Chapitre

# Inéquations 4

## 4.1 Vocabulaire

Une **inéquation à une inconnue** est une inégalité dans laquelle apparaît une lettre.

**Une solution** de l'inéquation est une valeur de la ou les inconnues pour lesquelles l'inégalité est vraie.

■ **Exemple 4.1** Soit l'inéquation $4x + 7 < x^2$ d'inconnue $x$.

a) $x = 0$ n'est pas solution de l'équation car l'égalité $4 \times 0 + 7 < 0^2$ est fausse.

b) $x = 6$ est une solution de l'équation, car $4 \times 6 + 7 < 6^2$ est vraie.

■ **Exemple 4.2** Soit l'inéquation $7x - 12 \geqslant x^2$ d'inconnue $x$.

a) $x = 10$ n'est pas solution de l'équation car l'inégalité $7\times 10-12 \geqslant 10^2$ est fausse.

b) $x = 3$, $x = 3{,}5$ et $x = 4$ sont solutions de l'inéquation, car $7\times 3-12 \geqslant 3^2$ est vraie.

**Définition 4.1** Résoudre une équation dans $\mathbb{R}$ c'est trouver toutes les valeurs réelles des inconnues qui rendent l'inégalité vraie.

**Définition 4.2** Deux inéquations sont dites **équivalentes** (symbole $\Longleftrightarrow$ ) si elles ont le même ensemble de solutions c.à.d elles sont vraies pour les mêmes valeurs de $x$.

■ **Exemple 4.3**

a) Les inéquations $2x > 4$ et $2x - 4 > 0$ d'inconnue $x$ sont équivalentes.

b) $x = -2$, $x = -3$, $x = -4$... ne sont pas solutions de $x^2 \leqslant 4$.
Les inéquations $x \leqslant 2$ et $x^2 \leqslant 4$ ne sont pas équivalentes.

### 4.1.1 Exercices : mise en inéquations

■ **Exemple 4.4** Traduire le problème posé par une inéquation.

La loi impose d'avoir au minimum $12\text{m}^2$ d'espace par cochon dans un enclos. Combien de cochons peut accueillir un enclos de $108\ \text{m}^2$ ?

$x = \dots$

On chercher $x \in \dots$ qui vérifie :

Pizza TropBien vend sa pizza 5 € l'unité. La fabrication d'une pizza lui revient à 2.3 € diminué de 0.02 € par pizza vendue. Combien doit-il vendre de pizza pour faire au delà de 180 € de profits ?

$x = \dots$

On chercher $x \in \dots$ qui vérifie :

**Exercice 1** Même consignes

a) Pour valider le module de Pix, un élève doit accumuler 120 points en 2 tests. Helga a 54 points au premier test mais ne valide pas le module. Quel est le plus grand score possible au second test ?
b) Harold veut acheter un vélo à 310 €. Il a 65 € et met de côté 45 € chaque semaine grâce à son job d'été. Combien de semaines avant de pouvoir acheter ce vélo ?
c) Eugene a 50 € et met de côté 6 € par semaine. Lila n'a pas d'économie et met de côté 9 € par semaine. Combien de semaines sont nécessaires pour que Lila ait plus d'argent que Kyle.
d) Arnold a 18 €. Il veut acheter des cupcakes à 1.5 € pièce. Quel est le nombre maximal de cupcakes qu'il peut s'offrir ?
e) Un taxi prend 5 € de frais de service et 3 € par km de trajet. Quelle est le plus long trajet que peut se payer Rhonda avec 71 € ?

