

# 4

## Chaines de Markov

### 4.1 Matrices stochastiques

**Définition 4.1** Une matrice carrée  $P$  d'ordre  $n$  est dite stochastique si

- (i) chaque élément est positif ou nul :  $\forall i, j, P_{i,j} \geq 0$ .
- (ii) et si la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1.

$$\text{pour tout } 1 \leq i \leq n \quad \sum_{j=1}^n P_{i,j} = 1$$

■ **Exemple 4.1**  $P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  sont des matrices stochastiques.

■ **Exemple 4.2**  $U = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $V = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}$  ne sont pas des matrices stochastiques.

**Théorème 4.1** Le produit de deux matrices stochastiques d'ordre  $n$  est aussi une matrice stochastique.

*Démonstration.* Soit  $A$  et  $B$  matrices stochastiques d'ordre  $n$ . On a  $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \geq 0$ .

Et pour tout  $i$  :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (AB)_{i,j} &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( A_{i,k} \sum_{j=1}^n B_{k,j} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n A_{i,k} = 1 \end{aligned}$$

■

## 4.2 Définitions et propriété de Markov

Soit l'ensemble des états  $\mathcal{S} = \{1; 2; \dots; N\}$ .<sup>1</sup> L'ensemble  $\Omega$  des suites à valeurs dans  $\mathcal{S}$  est muni d'une loi de probabilité qui sera noté dans ce chapitre  $\mathbb{P}$ .<sup>2</sup> Une suite  $X = (X_0; X_1; \dots; X_n; \dots)$  de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathcal{S}$  (pour *state*) est une *chaîne de Markov* si l'évolution de cette suite à partir de l'instant  $n$  dépend de sa valeur  $X_n$  mais pas des précédentes  $X_0, \dots, X_{n-1}$ . On résume ceci par :

« le futur dépend du présent, mais pas du passé, c.à.d. de la manière dont cet état a été atteint ». (processus sans mémoire)

■ **Exemple 4.3** Supposons qu'une pièce tombe sur pile avec probabilité  $p$ , et notons  $q = 1 - p$ . Pour  $i \geq 1$ ,  $X_i$  est la variable égale à 1 si la pièce tombe sur 1 au  $i^{\text{e}}$  lancer et 0 sinon, et  $S_i$  est le nombre de piles obtenus au cours de  $i$  premiers lancers :

$$S_i = X_1 + \dots + X_i \sim \mathcal{B}(i, p)$$

La suite  $(S_i)$  est une chaîne de Markov : pour tout  $k \geq 1$ ,  $\mathbb{P}_{(S_k=r)}(S_{k+1} = j) = \begin{cases} p & \text{si } j = r + 1 \\ q & \text{si } j = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ , et

cela quelles que soient les valeurs de  $S_1, S_2, \dots, S_{k-1}$ .

**Définition 4.2** Soit l'ensemble d'états  $\mathcal{S}$  de  $N$  éléments, et  $P = (p_{i,j})$  une matrice carrée de dimension  $N$  qui vérifie :

$$\forall i \in \mathcal{S} \quad \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{i,j} = 1$$

$X = (X_i)_{i \geq 0}$  est une **chaîne de Markov stationnaire (ou homogène) de matrice de transition  $P$  et d'ensemble d'états  $\mathcal{S}$**  si elle vérifie la **propriété de Markov faible** :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et tout  $i_0, i_1, \dots, i_n, j \in \mathcal{S}$  pour lesquelles  $\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \neq 0$  :

$$\mathbb{P}_{X_0=i_0 \cap \dots \cap X_{n-1}=i_{n-1} \cap X_n=i_n}(X_{n+1} = j) = \mathbb{P}_{X_n=i_n}(X_{n+1} = j) = p_{i_n,j}$$



La matrice de transition  $P$  d'une chaîne de Markov est stochastique :

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} \mathbb{P}_{X_n=i}(X_{n+1} = j) = \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{i,j} = 1$$

ce qui est normal car  $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}_{X_n=i}$  est une loi de probabilité (conditionnelle).

1. pour *state space*

2. La théorie des chaînes de Markov fait intervenir une matrice de transition, dont les coefficients sont des probabilités conditionnelles, et que l'usage dans la quasi-totalité des livres est de noter  $P$

## ■ Exemple 4.4 — Chaîne de Markov à deux états.

<https://setosa.io/ev/markov-chains/>

On souhaite construire un modèle pour simuler la météo. On pose l'espace d'état  $\mathcal{S} = \{\text{☀} ; \text{///}\}$ .

On note que la météo d'un jour a davantage de chance d'être similaire à celle de la veille :

— s'il fait beau un jour, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est 0,7

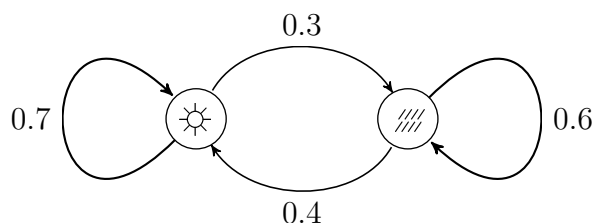
— s'il pleut un jour, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est 0,6

	☀	///	Total
☀	$\mathbb{P}_{X_n=\text{☀}}(X_{n+1}=\text{☀}) = 0,7$	$\mathbb{P}_{X_n=\text{☀}}(X_{n+1}=\text{///}) = 0,3$	1
///	$\mathbb{P}_{X_n=\text{///}}(X_{n+1}=\text{☀}) = 0,4$	$\mathbb{P}_{X_n=\text{///}}(X_{n+1}=\text{///}) = 0,6$	1

matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

La situation peut être présentée par un graphe :



