Chapitre 8

Dérivation (3) compléments et approfondissements

Table 8.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 8…

	Pour m'entraîner ✍		
Je dois **connaître…/savoir faire…**	🪨	💎	💍
Calcul de fonction dérivées : premiers principes			
dérivée d'un produit		1, 2, 3	
dérivée d'un inverse et d'un quotient	8	4, 5, 6	7
Application 1 : équations de tangentes et problèmes			
calcul d'équations réduite de tangentes			
problèmes inverses			
intersection de tangentes et de courbes			
Application 2 : sens de variation d'une fonction et signe de sa dérivée			
sens de variation d'une fonction			9, 10
extremums d'une expression, point critiques			
problèmes			
Application 3 : méthodes numériques pour une résolution approchée de $f(x) = 0$			
algorithme de Newton-Raphson		11, 12, 13	15, 16

8.1 Compléments : dérivées de produit et quotient

Définition 8.1 Soit u et v deux fonctions dévinies sur un intervalle I. $c \in \mathbb{R}$ un réel.

On défini les fonctions (uv) et $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sur l'intervalle I par :

$$(uv) \colon x \mapsto u(x) \times v(x) \qquad \left(\frac{1}{v}\right) : x \mapsto \frac{1}{v(x)} \qquad \left(\frac{u}{v}\right) : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$$

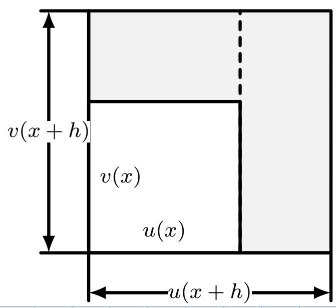
Proposition 8.1 — dérivée d'un produit.

Soit les fonctions u et v sont dérivables pour tout $x \in I$.

uv est aussi dérivable sur I et on a :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Démonstration.



■

Proposition 8.2 — dérivée de l'inverse et du quotient.

Soit les fonctions u et v sont dérivables pour tout $x \in I$.

Si pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et on a :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{(v)^2}$$

Si pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$, alors $\dfrac{u}{v}$ est aussi dérivables sur I et on a :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{(v)^2}$$

Démonstration.

■

8.2 Exercices

8.2.1 Exercices : dérivées de produit et de quotient et applications

■ **Exemple 8.1 — dérivation d'un produit.**

Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée dans les cas suivants :

$f(x) = \sqrt{x}(2x+1)^3$

$D = [0;+\infty[$

$D' =]0;+\infty[$

produit de $u\colon x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $v\colon x \mapsto (2x+1)^3$ dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+1)^3 + \sqrt{x} \times 2 \times 3(2x+1)^2 \\ &= \frac{(2x+1)^3}{2\sqrt{x}} + 6\sqrt{x}(2x+1)^2 \end{aligned}$$

$u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $v'(x) = 2 \times 3(2x+1)^2$

$f(x) = (8x-1)(2x^2-5x-3)$

$D' = \mathbb{R}$

produit de $u\colon x \mapsto 8x-1$ et $v\colon x \mapsto 2x^2-5x-3$ toutes dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (8x-1)'(2x^2-5x-3) + (8x-1)(2x^2-5x-3)' \\ &= 8(2x^2-5x-3) + (8x-1)\big(2(2x) - 5(1) + 0\big) \\ &= 16x^2 - 40x - 24 + (8x-1)\big(4x-5\big) \\ &= 48x^2 - 84x - 19 \end{aligned}$$

Exercice 1 Dériver en utilisant la règle de la dérivé d'un produit.

1. $f(x) = x^2(2x-1)$
2. $f(x) = 4x(2x+1)^3$
3. $f(x) = x^5(3x-1)^2$
4. $f(x) = x^2(7-3x^2)$
5. $f(x) = x^2\sqrt{3-x}$
6. $f(x) = (8-9x)\sqrt{x}$
7. $f(x) = \sqrt{x}(x^2+1)$
8. $f(x) = \sqrt{3x-12}(x^2-1)$
9. $f(x) = (4x-1)\sqrt{3x-15}$

Exercice 2

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f. Déterminer la pente de la tangente au point d'abscisse x_0 dans les cas suivants :

1. f définie par $f(x) = x^4(1-2x)^2$, au point d'abscisse $x = -1$.
2. f définie par $f(x) = x\sqrt{1-2x}$, au point d'abscisse $x = -4$.

