A.2 Fonctions affines

Définition A.2 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est **affine** s'il existe m et $p \in \mathbb{R}$ tel que

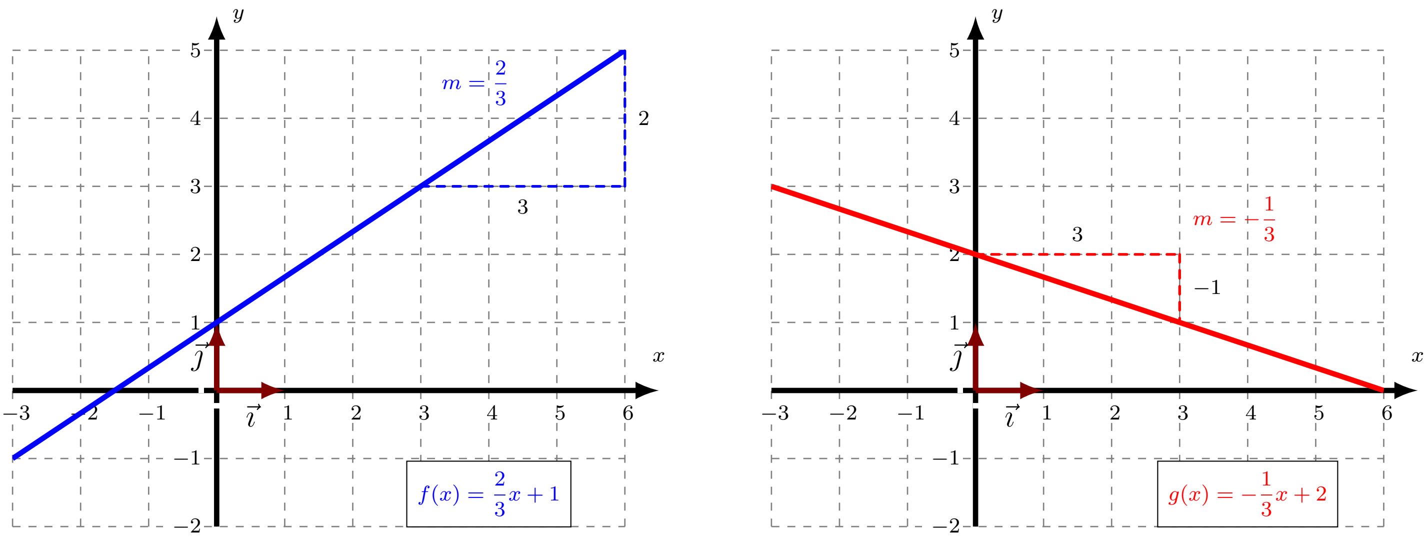
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = mx + p$$

Proposition A.1 Pour toute fonction affine les écarts sur la variable image y sont proportionnels aux écarts sur la variable initiale x. Plus précisément il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{Pour tout } x_A \text{ et } x_B \in \mathbb{R} \qquad f(x_A) - f(x_B) = m(x_A - x_B)$$

Le réel m est appelé **taux d'accroissement** de f. et on a pour $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$:

$$m = \frac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \qquad x_A \neq x_B$$



x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f(x) = \frac{2}{3}x + 1$	↗	0	↗
signe de f	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$g(x) = -\frac{1}{3}x + 2$	↘	0	↘
signe de g	$+$	0	$-$

Figure A.1 – Graphiquement, m est le rapport de l'augmentation verticale sur l'augmentation horizontale. $p = f(0)$ est l'ordonnée à l'origine

Déterminer l'expression réduite d'une fonction affine f tel que $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$:

- On calcule m à l'aide du taux de variation entre x_A et x_B.
- On remarque que si $y = f(x)$ alors $y = f(x) = m(x - x_A) + y_A$
- On en déduit la forme réduite.

■ **Exemple A.3** Soit f fonction affine tel que $f(12) = 17$ et $f(16) = 25$.

