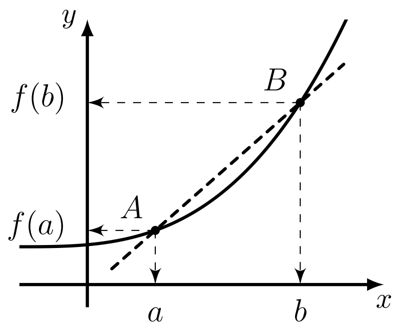
Chapitre 4

Dérivation (1) Premiers principes

Table 4.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 4...

	Pour m'entraîner ✍		
Je dois **connaître**.../**savoir faire**...	🪨	💎	💍
Pente, tracé de tangentes et lecture graphique de nombre dérivés			
pentes et taux de variation entre a et b	1, 2, 3	11	
déterminer le nombre dérivé par lecture graphique	4, 5	6	
Équations réduite de la tangente			
déterminer l'équation réduite d'une tangente à partir du nombre dérivé		7 à 10	27, 28, 29
Utiliser la définition du nombre dérivé			
déterminer le nombre dérivé par les premiers principes	12	13 à 16	23
déterminer l'expression de la fonction dérivée	17	18	24
démontrer les fonctions dérivées de fonctions de références	19, 20	21, 22,	25

4.1 Le nombre dérivé

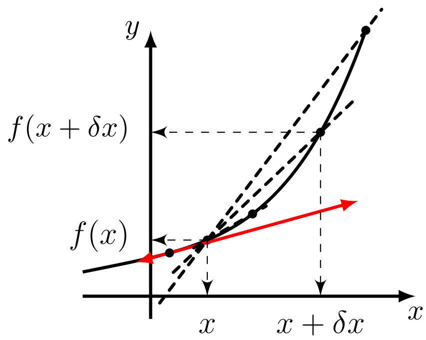


Définition 4.1 Soit une fonction f définie sur $[a;b]$.

Le **taux de variation de** f **entre** a **et** b est le rapport :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Le taux de variation de f entre a et b est la pente de la sécante (AB) à la courbe $\mathscr{C}_f$ passant par les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.



Pour une fonction f définie sur l'intervalle ouvert I et $x \in I$.

Le **taux de variation infinitésimal** est la limite du taux de variation entre x et $x+\delta x$ pour de très petites valeurs de δx :

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} = ?$$

Graphiquement, cette limite correspond à la pente de la droite tangente à $\mathscr{C}_f$.

Définition 4.2 Soit f définie sur un intervalle ouvert I, et $x_0 \in I$.

La fonction f est **dérivable en** x, si les limites suivantes existent :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad \text{Lagrange (1736 – 1813)}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{\delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0+\delta x)-f(x_0)}{\delta x} \qquad \text{Leibniz (1646 – 1716)}$$

$f'(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ est le **nombre dérivé de** f **en** x_0.

R L'écriture $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ représente « l'opérateur de différentiation »par rapport à une variable donnée.

Si la dérivation se fait par rapport au temps t, la notation de Newton $\dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ peut être utilisée pour la variation instantanée .

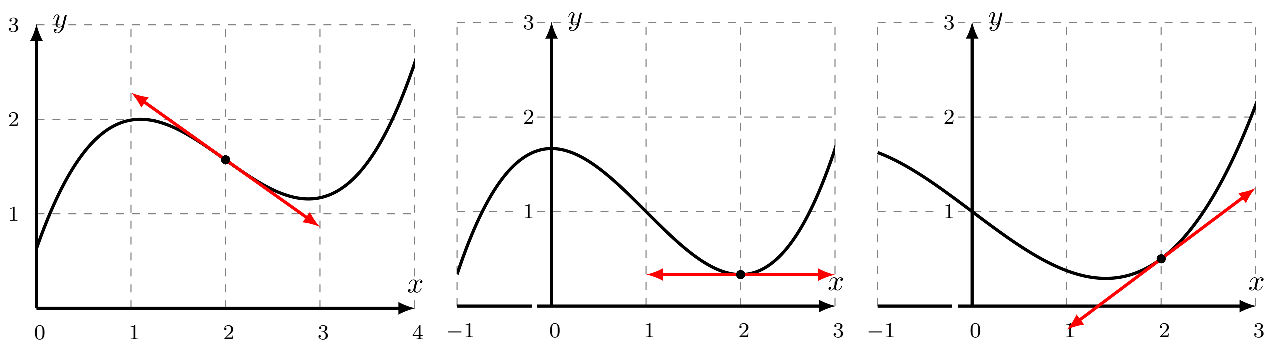


Figure 4.1 – La fonction f est dérivable en $x_0 = 2$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = 2$ est non verticale et de pente $f'(x_0) < 0$ (gauche) $f'(x_0) = 0$ (centre) $f'(x_0) > 0$ (droite).

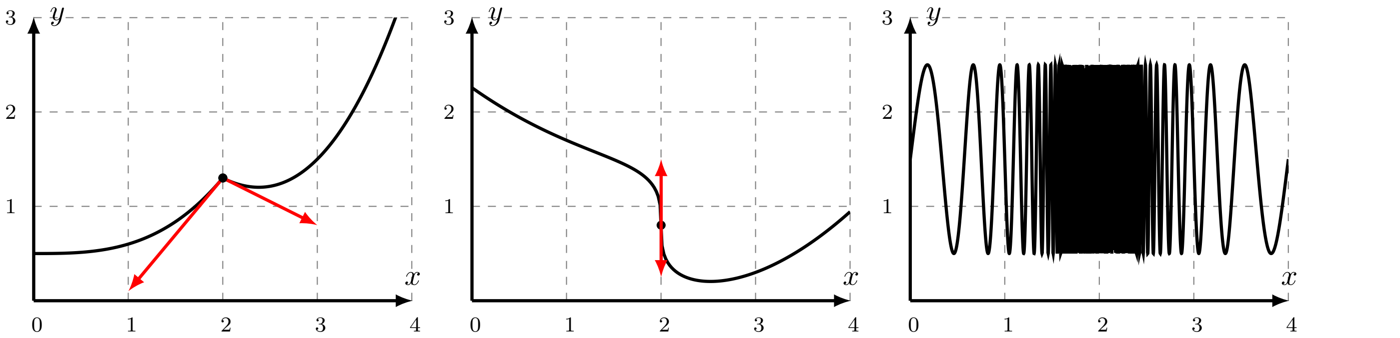


Figure 4.2 – La fonction f n'est pas dérivable en $x_0 = 2$. La courbe $\mathscr{C}_f$ peut avoir plusieurs tangentes (gauche) une tangente verticale (centre) ou aucune tangente (droite).

