1.3 Forme factorisée

Définition 1.4 Soit f une fonction quadratique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$.
f est dite factorisable, s'il existe r_1 et $r_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

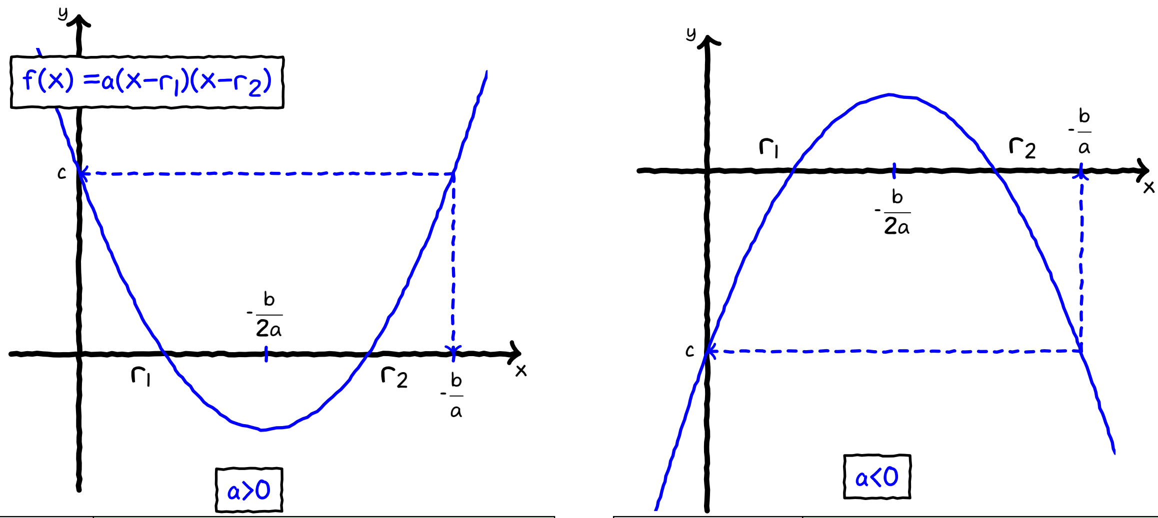
r_1 et r_2 sont les racines de f :

$$f(r_1) = 0 \qquad f(r_2) = 0$$

■ **Exemple 1.8**

a) $$\begin{aligned} f(x) &= (3x-7)(2x+5) \\ &= 3\left(x - \frac{7}{3}\right) \times 2\left(x + \frac{5}{2}\right) \\ f(x) &= 6\left(x - \frac{7}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$ forme factorisée de la défintion 1.4

b) Pour $f(x) = 2(x-7)^2$, 7 est une racine double : $r_1 = r_2 = 7$.



x	$-\infty$		r_1		r_2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		r_1		r_2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Figure 1.2 – Représentation graphique d'une fonction quadratique donnée par forme factorisée $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.

Proposition 1.4 Une fonction quadratique qui ne s'annule pour aucune valeur de x, n'a pas de forme factorisée.

■ **Exemple 1.9** Les fonctions définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -(x+5)^2 - 5$ ne sont pas factorisables dans $\mathbb{R}$.

Exercices : forme factorisée

Exercice 1 Écrire chaque fonction quadratique sous la forme factorisée $a(x - r_1)(x - r_2)$.
Préciser le signe de a, et les racines.

$f_1(x) = 2(x+3)(x-5)$	$f_4(x) = (2x-10)(3x+15)$	$f_7(x) = x^2 - 5x$
$f_2(x) = (x-3)(x+3)$	$f_5(x) = (5x-2)(3x-7)$	$f_8(x) = 5x^2 + 2x$
$f_3(x) = (5x-2)(x-4)$	$f_6(x) = 4(-x+5)(2x+3)$	$f_9(x) = -x^2 + 3x$

■ **Exemple 1.10** Représentez schématiquement la fonction quadratique donnée.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-1)(x-3) \\ &= 2(x-\tfrac{1}{2})(x-3) \quad \text{forme factorisée} \\ &= 2x^2 - 6x - x + 3 \\ &= 2x^2 - 7x + 3 \quad \text{forme réduite} \end{aligned}$$