Le taux de variation de 12 à 16 : $m = \dfrac{f(12) - f(16)}{12 - 16} = \dfrac{17 - 25}{12 - 16} = \dfrac{-8}{-4} = 2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - f(12) = m(x - 12)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x - 12) + f(12) \\ &= 2x - 24 + 17 \\ f(x) &= 2x - 7 \end{aligned}$$

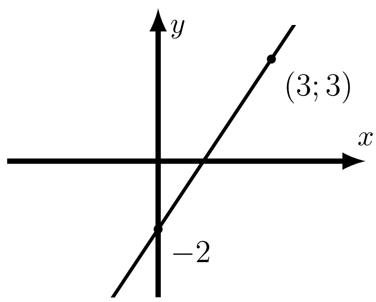
A.2.1 Exercices : Fonction affines et applications

Exercice 1 — auto-positionnement, réactivation de la 2nde. Les questions sont indépendantes.

1. Le taux de variation d'une fonction entre les valeurs $x = a$ et $x = b$ est le rapport
2. Soit la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 2$.
   a) Déterminer l'image de 2.
   b) Donner l'équation vérifiée par l'antécédent de 0 et déterminer le.
   c) Compléter le tableau de variation et de signe de f :

x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
variation de $f(x)$	
signe de $f(x)$	

   d) Déterminer le taux de variation entre $x = 2$ et $x = 5$ de la fonction f.
   e) La représentation graphique de f est la droite d'ordonnée à l'origine ☐ et de pente ☐
3. Déterminer l'expression réduite de la fonction affine f tel que $f(-3) = 2$ et $f(4) = -1$.
4. Entourer les fonctions affines décroissantes mais non linéaires :
   (A) $f(x) = -5x$ (B) $g(x) = 3x - 5$ (C) $h(x) = \dfrac{-2}{3}x + 1$ (D) $u(x) = -3$ (E) $v(x) = -1 + x$
5. Donner l'expression de la fonction affine représentée ci-dessous :



6. Montrer que le taux de variation de la fonction affine définie par $f(x) = 3x + 5$ entre deux valeurs a et b est toujours égal à 3.

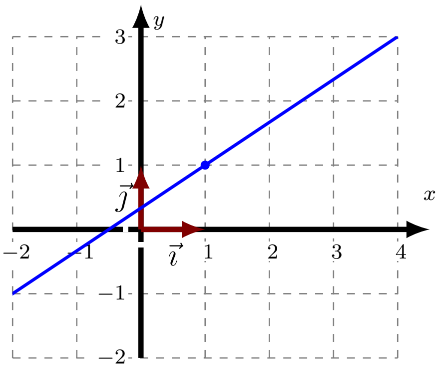
7. Déterminer par lecture graphique l'expression de la fonction affine représentée ci-contre :

   $m = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

   $f(x) = \dots\dots(x - \dots\dots) + \dots\dots$

   $f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

   $f(x) = \dots\dots x + \dots\dots$



8. Proposer une fonction affine dont le tableau de signe est

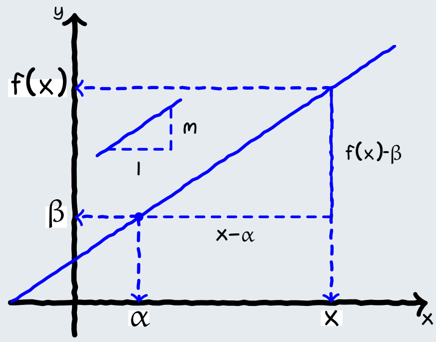
x	$-\infty$		5		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

9. Déterminer les erreurs dans le tableau de signes ci-dessous :

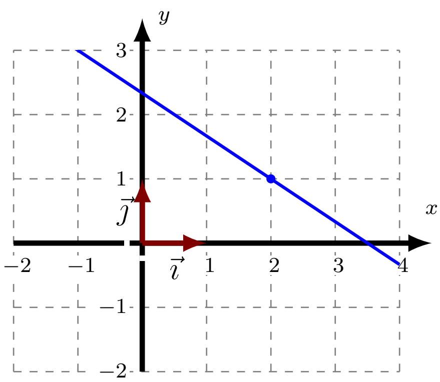
x	$-\infty$		$\frac{10}{7}$		10		$+\infty$
$-7x - 10$		$+$	0	$-$		$-$	
$x - 10$		$+$		$+$	0	$-$	
$k(x) = (-7x-10)(x-10)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Pour une fonction f affine de taux d'accroissement m et tel que $\beta = f(\alpha)$.
Alors pour tout x :

$$f(x) = m(x - \alpha) + \beta$$



Exercice 2 Déterminer par lecture graphique l'expression réduite des fonctions affines :

