Chapitre

Inéquations 8

8.1 Vocabulaire

Une **inéquation à une inconnue** est une inégalité dans laquelle apparaît une lettre.

Une solution de l'inéquation est une valeur de la ou les inconnues pour lesquelles l'inégalité est vraie.

■ **Exemple 8.1** Soit l'inéquation $4x + 7 < x^2$ d'inconnue x.

a) $x = 0$ n'est pas solution de l'équation car l'égalité $4 \times 0 + 7 < 0^2$ est fausse.

b) $x = 6$ est une solution de l'équation, car $4 \times 6 + 7 < 6^2$ est vraie.

■ **Exemple 8.2** Soit l'inéquation $7x - 12 \geqslant x^2$ d'inconnue x.

a) $x = 10$ n'est pas solution de l'équation car l'inégalité $7 \times 10 - 12 \geqslant 10^2$ est fausse.

b) $x = 3$, $x = 3{,}5$ et $x = 4$ sont solutions de l'inéquation, car $7 \times 3 - 12 \geqslant 3^2$ est vraie.

Définition 8.1 Résoudre une équation dans $\mathbb{R}$ c'est trouver toutes les valeurs réelles des inconnues qui rendent l'inégalité vraie.

Définition 8.2 Deux inéquations sont dites **équivalentes** (symbole $\iff$) si elles ont le même ensemble de solutions c.à.d elles sont vraies pour les mêmes valeurs de x.

■ **Exemple 8.3**

a) Les inéquations $2x > 4$ et $2x - 4 > 0$ d'inconnue x sont équivalentes.

b) $x = -2$, $x = -3$, $x = -4$... ne sont pas solutions de $x^2 \leqslant 4$. Les inéquations $x \leqslant 2$ et $x^2 \leqslant 4$ ne sont pas équivalentes.

8.1.1 Exercices : mise en inéquations

■ **Exemple 8.4** Traduire le problème posé par une inéquation.

La loi impose d'avoir au minimum 12m^2 d'espace par cochon dans un enclos. Combien de cochons peut accueillir un enclos de $108\ \text{m}^2$?
$x = \ldots$
On chercher $x \in \ldots$ qui vérifie :

Pizza TropBien vend sa pizza 5 € l'unité. La fabrication d'une pizza lui revient à 2.3 € diminué de 0.02 € par pizza vendue. Combien doit-il vendre de pizza pour faire au delà de 180 € de profits ?
$x = \ldots$
On chercher $x \in \ldots$ qui vérifie :

Exercice 1 Même consignes

a) Pour valider le module de Pix, un élève doit accumuler 120 points en 2 tests. Helga a 54 points au premier test mais ne valide pas le module. Quel est le plus grand score possible au second test ?
b) Harold veut acheter un vélo à 310 €. Il a 65 € et met de côté 45 € chaque semaine grâce à son job d'été. Combien de semaines avant de pouvoir acheter ce vélo ?
c) Eugene a 50 € et met de côté 6 € par semaine. Lila n'a pas d'économie et met de côté 9 € par semaine. Combien de semaines sont nécessaires pour que Lila ait plus d'argent que Kyle.
d) Arnold a 18 €. Il veut acheter des cupcakes à 1.5 € pièce. Quel est le nombre maximal de cupcakes qu'il peut s'offrir ?
e) Un taxi prend 5 € de frais de service et 3 € par km de trajet. Quelle est le plus long trajet que peut se payer Rhonda avec 71 € ?

Exercice 2 — Vérifier si une valeur est solution d'une inéquation à 1 inconnue.

	Vrai	Faux
1/ 3 est une solution de l'inéquation $2x+1<5$ d'inconnue x	☐	☐
2/ 2 est une solution de l'inéquation $2x+1<5$ d'inconnue x	☐	☐
3/ -5 est une solution de l'inéquation $7-x>x^2-13$ d'inconnue x	☐	☐
4/ 4 est une solution de l'inéquation $x \leqslant 4$ d'inconnue x	☐	☐
5/ Les inéquations $x-3>0$ et $x>3$ sont équivalentes.	☐	☐
6/ Les inéquations $3x \leqslant 1$ et $x \leqslant -2$ d'inconnue x sont équivalentes.	☐	☐
7/ Les inéquations $3x \leqslant 0$ et $x \leqslant -3$ d'inconnue x sont équivalentes.	☐	☐

solution de l'exercice 1.

a) $x =$ note au test, $x \in \mathbb{N}$. x vérifie $54 + x < 120$. $\cancel{54 + x \leqslant 120}$

b) $x =$ nombre de semaines, $x \in \mathbb{N}$. x vérifie $65 + 45x \geqslant 310$. $\cancel{65 + 45x > 310}$

c) $x =$ nombre de semaines, $x \in \mathbb{N}$. x vérifie $50 + 6x < 9x$. $\cancel{50 + 6x \geqslant 9x}$

d) $x =$ nombre de cupcakes, $x \in \mathbb{N}$. x vérifie $18 \geqslant 1.5x$. $\cancel{18 > 1.5x}$

e) $x =$ longueur du trajet en km, $x \in \mathbb{R}$. x vérifie $71 \geqslant 3x + 5$. $\cancel{71 > 3x + 5}$

■

solution de l'exercice 2.