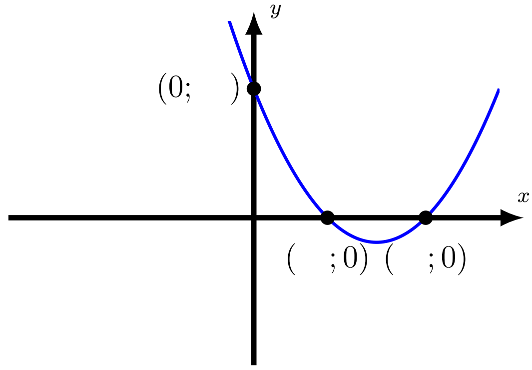
développer

Avec une expression factorisée : $f(x) = 0$

$$(2x-1)(x-3) = 0$$

$$2x - 1 = 0 \qquad\qquad x - 3 = 0$$

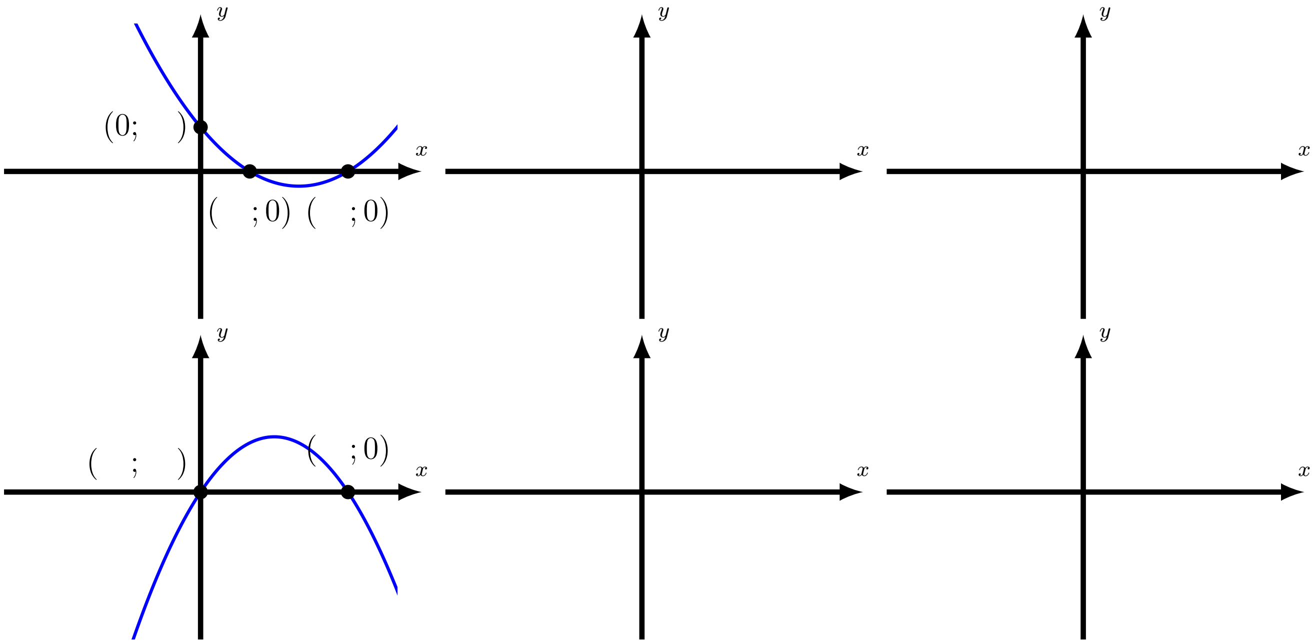
$$r_1 = \dots \qquad\qquad r_2 = \dots$$



Avec la forme réduite : on a $a \dots 0$ et $f(0) = \dots 3$

Exercice 2 Pour chacune des fonctions quadratiques factorisées, donner la forme réduite, et compléter le schéma en précisant les points d'intersection avec les axes du repère.