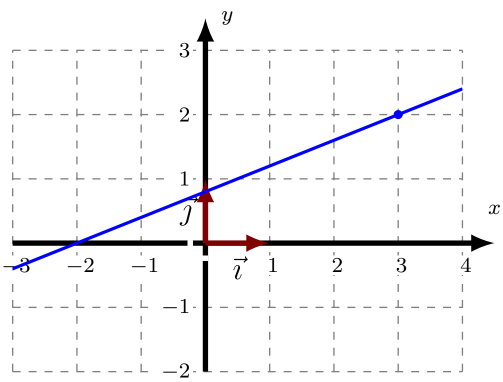


$m = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$f(x) = \dots\dots(x - \dots\dots) + \dots\dots$

$f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$f(x) = \dots\dots x + \dots\dots$

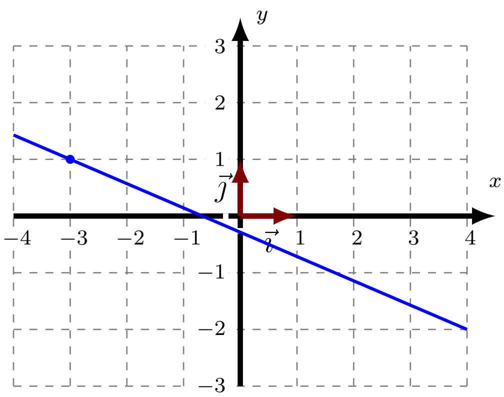


$m = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$f(x) = \dots\dots(x - \dots\dots) + \dots\dots$

$f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$f(x) = \dots\dots x + \dots\dots$



$m = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$f(x) = \dots\dots(x - \dots\dots) + \dots\dots$

$f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$f(x) = \dots\dots x + \dots\dots$

Exercice 3 — vu en 2nde. Déterminer l'expression réduite de la fonction affine f dans chaque cas.

1. le taux d'accroissement vaut $\frac{2}{3}$ et $f(15) = 3$
2. $f(-1) = 4$ et $f(2) = 3$.
3. sa courbe représentative passe par $A(3; -2)$ et $B(-1; 3)$.
4. f est linéaire et $f(-8) = 12$.

Exercice 4 — vu en 2nde. Complétez les tableaux de variation et de signe des fonctions affines.

1. $f_1(x) = 3x + 2$

x	
variation de $f_1(x)$	
signe de $f_1(x)$	

2. $f_2(x) = -9x + 5$

x	
variation de $f_2(x)$	
signe de $f_2(x)$	

Exercice 5 — vu en 2nde. Détérminez le signe des fonctions suivantes selon les valeurs de x.

1. $f_1(x) = 7(x + 2)(x - 3)$

x	$-\infty$			$+\infty$

2. $f_2(x) = 5(-3x + 1)(2x + 3)$

x	$-\infty$			$+\infty$

Exercice 6 — vu en 2nde. Utiliser les tableaux de signe pour résoudre les inéquations suivantes :

(I_1) $-3(5x - 4)(-3x - 8) > 0$

x	$-\infty$			$+\infty$

(I_2) $-2(4x + 3)(3x + 5) \leqslant 0$

x	$-\infty$			$+\infty$

Exercice 7

1. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) passant par $A(4; 1)$ et $B(6; 2)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (CD) passant par $C(-1; -2)$ et $D(3; 10)$.
3. Les droites (AB) et (CD) se coupent en M. Écrire le système vérifié par les coordonnées de M et déterminer M.