	Vrai	Faux
1/ 3 est une solution de l'inéquation $2x + 1 < 5$ d'inconnue x	☐	☒
2/ 2 est une solution de l'inéquation $2x + 1 < 5$ d'inconnue x	☐	☒
3/ -5 est une solution de l'inéquation $7 - x > x^2 - 13$ d'inconnue x	☒	☐
4/ 4 est une solution de l'inéquation $x \leqslant 4$ d'inconnue x	☒	☐
5/ Les inéquations $x - 3 > 0$ et $x > 3$ sont équivalentes.	☒	☐
6/ Les inéquations $3x \leqslant 1$ et $x \leqslant -2$ d'inconnue x sont équivalentes.	☐	☒
7/ Les inéquations $3x \leqslant 0$ et $x \leqslant -3$ d'inconnue x sont équivalentes.	☐	☒

■

8.2 Intervalles

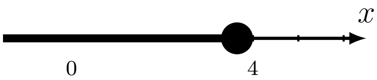


Figure 8.1 – $I =]-\infty; 4]$

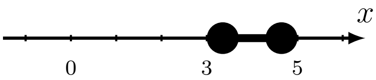


Figure 8.2 – $J = [3; 5]$

■ **Exemple 8.5** Soit l'inéquation $x \leqslant 4$ d'inconnue x. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est $I = \{x \in \mathbb{R} \quad | x \leqslant 4\}$. On le notera $I =]-\infty; 4]$. Intervalle de $-\infty$ à 4 fermé en 4.

■ **Exemple 8.6** La double inéquation $3 \leqslant x \leqslant 5$ d'inconnue x a pour solution $J = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad 3 \leqslant x \leqslant 5\}$.

se lit :« l'ensemble des x dans $\mathbb{R}$ avec $3 \leqslant x \leqslant 5$ ». On le notera $J = [3; 5]$.

Intervalle	Inégalité	Représentation sur droite graduée
$x \in [a; b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$x \in]a; b[$	$a < x < b$	
$x \in [a; b[$	$a \leqslant x < b$	
$x \in]a; b]$	$a < x \leqslant b$	

Table 8.1 – Les différentes variantes d'intervalles bornés par a et $b \in \mathbb{R}$

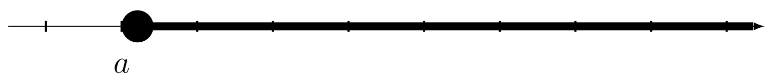
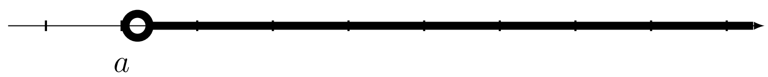
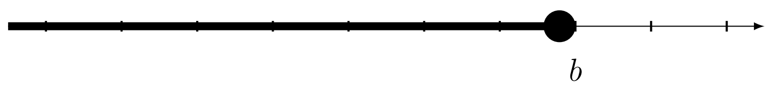
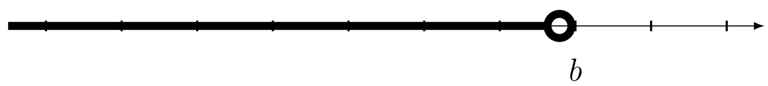
Intervalle	Inégalité	Représentation sur droite graduée
$x \in [a; +\infty[$	$x \geqslant a$	
$x \in]a; +\infty[$	$x > a$	
$x \in]-\infty; b]$	$x \leqslant b$	
$x \in]-\infty; b[$	$x < b$	

Table 8.2 – Les différentes variantes d'intervalles infinis

8.2.1 Exercices : Intervalles

Exercice 1

Sans calculatrice, compléter par l'un des symboles : $\in$, $\notin$.

$-3{,}1 \ \ldots \ [-4;-3]$; $\qquad 2{,}3 \times 10^{-2} \ \ldots \ [2;3]$; $\qquad \dfrac{1}{4} \ \ldots \ \left[\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right]$; $\qquad -\dfrac{4}{5} \ \ldots \ \left[-1;-\dfrac{3}{4}\right]$;

Exercice 2

Sans calculatrice, compléter par $\in$, $\notin$ et $\subset$ ou $\supset$.

