Chapitre

Fonctions affines 6

Dans l'étude d'une fonction ou d'une classe de fonctions on doit savoir :

1) calculer l'image/l'ordonnée $y = f(x)$ d'une abscisse donnée.
2) connaitre le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3) Pour $k \in \mathbb{R}$, connaitre le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ inconnue x, et la résoudre. En particulier résoudre $f(x) = 0$
4) Pour $k \in \mathbb{R}$, savoir résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant k$ inconnue x. En particulier dresser son tableau de signe.
5) connaitre les propriétés de sa représentation graphique.
6) problèmes inverses pour retrouver l'expression

6.1 Définitions et propriétés

Définition 6.1 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est **affine** s'il existe deux nombres réels m et p tel que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = mx + p$$

représentée par **la droite $\mathscr{D}_f$ non verticale** d'**équation réduite** :

$$\mathscr{D}_f : y = mx + p$$

Définition 6.2 Si $p = 0$, la fonction est affine et **linéaire** :

$$\text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ on a } \quad f(x) = mx$$

La variable image y est proportionnelle à l'antécédent x.

Proposition 6.1 p est l'image de 0 par f : $f(0) = p$

Proposition 6.2 $m \in \mathbb{R}$ vérifie :

$$\text{Pour tout } x_A \text{ et } x_B \in \mathbb{R} \qquad f(x_A) - f(x_B) = m(x_A - x_B)$$

Les écarts sur la variable image y sont proportionnels aux écarts sur la variable antécédent x.

Propriété 6.3 Pour une fonction affine f, le couple de nombres m et p est **unique**. On peut dire :

- p est **l'ordonnée à l'origine** de f
- m est **le coefficient directeur** de f.

Propriété 6.4 — taux de variation. Si $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$ alors :

$$m = \frac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \qquad x_A \neq x_B$$

Pour une fonction affine, le taux de variation entre deux valeurs x_A et x_B est toujours égal à m.

La pente du segment $[AB]$ entre deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B) \in \mathscr{C}_f$ est toujours égale à m.

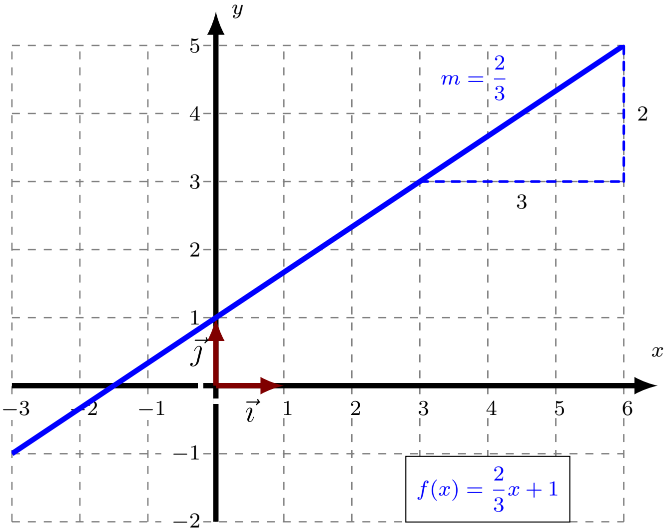
Propriété 6.5 — représentation graphique. Toute **droite non verticale** admet une **pente** m et d'équation réduite $D_f \colon y = mx + p$.[1]

[1] sera démontré dans le chapitre d'équations cartésiennes

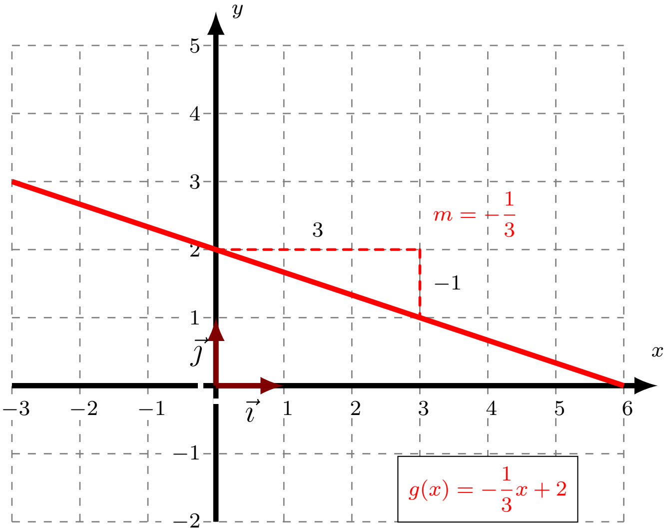
Propriété 6.6 Pour une fonction affine f de coefficient directeur m :

- Si $m > 0$ alors f est **strictement croissante**
- Si $m < 0$ alors f est **strictement décroissante**
- Si $m = 0$ alors f est constante.

Démonstration.



x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{2}{3}x + 1$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
signe de f	$-$	0	$+$



x	$-\infty$	6	$+\infty$
$g(x) = -\dfrac{1}{3}x + 2$	$\searrow$	0	$\searrow$
signe de g	$+$	0	$-$

Figure 6.1 – Graphiquement, m est le rapport de l'augmentation verticale sur l'augmentation horizontale. $p = f(0)$ est l'ordonnée à l'origine

6.2 Exercices : fonctions affines

Exercice 1 Complétez

1) L'expression réduite d'une fonction affine est :

$f(x) = -3x + 5$	$f(x) = -3x^2$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f(x) = \sqrt{x}$

2) La fonction affine pour laquelle $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ est

$f\colon x \mapsto 2x + 1$	$f\colon x \mapsto -2x + 1$	$f\colon x \mapsto 2x - 1$	$f\colon x \mapsto -2x - 1$

3) Le point ...... $\in \mathscr{C}\colon y = \frac{1}{2}x + 1$

$A(2; 1)$	$B(-2; 1)$	$C(2; 0)$	$D(-2; 0)$

car ....

