Chapitre 6
Repères et vecteurs

Vers la géométrie repérée

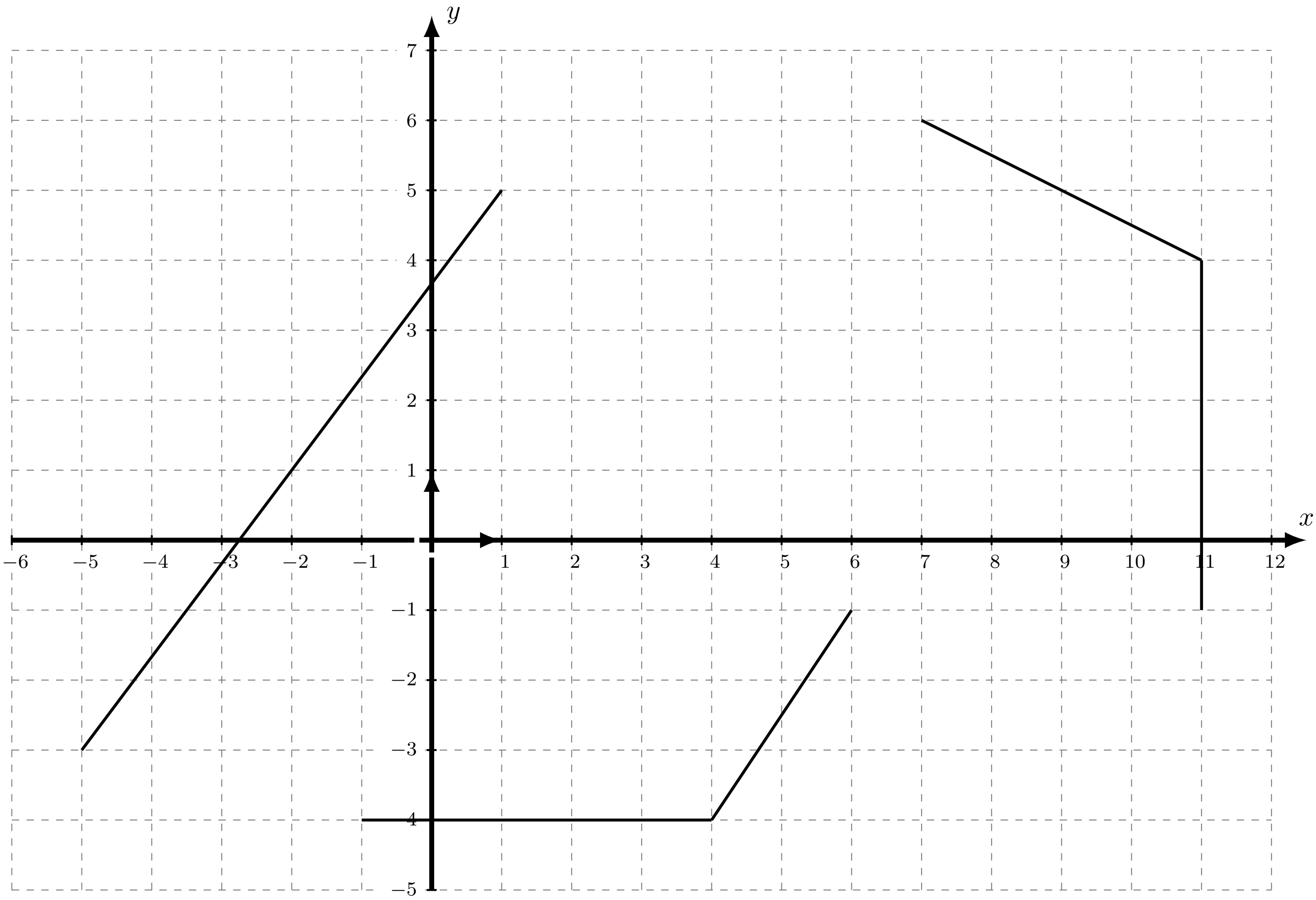


Figure 6.1 – Quel chemin est le plus long ? (d'abord sans quadrillage, puis avec quadrillage et conclure en rajoutant le repère.)

6.1 Repères et repères orthonormés

O, I et J trois points non alignés. Un repère $(O; I, J)$ (ou $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$), du plan est formé de :

① origine O du repère

② (OI) est l'axe gradué des abscisse (des x)

③ (OJ) est l'axe gradué des ordonnées (OJ)

Chaque point M du plan correspond à un unique couple de coordonnées $\big(x(M); y(M)\big) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ces coordonnées se lisent sur les deux axes en tracant leurs parallèles passant par M.