— les sommets du graphe sont les états possibles du système ;

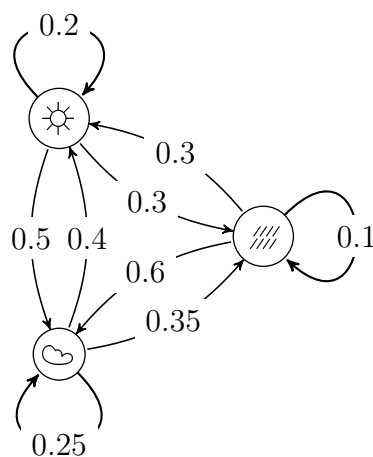
— une arête orientée issue du sommet  $i$  vers d'extrémité  $j$  a pour poids  $\mathbb{P}_{X_n=i}(X_{n+1}=j)$

— La somme des poids des arêtes partant d'un sommet  $i$  quelconque vaut 1.

## ■ Exemple 4.5 — chaîne de Markov à 3 états.

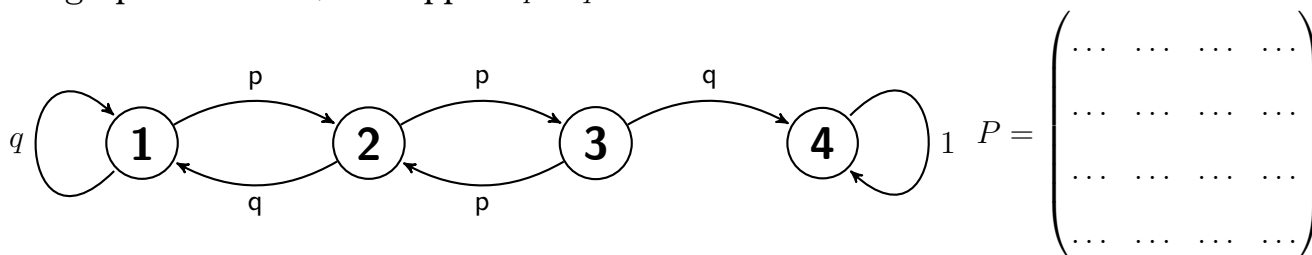
On pose l'espace d'état  $\mathcal{S} = \{\text{☀} ; \text{☁} ; \text{///}\}$ . On suppose que la météo d'un jour est une chaîne de Markov. Les probabilités de transitions peuvent être données directement sur un graphe aléatoire.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{☀} & \text{☁} & \text{///} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{☀} \\ \text{☁} \\ \text{///} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{matrix}$$



## ■ Exemple 4.6 — chaîne de Markov à 4 états.

Une chaîne de Markov d'états  $\mathcal{S} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ . Les probabilités de transitions sont présentées sur le graphe aléatoire, on suppose  $p + q = 1$  :



$$P = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

**Définition 4.3** Soit  $X = (X_i)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathcal{S}$ .

La distribution initiale, notée  $\pi_0$ , est la loi de la variable :

$$\forall i \quad \pi_0(i) = \mathbb{P}(X_0 = i), \quad \pi_0 \sim X_0 \quad \pi_0 = \left( \mathbb{P}(X_0 = 1) \quad \mathbb{P}(X_0 = 2) \quad \dots \quad \mathbb{P}(X_0 = N) \right)$$

La distribution après  $n$  transitions, notée  $\pi_n$ , est la loi de probabilité de  $X_n$  :

$$\forall i \quad \pi_n(i) = \mathbb{P}(X_n = i), \quad \pi_n \sim X_n \quad \pi_n = \left( \mathbb{P}(X_n = 1) \quad \mathbb{P}(X_n = 2) \quad \dots \quad \mathbb{P}(X_n = N) \right)$$

**Notation 4.1**  $\mathbb{P}_i$  désigne la loi conditionnelle sachant  $\mathbb{P}_{(X_0=i)}$  :

$$\forall A \in \Omega \quad \mathbb{P}_i(A) = \mathbb{P}_{X_0=i}(A)$$

**Théorème 4.2** Si la suite  $(X_n)$  est une chaîne de Markov de matrice de transition  $P$  et d'état initial  $\pi_0$ . Alors pour tout  $n \geq 1$  et  $i_0, \dots, i_n \in \mathcal{S}$  :

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = \pi_0(i_0) p_{i_0, i_1} \dots p_{i_{n-1}, i_n}$$

*Démonstration.* par récurrence sur  $n$



**Théorème 4.3** La suite  $(X_n)$  est une chaîne de Markov de matrice de transition  $P$ .

(i) Alors pour tout  $i$  tel que  $\mathbb{P}(X_0 = i) \neq 0$

$$\text{pour tout } n \geq 1 \quad \mathbb{P}_i(X_n = j) = \mathbb{P}_{X_0=i}(X_n = j) = P_{i,j}^{(n)}$$