Proposition 4.1 — **Équation de la tangente.** Si f est dérivable en x_0, la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ est une droite non verticale d'équation

$$T\colon y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Proposition 4.2 — **approximation par une fonction affine.** Si f est dérivable en x_0. Lorsque x est au voisinage de x_0, l'approximation affine de $f(x)$ est donnée par :

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Autrement dit, pour h proche de zéro, l'accroissement des images est approximativement proportionnel à l'accroissement des abscisses $f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h$.

R Concernant la rédaction :

1. Il faut préciser le domaine d'une fonction. Ainsi on ne dira pas « la fonction $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$ », mais plutôt « la fonction f définie sur D par $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$ ».
   L'**expression** $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$ permettra de calculer l'image par f pour tout $x \in \mathbb{D}$.
2. Une courbe est décrite par son équation. On écrit « $\mathscr{C}_f\colon y = 2x^3 - 3x + 2$ » pour dire que $y = 2x^3 - 3x + 2$ est **l'équation de la courbe** $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.
   Cela signifie « $M(x; y) \in \mathscr{C}_f \iff y = 2x^3 - 3x + 2$ ».
3. La fonction f est « l'ensemble de couples $(x; y)$ qui vérifient l'équation $y = 2x^3 - 3x + 2$ ». Il est correct, **mais peu usuel**, de dire « soit la fonction d'équation $y = 2x^3 - 3x + 2$ ».

Proposition 4.3 — **identités.** Pour tous réels x et y on a :

$$(x+y)^0 = 1$$

$$(x+y)^1 = x + y$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

n=0	1					
n=1	1	1				
n=2	1	2	1			
n=3	1	3	3	1		
n=4	1	4	6	4	1	
n=5	1	5	10	10	5	1

4.2 Formulaire de dérivation pour la première

Premier principe Nombre dérivé de f en x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ Notation de Lagrange (1736 – 1813)

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x_0+\delta x)-f(x_0)}{\delta x} = \lim_{y \to x_0} \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$$ Notation de Leibniz (1646 – 1716)

Equation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $A(x_0, f(x_0))$ a pour équation

$$T\colon y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Dérivées des fonctions de référence			
Fonction f	**Domaine de définition**	**Fonction dérivée f'**	**Domaine de dérivabilité**
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	
x	$\mathbb{R}$	1	
x^2	$\mathbb{R}$		
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}$		
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$		
$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$)			
$\sqrt{x}$			
e^x			

Dérivées et opérations	
Fonction f	**Fonction dérivée f'**
$u(x)+v(x)$	
$ku(x)$	
$uv(x)$	
$\dfrac{1}{v(x)}$	
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	

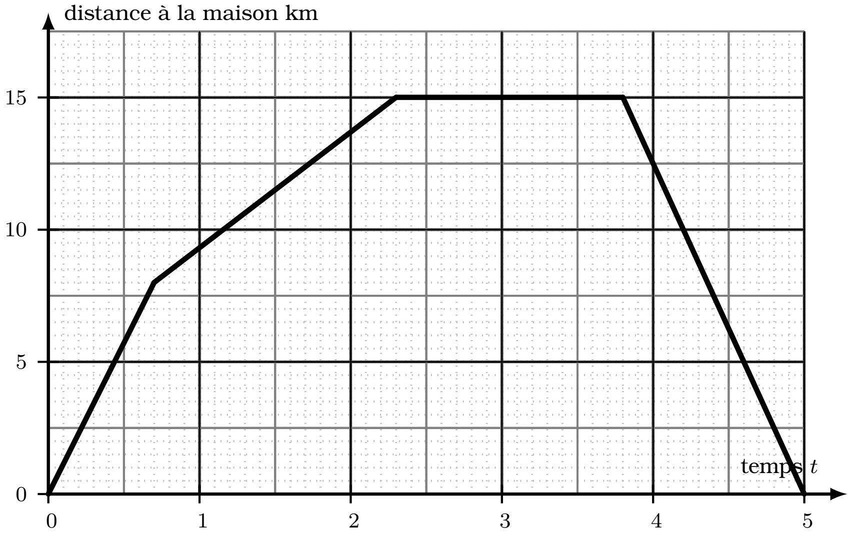
Cas particulier des fonctions composées	
Fonction f	**Fonction dérivée f'**
$u(ax+b)$	
$(ax+b)^n$	
$\sqrt{ax+b}$	
e^{ax+b}	

4.3 Exercices

4.3.1 Exercices : variations moyennes et variations infinitésimales

Exercice 1

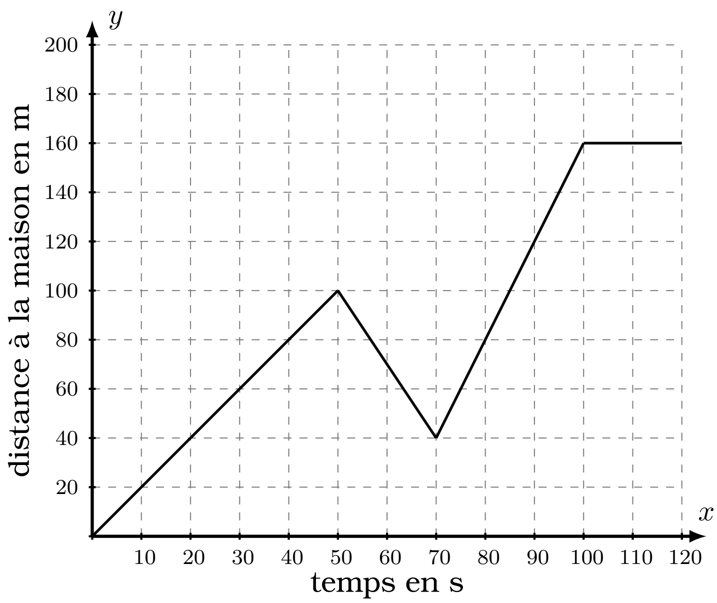
La distance $d(t)$ d'un cycliste à la maison en fonction du temps t est représentée ci-contre.



1. Déterminer la vitesse moyenne du cycliste entre 0h 42min et 2h 18min.
2. Complétez pour décrire le trajet représenté :
   « En sortant de chez lui, un cycliste fait _________ km à la vitesse de _________ $\mathrm{km\,h^{-1}}$. _________ min après avoir quitté la maison le cycliste ralenti à la vitesse de _________ $\mathrm{km\,h^{-1}}$ pour _________ h. Arrivé à _________ km de la maison, il prend une pause de _________ h. Il prend le chemin du retour à la vitesse de _________ $\mathrm{km\,h^{-1}}$ »
3. La fonction d définie sur $[0;5]$ est une **fonction affine par morceaux**. Déterminer le coefficient a et le terme constant b de la forme réduite sur chaque segment du trajet :
   a) Pour tout $t \in [0;0{,}7]$, $f(t) = at + b$.
   b) Pour tout $t \in [0{,}7;2{,}3]$, $f(t) = at + b$.
   c) Pour tout $t \in [2{,}3;3{,}8]$, $f(t) = at + b$.
   d) Pour tout $t \in [3{,}8;5]$, $f(t) = at + b$.