4) Pour $a + b = 1$, la fonction affine d'expression $f(x) = ax + b$ passe par le point :

$A(-1; -1)$	$B(-1; 1)$	$C(1; -1)$	$D(1; 1)$

car ....

5) $\mathcal{D}\colon y = -\frac{1}{2}x$ est la représentation de la fonction affine et ....d'expression $f(x) =$............

6) $\mathcal{D}\colon 2x + 3y = 1$ est la représentation de la fonction affine d'expression réduite $y = f(x) =$ ....

7) L'image $f(x)$ est proportionnelle à $x - 2$, et le coefficient de proportionnalité est 3. L'expression réduite de f est $f(x) =$...

8) La fonction f d'expression $f(x) = ax + a - 1$ est affine. Les valeurs possibles pour a sont ....

f est une fonction affine et linéaire si $a =$ ....

9) La fonction f d'expression réduite $f(x) = kx^{k-1} + k - 3$ est affine non constante lorsque $k =$ ....

Exercice 2

La fonction affine f d'expression réduite $f(x) = mx + p$. Déterminer m et p sachant que $f(2) = -1$ et $f(-2) = 2$. *On pourra écrire un système vérifié par m et p.*

Exercice 3

La fonction affine f. Déterminez son expression réduite sachant que $f(3) = 5$ et $f(5) = 11$.

Exercice 4

La fonction linéaire f. Déterminez son expression réduite sachant que $f(-8) = 12$.

Exercice 5

La droite non verticale passe par $A(-2, 1)$ et $B(1, 3)$. Déterminez son équation réduite.

Exercice 6

Déterminer le taux de variation m de la fonction affine f dans les cas suivants :

$f(5) = 12$ et $f(6) = 2$. Alors $m = \dfrac{f(\ldots) - f(\ldots)}{\ldots - \ldots} = \ldots\ldots\ldots$

$f(9) = 12$ et $f(5) = 2$. Alors$m = \dfrac{f(\ldots) - f(\ldots)}{\ldots - \ldots} = \ldots\ldots\ldots$

$f(-9) = 12$ et $f(5) = 2$. Alors $m = \dfrac{f(\ldots) - f(\ldots)}{\ldots - \ldots} = \ldots\ldots\ldots$

$f(19) - f(-20) = -117$. Alors$m = \dfrac{f(\ldots) - f(\ldots)}{\ldots - \ldots} = \ldots\ldots\ldots$

$f(-6) - f(5) = 77$. Alors $m = \dfrac{f(\ldots) - f(\ldots)}{\ldots - \ldots} = \ldots\ldots\ldots$

$f(2) - f(16) = 49$. Alors $m = \dfrac{f(\ldots) - f(\ldots)}{\ldots - \ldots} = \ldots\ldots\ldots$

Point méthode Trouver la forme réduite de la fonction affine tel que $f(12) = 17$ et $f(16) = 25$.

On commence par déterminer le taux de variation entre 12 et 16 :

$$m = \frac{f(12) - f(16)}{12 - 16} = \frac{17 - 25}{12 - 16} = \frac{-8}{-4} = 2$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) - f(12) = m(x - 12)$,

$$\begin{aligned} f(x) &= m(x-12) + f(12) \\ f(x) &= 2(x-12) + f(12) \\ f(x) &= 2x - 24 + 17 \\ f(x) &= 2x - 7 \end{aligned}$$

Exercice 7

Déterminez l'expression réduite de la fonction affine f dans les cas suivants :

1) le taux de variation est égal à $\frac{1}{3}$ et $f(15) = 3$.
2) le taux de variation est égal à $\frac{-1}{2}$ et $f(-16) = \frac{11}{2}$.
3) $f(1) = 2$ et $f(4) = 8$.
4) $f(-1) = 4$ et $f(2) = 3$.
5) $f(2) = -5$ et $f(7) = 3$.
6) f est linéaire et $f(3) = -4$.

Exercice 8

Pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f(-2) = -15$ et que $f(0) = 5$.

1) Déterminer l'expression réduite de la fonction f
2) Déterminer l'image de -35 par f.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$, inconnue x.

Exercice 9

Pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que Si $f(3) = 16$ et $f(13) = 66$.

1) Déterminer l'expression réduite de la fonction f
2) Déterminer $f(6)$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$, inconnue x.

Exercice 10 — représentations. Représenter les fonctions affines données par leur expression réduite.

