Chapitre

7 Généralités sur les fonctions

■ **Exemple 7.1** discussion basée sur https://student.desmos.com/join/wkzwdt?lang=fr

R Page Wikipedia sur l'histoire du concept de fonction.

7.1 Définition

Un couple de 2 nombres x et y se note (x, y) (parenthèses et une virgule pour séparer ses deux composants).
Le 1^{er} nombre x s'appelle l'**abscisse**. Le 2^{nd} y s'appelle l'**ordonnée**.[1]

Définition 7.1 — fonction identifiée à son graphe. Une fonction f est un **ensemble de couples** (x, y), tel qu'il n'y ait pas 2 couples ayant la même abscisse mais des ordonnées différentes.
Pour un couple (x, y) de la fonction, on dit :

- « **ordonnée** y **est l'image de l'abscisse** x »
- « **l'abscisse** x **est un antécédent de l'ordonnée** y ».

Notation 1 « $f : x \mapsto y$ » à lire « f associe à la valeur x l'ordonnée y »

Notation 2 « $y = f(x)$ » à lire « y égal à f de x », notation due à Euler vers 1850

[1] Utiliser le site https://mathix.org/fonction/ pour illustrer les différentes représentations de fonctions

7.2 Représentations de fonctions

7.2.1 Par un tableau de valeurs

On peut représenter l'ensemble des couples (x, y) d'une fonction par un tableau de valeurs en ligne ou en colonne.

Table 7.1 – L'image de -5 par f est 18 : $f(-5) = 18$

x	12	17	-5	-1	9
$f(x)$	-1	9	18	-5	-1

R Questionnaire http://bref.jeduque.net/tr5zuo

7.2.2 Par une représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction f est l'ensemble des points du plan $M(x;y)$ dont le couple de coordonnées vérifient $y = f(x)$ (l'ordonnée de M est l'image de l'abscisse de M par f).

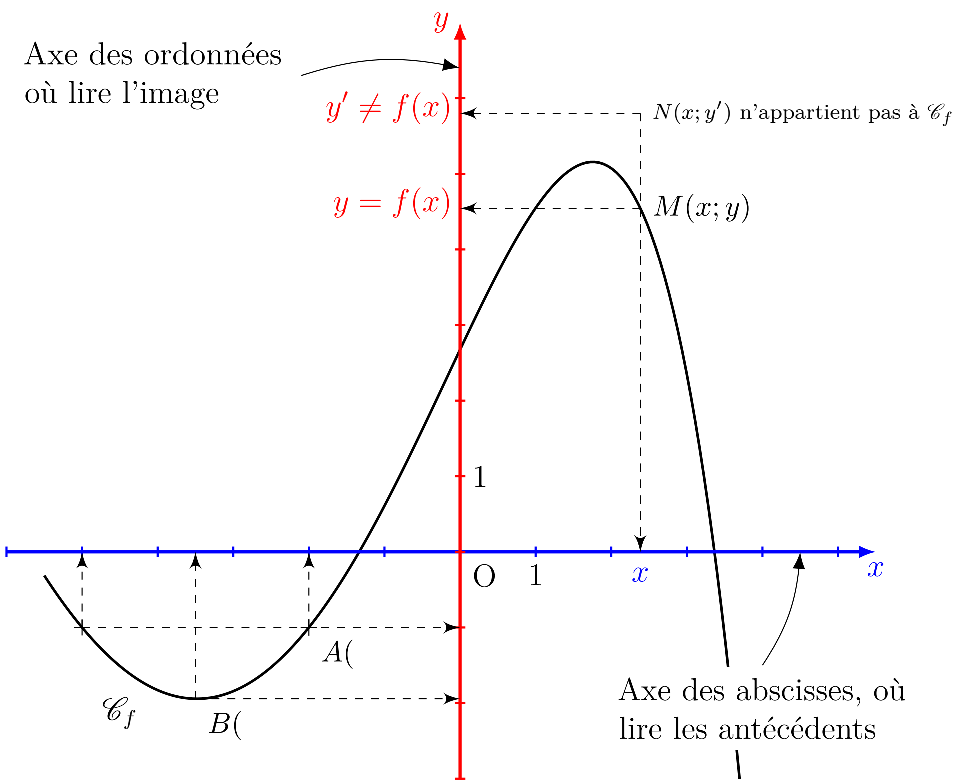


Figure 7.1 – La représentation graphique d'une fonction ne peut pas avoir deux points ayant même abscisse et des ordonnées différentes.

R Lecture d'images, antécédents et mélanges.

7.3 Expressions algébriques de fonctions

Certaines fonctions, se présentent comme un programme de calcul qui permet d'obtenir la valeur de l'ordonnée y lorsque l'on connait la valeur de l'abscisse x. Souvent il s'agit d'une expression algébrique de la variable x.