Exercice 3 Soit la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^2\sqrt{x}$.

1. Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f.
2. Montrer que pour tout $x \in D'$, $f'(x) = \dfrac{(x-3)(5x-3)}{2\sqrt{x}}$.

■ Exemple 8.2 — dérivation d'un quotient.

Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée dans les cas suivants :

$f(x) = \dfrac{1+3x}{x^2+1}$

$u(x) = 1+3x$ $v(x) = x^2+1$, pas de valeur interdites

$D = \mathbb{R} \quad D' = \mathbb{R}$

on applique $(\frac{u}{v})' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(1+3x)'(x^2+1)-(1+3x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

on simplifie le numérateur sans développer le dénominateur

$$f'(x) = \frac{3(x^2+1)-(1+3x)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2+3-2x-6x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{3-2x-3x^2}{(x^2+1)^2}$$

$f(x) = \dfrac{1-2x}{3x+3}$

$u(x) = 1-2x$ $v(x) = 3x+3$, valeur interdite $x=-1$

$D = \mathbb{R}\setminus\{-1\} \quad D' = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

on applique $(\frac{u}{v})' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(1-2x)'(3x+3)-(1-2x)(3x+3)'}{(3x+3)^2} = \frac{-2(3x+3)-(1-2x)\times 3}{(3x+3)^2}$$

on simplifie le numérateur sans développer le dénominateur

$$= \frac{-9}{(3x+3)^2}$$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{(1-2x)^2}$

$u(x) = \sqrt{x}$ dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$v(x) = (1-2x)^2$, valeur interdite $x = \frac{1}{2}$

$D = [0;\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2};+\infty[\quad D' =]0;\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2};+\infty[$

on applique $(\frac{u}{v})' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-2x)^2-\sqrt{x}(-2\times 2(1-2x))}{(1-2x)^4}$$

factoriser par $1-2x$ pour simplifier

$$f'(x) = \frac{(1-2x)\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}+4\sqrt{x}\right)}{(1-2x)^4}$$

ramener au même dénominateur

$$= \frac{1}{(1-2x)^3}\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}+4\sqrt{x}\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1-2x+8x}{2\sqrt{x}(1-2x)^3} = \frac{6x+1}{2\sqrt{x}(1-2x)^3}$$

Exercice 4

Donner les domaines de définition et de dérivabilité, puis dériver les fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{1+3x}{2-x}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-3}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1-2x}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2-3}{3x-x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-3x}}$

Exercice 5

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f. Déterminer la pente de la tangente au point d'abscisse x_0 dans les cas suivants :

1. f définie par $f(x) = \dfrac{x}{1-2x}$, au point d'abscisse $x = 1$.
2. f définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$, au point d'abscisse $x = -1$.
3. f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x+1}$, au point d'abscisse $x = 4$.
4. f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{3x+5}}$, au point d'abscisse $x = -2$.

Exercice 6

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f donnée par $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{1-x}$.

1. Déterminer le domaine et le domaine de dérivabilité de f.
2. Montrer que pour tout $x \in D'$, $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}(1-x)^2}$.
3. Déterminer les points critiques de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 7

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f donnée par $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x+2}$.

1. Déterminer le domaine et le domaine de dérivabilité de f.
2. Montrer que pour tout $x \in D'$, $f'(x) = \dfrac{x^2+4x-7}{(x+2)^2}$.
3. Déterminer les points de $\mathscr{C}_f$ ou la tangente est horizontale.