$\dfrac{17}{4} \ \ldots \ ]4;5[$; $\qquad 0{,}333 \ \ldots \ \left[\dfrac{1}{3};1\right[$; $\qquad \mathbb{Z} \ \ldots \ \mathbb{R}$; $\qquad \dfrac{2}{3} \ \ldots \ \mathbb{D}$

$\sqrt{8} \ \ldots \ ]2;3[$; $\qquad \dfrac{3}{8} \ \ldots \ \left[\dfrac{3}{9};\dfrac{3}{7}\right]$; $\qquad \dfrac{11}{3} \ \ldots \ \left]\dfrac{21}{6};5\right]$ $\qquad \left]\dfrac{21}{6};5\right] \ \ldots \ \left[\dfrac{11}{3};4\right]$

Exercice 3 Compléter le tableau suivant :

Intervalle	Inégalité(s)	Représentation sur droite réelle	Phrase
$x \in [-3;5]$			
	$x < 3$		
			Intervalle de 4 à 6, fermé en 4 et ouvert en 6.
$[2;+\infty[$			
	$-3 < x \leqslant -1$		
			Intervalle de $-\infty$ à 5, fermé en 5.
	$-3 \leqslant x \leqslant -1$		
	$5 \geqslant x > 1$		
	$x \geqslant -\dfrac{3}{4}$		
	$-4 > x > -7$		

8.3 Relation d'ordre et opération

Définition 8.3 a et $b \in \mathbb{R}$.
a est supérieur à b s.s.i. la différence $(a-b)$ est positive :

$$a \geqslant b \iff (a-b) \geqslant 0$$

Comparer deux expressions a et b revient à étudier le signe de la différence.

Théorème 8.7 — Addition. L'addition conserve l'ordre :

$$(a \geqslant b) \quad \Rightarrow \quad (a+n \geqslant b+n)$$

Démonstration. ■

Théorème 8.8 — Multiplication. La **multiplication par un nombre positif** conserve l'ordre.
La multiplication par un nombre **négatif** inverse l'ordre.

$$\begin{aligned} a \geqslant b \quad \text{et } p \geqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad pa \geqslant pb \\ \text{et } n \leqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad na \leqslant nb \end{aligned}$$

Démonstration. ■

8.3.1 Exercices : résolution d'inéquations du premier degré

On ne change pas les solutions d'une inéquation si :
- on **développe, factorise, réduit** un des membres de l'inéquation
- on **ajoute une même expression** aux deux membres de
- on **multiplie** les 2 membres de l'inéquation par **une même expression positive non nulle**
- on **multiplie** les 2 membres de l'inéquation par **une même expression négative non nul(le)** à condition de **changer le sens du signe de l'inéquation**

■ **Exemple 8.9** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

$3x+4>10$ $\qquad$ $-2x-8>10$ $\qquad$ $2+5x \leqslant -13$

Exercice 1 — variables d'un seul côté. Même consignes

(I_1) $x+1<9$

(I_2) $x-4>3$

(I_3) $-6x \geqslant 30$

(I_4) $-x<8$

(I_5) $7<2x-11$

(I_6) $-8x-5>0$

(I_7) $42x>0$

(I_8) $14-6x \geqslant -10$

(I_9) $\frac{3}{2}x-1>4$

Exercice 2 — variable dans les deux membres. Mêmes consignes

(I_1) $3x>2x+1$

(I_2) $12x \leqslant 8x+128$

(I_3) $x+5<10x$

(I_4) $3x+1 \geqslant 3x+7$

(I_5) $3(x+1)-30<x+15$

(I_6) $2x-10<7x+5$

(I_7) $5x+9 \geqslant 5x+2$

(I_8) $1-7x \leqslant 7+x$

(I_9) $5x-5>-9x+3$

■ **Exemple 8.10** Expliquer les erreurs dans les résolutions suivantes

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} \geqslant -1 && \text{\textit{On multiplie par } } x \\ \iff & \frac{x}{x} \geqslant -x && \text{\textit{On simplifie}} \\ \iff & 1 \geqslant -x && \text{\textit{On multiplie par } } -1 \\ \iff & -1 \leqslant x \\ & \mathscr{S} = [-1;+\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^2 > 5x && \text{\textit{On divise par } } x \\ \iff & \frac{x^2}{x} > \frac{5x}{x} && \text{\textit{On simplifie}} \\ \iff & x > 5 \\ & \mathscr{S} =]5;+\infty[\end{aligned}$$

■ **Exemple 8.11 — Encadrements.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :
$-1 < x+2 < 5$ $\quad -4 \geqslant -2x \geqslant -10$ $\quad -5 \leqslant -3x+7 < 15$

Exercice 3 Mêmes consignes

(I_1) $-3 < x-4 < 7$	(I_4) $2 \leqslant 2x < 10$	(I_7) $-3 \leqslant 2x-1 < 1$
(I_2) $4 < 5x-4 \leqslant 5$	(I_5) $-1 \leqslant -x < 3$	(I_8) $8 < -2+3x < 16$
(I_3) $-6 \leqslant 3+x < 4$	(I_6) $-3 \leqslant 1-x < 4$	(I_9) $4 < 2x-1 \leqslant 10$

■ **Exemple 8.12 — Disjonctions et inéquations simultanées.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
$3 < x$ et $x < 7$ $\quad x > 4$ ou $x < 3$ $\quad x > 1$ ou $x = -1$