■ **Exemple 7.2** Soit f la fonction définie par l'expression :

$$f : x \mapsto x^2 \qquad f(x) = x^2$$

$$\begin{aligned}
f : 3 &\mapsto 3^2 = 9 \\
f(3) &= 3^2 = 9 && \text{l'image de 3 par } f \text{ est 9} \\
f : 5 &\mapsto 5^2 = 9 \\
f(5) &= 5^2 = 25 && \text{l'image de 5 par } f \text{ est 25} \\
f : -4 &\mapsto (-4)^2 = 16 \\
f(-4) &= (-4)^2 = 16 && \text{l'image de } -4 \text{ par } f \text{ est 16}
\end{aligned}$$

■ **Exemple 7.3** Soit la fonction $f : x \mapsto 3x + 1$. Pour calculer l'image de 2 par la f on fait

$$f(2) = 3 \times 2 + 1 = 7$$

■ **Exemple 7.4** Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 3x + 2$. L'image de -1 vaut

$$g(-1) = (-1)^2 - 3 \times (-1) + 2 = 6$$

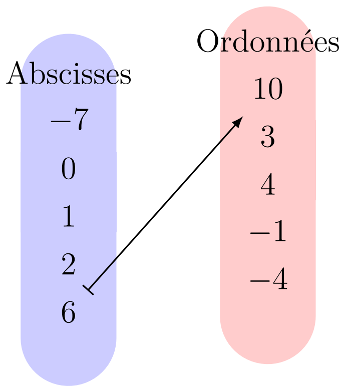
7.4 Exercices

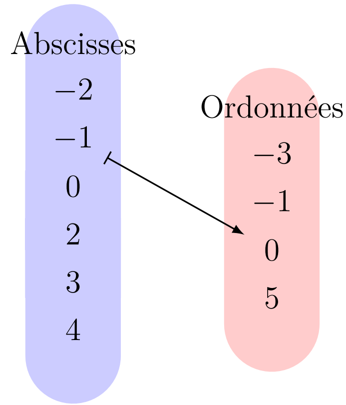
■ Exemple 7.5 — fonction par son graphe.
Soit les ensembles de couples ordonnés suivant :

$f = \{(6,10),(-7,3),(0,4),(6,-4)\}$

$g = \{(-1,0),(0,-3),(2,-3),(3,0),(4,5)\}$

1) Le couple ordonné $(6;10)$ de f est représenté par une flèche partant de 6 et pointant vers 10. Compléter les graphes orientés ci-dessous pour représenter les ensembles f et g.





2) f n'est pas une fonction

g est une fonction.

3) Compléter les pointillés :
   a) $g\colon \ldots \mapsto 0$. $\quad g\colon \ldots \mapsto 0$. $\quad g\colon \ldots \mapsto -3$. $\quad g\colon \ldots \mapsto -3$. $\quad g\colon 4 \mapsto \ldots$.
   b) $g(3) = \ldots$. $\quad g(\ldots) = 0$. $\quad 5 = g(\ldots)$. $\quad \ldots = g(0)$. $\quad -1 = g(\ldots)$.
   c) -3 est ....de 0 par g. $\quad$ 0 a pour ....-3 par g.
   d) -1 est ....de 0 par g. $\quad$ -1 a pour ....0 par g
   e) Les nombres ....ont pour image 0 par g.
   f) Les antécédents de -3 par g sont ....

