Chapitre

Géométrie. Problèmes 5

5.1 Triangles égaux et semblables

Définition 5.1 — triangles égaux. Deux triangles sont égaux si leurs trois côtés et leur trois angles sont égaux deux à deux.

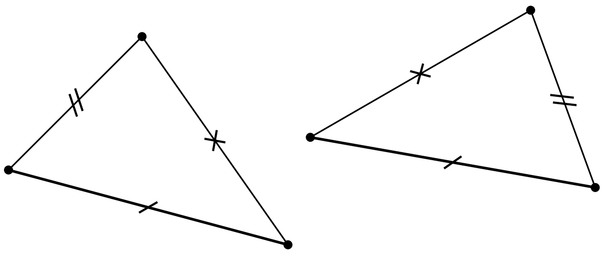


Figure 5.1 – Critère CCC : Si deux triangles ont leurs trois côtés respectivement égaux, alors ils sont égaux.

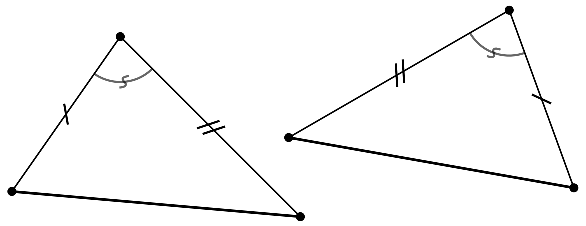


Figure 5.2 – Critère CAC : Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont égaux.

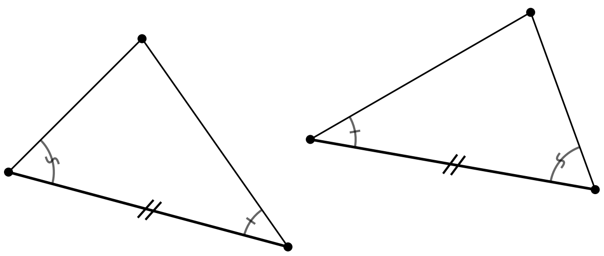


Figure 5.3 – Critère ACA Si deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles respectivement égaux, alors ils sont égaux.

R Cas RHC (Rectangle-Hypoténuse-Côté). Deux triangles rectangles, qui ont même longueur d'hypoténuse et une même longueur d'un côté de l'angle droit sont égaux.

Définition 5.2 Deux triangles sont **semblables** lorsqu'ils ont leurs angles égaux deux à deux et leurs côtés **proportionnels**.

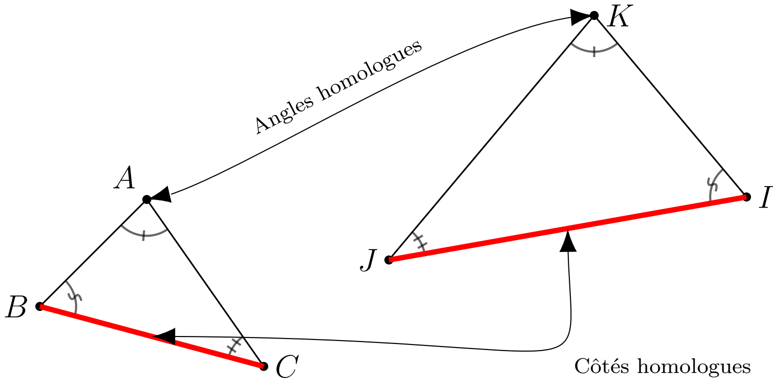


Figure 5.4 – les trianges ABC et IJK sont semblables.

Les **angles correspondants** sont égaux :

$$\widehat{A} = \widehat{K} \qquad \widehat{B} = \widehat{J} \qquad \widehat{C} = \widehat{I}$$

Les **côtés correspondants** sont proportionnels :

