# Chapitre 7
# Calculs algébriques (2)

**Table 7.1** – Objectifs. À fin de ce chapitre 7…

| | Pour m'entraîner ✍ | | |
|---|---|---|---|
| Je dois **connaître…/savoir faire…** | 🪨 | 💎 | 💍 |
| Factoriser une expression | | | |
| Déterminer les facteurs d'une expression | 1, | | |
| Déterminer le plus grand facteur commun | 2, 3 | | |
| Factorisation au maximum par extraction de facteur commun | 4 | 5, 6, 7 | 8 |
| Factorisation double (guidée) | 15 | | |
| Factorisation d'expression par regroupement | | 16 | |
| Factorisation de différence de carrés | | 17, | 18 |
| Mélange factorisation et développements | | 9, 10, 11 | 14 |
| Applications | | | |
| calcul littéral et géométrie | | 12, 13 | |
| calcul littéral et arithmétique | 19, 20 | 21, 22 | 23 à 30 |

La factorisation est le procédé qui consiste à écrire une expression algébrique comme produit d'expressions (facteurs) plus simples.

L'approche la plus simple est d'**extraire le plus grand facteur commun** à tous les termes d'une somme. En effet, pour tout nombres relatifs $a$,$b$ et $k$ :

$$(ka) + (kb) = k(a + b)$$

Ce chapitre traite des différentes techniques et quelques applications de la factorisation d'expressions algébriques.

## 7.1 Exercices

■ **Exemple 7.1 — Écrire un terme comme un produit de facteurs premiers ou algébriques.**

| **Exemple guidé** | Raisonnement | **À vous !** |
|---|---|---|
| $18ab = 2 \times 3 \times 3 \times a \times b$ | Comment décomposer un nombre en facteurs premiers ? | $22xy =$ |
| $-26a^2 = (-1) \times 2 \times 13 \times a \times a$ | Que faire d'un coefficient négatif ? | $-24x^2 =$ |

**Exercice 1** Recopier et décomposer en produit de facteurs premiers ou algébriques les termes :

1. a) $A = 6$ | b) $B = 10$ | c) $C = 35$ | d) $D = 42$
2. a) $A = xy$ | b) $B = 18x$ | c) $C = 21x^2$ | d) $D = 24x^2$ | e) $E = x^2$ | f) $F = 21x$ | g) $G = 30x^2$ | h) $H = -x^2$
3. a) $A = 24x^2y$ | b) $B = 24xy^2$ | c) $C = 24x^2y^2z$ | d) $D = 24xy$ | e) $E = 24x^2y^2$

■ **Exemple 7.2 — Déterminer le plus grand facteur commun de deux termes.**

| **Exemple guidé** | Raisonnement | **À vous !** |
|---|---|---|
| $42a$ et $14b$ | Que faire si plusieurs facteurs commun ? | $16x$ et $12y$ |
| $42a = 2 \times 3 \times 7 \times a$ | | $16 = 2^4 x =$ |
| $14b = 2 \times 7 \times b$ | | |
| PGFC = $2 \times 7 = 14$ | | |
| $50a^2$ et $10ab$ | Que faire en présence d'une puissance ? | $22xy$ et $33x^2$ |
| $50a^2 = 2 \times 5 \times 5 \times a \times a$ | | |
| $10ab = 2 \times 5 \times a \times b$ | | |
| PGFC = $2 \times 5 \times a = 10a$ | | |

**Exercice 2** Déterminer le plus grand facteur commun de la paire de termes :

1. a) $3$ et $3x$ | b) $5y$ et $15x$ | c) $4y$ et $7y$
2. a) $49x$ et $7x$ | b) $18y^2$ et $9y$ | c) $9x$ et $12x^2$ | d) $25b$ et $10b^2$ | e) $20p^2$ et $25p$ | f) $16z$ et $24z^3$
3. a) $12az^2$ et $39bz$ | b) $32ab^2$ et $24ac$ | c) $25x^2y$ et $30xy^2$

**Exercice 3 — entraînement.** Déterminer le plus grand facteur commun des termes donnés.

1. $12$ et $18$
2. $12x$ et $18$
3. $12x$ et $30$
4. $12x^2$ et $30$
5. $12x^2$ et $30x$
6. $12x^2$ et $30y$
7. $12x^2$ et $30xy$
8. $12x^2y$ et $30xy$
9. $12x^2y$, $30xy$ et $3y$.

**Définition 7.1** La **factorisation** est un procéde qui vise à écrire une expression algébrique comme **produit** de facteurs plus simples.