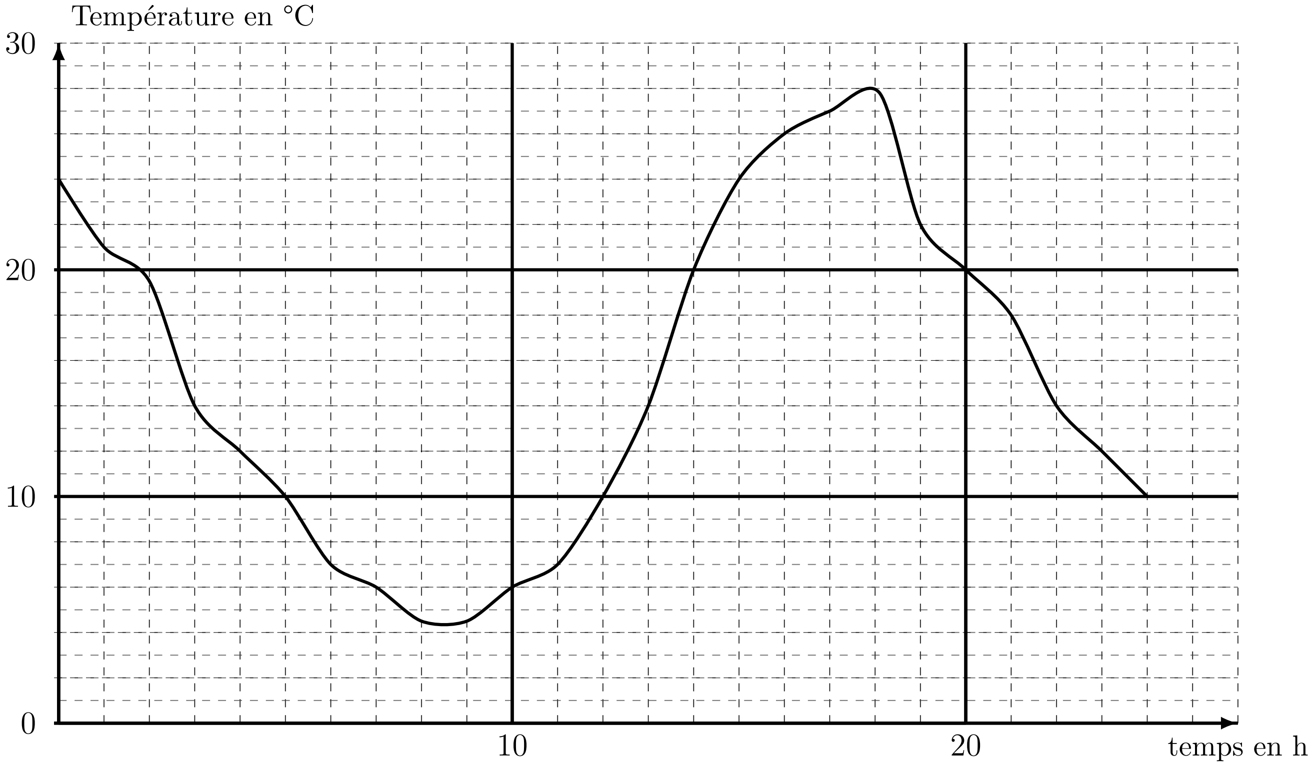
■ Exemple 7.6 — fonction par son tableau de valeurs.

Voici un tableau de valeurs d'une fonction f

x	19	-15	8	-3	9
$y = f(x)$	-15	-2	19	19	8

1) Quelle est l'image de -15 par la fonction f ?
2) Quelle est l'image de 8 par la fonction f ?
3) Déterminer le(s) antécédent(s) de -15 par la fonction f.
4) Déterminer le(s) antécédent(s) de 19 par la fonction f.
5) Compléter : $f(8) = \ldots \qquad f(\ldots) = 8$

■ **Exemple 7.7 — fonction par sa représentation graphique.** On désire mesurer tout au long d'une journée la température extérieure en fonction du temps. Voici la courbe obtenue au bout de 24h consécutives.



La courbe n'a pas de points qui ont la même abscisse mais des ordonnées différentes.
On dit que la température T (l'ordonnée) est une **fonction** de l'heure h (l'abscisse).

1) Quelle grandeur est représentée sur l'axe des abscisses ? . . . .
2) Quelle grandeur est représentée sur l'axe des ordonnées ? . . . .
3) a) Donner l'ordonnée d'un point de la courbe d'abscisse 10 et interpréter le résultat par une phrase. Y a-t'il plusieurs réponses possibles ?
   b) Donner l'ordonnée **du** point de la courbe d'abscisse 14 et interpréter le résultat.
4) Compléter les pointillés :
   - « 12 a pour image . . . par la fonction T » « $T\colon 12 \mapsto \dots$ » « $T(12) = \dots$ »
   - « . . . a pour image . . . par la fonction T » « $T\colon 3 \mapsto \dots$ » « $T(\dots) = \dots$ »
   - « . . . a pour image . . . par la fonction T » « $T\colon \dots \mapsto \dots$ » « $T(5) = \dots$ »
5) a) À quelle(s) heure(s) la température était-elle de 14 °C ? . . . .
   b) Répondre à la question précédente en complétant :
   $T(\dots) = \dots$ $T(\dots) = \dots$ $T(\dots) = \dots$ $T(\dots) = \dots$
   c) À quelle(s) heure(s) la température était-elle de 10 °C ? Répondre en complétant les pointillés avec la précision permise par le graphique.
   $T(\dots) = \dots$ $T(\dots) = \dots$ $T(\dots) = \dots$ $T(\dots) = \dots$

d) À quelle(s) heure(s) la température était-elle de 23 °C ?

$T(\dots) = \dots$ $T(\dots) = \dots$ $T(\dots) = \dots$ $T(\dots) = \dots$

e) À quelle(s) heure(s) la température était-elle de 28 °C ?