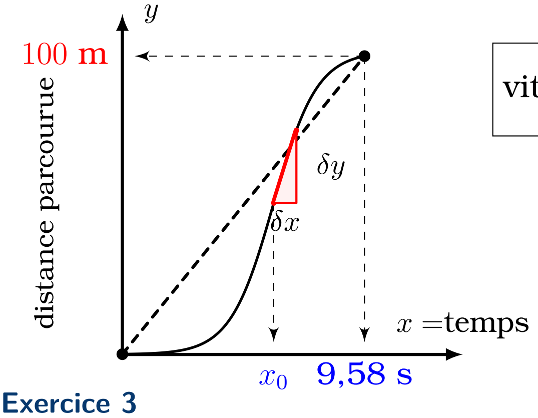
Exercice 2

Pour se rendre à l'école tous les matin, Tom marche doit faire 160 m depuis sa maison jusqu'à l'arrêt de bus. Le graphique ci-dessous représente son parcours un certain jour.



1. Détermine la pente de chaque segment du graphe, et donc sa vitesse moyenne sur chaque segment du trajet.
2. Déterminer pour chaque segment de droite son équation réduite.

En réalité, la vitesse est rarement constante, et la représentation de la distance parcourue n'est plus par petits segments droits mais une courbe. Usain Bolt parcourt 100 m en 9,58 s, pour une vitesse moyenne de 37,5 km h^{-1}. La **vitesse instantanée** en x_0, i.e. la variation $\frac{\delta y}{\delta x}$ entre deux instants très prochess de x_0 peut atteindre 50 km h^{-1} !



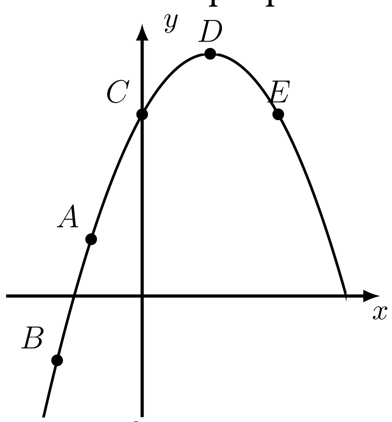
$$\text{vitesse moyenne} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{100\text{ m}}{9{,}58\text{ s}} \approx 10{,}44\text{ m s}^{-1} = 37{,}5\text{ km h}^{-1}$$

$$\text{vitesse instantanée à l'instant } x_0 = \frac{\delta y}{\delta x}$$

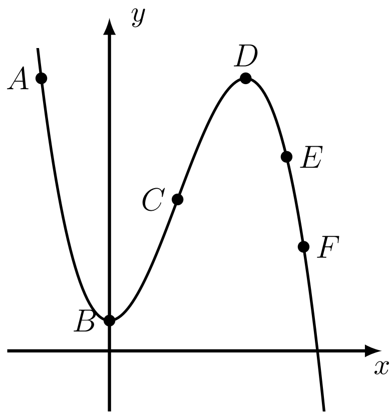
pic de vitesse instantanée 50 km h^{-1}

Exercice 3

1. Associer chaque pente à un point de la courbe.



Pente	**Points**
-4	
4	
0	
10	
8	



Pente	**Points**
-9	
0	
-10	
3	
-3.75	

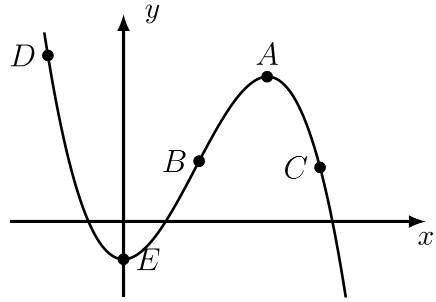
2. Pour la fonction ci-contre, en quel(s) points la courbe représentative a-t-elle :

   a) une pente positive ....

   b) une pente négative ....

   c) la pente la plus grande ....

   d) une pente nulle ....



3. Pour la fonction f représentée ci-contre, déterminer par lecture graphique :

   a) la valeur de f pour $x = 0{,}6$ ....

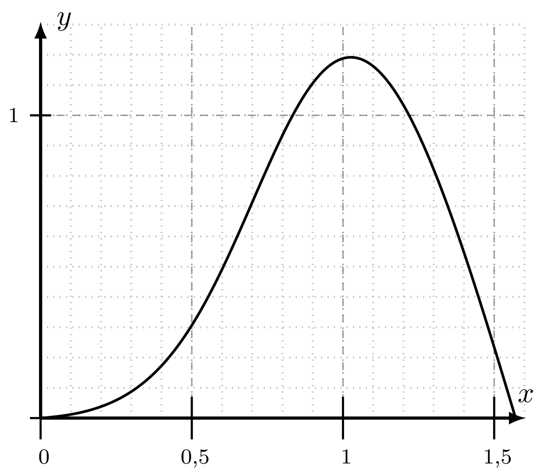
   b) la variation instantanée de f pour $x = 0{,}6$ ....

   c) la valeur de f pour $x = 1{,}3$ ....

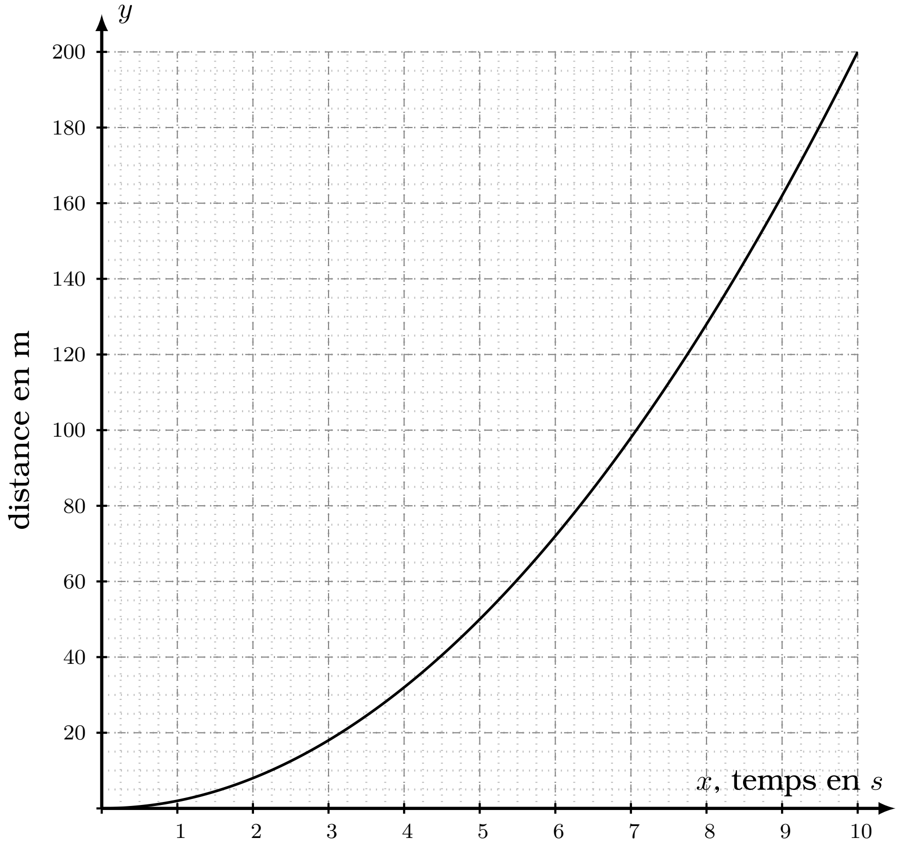
   d) la variation instantanée de f pour $x = 1{,}3$ ....

