

1.1 Forme canonique

Définition 1.3 Soit $a \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

La fonction quadratique définie sur \mathbb{R} par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

est une fonction monotone sur $] -\infty; \alpha]$ et sur $[\alpha; +\infty[$.

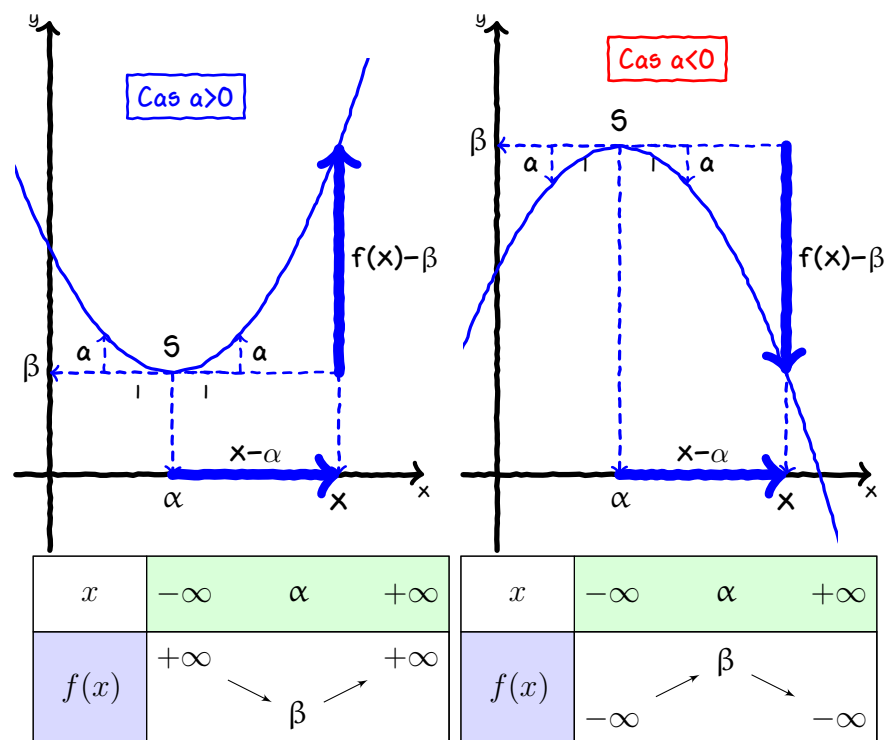
Démonstration. Cas $a > 0$

Soit $\alpha < u < v$:

$\alpha < u < v$
 $0 < u - \alpha < v - \alpha$ $\left. \begin{array}{l} \phantom{0 < (u - \alpha)^2 < (v - \alpha)^2} \\ \phantom{0 < (u - \alpha)^2 < (v - \alpha)^2} \end{array} \right\} -\alpha$
 $0 < (u - \alpha)^2 < (v - \alpha)^2$ $\left. \begin{array}{l} \phantom{0 < (u - \alpha)^2 < (v - \alpha)^2} \\ \phantom{0 < (u - \alpha)^2 < (v - \alpha)^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{La fonction carré est croissante sur } [0; +\infty[\\ \text{La fonction } x \mapsto ax + \beta \text{ est croissante} \end{array}$
 $\beta < f(u) < f(v)$
 f préserve l'ordre sur $[\alpha; +\infty[$, elle est croissante.

Les autres cas se traitent de manière similaire. ■

Figure 1.1 – Représentation graphique d'une fonction quadratique donnée par forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.



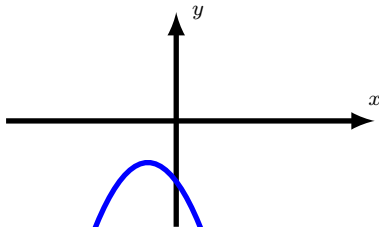
Proposition 1.1 Soit $a \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

La fonction quadratique définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ a pour représentation graphique une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$, un axe de symétrie vertical $d: x = \alpha$.