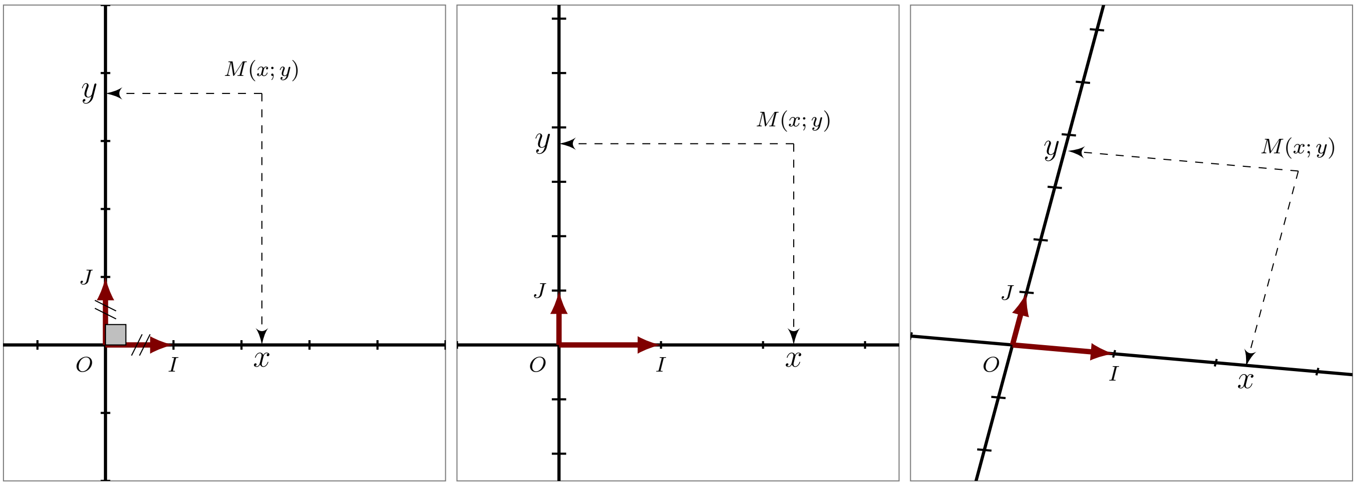


Figure 6.2 – Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, le triangle OIJ est rectangle isocèle (gauche). Le repère $(O; I, J)$ est orthogonal si OIJ est rectangle mais pas isocèle (milieu). Les repères peuvent être obliques (droite).

Par la suite, on travaille avec des **repères orthonormés** :

ortho-gonal les axes sont perpendiculaires

normé la longueur des segments unitaires sur les deux axes est la mêmes

6.2 Distance dans les repères orthonormés

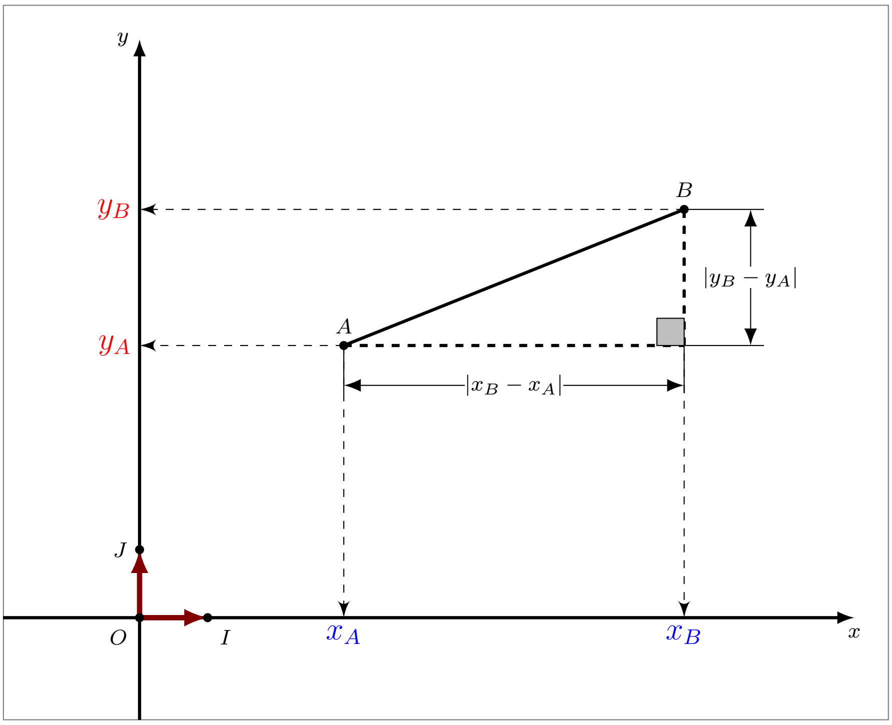


Figure 6.3 – Le plan est muni d'un repère **orthonormé** (O, I, J).
ABC est rectangle en C.