   e) la valeur de f pour $x = 1$ ....

   f) la variation instantanée de f pour $x = 1$ ....



Exercice 4

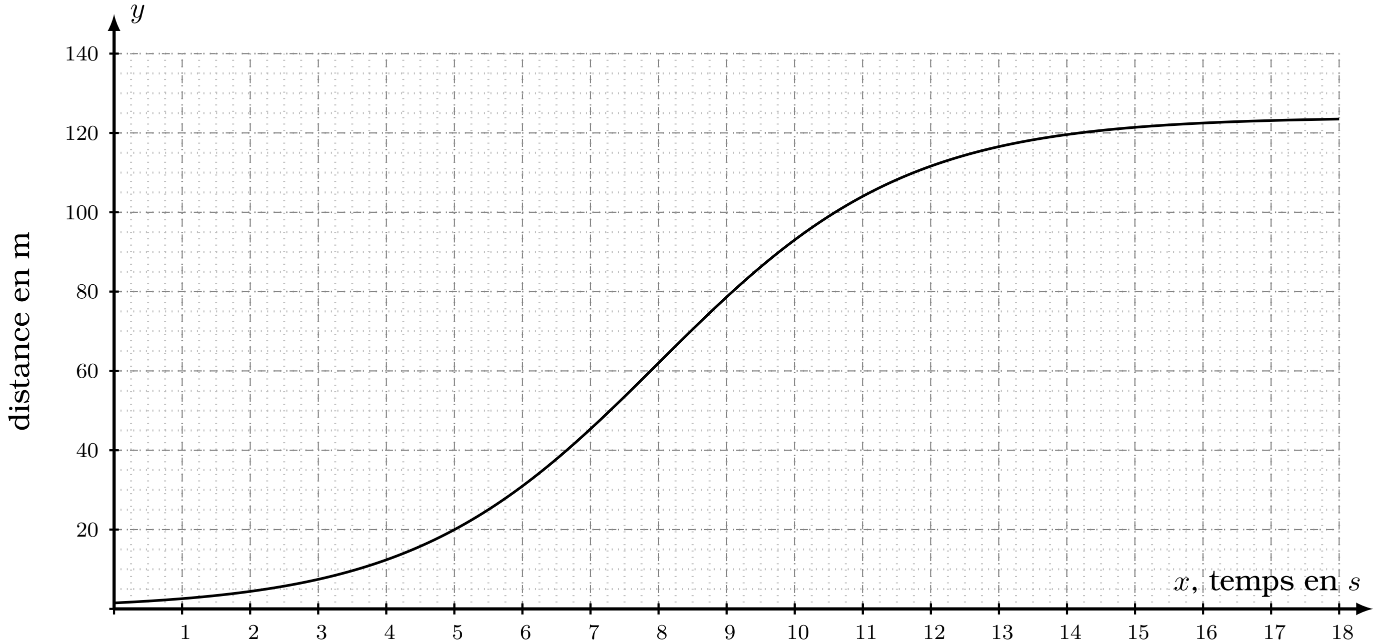


La distance parcourue en voiture par Jim en s'éloignant de sa maison est représentée ci-contre.
Tracer la tangente à la courbe aux points d'abscisse t, puis estimer la vitesse instantanée de la voiture à cet instant.

1. $t = 6{,}5$ s.
2. $t = 6{,}5$ s.
3. $t = 3$ s.
4. $t = 10$ s.
5. $t = 0$ s.

Exercice 5

La fonction f représente la distance parcourue en fonction du temps écoulé.



1. Déterminer les valeurs de $f(3)$, $f(4{,}5)$ et $f(14)$.
2. Déterminer les valeurs de $f'(3)$, $f'(4{,}5)$ et $f'(14)$.
3. Interpréter les valeurs obtenues dans le contexte de l'exercice.

4.3.2 Exercices : lecture graphique du nombre dérivé

Exercice 6

1. Par lecture graphique déterminer ou comparer :

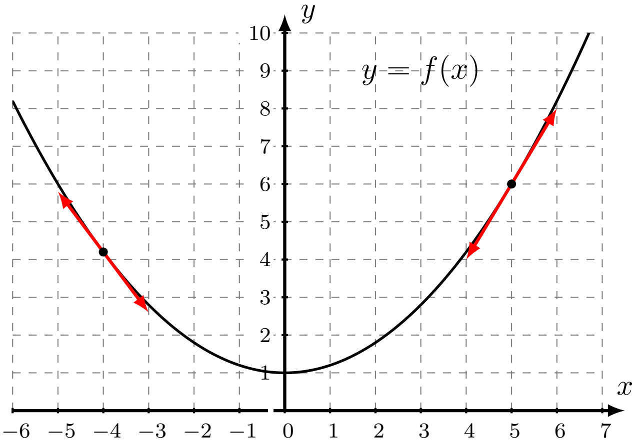
$f(5) = \ldots\ldots$ $\quad$ $f'(5) = \ldots\ldots$