$T(\dots) = \dots$ $T(\dots) = \dots$ $T(\dots) = \dots$ $T(\dots) = \dots$

f) À quelle(s) heure(s) la température était-elle de 30 °C ?

$T(\dots) = \dots$ $T(\dots) = \dots$ $T(\dots) = \dots$ $T(\dots) = \dots$

6) On peut représenter certains couples (abscisse, ordonnée) à l'aide d'un tableau de valeurs. Compléter le tableau suivant :

x	0		6		10		18		18,1					
$T(x)$		6		10		10		19	27,8	27,8	16	20	20	20

■ **Exemple 7.8 — fonction définie par un programme de calcul ou une expression.**

1) On donne le programme de calcul suivant qui correspond à une certaine fonction :

— Choisir un nombre
— Multiplier ce nombre par 5
— Ajouter 9 au résultat obtenu

a) Appliquer ce programme de calcul au nombre 3

b) Traduire ce calcul par une phrase contenant le mot image

2) Soit f la fonction définie par l'expression algébrique $f(x) = 5x+9$

a) Calculer l'image de 2

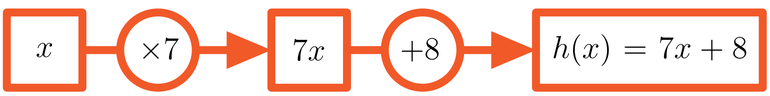
b) Traduire ce calcul par une phrase contenant le mot image

3) Soit g la fonction définie par $g : x \longmapsto \dfrac{5}{6x+2}$

a) Calculer l'image de 9

b) Traduire ce calcul par une phrase contenant le mot image

4) Soit la fonction h définie par le diagramme



a) Calculer $h(7)$

b) Traduire ce calcul par une phrase contenant le mot image

5) Soit la fonction i définie par le diagramme

a) Exprimer l'image $i(x)$ en fonction de x sous forme développée réduite.

b) Calculer $i(-3)$

c) Traduire ce calcul par une phrase contenant le mot image

Exercice 1

Soit la fonction f représentée par le tableau de valeur suivant :

x	0	- 1	4	5	2	- 2	8	3	- 5	1
$f(x)$	- 4	0	0	8	6	- 6	5	14	6	- 6

Pour chaque question vous répondrez en précisant l'égalité $f(\ldots) = \ldots$ correspondante.

1) Donner un antécédent de 8. .... Quelle est l'image de 0? ....
2) Quelle est l'image de 4? .... Donner un antécédent de 14. ....
3) Y a-t-il un nombre du tableau égal à son image? ....
4) Citer des valeurs de x telles que $f(x) = -6$. ....
5) Citer un nombre strictement négatif ayant un antécédent strictement positif. ....
6) Citer deux nombres opposés dont les images sont des nombres opposés. ....
7) Trouver deux nombres a et b image l'un de l'autre par f. ....

Exercice 2

1) On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto -11x^2 - 3x$. Calculer $f(-1)$.
2) On considère la fonction g définie par $g : x \mapsto 4x^2 + 3x + 7$. Calculer $g(3)$.
3) On considère la fonction h définie par $h : x \mapsto (-2x + 3)^2$. Calculer $h(1)$.
4) On considère la fonction i définie par $i : x \mapsto 5x^2 - 9x - 11$. Calculer $i(-2)$.

Exercice 3

Compléter les tableaux de valeurs des fonctions f, g, h et i définies par :

$f : x \mapsto 4x^2 - 2$ $\quad$ $g : x \mapsto 2x^2 + 8$ $\quad$ $h : x \mapsto 9x$ $\quad$ $i : x \mapsto \dfrac{8}{-4x+1}$

x	-2	0	2
$f(x)$			

x	1	2	5
$g(x)$			

x	-3	6	9
$h(x)$			

x	-2	0	2
$i(x)$			

Exercice 4

Associer les fonctions définies par les expressions suivantes avec le bon tableau de valeur, et compléter les. Lesquels sont des tableaux de proportionnalités ?

