A.8 Réactivation Vecteurs et opérations

Un vecteur $\vec{u}$ désigne une translation de vecteur $\vec{u}$.

Définition A.7 — caractéristiques d'un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$. Le vecteur $\vec{u}$ et tous ses représentants ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{XY}$...) sont caractérisés par :
une même **direction** parallèle à la droite $(AA')//(XY)$.
un même **sens** selon la flèche, de A vers B, de X vers Y.
une même **norme** notée $\|\vec{u}\| = AB = XY$.

Définition A.8 — Dans un repère $(O; I, J)$. Soit les points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

■ **Exemple A.15** Soient les points $A(2\ ;\ -4)$, $B(-1\ ;\ 3)$, $C(-3\ ;\ -2)$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AA}$.

solution.

■

Postulat A.12 — Égalité de vecteurs. Le plan est muni d'un repère. Les énoncés suivants sont équivalents :
(i) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
(ii) La translation $\vec{u}$ est transforme A en B, et C en D.
(iii) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même sens, même direction et même norme.
(iv) $AB\mathbf{D}C$ est un parallélogramme.
(v) Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égales

■ **Exemple A.16** Soit les points $A(-3\ ;\ -1)$, $B(5\ ;\ -2)$, $C(7\ ;\ 3)$ et $D(-1\ ;\ 4)$ dans le repère $(O; I, J)$. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

solution.

■

A.8.1 Les opérations

Définition A.9 — Multiplication d'un vecteur par un réel. $\vec{u} \neq \vec{0}$. Le produit d'un réel k par un vecteur $\vec{u}$ est un vecteur noté $k\vec{u}$:

P1 $0\vec{u} = \vec{0}$.

P2 Si $k \neq 0$, « $k\vec{u}$ » désigne le vecteur :

- ayant même direction que $\vec{u}$
- $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$
- Si $k > 0$ alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont **même sens**.
  Si $k < 0$ alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de **sens contraires**

Soit un repère $(O; I, J)$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Définition A.10 — Somme de vecteurs. L'enchainement d'une translation de vecteur $\vec{u}$ puis d'une translation de vecteur $\vec{v}$ est aussi une translation.

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur associé à la translation obtenue.

Soit un repère $(O; I, J)$, si les vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $(\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

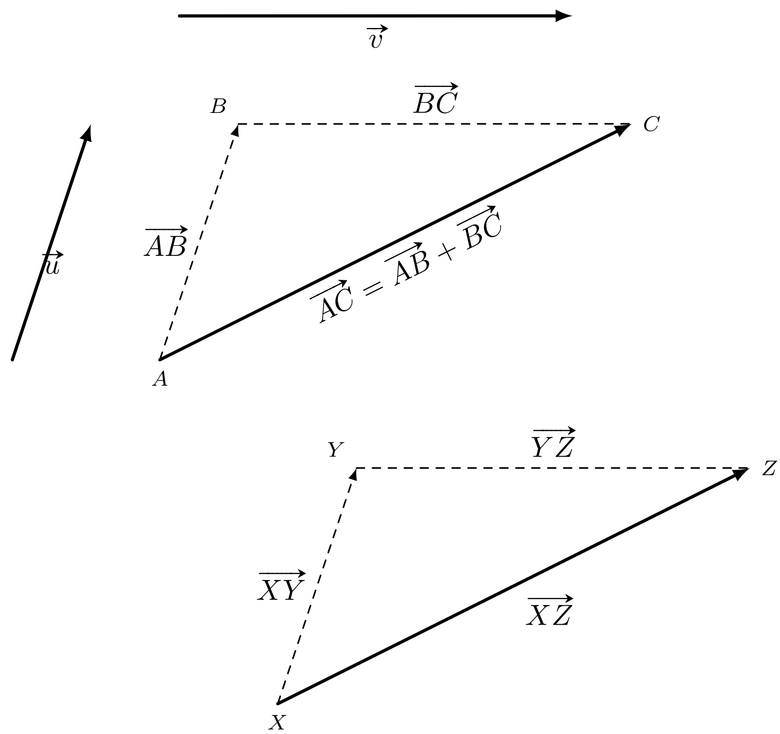


Figure A.11 – C est l'image de A par l'enchaînement des translation de vecteur $\vec{u}$ puis $\vec{v}$.
$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
En prenant un autre point de départ A' on obtient un autre représentant de $\vec{u} + \vec{v}$:
$\overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$

Relation de Chasles

Pour tout points A, B et C : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

A.8.2 Colinéarité et applications

Définition A.11 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** » (en abrégé $\vec{u} \propto \vec{v}$) si l'un est un multiple de l'autre.

