Chapitre 13

Vecteurs (2) Opérations et colinéarité

13.1 Produit d'un vecteur par un réel

Définition 13.1 — interprétation géométrique. $\vec{u} \neq \vec{0}$. Le produit d'un réel k par un vecteur $\vec{u}$ est un vecteur noté $k\vec{u}$:

P1 $0\vec{u} = \vec{0}$.

P2 Si $k \neq 0$, « $k\vec{u}$ » désigne le vecteur :

- ayant même direction que $\vec{u}$
- $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$
- Si $k > 0$ alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont **même sens**.
  Si $k < 0$ alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de **sens contraires**

Définition 13.2 — vecteurs opposés. $\vec{v} = -\vec{u}$ signifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction , même norme mais sont de sens contraires.
En particulier : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

■ **Exemple 13.1** I est le milieu du segment $[AB]$. En utilisant uniquement des vecteurs d'extrémités A, B ou I :

a) Énumérer 2 égalités de vecteurs.

b) Énumérer 3 paires de vecteurs opposés $\vec{v} = -\vec{u}$

c) Énumérer 3 paires de vecteurs qui peuvent s'écrire $\vec{v} = 2\vec{u}$

d) Énumérer 3 paires de vecteurs qui peuvent s'écrire $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u}$

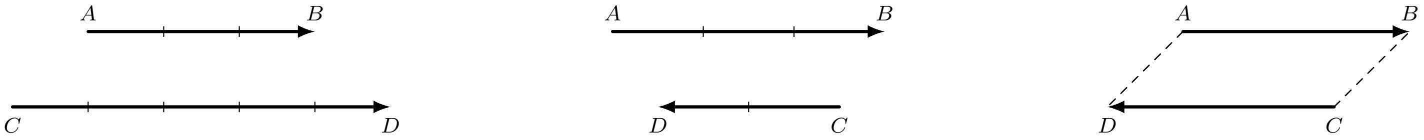
Soit un repère $(O; I, J)$, et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exercices : produit d'un vecteur par un réel

■ Exemple 13.2

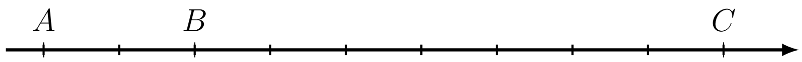
Les vecteurs ci-dessous ont tous la même direction.



$$\frac{CD}{AB} = \frac{5}{3}$$
$$CD = \tfrac{5}{3}AB$$
$$\overrightarrow{CD} = \tfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}$$

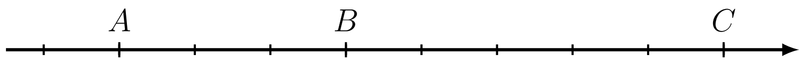
Exercice 1

a) Sur la figure ci-dessous :



$AC = \ldots\ldots BC$	$BC = \ldots\ldots AC$	$BC = \ldots\ldots BA$
$\overrightarrow{AC} = \ldots\ldots \overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC} = \ldots\ldots \overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC} = \ldots\ldots \overrightarrow{BA}$
$CA = \ldots\ldots BA$	$AB = \ldots\ldots BC$	$BA = \ldots\ldots BC$
$\overrightarrow{CA} = \ldots\ldots \overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AB} = \ldots\ldots \overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BA} = \ldots\ldots \overrightarrow{BC}$

b) À partir de la figure ci-dessous, compléter les égalités vectorielles suivantes:



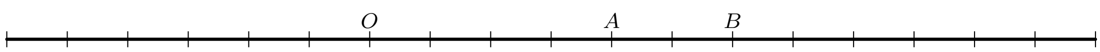
$\overrightarrow{AC} = \ldots\ldots \overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC} = \ldots\ldots \overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CA} = \ldots\ldots \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{BC} = \ldots\ldots \overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BA} = \ldots\ldots \overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BA} = \ldots\ldots \overrightarrow{AB}$

c) Le point B est le milieu de $[AC]$. Compléter les égalités vectorielles suivantes :

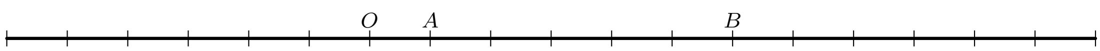
$\overrightarrow{BA} = \ldots\ldots \overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{CB} = \ldots\ldots \overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC} = \ldots\ldots \overrightarrow{AB}$

Exercice 2 Placer les points M, N, P pour chacun des cas suivants :

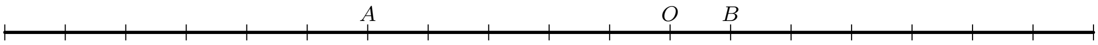
a) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OP} = 4\overrightarrow{AB}$



b) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

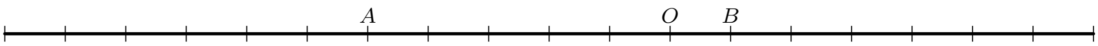


c) $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OP} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

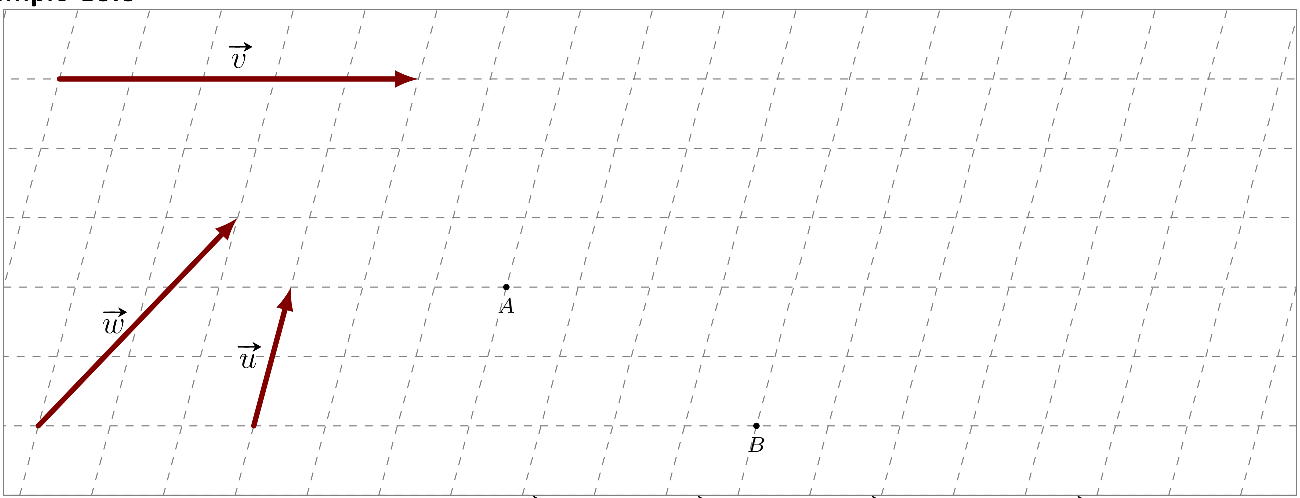


d) $2\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}$; $4\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{OP} = -3\overrightarrow{AB}$

e) $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$; $6\overrightarrow{BN} = 11\overrightarrow{BA}$ et $6\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{BA}$



■ **Exemple 13.3**



Placer les points A_0, A_1, B_0, B_1 tel que $\overrightarrow{AA_0} = \frac{3}{2}\vec{u}$; $\overrightarrow{AA_1} = -\vec{u}$; $\overrightarrow{BB_0} = \frac{3}{5}\vec{v}$ et $\overrightarrow{B_0B_1} = -\frac{7}{5}\vec{v}$.