Exercice 4 Mêmes consignes

(I_1) $x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 1$	(I_4) $x \leqslant 1$ et $x > 5$	(I_7) $-2x > 10$ ou $4x > 16$
(I_2) $x < 4$ ou $x > 8$	(I_5) $x < -3$ ou $x = 5$	(I_8) $15 > 4x-1$ ou $1 < 4x-15$
(I_3) $x < 9$ et $x < -3$	(I_6) $x+5 \leqslant -4$ ou $x+5 \geqslant 4$	(I_9) $3x+1 \leqslant 4$ et $2x-3 > 7$

■ **Exemple 8.13 — Valeur absolue.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :
$|x+3| < 6$ $\quad |2x| \geqslant 10$

Exercice 5 Mêmes consignes

(I_1) $|x+6| > 7$	(I_3) $|6x| > 12$	(I_5) $|2x-5| < 7$
(I_2) $|x+3| < 4$	(I_4) $|1+2x| \geqslant 23$	(I_6) $\left|\frac{1}{4}x\right| > 12$

solution de l'exercice 1.

(I_1) $\mathscr{S} =]-\infty, 8[$
(I_2) $\mathscr{S} =]7, \infty[$
(I_3) $\mathscr{S} =]-\infty, -5]$
(I_4) $\mathscr{S} =]-8, \infty[$
(I_5) $\mathscr{S} =]9, \infty[$
(I_6) $\mathscr{S} = \left]-\infty, -\frac{5}{8}\right[$
(I_7) $\mathscr{S} =]0, \infty[$
(I_8) $\mathscr{S} =]-\infty, 4]$
(I_9) $\mathscr{S} = \left]\frac{10}{3}, \infty\right[$

■

solution de l'exercice 2.

(I_1) $\mathscr{S} =]1, \infty[$
(I_2) $\mathscr{S} =]-\infty, 32]$
(I_3) $\mathscr{S} = \left]\frac{5}{9}, \infty\right[$
(I_4) $\mathscr{S} = \emptyset$
(I_5) $\mathscr{S} =]-\infty, 21[$
(I_6) $\mathscr{S} =]-3, \infty[$
(I_7) $\mathscr{S} = \mathbb{R}$
(I_8) $\mathscr{S} = \left[-\frac{3}{4}, \infty\right[$
(I_9) $\mathscr{S} = \left]\frac{4}{7}, \infty\right[$

■

solution de l'exercice 3.

(I_1) $\mathscr{S} =]1, 11[$
(I_2) $\mathscr{S} = \left]\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right]$
(I_3) $\mathscr{S} = [-9, 1[$
(I_4) $\mathscr{S} = [1, 5[$
(I_5) $\mathscr{S} =]-3, 1]$
(I_6) $\mathscr{S} =]-3, 4]$
(I_7) $\mathscr{S} = [-1, 1[$
(I_8) $\mathscr{S} = \left]\frac{10}{3}, 6\right[$
(I_9) $\mathscr{S} = \left]\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right]$

■

solution de l'exercice 4.

(I_1) $\mathscr{S} =]-\infty, -3] \cup [1, \infty[$
(I_2) $\mathscr{S} =]-\infty, 4[\cup]8, \infty[$
(I_3) $\mathscr{S} =]-\infty, -3[$
(I_4) $\mathscr{S} = \emptyset$
(I_5) $\mathscr{S} =]-\infty, -3[\cup \{5\}$
(I_6) $\mathscr{S} =]-\infty, -9[\cup [-1, \infty[$
(I_7) $\mathscr{S} =]-\infty, -5[\cup]4, \infty[$
(I_8) $\mathscr{S} =]-\infty, 4[\cup]4, \infty[$
(I_9) $\mathscr{S} = \emptyset$

■

solution de l'exercice 5.

(I_1) $\mathscr{S} =]-\infty, -13[\cup]1, \infty[$
(I_2) $\mathscr{S} =]-7, 1[$
(I_3) $\mathscr{S} =]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$
(I_4) $\mathscr{S} =]-\infty, -12] \cup [11, \infty[$
(I_5) $\mathscr{S} =]-1, 6[$
(I_6) $\mathscr{S} =]-\infty, -48[\cup]48, \infty[$

■

8.4 Inéquations produit et quotient

■ **Exemple 8.14** Étudier le signe de $A(x) = 4x + 3$ selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$.