**Exercice 2 — Vérifier si une valeur est solution d'une inéquation à 1 inconnue.**

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** 3 est une solution de l'inéquation $2x+1<5$ d'inconnue $x$ | ☐ | ☐ |
| **2/** 2 est une solution de l'inéquation $2x+1<5$ d'inconnue $x$ | ☐ | ☐ |
| **3/** $-5$ est une solution de l'inéquation $7-x>x^2-13$ d'inconnue $x$ | ☐ | ☐ |
| **4/** 4 est une solution de l'inéquation $x \leqslant 4$ d'inconnue $x$ | ☐ | ☐ |
| **5/** Les inéquations $x-3>0$ et $x>3$ sont équivalentes. | ☐ | ☐ |
| **6/** Les inéquations $3x \leqslant 1$ et $x \leqslant -2$ d'inconnue $x$ sont équivalentes. | ☐ | ☐ |
| **7/** Les inéquations $3x \leqslant 0$ et $x \leqslant -3$ d'inconnue $x$ sont équivalentes. | ☐ | ☐ |

*solution de l'exercice 1.*

a) $x =$ note au test, $x \in \mathbb{N}$. $x$ vérifie $54 + x < 120$. $\cancel{54 + x \leqslant 120}$

b) $x =$ nombre de semaines, $x \in \mathbb{N}$. $x$ vérifie $65 + 45x \geqslant 310$. $\cancel{65 + 45x > 310}$

c) $x =$ nombre de semaines, $x \in \mathbb{N}$. $x$ vérifie $50 + 6x < 9x$. $\cancel{50 + 6x \geqslant 9x}$

d) $x =$ nombre de cupcakes, $x \in \mathbb{N}$. $x$ vérifie $18 \geqslant 1.5x$. $\cancel{18 > 1.5x}$

e) $x =$ longueur du trajet en km, $x \in \mathbb{R}$. $x$ vérifie $71 \geqslant 3x + 5$. $\cancel{71 > 3x + 5}$

■

*solution de l'exercice 2.*

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** 3 est une solution de l'inéquation $2x + 1 < 5$ d'inconnue $x$ | ☐ | ☒ |
| **2/** 2 est une solution de l'inéquation $2x + 1 < 5$ d'inconnue $x$ | ☐ | ☒ |
| **3/** $-5$ est une solution de l'inéquation $7 - x > x^2 - 13$ d'inconnue $x$ | ☒ | ☐ |
| **4/** 4 est une solution de l'inéquation $x \leqslant 4$ d'inconnue $x$ | ☒ | ☐ |
| **5/** Les inéquations $x - 3 > 0$ et $x > 3$ sont équivalentes. | ☒ | ☐ |
| **6/** Les inéquations $3x \leqslant 1$ et $x \leqslant -2$ d'inconnue $x$ sont équivalentes. | ☐ | ☒ |
| **7/** Les inéquations $3x \leqslant 0$ et $x \leqslant -3$ d'inconnue $x$ sont équivalentes. | ☐ | ☒ |

■

## 4.2 Intervalles

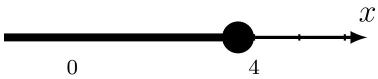



**Figure 4.1** – $I = ]-\infty; 4]$

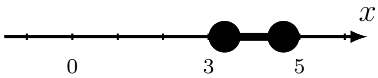



**Figure 4.2** – $J = [3; 5]$

■ **Exemple 4.5** Soit l'inéquation $x \leqslant 4$ d'inconnue $x$. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est $I = \{x \in \mathbb{R} \quad | x \leqslant 4\}$. On le notera $I = ]-\infty; 4]$. Intervalle de $-\infty$ à 4 fermé en 4.

■ **Exemple 4.6** La double inéquation $3 \leqslant x \leqslant 5$ d'inconnue $x$ a pour solution $J = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad 3 \leqslant x \leqslant 5\}$.

se lit :« l'ensemble des $x$ dans $\mathbb{R}$ avec $3 \leqslant x \leqslant 5$ ». On le notera $J = [3; 5]$.