$A(x) = \dfrac{x+6}{2}$ $\quad$ $B(x) = x^2 + 6$

$C(x) = 2(x+3)$ $\quad$ $D(x) = \dfrac{x}{2} + 6$

$E(x) = 3x^2$ $\quad$ $F(x) = (3x)^2$

$G(x) = (x+6)^2$ $\quad$ $H(x) = x^2 + 6^2$

x	-8	0	1	2
y	100			

x	1	2	3	4
y	3		27	48

x	1	2	3	4
y			81	100

x	0	1	2	3	4
y				81	144

x	0	1	2	3	4
y			10	15	22

x	-5	1	2	3	4
y			10	12	14

x	0	1	2	3	4
y			4		5

x	1	2	3	4
y	6,5	7	7,5	8

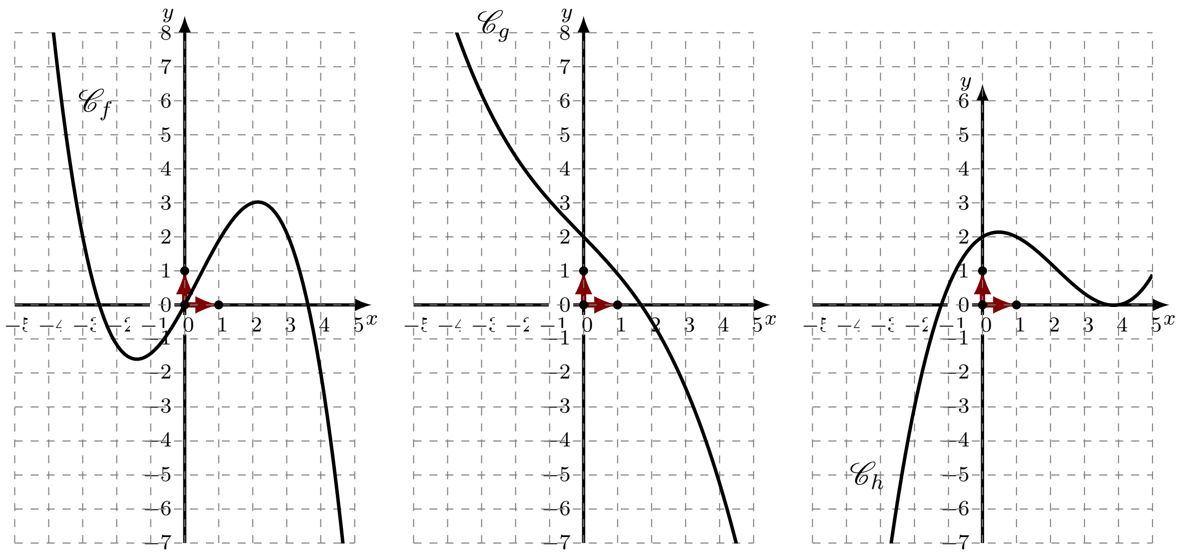
Exercice 5 La distance de freinage d'un véhicule est la distance que le véhicule parcourt entre le moment où le conducteur commence à freiner et le moment où le véhicule est à l'arrêt. La distance de freinage f (mesurée en m) est fonction de sa vitesse v (en km/h). Sur route sèche, elle est donnée par la formule $f(v) = \dfrac{v^2}{155}$.

1) Complète la seconde ligne de ce tableau à l'aide du menu tableau de la calculette:

v en km/h	20	40	60	80	100	120	140	160
$f(v)$								

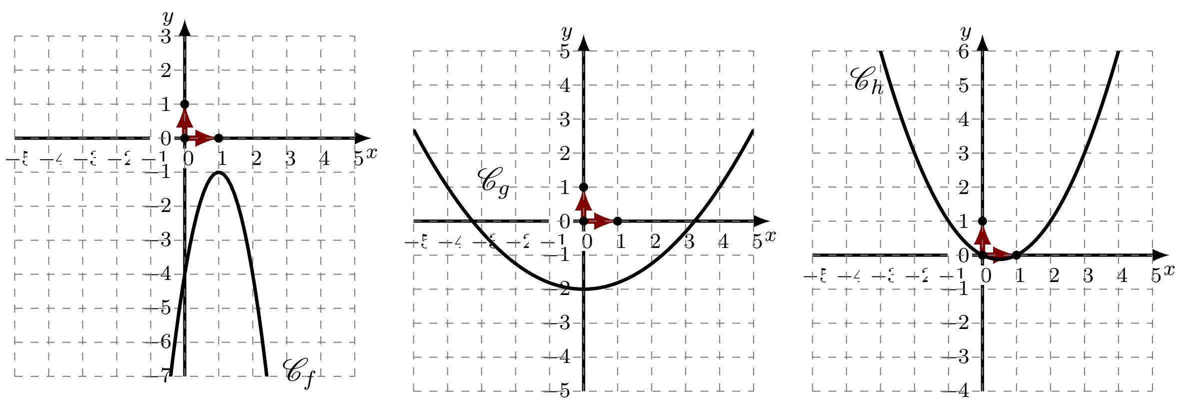
2) Par temps de pluie, la distance de freinage est doublée. Quelle est la distance de freinage par temps de pluie pour un véhicule roulant à 90km/h ?

Exercice 6 Ci-dessous les représentations graphiques des fonctions f, g et h.