Exercice 3 Pour chacun des cas suivants, dites s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{AB}$ puis préciser si les droites (PQ) et (AB) sont parallèles.

a) $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-16\\-24\end{pmatrix}$

b) $P(1\ ;\ -1)$, $Q(4\ ;\ 3)$, $A(-1\ ;\ 5)$ et $B(7\ ;\ 1)$

c) $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\14\end{pmatrix}$

d) $P(1\ ;\ 4)$, $Q(-3\ ;\ 5)$, $A(5\ ;\ 7)$ et $B(9\ ;\ 6)$

■ **Exemple 13.4 — Je fais.** Dans un repère $(O;\ I, J)$ on définit $A(-15\ ;\ 12)$ et $B(8\ ;\ -4)$. Sachant que $\overrightarrow{CO} = 10\overrightarrow{AB}$, déterminer les coordonnées de C.

Exercice 4 Mêmes consignes

a) $A(15\ ;\ -10)$ et $B(-1\ ;\ -4)$ et $\overrightarrow{OC} = -11\overrightarrow{AB}$.

b) $A(1\ ;\ -16)$ et $B(-9\ ;\ 9)$ et $\overrightarrow{CB} = -14\overrightarrow{AB}$.

c) $A(5\ ;\ 9)$ et $B(-13\ ;\ -14)$ et $\overrightarrow{CB} = -5\overrightarrow{AB}$.

13.2 Colinéarité de deux vecteurs

Définition 13.3 $\vec{u} \neq \vec{0}$. Les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ sont tous les multiples $k\vec{u}$ ou $k \in \mathbb{R}$.

Il s'agit du vecteur nul $\vec{0}$ et de tous les vecteurs de même direction que $\vec{u}$.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** » (en abrégé $\vec{u} \propto \vec{v}$) si l'un est un multiple de l'autre.

Postulat 13.1 trois points A, B et C sont alignés si et seulement si deux parmi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Postulat 13.2 les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CDC}$ sont colinéaires.

Définition 13.4 — Colinéarité à l'aide des coordonnées. Dans un repère quelconque $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle « déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ » le nombre noté :

$$\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Théorème 13.3 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$.

Démonstration.

■

Exercices : Colinéarité de vecteurs

■ **Exemple 13.5** Calculer les déteriminant des vecteurs suivants :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$. $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}3 & 4\\2 & 5\end{vmatrix} =$

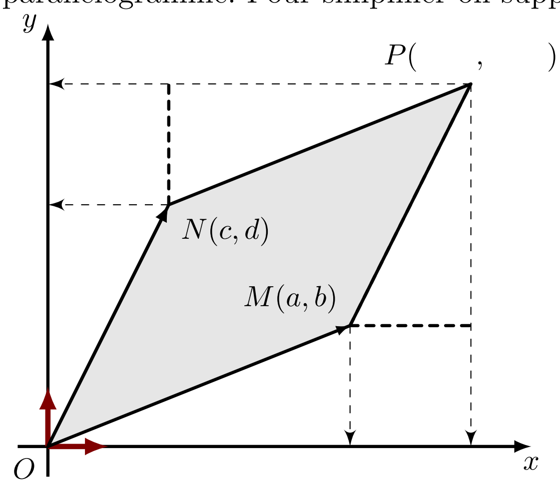
$\det(\vec{v};\vec{u}) =$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$. $\det(\vec{u};\vec{v}) =$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\-10\end{pmatrix}$.

■ **Exemple 13.6 — Interprétation géométrique du déterminant dans un repère orthonormé.**

Soit un repère **orthonormé** $(O;I,J)$, et les points $M(a,b)$ et $N(c,d)$ et P tel que $OPMN$ est un parallélogramme. Pour simplifier on suppose que a, b, c et d sont des réels strictement positifs.



■ **Exemple 13.7** Déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}+\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}-\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

■ **Exemple 13.8** Soient un repère orthonormé et les points $A(0\ ;\ -2)$, $B(1\ ;\ 1)$ et $C(2\ ;\ -1)$. Calculer l'aire du triangle ABC.

■ **Exemple 13.9** Montrer que les points $A(2\ ;\ 5)$, $B(3\ ;\ 8)$ et $C(-5\ ;\ -16)$ sont alignés.

■ **Exemple 13.10** Soient $A(1\ ;\ 3)$, $B(5\ ;\ -2)$, $C(-1\ ;\ 6)$ et $D(7\ ;\ -4)$. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 5 Dans chaque cas, dire si les vecteurs sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-\sqrt{6}\end{pmatrix}$

Exercice 6 Dans chaque cas les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Écrire une équation vérifiée par m et la résoudre.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}m\\3\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-m\\4m-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}27\\2m\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2m\\3\end{pmatrix}$

Exercice 7 Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Montrer que $A(-2;1)$, $B(3;3)$, $C\left(1;\frac{11}{5}\right)$ sont alignés.

b) Trouver a pour que $A(1;2)$, $B(-3;0)$ et $C(-14;a)$ soient alignés.

Exercice 8 Dans un repère, soit les points: $A(-2\ ;\ 1)$, $B(3\ ;\ 3)$, $C\left(1\ ;\ \frac{11}{5}\right)$ et $D\left(\frac{45}{2}\ ;\ \frac{54}{5}\right)$

a) Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

b) Les points A, B et D sont-ils alignés ?

Exercice 9 Pour chaque cas, justifier si les points donnés sont alignés.

a) $A(5;10)$, $B(-5;5)$ et $C(-1;7)$

b) $D(-3;-4)$, $E(-6;-6)$ et $F(1;-1)$

c) $K(-9;4)$, $L(0;3)$ et $M(9,2)$

d) $P(-3;2)$, $Q(-6;-2)$ et $R(-10,-6)$

Exercice 10 Dans un repère, on donne les points : $M(0\ ;\ -3)$, $N(2\ ;\ 3)$, $P(-9\ ;\ 0)$ et $Q(-1\ ;\ -1)$

1) Calculer les coordonnées des points A et B tels que:

   a) $\overrightarrow{NA}=\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{MN}$

   b) $\overrightarrow{MB}=3\,\overrightarrow{MQ}$

2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PB}$.

3) Démontrer que les points P, A et B sont alignés.

Exercice 11 Soit les points $A(1;2)$, $B(-3;0)$ et $C(-7;a)$ dans un repère orthonormé. Trouver 2 valeurs de a pour lesquelles le triangle ABC est d'aire 12.

13.3 Somme de vecteurs

Théorème 13.4 L'enchainement d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ puis d'une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ est aussi une translation.

Le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ est le vecteur associé à la translation obtenue.

