Chapitre

Nombres rationnels 3

3.1 Écriture fractionnaires et opérations

On parle **écritures fractionnaires** lorsque les numérateurs et dénominateurs sont des expressions ($\frac{x}{x-1}$ avec $x \neq 1$) ou ne sont pas entiers ($\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3{,}2}{1{,}2}$).

Faire un poster A4, (figure 3) avec rappel des règles d'opérations vues au collège.
Faire un bilan après l'exemple 3.5, avant de poursuivre et donner la définition de rationnels.

3.2 Nombres rationnels

Définition 3.1 — nombres rationnels. L'ensemble des nombres réels qui peuvent s'écrire comme une fraction irréductible d'entiers sont dit rationnels.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \quad \middle| \quad a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*, \quad \text{sans diviseurs communs} \right\}$$

R Les nombres décimaux sont aussi rationnels.

$$\begin{aligned} 13{,}2 &= \frac{132}{10} = \frac{66 \times 2}{5 \times 2} = \frac{66}{5} \in \mathbb{Q} \\ 9{,}75 &= \frac{975}{100} = \frac{195 \times 5}{20 \times 5} = \frac{195}{20} = \frac{39 \times 5}{4 \times 5} = \frac{39}{4} \in \mathbb{Q} \\ -13 &= \frac{-13}{1} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

À l'inverse, un rationnel peut ne pas être un nombre décimal.

■ **Exemple 3.1 — Écriture décimale de nombres rationnels.**
$251 \div 25 = 10{,}04$;
$150 \div 7 = 21{,}\underline{428571}\ldots$;
$1 \div 49 = 0{,}\underline{020408163265306122448979591836734693877551}\ldots$.

Définition 3.2 On appelle irrationnels les nombres réels qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$.

$$
\begin{array}{r|l}
251 & 25 \\ \cline{2-2}
-25 & 10{,}04 \\ \cline{1-1}
01 & \\
-0 & \\ \cline{1-1}
10 & \\
-0 & \\ \cline{1-1}
100 & \\
-100 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
150 & 7 \\ \cline{2-2}
\ \ 10 & 21{,}42857142 \\
\ \ \ \ 30 & \\
\ \ \ \ \ \ 20 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 60 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 40 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 50 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 10 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 30 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 20 & \\
\ 6 &
\end{array}
$$

Figure 3.1 – Illustration du principe des tiroirs avec les divisions décimales des quotients $\frac{251}{25}$ et $\frac{150}{7}$

Théorème 3.2 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

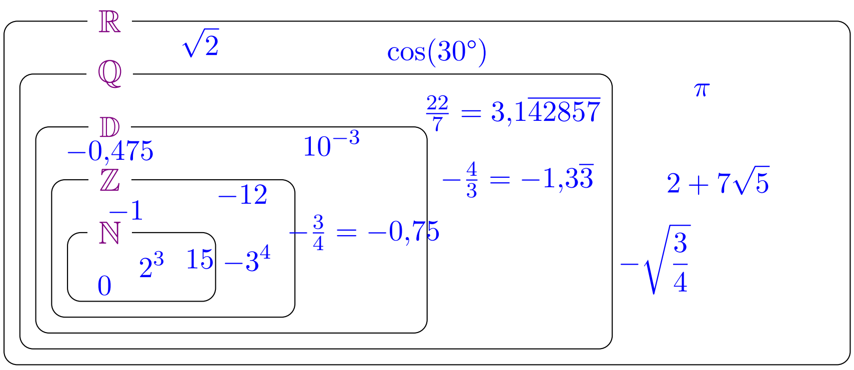

Figure 3.2 – $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Les nombres réels sont classés dans les catégories suivantes :

$\mathbb{N}$ nombres entiers positifs (partie fractionnaire est nulle).

$\mathbb{Z}$ nombres entiers positifs ou négatifs

$\mathbb{D}$ nombre décimaux, s'écrivent comme fraction décimale. Leur écriture décimale est finie.