■ **Exemple 8.3 — dérivation d'un inverse.**

Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée dans les cas suivants :

$$f(x) = \frac{1}{(5x+3)^2}$$

inverse de $v\colon x \mapsto (5x+3)^2$, *dérivable pour* $5x+3 \neq 0$.

$$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{3}{5}\}$$

on applique $(\frac{1}{v})' = \dfrac{-v'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{-((5x+3)^2)'}{\left((5x+3)^2\right)^2}$$

$u(x) = x^2$, *on dérive* $(u(5x+3))' = 5u'(5x+3)$

$$= \frac{-(5x+3)' \times 2(5x+3)}{(5x+3)^4}$$

on simplifie le numérateur sans développer le dénominateur

$$= \frac{-10(5x+3)}{(5x+3)^4}$$

$$= \frac{-10}{(5x+3)^3}$$

Exercice 8

Donner les domaines de définition et de dérivabilité, puis dériver les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{2}{3x-1}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
3. $f(x) = \dfrac{-5}{x^2-1}$
4. $f(x) = \dfrac{3}{2-3x}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$
6. $f(x) = \dfrac{-5}{3x^2+2}$

■ **Exemple 8.4 — fonctions rationnelles.** Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$.

— Préciser le domaine de f.

— Préciser le domaine de dérivabilité de f ainsi que l'expression de $f'(x)$.

— Dresser le tableau de signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f.

solution.

1. Valeur interdite $x-1=0$, $x=1$ donc $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
2. f est dérivable sur $D' = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
3. $f'(x) = \dfrac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)^2}$
   $= \dfrac{-3}{(x-1)^2}$
   f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
-3		$-$		$-$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	‖	$-$	
variation de f		$\searrow$	‖	$\searrow$	

■

Exercice 9

Pour chacune des fonctions f suivantes :

— préciser le domaine de définition et de dérivabilité

— déterminer sa dérivée f', factoriser le numérateur.

— déterminer le sens de variation de f et préciser les extremum locaux.

1. $f(x) = \dfrac{5x-2}{x+2}$
2. $f(x) = \dfrac{3-x}{1+4x}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$
5. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$
6. $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+x-1}$

Exercice 10 — entrainement : exercices page 147 du manuel.

Pour chacune des fonctions f suivantes :

— préciser le domaine de définition et de dérivabilité

— déterminer sa dérivée f', factoriser le numérateur.

— déterminer le sens de variation de f et préciser les extremum locaux.

1. $f(x) = \dfrac{-4}{x^2+1}$
2. $f(x) = x-1+\dfrac{4}{x-2}$
3. $f(x) = 2x-3+\dfrac{2}{x-1}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$
6. $f(x) = \dfrac{-x^2+8x-13}{x^2-4x+5}$

8.2.2 Application 3 : L'algorithme de Newton-Raphson

Préliminaires On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 5$.

1. Calculer $f'(x)$
2. En déduire le sens de variation de f sur $[2;3]$
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $x^* \in [2;3]$.

> L'algorithme de Newton-Raphson permet d'obtenir par itération une valeur approchée d'une solution à une équation du type $f(x) = 0$.

On se donne x_0 une abscisse proche de x^*. On sait que :

— $T_0\colon y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0.

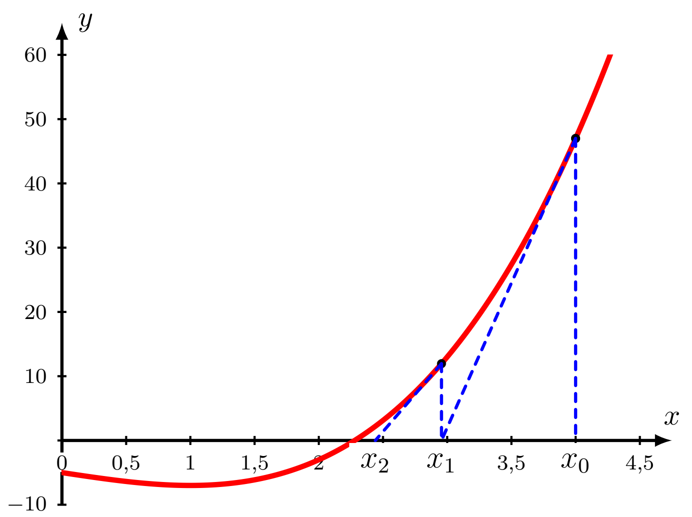
— Au voisinage de x_0, on sait que $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Idée Au lieu de résoudre $f(x) = 0$, on résout $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) &= 0 \\ f'(x_0)(x - x_0) &= -f(x_0) \\ x - x_0 &= -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