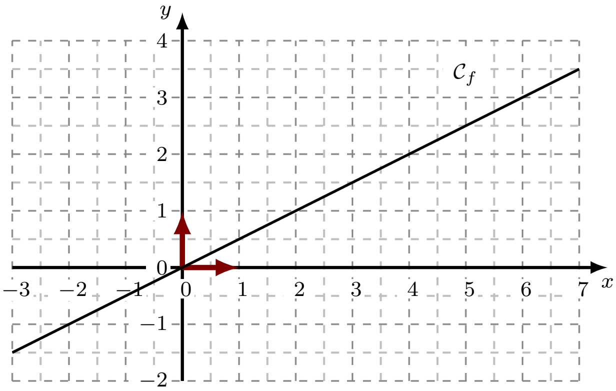
1) Déterminer par lecture graphique les images de -3, de 2 et de 4 par la fonction f.
2) Déterminer par lecture graphique les images de -3, de 0 et de 3 par la fonction g.
3) Déterminer par lecture graphique les images de -2, de 0 et de 4 par la fonction h.

Exercice 7 Ci-dessous les représentations graphiques des fonctions f, g et h.



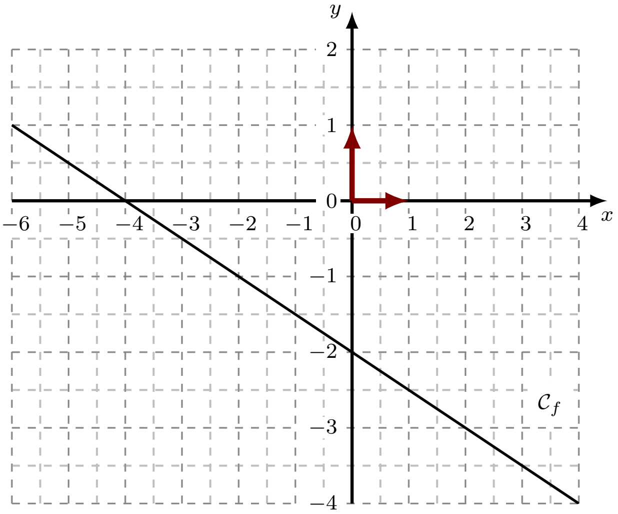
1) Déterminer par lecture graphique le (ou les) antécédent(s) de -1 par cette fonction f.
2) Déterminer par lecture graphique le (ou les) antécédent(s) de 1 par cette fonction g.
3) Déterminer par lecture graphique le (ou les) antécédent(s) de 3 par cette fonction h.

Exercice 8 1) Quelle est l'image de 3 ? de 0 ?



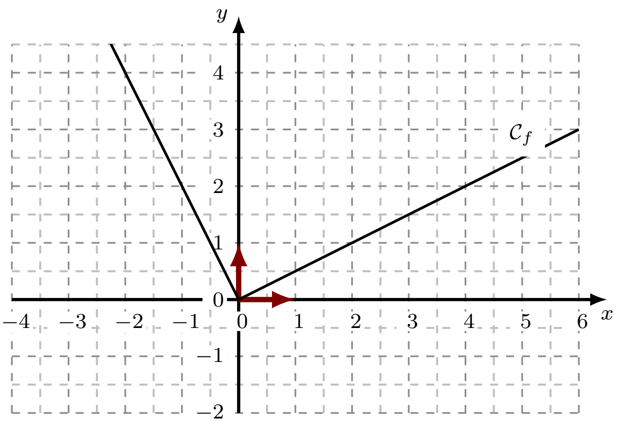
Réponse : $f(\_\_) = \_\_$ et $f(\_\_) = \_\_$

2) Donner un antécédent de -2 ? un antécédent de 0 ?



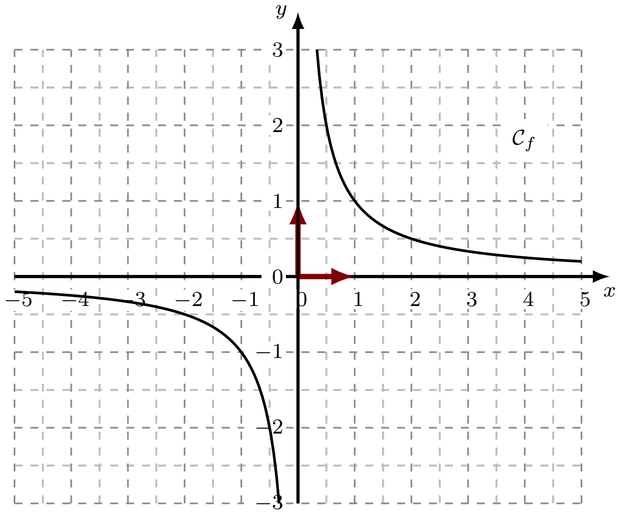
Réponse: $f(\_\_) = \_\_$ et $f(\_\_) = \_\_$

3) Citer deux nombres ayant la même image.