$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$ rationnels mais pas décimaux : s'écrivent comme fraction d'entiers, et leur écriture décimale est périodique.
Les nombres rationnels ont une représentation finie en fraction continue.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nombres irrationnels. Leur écriture décimale est infinie et non périodique (exemple avec π et exploration de son écriture décimale).
Les nombres irrationnels ont une représentation infinie en fraction continue .

3.2.1 Exercices : fractions, nombres rationnels et irrationnels

Exercice 1 — . Exprimer les expressions suivantes sous forme d'une fraction irréductible

$$A = \frac{3}{2} \times 13 \qquad B = \frac{12}{5} \times \frac{1}{9} \qquad C = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6}$$

$$D = \frac{16}{\frac{7}{5}} \qquad E = \frac{35}{4} \times \frac{3}{35} \qquad F = \frac{11}{11} \times \frac{1}{6}$$

$$G = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{3}} \qquad H = \frac{9}{\frac{35}{2}}$$

$$I = 5 - \frac{4}{9} \qquad J = \frac{7}{4} + \frac{2}{5} \qquad K = \frac{1}{32} - \frac{3}{4}$$

$$L = \frac{5}{4} + \frac{13}{12} \qquad M = \frac{8}{3} - \frac{11}{12} \qquad N = \frac{7}{6} - \frac{3}{10}$$

■ **Exemple 3.3** Écrire sous forme d'une fraction irréductible. Montrer les calculs.

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} =$$

Exercice 2 — fractions continues. Donner l'écriture en fractions d'entiers des expressions suivantes. Montrer les étapes de calculs.

$$A = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{4}}}} \qquad B = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} \qquad C = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7}}} \qquad D = 0 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3}}}$$

■ **Exemple 3.4 — Transformer une fraction en fraction continue.**

$$\frac{55}{17} = 3 + \frac{4}{17} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{17}{4}} = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}} \qquad \frac{649}{200} =$$

$55 = 3 \times 17 + 4$ $\qquad 649 = \ldots \times 200 + \ldots$

$17 = 4 \times 4 + 1$

$4 = 4 \times 1 + 0$

Exercice 3 — À vous. Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction continue.

$$A = \frac{13}{10} \qquad B = \frac{49}{13} \qquad C = \frac{8}{11} \qquad D = 3{,}15 \qquad E = 2{,}812\,5 \qquad F = 0{,}65$$

■ **Exemple 3.5 — Point analyse et bilan.**

a) Dans les exemples précédents, l'algorithme utilisé pour obtenir des écritures en fractions continues s'arrête. Pouvez vous expliquer la raison ?

b) Montrer que $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$. En déduire que $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$

c) En déduire l'écriture en fraction continue de $\sqrt{2}$.

Exemple 3.6

a) $\dfrac{3\pi}{5\pi} =$ | b) $\dfrac{2}{7} =$ | c) $3 \times \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{4}\right) - \dfrac{5}{6} =$

Exercice 4 Cochez les cases correspondants aux ensembles auxquels chaque nombre appartient :

	N	Z	D	Q	R
1/ 2,25	☐	☐	☐	☐	☐
2/ $\dfrac{7}{4}$	☐	☐	☐	☐	☐
3/ $\dfrac{19}{25}$	☐	☐	☐	☐	☐
4/ $-\dfrac{4}{3}$	☐	☐	☐	☐	☐
5/ $\dfrac{6-(-5)+1}{(-8)/2}$	☐	☐	☐	☐	☐
6/ $1+2\sqrt{3}$	☐	☐	☐	☐	☐
7/ $1+2\sqrt{4}$	☐	☐	☐	☐	☐
8/ $3-\sqrt{-4+5\times 8}$	☐	☐	☐	☐	☐
9/ $2{,}3\times 10^{-12}$	☐	☐	☐	☐	☐
10/ $\dfrac{\sqrt{100}}{100}$	☐	☐	☐	☐	☐
11/ $\dfrac{5\sqrt{2}}{12\sqrt{2}}$	☐	☐	☐	☐	☐
12/ $\left(\sqrt{5}\right)^2$	☐	☐	☐	☐	☐

Exercice 5 — Vrai ou Faux ?. Si faux, donner un contre-exemple à l'aide de l'exercice4.