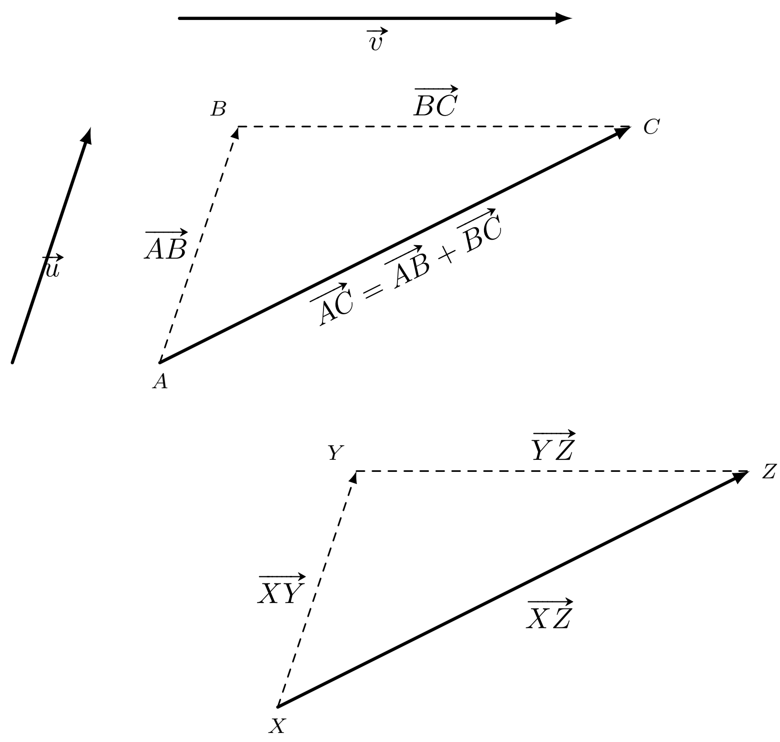
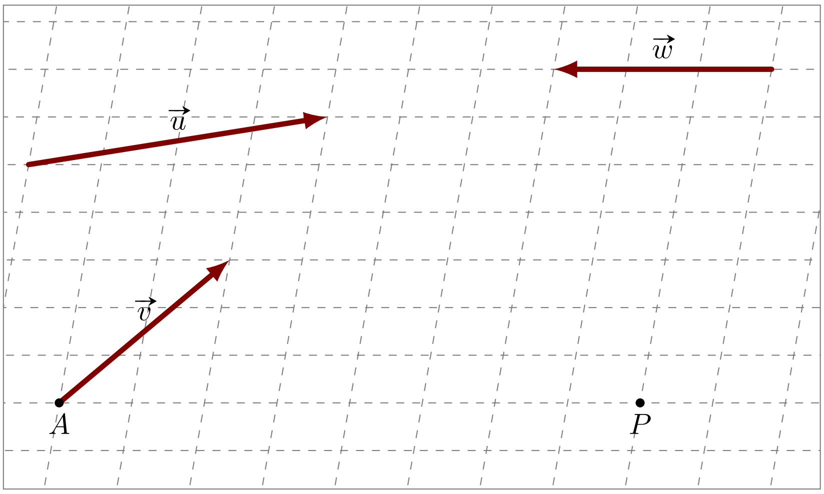


Figure 13.1 – C est l'image de A par l'enchaînement des translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ puis $\overrightarrow{v}$.
$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
En prenant un autre point de départ A' on obtient un autre représentant de $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$: $\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$

Relation de Chasles

Pour tout points A, B et C : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

■ **Exemple 13.11** Placer les points B et Q tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{PQ} = \vec{v} + \vec{w}$



Pour tout points A et B. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

On dira que $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Opposé du vecteur

L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur noté $-\vec{u}$.

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

Deux vecteurs opposés ont même direction, même longueur, mais sont de sens contraires.

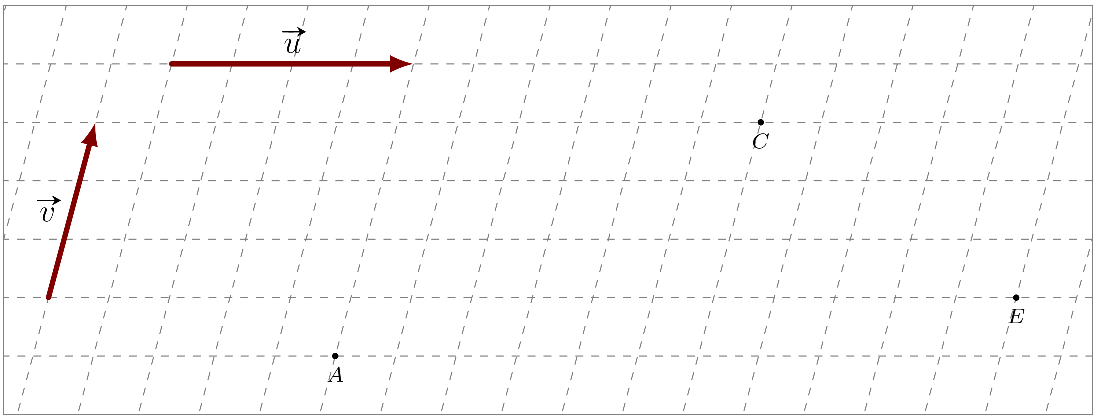
Soit un repère $(O; I, J)$ et les vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

Le vecteur $-\vec{u}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

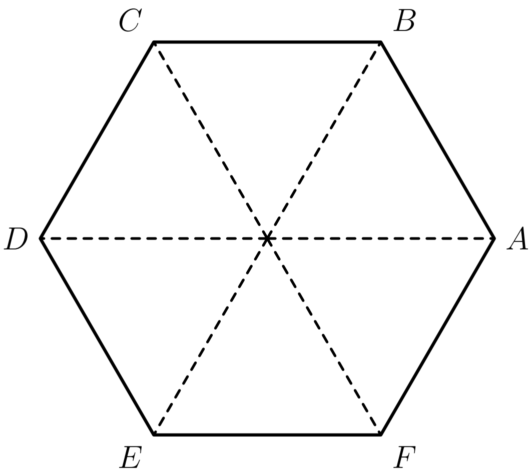
13.4 Exercices : sommes de vecteurs

■ **Exemple 13.12** Placer les points B, D et F tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{u} - \vec{v}$ et $\overrightarrow{EF} = \vec{v} - \vec{u}$



Pour les exercices 1 à 4, $ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O et rayon 1. Écrire le plus simplement possible les sommes ci-dessous en utilisant des points de la figure ou le vecteur nul, ou un nombre.

Exercice 12



a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} =$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} =$

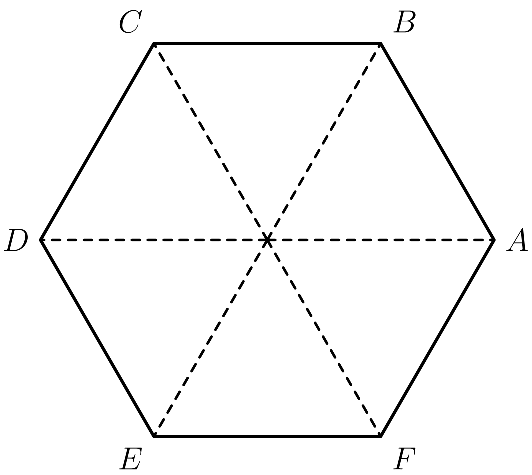
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} =$

d) $OA + OV =$

e) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} =$

f) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} =$

Exercice 13



a) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AF} =$

b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DE} =$

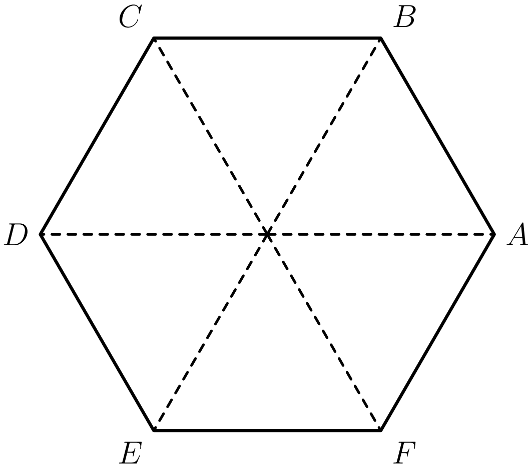
c) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} =$