x_1 obtenue correspond à l'abscisse du point d'intersection de la tangente T_0 avec l'axe des abscisses. Répétons le processus une seconde fois en arrondissant f au voisinage de x_1 :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) &= 0 \\ \ldots &= -f(x_1) \\ \ldots &= \ldots \\ x_2 &= x_1 - \ldots \end{aligned}$$



En poursuivant, on pose $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 4 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3 + 5}{3x_n^2 - 3}$
2. Rentrer la suite sur la calculatrice, et déterminer x_{10}.
3. Déterminer la limite de la suite x'. S'agit-il d'une valeur approchée de x^*.

Exercice 11

Dans chaque cas, complète une itération et détermine le terme x_1 de l'algorithme de Newton :

1. $f(x) = x^3 - 3$ et $x_0 = 1{,}7$.
2. $f(x) = 3x^2 - 23$ et $x_0 = 1$.

Exercice 12

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x - 3$.

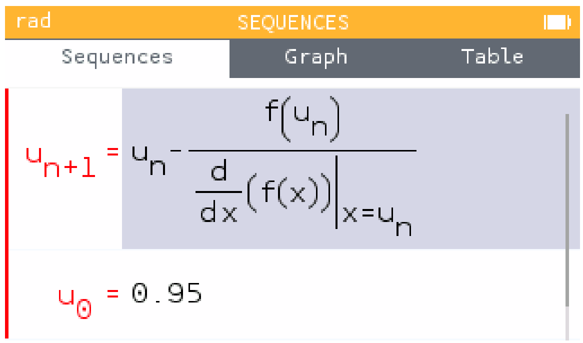
1. Calculer f' et justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[5; 6]$.
2. On pose $x_0 = 5$, et (x_n) la suite donnée par l'itération de Newton Raphson.
   a) Déterminer la relation de récurrence vérifiée par la suite (x_n).
   b) En déduire x_2.

Exercice 13

Dans chaque cas, complète une itération et explique pourquoi l'algorithme de Newton echoue.

1. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 1$ et $x_0 = 1$.
2. $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 3$ et $x_0 = 1{,}5$.

■ **Exemple 8.5 — Point numworks.**



La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$ admet 3 racines.

1. Rentrer l'expression f dans le menu fonctions, puis définir la suite de la méthode de Newton par récurrence à l'aide de f et $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
2. Pour chaque choix de la valeur initiale, calculer quelques termes de la suite et déterminer son comportement pour n grand.
   a) $x_0 = 1{,}05$.
   b) $x_0 = 1$.
   c) $x_0 = 0{,}95$.
   d) $x_0 = 0{,}911$.
   e) $x_0 = 0{,}91$.
   f) $x_0 = 0{,}85$.

Exercice 14 — Algorithme de Babylone.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2$.

1. Donner les zéros de f.
2. Montrer que la suite donnée par l'itération Newton-Raphson vérifie la relation de récurrence $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$.
3. On pose $x_0 = 1$. Déterminer x_5. Quel semble être la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$?

Exercice 15 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$.

1. Calculer la dérivée de la fonction f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $x^* \in [1; 2]$.
3. Proposer une suite définie par récurrence qui permet d'approcher la solution x^*. Préciser la valeur initiale.
4. Complétez le script Python afin que la fonction d'appel `newton(x0,n)` retourne le terme de rang `n` de la suite de Newton-Raphson de premier terme `x0`.

```
def f(u) :
    return u**3+2*u**2+10*u-20
def df(u) :
    return .............
def newton(x0,n) :
    x = x0
    for i in ..........
        ..........
    return(x)

```

L'algorithme de Newton-Raphson est efficace sous des conditions favorables : le nombre de chiffres corrects donnée par la suite double à chaque itération. Au bout d'une dizaine d'itérations on dépasse la précision de la calculatrice à 10^{-15}.