La factorisation **par extraction du plus grand facteur commun** est l'opération inverse de la distributivité simple. Ainsi, pour tous nombres positifs ou négatifs $a$,$b$ et $c$ :

$$\begin{array}{ccc} \text{somme de termes} & \xrightarrow{\text{factorisation}} & \text{produit de facteurs} \\ (ac)+(bc) & = & c(a+b) \\ & \xleftarrow[\text{developper}]{} & \end{array}$$

■ **Exemple 7.3 — La factorisation par extraction du plus grand facteur commun.**

| | |
|---|---|
| **Factorisation directe** | $3x+15=3x+3(5)=3(x+5)$ |
| | $3xy-6xz=3xy+3x(-2z)=3x(y-2z)$ |
| **Développer les puissances** | $x^2+3x=x x+3x=x(x+3)$ |
| **La règle du "1"** | $x^2+x=x x+x=x(x+\mathbf{1})$ |

| **Exemple guidé** | **Questionnement** | **À vous !** |
|---|---|---|
| $15p-5p^2$ | | $15a^2-18a$ |
| $15p=3\times5\times p$<br>$-5p^2=(-1)\times5\times p\times p$ | Comment trouver le plus grand facteur commun ? | |
| PGFC=$5\times p=5p$ | Quel est le plus grand facteur commun ? | |
| $15p-p^2=5p(3-p)$ | Comment savoir que la factorisation est au maximum ? | |

Extraire le plus grand facteur commun d'une somme de terme, donne une somme de termes ayant pour facteurs communs $1$ ou $-1$. On parle alors de **factorisation au maximum**

**Exercice 4** Factoriser au maximum les expressions suivantes :

1. $A=4a+16$ ; $B=6x+18$ | $C=3y-6$ ; $D=8a-12$ | $E=9x-33$ ; $F=18p+60$
2. $A=x^2+2x$ ; $B=3a^2+9a$ ; $C=2a^2-6a$ | $D=9x^2+12x$ ; $E=-8x^2-6x$ ; $F=16p^2+20$ | $G=18x^2+14x$ ; $H=12b^2-16b$ ; $I=9y^2-21y$
3. $A=3ab+6a$ ; $B=5pq-5p$ | $C=6x^2y+3xy$ ; $D=8xy^2+12x^2y$ | $E=6xy+3x^2y-9xy^2$ ; $F=30x^2y-12xy-3y$

**Exercice 5 — concepts.**

1. Les facteurs commun à tous les termes de $10a^3+5ab+20ay^4$ sont ........................
   (A) $5$ (B) $a$ (C) $5a$ (D) $5aby$
2. Extraire le facteur $2x$ de l'expression $2x^2-4xy+2x$, donne le facteur ......................
   (A) $x-2y$ (B) $x-4y+1$ (C) $x-2y+1$ (D) $x-2y-1$
3. En lisant de gauche à droite, les factorisations sont ................ (A) $2(a-b)=2a-2b$
   (B) $x^2-2x+1=x(x-2)+1$ (C) $(m+1)(m-1)=m^2-1$ (D) $6a^2-8a^3=2a^2(3-4a)$
4. Le plus grand facteur commun des termes de $4x^2y+6xy^2-2xy$ est ........................
   (A) $2x$ (B) $2y$ (C) $2x^2y^2$ (D) $2xy$
5. Le plus grand facteur commun de $20a^2bc^3$ et $30a^5b^2$ est ....................................
6. Entoure les expressions factorisées au maximum. ..........................................
   (A) $5(x+7)$ (B) $2(4x+8)$ (C) $3(x^2+x)$ (D) $2(6x-9)$ (E) $8x(3x+4)$ (F) $9y(7x+3y)$
7. Factorise au maximum $7xy(15xy-18y)=$..............................................

■ **Exemple 7.4** L'**entraînement intelligent** consiste à relever le lien entre deux questions.