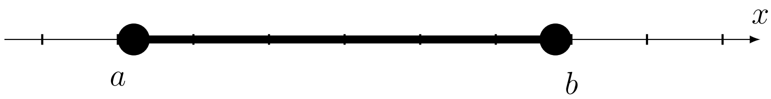
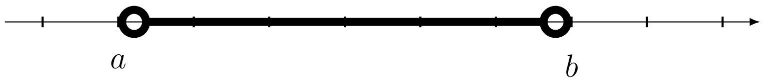
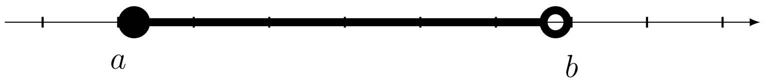
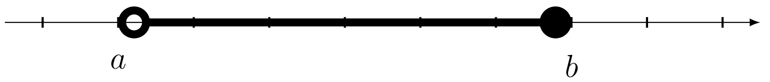
| Intervalle | Inégalité | Représentation sur droite graduée |
|---|---|---|
| $x \in [a; b]$ | $a \leqslant x \leqslant b$ |  |
| $x \in ]a; b[$ | $a < x < b$ |  |
| $x \in [a; b[$ | $a \leqslant x < b$ |  |
| $x \in ]a; b]$ | $a < x \leqslant b$ |  |

**Table 4.1 –** Les différentes variantes d'intervalles bornés par $a$ et $b \in \mathbb{R}$

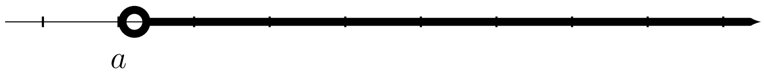
| Intervalle | Inégalité | Représentation sur droite graduée |
|---|---|---|
| $x \in [a; +\infty[$ | $x \geqslant a$ |  |
| $x \in ]a; +\infty[$ | $x > a$ |  |
| $x \in ] - \infty; b]$ | $x \leqslant b$ |  |
| $x \in ]-\infty; b[$ | $x < b$ |  |

**Table 4.2 –** Les différentes variantes d'intervalles infinis

### 4.2.1 Exercices : Intervalles

**Exercice 1**

Sans calculatrice, compléter par l'un des symboles : $\in$, $\notin$.

$-3{,}1 \ \ldots \ [-4;-3]$ ; $\quad 2{,}3 \times 10^{-2} \ \ldots \ [2;3]$ ; $\quad \dfrac{1}{4} \ \ldots \ \left[\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right]$ ; $\quad -\dfrac{4}{5} \ \ldots \ \left[-1;-\dfrac{3}{4}\right]$ ;

**Exercice 2**

Sans calculatrice, compléter par $\in$, $\notin$ et $\subset$ ou $\supset$.

$\dfrac{17}{4} \ \ldots \ ]4;5[$ ; $\quad 0{,}333 \ \ldots \ \left[\dfrac{1}{3};1\right[$ ; $\quad \mathbb{Z} \ \ldots \ \mathbb{R}$ ; $\quad \dfrac{2}{3} \ \ldots \ \mathbb{D}$

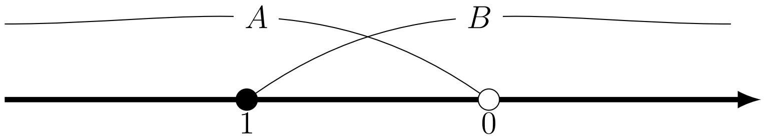
$\sqrt{8} \ \ldots \ ]2;3[$ ; $\quad \dfrac{3}{8} \ \ldots \ \left[\dfrac{3}{9};\dfrac{3}{7}\right]$ ; $\quad \dfrac{11}{3} \ \ldots \ \left]\dfrac{21}{6};5\right]$ $\quad \left]\dfrac{21}{6};5\right] \ \ldots \ \left[\dfrac{11}{3};4\right]$

**Exercice 3** Compléter le tableau suivant :

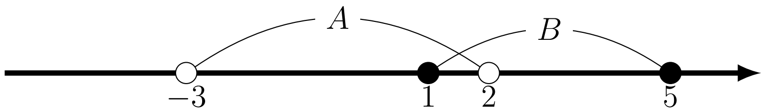
| Intervalle | Inégalité(s) | Représentation sur droite réelle | Phrase |
|---|---|---|---|
| $x \in [-3;5]$ | |   | |
| | $x < 3$ | | |
| | | | Intervalle de 4 à 6, fermé en 4 et ouvert en 6. |
| $[2;+\infty[$ | | | |
| | $-3 < x \leqslant -1$ | | |
| | | | Intervalle de $-\infty$ à 5, fermé en 5. |
| | $-3 \leqslant x \leqslant -1$ | | |
| | $5 \geqslant x > 1$ | | |
| | $x \geqslant -\dfrac{3}{4}$ | | |
| | $-4 > x > -7$ | | |