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} =$

e) $OA + OE + OC =$

f) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DE} =$

Exercice 14



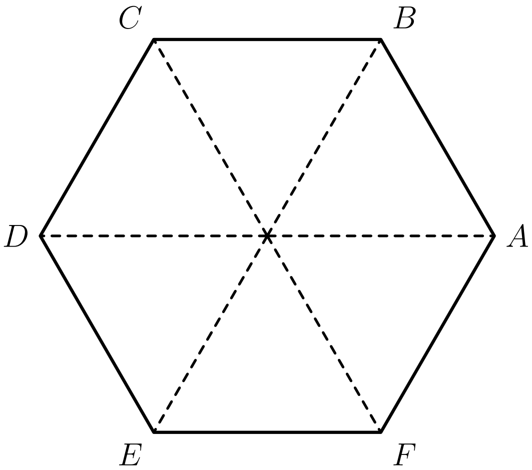
a) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$

b) $OB - OA =$

c) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{FA} =$

d) $\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{AB} =$

Exercice 15



a) $\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB} =$

b) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DE} =$

c) $\overrightarrow{OC} - \left(\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{DE}\right) =$

■ **Exemple 13.13** En utilisant la relation de Chasles, compléter les égalités suivantes où « ... » représente le nom d'un point :

a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\dots\ \ C}$

b) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{F\ \ \dots} + \overrightarrow{U\ \ \dots}$

c) $\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{UR} = \overrightarrow{\dots\ \ \dots}$

d) $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{\dots\ \ I} + \overrightarrow{I\ \ \dots}$

e) $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{\dots\ \ M} + \overrightarrow{\dots\ \ N} + \overrightarrow{\dots\ \ \dots}$

Exercice 16 Simplifier les expressions suivantes à l'aide de la relation de Chasles :

a) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} =$ ....

b) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} =$ ....

c) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AA} =$ ....

d) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} =$ ....

e) $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} =$ ....

f) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} =$ ....

g) $\overrightarrow{KT} + \overrightarrow{TD} + \overrightarrow{KT} =$ ....

h) $\overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QB} =$ ....

Exercice 17

En utilisant la relation de Chasles, compléter les égalités suivantes où « ... » représente le nom d'un point :

a) $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{A\ldots}$

b) $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{HF}$

c) $\overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{C\ldots} = \overrightarrow{\ldots B}$

d) $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{CM}$

e) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{\ldots\ldots} = \vec{0}$

f) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{AC}$

g) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{DE}$

Exercice 18

Simplifier les expressions suivantes à l'aide de la relation de Chasles :

a) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} =$

b) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD} =$

c) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD} =$

d) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DB} =$

e) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{EM} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{EC} =$

f) $-\overrightarrow{AU} + \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{MU} =$

Exercice 19

Écrire les sommes demandées à l'aide de vecteurs dont les extrémités sont des points de la figure.

a) $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{CB} =$ ....

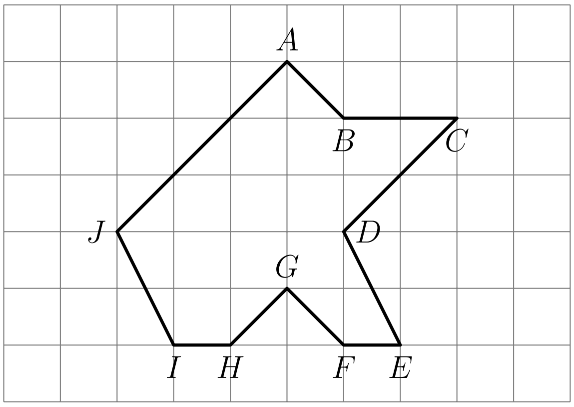
b) $\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{HG} =$ ....

c) $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HF} =$ ....

d) $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{FE} =$ ....

e) $\overrightarrow{HF} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} =$ ....

f) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{IH} - \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{FD} =$ ....



solution de l'exercice 16.

a) $\overrightarrow{BA}$
b) $\vec{0}$
c) $\overrightarrow{BD}$
d) $\overrightarrow{AD}$
e) $\overrightarrow{DB}$
f) $2\overrightarrow{BD}$

■

solution de 17.

a) $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HF}$
c) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$
d) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$
e) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$
f) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}$
g) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DE}$

■

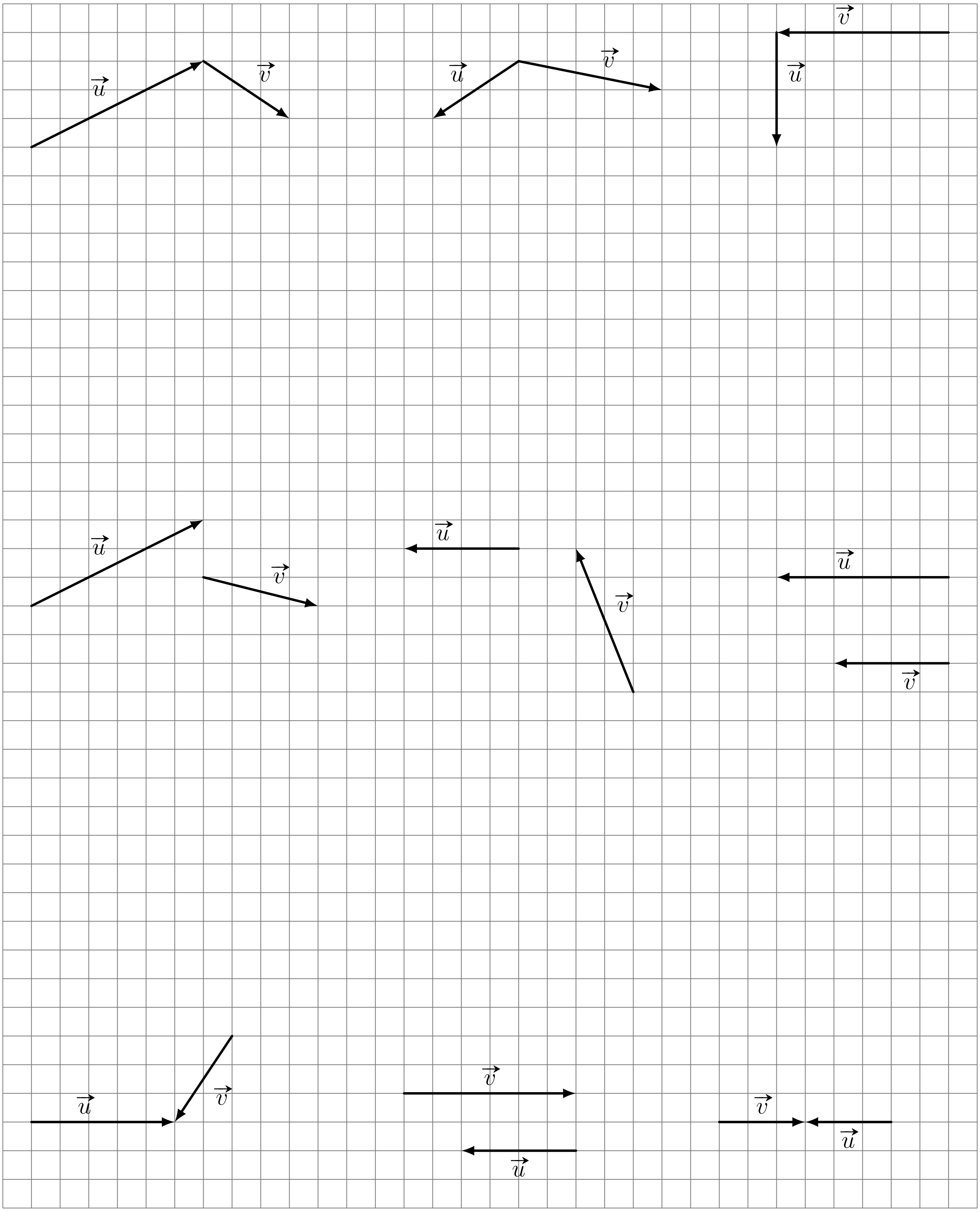
solution de 18.