$$\frac{JK}{AB} = \frac{IJ}{BC} = \frac{IK}{AC} = k$$

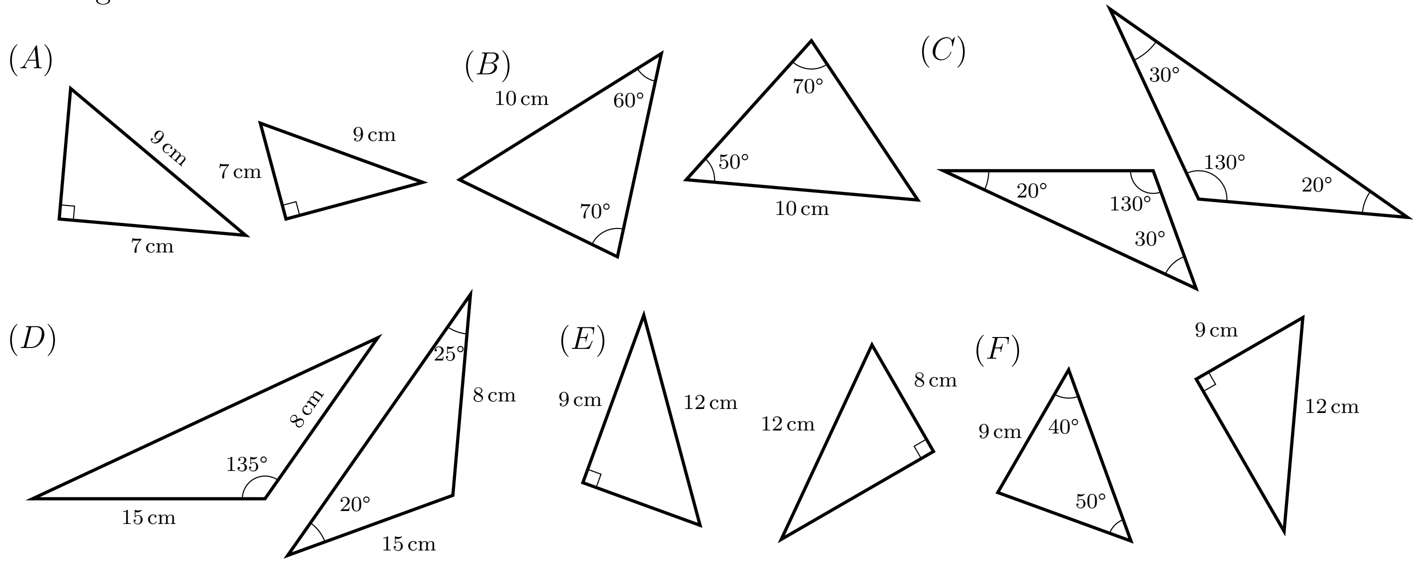
Postulat 5.1 — Critère de similitude CCC. Si les longueurs des 3 côtés d'un triangle T_1 sont **proportionnelles** aux longueurs respectives des 3 côtés d'un triangle T_2, alors les deux triangles sont semblables.

Postulat 5.2 — Critère CAC-Semblable. Si deux triangles T_1 et T_2 ont un angle égal compris entre 2 côtés respectivement proportionnels, alors les deux triangles sont semblables.

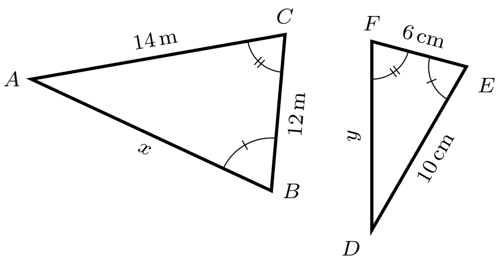
Postulat 5.3 — Critère de similitude AA. Si 2 angles d'un triangle T_1 sont **respectivement égaux** à 2 angles d'un triangle T_2. Alors les deux triangles sont semblables.

5.1.1 Exercices : calculs algébriques et géométrie

Exercice 1 — Triangles égaux : à l'oral. Si possible, démontrer pour chaque cas que les triangles sont égaux. Les figures ne sont pas à l'échelle. Utiliser la même couleur pour indiquer les angles et côtés homologues.



Exercice 2 — Révision triangles semblables.

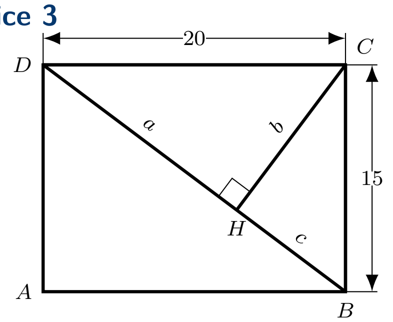


a) Justifier que les triangles ACB et FED sont semblables.

b) Écrire les égalités des rapports entre les côtés homologues.

c) Calculer les longueurs x et y.

Exercice 3



a) Calculer la longueur de la diagonale du rectangle $ABCD$.

b) Justifier que les triangles ABD et DHC sont semblables.

c) Écrire les égalités des côtés homologues.

d) Déduire les valeurs de a, b et c.

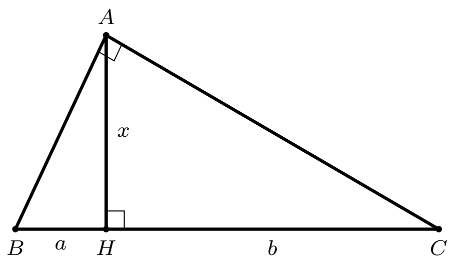
Exercice 4 — Quadrature du rectangle.

Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC est rectangle en A, et (AH) est perpendiculaire à (BC).

a) Démontrer que les triangles ACH et ABH sont semblables.

b) Écrire les rapports égaux.

c) En déduire que $x = \sqrt{ab}$.