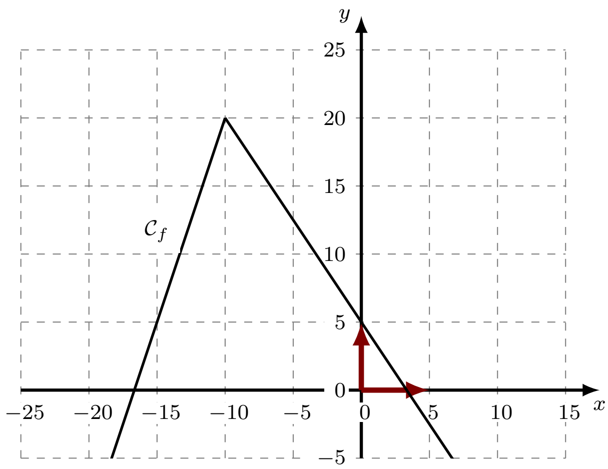
Réponses: $f(\_\_) = \_\_$ et $f(\_\_) = \_\_$

4) Citer deux nombres égaux à leur image.



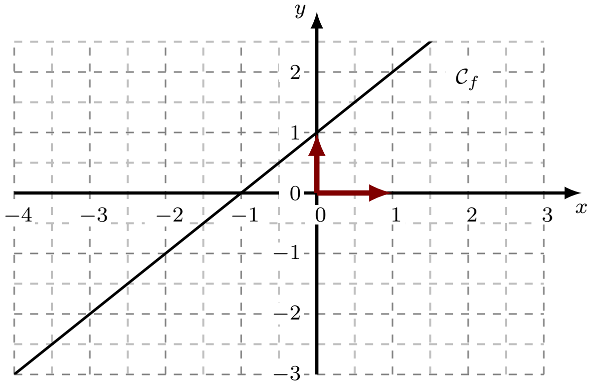
Réponses : $f(\_\_) = \_\_$; $f(\_\_) = \_\_$;

5) Citer des antécédents de 5



Réponses : $f(\_\_) = \_\_$ et $f(\_\_) = \_\_$

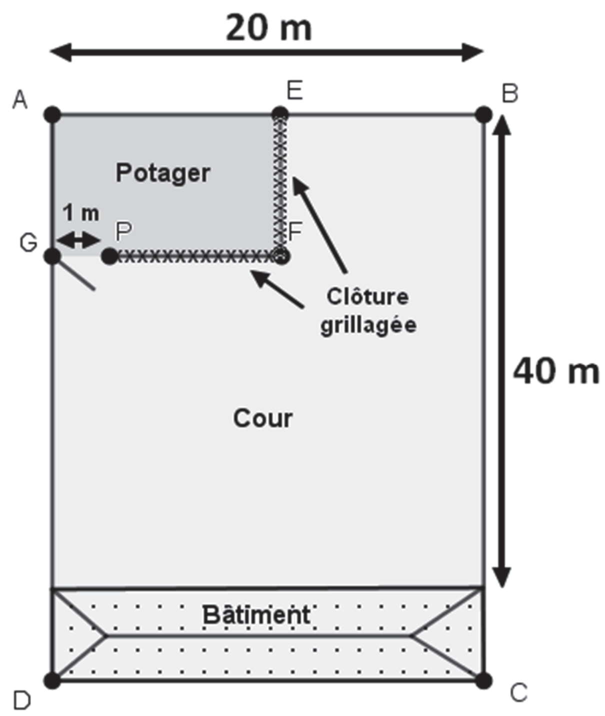
7) Citer un nombre strictement négatif ayant une image strictement positive



Réponses : $f(\_\_) = \_\_$

Problème 1

Des enseignants souhaitent créer un potager pédagogique dans la cour de leur école, en voici un plan ci-après (qui n'est pas à l'échelle).



Le potager $AEFG$ doit respecter les contraintes suivantes :

- être de forme rectangulaire,
- avoir une aire de 90 m^2,
- être le long des murs d'enceinte $[DA]$ et $[AB]$,
- être bordé par un grillage le long des deux autres côtés,
- disposer d'une porte de 1 m de large.

On souhaite de plus que le coté $[AG]$ mesure entre $5\,\text{m}$ et $20\,\text{m}$.

L'ouverture pour la porte correspond au segment $[GP]$.

Le potager est donc le rectangle $AEFG$ où E est un point du segment $[AB]$ et G est un point du segment $[AD]$ avec $5\,\text{m} \leqslant AG \leqslant 20\,\text{m}$.

Pour des raisons de coût, les enseignants cherchent à déterminer les dimensions du potager afin que la longueur totale du grillage soit la plus petite possible.