a) $\overrightarrow{BD}$
b) $2\overrightarrow{DB}$
c) $\vec{0}$
d) $\overrightarrow{CB}$
e) $\vec{0}$
f) $\overrightarrow{TA}$

■

Exercice 20

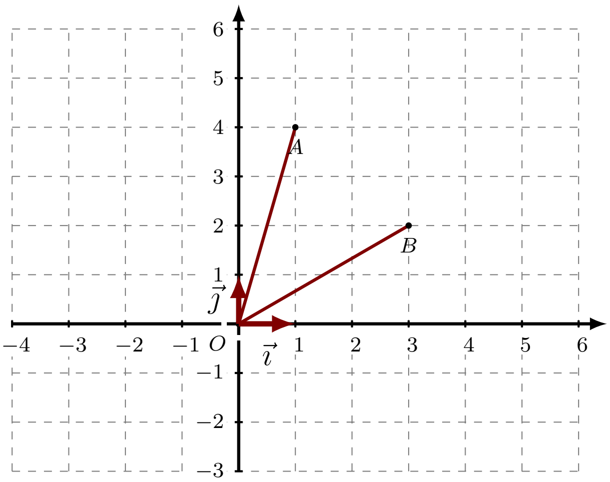
Pour chaque cas, représentez $\vec{u} + \vec{v}$ (en bleu) et $\vec{u} - \vec{v}$ (en rouge). Aucune restriction sur l'orgine du représentant choisi.

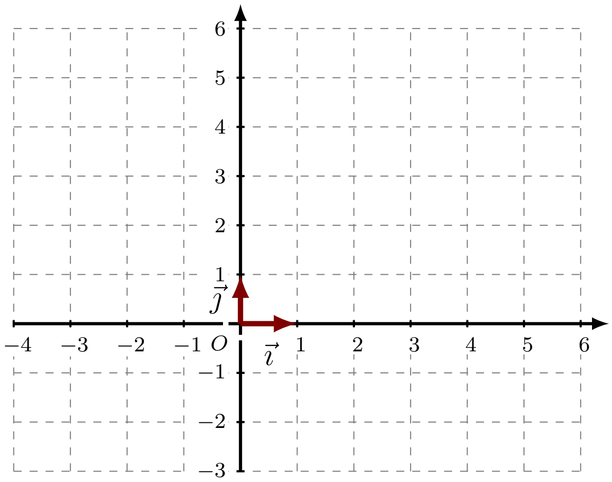


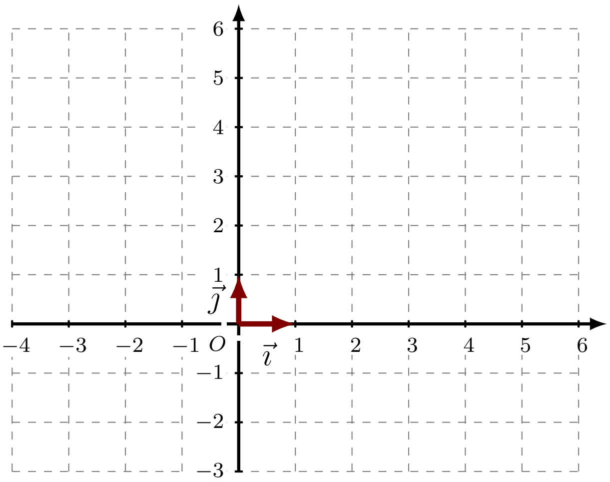
Exercice 21

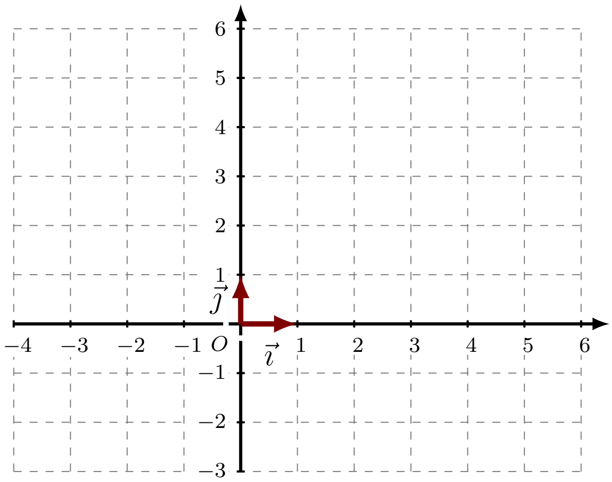
Pour chacun des cas suivants placer le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et représenter le parallélogramme $OAMB$ puis écrire le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sous la forme $a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$.

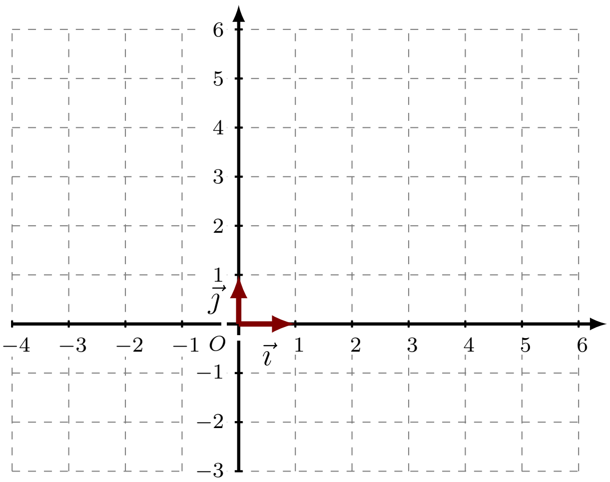
a) $A(1;4)$ et $B(3;2)$.
b) $A(-1;2)$ et $B(3;1)$.
c) $A(-1;1)$ et $B(-1;2)$.
d) $A(1;5)$ et $B(1;1)$.
e) $A(-2;1)$ et $B(1;2)$.
f) $A(-3;-2)$ et $B(-1;-1)$.