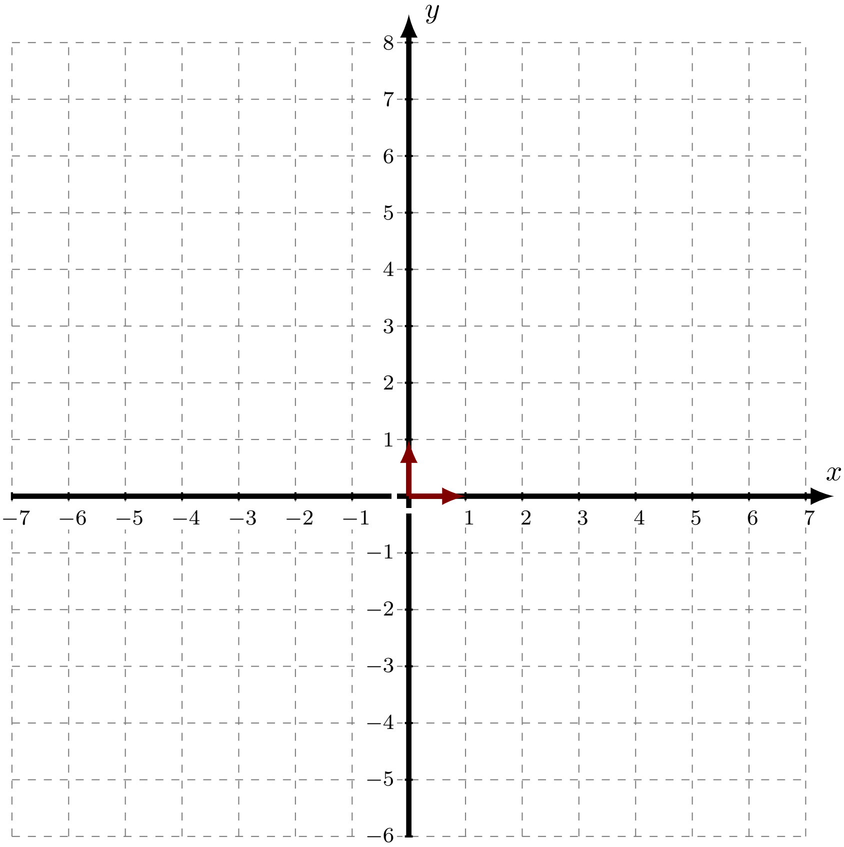
$f_1(x) = x$

$f_2(x) = -x + 4$

$f_3(x) = \frac{2}{3}x + 4$

$f_4(x) = -\frac{3}{2}x - 2$

$f_5(x) = \frac{1}{7}x - 4$



Exercice 11 — équations réduites. Pour chacune des droites ci-dessous, préciser celles qui représentent une fonction affine, et donner son équation réduite.

d_1 :

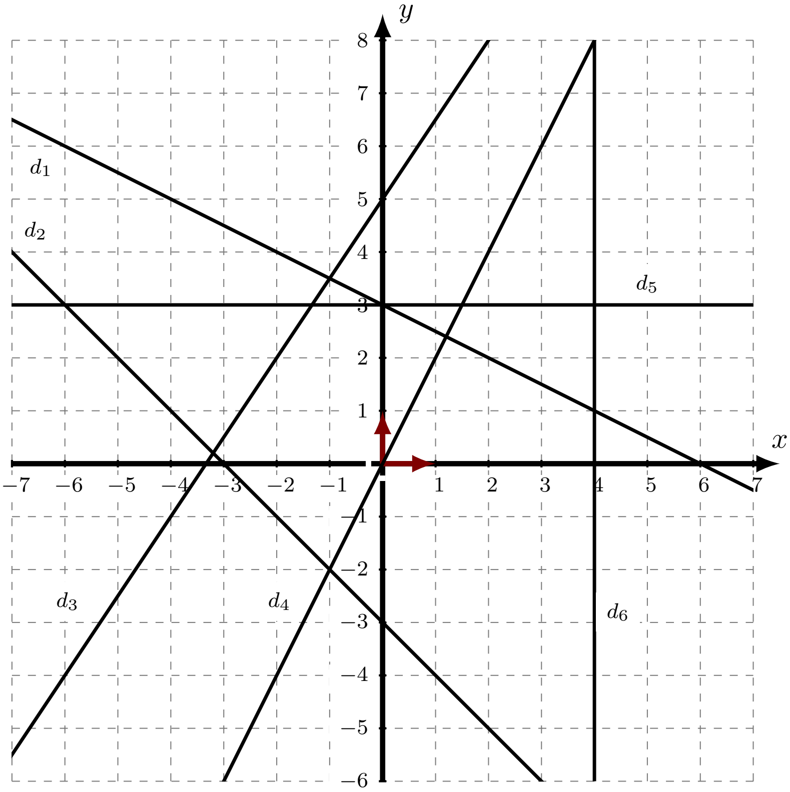
d_2 :

d_3 :

d_4 :

d_5 :

d_6 :



Exercice 12 Déterminez l'équation réduite de la droite D dans chacun des cas suivants.

1) $D = (OA)$ avec $A(-7; -21)$ et $O(0; 0)$.

2) $D = (AB)$ avec $A(-2; 3)$ et $B(3; -1)$.

3) $D = (AB)$ avec $A(3; -2)$ et $B(-1; 3)$.

4) $D = (AB)$ avec $A(-2, 1)$ et $B(1, 3)$.

Exercice 13 Résoudre l'équation demandée et compléter le tableau de signe des fonctions affines suivantes.

$2x + 3 = 0$

$-5x + 9 = 0$

x	
$f(x) = 2x + 3$	

x	
$g(x) = -5x + 9$	

$-\dfrac{3}{5}x - 2 = 0$

$\dfrac{3}{7}x - 2 = 0$

x	
$h(x) = -\dfrac{3}{5}x - 2$	

x	
$i(x) = \dfrac{3}{7}x - 2$	

Exercice 14 Complétez le tableau de variation des fonctions affines suivantes.

x	
$f(x) = 4x + 3$	

x	
$f(x) = -2x + 10$	

x	
$f(x) = -2x - 2$	

x	
$f(x) = 5x + 1$	

x	
$f(x) = -\dfrac{3}{4}x + 2$	

x	
$f(x) = \dfrac{5}{3}x + 1$	

x	
$f(x) = \dfrac{4}{5}x + 3$	

x	
$f(x) = -\dfrac{10}{7}x + 1$	

Exercice 15 Proposer différentes fonctions f_1 et f_2 dont les tableaux de signes vérifient :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
signe de $f_1(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $f_2(x)$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
signe de $f_3(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$+\frac{3}{11}$		$+\infty$
signe de $f_4(x)$		$+$	0	$-$	

6.3 Approfondissement : représentations d'inéquations dans le plan

Une droite non verticale d'équation $\mathscr{D}\colon y = mx + p$ partage le plan en 3 parties :

- Les points $M(x;y) \in \mathscr{D}$ dont les coordonnées vérifient l'équation $y = mx + p$.
- Les points $P(x;y)$ dont les coordonnées vérifient l'inéquation $y < mx + p$ qui en dessous de la droite $\mathscr{D}$
- Les points $Q(x;y)$ dont les coordonnées vérifient l'inéquation $y > mx + p$ qui au dessus de la droite $\mathscr{D}$