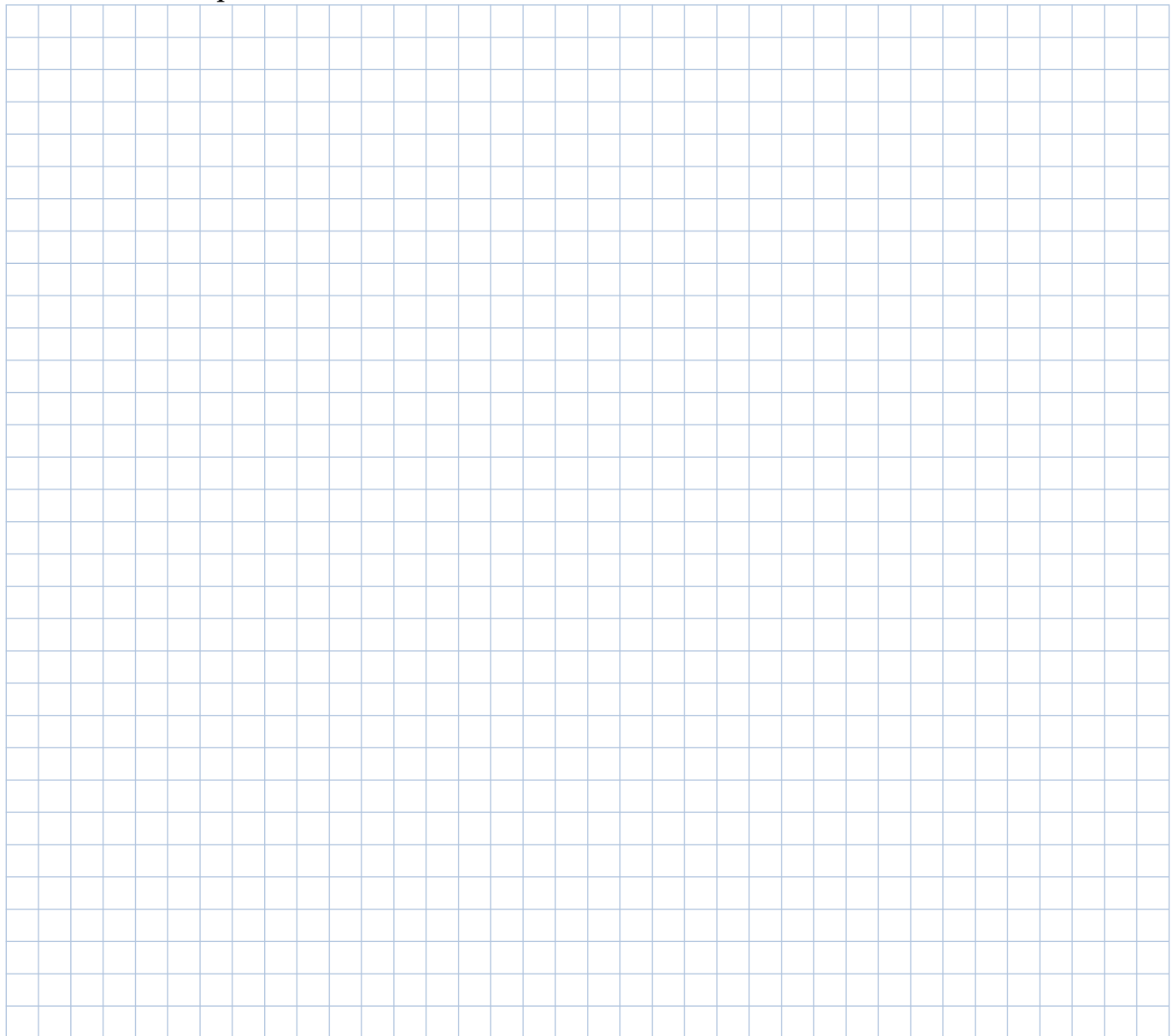
où  $P_{i,j}^{(n)}$  est l'élément  $(i, j)$  de la **puissance  $n^e$**  de  $P$ .

(ii) Plus généralement pour tout  $i$  et  $n$  tel que  $\mathbb{P}(X_m = i) \neq 0$  :

$$\text{pour tout } n \geq 1 \quad \mathbb{P}_{X_m=i}(X_{m+n} = j) = P_{i,j}^{(n)}$$

**R**  $P_{i,j}^{(m)}$  est la probabilité d'atteindre  $j$  en  $m$  étapes sachant que l'on part de  $i$ .

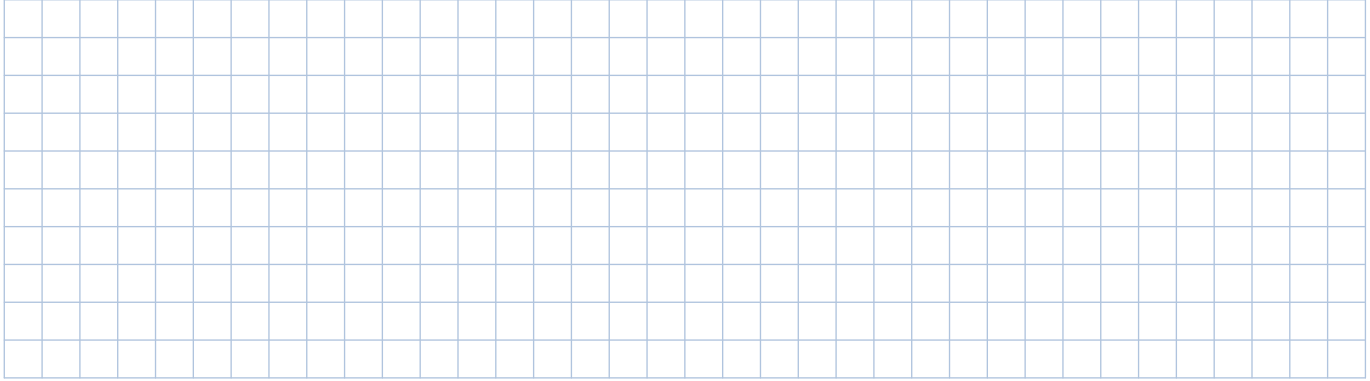
*Démonstration.* par récurrence sur  $n$



**Théorème 4.4** La suite  $(X_n)$  est une chaine de Markov de matrice de transition  $P$  et de distribution initiale  $\pi_0$ . Alors

$$\pi_n = \pi_0 P^{(n)} \quad \text{pour tout } j \in \mathcal{S} \quad \pi_n(j) = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_0(i) P_{(i,j)}^{(n)}$$

*Démonstration.* par récurrence sur  $n$



■

**R** Dans le cas d'une chaine de markov à deux états de matrice de transition  $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ , les puissances  $P^n$  et les distributions à l'instant  $n$  se calculent directement.