1) a) Vérifier que si $AG = 5\,\text{m}$, alors la longueur de grillage est de $22\,\text{m}$.
   b) On suppose maintenant que $AG = 7{,}50\,\text{m}$. Calculer la longueur du grillage nécessaire.
2) Dans la suite, on note x la longueur de $[AG]$, exprimée en mètre, et on appelle L la fonction qui à tout nombre positif x compris entre 5 et 20, associe $L(x)$ la longueur du grillage, exprimée en mètre, nécessaire pour clôturer le potager.
   Justifier que $L(x) = x + \dfrac{90}{x} - 1$.
3) On souhaite compléter le tableau de valeurs suivant à l'aide d'un tableur.

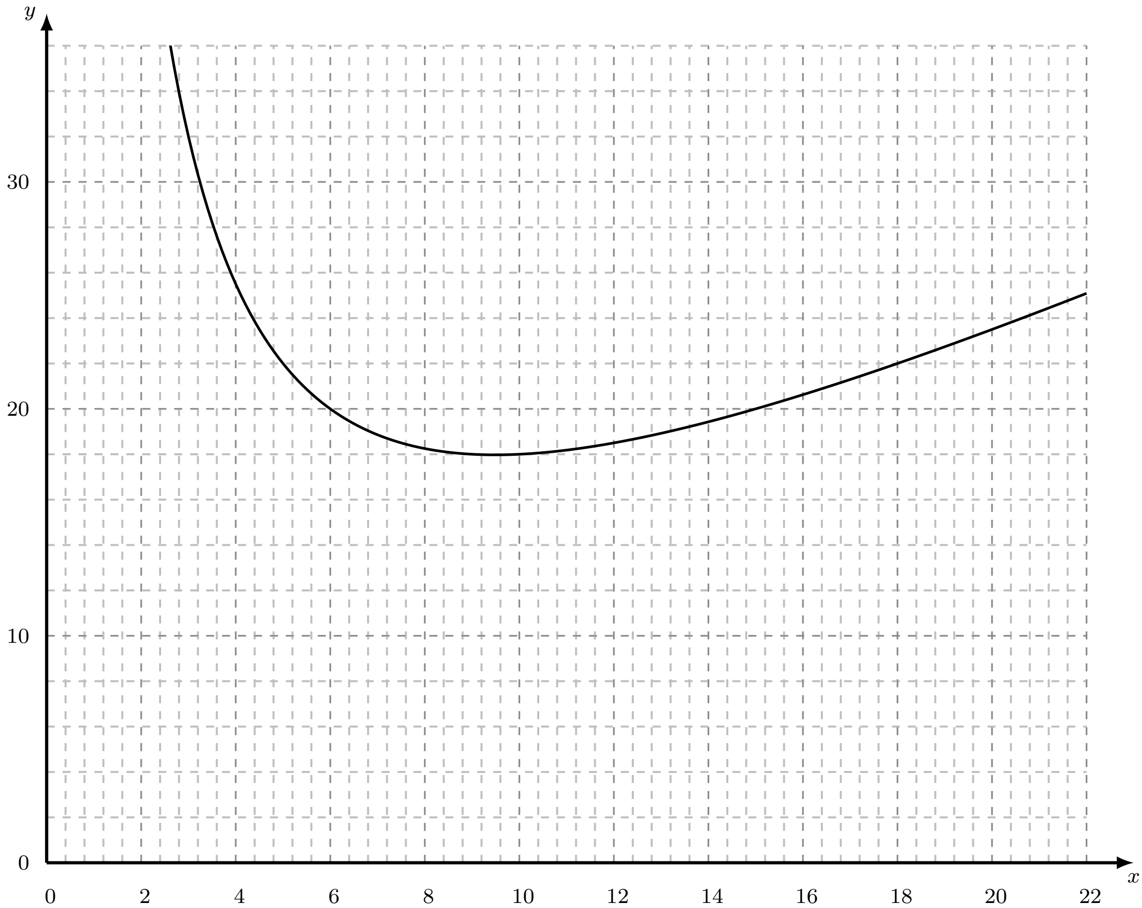
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	x	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22
2	$L(x)$	22									

a) Quelle formule a été écrite dans la cellule **B2** avant de l'étendre jusqu'à la cellule **J2** ?

b) Compléter le tableau à l'aide de votre calculatrice.

c) Quelle semble être la valeur de AG pour laquelle la longueur du grillage est minimale ?

4) Ci dessous la représentation graphique de la fonction L.



5) Déterminer graphiquement :

a) la longueur de grillage lorsque $AB = 18\,\text{m}$

b) les valeurs possibles de AG lorsque la longueur de grillage est de $20\,\text{m}$.

c) la valeur de AG pour que la longueur de grillage soit minimale