$4x + 3 > 0$ $\qquad\qquad$ $4x + 3 < 0$

$\iff$ $\qquad\qquad$ $\iff$

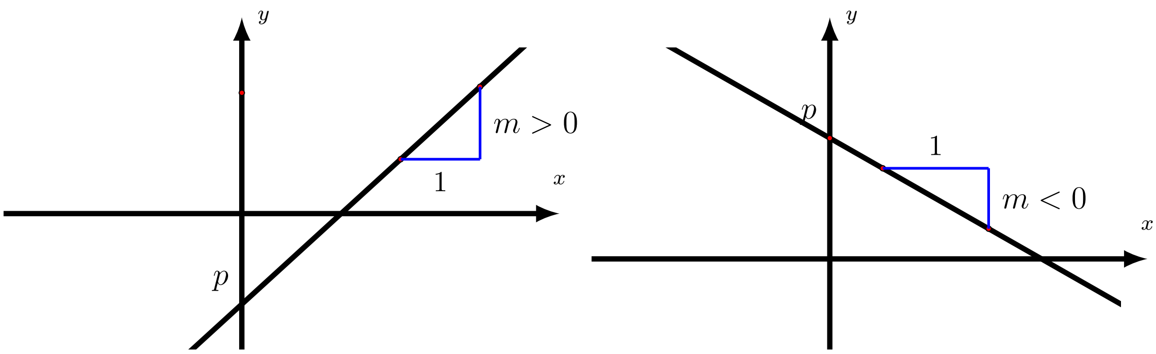
x	$-\infty$		$+\infty$
signe de			

■ **Exemple 8.15** Même question avec $B(x) = -3x + 5$

$-3x + 5 > 0$ $\qquad\qquad$ $-3x + 5 < 0$

$\iff$ $\qquad\qquad$ $\iff$

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de			



x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
variation de $f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
Variation de $f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$
Signe de $f(x)$	$+$	0	$-$

Figure 8.3 – Signe d'une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$. À gauche, le cas ou $m > 0$, alors f est **strictement croissante**. À droite le cas $m < 0$, f est **strictement décroissante**

8.4.1 Exercices : Tableaux de signes et application aux inéquation

Exercice 1

Associez les expressions affines $6x-12$; $7x+10$; $-21x+30$ et $-3x+6$ avec le bon tableau de signe.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		2		$+\infty$
		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$\frac{10}{7}$		$+\infty$
		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{10}{7}$		$+\infty$
		$-$	0	$+$	

Exercice 2 Complétez les tableaux de signes des expressions affines suivantes.

x	$-\infty$		$+\infty$
$-3x+5$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$3x-12$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$-2x-5$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$5x-4$			

■ **Exemple 8.16 — Je fais - Expressions de signe évident.**

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x-3$			
$(2x-3)^2$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$x-6$			
$\frac{1}{x-6}$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$-3x-2$			
-10			
$-10(-3x-2)$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$3x+2$			
5			
$\frac{5}{3x+2}$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$-3x-2$			
$-10(-3x-2)^2$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$3x+2$			
$\frac{5}{(3x+2)^2}$			

Exercice 3 Cochez les expressions dont le tableau de signe est donné. Plusieurs réponses sont possibles

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	

- ❑ $-x-2$
- ❑ $-5(-x-2)$
- ❑ $(-x-2)^2$
- ❑ $-5(-x-2)^2$
- ❑ $\dfrac{1}{-x-2}$
- ❑ $\dfrac{-5}{-x-2}$
- ❑ $\dfrac{-5}{(-x-2)^2}$
- ❑ aucune

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	

- ❑ $-x+1$
- ❑ $9(-x+1)$
- ❑ $(-x+1)^2$
- ❑ $9(-x+1)^2$
- ❑ $\dfrac{1}{-x+1}$
- ❑ $\dfrac{9}{-x+1}$
- ❑ $\dfrac{9}{(-x+1)^2}$
- ❑ aucune

x	$-\infty$		$-\dfrac{10}{3}$		$+\infty$
$C(x)$		$-$	0	$-$	

- ❑ $-3x-10$
- ❑ $-7(-3x-10)$
- ❑ $(-3x-10)^2$
- ❑ $-7(-3x-10)^2$
- ❑ $\dfrac{1}{-3x-10}$
- ❑ $\dfrac{-7}{-3x-10}$
- ❑ $\dfrac{-7}{(-3x-10)^2}$
- ❑ aucune

x	$-\infty$		$-\dfrac{7}{2}$		$+\infty$
$D(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	

- ❑ $2x+7$
- ❑ $3(2x+7)$
- ❑ $(2x+7)^2$
- ❑ $3(2x+7)^2$
- ❑ $\dfrac{1}{2x+7}$
- ❑ $\dfrac{3}{2x+7}$
- ❑ $\dfrac{3}{(2x+7)^2}$
- ❑ aucune

Exercice 4 — Bilan. Complétez les tableaux de signe suivant

x	$-\infty$				$+\infty$
$10(-x+2)^2$					

x	$-\infty$				$+\infty$
$\dfrac{5}{-x+2}$					

■ **Exemple 8.17 — Je fais : utiliser les tableaux de signes pour résoudre des inéquations.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 > 5x$ inconnue x.

$x^2 > 5x$
On transforme en une comparaison à zéro
$\iff x^2 - 5x > 0$
On factorise le membre non nul
$\iff x(x-5) > 0$

On dresse le tableau de signe de la forme factorisée après avoir cherché ses racines :

x	$-\infty$			$+\infty$
x				
$x - 5$				
$x(x-5)$				

$\iff x(x-5) > 0$
On utilise le tableau de signe de la forme factorisée
$\iff x \in$

$\mathscr{S} =$

■ **Exemple 8.18 — Nous faisons.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 \leqslant 4$ inconnue x.