### 4.3 Distribution invariante

En général, la distribution initiale  $\pi_0$  d'une chaine de Markov  $X$  est en permanence modifiée par les transitions, de sorte que toutes les lois  $\pi_1, \pi_2, \dots$  sont toutes distinctes.

**Définition 4.4** Soit une chaine de Markov  $X$  de matrice de transition  $P$ , et  $\pi$  une distribution de probabilité sur  $\mathcal{S}$ .  $\pi$  est une **distribution stationnaire** (ou **probabilité invariante**) si :

$$\pi = \pi P \quad \text{pour tout } j \in \mathcal{S} \quad \pi(j) = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi(i) p_{(i,j)}$$

Si l'on choisit  $\pi$  comme distribution initiale de la chaine de Markov, alors

$$\text{pour tout } j \quad \mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{P}(X_0 = j) = \pi(j)$$

**Théorème 4.5 — cas chaine de Markov à deux états.** Soit  $\mathcal{S} = \{A ; B\}$  l'espace d'états. On considère une chaine de markov  $(X_n)$  de matrice de transition  $P$  et de graphe :

$$0 < p, q < 1 \quad P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{p} \\ \text{1-p} \text{ (sur A)} \quad \text{A} \quad \text{B} \quad \text{1-q} \\ \text{q} \end{array}$$

(i)  $(X_n)$  admet une unique probabilité invariante  $\pi = \left( \frac{q}{p+q} \quad \frac{p}{p+q} \right)$

(ii) Quelle que soit la distribution initiale  $\pi_0$ , la suite  $\pi_n$  converge vers  $\pi$ .

## 4.4 Exercices

### 4.4.1 Exercices : Matrices stochastiques

**Exercice 1** Soit la matrice stochastique  $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$  avec  $a$  et  $b \in ]0; 1[$ .

On pose  $\lambda = 1 - a - b$ ,  $N = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{a}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$  et  $R = \begin{pmatrix} \frac{a}{a+b} & \frac{-a}{a+b} \\ \frac{-b}{a+b} & \frac{b}{a+b} \end{pmatrix}$ .

1. Vérifier que  $N^2 = N$  et  $R^2 = R$  et que  $NR = RN = \mathbf{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
2. Vérifier que  $P = M + \lambda R$ .
3. Montrer par récurrence que  $P^n = M + \lambda^n R$ .
4. Vérifier que  $P^n = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^n a + b}{b(1-\lambda^n)} & \frac{a(1-\lambda^n)}{a+\lambda^n b} \\ \frac{a}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix} = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} \lambda^n a + b & a(1-\lambda^n) \\ b(1-\lambda^n) & a + \lambda^n b \end{pmatrix}$
5. En déduire  $Q = \lim_{n \rightarrow +\infty} P^n$ .
6. On pose  $\pi = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$ , avec  $p + q = 1$ . Donner les dimensions de la matrice  $\pi Q$  et montrer qu'elle ne dépend pas de  $p$  ni de  $q$ .

#### Exercice 2

Soit la matrice stochastique  $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$  avec  $a$  et  $b \in ]0; 1[$ . On pose  $\lambda = 1 - a - b$ , et

$P^n = \begin{pmatrix} p_{1,1}^{(n)} & p_{1,2}^{(n)} \\ p_{2,1}^{(n)} & p_{2,2}^{(n)} \end{pmatrix}$  où  $p_{i,j}^{(n)}$  est l'élément  $i, j$  de la matrice  $P^n$  (attention  $p^{(n)} \neq p^n$ ).

1. Démontrer par récurrence que pour tout  $n \geq 1$  :  $P^n$  est une matrice stochastique.
2. À partir de l'égalité  $P^{n+1} = P^n P$ , montrer que pour tout  $n \geq 0$  :  $p_{1,1}^{(n+1)} = p_{1,2}^{(n)} b + p_{1,1}^{(n)} (1-a)$ .
3. En déduire que  $p_{1,1}^{(n)} = 1$  et que pour tout  $n \geq 0$  :  $p_{1,1}^{(n+1)} = \lambda p_{1,1}^{(n)} + b$ .
4. On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_n = p_{1,1}^{(n)} - \frac{b}{a+b}$ .
  - a) Calculer  $u_0$ .
  - b) Montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique.
  - c) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - d) En déduire que  $p_{1,1}^{(n)} = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} \lambda^n$ .
5. Expliquer comment retrouver l'expression de  $p_{2,2}^{(n)}$  par la symétrie des données.
6. Utiliser la question 1. pour déduire les expressions de  $p_{1,2}^{(n)}$  et  $p_{2,1}^{(n)}$ .

**Exercice 3** Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . On souhaite déterminer  $A^n$  pour tout  $n \geq 2$ .

- Montrer que  $X^2 - 5X + 4$  est un polynôme annulateur de  $A$ .
- Pour  $n \geq 2$ , on effectue la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 5X + 4$ . On sait qu'il existe  $Q$  et  $R$  avec  $\deg(R) \leq 1$  tel que :  $X^n = Q(X) \times (X^2 - 5X + 4) + R(X)$   $\deg R \leq 1$   

$$X^n = Q(X)(X^2 - 5X + 4) + aX + b$$
  - Déterminer les racines de  $X^2 - 5x + 4$
  - Montrer que  $a$  et  $b$  vérifient  $\begin{cases} 1 = a + b \\ 4^n = 4a + b \end{cases}$  et donner  $a$  et  $b$ .
- Montrer que  $A^n = \frac{4^n - 1}{3}A + \frac{4 - 4^n}{3}\mathbf{I}_2$

**Exercice 4** Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 11 & 20 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$ .