	Vrai	Faux
1/ Un nombre décimal ne peut pas être un nombre entier.	☐	☐
2/ Un nombre décimal est un rationnel.	☐	☐
3/ Un nombre irrationnel peut être un entier.	☐	☐
4/ Un nombre entier relatif est un décimal.	☐	☐
5/ Le produit de deux nombres décimaux est un décimal.	☐	☐
6/ Le quotient de deux nombres décimaux est toujours un décimal.	☐	☐
7/ Le quotient de deux nombres décimaux peut être un décimal.	☐	☐
8/ Le produit de deux nombres rationnels est toujours un rationnel.	☐	☐
9/ Le produit de deux nombres irrationnels est toujours un irrationnel.	☐	☐
10/ Le quotient de deux nombres irrationnels peut être un entier.	☐	☐

solution de l'exercice 2. $A = \dfrac{113}{33}$; $B = \dfrac{48}{11}$; $C = \dfrac{151}{115}$; $D = \dfrac{16}{99}$; ■

solution de l'exercice 3. $A = [1,\ 3,\ 3]$; $B = [3,\ 1,\ 3,\ 3]$; $C = [0,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2]$; $D = [3,\ 6,\ 1,\ 2]$; $E = [2,\ 1,\ 4,\ 3]$; $F = [0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 6]$; ■

solution de l'exercice 4.

	N	Z	D	Q	R
1/ 2,25	☐	☐	☒	☒	☒
2/ $\frac{7}{4}$	☐	☐	☒	☒	☒
3/ $\frac{19}{25}$	☐	☐	☒	☒	☒
4/ $-\frac{4}{3}$	☐	☐	☐	☒	☒
5/ $\frac{6-(-5)+1}{(-8)/2}$	☐	☒	☒	☒	☒
6/ $1+2\sqrt{3}$	☐	☐	☐	☐	☒
7/ $1+2\sqrt{4}$	☒	☒	☒	☒	☒
8/ $3-\sqrt{-4+5\times 8}$	☒	☒	☒	☒	☒
9/ $2{,}3\times 10^{-12}$	☐	☐	☒	☒	☒
10/ $\frac{\sqrt{100}}{100}$	☐	☐	☒	☒	☒
11/ $\frac{5\sqrt{2}}{12\sqrt{2}}$	☐	☐	☐	☒	☒
12/ $\left(\sqrt{5}\right)^2$	☒	☒	☒	☒	☒

■

solution de l'exercice 5.

	Vrai	Faux
1/ Un nombre décimal ne peut pas être un nombre entier.	☒	☐
2/ Un nombre décimal est un rationnel.	☒	☐
3/ Un nombre irrationnel peut être un entier.	☐	☒
4/ Un nombre entier relatif est un décimal.	☒	☐
5/ Le produit de deux nombres décimaux est un décimal.	☒	☐
6/ Le quotient de deux nombres décimaux est toujours un décimal.	☐	☒
7/ Le quotient de deux nombres décimaux peut être un décimal.	☒	☐
8/ Le produit de deux nombres rationnels est toujours un rationnel.	☒	☐
9/ Le produit de deux nombres irrationnels est toujours un irrationnel.	☐	☒
10/ Le quotient de deux nombres irrationnels peut être un entier.	☒	☐

■

3.3 TP Approximation de racines carrées par des rationnels

Prélminaires Exprimer les epxresions suivantes sous forme d'une fraction irréductible. Montrer les étapes de calcul.