1. **Question 1** Factoriser $3a+12$ : $3a+12=3a+3(4)=3(a+4)$
2. **Question 2** Factoriser $3a-12$
3. **Constater** : Les coefficients de la question 2 sont les mêmes que dans la question 1, seul un des signes a changé.
4. **Anticiper** : Je pense que seul le signe de la forme factorisée va changer.
5. **Vérifier** : $3a-12=3a-3(4)=3(a-4)$

**Exercice 6 — entraînement intelligent.** Factoriser au maximum les expressions suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $A=3x-4$ | $C=3x^2-4x$ | $E=9x^2-24x$ |
| $B=3x^2-4$ | $D=3x^2-24x$ | $F=-9x^2-24x$ |

**Exercice 7 — entraînement intelligent.** Factoriser au maximum les expressions suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $A=10x+5$ | $F=15x-10x^2$ | $K=10x^2-15xy^2$ |
| $B=5+10x$ | $G=30x-10x^2$ | $L=10x^2y-15xy^2$ |
| $C=5-10x$ | $H=10x^2-15x$ | $M=10x^2y-15xy^2+x$ |
| $D=15-10x$ | $I=10x^2-15y$ | $N=10x^2y-15xy^2+xy$ |
| $E=15-10x^2$ | $J=10x^2-15y^2$ | $O=10x^2y-15xy^2+x^2y^2$ |

**Exercice 8** Phoebe a $3x+7$ jetons. Helga a le double de Phoebe. Eugene a $8x-1$ jetons, et Lila $9$ jetons de moins. Montrer que le total de jetons est $5(5x+2)$.

**Exercice 9 — Choisir la méthode.** adaptée pour répondre aux questions :

1. Écrire les diviseurs de $36$
2. Décomposer $36$ en produit de facteurs premiers.
3. Déterminer le plus grand facteur commun à $36$ et $45$.
4. Factoriser au maximum l'expression $A = 36x - 45$

**Exercice 10 — Choisir la méthode.** adaptée pour répondre aux questions :

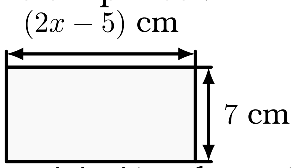
1. Factoriser au maximum l'expression $B = 4x + 14$.
2. Déterminer la valeur de $4x + 14$ lorsque $x = 2$.
3. Développer $2(4x + 14)$

**Exercice 11 — Choisir la méthode.** adaptée pour répondre aux questions :

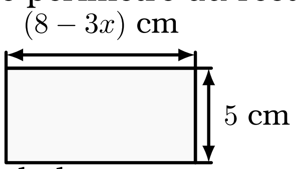
1. Factoriser au maximum l'expression $C = 3x^2 - 5x$.
2. Déterminer la valeur de $3x^2 - 5x$ lorsque $x = 4$
3. Développer $4x(3x^2 - 5x)$.

**Exercice 12 — aires et périmètres.** Les questions sont indépendantes.

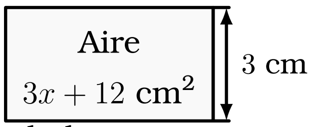
1. Exprimer l'aire du rectangle en fonction de $x$ sous forme simplifiée :



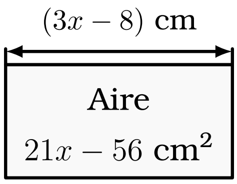

2. Exprimer le périmètre du rectangle :



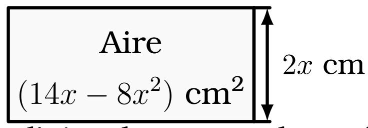

3. Déterminer la longueur manquante du rectangle en fonction de $x$ :



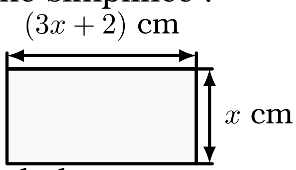

4. Déterminer la longueur manquante du rectangle en fonction de $x$ :



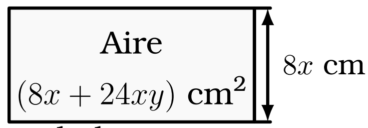

5. Déterminer la longueur manquante du rectangle en fonction de $x$ :



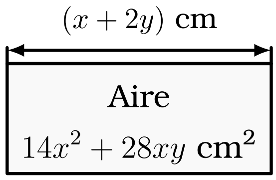

6. Exprimer l'aire du rectangle en fonction de $x$ sous forme simplifiée :




7. Déterminer la longueur manquante du rectangle en fonction de $x$ :




8. Déterminer la longueur manquante du rectangle en fonction de $x$ :




**Exercice 13** Soit un rectangle de largeur $(2x + 3)$cm et de longueur $(4x - 1)$cm. Montrer que son périmètre est donné par $4(3x + 1)$.