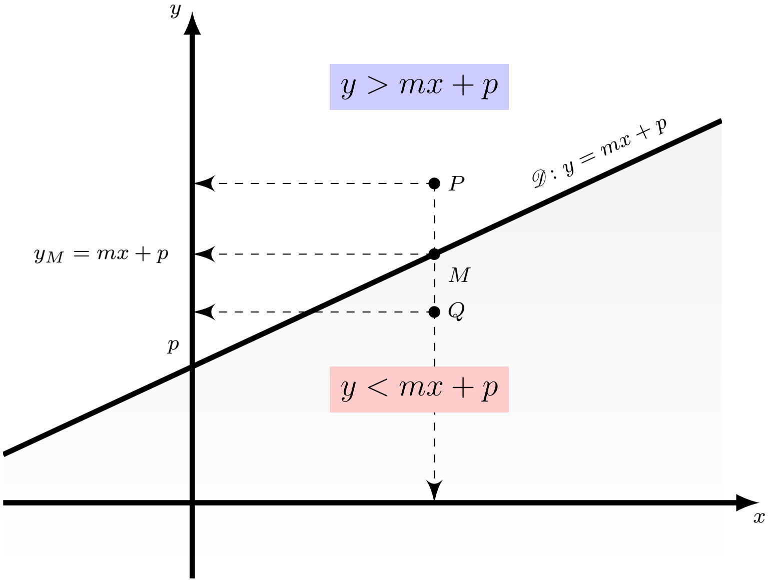
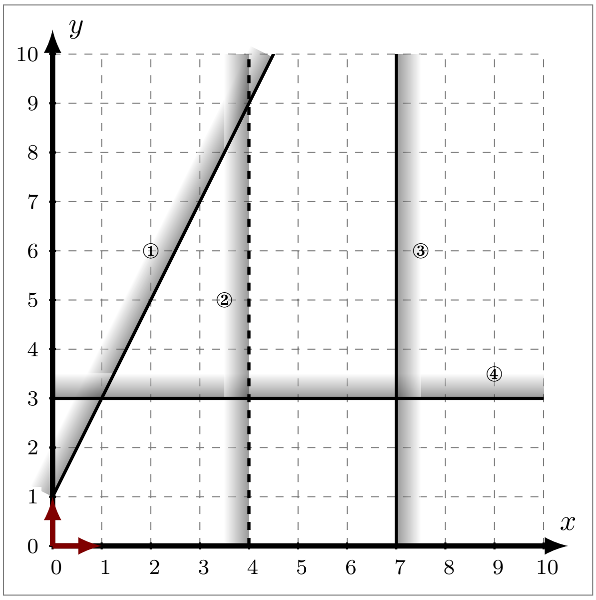


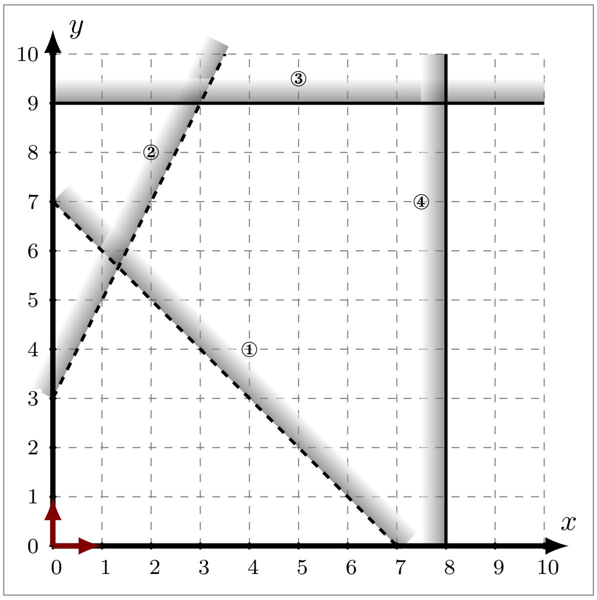
Figure 6.2

6.3.1 Exercices : représentations d'inéquations dans le plan

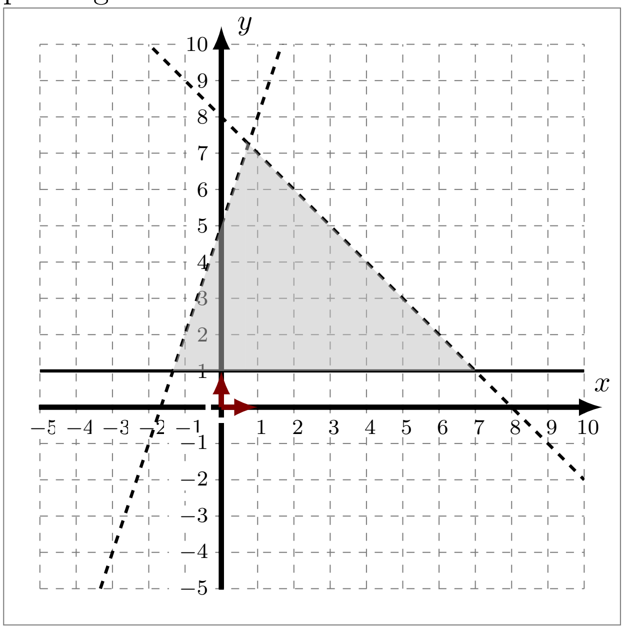
■ **Exemple 6.1** Faire correspondre chaque équation à un demi-plan délimité par une droite.