■ **Exemple 4.7 — Intersection d'intervalles.** est toujours un intervalle. L'union de deux intervalles d'intersection vide n'est pas un intervalle.

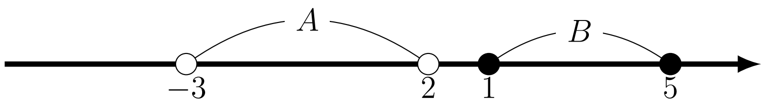
$A = ]-\infty; 1]$ et $B = ]0; \infty[$.
$A \cap B = ]0; 1]$
$A \cup B = ]-\infty; \infty[$




$A = ]-3; 2[$ et $B = [1; 5]$.
$A \cap B = [1; 2[$
$A \cup B = ]-3; 5]$




$A = ]-3; 1[$ et $B = [2; 5]$.
$A \cap B = \emptyset$
$A \cup B = ]-3; 1[ \cup [2; 5]$




**Exercice 4** Pour chaque cas déterminez les nsembles $A \cap B$ et $A \cup B$

$A = [-10; 2[$ et $B = [-5; 3]$.
$A \cap B =$
$A \cup B =$

$A = ]-\infty; 2[$ et $B = [0; 5[$.
$A \cap B =$
$A \cup B =$

$A = [3; \infty[$ et $B = ]-\infty; 6[$.
$A \cap B =$
$A \cup B =$

$A = ]-\infty; -2[$ et $B = ]-4; 3[$.
$A \cap B =$
$A \cup B =$

$A = ]-4; 2]$ et $B = [2; 5]$.
$A \cap B =$
$A \cup B =$

$A = [-4; 2]$ et $B = ]2; 5]$.
$A \cap B =$
$A \cup B =$

**Exercice 5 — entrainement.** Déterminez les intersections ci-dessous.

$[2; 5] \cap [3; 6[$ ........... | $]-\infty; 3] \cap [-7; 10]$ ..... | $[-5; 2] \cup [0; 5]$ ......... | $[-2; 0] \cap [4; 5[$ .........

## 4.3 Relation d'ordre et opération

**Définition 4.3** $a$ et $b \in \mathbb{R}$.
$a$ est supérieur à $b$ s.s.i. la différence $(a-b)$ est positive :

$$a \geqslant b \iff (a-b) \geqslant 0$$

Comparer deux expressions $a$ et $b$ revient à étudier le signe de la différence.

**Théorème 4.8 — Addition.** L'addition conserve l'ordre :

$$(a \geqslant b) \quad \Rightarrow \quad (a+n \geqslant b+n)$$

*Démonstration.* ■

**Théorème 4.9 — Multiplication.** La **multiplication par un nombre positif** conserve l'ordre.
La multiplication par un nombre **négatif** inverse l'ordre.

$$\begin{aligned} a \geqslant b \quad \text{et } p \geqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad pa \geqslant pb \\ \text{et } n \leqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad na \leqslant nb \end{aligned}$$

*Démonstration.* ■

### 4.3.1 Exercices : résolution d'inéquations du premier degré

On ne change pas les solutions d'une inéquation si :

- on **développe, factorise, réduit** un des membres de l'inéquation
- on **ajoute une même expression** aux deux membres de
- on **multiplie** les 2 membres de l'inéquation par **une même expression positive non nulle**
- on **multiplie** les 2 membres de l'inéquation par **une même expression négative non nul(le)** à condition de **changer le sens du signe de l'inéquation**

■ **Exemple 4.10** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue $x$ :