$x^2 \leqslant 4$
On transforme en une comparaison à zéro
$\iff \leqslant 0$
On factorise le membre non nul
$\iff \leqslant 0$

On dresse le tableau de signe de la forme factorisée après avoir cherché ses racines :

x	$-\infty$			$+\infty$

$\iff \leqslant 0$
On utilise le tableau de signe de la forme factorisée
$\iff x \in$

$\mathscr{S} =$

■ **Exemple 8.19 — Nous faisons.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 > 2x - 1$ inconnue x.

$x^2 > 2x - 1$
On transforme en une comparaison à zéro
$\iff > 0$
On factorise le membre non nul
$\iff > 0$

On dresse le tableau de signe de la forme factorisée après avoir cherché ses racines :

x	$-\infty$			$+\infty$

$\iff \qquad > 0$ *On utilise le tableau de signe de la forme factorisée*

$\iff x \in$

$\mathscr{S} =$

Préliminaire : développer $(2x+3)(-5x+4)$.

■ **Exemple 8.20 — Nous faisons.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-7x+12 > 10x^2$ inconnue x.

$-7x+12 > 10x^2$

On transforme en une comparaison à zéro

$\iff \qquad > 0$

On factorise le membre non nul

$\iff \qquad > 0$

On dresse le tableau de signe de la forme factorisée après avoir cherché ses racines :

x	$-\infty$			$+\infty$
$2x+3$				
$-5x+4$				
$(2x+3)(-5x+4)$				

$\iff \qquad > 0$ *On utilise le tableau de signe de la forme factorisée*

$\iff x \in$

$\mathscr{S} =$

■ **Exemple 8.21** À l'aide de l'exemple précédent résoudre $\mathbb{R}$ l'inéquation $-7x+12 \geqslant 10x^2$ inconnue x.

$\mathscr{S} =$

■ **Exemple 8.22 — Nous faisons.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-5(x-2)^2 \geqslant 7$ inconnue x.

$-5(x-2)^2 \geqslant 7$

On transforme en une comparaison à zéro

$\iff \qquad \geqslant 0$

Expression avec signe évident

$\mathscr{S} =$

Point méthode

1. Vous ramènerez l'inéquation à une **comparaison à zéro** (i.e. une étude de signe)
2. Déterminer la forme factorisée du membre non nul.
3. Vous chercherez les racines des termes affines de la forme **factorisée**.
4. Dresser le tableau de signe de la forme factorisée.
5. Conclure.

Exercice 5] Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$(I_1) : (7x-2)(x+3) \geqslant 0$

$(I_2) : x(3x+1) < (2x+3)x$

$(I_3) : (2x+4)^2 \geqslant (2x+4)(x-3)$

$(I_4) : x^2 \geqslant 9$

$(I_5) : (2x+5)(x-4)(-x-8) < 0$

$(I_6) : (4x^2-9)(x+1) > 0$

$(I_7) : (x^2-1)(2x-3) \leqslant 0$

$(I_8) : (x+1)^2(5x-3) \leqslant 0$

Les tableaux de signes données ci-dessous vous permettent d'aller plus rapidement.

x	$-\infty$ $+\infty$

x	$-\infty$ $+\infty$

x	$-\infty$ $+\infty$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$

■ **Exemple 8.23 — Nous faisons.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{-7x-6}{4x+3} > 0$ inconnue x.

Valeurs interdites : $4x+3 \neq 0 \iff x \neq$. Le domaine de résolution est ....

✔ comparaison à zéro ✔ même dénominateur ✔ facteurs affines

On dresse le tableau de signe du quotient après avoir cherché ses racines :

x	$-\infty$			$+\infty$
$-7x-6$				
$4x+3$				
$\dfrac{-7x-6}{4x+3}$				

$\dfrac{-7x-6}{4x+3} > 0$

On utilise le tableau de signe de la forme factorisée

$\mathscr{S} =$

■ **Exemple 8.24** À l'aide de l'exemple précédent résoudre $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{-7x-6}{4x+3} \geqslant 0$ inconnue x.

$\mathscr{S} =$

■ **Exemple 8.25 — Nous faisons.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{-8x-5}{4x+3} > 0$ inconnue x.

Valeurs interdites : $4x+3 \neq 0 \iff x \neq$. Le domaine de résolution est ....

✔ comparaison à zéro ✔ même dénominateur ✔ facteurs affines

On dresse le tableau de signe du quotient après avoir cherché ses racines :

x	$-\infty$			$+\infty$
$-8x-5$				
$4x+3$				
$\dfrac{-8x-5}{4x+3}$				

$\dfrac{-8x-5}{4x+3} > 0$

On utilise le tableau de signe de la forme factorisée

$\mathscr{S} =$

■ **Exemple 8.26** À l'aide de l'exemple précédent résoudre $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{-8x-5}{4x+3} \leqslant 0$ inconnue x.