Définition A.12 — Colinéarité à l'aide des coordonnées. Dans un repère quelconque $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle « déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ » le nombre noté :

$$\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Théorème A.13 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$.

Postulat A.14 trois points A, B et C sont alignés si et seulement si deux parmi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Postulat A.15 les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

■ **Exemple A.17** Montrer que les points $A(2\ ;\ 5)$, $B(3\ ;\ 8)$ et $C(-5\ ;\ -16)$ sont alignés.

solution.

■

■ **Exemple A.18** Soient $A(1\ ;\ 3)$, $B(5\ ;\ -2)$, $C(-1\ ;\ 6)$ et $D(7\ ;\ -4)$. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

solution.

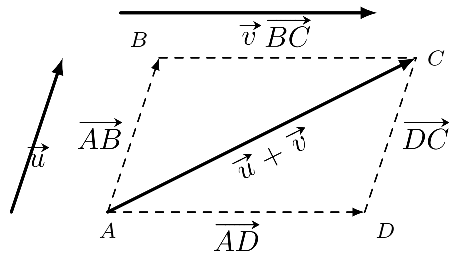
■

A.8.3 Propriétés des opérations

Élément nul Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\quad \vec{0}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$.

La somme de 2 vecteurs est indépendante de l'ordre

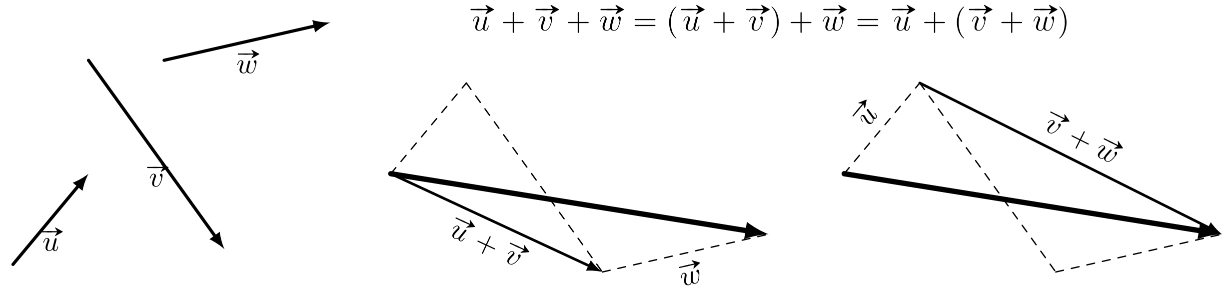
Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $\quad \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.



$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$
$$\vec{v}+\vec{u}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$$

La somme de plusieurs vecteurs quelconques $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est aussi indépendante de l'ordre :

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

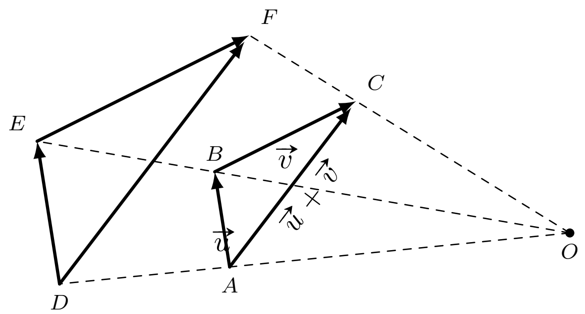


Pour tout vecteurs $\vec{u}$, et réel a et b, $\quad a(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$.

Pour tout a et $b\in\mathbb{R}$ et vecteur $\vec{u}$ on a : $a\vec{u}+b\vec{u}=(a+b)\vec{u}$

Pour tout vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et réel k, $\quad k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$.

Démonstration. La figure correspond au cas $k>0$. Le cas $k<0$ est similaire.



■