**Exercice 14** Compléter afin de rendre les égalités vraies pour tout nombre $x$.

$3(x+5) = \ldots\ldots x + \ldots\ldots$

$9(x + \ldots\ldots) = \ldots\ldots x + 36$

$7(\ldots\ldots - 4) = 7x \ldots 28$

$2(3x-4) = \ldots\ldots x - \ldots$

$2(\ldots\ldots x + 7) = 24x + \ldots\ldots$

$\ldots\ldots(x-5) = 4x \ldots\ldots\ldots$

$\ldots(\ldots x + 5) = 18x + 15$

$\ldots\ldots(5x - \ldots\ldots) = 45x - 9$

$x(3x + \ldots) = \ldots\ldots + 7x$

$\ldots\ldots(5x + \ldots\ldots) = 25x^2 + 30x$

$\ldots(\ldots x + \ldots) = 39x^2 + 13x$

$3y(3x + \ldots) = \ldots\ldots + 33y$

$3xy(2x+5y) = 6\ldots\ldots + 15\ldots\ldots$

$\ldots\ldots(2y-4) = 8xy^2 - \ldots\ldots$

**Exercice 15 — factorisations doubles.** Aucune des expressions suivantes ne peut se factoriser par extraction de facteurs commun. Complétez néanmoins les factorisations doubles suivantes :

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2 + 10x + 24 \\ &= x^2 + \ldots x + \ldots x + 24 \\ &= (x + \ldots)(x + \ldots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= x^2 + \ldots x + \ldots \\ &= x^2 + 8x + \ldots x + 24 \\ &= (x + \ldots)(x + \ldots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= x^2 + 11x + 18 \\ &= x^2 + \ldots x + \ldots x + 18 \\ &= (x + \ldots)(x + \ldots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x) &= x^2 + 13x + \ldots \\ &= x^2 + \ldots x + 10x + \ldots \\ &= (x + \ldots)(x + \ldots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(x) &= x^2 + 5x - \ldots \\ &= x^2 - 2x + \ldots x - 14 \\ &= (x + \ldots)(x - \ldots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 - 14x + 33 \\ &= x^2 + \ldots x + \ldots x + \ldots \\ &= (x + \ldots)(x + \ldots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(x) &= 2x^2 + 7x + 6 \\ &= 2x^2 + \ldots x + \ldots x + \ldots \\ &= (2x+3)(x + \ldots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(x) &= 3x^2 + 14x - \ldots \\ &= 3x^2 + \ldots x + \ldots x - 5 \\ &= (3x - \ldots)(x + \ldots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(x) &= 6x^2 + 7x - \ldots \\ &= 6x^2 + \ldots x + \ldots x - 3 \\ &= (3x - \ldots)(2x + \ldots) \end{aligned}$$

■ **Exemple 7.5 — factorisation par regroupement.** si le facteur commun aux termes est une expression :

$$\begin{aligned} A &= (2x+3)(2-x) + (2x+3)(5x+1) \\ &= \underbrace{\boxed{(2x+3)}}_{k}\underbrace{\boxed{(2-x)}}_{a} + \underbrace{\boxed{(2x+3)}}_{k}\underbrace{\boxed{(5x+1)}}_{b} \\ &= (2x+3) \times [(2-x) + (5x+1)] \\ &= (2x+3) \times [2 - x + 5x + 1] \\ &= (2x+3)(4x+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (3-x)(2x-1) - (3-x)(-3x+7) \\ &= \underbrace{\boxed{(3-x)}}_{k}\underbrace{\boxed{(2x-1)}}_{a} - \underbrace{\boxed{(3-x)}}_{k}\underbrace{\boxed{(-3x+7)}}_{b} \\ &= (3-x) \times [(2x-1) - (-3x+7)] \\ &= (3-x) \times [2x - 1 + 3x - 7] \\ &= (3-x)(5x-8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (2x-3)^2 - 5(2x-3) \\ &= \underbrace{\boxed{(2x-3)}}_{k}\underbrace{\boxed{(2x-3)}}_{a} - \underbrace{\boxed{(2x-3)}}_{k}\underbrace{\boxed{5}}_{b} \\ &= (2x-3) \times [(2x-3) - 5] \\ &= (2x-3) \times [2x-8] \\ &= (2x-3)(2x-8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 2(3x-2)(2x-3) - 5(x-2)(3x-2) \\ &= 2\boxed{(3x-2)}(2x-3) - 5(x-2)\boxed{(3x-2)} \\ &= \boxed{(3x-2)} \times [2(2x-3) - 5(x-2)] \\ &= (3x-2) \times [4x - 6 - 5x + 10] \\ &= (3x-2)(-x+4) \end{aligned}$$

