Chapitre

Fonctions de référence 15

15.1 Fonction carré

Définition 15.1 La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Un carré est toujours positif ou nul : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geqslant 0$.

Proposition 15.1 — sens de variation. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; -\infty[$:

- Si $a < b \leqslant 0$ alors $a^2 > b^2 \geqslant 0$
- Si $0 \leqslant a < b$ alors $0 \leqslant a^2 < b^2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$+$	

Figure 15.1 – Tableau de variation de la fonction carré

Démonstration.

$\blacksquare$

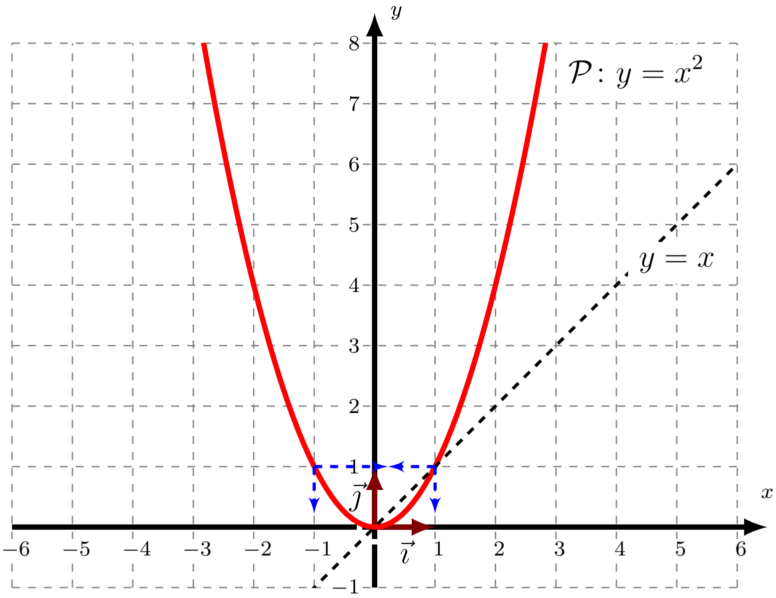
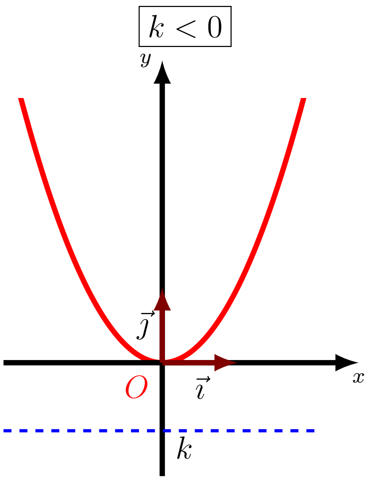
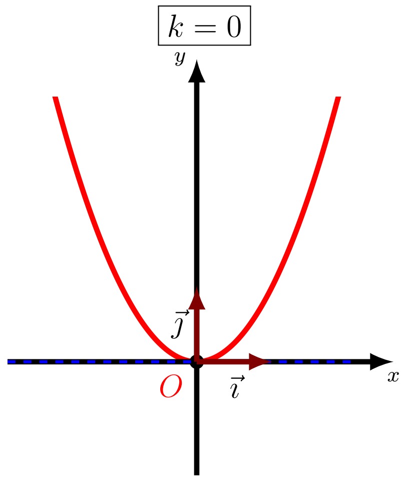


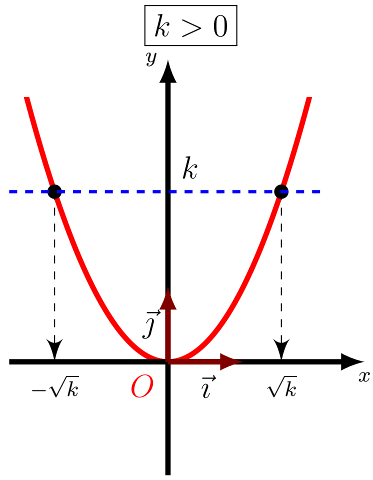
Figure 15.2 – La courbe représentative de la fonction carré est la **parabole** d'équation $\mathscr{P}: y = x^2$.