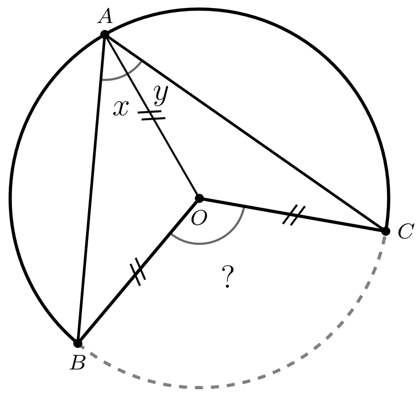


Exercice 5 — théorème de l'angle au centre. Soit un cercle de centre O passant par les points A, B et C. Nous voulons démontrer le théorème suivant :

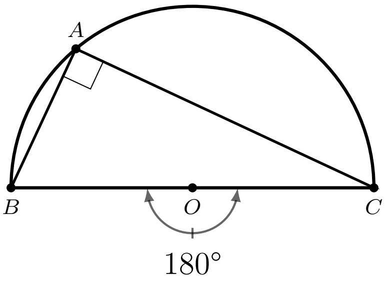
> Dans un cercle, un angle au centre mesure le double d'un angle inscrit interceptant le même arc.

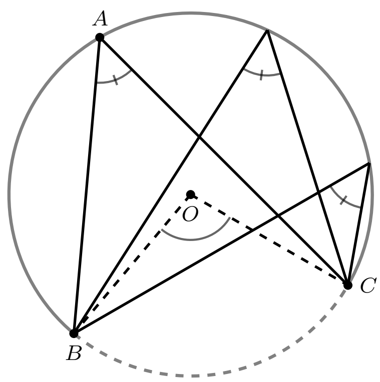
Pour simplifier on suppose que le centre O est intérieur à l'angle aigu $\widehat{BAC}$. Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BOC}$ (intérieur) interceptent le même arc de cercle BC.
On pose $x = \widehat{BAO}$ et $y = \widehat{OAC}$.

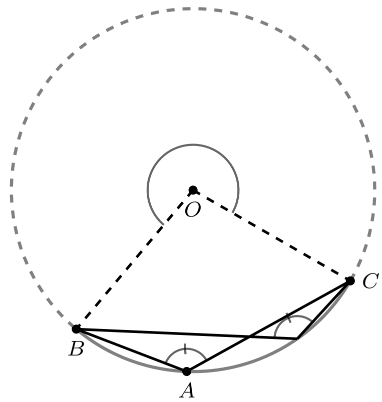
a) Exprimer les angles du triangle OAB à l'aide de x.
b) Exprimer les angles du triangle AOC à l'aide de y.
c) Montrer que la mesure de l'angle au centre recherché est égal à $2\widehat{BAC}$.



Théorème 5.4 — théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle. Si le point A appartient au cercle de diamètre $[BC]$ alors le triangle ABC est rectangle en A.

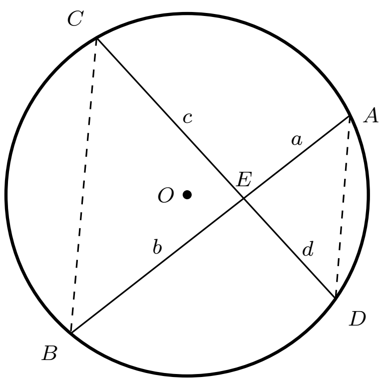






Théorème 5.5 — Théorème de l'angle inscrit. Les angles inscrits interceptant le même arc de cercle ont la même mesure

Exercice 6

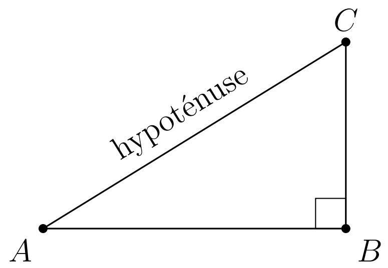


A, B, C et D sont des points d'un cercle de centre O. On suppose que les cordes $[AB]$ et $[CD]$ se coupent en E situé à l'intérieur du cercle.

a) À l'aide du théorème de l'angle inscrit, justifier que $\widehat{EDA} = \widehat{EBD}$.
b) Montrer que les triangles EAD et EBC sont semblables.
c) Écrire les égalités des rapports des côtés homologues.
d) En déduire que $ab = cd$.

5.2 Triangles rectangles

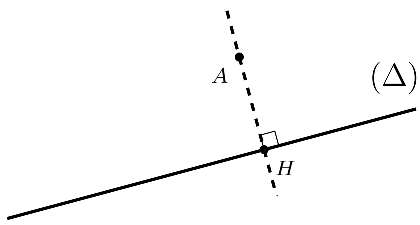
Définition 5.3 L'hypoténuse d'un triangle rectangle est le côté opposé à l'angle droit.



Théorème 5.6 — Théorème de Pythagore. Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

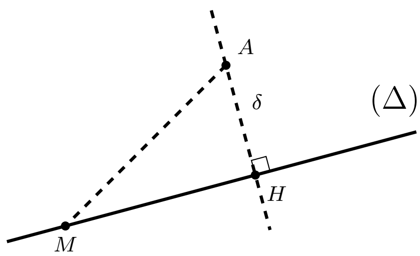
R Conséquence : l'hypoténuse est bien le plus grand côté.

Définition 5.4 Soit une droite (Δ) et un point A du plan. Le **projeté orthogonal** H de A sur (Δ) est le point d'intersection de Δ et de la perpendiculaire à (Δ) passant par A.