Démonstration. Le repère est orthonormé, le triangle ABC rectangle en C. D'après théorème de Pythagore :

$$AC = |x_B - x_A| \qquad BC = |y_B - y_A|$$

$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

$$AB^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \qquad |a|^2 = a^2$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

■

Théorème 6.1 Dans un repère orthonormé. La distance entre les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est donnée par les formules :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

■ **Exemple 6.2** Dans un repère orthonormé, $A(1;5)$ et $B(-2;7)$:

	Vrai	Faux
1/ $AB^2 = (1+2)^2 - (5-7)^2 =$	☐	☒
2/ $AB^2 = (1-2)^2 + (5-7)^2 =$	☐	☒
3/ $AB^2 = (1-5)^2 + (-2-7)^2 =$	☐	☒
4/ $AB^2 = (1+2)^2 + (5-7)^2 =$	☒	☐
5/ $AB^2 = (1-(-2))^2 + (5-7)^2 =$	☒	☐
6/ $AB^2 = (-2-1)^2 + (7-5)^2 =$	☒	☐

$$AB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

■ **Exemple 6.3** Soit M un point du cercle $\mathscr{C}(O;7)$ est le cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 7.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in \mathscr{C}(O;7) &\iff OM = 7 \\ &\iff OM^2 = 49 \\ &\iff \big(x-0\big)^2 + \big(y-0\big)^2 = 49 \\ &\iff x^2 + y^2 = 49 \end{aligned}$$

L'équation $x^2 + y^2 = 49$ sur les coordonnées $(x;y)$ caractérise les points du cercle.

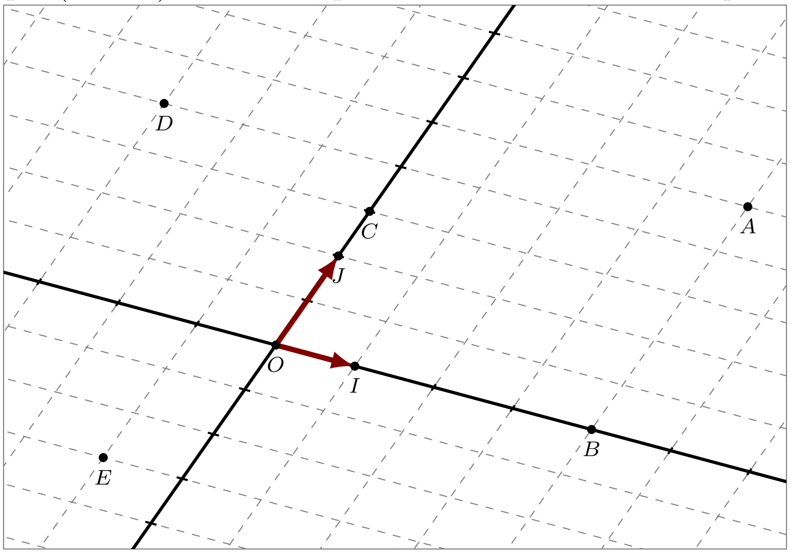
On dira que le cercle $\mathscr{C}$ a pour équation $x^2+y^2 = 49$. En abrégé :

$$\mathscr{C}(O;7)\colon x^2 + y^2 = 49$$

6.2.1 Exercices

Exercice 1 Dans le repère oblique $(O; I, J)$ ci-dessous, préciser les coordonnées des points suivants :

$O(\quad;\quad)$
$I(\quad;\quad)$
$J(\quad;\quad)$
$A(\quad;\quad)$
$B(\quad;\quad)$
$C(\quad;\quad)$
$D(\quad;\quad)$
$E(\quad;\quad)$



Dans les exercices suivants, le repère $(O; I, J)$ est orthonormé.

Exercice 2 Soit les points $A(3; 4)$, $B(3; -2)$ et $C(-5; -2)$.

a) Préciser un segment horizontal, un segment vertical et donner leurs longueurs.
b) Calculer la longueur du segment restant.
c) Calculer les angles du triangle au dixième de degré près.

Exercice 3 Soit les points $A(1; 8)$, $B(4; 1)$ et $C(7; 1)$ dans un repère orthonormé $(O; I, J)$.
Calculer le périmètre et l'aire du triangle ABC.

Exercice 4 Soit $A(4; -11)$, $B(10; -10)$ et $C(2; 1)$.

a) Calculer AB^2, AC^2 et BC^2
b) Écrire les longueurs AB, AC et BC sous la forme $a\sqrt{k}$, $a, k \in \mathbb{N}$, k le plus petit possible.
c) Préciser et justifier la nature du triangle ABC (équilatéral non isocèle, isocèle, rectangle).

Exercice 5 Même questions pour les points $A(1; 3)$, $B(13; 19)$ et $C(17; 15)$.

Exercice 6 Même questions pour les points $A(1; 20)$, $B(21; 35)$ et $C(-14; 40)$.

Exercice 7 Déterminer le rayon du cercle de diamètre $[BC]$ pour $B(-6; -1)$ et $C(-2; 7)$.

Exercice 8 Déterminer si le point $B(-6; 5)$ est intérieur, extérieur ou appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(8; -2)$ de rayon $\frac{7}{3}\sqrt{15}$.