$f_1(x) = (x-5)(x-1)$	$f_3(x) = (5-x)(x+2)$	$f_5(x) = (2x+1)^2$
$f_2(x) = -3x(2x-7)$	$f_4(x) = (5-2x)(2x+5)$	$f_6(x) = (2-x)^2$

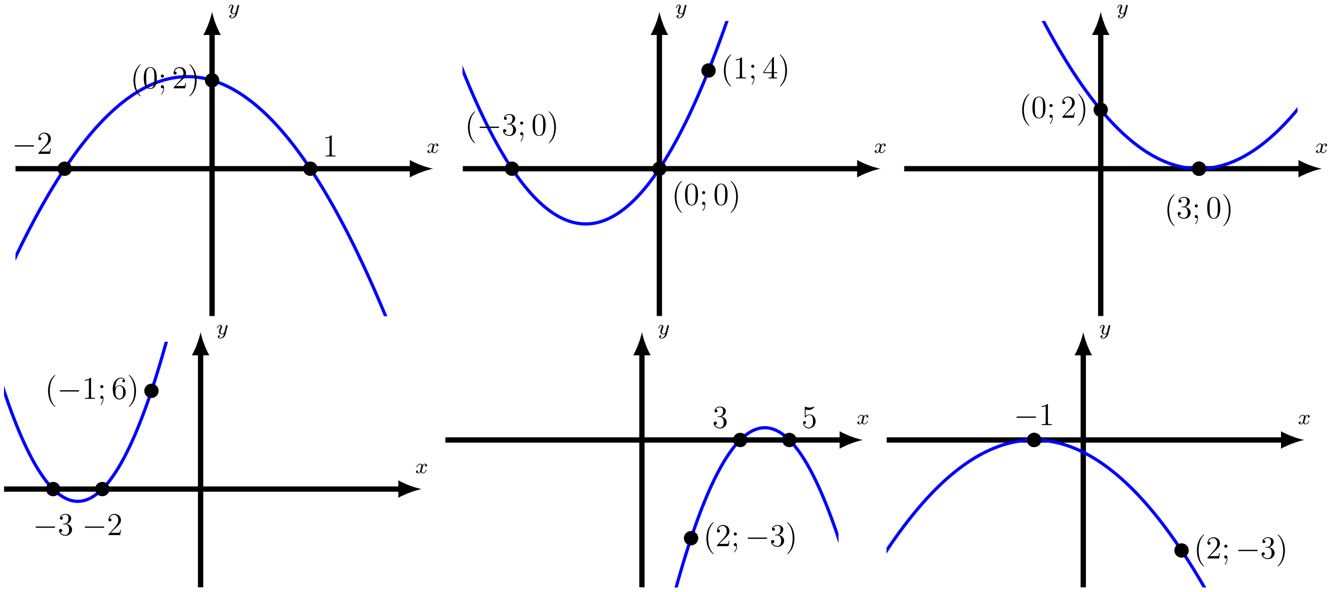


Exercice 3 Suivre la démarche proposée pour trouver la forme factorisée $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ des fonctions quadratiques représentées ci-dessous.

a) Donnner par lecture graphique le(s) racine(s) de f.

b) Donner une équation vérifiée par a et la résoudre.

c) Donner la forme réduite de la fonction f.



Exercice 4 Pour chaque fonction quadratique ci-dessous :

a) Déterminez les racines.

b) Déterminez le signe du coefficient a de x^2 dans la forme réduite.

c) Complétez le tableau de signe.

$f_1(x) = 5(x + 1)(x - 6)$

x	$-\infty$			$+\infty$
$f_1(x)$				

$f_2(x) = -2(x - 2)(x - 9)$

x	$-\infty$			$+\infty$
$f_2(x)$				

$f_3(x) = -5x(x + 2)$

x	$-\infty$			$+\infty$
$f_3(x)$				

$f_4(x) = (2x - 7)(2x + 7)$

x	$-\infty$			$+\infty$
$f_4(x)$				

Exercice 5 Sans dresser un tableau de signe, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations d'inconnue x.