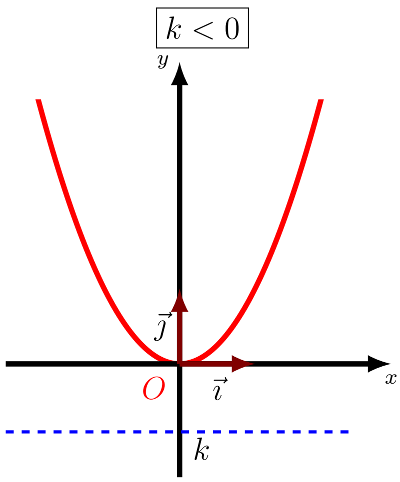
pas de solution $S = \emptyset$



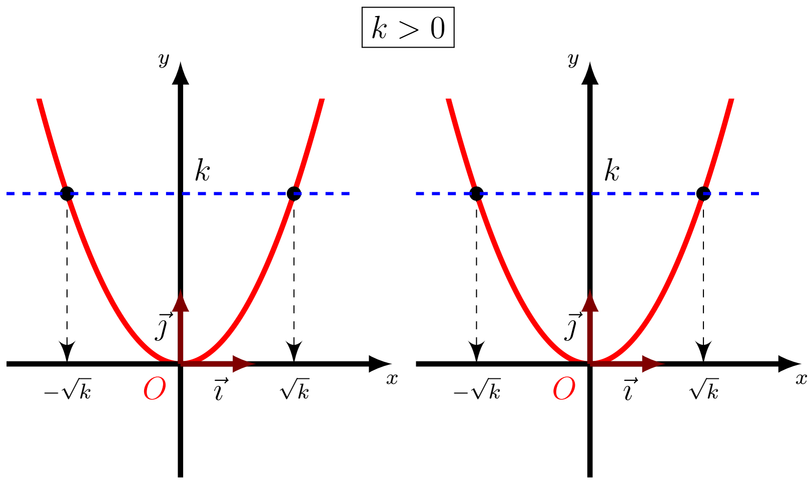
solution unique $S = \{0\}$



2 solutions $S = \{-\sqrt{k}; \sqrt{k}\}$



L'inéquation $x^2 \leqslant k$ n'a pas de solution : $S = \emptyset$
L'inéquation $x^2 \geqslant k$ est toujours vraie : $S = \mathbb{R}$



L'inéquation $x^2 \leqslant k$ a pour ensemble solution $S = [-\sqrt{k}; \sqrt{k}]$
L'inéquation $x^2 \geqslant k$ a pour ensemble solution $S =]-\infty; -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}; +\infty[$

Exercices : Fonction carré

Exercice 1 — calculer les images et antécédents par une fonction carré.
f est la fonction carré définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$
a) Sans calculatrice. Calculer (et simplifier) les images de $-\sqrt{6}$, 10^{-2}, $\frac{7}{13}$ et $1-\sqrt{2}$.
b) Quels sont les antécédents éventuels de 10 ? de 0 ? de -4 ?

Exercice 2 — Révisions. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes en isolant x^2.

a) $x^2 = 9$ | b) $3x^2 = 5$ | c) $2x^2 - 5 = 3$ | d) $1 - 4x^2 = 5$ | e) $3x^2 - 5 = 13$

Exercice 3 — Résoudre des inéquations de la forme $f(x) < k$. En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carré, donner les solutions des inéquations suivantes d'inconnues x :

a) $x^2 \geqslant 9$
b) $x^2 > 3$
c) $-2 < x^2$
d) $x^2 < -5$
e) $x^2 > -5$
f) $5 \leqslant x^2 \leqslant 7$
g) $12 < x^2 < 18$
h) $0 \leqslant x^2 < 27$
i) $-5 < x^2 \leqslant 2$

Exercice 4 — Utiliser le sens de variation de la fonction carré. Comparer et encadrer si possible a^2 et b^2 dans les cas suivants :

a) Si $0 \geqslant a > b$ alors .... a^2 ... b^2 ....
b) Si $a < b < -2$ alors .... a^2 ... b^2 ......
c) Si $a < b < 10$ alors .... a^2 ... b^2 ....
d) Si $a < 0 < b\sqrt{7}$ alors .... a^2 ... b^2 ....