**Exercice 16** Factoriser au maximum les expressions suivantes :

| | |
|---|---|
| $A = 2(x+5) + (2x-3)(x+5)$ | $F = (2x-15)(6x+1) - 3(6x+1)$ |
| $B = (2x+3)(2x-5) + x(2x-5)$ | $G = (7-5x)(2+3x) - (7-5x)^2$ |
| $C = 8(x-2) + (x-2)(x-5)$ | $H = (x+4)(2x+3) - (x+4)(x-6)$ |
| $D = (5x-2)(x+7) + (5x-2)^2$ | $I = 3(x-4)(2x+3) - 2(x-4)(x+6)$ |
| $E = (x+3)(x-2) + (x+3)$ | $J = (2-8x)(7-x) - 3(7-x)(3-x)$ |

■ **Exemple 7.6 — factorisation de différence de carrées par** $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$**.**

$$\begin{aligned} A &= x^2 - 36 \\ &= \underbrace{\boxed{x}^2}_{A^2} - \underbrace{\boxed{6}^2}_{B^2} \\ &= (x-6)(x+6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= x^2 - 9 \\ &= x^2 - 3^2 \\ &= (x-3)(x+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (x+1)^2 - 25 \\ &= \underbrace{\boxed{(x+1)}^2}_{A^2} - \underbrace{\boxed{5}^2}_{B^2} \\ &= \big((x+1)-(5)\big)\big((x+1)+(5)\big) \\ &= (x-4)\,(x+6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (2x-5)^2 - (3x-6)^2 \\ &= \underbrace{\boxed{(2x-5)}^2}_{A^2} - \underbrace{\boxed{(3x-6)}^2}_{B^2} \\ &= \big((2x-5)-(3x-6)\big)\big((2x-5)+(3x-6)\big) \\ &= \big(2x-5-3x+6\big)\big(2x-5+3x-6\big) \\ &= (-x+1)\,(5x-11) \end{aligned}$$

**Exercice 17** Factoriser au maximum les expressions suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $A = x^2 - 100$ | $D = (x-5)^2 - 9$ | $G = (4x+3)^2 - 25$ |
| $B = 64 - x^2$ | $E = (x+5)^2 - 1$ | $H = (3x-2)^2 - (x+1)^2$ |
| $C = 49 - x^6$ | $F = 1 - x^{10}$ | $I = (x+3)^2 - (4-x)^2$ |

■ **Exemple 7.7 — factorisation de différence de carrées par** $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$**.** Précautions :

$$\begin{aligned} E &= 16x^2 - 25 \\ &= 4^2x^2 - 5^2 \\ &= \underbrace{\boxed{(4x)}^2}_{A^2} - \underbrace{\boxed{5}^2}_{B^2} \\ &= (4x-5)(4x+5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 9(x+1)^2 - 4 \\ &= 3^2(x+1)^2 - 2^2 \\ &= \big(3(x+1)\big)^2 - 2^2 \\ &= \underbrace{\boxed{\big(3(x+1)\big)}^2}_{A^2} - \underbrace{\boxed{2}^2}_{B^2} \\ &= (3(x+1)-2)(3(x+1)+2) \\ &= (3x+3-2)(3x+3+2) \\ &= (3x+1)(3x+5) \end{aligned}$$

$G = 4(x+1)^2 - 36 = 2^2(x+1)^2 - 6^2$

=..............................

=..............................

=..............................

=..............................

=..............................

**Exercice 18** Factoriser au maximum les expressions suivantes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A = 9x^2 - 25$ | $C = 144 - 4x^8$ | $E = (100x+2)^2 - 16$ | $G = (4x-3)^2 - 25$ |
| $B = 9 - 100x^2$ | $D = 9x^6 - 121$ | $F = 100(x+2)^2 - 16$ | $H = 4(x+3)^2 - 25$ |