$3x+4>10$ $\qquad$ $-2x-8>10$ $\qquad$ $2+5x\leqslant -13$

**Exercice 1 — variables d'un seul côté.** Même consignes

| | | |
|---|---|---|
| $(I_1)$ $x+1<9$ | $(I_4)$ $-x<8$ | $(I_7)$ $42x>0$ |
| $(I_2)$ $x-4>3$ | $(I_5)$ $7<2x-11$ | $(I_8)$ $14-6x\geqslant -10$ |
| $(I_3)$ $-6x\geqslant 30$ | $(I_6)$ $-8x-5>0$ | $(I_9)$ $\frac{3}{2}x-1>4$ |

**Exercice 2 — variable dans les deux membres.** Mêmes consignes

| | | |
|---|---|---|
| $(I_1)$ $3x>2x+1$ | $(I_4)$ $3x+1\geqslant 3x+7$ | $(I_7)$ $5x+9\geqslant 5x+2$ |
| $(I_2)$ $12x\leqslant 8x+128$ | $(I_5)$ $3(x+1)-30<x+15$ | $(I_8)$ $1-7x\leqslant 7+x$ |
| $(I_3)$ $x+5<10x$ | $(I_6)$ $2x-10<7x+5$ | $(I_9)$ $5x-5>-9x+3$ |

■ **Exemple 4.11** Expliquer les erreurs dans les résolutions suivantes

$$\begin{array}{rll} & \dfrac{1}{x}\geqslant -1 & \\ & & \textit{On multiplie par } x \\ \iff & \dfrac{x}{x}\geqslant -x & \\ & & \textit{On simplifie} \\ \iff & 1\geqslant -x & \\ & & \textit{On multiplie par } -1 \\ \iff & -1\leqslant x & \\ & \mathscr{S}=[-1;+\infty[ & \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} & x^2>5x & \\ & & \textit{On divise par } x \\ \iff & \dfrac{x^2}{x}>\dfrac{5x}{x} & \\ & & \textit{On simplifie} \\ \iff & x>5 & \\ & \mathscr{S}=]5;+\infty[ & \end{array}$$

■ **Exemple 4.12 — Encadrements.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue $x$ :

$-1 < x+2 < 5$ $\quad$ $-4 \geqslant -2x \geqslant -10$ $\quad$ $-5 \leqslant -3x+7 < 15$

**Exercice 3** Mêmes consignes

$(I_1)$ $-3 < x-4 < 7$

$(I_2)$ $4 < 5x-4 \leqslant 5$

$(I_3)$ $-6 \leqslant 3+x < 4$

$(I_4)$ $2 \leqslant 2x < 10$

$(I_5)$ $-1 \leqslant -x < 3$

$(I_6)$ $-3 \leqslant 1-x < 4$

$(I_7)$ $-3 \leqslant 2x-1 < 1$

$(I_8)$ $8 < -2+3x < 16$

$(I_9)$ $4 < 2x-1 \leqslant 10$

■ **Exemple 4.13 — Disjonctions et inéquations simultanées.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$3 < x$ et $x < 7$ $\quad$ $x > 4$ ou $x < 3$ $\quad$ $x > 1$ ou $x = -1$

**Exercice 4** Mêmes consignes

$(I_1)$ $x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 1$

$(I_2)$ $x < 4$ ou $x > 8$

$(I_3)$ $x < 9$ et $x < -3$

$(I_4)$ $x \leqslant 1$ et $x > 5$

$(I_5)$ $x < -3$ ou $x = 5$

$(I_6)$ $x+5 \leqslant -4$ ou $x+5 \geqslant 4$

$(I_7)$ $-2x > 10$ ou $4x > 16$

$(I_8)$ $15 > 4x-1$ ou $1 < 4x-15$

$(I_9)$ $3x+1 \leqslant 4$ et $2x-3 > 7$

■ **Exemple 4.14 — Valeur absolue.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue $x$ :