■ Exemple 15.2 — Utiliser le sens de variation de la fonction carré.
Soit a un nombre réel. En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carré ou de son tableau de variation, encadrer au mieux a^2 dans chaque cas suivant :

$2\sqrt{3} < a \leqslant 4$ $\qquad$ $0 < a < 3$ $\qquad$ $-5 < a < 3$

Exercice 5 Mêmes consignes

a) $a > 3\sqrt{2}$
b) $-2 < a \leqslant 0$
c) $-5 \leqslant a < -2$
d) $0 < a < 2\sqrt{7}$
e) $3\sqrt{2} < a < 2\sqrt{7}$
f) $a < -5$
g) $-5 < a < 0$
h) $-5 < a$

Exercice 6 — Comparer x^2 et x pour différentes valeurs de $x \in \mathbb{R}$.
a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 > x$.
b) Sans calculs supplémentaires donner l'ensemble solution de $-x^2 > -x$.
c) Si $x > 1$, ranger dans l' ordre croissant : 0, $-x$, x, x^2 et $-x^2$.
d) Si $0 < x < 1$, ranger dans l' ordre croissant : 0, $-x$, x, x^2 et $-x^2$.

15.2 Fonction cube

Théorème 15.3 — Identités remarquables avec des cubes.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Démonstration.

■

Théorème 15.4 — Identités remarquables avec des cubes.

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

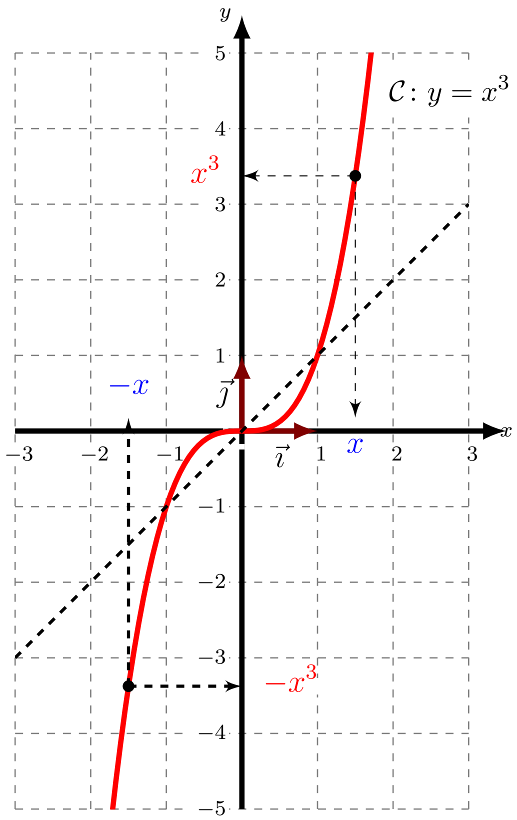
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Démonstration.

■

Définition 15.2 La fonction cube est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ d'expression $f(x) = x^3$

Proposition 15.5 — sens de variation. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^3$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

Figure 15.3 – Tableau de variation de la fonction cube

Théorème 15.6 — équation $x^3 = k$ d'inconnue x. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'équation $x^3 = k$ admet une unique solution notée $k^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{k}$.

■ **Exemple 15.7** Résoudre graphiquement l'équation $x^3 > 2$ d'inconnue x

Exercices : Fonction cube

Exercice 1 — calculer les images et antécédents par une fonction cube.

f est la fonction cube définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$

a) Sans calculatrice. Calculer (et simplifier) les images de 2, -3, 4 et -5.

b) Quels sont les antécédents éventuels de -8 ? de 125 ? de 9 ? de -9 ?

■ **Exemple 15.8 — Résoudre équations et inéquations en isolant x^3.**

$x^3 > 27$ $\qquad$ $3x^3 + 12 \geqslant 204$ $\qquad$ $-3x^3 + 15 \geqslant 207$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en isolant x^3.

(E_1) $x^3 = 9$ | (E_2) $10x^3 + 8 = -632$ | (E_3) $-9x^3 - 1 = 575$ | (E_4) $3x^3 = 5$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes en isolant x^3.