$f(0) = \ldots\ldots$ $\quad$ $f'(0) = \ldots\ldots$

$f(-4) = \ldots\ldots$ $\quad$ $f'(-4) = \ldots\ldots$

$f(2) \ldots\ldots f(5)$ $\quad$ $f'(2) \ldots\ldots f'(5)$

$f'(-3) \ldots\ldots 0$ $\quad$ $f'(2) \ldots\ldots 0$



2. Même question avec la fonction g représentée ci-contre :

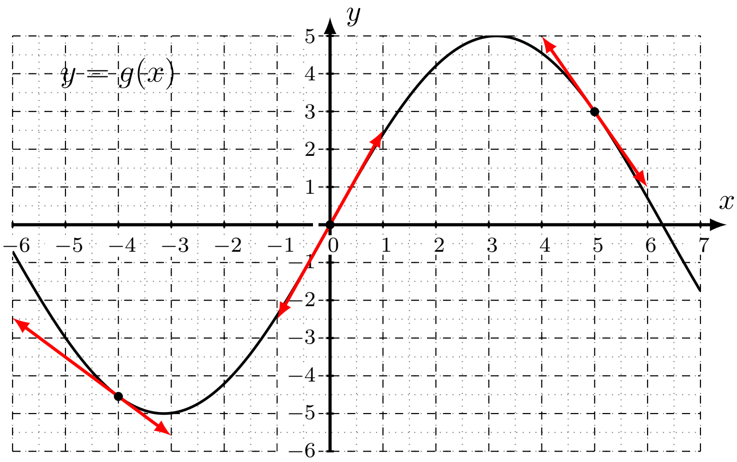
$g(-1) = \ldots\ldots$ $\quad$ $g'(-1) \approx \ldots\ldots$

$g(0) = \ldots\ldots$ $\quad$ $g'(0) = \ldots\ldots$

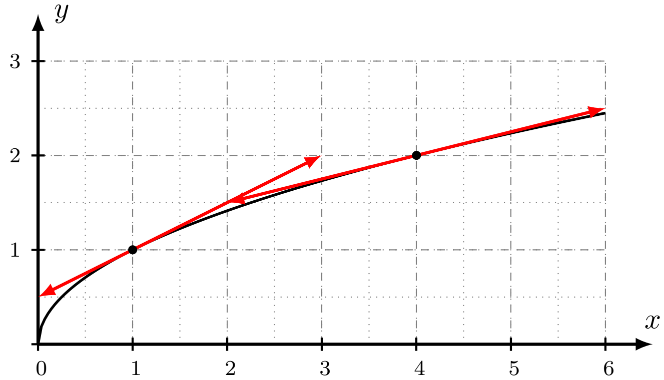
$g(-5) = \ldots\ldots$ $\quad$ $g'(-5) = \ldots\ldots$

$g(2) \ldots\ldots 0$ $\quad$ $g'(-4) \ldots\ldots g'(6)$

$g'(-3) \ldots\ldots 0$ $\quad$ $g'(3) \ldots\ldots 0$



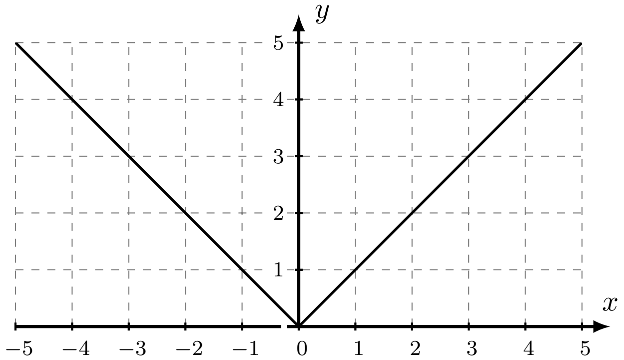
3. Même question avec les représentations graphiques de la fonction racine carré et de la fonction valeur absolue :



$f(1) = \ldots\ldots$ $\quad$ $f'(1) = \ldots\ldots$

$f(4) = \ldots\ldots$ $\quad$ $f'(4) = \ldots\ldots$

$f(0) = \ldots\ldots$ $\quad$ $f'(0) = \ldots\ldots$

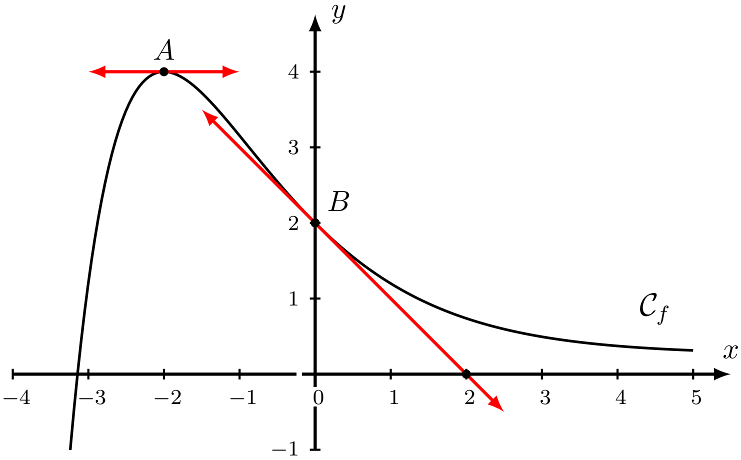


$f(2.7) = \ldots\ldots$ $\quad$ $f'(2.7) = \ldots\ldots$

$f(-1.75) = \ldots\ldots$ $\quad$ $f'(-1.75) = \ldots\ldots$

$f(0) = \ldots\ldots$ $\quad$ $f'(0) = \ldots\ldots$

Exercice 7



Soit la fonction f et sa représentation graphique $\mathcal{C}_f$. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses. La tangente au point $B(0;2)$ passe par le point de coordonnées $(2;0)$.

1. Déterminer par lecture graphique :
   a) $f(-2) = \ldots\ldots$, $\quad f(0) = \ldots\ldots$
   b) $f(-2) = \ldots\ldots$, $\quad f(0) = \ldots\ldots$
2. En déduire les équations réduites des droites T_A et T_B tangentes respectives à $\mathscr{C}_f$ en A et B.

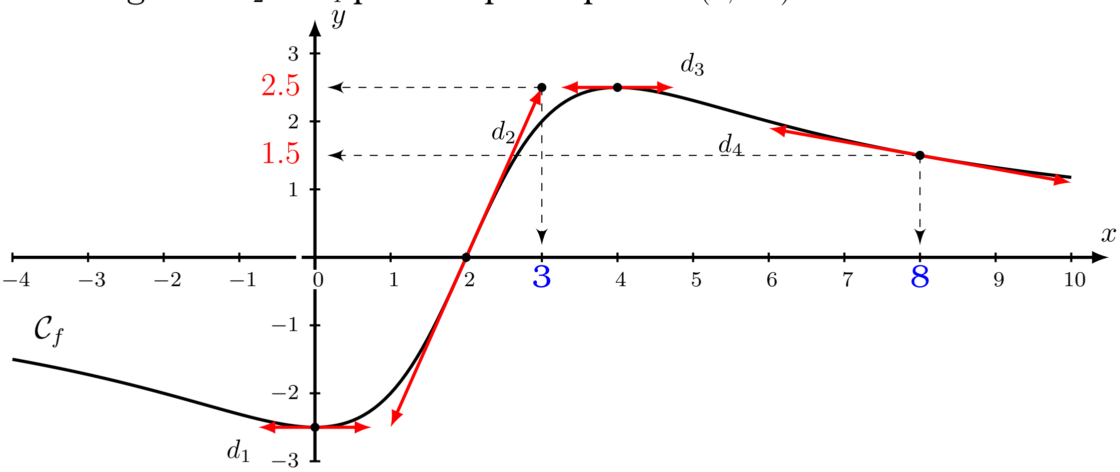
$T_A : y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$ $\qquad$ $T_B : y = f'(x_B)(x - x_B) + f(x_B)$

$T_A : y = \ldots(x - \ldots\ldots) + \ldots$ $\qquad$ $T_B : y = \ldots(x - \ldots\ldots) + \ldots$

$T_A : y =$ $\qquad$ $T_B : y =$

Exercice 8

Sur la figure ci-dessous les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f. Les tangentes d_2 et d_4 passent par le point $C(3;2.5)$.



