

# Fractions : sommes, comparaisons et applications

## 6.1 Comparaison de fractions

Pour comparer des fractions en général, il est pratique de comparer d'écrire des fractions égales qui ont le même dénominateur.

■ **Exemple 6.1** Pour comparer  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{5}{6}$  et  $\frac{6}{8}$ .

Multiples de 4 :

Multiples de 6 :

Multiples de 8 :

Plus petit multiple commun de 4, 6 et 8 est 24.

$$\frac{3}{4} = \frac{\quad}{4 \times \dots} = \frac{\quad}{24} \quad \frac{5}{6} = \frac{\quad}{6 \times \dots} = \frac{\quad}{24} \quad \frac{6}{8} = \frac{\quad}{8 \times \dots} = \frac{\quad}{24}$$

**R** Les comparaisons naïves induisent des erreurs :

$$\frac{2}{3} < \frac{5}{6} \quad \text{mais} \quad \frac{2}{3} > \frac{5}{10}$$

## 6.2 Sommes de fractions de même dénominateur

**Théorème 6.2 — Somme de fractions de même dénominateur.**

Pour tout nombres  $x$ ,  $a$  et  $b$  ( $b$  non nul) :

$$\frac{x}{b} + \frac{a}{b} = \frac{x+a}{b}$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \frac{x}{b} + \frac{a}{b} &= x \times \frac{1}{b} + a \times \frac{1}{b} && x \text{ } b\text{-ièmes et } a \text{ } b\text{-ièmes} \\ &= (x+a) \times \frac{1}{b} && (x+a) \text{ } b\text{-ièmes} \\ &= \frac{x+a}{b} \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 6.3**

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{5}{23} - \frac{20}{23} &= \frac{5}{23} + \frac{-20}{23} = \frac{5-20}{23} = \frac{-15}{23} = -\frac{15}{23} \\ \text{b) } \frac{7}{9} - \frac{-4}{9} &= \frac{7}{9} + \frac{-(-4)}{9} = \frac{7+4}{9} = \frac{11}{9} \\ \text{c) } 2 - \frac{4}{7} &= 2 \times \frac{7}{7} - \frac{4}{7} = \frac{2 \times 7 - 4}{7} = \frac{10}{7} \end{aligned}$$

**Théorème 6.4 — règle d'addition pour dénominateurs différents.**

Pour tout nombres  $a$ ,  $b$ ,  $x$  et  $y$ , sans zéros aux dénominateurs :

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay + bx}{by}$$

■ **Exemple 6.5** Faire l'effort de trouver le plus petit dénominateur

$$\begin{aligned} A &= \frac{7}{30} + \frac{2}{12} \\ &= \frac{7 \times 12}{30 \times 12} + \frac{2 \times 30}{12 \times 30} \\ &= \frac{84}{360} + \frac{60}{360} \\ &= \frac{84+60}{360} \\ &= \frac{144}{360} \\ &= \frac{144 \div \dots}{36 \div \dots} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A &= \frac{7}{30} + \frac{2}{12} \\ &= \frac{7 \times \dots}{30 \times \dots} + \frac{2 \times \dots}{12 \times \dots} \\ &= \frac{\dots}{60} + \frac{\dots}{60} \\ &= \frac{14+10}{60} \\ &= \frac{24}{60} \\ &= \frac{24 \div \dots}{60 \div \dots} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

## 6.2.1 Exercices : sommes de fractions

## Niveau 1 : Point méthode

1. Écrire l'expression pour avoir que des additions de fractions de dénominateur positifs
2. Vérifie que les fractions ont même dénominateur
3. Ajoute les numérateurs. Respecte les règles d'addition de relatifs.
4. Écrire la somme sur le dénominateur

■ **Exemple 6.6 — Je fais.** Écrire sous forme d'une fraction irréductible ou d'un entier les expressions suivantes :