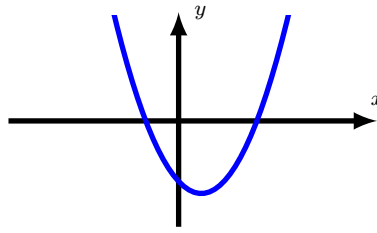
Elle est une translation de la parabole d'équation $y = ax^2$.

Exercices

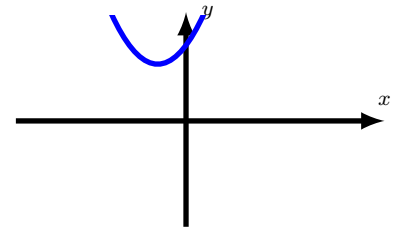
Exercice 1 Pour chaque représentation cochez la fonction quadratique qui correspond.



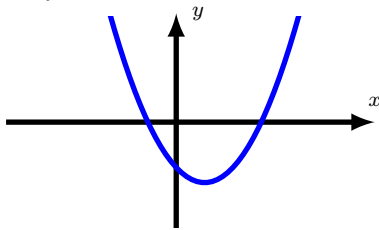
- ☐ $f: x \mapsto -5x^2 - 5x + 4$
☐ $f: x \mapsto -5x^2 - 5x - 4$
☐ $f: x \mapsto -5x^2 + 5x - 4$
☐ $f: x \mapsto 5x^2 + 5x - 4$



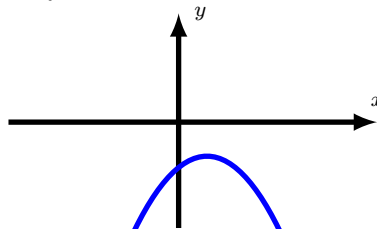
- ☐ $f: x \mapsto 5x^2 - 4x + 4$
☐ $f: x \mapsto 5x^2 - 4x - 4$
☐ $f: x \mapsto -5x^2 + 4x - 4$
☐ $f: x \mapsto 5x^2 + 4x - 4$



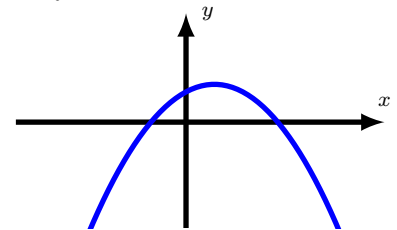
- ☐ $f: x \mapsto 5x^2 - 5x + 5$
☐ $f: x \mapsto 5x^2 + 5x + 5$
☐ $f: x \mapsto -5x^2 - 5x + 5$
☐ $f: x \mapsto -5x^2 + 5x + 5$



- ☐ $f: x \mapsto -4x^2 - 4x - 3$
☐ $f: x \mapsto 4x^2 - 4x - 3$
☐ $f: x \mapsto 4x^2 + 4x - 3$
☐ $f: x \mapsto -4x^2 + 4x - 3$

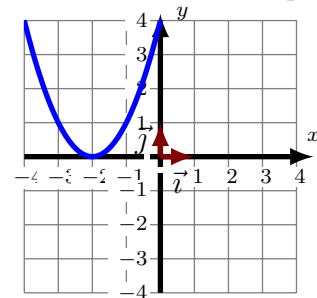


- ☐ $f: x \mapsto -3x^2 - 3x + 3$
☐ $f: x \mapsto -3x^2 - 3x - 3$
☐ $f: x \mapsto -3x^2 + 3x - 3$
☐ $f: x \mapsto -3x^2 + 3x + 3$

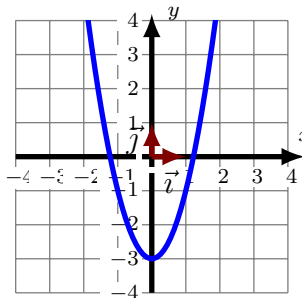


- ☐ $f: x \mapsto 2x^2 + 2x + 2$
☐ $f: x \mapsto -2x^2 + 2x - 2$
☐ $f: x \mapsto -2x^2 - 2x + 2$
☐ $f: x \mapsto -2x^2 + 2x + 2$

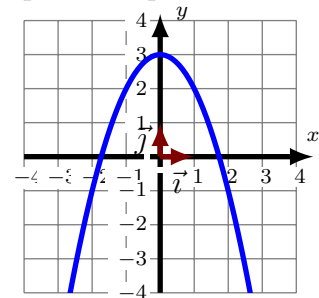
Exercice 2 Pour chaque représentation cochez la fonction quadratique qui correspond.