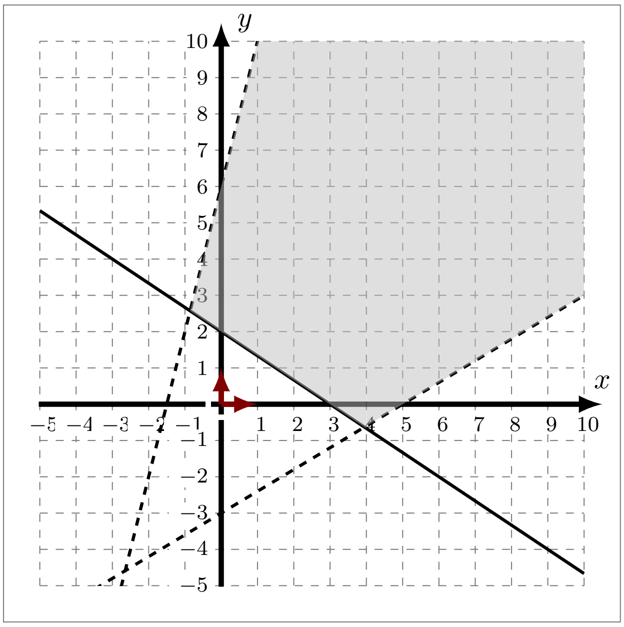
$7 \leqslant x \qquad y \geqslant 3 \qquad x < 4 \qquad y \geqslant 2x+1 \qquad 9 \leqslant y \qquad x \leqslant 8 \qquad y+x > 7 \qquad y > 2x+3$





Exercice 16 Préciser pour chaque graphe, les inéquations vérifiées par les coordonnées des points de la partie grise.

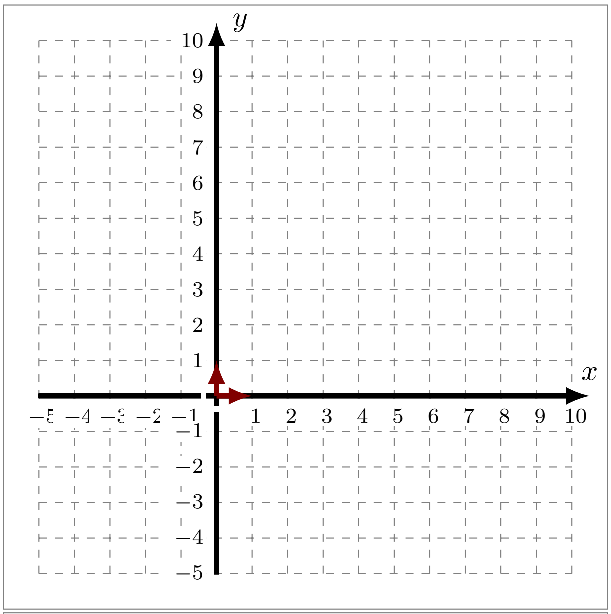


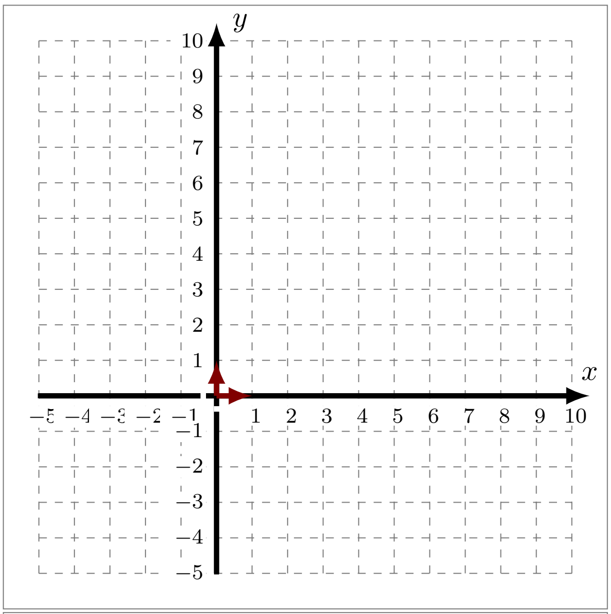


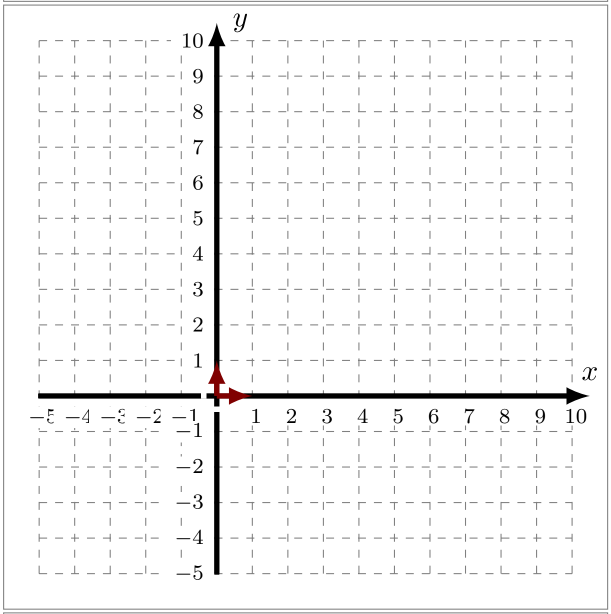
Exercice 17

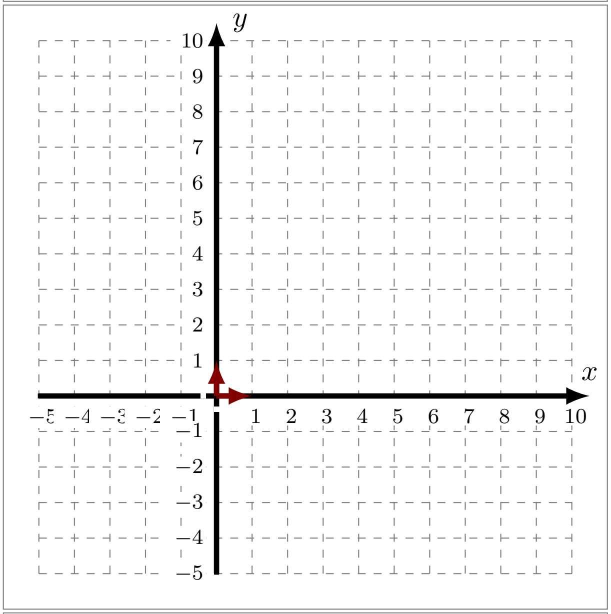
Pour chacune des questions suivantes, colorier en gris la partie du plan définie par les 3 inéquations.