$A = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}$ $=$ $=$

$B = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{3}{2}}$ $=$ $=$

$C = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{7}{5}}$ $=$ $=$

Compléter les pointillés par $<$ ou $>$:

$\left|\sqrt{2} - A\right| \dots 10^{-3}$ $\left|\sqrt{2} - B\right| \dots 10^{-3}$ $\left|\sqrt{2} - C\right| \dots 10^{-3}$

Exercice 1 — Rappel.

a) Simplifier $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

b) En déduire que $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$.

Algorithme L'algorithme suivant vise à obtenir des nombres rationnels $\dfrac{a}{b}$ (a et $b \in \mathbb{N}$), de plus en plus proches de $\sqrt{2}$.

Si à l'étape on a l'approximation $\sqrt{2} \approx \dfrac{a}{b}$. À l'étape suivante on calcule $1 + \dfrac{1}{1 + \frac{a}{b}} = \dfrac{a'}{b'}$.

Exercice 2 Mettre sous forme d'une unique fraction simplifiée :

$$1 + \frac{a}{b} =$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{a}{b}} =$$

Si $\sqrt{2} \approx \dfrac{a}{b}$, à l'étape suivante $\sqrt{2} \approx \dfrac{a'}{b'}$ avec $\begin{cases} a' &= a + 2b \\ b' &= a + b \end{cases}$.

Étape 0 Valeurs de départ : $\begin{cases} a_0 &= 1 \\ b_0 &= 1 \end{cases}$ On a $\left|\sqrt{2} - \dfrac{1}{1}\right| \approx 0{,}41 < \dfrac{1}{2b_0^2}$.

Étape 1 $\begin{cases} a_1 &= a_0 + 2b_0 = 1 + 2 = 3 \\ b_1 &= a_0 + b_0 = 1 + 1 = 2 \end{cases}$ On a $\left|\sqrt{2} - \dfrac{3}{2}\right| \approx$

Étape 2 $\begin{cases} a_2 &= a_1 + 2b_1 = \\ b_2 &= a_1 + b_1 = \end{cases}$ On a $\left|\sqrt{2} - \dfrac{\quad}{\quad}\right| \approx$

Étape 3 $\begin{cases} a_3 & = a_2 + 2b_2 = \\ b_3 & = a_2 + b_2 = \end{cases}$ On a $\left|\sqrt{2} - \frac{}{}\right| \approx$

Étape 4 $\begin{cases} a_4 & = a_3 + 2b_3 = \\ b_4 & = a_3 + b_3 = \end{cases}$ On a $\left|\sqrt{2} - \frac{}{}\right| \approx$

L'algorithme en Python

```
def approximation(n) :        # n est le nombre d'étapes à faire
    a , b = 1 , 1             # démarrage : double affectation
    for i in range(n) :       # i prend les valeurs ...
        a = a + 2*b
        b = a + b
    return a, b
```

a) Montrer que l'instruction `approximation(1)` retourne `a=3` et `b=4`.
Quelle est l'erreur de cet algorithme ?

b) Tester la version modifiée sur votre pythonette et vérifier que l'instruction `approximation(5)` retourne `a=99` et `b=70`.

c) Que retourne `approximation(6)` ? `a=` et `b=`

```
def approximation(n) :        # n est le nombre d'étapes à faire
    a , b = 1 , 1             # démarrage : double affectation
    for i in range(n) :
        a , b = a + 2*b  ,  a + b
    return a, b
```

$\frac{99}{70}$ est une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près.
Pour faire mieux, il faut un dénominateur au moins égal à 169 : il s'agit du rationnel $\frac{239}{169}$.