(I_1) $x^3 > 9$	(I_3) $3x^3 > 375$	(I_5) $-9x^3 - 1 < 575$
(I_2) $x^3 \leqslant 27$	(I_4) $2x^3 - 14 > -30$	(I_6) $-27 > x^3 \geqslant -64$

Exercice 4 — Utiliser le sens de variation de la fonction cube. Soit a un nombre réel. En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carré ou de son tableau de variation, encadrer au mieux a^3 dans chaque cas suivant :

a) $a \geqslant -5$	c) $-3 \leqslant a < 2$	e) $2 \leqslant a \leqslant 5$	g) $-5 < 2a \leqslant 1$
b) $a < 2$	d) $-2 < a \leqslant 5$	f) $-2 > a \geqslant -5$	h) $5 > -3a - 1 > 1$

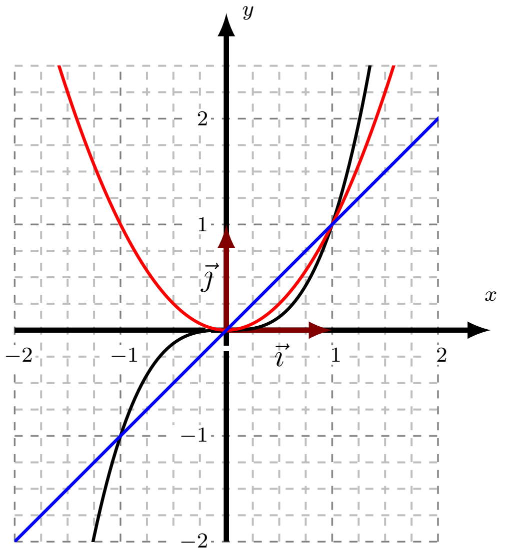
Exercice 5 — Comparer x^3, x^2 et x pour différentes valeurs de $x \in \mathbb{R}$.

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3 > x^2$.

b) Si $x > 1$, ranger dans l' ordre croissant :0, x, 1, x^3 et x^2.

c) Si $0 < x < 1$, ranger dans l' ordre croissant 0, x, 1, x^3 et x^2.

d) Ci-contre les représentations graphiques des fonctions $f\colon x \mapsto x^2$, $g\colon x \mapsto x$ et $h\colon x \mapsto x^3$. Associer chaque courbe à la fonction correspondante.



15.3 Fonction inverse

Définition 15.3 La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; -\infty[$ par

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = \frac{1}{x}$$

Théorème 15.9 Pour $x \neq 0$, l'image de x par f est aussi l'antécédent de x par f. En effet $f(f(x)) = x$.

Proposition 15.10 — sens de variation. f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]0; -\infty[$ et : $]-\infty; 0[$:

$$\text{Si} \quad a < b < 0 \quad \text{alors} \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$$

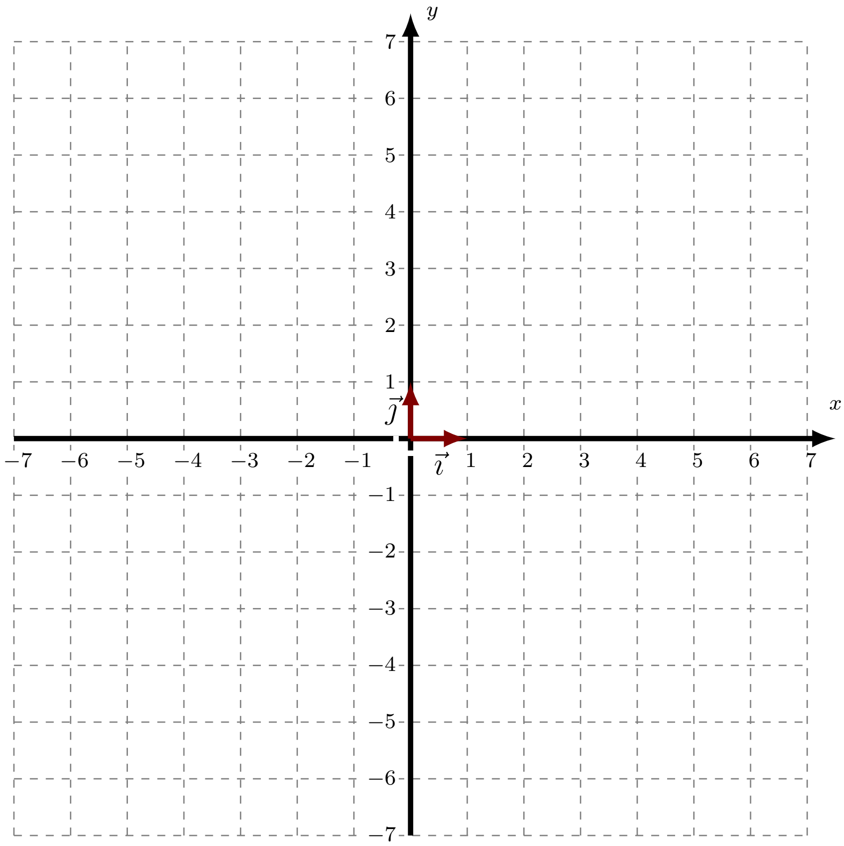
$$\text{Si} \quad 0 < a < b \quad \text{alors} \quad 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