1. Déterminer par lecture graphique :

$f(0) = \ldots\ldots$, $\quad f(2) = \ldots\ldots$, $\quad f(4) = \ldots\ldots$, $\quad f(8) = \ldots\ldots$

$f'(0) = \ldots\ldots$, $\quad f'(2) = \ldots\ldots$, $\quad f'(4) = \ldots\ldots$, $\quad f'(8) = \ldots\ldots$

2. En déduire les équations réduites des tangentes d_1, d_2, d_3 et d_4.

$d_1 : y = \ldots(x - \ldots\ldots) + \ldots$ $\qquad$ $d_2 : y = \ldots(x - \ldots\ldots) + \ldots$

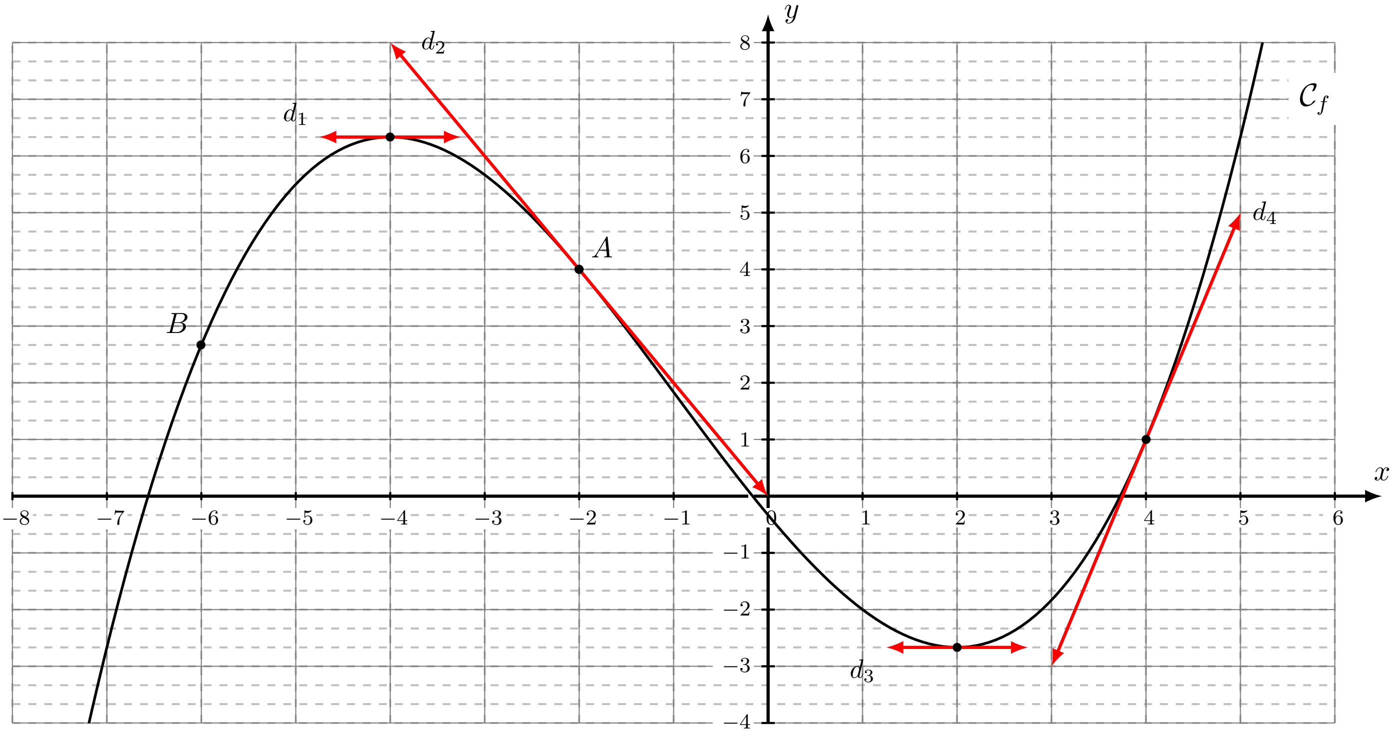
$y =$ $\qquad$ $y =$

$d_3 : y = \ldots(x - \ldots\ldots) + \ldots$ $\qquad$ $d_4 : y = \ldots(x - \ldots\ldots) + \ldots$

$y =$ $\qquad$ $y =$

Exercice 9

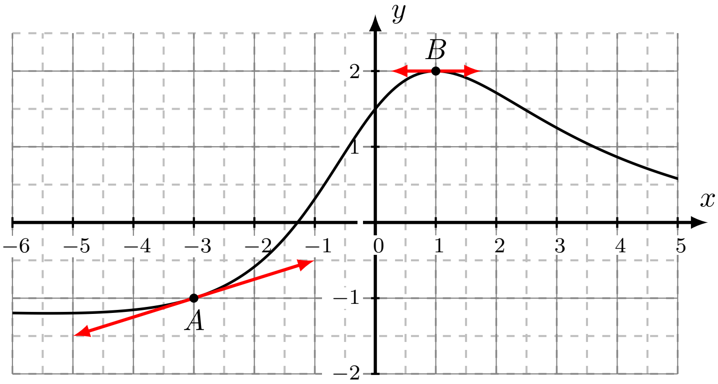
Sur la figure ci-dessous, C_f est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. Les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont tangentes à la courbe C_f.



1. Déterminer par lecture graphique $f(-4)$, $f(-2)$ et $f(2)$.
2. Déterminer par lecture graphique les nombres dérivés $f'(-4)$ et $f'(2)$.
3. La tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse -2 passe par l'origine du repère. Déterminer $f'(-2)$.
4. La tangente T à la courbe C_f au point $B\left(-6;\dfrac{8}{3}\right)$ est parallèle à la droite d_4.
   Déterminer $f'(-6)$ puis, donner une équation de la tangente T à la courbe au point B.
   Tracer cette droite sur le graphique précédent.