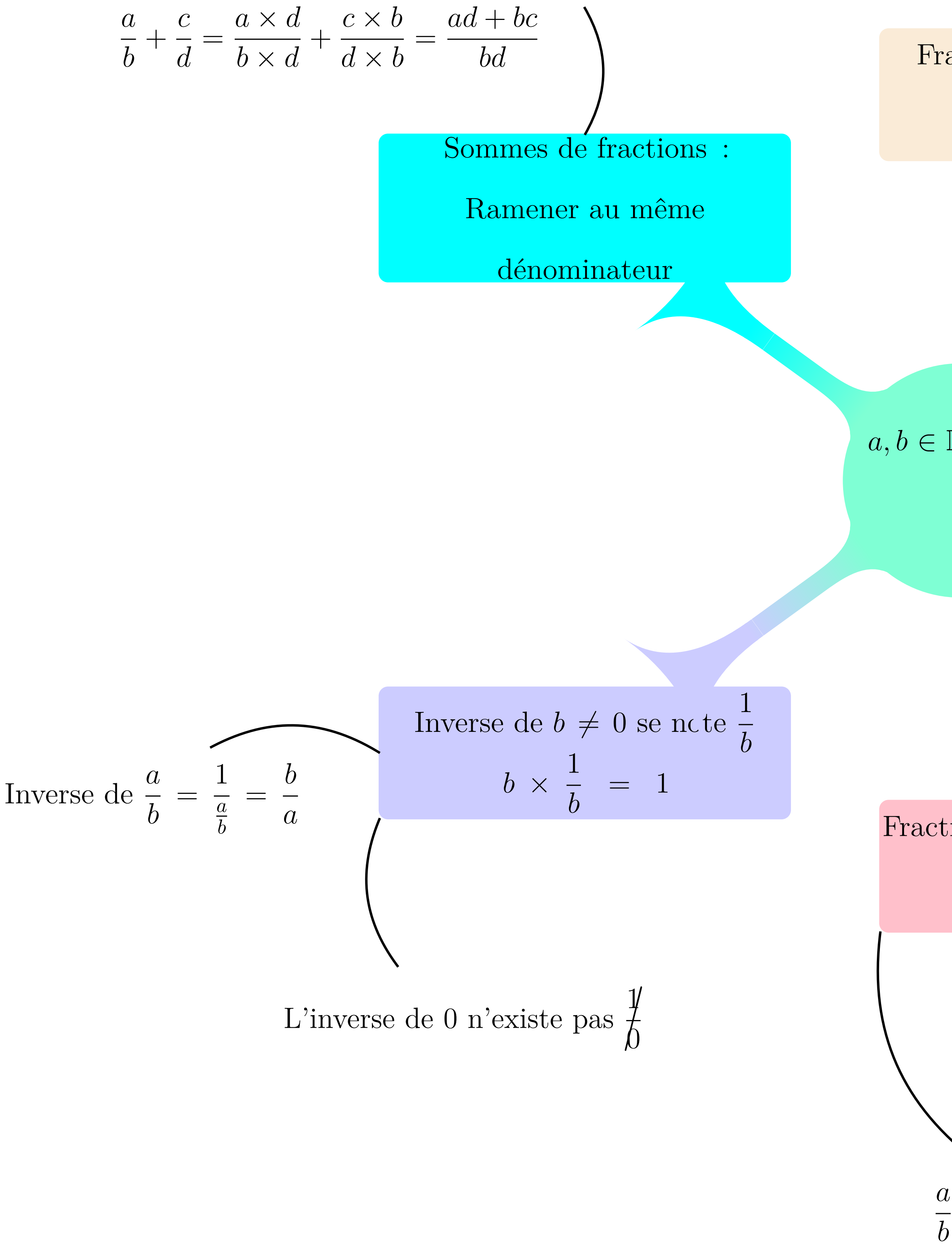

Figure 3.3 – Règles opératoires des écritures fractionnaires

Diviser revient à multiplier par l'inverse :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

ction comme quotient :

$$\frac{a}{b} = a \div b$$

Simplification/Amplification :

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{c} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

ℝ, $b \neq 0$

Multiplication de fractions :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Règles des signes :

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

L'unité :

$$\frac{b}{b} = b \times \frac{1}{b} = 1$$

on comme multiplication :

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Fractions de fractions :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\times\, c = \frac{a \times c}{b} = a \times \frac{c}{b}$$

Figure 3.4 – Partie 2