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$		
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$		
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$			
$\sqrt{x}$			
e^x			

Dérivées et opérations	
Fonction f	**Fonction dérivée f'**
$u(x)+v(x)$	
$ku(x)$	
$uv(x)$	
$\frac{1}{v(x)}$	
$\frac{u(x)}{v(x)}$	

Cas particulier de fonction composée	
Fonction f	**Fonction dérivée f'**
$u(ax+b)$	
$(ax+b)^n$	
$\sqrt{ax+b}$	
e^{ax+b}	

4.9 Formulaire de dérivation pour la première et la terminale

Dérivées des fonctions de référence			
Fonction f	**Domaine de définition**	**Fonction dérivée f'**	**Domaine de dérivabilité**
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$[0; +\infty[= \mathbb{R}_+$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$

Dérivées et opérations	
Fonction f	**Fonction dérivée f'**
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$u(x) \times v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$u(ax+b)$	$a \times u'(ax+b)$
$\dfrac{1}{v(x)}$	$-\dfrac{v'(x)}{v(x)^2}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$
$(f \circ g)(x)$ ou $g(f(x))$	$g'(x) \times (f' \circ g)(x)$

Cas particulier de fonction composée	
Fonction f	**Fonction dérivée f'**
$(ax+b)^n$	$na(ax+b)^{n-1}$
$\sqrt{ax+b}$	$\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$
e^{ax+b}	$a\mathrm{e}^{ax+b}$
$\ln(ax+b)$	$\dfrac{a}{ax+b}$