**Exercice 19 — concept.** Complétez et retenir. $n$ désigne un entier positif.

1. Pour tout $n$, $6n+3 = 3(\dots\dots\dots\dots)$. $6n+3$ est toujours un multiple de $\boxed{\phantom{xxxx}}$
2. Pour tout $n$, $15n+5 = 5(\dots\dots\dots\dots)$. $15n+5$ est toujours un multiple de $\boxed{\phantom{xxxx}}$
3. Pour tout $n$, $63n^2 - 42n = \dots\dots(\dots\dots\dots\dots)$. $63n^2 - 42n$ est toujours un multiple de $7n$
4. Pour tout $n$, $24n+36 = \dots\dots(\dots\dots\dots\dots)$. $24n+36$ est toujours un multiple de $12$
5. Pour tout $n$, $15n+23 = 5(\dots n + \dots)+3$. Le reste de la division de $15n+23$ par $5$ est $\boxed{\phantom{xxxx}}$
6. Pour tout $n$, $15n+23 = 3(\dots n + \dots)+\dots$. Le reste de la division de $15n+23$ par $2$ est $\boxed{\phantom{xxxx}}$
7. Pour tout $n$, $6n+5 = 6n+4+1 = 2(\dots\dots\dots\dots)+1$. Le reste de la division de $6n+5$ par $2$ est $\boxed{\phantom{xxxx}}$. $6n+5$ est **toujours** un nombre (A) pair (B) impair .
8. Pour tout $n$, $(2n+1)^2 = \dots n^2 + \dots n + \dots = 2(\dots n^2 + \dots n + \dots)+1$. Le reste de la division de $(2n+1)^2$ par $2$ est $\boxed{\phantom{xxxx}}$. $(2n+1)^2$ est **toujours** un nombre (A) pair (B) impair .

> Les nombres pairs sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $2n$ avec $n$ entier.
>
> Les nombres impairs sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $2n+1$ avec $n$ entier.

**Exercice 20** Complèter chaque phrase par une des propositions ci-dessous :

1. Pour tout entier $p$, les entiers $2p+1$ et $2p+3$ sont ........................................
2. Pour tout entier $p$, les entiers $2p+1$ et $2p+2$ sont ........................................
3. Pour tout $p$ et $q$ entiers, les entiers $2p$ et $2q$ sont ........................................
4. Pour tout entier $p$, les entiers $2p+1$ et $2p+2$ sont ........................................
5. Pour tout entier $p$, les entiers $2p$ et $2p+2$ sont ........................................
6. Pour tout entier $p$, les entiers $p$ et $p+1$ sont ........................................
7. Pour tout entier $p$, les entiers $2p$ et $2p+1$ sont ........................................
8. Pour tout entier $p$, les entiers $2p+1$ et $2q+1$ sont ........................................
9. Pour tout entier $n$, les nombres $2n-1$; $2n+1$; $2n+3$ sont ..............................
10. Pour tout entier $n$, les nombres $n$ ; $n+1$; $n+2$ sont ........................................
11. Pour tout entier $m$, les nombres $2m-2$ ; $2m$; $2m+2$ sont ..............................
12. Pour tout entier $p$, les nombres $p-1$ ; $p$; $p+1$ sont ........................................

<table>
<tr><td>entiers consécutifs</td><td>entiers pairs consécutifs</td><td>entiers impairs consécutifs</td></tr>
<tr><td>entiers quelconques</td><td>entiers pairs quelconques</td><td>entiers impairs quelconques</td></tr>
<tr><td colspan="2">un nombre pair et l'impair suivant</td><td>un nombre impair et le pair suivant</td></tr>
</table>

**■ Exemple 7.8 — montrer algébriquement une propriété.** Montrer que la somme d'un multiple de 6 et d'un nombre impair est toujours un nombre impair.

| **Démarche guidée** | **Questionnement** |
|---|---|
| $6n$ est un multiple de $6$, avec $n$ entier quelconque | Pourquoi pas prendre un mutiple de $6$ tel que $18$ ? |
| $2p+1$ est un nombre impair, avec $p$ entier quelconque | Pourquoi $p$ au lieu de $n$ ? |
| $6n+2p+1 = 2\underbrace{(3n+p)}_{k}+1$ | Que souhaitons nous montrer ? |
| $k = 3n+p$ est aussi entier | Pourquoi $k$ est un entier ? |
| La somme $6n+2p+1$ s'écrit $2k+1$, ou $k$ est un entier | |
| $6n+2p+1$ est un nombre impair | |

**Exercice 21** Montrer algébriquement que le produit d'un multiple de $12$ et d'un multiple de $10$ est toujours un multiple de $15$.

**Exercice 22** Montrer algébriquement que le carré d'un multiple de $6$ est toujours divisible par $9$.

**■ Exemple 7.9 — montrer algébriquement une propriété.** Montrer que la somme de trois nombres impairs consécutifs est toujours un multiple de $3$.

| **Démarche guidée** | **Questionnement** |
|---|---|
| 3 nombres consécutifs impairs s'écrivent : | Pourquoi $2n+1$ est nécésserement impair ? |
| $2n+1, \quad 2n+3, \quad 2n+5$ (avec $n$ entier) | Le nombre impair suivant n'est-il pas $2n+2$ ? |
| $S = (2n+1)+(2n+3)+(2n+5) = 6n+6$ | Pourquoi ajouter les 3 expressions ? |
| $S = 3(2n+2)$ | Pourquoi factoriser par 3 ? |

**Exercice 23** Montrer algébriquement que la somme de 3 nombres consecutifs quelconques est toujours un multiple de 3.

**Exercice 24** Montrer algébriquement que la somme de 3 nombres pairs consécutifs quelconques est toujours un multiple de 6.