Exercice 10

La courbe $\mathcal{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f'. Les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points A et B d'abscisses respectives (-3) et 1 sont signalées par les flèches.



1. Déterminer graphiquement $f'(1)$ et $f'(-3)$.
2. On sait que $f'(0) = 1$. Le point de coordonnées $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$ appartient-il à la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?
3. Vrai ou Faux ? « $f'(-2) \leqslant f'(3)$ »

4.3.3 Exercices : calcul du nombre dérivé à l'aide du premier principe

Exercice 11 — taux de variation entre a et b.

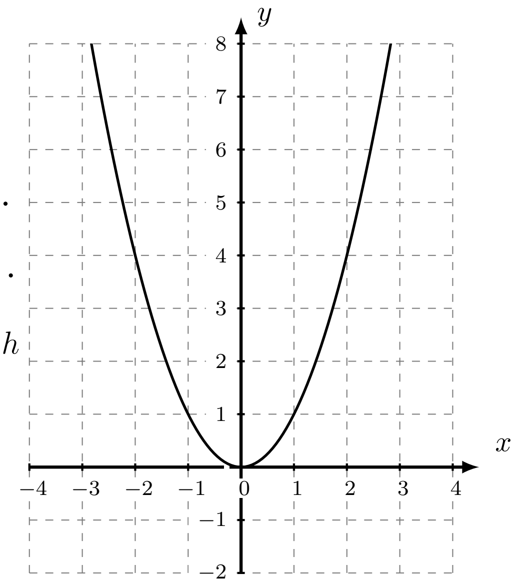
Pour les fonctions suivantes calculer le taux de variation demandé :

1. Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$, taux de variation entre -1 et 1.
2. Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3$, taux de variation entre 1 et 3.
3. Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6$, taux de variation entre 2 et 6.
4. Pour f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, taux de variation entre 3 et 7

Exercice 12 — nombre dérivé et définition.

1. Pour tout $h \neq 0$, le taux de variation de f entre 4 et $4 + h$ est égal à $2 + h$. f est-elle dérivable en 4 ? Si oui, quel est son nombre dérivé en 4.
2. Pour tout $h \neq 0$, on sait que $\dfrac{f(-7+h) - f(-7)}{h} = \dfrac{5}{3}(4h+9)$. f est-elle dérivable en -7 ? Si oui, déterminer $f'(-7)$.
3. Pour tout $h \neq 0$, on sait que le taux de variation entre 3 et $3 + h$ est égal à $-\dfrac{9}{h}$. f est-elle dérivable en 3 ? Si oui, quel est son nombre dérivé en 3.

Exercice 13 — calcul guidé de nombre dérivés de la fonction carrée.



Soit la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

1. Calcul de $f'(1)$:

$$f(1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(1+h) = (1+h)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\ldots h + \ldots h^2}{h} = \frac{h(\ldots + \ldots h)}{h} = \ldots + \ldots h$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

f est dérivable en 1 et $f'(1) =$

2. Tracer la tantente T_1 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
3. Écrire l'équation réduite de la droite T_1.
4. Calcul de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\ldots h + \ldots h^2}{h} = \frac{h(\ldots + \ldots h)}{h} = \ldots + \ldots h$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x et $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5. Utiliser l'expression de $f'(x)$ pour déterminer les nombres dérivés pour $x=0$ et $x=-2$:

   a) $x=0$: $f'(0)=$ | b) $x=-2$: $f'(-2)=$

6. Tracer droites T_0 et T_{-2} tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisse 0 et -2.

7. Déterminer les équations réduites de T_0 et T_{-2}.

Exercice 14 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x-4$

$$\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{h\to\dots} \frac{f(3+\dots)-f(\dots)}{h} \\
&= \lim_{h\to\dots} \frac{\left[(3+\dots)^2+2(3+\dots)-4\right]-\left[3^2+2\times 3-4\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to\dots} \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{h} \\
&= \lim_{h\to\dots} \frac{\dots h^2+\dots h}{h} \\
&= \lim_{h\to\dots} \frac{h(\dots h+\dots)}{h} \\
&= \lim_{h\to\dots} (\dots h+\dots) = 8
\end{aligned}$$

Développer

Factoriser le numérateur

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to\dots} \frac{f(\dots+\dots)-f(\dots)}{h} \\
&= \lim_{h\to\dots} \frac{\left[(\dots+\dots)^2+2(\dots+\dots)-4\right]-\left[\dots^2+2\times\dots-4\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to\dots} \frac{\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\right]-\left[\quad\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to\dots} \frac{\dots h^2+\dots h}{h} = \lim_{h\to\dots} \frac{h(\dots h+\dots)}{h} = \lim_{h\to\dots} (\dots h+\dots) = \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(-2) &= \lim_{h\to\dots} \frac{f(\dots+\dots)-f(\dots)}{h} \\
&= \lim_{h\to\dots} \frac{\left[(\dots+\dots)^2+2(\dots+\dots)-4\right]-\left[\dots^2+2\times\dots-4\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to\dots} \frac{\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right]-\left[\quad\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to\dots} \frac{\dots h^2+\dots h}{h} = \lim_{h\to\dots} \frac{h(\dots h+\dots)}{h} = \lim_{h\to\dots} (\dots h+\dots) = \dots
\end{aligned}$$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on veut étudier la dérivabilité de f en x.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2+2x-4 \\
f(x+h) &= (x+\dots)^2+2(x+\dots)-4 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f(x+h)-f(x) &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{h} \\
&= \frac{(\dots\dots\dots\dots)h+\dots h^2}{h} = \frac{h(\dots\dots\dots+\dots h)}{h} \\
&= \dots\dots\dots+\dots h
\end{aligned}$$

$\therefore f$ est dérivable en x et $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exercice 15 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2$,

1. Compléter pour déterminer le nombre dérivé en $x = -1$.

$$\begin{aligned}
f(-1) &= (\ldots)^3 + 2 \\
f(-1+h) &= (\ldots + h)^3 + 2 \\
f(-1+h) &= \ldots(\ldots)^3 + \ldots(-1)^2h + \ldots(-1)h^2 + \ldots h^3 + 2 \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f(-1+h) - f(-1) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \frac{\ldots h + \ldots h^2 + \ldots h^3}{h} \\
&= \frac{h(\ldots + \ldots h + \ldots h^2)}{h} \\
&= \ldots + \ldots h + \ldots h^2 \\
f'(-1) = \lim_{h\to\ldots} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \lim_{h\to\ldots} [\ldots + \ldots h + \ldots h^2] =
\end{aligned}$$