Démonstration. ∎

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$
signe de $f(x)$	$-$	‖	$+$

Figure 15.4 – Tableau de variation de la fonction inverse

Figure 15.5 – La courbe représentative de la fonction inverse dans un repère orthonormé est l'**hyperbole** d'équation $\mathscr{C} : y = \dfrac{1}{x}$ (on peut aussi dire $\mathscr{C} : xy = 1$)



■ **Exemple 15.11** Résoudre graphiquement les inéquation $\dfrac{1}{x} > 2$ et $\dfrac{1}{x} > -3$ d'inconnue x

x	$-\infty$ $+\infty$
signe de	
signe de	
signe de	

Exercices : Fonction inverse

Exercice 1 — calculer les images et antécédents par une fonction inverse.
f est la fonction inverse définie dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

a) Sans l'aide de la calculatrice, exprimer l'image par la fonction inverse de chacun des nombres réels suivants sans laisser de racine carrée au dénominateur : $2\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Exprimer l'antécédent des nombres suivants par la fonction inverse sous la forme d'un entier ou d'une fraction d'entiers : $\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{2}$, 10^{-2}, $0,001$, -10^{3} et -10^{-4}.

■ **Exemple 15.12 — Résoudre équations et équations en isolant $\frac{1}{x}$.**

$\dfrac{1}{x} = 12$ $\qquad$ $\dfrac{3}{x} = -11$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x} + 8 = \dfrac{10}{13}$ $\qquad$ $40 - \dfrac{14}{x} = 20$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en isolant $\frac{1}{x}$.

(E_1) $\frac{1}{x} = 2$
(E_2) $\frac{1}{x} = \frac{-1}{7}$
(E_3) $\frac{15}{x} = \frac{-5}{17}$
(E_4) $\frac{2}{x} = 26$
(E_5) $\frac{-7}{x} = 2$
(E_6) $\frac{1}{x} - 11 = \frac{10}{23}$

■ **Exemple 15.13 — Résoudre équations et inéquations en isolant $\frac{1}{x}$.**

$\dfrac{1}{x} > 5$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x} \leqslant 2$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x} \leqslant -3$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x} \geqslant -\dfrac{1}{2}$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes en isolant $\frac{1}{x}$.

(I_1) $\frac{1}{x} \geqslant 7$
(I_2) $\frac{1}{x} < -\frac{3}{2}$
(I_3) $\frac{1}{x} > -2$
(I_4) $\frac{1}{x} > -\frac{2}{5}$
(I_5) $\frac{1}{x} \leqslant 2$
(I_6) $\frac{1}{x} \leqslant \frac{2}{5}$

Exercice 4 — Utiliser le sens de variation de la fonction inverse. En s'aidant de la courbe de la fonction inverse ou de son tableau de variation donner un encadrement de $\frac{1}{x}$ dans chaque cas :

a) $x > 3$
b) $x > \frac{2}{3}$
c) $3 > x > 0$
d) $2 \leqslant x < 5$
e) $\frac{2}{5} < x \leqslant \frac{7}{8}$
f) $-5 \leqslant x < -2$
g) $-4 \leqslant x < 0$
h) $x \leqslant -8$
i) $x \leqslant -\frac{2}{3}$
j) $-4 \leqslant x < 0$
k) $-4 < x$
l) $x < 0$

15.4 Fonction racine carrée

Définition 15.4 La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f\colon [0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = \sqrt{x}$$

Sa représentation graphique est la courbe « $\mathscr{C} : y = \sqrt{x}$ »

Proposition 15.14 — sens de variation. La fonction racine carrée est **strictement croissante** sur $[0;+\infty[$.

$$\text{Si} \qquad 0 \leqslant a < b \qquad \text{alors} \qquad 0 \leqslant \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

Démonstration.

■

Figure 15.6 – Tableau de variation de la fonction racine carrée

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	
Signe de $f(x)$