Exercice 9 Soit $A(12; 6)$ et $M(-12; 24)$. Montrer que la droite (AM) est tangente au cercle de centre O passant par A, et préciser la distance entre O et (AM)

Exercice 10 Calculer PQ dans chacun des cas suivants. Exprimer la longueur sous la forme d'un entier ou $a\sqrt{k}$, avec k un entier le plus petit possible, et a entier.

a) $P(2; 1)$ et $Q(1; 5)$
b) $P(-2; 1)$ et $Q(3; 7)$
c) $P(-3; -4)$ et $Q(-6; -7)$
d) $P(2; 7)$ et $Q(-1; -2)$
e) $P(9; 5\sqrt{3})$ et $Q(2; 7\sqrt{3})$
f) $P(7\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$ et $Q(3\sqrt{2}; -4\sqrt{2})$

solution de l'exercice 4. $AB = \sqrt{37}$. $AC = 2\sqrt{37}$. $BC = \sqrt{185}$. Triangle rectangle. ■

solution de l'exercice 5. $AB = AC = 20$. $BC = 4\sqrt{2}$. Triangle isocèle. ■

solution de l'exercice 6. $AB = AC = 25$. $BC = 25\sqrt{2}$. Triangle rectangle isocèle. ■

solution de l'exercice 7 . $r = 2\sqrt{5}$. ■

solution de l'exercice 8. $BC = 7\sqrt{5}$. Point extérieur au cercle. ■

solution de l'exercice 10.

a) $PQ = \sqrt{17}$
b) $PQ = \sqrt{61}$
c) $PQ = 2\sqrt{3}$
d) $PQ = 10$
e) $PQ = \sqrt{61}$
f) $PQ = 4\sqrt{10}$

■

6.3 Précisions sur les parallélogrammes

Définition 6.1 Deux droites (du plan) sans points communs seront dites strictement parallèles.

Deux droites sont parallèles si elles sont strictement parallèles **ou** confondues.

■ **Exemple 6.4** Donner un contre-exemple de l'implication :

> Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles,
> alors c'est un parallélogramme.

Proposition 6.5 Si le quadrilatère $ABDC$ a ses côtés opposés strictement parallèles, alors c'est un $ABDC$ est un parallélogramme strict (A, B et C non alignés). 6.4).

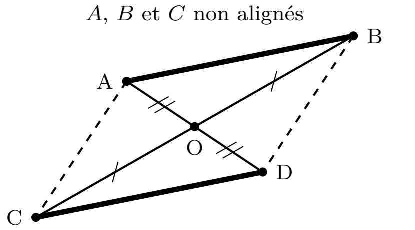


Figure 6.4 – $AB\mathbf{D}C$ est un parallélogramme strict

Définition 6.2 On dira que $AB\mathbf{D}C$ est un parallélogramme lorsque les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

Un parallélogramme peut être dégénéré (figure 6.5)

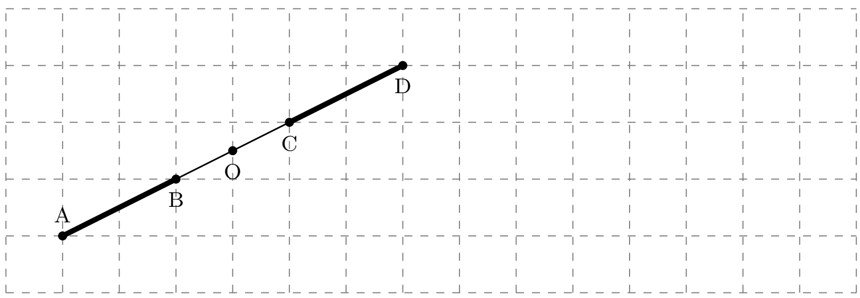


Figure 6.5 – Exemples de parallélogrammes dégénérés, avec les points A, B et C alignés.

Théorème 6.6 — admis. [1] Si $ABDC$ et $ABFE$ sont des parallélogrammes, alors $CDFE$ est un parallélogramme.

illustration. ■

[1] Il est difficile de prouver que $CDFE$ n'est pas un quadrilatère croisé. Il faut passer par une étude de cas, et utiliser les critères d'égalité des triangles. http://gabrielbraun.free.fr/Geometry/Tarski/plg_pseudo_trans.html

6.4 Translations, vecteurs et coordonnées

Le mot « vecteur » vient du latin « vehere » qui signifie conduire, transporter.[2]

[2] Utiliser https://www.geogebra.org/classic/xgcanh84

Définition 6.3 — vecteur lié. Soit A et B deux points du plan. Le vecteur lié $\overrightarrow{AB}$ est le segment orienté, du point A vers le point B[3].

- A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$
- B est l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Le vecteur peut être dégénéré si le même point est origine et extrémité : $\overrightarrow{AA}$.

[3] On n'écrira pas $\cancel{\overrightarrow{BA}}$: l'origine est toujours à gauche, la flèche pointe vers la droite.

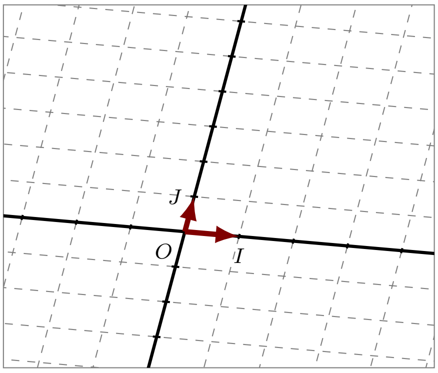


Figure 6.6 – Le repère $(O; I, J)$ n'est pas forcément orthonormé.