$$A = \frac{3}{5} + \frac{-8}{5}$$

$$B = \frac{-7}{3} - \frac{5}{3}$$

$$C = \frac{7}{-6} - \frac{-3}{6}$$

$$D = -\frac{2}{9} + \frac{3}{-9}$$

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

**Exercice 1** même consignes

$$A = \frac{9}{8} + \frac{5}{8}$$

$$D = \frac{-6}{5} + \frac{-3}{5}$$

$$G = -\frac{6}{5} + \frac{-3}{5}$$

$$J = -\frac{1}{12} + \frac{11}{12}$$

$$B = -\frac{9}{10} + \frac{1}{10}$$

$$E = \frac{-6}{5} - \frac{3}{5}$$

$$H = \frac{8}{9} - \frac{13}{9}$$

$$K = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2} - \frac{-7}{2}$$

$$C = \frac{5}{3} - \frac{7}{3}$$

$$F = \frac{-6}{5} - \frac{-3}{5}$$

$$I = \frac{-1}{12} - \frac{7}{12}$$

$$L = \frac{7}{9} - \frac{-4}{9} + \frac{5}{9}$$

■ **Exemple 6.7 — Je fais.** même consignes

$$A = 2 \times \frac{4}{7}$$

$$B = 2 \div \frac{4}{7}$$

$$C = 2 + \frac{4}{7}$$

$$D = -2 + \frac{4}{7}$$

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

**Exercice 2** même consignes

$$A = 2 + \frac{4}{15}$$

$$D = 4 - \frac{3}{7}$$

$$G = 2 \div \frac{-5}{6}$$

$$J = 3 - \frac{2}{5} \times 4$$

$$B = 4 + \frac{3}{4}$$

$$E = -7 + \frac{3}{4}$$

$$H = -14 + \frac{5}{7}$$

$$K = -5 + \frac{3}{7} - \frac{25}{7}$$

$$C = 2 + \frac{-5}{6}$$

$$F = 2 - \frac{-5}{6}$$

$$I = -14 \times \frac{5}{7}$$

$$L = 3 \times \left( \frac{2}{5} - 4 \right)$$

■ **Exemple 6.8 — Partie entière d'une fraction.** Décomposer les fractions suivantes en une addition d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

$$\begin{array}{lcl}
 A = \frac{35}{8} & \left. \begin{array}{l} \text{Division euclidienne par 8} \\ \text{On utilise } \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \end{array} \right\} & B = \frac{43}{9} \\
 = \frac{4 \times 8 + 3}{8} & & = \\
 = \frac{4 \times 8}{8} + \frac{3}{8} & & = \\
 = 4 \times \frac{8}{8} + \frac{3}{8} & & = \\
 = 4 + \frac{3}{8} & & =
 \end{array}$$

**Exercice 3** Mêmes consignes

$$A = \frac{16}{11} \quad \left| \quad B = \frac{18}{7} \quad \left| \quad C = \frac{79}{5} \quad \left| \quad D = \frac{82}{11} \quad \left| \quad E = \frac{94}{10} \quad \left| \quad F = \frac{67}{5}
 \right.
 \right.
 \right.
 \right.
 \right.
 \right.$$

■ **Exemple 6.9** Écrire sous forme d'une fraction irréductible. Montrer les calculs.

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} =$$

**Exercice 4 — fractions continues.** Donner l'écriture en fractions d'entiers des expressions suivantes.

$$\left. \begin{array}{l} A = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}} \\ B = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \end{array} \right| \begin{array}{l} C = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}} \\ D = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}} \end{array} \left| \begin{array}{l} E = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}}} \\ F = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} \end{array} \right.$$

■ **Exemple 6.10** Écrire les fractions suivantes sous la forme d'une fraction continue

$$\frac{55}{17} = 3 + \frac{4}{17} = \qquad \qquad \frac{11}{9} =$$

$$55 = 3 \times 17 + 4$$

$$17 = 4 \times 4 + 1$$

$$4 = 4 \times 1 + 0$$

**Exercice 5 — À vous.** Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction continue.

$$A = \frac{13}{10} \quad \left| \quad B = \frac{16}{7} \quad \left| \quad C = \frac{25}{13} \quad \left| \quad D = \frac{11}{8}
 \right.
 \right.
 \right.
 \right.$$

$$\text{solution de l'exercice 4. } A = \frac{15}{8}; B = \frac{11}{3}; C = \frac{30}{13}; D = \frac{33}{10}; E = \frac{161}{72}; F = \frac{19}{15}; \quad \blacksquare$$

$$\text{solution de l'exercice 5. } A = [1, 3, 3]; B = [2, 3, 2]; C = [1, 1, 12]; D = [1, 2, 1, 2]; \quad \blacksquare$$

**Niveau 2 : Point méthode**

1. Écrire l'expression pour avoir que des additions de fractions de dénominateur positifs
2. Trouver le plus petit dénominateur commun et écrire les fractions équivalentes
3. Ajoute les numérateurs. Respecte les règles d'addition de relatifs.
4. Écrire la somme sur le dénominateur.
5. Simplifie si possible la réponse obtenue

■ **Exemple 6.11 — Je fais.** Écrire sous forme d'une fraction irréductible ou d'un entier les expressions suivantes. Montrer les calculs.