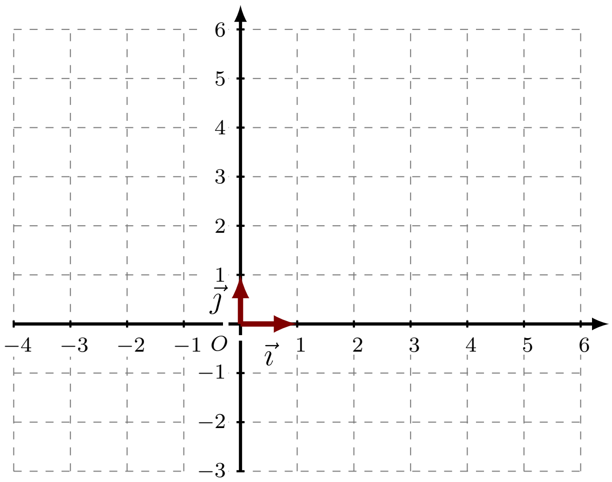




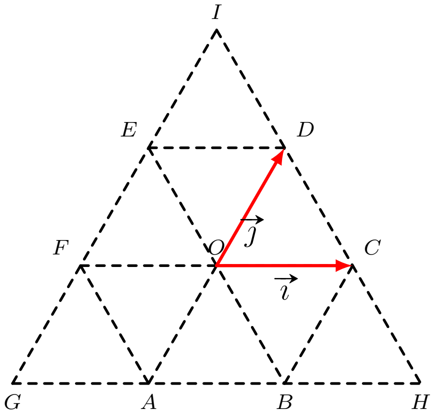


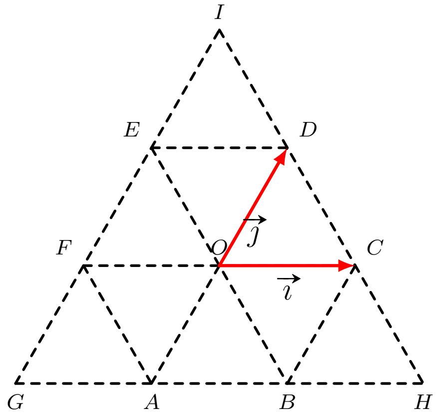


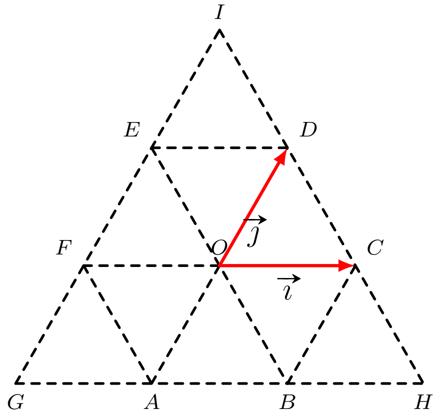




Exercice 22 — décomposer un vecteur en fonction de deux autres.
La figure ci-dessous (répétée 3 fois) est formée de triangles équilatéraux. On pose $\overrightarrow{OC} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OD} = \vec{\jmath}$.
Écrire chacun des vecteurs suivants sous la forme $a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath}$.







a) $\overrightarrow{BI} =$

b) $\overrightarrow{IA} =$

c) $\overrightarrow{IH} =$

d) $\overrightarrow{EB} =$

e) $\overrightarrow{OG} =$

f) $\overrightarrow{DG} =$

g) $\overrightarrow{GC} =$

h) $\overrightarrow{HE} =$

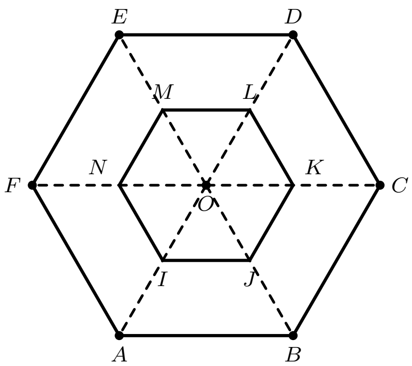
i) $\overrightarrow{AE} =$

j) $\overrightarrow{AF} =$

k) $\overrightarrow{BD} =$

l) $\overrightarrow{FB} =$

Exercice 23 — décomposer un vecteur en fonction de deux autres. La figure ci-dessous est formée de deux hexagones réguliers de centre O. I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des segements $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$, $[OD]$, $[OE]$ et $[OF]$.



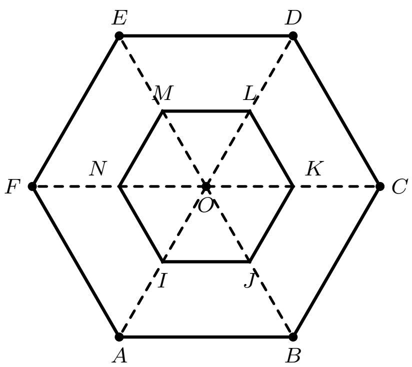
Décomposer chacun des vecteurs suivants selon les vecteurs donnés.

a) $\overrightarrow{BF} = \dots\overrightarrow{OI} + \dots\overrightarrow{OJ}$

b) $\overrightarrow{JD} = \dots\overrightarrow{OI} + \dots\overrightarrow{OK}$

c) $\overrightarrow{CO} = \dots\overrightarrow{OI} + \dots\overrightarrow{OJ}$

d) $\overrightarrow{EA} = \dots\overrightarrow{OI} + \dots\overrightarrow{OK}$



Écrire chacun des vecteurs suivants sous la forme $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$.

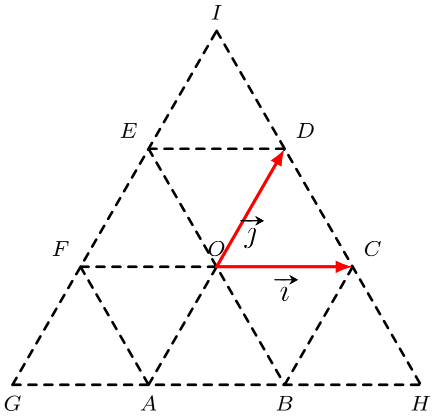
a) $\overrightarrow{JF} = \dots\overrightarrow{OA} + \dots\overrightarrow{OB}$

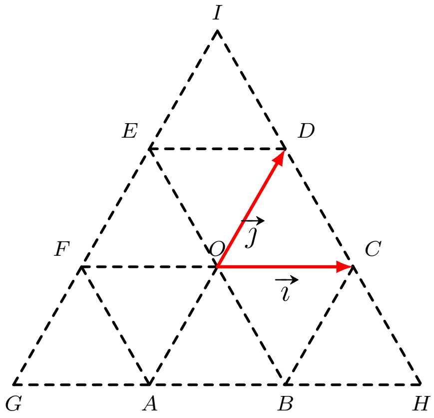
b) $\overrightarrow{EK} = \dots\overrightarrow{OA} + \dots\overrightarrow{OC}$

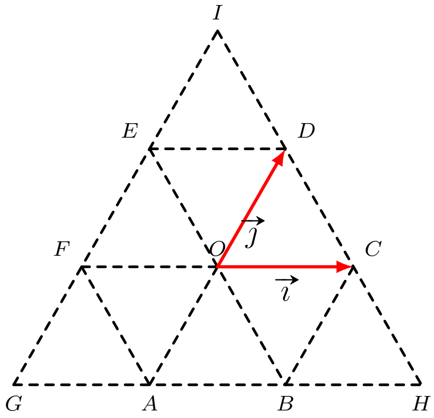
c) $\overrightarrow{CI} = \dots\overrightarrow{OA} + \dots\overrightarrow{OB}$

d) $\overrightarrow{JD} = \dots\overrightarrow{OA} + \dots\overrightarrow{OC}$

solution de 22.







a) $\overrightarrow{BI} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

b) $\overrightarrow{IA} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$

c) $\overrightarrow{IH} = 3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$

d) $\overrightarrow{EB} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$

e) $\overrightarrow{OG} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

f) $\overrightarrow{DG} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$

g) $\overrightarrow{GC} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

h) $\overrightarrow{HE} = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

i) $\overrightarrow{AE} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

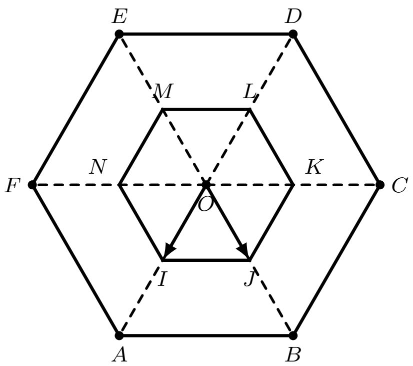
j) $\overrightarrow{AF} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

k) $\overrightarrow{BD} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

l) $\overrightarrow{FB} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

■

solution de 23.