Théorème 5.7 Soit une droite (Δ) et A un point n'appartenant pas à (Δ). H le projeté orthogonal de A sur (Δ).
La distance ente A et la droite (Δ) est égale à AH. C'est la plus petite distance entre A et un point de la droite (Δ).

Démonstration. au programme Pour tout point $M \in (Delta)$, AMH est un triangle rectangle d'hypoténuse AM, et $AM \geqslant AH$. ■



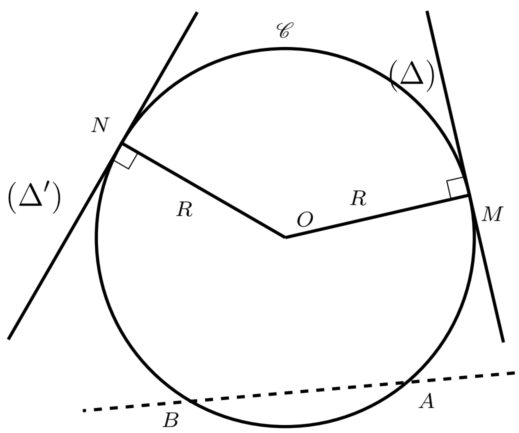
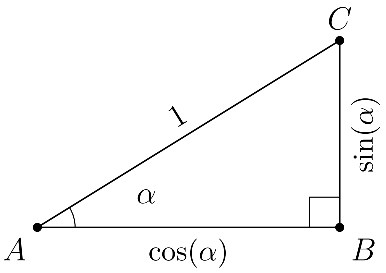


Figure 5.5 – La droite (AB) est sécante au cercle $\mathscr{C}$.
Les droites (Δ) et (Δ') sont dites tangentes au cercle.
La tangente en M au cercle en M est perpendiculaire au rayon OM.
La distance entre une tangente et le centre du cercle est égale au rayon R.
M est le projeté orthogonal du centre O sur droite (Δ).



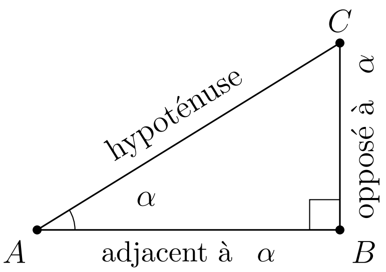


Figure 5.6 – En 2nd, on calcule des rapports trigonométriques d'angles aigus.

Définition 5.5 Dans un triangle rectangle d'hypoténuse 1. α un angle aigu. On designe par :

- $\cos(\alpha)$ la longueur du côté adjacent à α
- $\sin(\alpha)$ la longueur du côté opposé à α

Théorème 5.8 Pour tout valeur de l'angle α on a :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

démonstration. (*au programme*) Conséquence directe du théorème de Pythagore ! ■

Définition 5.6 Soit le triangle ABC rectangle en B.
le **sinus** de l'angle α

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC} \leqslant 1$$

le **cosinus** de l'angle α :

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent à } \alpha}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC} \leqslant 1$$

la **tangente** de l'angle α :

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{BAC}}{\text{côté adjacent à } \alpha} = \frac{BC}{AB}$$

5.3 Exercices Triplets pythagoriciens

Exercice 1

a) **(Un classique de 3e)** Montrer que la différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est toujours un nombre impair.

b) Choisir un nombre b impair strictement supérieur à 3, et l'élever au carré.

c) Trouver 2 nombres entiers consécutifs dont la différence des carrés est égale à b^2.

> Un triplet Pythagoricien est un triplet de trois nombres **entiers** $a \leqslant b < c$ tels que $a^2 + b^2 = c^2$.

■ **Exemple 5.9 — Nous faisons.** Cherchons des triplets pythagoriciens $(a; 15; c)$:

$a^2 + 15^2 = c^2$ diviseurs$(225) = \{1; 3; 5; 9; \qquad \}$

$15^2 = c^2 - a^2$ $c - a = 1 \ ; c + a = 225$:

$225 =$ $c - a = 3 \ ; c + a = \qquad$:

$c - a = 5 \ ; c + a = \qquad$:

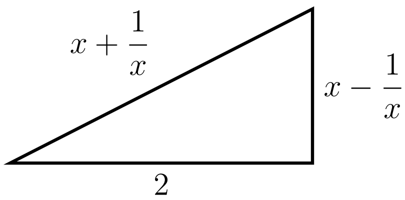
$c - a = 9 \ ; c + a = \qquad$:

$c - a = 15 \ ; c + a = \qquad$:

Exercice 2 — À vous. Combien pouvez vous trouver de triplets pythagoriciens $(a; 12; c)$?

Exercice 3 — Comprendre la tablette Plimpton 322. (figure 5.7)

a) Montrer que pour toute valeur de $x > 0$ le triangle ci-dessous est rectangle.



b) Expliquer pourquoi cette figure illustre l'inégalité pour tout $x > 0$ on a $2 \leqslant x + \dfrac{1}{x}$.

c) Donner, sous forme de fractions irréductibles, les longueurs des côtés du triangle rectangle correspondant à la valeur $x = \frac{12}{5}$.
Vérifier qu'il est semblable au triangle de côtés 169: 119: 120 (1re ligne de la tablette).

d) Même question pour $x = \frac{9}{4}$ et le triangle 97: 65: 72 (11e ligne de la tablette).

e) Pouvez vous retrouver les triplets $(a; b; c)$ de la seconde ligne, qui correspond à $x = \frac{64}{27}$?