$\mathscr{S} =$

■ **Exemple 8.27 — Nous faisons.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{1}{4x-3} \geqslant 2$ inconnue x.

Valeurs interdites : ....

$$\frac{1}{4x-3} \geqslant 2$$

On transforme en une comparaison à zéro

$\iff \qquad \geqslant 0$

On ramène au même dénominateur le membre non nul

$\iff \qquad \geqslant 0$

$\iff \qquad \geqslant 0$ ✔ facteurs affines

x	$-\infty$			$+\infty$

$\mathscr{S} =$

■ **Exemple 8.28 — Nous faisons.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{1}{4x+3} \geqslant \dfrac{2}{x}$ inconnue x.

Valeurs interdites : ....

$$\frac{1}{4x+3} \geqslant \frac{2}{x}$$

On transforme en une comparaison à zéro

$\iff \qquad \geqslant 0$

On ramène au même dénominateur le membre n

$\iff \qquad \geqslant 0$

$\iff \qquad \geqslant 0$

$\iff \qquad \geqslant 0$ ✔ facteurs affines.

x	$-\infty$				$+\infty$

$\mathscr{S} =$

Point méthode

1. Pour les inéquations rationnelles, préciser le domaine de résolution (valeurs interdites).
2. Vous ramènerez l'inéquation à une **comparaison à zéro** (i.e. une étude de signe)
3. Déterminer la forme factorisée du membre non nul.
4. Pour les inéquations rationnelles (avec des quotients) mettre au même dénominateur et factoriser numérateurs et dénominateurs si nécessaire.
5. Vous chercherez les racines des termes affines de la forme **factorisée**.
6. Dresser le tableau de signe de la forme factorisée.
7. Conclure.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations rationnelles suivantes.

$(I_1) : \dfrac{3x+2}{x-5} \geqslant 0$

$(I_2) : \dfrac{-5x+2}{2x+1} \leqslant 0$

$(I_3) : \dfrac{-5}{x(x-1)} \leqslant 0$

$(I_4) : \dfrac{2x-7}{x^2-9} \geqslant 0$

$(I_5) : \dfrac{3x+1}{6-5x} \geqslant 2$

$(I_6) : \dfrac{3x+1}{5-2x} \leqslant -3$

$(I_7) : \dfrac{3}{x+1} > \dfrac{2}{x-1}$

$(I_8) : \dfrac{x+5}{x-1} \leqslant \dfrac{x-3}{x+2}$

x	$-\infty$ $+\infty$

x	$-\infty$ $+\infty$

x	$-\infty$ $+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$

solution de l'exercice 5.

(I_1) $\mathscr{S} = \left]-\infty, -3\right] \cup \left[\dfrac{2}{7}, \infty\right[$

(I_2) $\mathscr{S} = \left]0, 2\right[$

(I_3) $\mathscr{S} = \left]-\infty, -7\right] \cup \left[-2, \infty\right[$

(I_4) $\mathscr{S} = \left]-\infty, -3\right] \cup \left[3, \infty\right[$

(I_5) $\mathscr{S} = \left]-8, -\dfrac{5}{2}\right[\cup \left]4, \infty\right[$

(I_6) $\mathscr{S} = \left]-\dfrac{3}{2}, -1\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}, \infty\right[$

(I_7) $\mathscr{S} = \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, \dfrac{3}{2}\right]$

(I_8) $\mathscr{S} = \left]-\infty, \dfrac{3}{5}\right]$

$\blacksquare$

solution de l'exercice 6.

(I_1) $\mathscr{S} = \left]-\infty, -\dfrac{2}{3}\right] \cup \left]5, \infty\right[$

(I_2) $\mathscr{S} = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left[\dfrac{2}{5}, \infty\right[$

(I_3) $\mathscr{S} = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]1, \infty\right[$

(I_4) $\mathscr{S} = \left]-3, 3\right[\cup \left[\dfrac{7}{2}, \infty\right[$

(I_5) $\mathscr{S} = \left[\dfrac{11}{13}, \dfrac{6}{5}\right[$

(I_6) $\mathscr{S} = \left]\dfrac{5}{2}, \dfrac{16}{3}\right]$

(I_7) $\mathscr{S} = \left]-1, 1\right[\cup \left]5, \infty\right[$

(I_8) $\mathscr{S} = \left]-\infty, -2\right[\cup \left[-\dfrac{7}{11}, 1\right[$

$\blacksquare$

8.5 Club de Maths : un carré est positif et applications

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x.

(I_1) $3(x+1)-30 < x+15$

(I_2) $2(x-1)-3(x+1) > 4(3x-2)$

(I_3) $\dfrac{3x-1}{4} \leqslant \dfrac{5x+1}{6}$

(I_4) $\dfrac{2x+1}{3} + \dfrac{x-1}{2} \leqslant 0$

Un grand nombre de résultats reposent sur le principe simple suivant : le carré d'un réel est un réel positif, et ce carré est nul si et seulement si le réel est nul. Dans cette feuille, nous explorons plusieurs applications (simples et moins simples) de ce principe([a]).

a. À partir d'un receuil du club de Maths de Nancy

Problème 1 — Petites astuces à connaître.