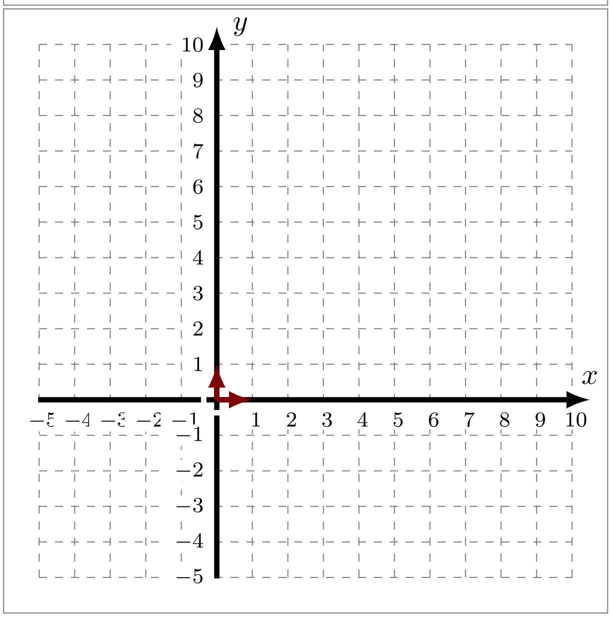
a) $x < 9$; $y \geqslant 5$ et $y \geqslant x$.
b) $x \geqslant -1$, $y < 2$ et $y \geqslant x-3$.
c) $y \geqslant -x$, $-3 < x \leqslant 1$.
d) $5 > x$, $y \leqslant 2x$ et $y + x \geqslant 7$.
e) $3 < x$, $1 < x$ et $2x + y \leqslant 8$.
f) $4x + 3y < 12$, $y \leqslant 2x + 6$ et $x \leqslant -2$.

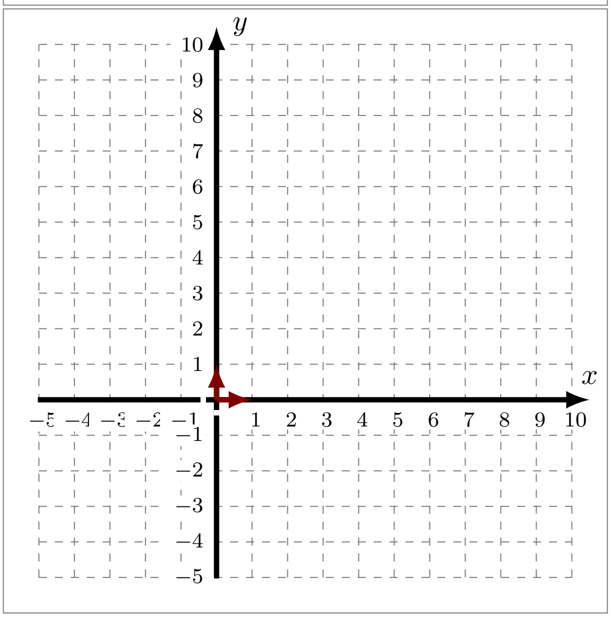

y
x
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


y
x
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


y
x
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


y
x
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


y
x
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


y
x
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

6.4 Club maths : un problème d'optimisation linéaire

Un fabriquant d'alimentation animale souhaite produire un mélange destiné à des vaches laitières. Le mélange doit contenir deux ingrédients 1 et 2, complétés par un ingrédient 3 pour donner du volume.

Un kg de produit doit offrir un apport **minimum** des nutriments A, B, C et D selon le tableau ci-contre :

Nutriments	A	B	C	D
g	90	50	20	2

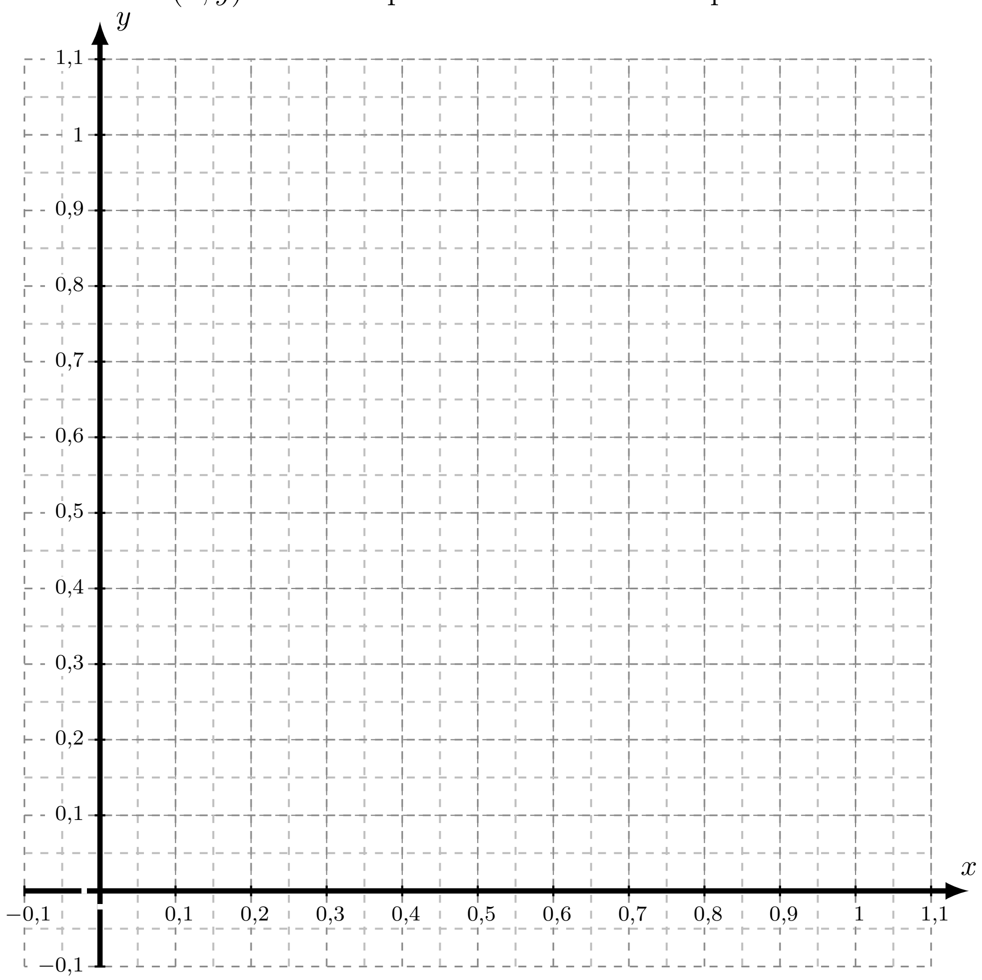
Le tableau ci-dessous présente les apports et coûts pour 1 kg d'ingrédients 1, et 1kg d'ingrédient 2. On néglige le coût et les apports en nutriments de l'ingrédient 3.