Définition 6.4 — Dans un repère $(O; I, J)$. et les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

■ **Exemple 6.7** Soient les points $A(2\ ;\ -4)$, $B(-1\ ;\ 3)$, $C(-3\ ;\ -2)$

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AA}$.

Définition 6.5 — translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. est la transformation du plan qui a un point X associe son image Y tel que $AB\mathbf{Y}X$ est un parallélogramme.

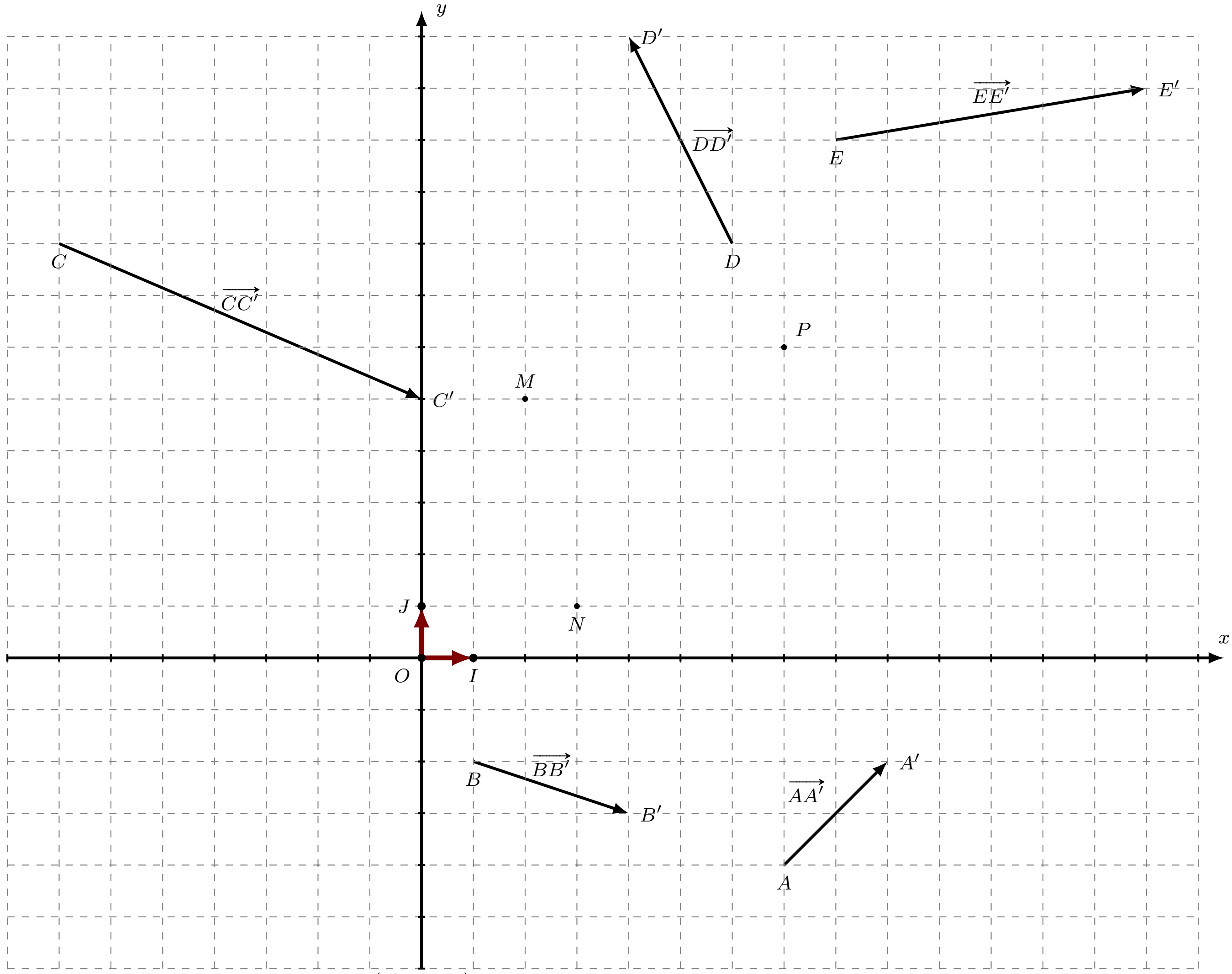
Définition 6.6 — translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$. est une identité. Elle transforme tout point du plan en lui-même.

On dira que c'est la translation de vecteur nul $\overrightarrow{0}$.

Définition 6.7 — Dans un repère $(O; I, J)$. la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ transforme le point $C(x; y)$ en le point $D(x + a; y + b)$.

6.4.1 Exercices

Exercice 1



Dans le repère orthonormé $(O; I, J)$:

1) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DD'}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EE'}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$.