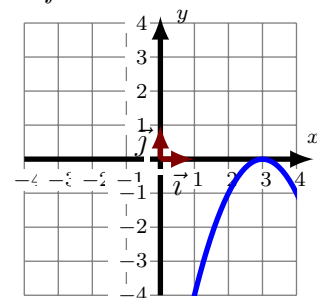
- ☐ $f: x \mapsto (x - 2)^2$
☐ $f: x \mapsto (x + 2)^2$
☐ $f: x \mapsto x^2 + 2$
☐ $f: x \mapsto x^2 - 2$



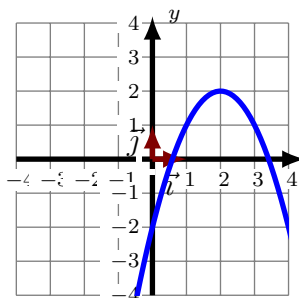
- ☐ $f: x \mapsto x^2 - 3$
☐ $f: x \mapsto 2x^2 - 3$
☐ $f: x \mapsto 3x^2 - 3$
☐ $f: x \mapsto 4x^2 - 3$



- ☐ $f: x \mapsto x^2 + 3$
☐ $f: x \mapsto (-x)^2 - 3$
☐ $f: x \mapsto (-x)^2 + 2$
☐ $f: x \mapsto -x^2 + 2$

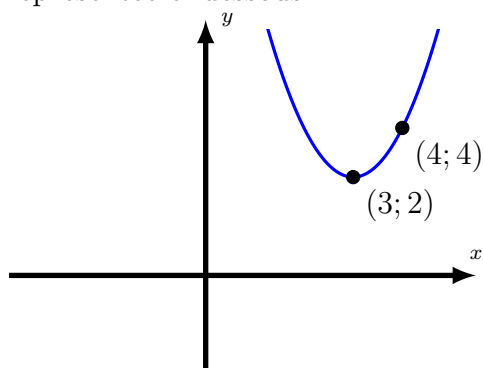


- ☐ $f: x \mapsto (x - 3)^2$
☐ $f: x \mapsto (-x + 3)^2$
☐ $f: x \mapsto -(x - 3)^2$
☐ $f: x \mapsto -(x + 3)^2$



- ☐ $f: x \mapsto (x - 2)^2 + 2$
☐ $f: x \mapsto -(x + 2)^2 - 2$
☐ $f: x \mapsto -(x - 2)^2 - 2$
☐ $f: x \mapsto (x + 2)^2 + 2$

■ **Exemple 1.5** Complétez et retrouvez l'expression réduite de la fonction quadratique représentée ci-dessous.



$$f(x) - \dots = \dots (x - \dots)^2$$

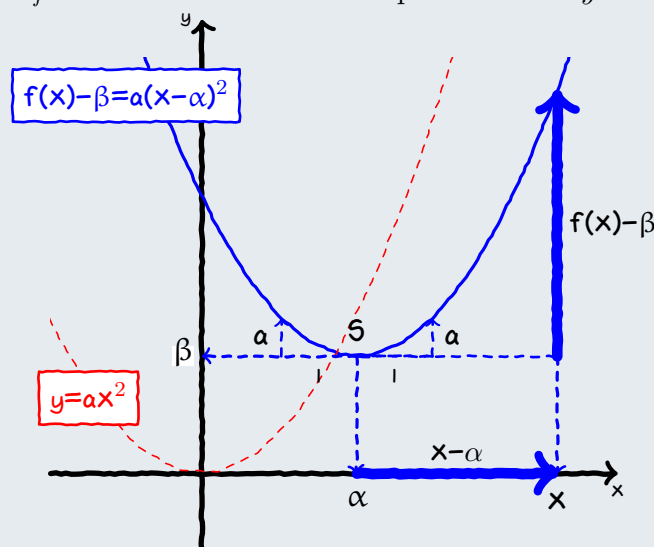
$$f(x) = \dots (x - \dots)^2 + \dots$$

La fonction définie sur \mathbb{R} par :