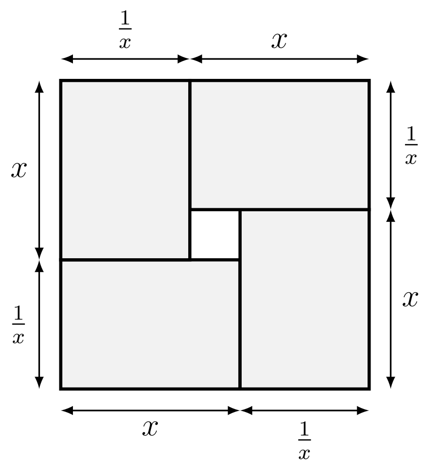
Montrer les inégalités suivantes sont vraies pour tout a et $b \in \mathbb{R}$:

$$2ab \leqslant a^2+b^2 \qquad ab \leqslant \frac{(a+b)^2}{4} \qquad (a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$$

Problème 2

Soit a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2+b^2 = ab$. Que peut-on dire de ces deux nombres ?

Problème 3



a) Justifier que la figure ci-contre illustre l'inégalité :

$$\text{pour tout } x \geqslant 0 \text{ on a} \qquad x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

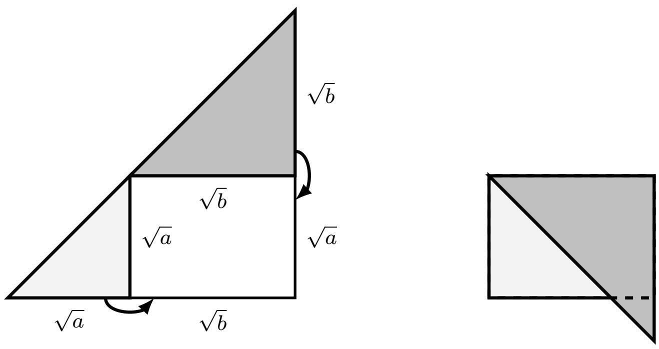
b) Démontrer algébriquement l'inégalité précédente.

Problème 4 — Inégalité arithmético-géométrique.

a) Montrer que la figure ci-contre illustre l'inégalité pour $a, b \geqslant 0$, on a

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

b) Démontrer algébriquement l'inégalité précédente.



Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x.

(I_1) $\dfrac{2x+1}{3} + \dfrac{x-1}{2} < \dfrac{x+2}{6}$

(I_2) $\dfrac{2x+1}{3} + \dfrac{x-1}{2} < \dfrac{7x+2}{6}$

(I_3) $\dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{x-1}{2} > \dfrac{7x+2}{6}$

(I_4) $\dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{x+1}{2} < \dfrac{7x+2}{6}$

Problème 5 — Inégalité de Cauchy-Schwarz et application.

a) Montrer que pour tout $x, y, u, v \in \mathbb{R}$:

$$(x^2+y^2)(a^2+b^2) \geqslant \big(xa+yb\big)^2$$

b) En déduire pour $a > 0$ et $b > 0$ on a :

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$$

Problème 6 — Lemme du tourniquet. Montrer que pour tout a, b et $c \in \mathbb{R}$ on a :

$$ab+bc+ca \leqslant a^2+b^2+c^2$$

et que s'il y a égalité alors les trois réels sont égaux.

solution de l'exercice 1.

(I_1) $\mathscr{S} =]-\infty, 21[$ | (I_2) $\mathscr{S} = \left]-\infty, \dfrac{3}{13}\right[$ | (I_3) $\mathscr{S} = [-5, \infty[$ | (I_4) $\mathscr{S} = \left]-\infty, \dfrac{1}{7}\right]$

■

solution du problème 1. Il s'agit de montrer que la différence est positive. Quelle est cette différence ? Peut-on l'écrire sous forme factorisée ? ■

solution du problème 3. Quelle est l'aire des rectangles ? Quelle est l'aire du grand carré ? ■

solution du problème 4. Remplaçer a et b par $(\sqrt{a})^2$, et $(\sqrt{b})^2$. Peut-on factoriser ? ■

solution de l'exercice 2.

(I_1) $\mathscr{S} = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$ | (I_2) $\mathscr{S} = \mathbb{R}$ | (I_3) $\mathscr{S} = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$ | (I_4) $\mathscr{S} = \left]-\dfrac{1}{2}, \infty\right[$

■

solution du problème 5. Il s'agit de montrer que la différence est positive. Quelle est cette différence ? Peut-on l'écrire sous forme factorisée ? Pour la question b), choisir astucieusement x et y. ■

solution du problème 6. Multiplier par deux des deux côtés, tout regrouper, reconnaître des identités remarquables ■