Exercice 4 Les formules particulières suivantes génèrent des triplets pythagoriciens $(a; b; c)$:

$p; q \in \mathbb{N} \qquad a = p^2 - q^2 \qquad b = 2pq \qquad c = p^2 + q^2$

a) Donner le triplet correspondant à $(p = 8; q = 7)$ et vérifier l'égalité $a^2 + b^2 = c^2$

b) Retrouver le couple d'entiers $(p; q)$ qui donnent le triplet $(a = 35; b = 12; c = 37)$.

c) Développer, réduire et montrer que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$: $a^2 + b^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4$.

d) Montrer que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on a $a^2 + b^2 = c^2$.

Exercice 5

1) Voici 3 scripts Python. Cocher les cases correspondant aux scripts qui affichent le couple indiqué :

Script A

```
for a in range(100) :
    for b in range(100) :
        print(a,b)
```

Script C

```
for a in range(100) :
    b = 100 - a
    print(a,b)
```

Script B

```
for a in range(100) :
    for b in range(a,100-a) :
        print(a,b)
```

Script D

```
for a in range(100) :
    for b in range(a,100) :
        if a**2+b**2 == 10**2 :
            print(a,b)
```

	Script A	Script B	Script C	Script D
1/ `0, 10`	☐	☐	☐	☐
2/ `10, 0`	☐	☐	☐	☐
3/ `1, 99`	☐	☐	☐	☐
4/ `3, 7`	☐	☐	☐	☐
5/ `4, 3`	☐	☐	☐	☐
6/ `6, 8`	☐	☐	☐	☐
7/ `8, 6`	☐	☐	☐	☐
8/ `75, 25`	☐	☐	☐	☐

2) On cherche les triplets pythagoriciens (a, b, c) correspondant à des triangles de périmètre 1000.

```
for a in ................        :
    for b in ................    :
        c = ....................
        if ..................... :
            print(a,b,c)
```

a) Expliquer pourquoi a, b et c sont forcement inférieurs à 1000.

b) Compléter le script ci-dessous afin qu'il affiche les bons triplets.

c) Rentrer le script sur votre pythonette et l'exécuter.
Vérifier qu'il n'affiche aucune valeur négative. puis relever les triplets solutions.

solution de l'exemple et de l'exercice 2.

a) Pour $b = 15$ on trouve $117^2 + 15^2 = 118^2$, $36^2 + 15^2 = 39^2$, $20^2 + 15^2 = 25^2$ et $8^2 + 15^2 = 17^2$.

b) Pour $b = 12$ on trouve $35^2 + 12^2 = 37^2$, $16^2 + 12^2 = 20^2$, $9^2 + 12^2 = 15^2$ et $5^2 + 12^2 = 13^2$.

■

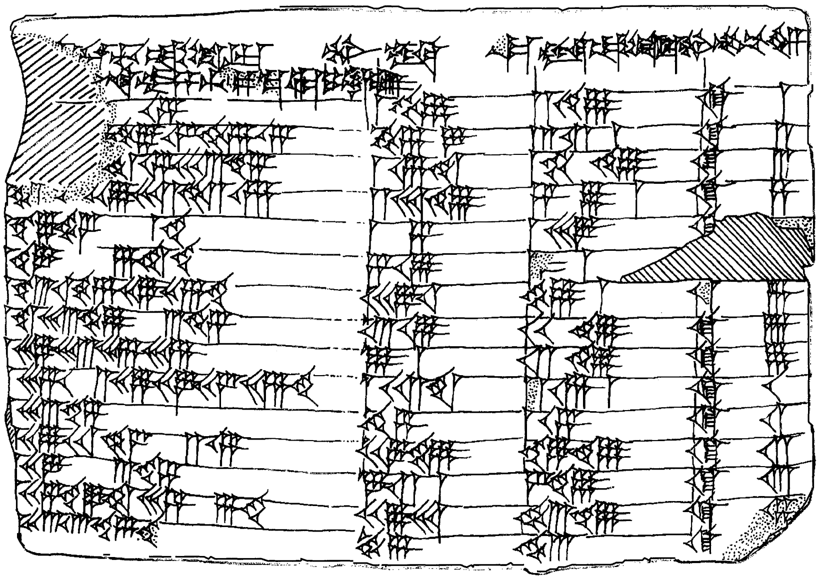


Figure 5.7 – La tablette Plimpton 322 est la plus connue des 500 000 tablettes babyloniennes dans la collection G. A. Plimpton à l'université de Columbia. Rédigée dans de l'argile en 1800 av. J.-C., elle comporte un tableau de nombres rangés dans 4 colonnes et 15 lignes. Les valeurs des 3 premières colonnes sont associées à des triplets pythagoriciens vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$ (la 4e étant le numéro de la ligne). Une analyse minutieuse a permis d'identifier la méthode utilisée pour obtenir chacune des lignes. Cet algorithme est abordé dans l'exercice 3.

solution de l'exercice 5.