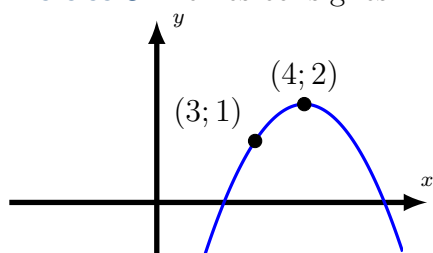
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

est une fonction quadratique dont la représentation \mathcal{C}_f est une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$.

\mathcal{C}_f est une translation de la parabole $\mathcal{P}: y = ax^2$.

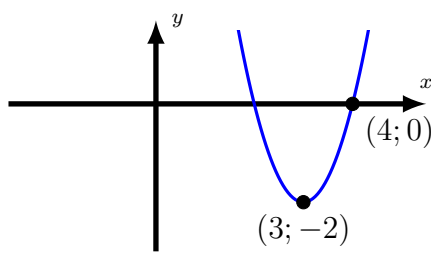


Exercice 3 Mêmes consignes.



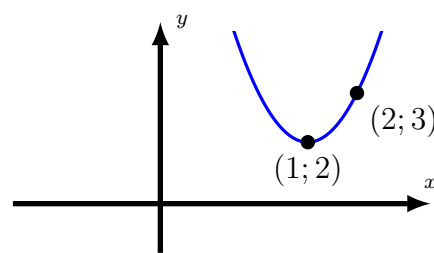
$$f(x) - \dots = \dots (x - \dots)^2$$

$$f(x) = \dots (x - \dots)^2 + \dots$$



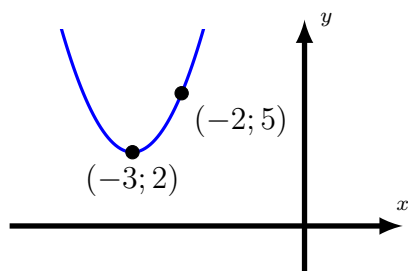
$$f(x) - \dots = \dots (x - \dots)^2$$

$$f(x) = \dots (x - \dots)^2 + \dots$$



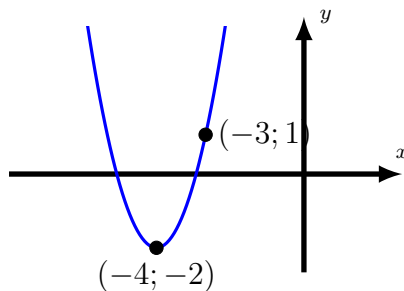
$$f(x) - \dots = \dots (x - \dots)^2$$

$$f(x) = \dots (x - \dots)^2 + \dots$$



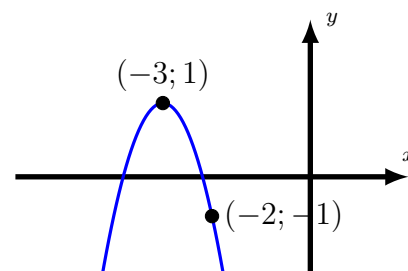
$$f(x) - \dots = \dots (x - \dots)^2$$

$$f(x) = \dots (x - \dots)^2 + \dots$$



$$f(x) - \dots = \dots (x - \dots)^2$$

$$f(x) = \dots (x - \dots)^2 + \dots$$



$$f(x) - \dots = \dots (x - \dots)^2$$

$$f(x) = \dots (x - \dots)^2 + \dots$$

Défi calculatrice Pouvez-vous retrouver la forme canonique de $2x^2 - 4x + 5$? $x^2 - \sqrt{2}x + 5$?