	A (en g)	B(en g)	C(en g)	D(en g)	Coût en €
Ingrédient 1	100	80	40	10	40
Ingrédient 2	200	150	20	-	60

On pose : x la masse en kg d'ingrédient 1 dans 1kg de mélange, et y celle de l'"ingrédient 2.

> Quelles doivent être les valeurs de x et y pour satisfaire les exigences de nutriments ? Si plusieurs solutions sont possibles, comment choisir un couple qui minimise les coûts de production ?

1) Expliquer pourquoi $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$.
2) Expliquer pourquoi $x + y \leqslant 1$.
3) Justifiez que pour satisfaire l'apport de nutriment A, x et y vérifient $100x + 200y \geqslant 90$.
4) Donnez trois autres inéquations vérifiées par x et y. puis coloriez les parties du repère ou le couple de coordonnées $(x; y)$ ne vérifie pas les contraintes des questions 1 à 3.



5) Nous souhaitons trouver une solution acceptable qui minimise le coût opérationnel.
   a) Vérifiez que $x = 0{,}4$ et $y = 0.3$ est une solution acceptable. Quel est le coût d'1 kg de ce mélange.

   b) Exprimer en fonction de x et y le coût de revient de 1 kg de ce mélange.

   c) Représenter sur le repère l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ tels que le coût de revient est égal à 66 € par kg .

   d) Même question si le coût de revient est égal à 42 € par kg .

   e) Même question si le coût de revient est égal à 18 € par kg . Justifiez qu'il n'est pas possible de satisfaire les contraintes en nutriments en même temps qu'un coût de revient du kilogramme à 18 €.

   f) Décrire l'ensemble des points dont les coordonnées $(x; y)$ correspondent à un même coût de mélange c.

   g) Pouvez-vous déterminer par lecture graphique les valeurs du couple $(x; y)$ pour lesquelles le coût par kilo est minimal ?

   h) Expliquez comment retrouver le résultat précédent par le calcul.

Cette méthode d'optimisation a été utilisée pour la première fois dans l'optimisation de la production de contreplaqué en 1938 par Leonid Kantorovitch (1912-1986). Kantorovitch est le seul chercheur soviétique à avoir reçu un prix Nobel d'économie pour ses contributions à la théorie de l'allocation des ressources.

L'américain George Dantzig (1914-2005) publiera l'algorithme du Simplexe en 1947 qui permet de calculer la solution optimale avec plus de variables qye 2.

6.5 AP : Fonctions Affines

Exercice 18 — je connais les propriétés clefs de mon cours.

1) Une fonction affine est une fonction définie sur .... par une expression de la forme $f(x) =$.......

Si le coefficient de x est .... alors la fonction f est strictement croissante.

Si le terme constant vaut 4 alors $f(0) =$...

La représentation graphique de f est ....

$A(5\ ;\ 4) \in D_f$ signifie $f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots.$

$\dfrac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B}$ est le .... de f entre ....

Le .... d'une fonction affine est toujours égal au coefficient de x.

2) Pour g définie sur ..... par $g(x) = 3x - 5$, le coefficient de x est ....., le terme constant est .....

Sans calculer $g(1)$ ni $g(10)$, je sais que $g(1) \ldots g(10)$ car la fonction g est .... ssante.

Sans calculer $g(1)$ ni $g(10)$, je sais que $\dfrac{g(1) - g(10)}{1 - 10} =$..

L'image de 3 par g est $g(\ldots\ldots) =$...

La représentation graphique de g est une droite D_g .... d'équation ....

$B(1\ ;\ -2) \in D_g$ car ....

3) Si le coefficient de x est $-\dfrac{2}{3}$ et le terme constant est 1 alors la fonction affine est $h(x) =$...........

Sans calculer $h(-1)$ ni $h(-10)$ je sais que $h(-1) \ldots\ldots h(-10)$ car h est .... ssante.

Sans calculer $h(-1)$ ni $h(-10)$, je sais que $\dfrac{h(-1) - h(-10)}{-1 - (-10)} =$ ....

L'image de -3 par h est $h(\ldots\ldots) =$...

La représentation graphique de h est une droite D_h .... d'équation ....

$C(0\ ;\ \ldots\ldots) \in D_g$ car ....

On dit que 1 est .... de D_h.