	Script A	Script B	Script C	Script D
1/ `0, 10`	☒	☒	☐	☒
2/ `10, 0`	☒	☐	☐	☐
3/ `1, 99`	☒	☐	☒	☐
4/ `3, 7`	☒	☒	☐	☐
5/ `4, 3`	☒	☐	☐	☐
6/ `6, 8`	☒	☒	☐	☒
7/ `8, 6`	☒	☐	☐	☐
8/ `75, 25`	☒	☐	☒	☐

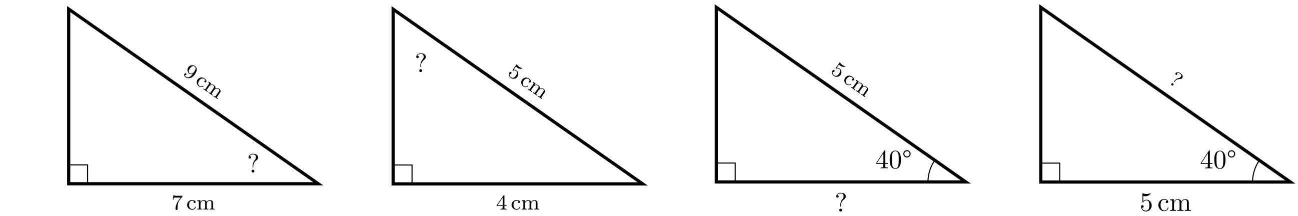
```python
for a in range(1000) :
    for b in range(a,1000-a)   :
        c = 1000 - a - b
        if a**2 + b**2 == c**2 :
            print(a,b,c)                # programme affiche 200, 375, 475
```

■

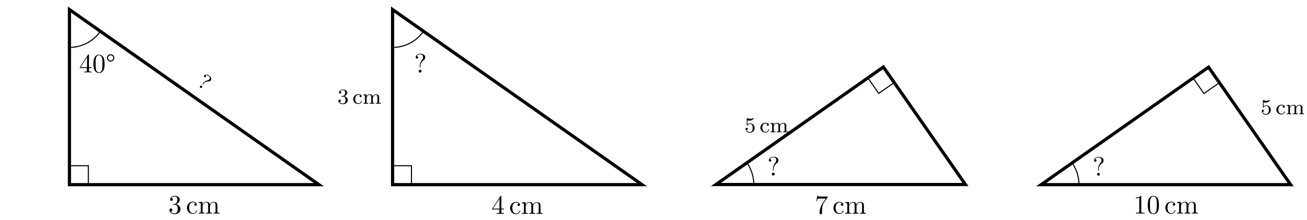
5.4 Exercices : trigonométrie

Exercice 1 — Trigonométrie. Écrire le rapport trigonométrique adapté et calculer les valeurs demandées.

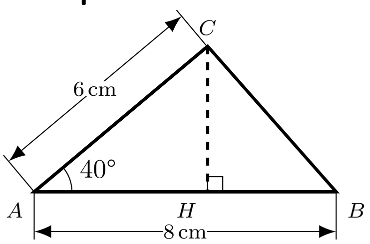
(A) (B) (C) (D)



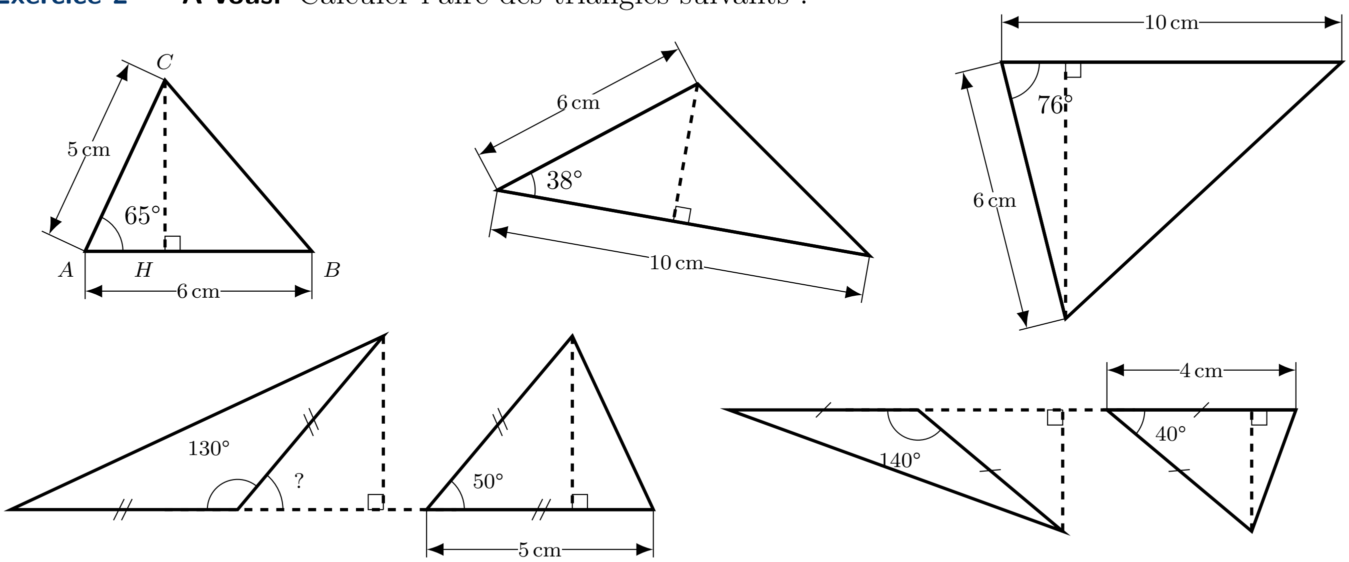
(E) (F) (G) (H)