2) a) Placer le point M' image de M par la translation $\overrightarrow{AA'}$.
   b) Placer l'image N' de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{BB'}$.
   c) Placer l'antécédent P' de P par la translation de vecteur $\overrightarrow{CC'}$.
   d) Placer l'antécédent Q' de Q par la translation de vecteur $\overrightarrow{DD'}$.
   e) Placer l'image R de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{EE'}$.

3) a) Placer le point S tel que $\overrightarrow{ES}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.
   b) Placer le point T tel que $\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$.
   c) Placer le point U tel que $\overrightarrow{BU}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
   d) Placer le point V tel que $\overrightarrow{VO}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
   e) Placer le point W tel que $\overrightarrow{WD}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.
   f) Placer le point X tel que $\overrightarrow{XE}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.

Exercice 2

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$ dans les cas suivants :

a) $A(3;-8)$, $B(-8;-9)$ et $C(0;8)$.

b) $A(-1;1)$, $B(4;-4)$ et $C(5;-2)$.

c) $A(0;0)$, $B(-4;5)$ et $C(3;\sqrt{2})$.

d) $A(0;3)$, $B(-5;0)$ et $C(2;-2)$.

■ **Exemple 6.8** Trouver les coordonnées des points M et N du repère $(O;I,J)$ dans les cas suivants

M est l'image de $F(-2;3)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$G(5;3)$ est l'image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

Exercice 3

On considère un repère $(O;I,J)$. Soit les points $A(1;-3)$, $B(-3;-4)$ et $C(-7;-8)$.
Trouver par le calcul les coordonnées du point $M(x;y)$ dans les cas suivants :

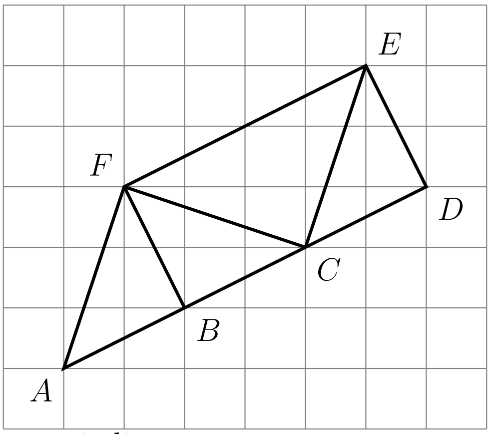
a) M est l'image de O par la translation de $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$.

b) M est l'image de A par la translation de $\overrightarrow{BC}$.

c) M est l'image de I par la translation de $\overrightarrow{CA}$.

d) J est l'image de $M(x;y)$ par la translation de $\overrightarrow{CA}$.

Exercice 4 — Égalités de vecteurs, direction, sens et norme.



En utilisant les points de la figure, indiquer

a) 3 vecteurs de même direction que $\overrightarrow{AF}$: ....

b) 3 vecteurs d'origine C et de même direction que $\overrightarrow{EF}$: ....

c) 2 vecteurs d'origine B de même direction et sens contraire à $\overrightarrow{EF}$: ....

d) 2 vecteurs de même norme que $\overrightarrow{AF}$ mais pas de même direction : ....

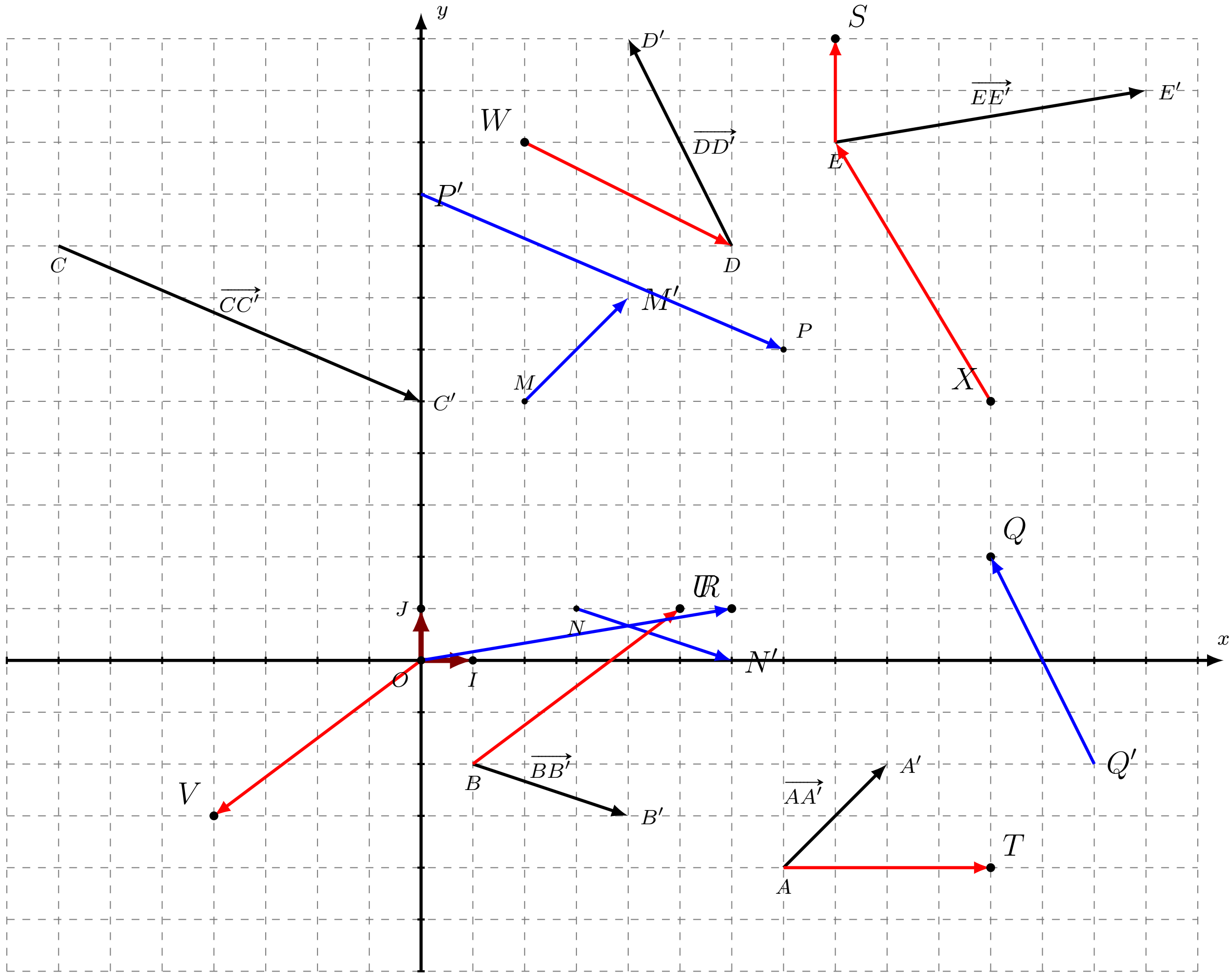
e) un vecteur égal à $\overrightarrow{DE}$ = : ....

f) tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$: ....

g) tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{FE}$: ....

solution de l'exercice 1.

$\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DD'}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EE'}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$



■

solution de l'exercice 2.

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-11\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\17\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}3\\-16\end{pmatrix}$;

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$;

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}7\\\sqrt{2}-5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-3\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$;

d) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-2\\3+\sqrt{2}\end{pmatrix}$;

■

solution de l'exercice 3.

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ et $M(-4;-1)$.

b) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$ et $M(-3;-7)$.

c) $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}$; $I(1;0)$ et $M(9;5)$.

d) $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}$; $J(0;1)$ et $M(-8;-4)$.

■

6.5 Égalité de vecteurs

B est l'image de A par la translation t de vecteur $\overrightarrow{XY}$. On

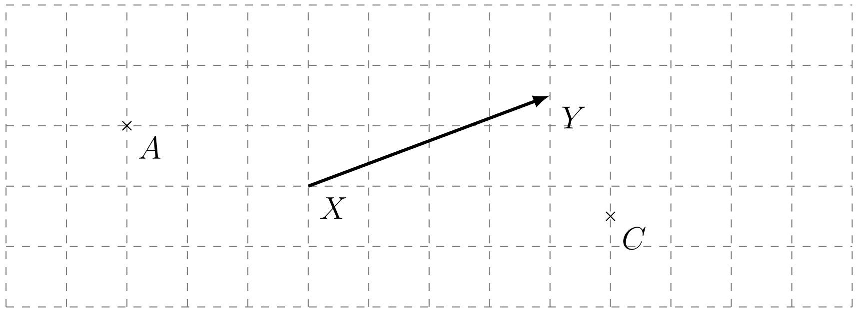


Figure 6.7 – B est l'image de A par la translation $\overrightarrow{XY}$
C a la même image par les translations $\overrightarrow{XY}$ et celle de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (la démonstration nécessite le theorème 2).
$\overrightarrow{XY}$ et $\overrightarrow{AB}$ représentent la même translation nommée vecteur $\vec{u}$.
On écrit $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY}$.

dira que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{XY}$ sont des représentants ~~de la translation~~ du vecteur $\overrightarrow{XY}$[4]. On désigne par $\vec{u}$ cette translation et on écrit :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{XY}$$

[4] « Vecteur $\overrightarrow{XY}$ » et « la translation de vecteur $\overrightarrow{XY}$ » signifient désormais la même chose.

Définition 6.8 — Dans un repère $(O; I, J)$**.** deux vecteurs sont égaux $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ s.s.i. leurs couples de coordonnées sont égaux.

Postulat 6.9 L'égalité de vecteurs reste vraie si on change de repère et :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

Définition 6.9 — caractéristiques d'un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$**.** Soit le vecteur $\vec{u}$ et ses représentants $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{XY}$.

Le vecteur $\vec{u}$ et tous ses représentants sont caractérisés par :
une même **direction** [5] parallèle à la droite $(AA')//(XY)$.
un même **sens** selon la flèche, de A vers B, de X vers Y.
une même **norme** notée $\|\vec{u}\| = AB = XY$.