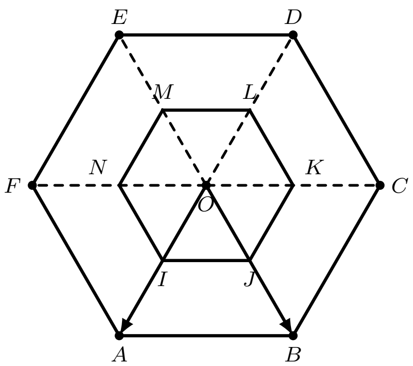
Décomposer chacun des vecteurs suivants selon les vecteurs donnés.

a) $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{OI} - 4\overrightarrow{OJ}$

b) $\overrightarrow{JD} = -3\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OK}$

c) $\overrightarrow{CO} = 2\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OJ}$

d) $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OK}$



Écrire chacun des vecteurs suivants sous la forme $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$.

a) $\overrightarrow{JF} = \overrightarrow{OA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$

b) $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

d) $\overrightarrow{JD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

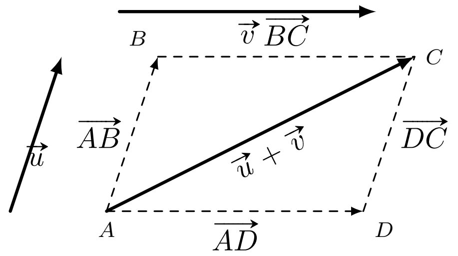
■

13.5 Propriétés des opérations

Élément nul Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$.

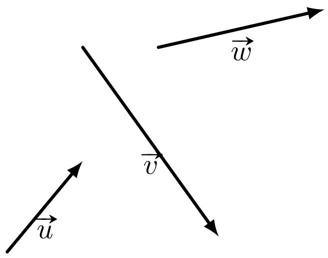
La somme de 2 vecteurs est indépendante de l'ordre

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.

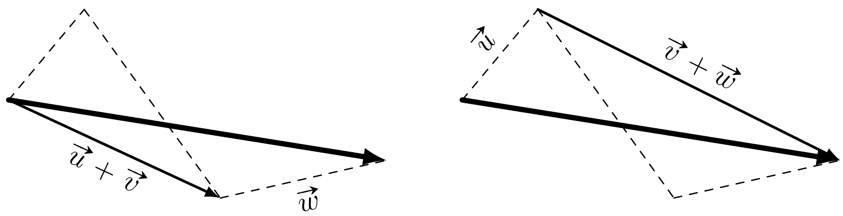


$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$
$$\vec{v}+\vec{u}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$$

La somme de plusieurs vecteurs quelconques $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est aussi indépendante de l'ordre :



$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

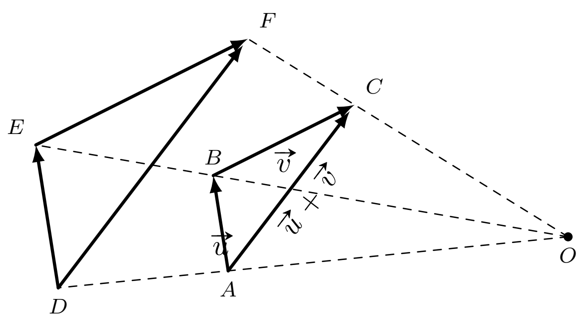


Pour tout vecteurs $\vec{u}$, et réel a et b, $a(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$.

Pour tout a et $b\in\mathbb{R}$ et vecteur $\vec{u}$ on a : $a\vec{u}+b\vec{u}=(a+b)\vec{u}$

Pour tout vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et réel k, $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$.

Démonstration. La figure correspond au cas $k>0$. Le cas $k<0$ est similaire.



■

Exercices bilan opérations sur vecteurs

■ Exemple 13.14

Dans le repère $(O~;~\vec{\imath}~,~\vec{\jmath})$ on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$; $A(1~;~-3)$ et $B(4~;~-5)$.

Calculer les coordonnées de chacun des vecteurs suivants :

$-3~\overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\vec{u}+\overrightarrow{AB}$ $\quad$ $-3\vec{u}+2\overrightarrow{AB}$ $\quad$ $2~\vec{u}+5~\overrightarrow{BA}$

Exercice 24

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ deux vecteurs définis par leurs coordonnées dans le repère $(O~;~\vec{\imath}~,~\vec{\jmath})$.

Calculer les coordonnées de chacun des vecteurs suivants :

a) $-\vec{u}$ | b) $\vec{u}+\vec{v}$ | c) $3\vec{u}+2\vec{v}$ | d) $-5\vec{u}-\vec{v}$ | e) $\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v})$

Exercice 25

Le plan est muni du repère orthonormé $(O~;~\vec{\imath}~,~\vec{\jmath})$ et des points $A(-3~;~2)$, $B(1~;~-2)$, $C(-5~;~3)$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs :

a) $\overrightarrow{AB}$ | b) $\overrightarrow{AC}$ | c) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ | d) $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$ | e) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

Exercice 26 — révision.

Le plan est muni du repère $(O~;~\vec{\imath}~,~\vec{\jmath})$. Soient les points $T(1~;~-2)$, $R(0~;~-1)$, $U(5~;~3)$. Déterminer les coordonnées du point $E(x;y)$ tel que $TRUE$ est un parallélogramme, ainsi que celles du centre F du parallélogramme.

Exercice 27 Le plan est muni du repère $(O~;~\vec{\imath}~,~\vec{\jmath})$. Soient les points $A(2~;~-3)$, $B(1~;~-1)$, $C(4~;~5)$

a) Le point $M(x;y)$ est tel que $\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{BC}$.
   Écrire les équations vérifiées par x et y et retrouver les coordonnées de M.
b) Déterminer les coordonnées du point $N(x;y)$ tel que $\overrightarrow{CN}=2~\overrightarrow{AB}-3~\overrightarrow{AC}$
c) Déterminer les coordonnées du point $G(x;y)$ tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Exercice 28

Le plan est muni du repère orthonormé $(O~;~\vec{\imath}~,~\vec{\jmath})$. Soient les points $A(3~;~-3)$, $B(2~;~-4)$, $C(-5~;~1)$

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{AC}+2~\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=-3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$.
c) Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{BD}=2~\vec{u}-\vec{v}$.
d) Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE}=2~\overrightarrow{BE}+2~\vec{u}$

Exercice 29 — révision.