Deux aspects pratiques doivent être pris en compte : (1) la valeur initiale ne doit pas très éloignée du zéro recherché (2) la dérivée ne s'annule pas.

L'algorithme ne donne pas un encadrement a priori du zéro. On peut néanmoins introduire comme condition d'arrêt $\left|\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| < 10^{-p}$.

Exercice 16 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$.

1. Déterminer la dérivée de f et montrer que $f(x) = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $x^* \in [0; 1]$.
2. Proposer une suite de Newton-Raphson définie par récurrence qui permet d'approcher la solution x^*.
3. Complétez le script Python afin que la fonction d'appel `newton(x0,p)` retourne le premier terme de la suite de Newton-Raphson (premier terme `x0`) qui respecte la condition $\left|\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| < 10^{-p}$.

```
def f(u) :
    return u**3+u-1
def df(u) :
    return .............
def newton(x0,p) :
    x = x0
    ..........
    while ..........
        ..........
        ..........
    return(x)
```

L'algorithme de Newton-Raphson peut rentrer en boucle infinie si la condition d'approximation n'est pas réalisée. À cause de cela, toute mise en œuvre de la méthode de Newton-Raphson doit inclure un le contrôle du nombre d'itérations maximum.

8.3 Exercices : solutions et éléments de réponse

correction exercice 1.

$f_1'(x) = 6x^2 - 2x = 2x\,(3x-1)\,;$

$f_2'(x) = 128x^3 + 144x^2 + 48x + 4 = 4\,(2x+1)^2 \cdot (8x+1)\,;$

$f_3'(x) = 63x^6 - 36x^5 + 5x^4 = x^4 \cdot (3x-1)\,(21x-5)\,;$

$f_4'(x) = -12x^3 + 14x = -2x\left(6x^2-7\right)\,;$

$f_5'(x) = -\dfrac{x^2}{2\sqrt{3-x}} + 2x\sqrt{3-x} = -\dfrac{x\,(5x-12)}{2\sqrt{3-x}};$

$f_6'(x) = -\dfrac{27\sqrt{x}}{2} + \dfrac{4}{\sqrt{x}} = -\dfrac{27x-8}{2\sqrt{x}};$

$f_7'(x) = \dfrac{5x^{\frac{3}{2}}}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2+1}{2\sqrt{x}};$

$f_8'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{3x-12}} + 2x\sqrt{3x-12} - \dfrac{3}{2\sqrt{3x-12}} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot(5x^2-16x-1)}{2\sqrt{x-4}};$

$f_9'(x) = \dfrac{6x}{\sqrt{3x-15}} + 4\sqrt{3x-15} - \dfrac{3}{2\sqrt{3x-15}} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot(12x-41)}{2\sqrt{x-5}};$

■

correction exercice 4. $f_1'(x) = \dfrac{7}{(x-2)^2};$

$f_2'(x) = \dfrac{2x\,(x+1)}{(2x+1)^2};$

$f_3'(x) = -\dfrac{x^2+3}{(x^2-3)^2};$

$f_4'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x}\,(2x-1)^2};$

$f_5'(x) = \dfrac{3\,(x^2-2x+3)}{x^2\,(x-3)^2};$

$f_6'(x) = -\dfrac{3x-2}{2\,(1-3x)^{\frac{3}{2}}};$

■

correction exercice 8. $f_1'(x) = -\dfrac{6}{(3x-1)^2};$

$f_2'(x) = -\dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}};$

$f_3'(x) = \dfrac{10x}{(x-1)^2\,(x+1)^2};$

$f_4'(x) = \dfrac{9}{(3x-2)^2};$

$f_5'(x) = -\dfrac{1}{(2x-3)^{\frac{3}{2}}};$

$f_6'(x) = \dfrac{90x}{(3x^2+2)^4};$

■

correction exercice 9.