2. On fixe $x \in \mathbb{R}$, calculer le taux de variation entre x et $x + h$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + 2 \\
f(x+h) &= (x+h)^3 + 2 = (x+h)^2(x+h) + 2 \\
&= (\ldots x^3 + \ldots x^2h + \ldots xh^2 + \ldots h^3) + 2 \\
f(x+h) - f(x) &= \ldots\ldots\ldots h + \ldots\ldots h^2 + \ldots\ldots h^3 \\
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots h + \ldots\ldots h^2
\end{aligned}$$

Factoriser numérateur par h

3. En déduire que f est dérivable et déterminer l'expression du nombre dérivé en x :
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

4. Déterminer à l'aide de l'expression de $f'(x)$, le nombre dérivé dans chaque cas :

a) $x = 0$, $f'(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ | b) $x = 2$, $f'(2) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ | c) $x = -1$, $f'(-1) = \ldots\ldots\ldots$

Exercice 16 Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables en x_0 et détérminez $f'(x_0)$.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 - 3x^2$, et $x_0 = -3$.
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x$, et $x_0 = 1$.
3. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 8x - 2$, et $x_0 = -2$.
4. f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2}{x}$ et $x_0 = 2$.
5. f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ et $x_0 = 3$.

Exercice 17 — fonction dérivée par le premier principe.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 5x - 2$. Complétez pour démontrer que f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et déterminer l'expression de la fonction dérivée.

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= \left[(x+h)^2 + 5(x+h) - 2\right] - \left[x^2 + 5x - 2\right] \\
f(x+h) - f(x) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f(x+h) - f(x) &= \ldots xh + \ldots h + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\qquad\qquad\qquad}{h} \\
\lim_{\ldots\ldots \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{\ldots\ldots \to 0} (\ldots x + \ldots + h) \\
&= \ldots x + \ldots
\end{aligned}$$

La limite existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 18

Montrer que la fonction f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et détérminer l'exporession de $f'(x)$.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 7$
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x - 3$

Exercice 19 — dérivée de la fonction cube.

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 3x^2$

Exercice 20

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 4x^3$

Exercice 21 — dérivée de la fonction inverse.

Soit la fonction inverse f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Soit $x \neq 0$, complétez pour démontrer que f est dérivable en x et déterminer l'expression de $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \\
&= \frac{1 \times (\qquad\qquad)}{(x+h)(\qquad\qquad)} - \frac{1 \times (\qquad\qquad)}{x \times (\qquad\qquad)}
\end{aligned}$$

mettre au même dénominateur

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= \frac{\qquad\qquad\qquad}{x(x+h)} \\
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\qquad\qquad\qquad}{h \times x(x+h)} = \\
\lim_{\ldots\ldots \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &=
\end{aligned}$$

La fonction inverse f est dérivable pour tout $x \neq 0$ et $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 22 — dérivée de la fonction racine carrée.

Soit la fonction racine carrée f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$

1. Compléter pour étudier la dérivabilité de f en $x=0$.

$$f(0+h)-f(0)=\sqrt{0+h}-\sqrt{0}=\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}\times\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}}=\frac{}{}$$
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{1}{}$$

éliminer les racines du numérateur

$$\lim_{h\to\ldots}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=$$ (A) 0 (B) $-\infty$ (C) $+\infty$

La fonction f (A) est (B) n'est pas dérivable en $x=0$.

2. Soit $x>0$, compléter pour montrer que f est dérivable en x et détermienr $f'(x)$.

$$f(x+h)-f(x)=\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{h}$$
$$=\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{h}\times\frac{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

éliminer les racines du numérateur

$$=\frac{(\qquad\qquad)^2-(\qquad\qquad)^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$=\frac{}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{}{}$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{}{}$$

La fonction f est dérivable en $x>0$ et on a $f'(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 23

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}+3$.

1. Soit $h\neq 0$. Montrer à l'aide d'une identité remarquable, que le taux de variation de f entre 9 et $9+h$ est égal à $\dfrac{1}{\sqrt{9+h}+3}$
2. En déduire que f est dérivable en 9 et déterminer $f'(9)$.

Exercice 24

Soit f définie sur $[-1;\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+1}$.

1. Soit $x>-1$ et $h>0$. Montrer à l'aide d'une identité remarquable, que le taux de variation de f entre x et $x+h$ est égal à $\dfrac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}$
2. En déduire que pour tout $x>-1$, f est dérivable et déterminer $f'(x)$.

Exercice 25 — généralisations.

1. Soit f une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = c$. Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer $f'(x)$.
2. Soit f une fonction affine défine sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable et que $f'(x) = a$.
3. Soit f une fonction quadratique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable et que $f'(x) = 2ax + b$.

Exercice 26 — Point calculatrice.

1. Tracer sur votre pythonette la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{-9}{2x^2 - 4x + 3}$
2. a) À l'aide de la touche paste", aller au point d'abscisse -2
   b) Tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.
   c) Relever une valeur approchée de $f'(-2) \approx$...;
3. Utiliser les touches ◁ ▷ pour retrouver $f'(-1) \approx$.................. ; $f'(0) \approx$..................
4. Aller dans l'onglet calcul, utiliser les touches copy ; var paste" et pour calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))\Big|_{x=\frac{2}{3}} \approx$......

4.3.4 Exercices : équation de la tangente

Exercice 27

Soit f la fonction défínue sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x^2 - 5x + 4)^{10}$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique. On admet que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -10$. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Exercice 28

Soit la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$. Sachant que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite $y = -7x + 9$, déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.

Exercice 29

Soit une fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$. On suppose que f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Sachant que la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(0\ ;\ 1)$ passe par le point $B(0;1)$, déterminer $f'(3)$ puis l'équation réduite de T.

4.4 Exercices : solutions et éléments de réponse

Dérivées des fonctions de référence			
Fonction f	**Domaine de définition**	**Fonction dérivée f'**	**Domaine de dérivabilité**
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$[0; +\infty[= \mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$

Dérivées et opérations	
Fonction f	**Fonction dérivée f'**
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$u(x) \times v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$u(ax + b)$	$a \times u'(ax + b)$
$\frac{1}{v(x)}$	$-\frac{v'(x)}{v(x)^2}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$
$(f \circ g)(x)$ ou $g(f(x))$	$g'(x) \times (f' \circ g)(x)$

Cas particulier de fonction composée	
Fonction f	**Fonction dérivée f'**
$(ax + b)^n$	$na(ax + b)^{n-1}$
$\sqrt{ax + b}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$
$\cos(ax + b)$	$-a\sin(ax + b)$
$\sin(ax + b)$	$a\cos(ax + b)$
e^{ax+b}	ae^{ax+b}
$\ln(ax + b)$	$\frac{a}{ax + b}$

Table 4.2 – Formulaire de dérivation pour la première et la terminale