- Déterminer  $s$  et  $p$  tels que  $A^2 - sA + p\mathbf{I}_2 = \mathbf{O}_2$ .
- Donner les racines du polynôme  $X^2 - sX + p$ .
- Déterminer le reste de la division de  $X^n$  par  $X^2 - sX + p$ .
- En déduire que pour tout  $n \geq 2$ ,  $A^n = 3^n \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

**Exercice 5** Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -12 & -2 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que  $X^2 + 4X + 16$  est un polynôme annulateur de  $A$ .
- Déterminer les formes exponentielles des racines complexes du polynôme  $X^2 + 4X + 16$ .
- On effectue la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 + 4X + 16$ . Montrer que le reste de la division est  $R(X) = 4^{n-1} \frac{\sin(\frac{2\pi n}{3})}{\sin(\frac{2\pi}{3})}X - 4^{n-1} \frac{\sin(\frac{2\pi(n-1)}{3})}{\sin(\frac{2\pi}{3})}$ .
- En déduire que  $A^n$

Les polynômes annulateurs peuvent permettre de déterminer les puissances de certaines matrices. Si le polynôme annulateur admet des racines **distinctes**  $r_1, r_2, \dots$  (réelles ou complexes), les éléments de la matrice puissances  $n^e$  seront de la forme  $ar_1^n + br_2^n + \dots$

#### Exercice 6

Soit la matrice stochastique  $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$  avec  $a$  et  $b \in ]0; 1[$ . On pose  $\lambda = 1 - a - b$ .

- Montrer que  $P^2 - (1 + \lambda)P + \lambda\mathbf{I}_2 = 0$
- Montrer que  $\lambda$  et 1 sont des racines de  $X^2 - (1 + \lambda)X + \lambda$ .



## 4.4.2 Exercices : chaines de Markov, prise en main

## Exercice 7

Un employé arrive en retard à son travail suivant les probabilités suivantes :

- s'il est en retard un jour alors il a 15 % de chance d'être en retard le lendemain,
- s'il est à l'heure un jour alors il a 20 % de chance d'être en retard le lendemain.

On note  $\mathcal{S} = \{H ; R\}$  l'espace des états où  $H$  = « à l'heure », et  $R$  = « en retard ». On modélise la situation par une chaîne de Markov  $(X_i)$ . On note  $X_i$  l'état de l'employé au jour  $i$ . Le premier jour, l'employé est à l'heure.

1. Compléter :

$$\mathbb{P}(X_0 = H) = \dots \quad \mathbb{P}(X_0 = R) = \dots$$

$$\text{La loi de la variable } X_0 \text{ est } \pi_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_0 = H) & \mathbb{P}(X_0 = R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}_{X_0=H}(X_1 = H) = \dots \quad \mathbb{P}_{X_0=H, X_1=R}(X_2 = H) = \dots$$

$$\mathbb{P}(X_1 = H) = \mathbb{P}((X_0 = H) \cap (X_1 = H)) + \mathbb{P}((X_0 = R) \cap (X_1 = H))$$

$$= \mathbb{P}(X_0 = H)\mathbb{P}_{(X_0=H)}(X_1 = H) + \dots$$

$$= \dots$$

$$\mathbb{P}(X_1 = R) = \mathbb{P}((X_0 = H) \cap (X_1 = R)) + \mathbb{P}((X_0 = R) \cap (X_1 = R))$$

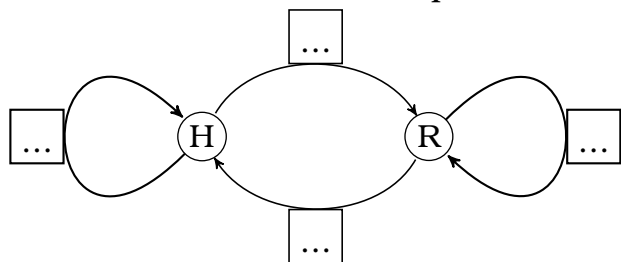
$$= \mathbb{P}(X_0 = H)\mathbb{P}_{(X_0=H)}(X_1 = R) + \dots$$

$$= \dots$$

$$\text{La loi de la variable } X_1 \text{ est } \pi_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_1 = H) & \mathbb{P}(X_1 = R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix}$$

2. Similairement, déterminer la loi de  $X_2$  et préciser  $\pi_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_2 = H) & \mathbb{P}(X_2 = R) \end{pmatrix}$

3. Entrer les poids des arêtes du graphe probabiliste associé à ce modèle, et préciser la matrice de transition du problème.



$$\text{La matrice de transition : } P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{H} & \mathbf{R} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{R} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

4. Calculer les produits de matrices suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.75 & 0.15 \\ 0.80 & 0.20 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.75 & 0.15 \\ 0.80 & 0.20 \end{pmatrix}^2 \quad \begin{pmatrix} 0.75 & 0.15 \end{pmatrix} Q \quad P^2 \quad \pi_0 P^2$$

5. Interpréter dans le contexte de l'exercice  $\pi_0 P^3$

Exercice 8 — Étude du marché du travail de la population (15-65 ans) d'un pays fictif..