$|x+3| < 6$ $\quad$ $|2x| \geqslant 10$

**Exercice 5** Mêmes consignes

$(I_1)$ $|x+6| > 7$

$(I_2)$ $|x+3| < 4$

$(I_3)$ $|6x| > 12$

$(I_4)$ $|1+2x| \geqslant 23$

$(I_5)$ $|2x-5| < 7$

$(I_6)$ $\left|\frac{1}{4}x\right| > 12$

*solution de l'exercice 1.*

$(I_1)$ $\mathscr{S} = ]-\infty, 8[$
$(I_2)$ $\mathscr{S} = ]7, \infty[$
$(I_3)$ $\mathscr{S} = ]-\infty, -5]$
$(I_4)$ $\mathscr{S} = ]-8, \infty[$
$(I_5)$ $\mathscr{S} = ]9, \infty[$
$(I_6)$ $\mathscr{S} = \left]-\infty, -\frac{5}{8}\right[$
$(I_7)$ $\mathscr{S} = ]0, \infty[$
$(I_8)$ $\mathscr{S} = ]-\infty, 4]$
$(I_9)$ $\mathscr{S} = \left]\frac{10}{3}, \infty\right[$

■

*solution de l'exercice 2.*

$(I_1)$ $\mathscr{S} = ]1, \infty[$
$(I_2)$ $\mathscr{S} = ]-\infty, 32]$
$(I_3)$ $\mathscr{S} = \left]\frac{5}{9}, \infty\right[$
$(I_4)$ $\mathscr{S} = \emptyset$
$(I_5)$ $\mathscr{S} = ]-\infty, 21[$
$(I_6)$ $\mathscr{S} = ]-3, \infty[$
$(I_7)$ $\mathscr{S} = \mathbb{R}$
$(I_8)$ $\mathscr{S} = \left[-\frac{3}{4}, \infty\right[$
$(I_9)$ $\mathscr{S} = \left]\frac{4}{7}, \infty\right[$

■

*solution de l'exercice 3.*

$(I_1)$ $\mathscr{S} = ]1, 11[$
$(I_2)$ $\mathscr{S} = \left]\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right]$
$(I_3)$ $\mathscr{S} = [-9, 1[$
$(I_4)$ $\mathscr{S} = [1, 5[$
$(I_5)$ $\mathscr{S} = ]-3, 1]$
$(I_6)$ $\mathscr{S} = ]-3, 4]$
$(I_7)$ $\mathscr{S} = [-1, 1[$
$(I_8)$ $\mathscr{S} = \left]\frac{10}{3}, 6\right[$
$(I_9)$ $\mathscr{S} = \left]\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right]$

■

*solution de l'exercice 4.*

$(I_1)$ $\mathscr{S} = ]-\infty, -3] \cup [1, \infty[$
$(I_2)$ $\mathscr{S} = ]-\infty, 4[ \cup ]8, \infty[$
$(I_3)$ $\mathscr{S} = ]-\infty, -3[$
$(I_4)$ $\mathscr{S} = \emptyset$
$(I_5)$ $\mathscr{S} = ]-\infty, -3[ \cup \{5\}$
$(I_6)$ $\mathscr{S} = ]-\infty, -9[ \cup [-1, \infty[$
$(I_7)$ $\mathscr{S} = ]-\infty, -5[ \cup ]4, \infty[$
$(I_8)$ $\mathscr{S} = ]-\infty, 4[ \cup ]4, \infty[$
$(I_9)$ $\mathscr{S} = \emptyset$

■

*solution de l'exercice 5.*

$(I_1)$ $\mathscr{S} = ]-\infty, -13[ \cup ]1, \infty[$
$(I_2)$ $\mathscr{S} = ]-7, 1[$
$(I_3)$ $\mathscr{S} = ]-\infty, -2[ \cup ]2, \infty[$
$(I_4)$ $\mathscr{S} = ]-\infty, -12] \cup [11, \infty[$
$(I_5)$ $\mathscr{S} = ]-1, 6[$
$(I_6)$ $\mathscr{S} = ]-\infty, -48[ \cup ]48, \infty[$

■