Soit les points $A(-1\ ;\ 3)$; $B(-1\ ;\ 2)$; $C(\frac{5}{2}\ ;\ 2)$ et $D(-8\ ;\ 4)$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$. Montrer que les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

Exercice 30 — révision.

Soit les points $M(1\ ;\ -2)$; $N(0\ ;\ -1)$ et $P(3\ ;\ -4)$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$. Montrer que les points M, N et P sont alignés.

Exercice 31 — révision.

Soit les points $A(1\ ;\ 1)$; $B(2\ ;\ -3)$; $C(4\ ;\ x)$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$. Trouvez x tel que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 32

Dans un repère, on donne les points: $A(1\ ;\ -1)$, $B(-1\ ;\ -2)$ et $C(-2\ ;\ 2)$

1) Déterminer les coordonnées du point G vérifiant $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
2) Déterminer les coordonnées du point D vérifiant $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.
3) Les points B, G et D sont-ils alignés ?

Exercice 33

Dans un repère, on donne les points: $A(-2\ ;\ 2)$, $B(0\ ;\ -3)$ et $C(4\ ;\ 5)$.

1) Déterminer les coordonnées du point M vérifiant $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$.
2) I est le milieu de $[AB]$. Calculer les coordonnées de I
3) Montrer que les points C, I et M sont alignés.

Exercice 34

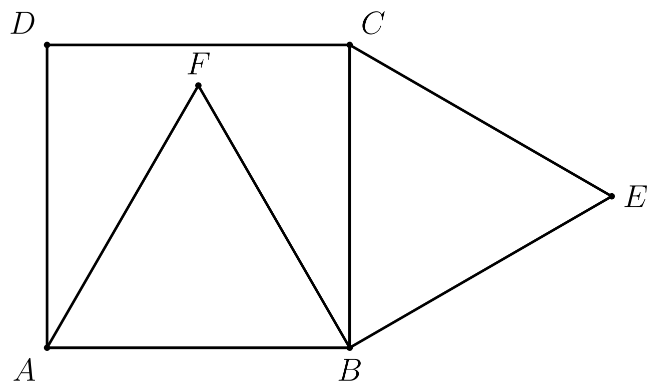
Dans un repère, on donne les points: $A(2\ ;\ 4)$, $B(-2\ ;\ 2)$ et $C(6\ ;\ -1)$. I est le milieu de $[AC]$. G et H sont tels que $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BH}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1) Déterminer les coordonnées de I, G et H.
2) Prouver que B est le milieu de $[GI]$
3) Montrer que les points A, G et H sont alignés.

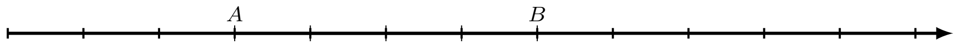
Exercice 35 — un classique : approche vectorielle.

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré et les triangles BCE et ABF sont équilatéraux. On considère le repère orthonormé $(A\ ;\ B\ ,\ D)$.

1) Représenter les axes du repère.
2) Donner les coordonnées des points A, B, C et D.
3) Déterminer les coordonnées de F et E.
   indice : trigonométrie
4) Démontrer que les points D, F et E sont alignés.



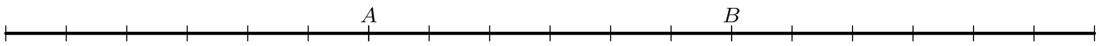
■ **Exemple 13.15 — Équation vectorielle sur une droite.**
Soit les points A, B. Soit P et Q tel que $\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{QA} - 3\overrightarrow{QB} = \vec{0}$. Placer P et Q.



Exercice 36

Pour chaque cas, exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, et placer le point P sur la figure.

a) P est tel que $2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$.
b) Q est tel que $\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QB} = \vec{0}$.
c) R est tel que $\overrightarrow{RA} + 5\overrightarrow{RB} = \vec{0}$.
d) S est tel que $-3\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} = \vec{0}$.
e) T est tel que $-\overrightarrow{TA} + 3\overrightarrow{TB} = \vec{0}$.
f) M est tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.



■ **Exemple 13.16 — Équation vectorielle dans le plan.**
Soit les points $A(1;2)$, $B(3;1)$ et $C(4;5)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On cherche les coordonnées des points $M(x;y)$ et $N(x;y)$ tel que

$$3\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{BC}$$

Exercice 37

On donne les points $A(-5;2)$. $B(3;0)$ et $C(-1;4)$. Calculer les coordonnées du point $M(x;y)$ qui vérifie l'équation donné.

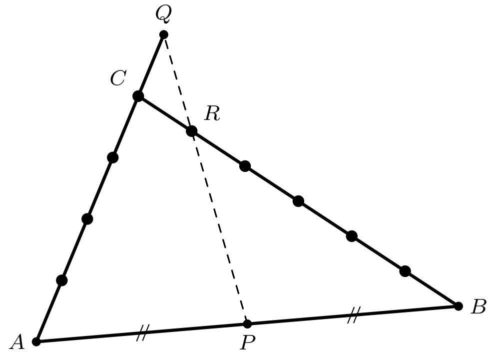
a) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$
b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BC}$
c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$
d) $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC}$
e) $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{CM}$
f) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

13.6 Club maths : Cas particuliers du théorème de Menelaus

Exercice 38

ABC est un triangle. P est le milieu de $[AB]$, Q est un point de (AC) et R est sur le segment $[BC]$.
Les graduations sur les droites sont régulières.
L'objectif de cet exercice est de démontrer que les points P, Q et R sont alignés.

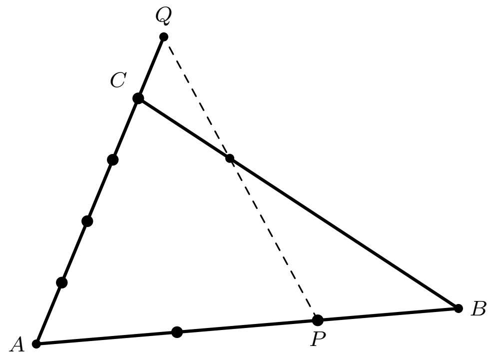
1. Donner les valeurs des réels a, b et c tel que :
$$\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AQ} = b\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{BR} = c\overrightarrow{BC}$$
2. Montrer que $\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Montrer que $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont multiples l'un de l'autre. Conclure.



Exercice 39

ABC est un triangle. P est le milieu de $[AB]$, Q est un point de (AC). Les graduations sur les droites sont régulières. R est le point d'intersection des droites (PQ) et (BC).
On sait que pour un certain nombre k : $\overrightarrow{BR} = k\overrightarrow{BC}$. L'objectif de cet exercice est de trouver k.

1. Donner les valeurs des réels a et b tel que :
$$\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AQ} = b\overrightarrow{AC}$$
2. Montrer que $\overrightarrow{PQ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{PR} = \left(\frac{1}{3} - k\right)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.
4. Trouver k pour que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ soient multiples l'un de l'autre.



Exercice 40

ABC est un triangle ; P est un point de (AB), Q un point de (BC) et R un point de (AC) disposés comme sur le dessin (les graduations sur les droites sont régulières).

1. Donner les valeurs des réels a, b, et c tels que :
$$\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AR} = b\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{BQ} = c\overrightarrow{BC}$$
2. Exprimer $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Démontrer que $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{9}{28}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}$
4. Justifier que $\overrightarrow{PQ} = -\dfrac{9}{7}\overrightarrow{PR}$. Que conclure ?