4) Les points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation $y = 3x - 2$ forment ....

.... de pente .... et d'ordonnée à l'origine ....

5) La droite d: $x = 1$ est une droite .... Elle .... représente .... une fonction affine.

Exercice 19 Soit la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{3}x + 5$.

Déterminer l'image de -6 :

Résoudre l'équation $f(x) = 0$:

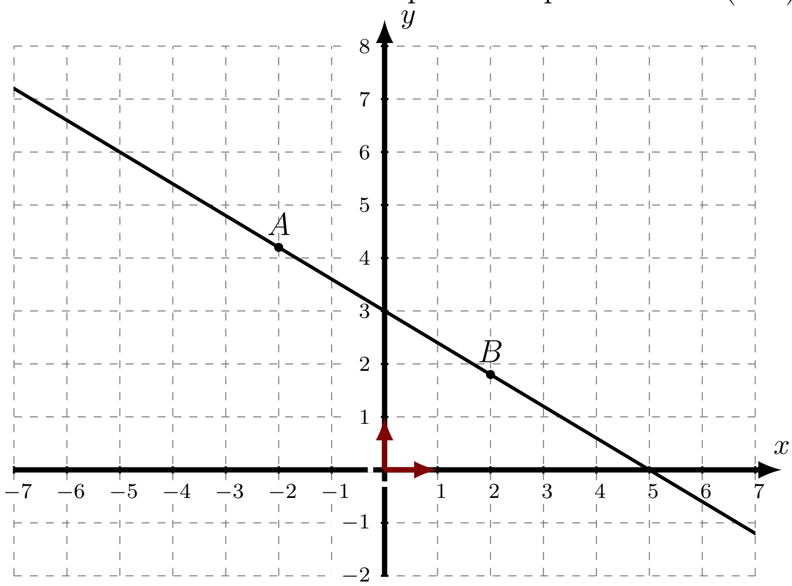
$A(0\ ;\ \ldots) \in D_f$ car ....

Sans calculs supplémentaires comparer :

$f(5) \ldots\ldots f(12)$ et $f(-3) \ldots\ldots f(-13)$

Sans calculs supplémentaires compléter :
$\dfrac{f(10) - f(\ldots)}{\ldots - 1} = \ldots$

Exercice 20 Soit la fonction représentée par la droite (AB).



1) (AB) représente une fonction affine f car ....

On note $f(x) = mx + p$.

2) Déterminer par lecture graphique :

L'image de 0 : $f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

L'antécédent de 0 : $f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

L'antécédent de 6 : $f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

$m = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$p = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3) Déterminer par le calcul les coordonnées de A et B :

Exercice 21 Soit la fonction affine d'expression $f(x) = mx + p$ vérifiant $f(5) = 2$ et $f(-2) = 1$.
Complétez pour retrouver l'expression de f.

Méthode 1

$f(5) = 2$ donc $\ldots m + p = \ldots$

$f(-2) = 1$ donc $\ldots m + p = \ldots$

Je résous le système :

Pour tout x : $f(x) = \ldots x + \ldots$.

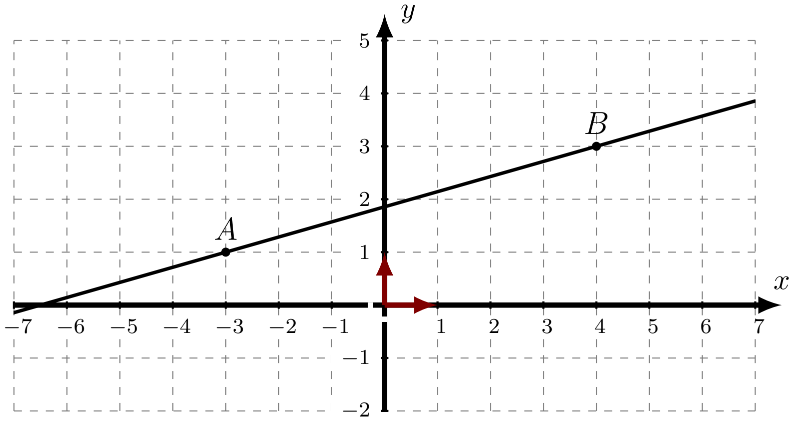
Méthode 2 *Je calcule le taux de variation m :*

J'écris que la variation des images est proportionnelle à la variation des antécédents

Pour tout x : ....$= m($..............$)$:

Pour tout x : $f(x) = \ldots x + \ldots$.

Exercice 22 Soit la fonction représentée par la droite (AB).



1) (AB) représente une fonction affine f car ....

On note $f(x) = mx + p$.

2) Compléter par lecture graphique :

$A(\ldots\ ;\ \ldots)$ donc $f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

$B(\ldots\ ;\ \ldots)$ donc $f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

3) En déduire l'expression de la fonction affine f.

4) Placer sur (AB) le point C d'abscisse 0. Déterminer par le calcul son ordonnée.

5) Placer sur (AB) le point D d'ordonnée 0. Déterminer par le calcul son abscisse.

6) Le point $E(100\ ;\ 30)$ est (au dessus/sur/en dessous) de la droite représentant f car ....

Exercice 23

Soit le tableau de signe d'une fonction affine f d'expression $f(x) = mx + p$. Cochez les bonnes réponses.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

	Vrai	Faux
1/ $f(0) = 5$	☐	☐
2/ $f(-10) > 0$	☐	☐
3/ $f(10) > 0$	☐	☐
4/ $p > 0$	☐	☐
5/ $m > 0$	☐	☐

Exercice 24

Dresser le tableau de signe de la fonction affine f d'expression $f(x) = \dfrac{2}{5}x + 3$.

x	$-\infty$	$\cdots$	$+\infty$
signe de $f(x)$			

Exercice 25 — Équations réduites de droites. http://bit.ly/3WmXDYp