$f_1'(x) = \dfrac{12}{(x+2)^2}$;

$f_2'(x) = -\dfrac{13}{(4x+1)^2}$;

$f_3'(x) = -\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}\,(x-1)^2}$;

$f_4'(x) = -\dfrac{3x^2-1}{2\sqrt{x}\,(x^2+1)^2}$;

$f_5'(x) = -\dfrac{(x-1)\,(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$;

$f_6'(x) = -\dfrac{5\,(x^2+1)}{(x^2+x-1)^2}$;

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f_1'(x) = \dfrac{12}{(x+2)^2}$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
12		$+$		$+$	
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$	
signe de $f_1'(x) = \frac{12}{(x+2)^2}$		$+$	$\Vert$	$+$	
variation de f_1		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4}\}$

$f_2'(x) = -\dfrac{13}{(4x+1)^2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
-13		$-$		$-$	
$(4x+1)^2$		$+$	0	$+$	
signe de $f_2'(x) = \frac{-13}{(4x+1)^2}$		$-$	$\Vert$	$-$	
variation de f_2		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

$D = [0;1[\cup]1;\infty[$

$D' =]0;1[\cup]1;\infty[$ et $f_3'(x) = -\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$

x	0		1		$+\infty$
$-x-1$		$-$		$-$	
$\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
signe de $f_3'(x) = \frac{-13}{(4x+1)^2}$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
variation de f_3	0	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

$D = [0;\infty[$

$D' =]0;\infty[$ et $f_4'(x) = \dfrac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$

x	0		$\sqrt{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
$-3x^2+1$		$+$	0	$-$	
$\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$	
signe de $f_4'(x) = \frac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
variation de f_4	0	$\nearrow$	$\frac{3^{0.75}}{4}$	$\searrow$	

$D = D' = \mathbb{R}$

$f_5'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-x^2+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2+x+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
signe de $f_5'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation de f_5		$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$

$f_6'(x) = \dfrac{-5x^2-5}{(x^2+x-1)^2}$

x	$-\infty$		$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$-5x^2-5$		$-$		$-$		$-$	
$(x^2+x-1)^2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
signe de $f_6'(x) = \dfrac{-5x^2-5}{(x^2+x-1)^2}$		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
variation de f_6		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

■

correction exercice 10.

$f_1'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$; $f_2'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$; $f_3'(x) = \dfrac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$; $f_4'(x) = -\dfrac{x-5}{(x-1)^3}$; $f_5'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$; $f_6'(x) = -\dfrac{4(x-3)(x-1)}{(x^2-4x+5)^2}$;

$D = D' = \mathbb{R}$

$f_1(x) = \dfrac{-4}{x^2+1}$

$f_1'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$8x$		$-$	0	$+$	
$x^2 + 1$		$+$		$+$	
signe de $f_1'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$		$-$	0	$+$	
variation de f_1		↘	-4	↗	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f_2(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-2}$

$f_2'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$x(x - 4)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x - 2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de $f_2'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
variation de f_2		↗	-3	↘	‖	↘	5	↗	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f_3(x) = 2x - 3 + \dfrac{2}{x-1}$

$f_3'(x) = \dfrac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$2x(x - 2)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x - 1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de $f_3'(x) = \dfrac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
variation de f_3		↗	-5	↘	‖	↘	3	↗	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f_4(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{(x-1)^2}$

$f_4'(x) = \dfrac{-x+5}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$-x + 5$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x - 1)^3$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $f_4'(x) = \dfrac{-x+5}{(x-1)^3}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
variation de f_4		↘	‖	↗	$\dfrac{9}{8}$	↘	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f_5(x) = \dfrac{(x^2+3)}{x+1}$

$f_5'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$(x-1)(x+3)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de $f_5'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variation de f_5		↗	-6	↘	$\Vert$	↘	2	↗	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f_6(x) = \dfrac{-x^2+8x-13}{x^2-4x+5}$

$f_6'(x) = \dfrac{-4(x-3)(x-1)}{(x^2-4x+5)^2}$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-4(x-3)(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2-4x+5)^2$		$+$		$+$		$+$	
signe de $f_6'(x) = \dfrac{-4(x-3)(x-1)}{(x^2-4x+5)^2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation de f_6		↘	-3	↗	1	↘	

■