**Exercice 25** Montrer algébriquement que la somme de 4 nombres impairs consécutifs quelconques est toujours un multiple de 8.

**Exercice 26** Montrer algébriquement que la somme de deux nombres entier consécutifs quelconques est toujours un nombre impair.

**Exercice 27** Montrer que pour tout entier $n$, le nombre $(5n+1)^2-(5n-1)^2$ est un entier, puis qu'il est divisible par $5$.

**Exercice 28** Montrer que pour tout entier $n$, l'entier $(3n+1)^2-(3n-1)^2$ est un entier, puis qu'il est multiple de $4$.

**Exercice 29** Montrer algébriquement que pour tout entier $n$ le nombre $(n+1)^2+n^2$ est un entier impair.

**Exercice 30** Montrer algébriquement que pour tout entier $n$ le nombre $(2n+3)^2-(2n-3)^2$ est multiple de $12$.

## 7.2 Exercices : solutions et éléments de réponse

*solution de l'exercice 4.* 1. $A=4(a+4)$; $B=6(x+3)$; $C=3(y-2)$; $D=4\cdot(2a-3)$; $E=3\cdot(3x-11)$; $F=6\cdot(3p+10)$;

2. $A=x(x+2)$; $B=3\cdot\left(3a+x^2\right)$; $C=2a(a-3)$; $D=3x(3x+4)$; $E=-2x(4x+3)$; $F=4\cdot\left(4p^2+5\right)$; $G=2x(9x+7)$; $H=4b(3b-4)$; $I=3y(3y-7)$;
3. $A=3a(b+2)$; $B=5p(q-1)$; $C=3xy(2x+1)$; $D=4xy(3x+2y)$; $E=3xy(x-3y+2)$; $F=3y\left(10x^2-4x-1\right)$;

■

*solution de l'exercice 6.* $A=3x+4$; $B=3x^2-4$; $C=x(3x-4)$; $D=3x(x-8)$; $E=3x(3x-8)$; $F=-3x(3x+8)$; ■

*solution de l'exercice 7.* $A=5\cdot(2x+1)$; $B=5\cdot(2x+1)$; $C=-5\cdot(2x-1)$; $D=-5\cdot(2x-3)$; $E=-5\cdot\left(2x^2-3\right)$; $F=-5x(2x-3)$; $G=-10x(x-3)$; $H=5x(2x-3)$; $I=5\cdot\left(2x^2-3y\right)$; $J=5\cdot\left(2x^2-3y^2\right)$; $K=5x\left(2x-3y^2\right)$; $L=5xy(2x-3y)$; $M=x\left(10xy-15y^2+1\right)$; $N=xy(10x-15y+1)$; $O=xy(xy+10x-15y)$;

■

*solution de l'exercice 16.* $A=(x+5)(2x-1)$; $B=3(x+1)(2x-5)$; $C=(x-2)(x+3)$; $D=(5x-2)(6x+5)$; $E=(x+3)^2$; $F=2(x-9)(6x+1)$; $G=-(5x-7)(8x-5)$; $H=(x+4)(x+9)$; $I=(x-4)(4x-3)$; $J=(x-7)(5x+7)$; ■

*solution de l'exercice 17.* $A=(x-10)(x+10)$; $B=-(x-8)(x+8)$; $C=-\left(x^3-7\right)\left(x^3+7\right)$; $D=(x-8)(x-2)$; $E=(x+4)(x+6)$; $F=-(x-1)(x+1)\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)$; $G=8(x+2)(2x-1)$; $H=(2x+1)(4x+3)$; $I=7\cdot(2x-1)$; ■

*solution de l'exercice 18.* $A=(3x-5)(3x+5)$; $B=-(10x-3)(10x+3)$; $C=-4\left(x^4-6\right)\left(x^4+6\right)$; $D=\left(3x^3-11\right)\left(3x^3+11\right)$; $E=4\cdot(50x-1)(50x+3)$; $F=4\cdot(5x+8)(5x+12)$; $G=8(x-2)(2x+1)$; $H=(2x+1)(2x+11)$; ■