$$A = -\frac{3}{7} - \frac{5}{14}$$

=

=

=

=

$$C = \frac{1}{5} - \frac{3}{7}$$

=

=

=

=

$$B = \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + \frac{1}{9}$$

=

=

=

=

**Exercice 6** Mêmes consignes.

$$A = \frac{1}{7} - \frac{1}{4}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{-1}{3}$$

$$C = -\frac{1}{8} + \frac{1}{5}$$

$$D = \frac{1}{21} - \frac{1}{-7}$$

$$E = -\frac{4}{7} + \frac{3}{7}$$

$$F = \frac{13}{20} - \frac{13}{5}$$

$$G = \frac{-8}{15} - \frac{9}{5}$$

$$H = \frac{5}{6} - \frac{4}{11}$$

$$I = \frac{9}{6} - \frac{-3}{7}$$

$$J = \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$

$$K = -\frac{8}{5} + \frac{9}{15} + \frac{3}{10}$$

$$L = \frac{4}{12} - \frac{9}{-8} - \frac{1}{4}$$

**Exercice 7 — mélange d'opérations.** Mêmes consignes. Attention aux priorités.

$$A = 3 \div \left( \frac{2}{5} - 4 \right)$$

$$B = -\frac{2}{5} + \frac{5}{4} \times \frac{3}{2}$$

$$C = 3 \times \frac{3}{4} + \frac{8}{5}$$

$$D = 3 \times \frac{11}{12} - \frac{3}{10}$$

$$E = \left( 2 + \frac{1}{4} \right) \times \left( 1 + \frac{1}{3} \right)$$

$$F = \frac{\left( 1 + \frac{1}{5} \right)}{\left( 2 + \frac{3}{4} \right)}$$

$$G = -2 + \frac{3}{4} - \left( 1 + \frac{4}{5} \right)$$

$$H = \frac{4}{-3} + \frac{-7}{6} \times \frac{-2}{5}$$

$$I = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{8}{7}}$$

$$J = \frac{\frac{1}{6} - \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} - \frac{4}{7}}$$

**Exercice 8**

Ramener au même dénominateur puis ranger dans l'ordre croissant les nombres :  $\frac{4}{9}$ ;  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{6}{7}$ ;  $\frac{2}{3}$ ;  $\frac{5}{8}$ .

**Exercice 9**

Jade a vendu au marché  $\frac{1}{3}$  de ses pommes de terre le lundi et  $\frac{2}{5}$  le mardi. Mercredi elle vend tout le reste.


- Quelle fraction de la quantité de pommes de départ vend-elle mercredi ?
- Quel jour a-t-elle vendu le plus ?

**Exercice 10**

Jade a vendu au marché  $\frac{1}{3}$  de ses pommes de terre le lundi et  $\frac{2}{5}$  de ce qui lui restait le mardi. Mercredi elle vend tout le reste.


- Quelle fraction de la quantité de pommes de départ vend-elle mardi ?
- Quelle fraction de la quantité de pommes de départ vend-elle mercredi ?
- Quel jour a-t-elle vendu le plus ?

**Exercice 11**

À l'élection de Miss Math 2021, Yasmine a remporté  $\frac{1}{10}$  des suffrages, Corinne  $\frac{9}{80}$  et Marina tous les autres. Qui a été élue ?

**Exercice 12**

Nadia colorie un mandala selon les proportions suivantes :  $\frac{1}{4}$  en carmin,  $\frac{11}{40}$  en ocre jaune,  $\frac{13}{40}$  en turquoise et le reste en pourpre.

Quelle est elle la couleur qui recouvre le plus de surface ?

**Exercice 13**

Trois internautes sur dix utilisent le navigateur Firefox. Et parmi ces utilisateurs, les  $\frac{2}{45}$  ont la dernière version en date de ce navigateur.

Quelle est la proportion d'internautes utilisant la dernière version de Firefox ?

**Exercice 14**

Maxime refait la tapisserie de son salon. Il pose  $\frac{4}{15}$  du papier peint le premier jour,  $\frac{2}{5}$  le deuxième jour, et  $\frac{1}{6}$  le troisième jour. A-t-il fini ?

**Exercice 15**

Les  $\frac{9}{16}$  des habitants d'un village ont un téléphone portable. Parmi eux, les  $\frac{2}{3}$  l'utilisent chaque jour.

- Quelle est la fraction des habitants qui n'ont pas de téléphone portable ?
- Calculer la proportion des habitants de ce village qui utilisent chaque jour leur téléphone portable.