■ **Exemple 5.10 — Calcul d'une aire.** Calculer l'aire du triangle ABC ci-dessous.

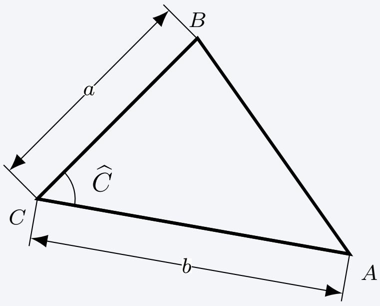


Exercice 2 — À vous. Calculer l'aire des triangles suivants :



R On peut calculer des rapports trigonométriques d'angles obtus (>90°). Comparer sin(130°),sin(50°).

Formule de l'aire

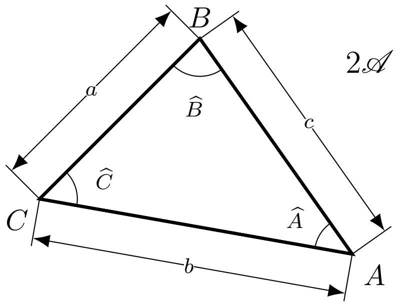


La formule est valable pour des angles aigus, mais aussi des angles obtus !

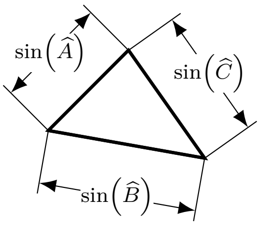
$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}ab\sin\left(\widehat{C}\right)$$

On a aussi l'égalité : $\sin\left(\widehat{C}\right) = \sin\left(180° - \widehat{C}\right)$

■ **Exemple 5.11**

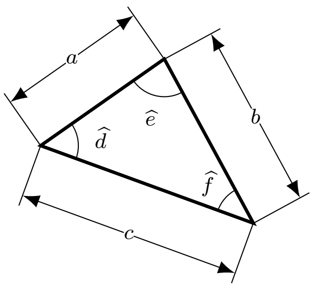


$2\mathscr{A} = ab\sin\left(\widehat{C}\right) =$



Exercice 3

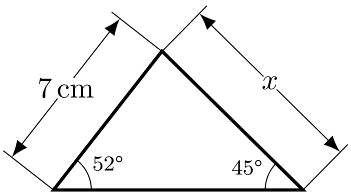
On considère la figure ci-dessous. Cocher les cases pour les formules vraies.

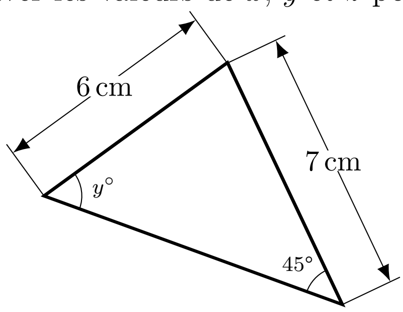


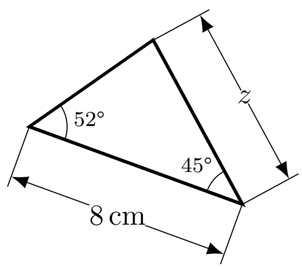
	Vrai	Faux
1/ $\dfrac{\sin(d)}{b} = \dfrac{\sin(e)}{c}$	☐	☐
2/ $\dfrac{a}{\sin(f)} = \dfrac{b}{\sin(c)}$	☐	☐
3/ $\dfrac{c}{\sin(e)} = \dfrac{b}{\sin(d)}$	☐	☐

Exercice 4

En utilisant la loi des sinus, trouver les valeurs de x, y et z pour chacune des figures suivantes.







solution de l'exercice 1.

A) $\cos(x) = \dfrac{7}{9}$.
$x = \arccos\left(\frac{7}{9}\right) \approx 39°$.

B) $\sin(x) = \dfrac{4}{5}$.
$x = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) \approx 53°$

C) $x = 5\cos(40°) \approx 3{,}83$.

D) $x = \dfrac{5}{\cos(40°)} \approx 6{,}53$.

E) $x = \dfrac{3}{\sin(40°)} \approx 4{,}67$.

F) $\tan(x) = \dfrac{4}{3}$.
$x = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53{,}1°$.