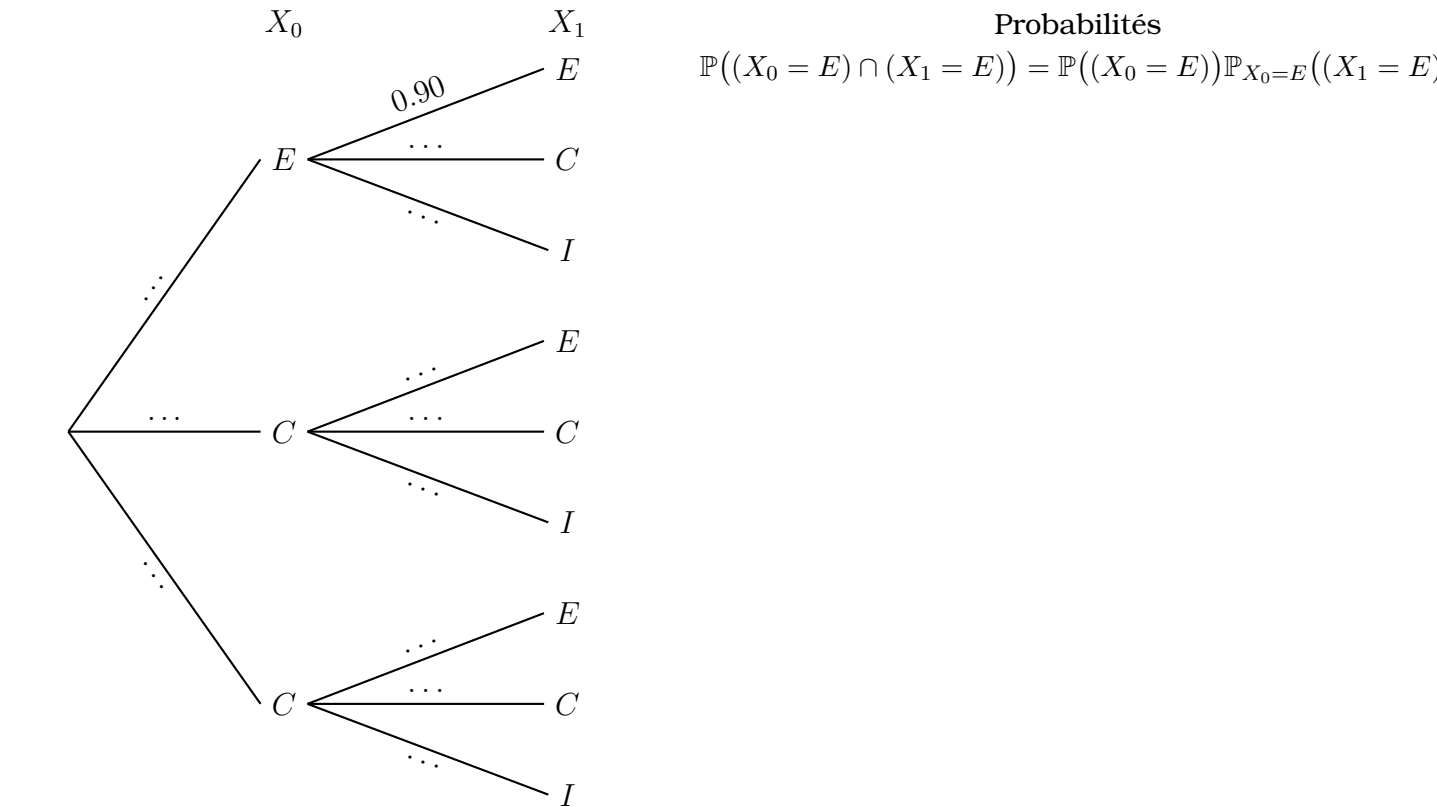
En 2023, 69% de la population occupe un emploi, 6% de la population est au chômage. Les transitions entre l'emploi, le chômage et l'inactivité sur le marché du travail de ce pays d'une année à la suivante observées précédemment sont données dans le tableau suivant :

		Année $n + 1$		
		Emploi	Chômage	Inactif
Année $n$	Emploi	90%	3%	7%
	Chômage	30%	43%	27%
	Inactif	14%	7%	79%

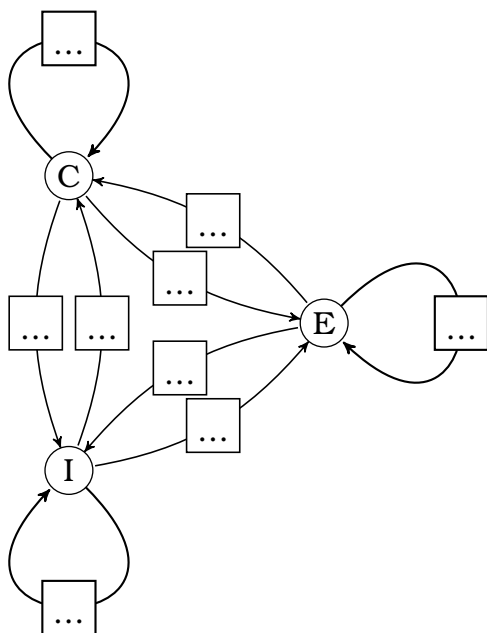
Interprétation : 90% des personnes qui ont un emploi une année  $n$  occupent un emploi l'année suivante.

On choisit au hasard une personne de la population (15-65 ans). L'espace des états est  $\mathcal{S} = \{E ; C ; I\}$ , et on note  $X_n$  la situation de cette personne l'année 2023 +  $n$ .

1. Donner  $\mathbb{P}(X_0 = E)$ ,  $\mathbb{P}(X_0 = C)$  et  $\mathbb{P}(X_0 = I)$ , et déterminer  $\pi_0 = (\mathbb{P}(X_0=E) \ \mathbb{P}(X_0=C) \ \mathbb{P}(X_0=I))$ .
2. Compléter l'arbre pondéré qui traduit l'évolution de la situation entre l'année 0 et 1.



matrice  $P$  de transition du problème.