## 7.3 Exercices : solutions et éléments de réponse

*solution de l'exercice 1.* ■

*solution de l'exercice 2.* ■

*solution de l'exercice 3.* ■

*solution de l'exercice 4.* 1. $A = 4\,(a+4)$; $B = 6\,(x+3)$; $C = 3\,(y-2)$; $D = 4\cdot(2a-3)$; $E = 3\cdot(3x-11)$; $F = 6\cdot(3p+10)$;

2. $A = x\,(x+2)$; $B = 3\cdot\left(3a+x^2\right)$; $C = 2a\,(a-3)$; $D = 3x\,(3x+4)$; $E = -2x\,(4x+3)$; $F = 4\cdot\left(4p^2+5\right)$; $G = 2x\,(9x+7)$; $H = 4b\,(3b-4)$; $I = 3y\,(3y-7)$;

3. $A = 3a\,(b+2)$; $B = 5p\,(q-1)$; $C = 3xy\,(2x+1)$; $D = 4xy\,(3x+2y)$; $E = 3xy\,(x-3y+2)$; $F = 3y\left(10x^2-4x-1\right)$;

■

*solution de l'exercice 5.* ■

*solution de l'exercice 6.* $A = 3x+4$; $B = 3x^2-4$; $C = x\,(3x-4)$; $D = 3x\,(x-8)$; $E = 3x\,(3x-8)$; $F = -3x\,(3x+8)$; ■

*solution de l'exercice 7.* $A = 5\cdot(2x+1)$; $B = 5\cdot(2x+1)$; $C = -5\cdot(2x-1)$; $D = -5\cdot(2x-3)$; $E = -5\cdot\left(2x^2-3\right)$; $F = -5x\,(2x-3)$; $G = -10x\,(x-3)$; $H = 5x\,(2x-3)$; $I = 5\cdot\left(2x^2-3y\right)$; $J = 5\cdot\left(2x^2-3y^2\right)$; $K = 5x\left(2x-3y^2\right)$; $L = 5xy\,(2x-3y)$; $M = x\left(10xy-15y^2+1\right)$; $N = xy\,(10x-15y+1)$; $O = xy\,(xy+10x-15y)$; ■

*solution de l'exercice 8.* ■

*solution de l'exercice 9.* ■

*solution de l'exercice 10.* ■

*solution de l'exercice 11.* ■

*solution de l'exercice 12.* ■

*solution de l'exercice 13.* ■

*solution de l'exercice 14.* ■

*solution de l'exercice 15.* ∎

*solution de l'exercice 16.* $A = (x+5)(2x-1)$; $B = 3(x+1)(2x-5)$; $C = (x-2)(x+3)$; $D = (5x-2)(6x+5)$; $E = (x+3)^2$; $F = 2(x-9)(6x+1)$; $G = -(5x-7)(8x-5)$; $H = (x+4)(x+9)$; $I = (x-4)(4x-3)$; $J = (x-7)(5x+7)$; ∎

*solution de l'exercice 17.* $A = (x-10)(x+10)$; $B = -(x-8)(x+8)$; $C = -\left(x^3-7\right)\left(x^3+7\right)$; $D = (x-8)(x-2)$; $E = (x+4)(x+6)$; $F = -(x-1)(x+1)\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)$; $G = 8(x+2)(2x-1)$; $H = (2x+1)(4x+3)$; $I = 7\cdot(2x-1)$; ∎

*solution de l'exercice 18.* $A = (3x-5)(3x+5)$; $B = -(10x-3)(10x+3)$; $C = -4\left(x^4-6\right)\left(x^4+6\right)$; $D = \left(3x^3-11\right)\left(3x^3+11\right)$; $E = 4\cdot(50x-1)(50x+3)$; $F = 4\cdot(5x+8)(5x+12)$; $G = 8(x-2)(2x+1)$; $H = (2x+1)(2x+11)$; ∎

*solution de l'exercice 19.* ∎

*solution de l'exercice 20.* ∎

*solution de l'exercice 21.* ∎

*solution de l'exercice 22.* ∎

*solution de l'exercice 23.* ∎

*solution de l'exercice 24.* ∎

*solution de l'exercice 25.* ∎

*solution de l'exercice 26.* ∎

*solution de l'exercice 27.* ∎

*solution de l'exercice 28.* ∎

*solution de l'exercice 29.* ∎

*solution de l'exercice 30.* ∎