(I_1) $(x - 1)(x - 4) > 0$

(I_2) $(x - 10)(x + 5) < 0$

(I_3) $-2(x + 8)(x + 7) \geqslant 0$

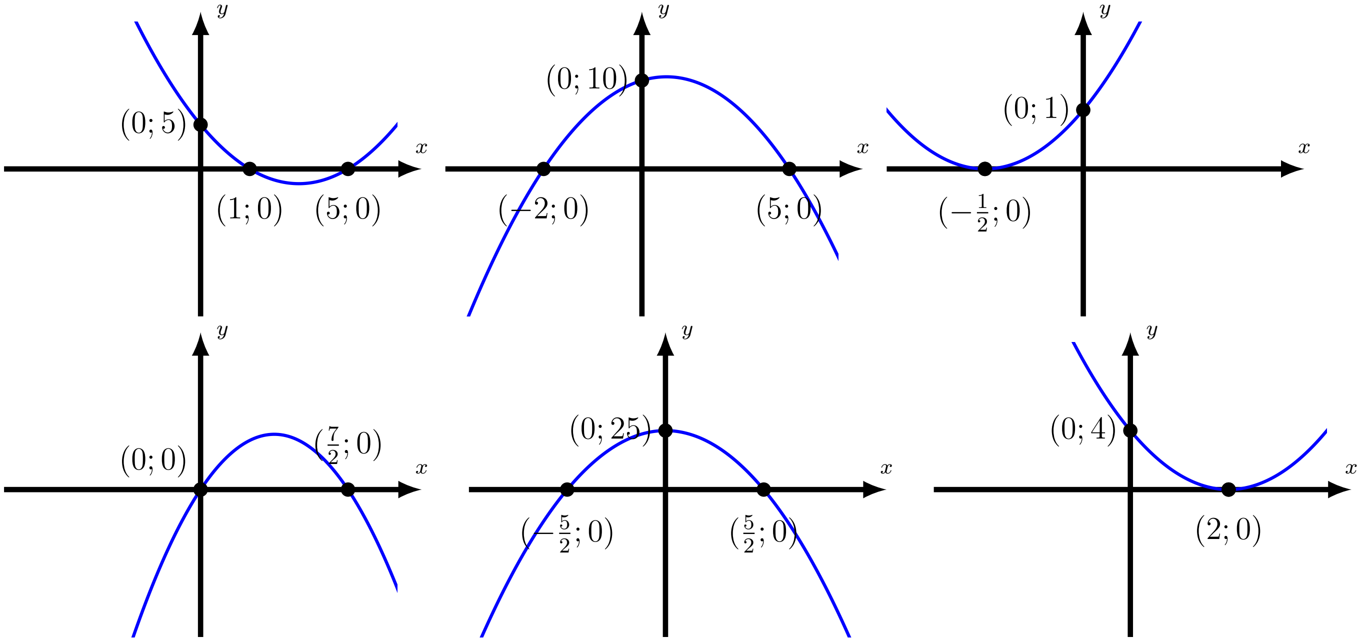
(I_4) $(3x + 5)(-2x + 1) \leqslant 0$

Défi Trouvez une (ou plusieurs) fonction quadratique f tel que $f(3) = 5$ et $f(4) = 5$.

solution de l'exercice 1 .

$f_1(x) = 2(x-5)(x+3)$; $f_2(x) = (x-3)(x+3)$; $f_3(x) = (x-4)(5x-2)$; $f_4(x) = 6(x-5)(x+5)$; $f_5(x) = (3x-7)(5x-2)$; $f_6(x) = -4(x-5)(2x+3)$; $f_7(x) = x(x-5)$; $f_8(x) = x(5x+2)$; $f_9(x) = -x(x-3)$; ■

solution de l'exercice 2 .



■

solution de l'exercice 3 .

$f_1(x) = -(x+2)(x-1) = -x^2 - x + 2$

$f_2(x) = x(x+3) = x^2 + 3x$

$f_3(x) = \frac{2}{9}(x-3)^2 = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$

$f_4(x) = 3(x+3)(x+2) = 3x^2 + 15x + 18$

$f_5(x) = -(x-3)(x-5) = -x^2 + 8x - 15$

$f_6(x) = -\frac{1}{3}(x+1)^2 = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

■

solution de l'exercice 4 .

■

solution de l'exercice 5 .

(I_1) $\mathscr{S}_1 =]-\infty, 1[\cup]4, \infty[$

(I_2) $\mathscr{S}_2 =]-5, 10[$

(I_3) $\mathscr{S}_3 = [-8, -7]$

(I_4) $\mathscr{S}_4 = \left]-\infty, -\dfrac{5}{3}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}, \infty\right[$

■