$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{E} & \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{I} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

7. Pour tout  $n$ , la loi de  $X_n$  est représentée par la matrice ligne

$$\pi_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = E) & \mathbb{P}(X_n = C) & \mathbb{P}(X_n = I) \end{pmatrix}$$

- Vérifier que  $\pi_{n+1} = \pi_n P$ .
  - En déduire la forme explicite de l'état probabiliste à l'année  $n$ .
  - Quel est l'état probabiliste de la population à l'année 4?
8. Si les transitions sur le marché du travail restent inchangées dans les années à venir, quel pourcentage de la population serait au chômage?
- En déduire le taux de chômage sur le long terme. (*Le taux de chômage est la proportion de la population au chômage parmi la population active, i.e. emploi + chômage*)
9. On appelle une probabilité invariante, la loi de probabilité  $\pi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ , solution de  $\pi = \pi P$ .
- Écrire le système de 4 équations vérifié par  $x, y$  et  $z$ .
  - Résoudre par Pivot de Gauss et montrer que  $\pi = \begin{pmatrix} 0.63 & 0.07 & 0.30 \end{pmatrix}$

Le théorème de Perron-Frobenius (1910) appliqué aux chaînes de Markov, permet d'affirmer, sous certaines conditions, il existe une unique loi de probabilité invariante  $\pi$ , et que la loi de  $X_n$  se rapproche de  $\pi$ .

L'état initial  $\pi_0 \sim X_0$  n'a pas d'influence sur le comportement asymptotique de la loi de  $X_n$ .

**Exercice 9**

Une chaîne de magasins de prêt à porter a adopté en fonction du succès ou de l'échec d'un type de vêtement mis en vente, la stratégie commerciale suivante :

- En cas de succès du modèle vendu on conserve le même modèle le mois suivant. Il a alors une probabilité 0,5 de se retrouver en situation d'échec.
  - En cas d'échec on change de modèle le mois suivant en adoptant une politique commerciale plus agressive (prix plus ajusté, publicité etc). Il a alors une probabilité 0,6 d'avoir du succès.
1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste à deux états.
  2. On suppose qu'en cas de succès d'un modèle, l'entreprise gagne 12€ par article et qu'en cas d'échec, elle perd 1,20€ par article.
    - a) En cas de succès d'un modèle, quel est le gain moyen sur ce modèle un mois plus tard ?
    - b) Quel est le montant du gain moyen que cette entreprise peut espérer réaliser sur le long terme ?

**Exercice 10**

1. Représenter le graphe probabiliste à trois états  $\{A, B, C\}$  dont la matrice de transition associée est  $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ , les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.
2. On note  $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$  la matrice ligne décrivant l'état probabiliste à l'étape  $n$ .  
On suppose que  $P_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ . Calculer  $P_1$  et  $P_3$
3. Déterminer l'état probabiliste stable du système.

**Exercice 11**

Un opérateur de téléphonie mobile propose à ses abonnés deux forfaits :

- une formule A qui donne droit à deux heures de communication mensuelle ;
- une formule B qui donne droit à un nombre illimité de communications mensuelles.

On admet que d'une année sur l'autre, le nombre de clients de cet opérateur est stable et que :

- 20% des clients ayant choisi la formule B changent de formule ;
- 30% des clients ayant choisi la formule A changent de formule.

En 2016, 80% des clients de cet opérateur étaient abonnés à la formule A.

1. Représenter les données précédentes par un graphe probabiliste de sommets A et B et donner sa matrice de transition.
2. Pour un entier naturel  $n$  donné, on note  $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$  avec  $a_n + b_n = 1$ , la matrice ligne décrivant l'état probabiliste lors de l'année  $2016 + n$ . L'état probabiliste initial est donc  $P_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$ .
  - a) Calculer la probabilité qu'un client soit abonné à la formule A en 2017.
  - b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,2$ .
3. On pose pour tout entier  $n$ ,  $u_n = a_n - 0,4$ .
  - a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison 0,5.
  - b) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et en déduire que, pour tout entier naturel  $n$  :  $a_n = 0,4 \times (1 + 0,5^n)$
  - c) Déduire de ce qui précède, la limite de la suite  $(a_n)$ . Donner une interprétation concrète de ce résultat.
  - d) À partir de quelle année, la probabilité qu'un client soit abonné à la formule A sera-t-elle inférieure à 0,401 ?

#### Exercice 12

Un industriel produit une boisson conditionnée sous deux emballages distincts A et B.

Une étude effectuée auprès des consommateurs a permis d'établir que d'un mois sur l'autre, 84% des consommateurs restent fidèles au conditionnement A contre 76% pour le conditionnement B.

Au moment de l'étude, les consommations des deux conditionnements sont égales.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $a_n$  la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A le  $n$ -ième mois après l'étude et  $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$  la matrice ligne décrivant l'état probabiliste le  $n$ -ième mois après l'étude. Ainsi,  $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ .

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. a) Écrire la matrice de transition  $M$  de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.  
 b) Montrer que la matrice ligne  $P_2$  est égale à  $\begin{pmatrix} 0,564 & 0,436 \end{pmatrix}$ .
3. Soit  $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$  la matrice correspondant à l'état stable, c'est à dire telle que  $P = P \times M$ . Déterminer les réels  $a$  et  $b$ . Interpréter ce résultat.

4. À l'aide de la relation  $P_{n+1} = P_n \times M$ , démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$ .
5. On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_n = a_n - 0,6$ .
  - a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $0,6$ .
  - b) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et en déduire que  $a_n = -0,1 \times 0,6^n + 0,6$ .
  - c) À partir de combien de mois après l'étude, la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A est-elle supérieure à  $0,595$  ?