G) $\cos(x) = \dfrac{5}{7}$
$x = \arccos\left(\frac{5}{7}\right) = 44{,}4°$.

H) $\sin(x) = \dfrac{5}{10}$, $x = 30°$.

■

solution de l'exercice 2.

$A \approx 13{,}60\,\text{cm}^2$; $B \approx 18{,}50\,\text{cm}^2$; $C \approx 29{,}10\,\text{cm}^2$; $D \approx 9{,}58\,\text{cm}^2$; $E \approx 5{,}14\,\text{cm}^2$; ■

solution de l'exercice 3.

	Vrai	Faux
1/ $\dfrac{\sin(d)}{b} = \dfrac{\sin(e)}{c}$	☒	☐
2/ $\dfrac{a}{\sin(f)} = \dfrac{b}{\sin(c)}$	☐	☒
3/ $\dfrac{c}{\sin(e)} = \dfrac{b}{\sin(d)}$	☒	☐

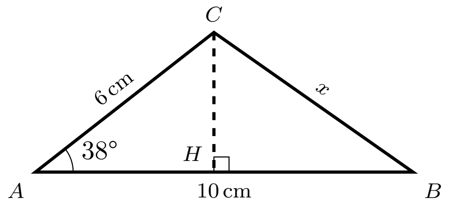
■

solution de l'exercice 4.

$x = 6{,}30\,\text{cm}$, $y \approx 55{,}6°$ et $z \approx 6{,}35\,\text{cm}$ ■

5.5 La loi des cosinus

Exercice 1 — un classique de 3e.

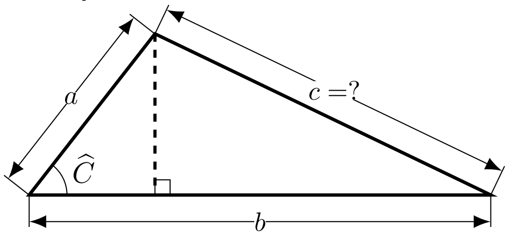


Dans la figure ci-contre, H est le pied de la hauteur issue de C.

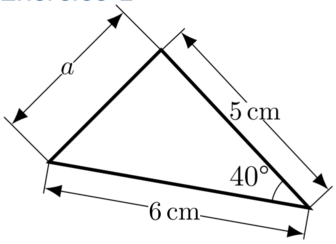
a) Calculer les longueurs CH et HB.

b) En déduire HB, puis une valeur approchée de x au dixième de cm.

■ **Exemple 5.12**

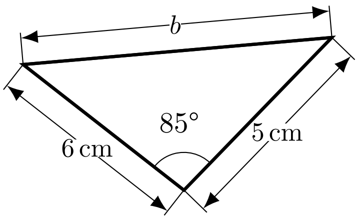


Exercice 2



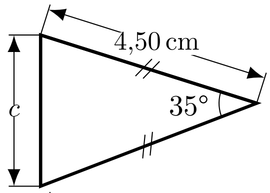
$$a^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos(40°)$$

$a =$



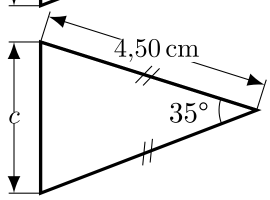
$b^2 =$

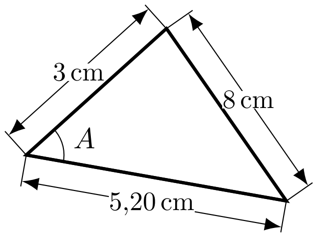
$b =$



$c^2 =$

$c =$



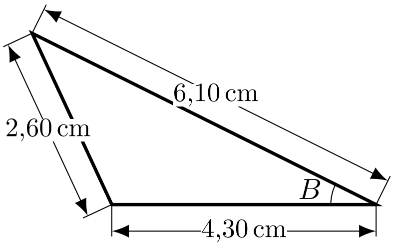


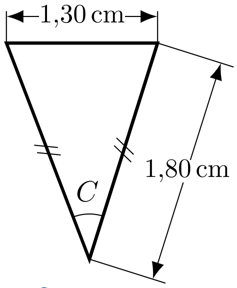
$$(\quad)^2 = (\quad)^2 + (\quad)^2 - 2 \times \quad \times \quad \times \cos(A)$$

$$=$$

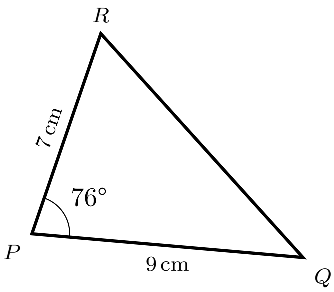
$$\cos(A) =$$

$$A =$$





Exercice 3



Dans le triangle PQR, $\widehat{QPR} = 76°$, $PQ = 9\,\text{cm}$ et $PR = 7\,\text{cm}$.

a) Calculer QR au millimètre près.

b) À l'aide de la loi des sinus, calculer les valeurs approchées à 10^{-1} près des angles $\widehat{PQR}$ et $\widehat{PRQ}$.