### Exercice 13

Un industriel décide de mettre sur le marché un nouveau produit. Afin de promouvoir celui-ci, il souhaite lancer une campagne hebdomadaire de publicité.

Avant le lancement de cette campagne, on contrôle l'impact de cette campagne auprès d'un panel de consommateurs. On trouve ceux qui ont une opinion favorable ( $F$ ), ceux qui sont neutres ( $N$ ) et ceux qui ont une opinion négative ( $R$ ). On a constaté que d'une semaine sur l'autre :

- 28% des consommateurs ayant un avis favorable adoptent une position neutre et 10% une opinion négative ;
- Parmi les consommateurs ayant une opinion neutre, 32% émettent un avis favorable et 10% un avis négatif ;
- 70% des consommateurs ayant un avis négatif ne changent pas d'opinion et 16% adoptent un avis favorable.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets  $F$ ,  $N$  et  $R$ .

2. On note  $M$  la matrice de transition associée à ce graphe. Compléter  $M = \begin{pmatrix} \dots & 0,28 & 0,1 \\ 0,32 & \dots & 0,1 \\ \dots & \dots & 0,7 \end{pmatrix}$ .

3. L'industriel décide de lancer la campagne publicitaire.

L'état probabiliste de la semaine  $n$  est défini par la matrice ligne  $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ , où  $a_n$  désigne la probabilité qu'un consommateur touché par la campagne soit favorable au produit la semaine  $n$ ,  $b_n$  la probabilité que ce consommateur soit neutre la semaine  $n$  et  $c_n$  la probabilité que ce consommateur ait une opinion négative de ce produit la semaine  $n$ .

La semaine du début de la campagne est notée semaine 0. On a  $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que l'état probabiliste une semaine après le début de la campagne est  $P_1 = \begin{pmatrix} 0,32 & 0,58 & 0,1 \end{pmatrix}$ .
- Déterminer l'état probabiliste  $P_3$ . Interpréter ce résultat.
- Déterminer l'état probabiliste stable du système.
- En ne prenant en compte que les opinions favorables, combien de semaines devrait durer la campagne publicitaire ?

#### Exercice 14

Après avoir effectué quelques parties au jeu « 2048 » Léa a constaté que :

- quand elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est égale à 0,64.
- quand elle a perdue, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est égale à 0,14.

On note  $G$  l'état : « Léa a gagné la partie » et  $P$  l'état : « Léa a perdu la partie ».

Pour un jour donné, on note également pour tout entier naturel  $n$  :

- $g_n$  la probabilité que Léa gagne la  $n$ -ième partie ;
- $p_n$  la probabilité que Léa perde la  $n$ -ième partie ;
- $E_n = \begin{pmatrix} g_n & p_n \end{pmatrix}$  la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du  $n$ -ième partie.

On suppose que la veille du jour considéré, Léa avait gagné sa dernière partie, on a donc  $g_0 = 1$  et  $E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Traduire les données par un graphe probabiliste.
  - Préciser la matrice de transition  $M$  associée à ce graphe.
  - Calculer la probabilité que Léa gagne sa troisième partie.
  - Déterminer l'état stable du graphe probabiliste.
- Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $g_{n+1} = 0,5g_n + 0,14$ .
- On considère la suite  $(u_n)$  définie, pour tout entier  $n$ , par  $u_n = g_n - 0,28$ .
  - Montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
  - En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $g_n = 0,72 \times 0,5^n + 0,28$ .
- À partir de combien de parties dans la journée la probabilité que Léa gagne sa partie sera-t-elle strictement inférieure à 0,3 ?

#### Exercice 15

Un industriel décide de modifier l'emballage d'un de ses produits. On note  $A$  le conditionnement actuel du produit et  $B$  le nouveau conditionnement.

À partir des études réalisées au préalable, la direction commerciale estime que 28 % des

consommateurs choisissant le conditionnement  $A$  et 12 % des consommateurs choisissant le conditionnement  $B$  changent d'avis d'un mois sur l'autre.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $a_n$  et  $b_n$  les probabilités qu'un consommateur choisisse respectivement le conditionnement  $A$  et le conditionnement  $B$  le  $n$ -ième mois après la mise sur le marché du conditionnement  $B$  et  $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$  la matrice ligne décrivant l'état probabiliste le  $n$ -ième mois après la mise sur le marché du nouveau conditionnement. Ainsi,  $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**partie a**

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets  $A$  et  $B$ .
2. a) Donner la matrice de transition  $M$  de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.  
b) Calculer la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement  $B$  deux mois après sa mise sur le marché.
3. On note  $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$  l'état stable associé à ce graphe.  
Déterminer les réels  $a$  et  $b$ . Interpréter ce résultat.

**partie b** L'industriel décide de ne plus proposer le conditionnement  $A$  à partir du mois où il prévoit que moins de 32 % des consommateurs choisiront ce conditionnement.

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :  $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,12$ .
2. Compléter l'algorithme suivant pour calculer le nombre de mois au bout duquel le conditionnement  $A$  sera retiré du marché.

```

1  A = 1
2  N = 0
3  while ...
4      A = ...
5      N = ...

```

3. Pour tout nombre entier naturel  $n$ , on définit la suite  $(u_n)$  par  $u_n = a_n - 0,3$ .  
a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.  
b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel  $n$ , on a :  $a_n = 0,7 \times 0,6^n + 0,3$ .
4. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation  $0,7 \times 0,6^n + 0,3 \leq 0,32$ .  
En déduire au bout de combien de mois, le conditionnement  $A$  sera retiré du marché.