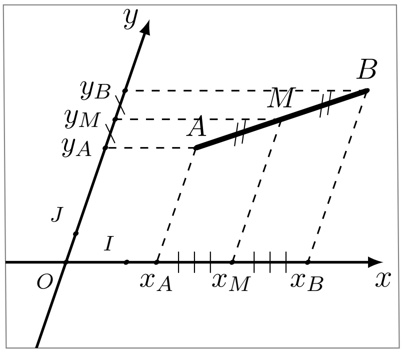
[5] On ne dit pas que deux vecteurs sont parallèles.
On ne dit pas qu'un vecteur est parallèle à une droite.

Définition 6.10 — Vecteur nul $\vec{0}$**.** est la translation identité $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots$ Sa norme vaut $\left\|\vec{0}\right\| = 0$.[6]

[6] Le vecteur $\vec{0}$ n'a ni direction ni sens !

6.5.1 Coordonnées du milieu d'un segment

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ si et seulement si M est le milieu du segment $[AB]$



Démonstration.

$$\begin{aligned}
& M \text{ est le milieu de } [AB] \\
\iff\ & \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \\
\iff\ & \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} x_B - x_M \\ y_B - y_M \end{pmatrix} \\
\iff\ & \begin{cases} x_M - x_A = x_B - x_M \\ y_M - y_A = y_B - y_M \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_M = x_A + x_B \\ 2y_M = y_A + y_B \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

■

Théorème 6.10 — formule pour les coordonnées du milieu d'un segment. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ dans un repère.

Le milieu $M(x_M; y_M)$ de $[AB]$ est le point de coordonnées :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

■ **Exemple 6.11** On considère les points $A(1\ ;\ 2)$, $B(3\ ;\ 1,5)$, $C(4\ ;\ 0,5)$ et $D(2\ ;\ 1)$. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme en déterminant les coordonnées des milieux des diagonales.

6.5.2 Exercices égalités vectorielles

Exercice 1 — Égalités vectorielles. À l'aide d'un schéma, préciser les énoncés vrais.

	Vrai	Faux
1/ Q est l'image de P par la translation $\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}$	☐	☐
2/ Q est l'image de P par la translation $\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BQ}$	☐	☐
3/ Le quadrilatère $JOLI$ est un parallélogramme revient à dire $\overrightarrow{JO}=\overrightarrow{LI}$	☐	☐
4/ Le quadrilatère $JOLI$ est un parallélogramme revient à dire $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{LI}$	☐	☐
5/ Le quadrilatère $JOLI$ est un parallélogramme revient à dire $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{JI}$	☐	☐
6/ Le quadrilatère $JOLI$ est un parallélogramme revient à dire $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{IJ}$	☐	☐
7/ Si I est le centre du parallélogramme $ECHO$ alors $\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{IC}$	☐	☐
8/ Si I est le centre du parallélogramme $ECHO$ alors $\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{CI}$	☐	☐
9/ Si Q est l'image de P par la symétrie de centre R, alors $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{RQ}$	☐	☐
10/ Si M est le milieu de $[AB]$ alors $AM=BM$	☐	☐
11/ Si $AM=BM$ alors M est nécessairement le milieu de $[AB]$	☐	☐
12/ Si $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ alors M est nécessairement le milieu de $[AB]$	☐	☐
13/ Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ alors $AB=CD$	☐	☐
14/ Si $AB=CD$ alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$	☐	☐
15/ Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ alors $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$	☐	☐

■ **Exemple 6.12**

Dans un repère on donne les points : $I(2;-2)$, $J(-1;-1)$, $K(0;1)$, $L(-3;2)$.

a) Montrer par le calcul que $IJLK$ est un parallélogramme.

b) Trouver par le calcul le point $M(x;y)$ tel que $ILMJ$ est un parallélogramme.

Exercice 2 Soit les points $A(-3\ ;\ -1)$, $B(5\ ;\ -2)$, $C(7\ ;\ 3)$ et $D(-1\ ;\ 4)$ dans le repère $(O;I,J)$.
Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 3 Soit les points $A(11,-14)$, $B(-13,12)$ et $C(-4,7)$ dans le repère $(O;I,J)$.
Trouver les coordonnées de $M(x;y)$ tel que $ABMC$ est un parallélogramme.

Exercice 4 Soit les points $A(12\ ;\ 15)$, $B(-11\ ;\ 17)$ et $C(-11\ ;\ \ -13)$.

Calculer les coordonnées du point $D(x;y)$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 5 Soit les points $D(-14;15)$; $A(16;11)$; $T(15;-7)$.

$DARK$ est le parallélogramme de centre T (intersection des diagonales). Retrouver par le calcul les coordonnées de R et K.

Exercice 6 — Variations. Le plan est muni d'un repère $(O;I,J)$. Pour chacun des cas suivants, traduire la propriété donnée en une égalité de vecteurs. En déduire les équations vérifiées par les coordonnées de $M(x;y)$, et les résoudre.

a) $A(-1;1)$, $B=(-1;2)$. $M(x;y)$ est tel que $ABMO$ est un parallélogramme.
b) $A(-1;2)$, $B=(3;1)$. $M(x;y)$ est tel que $AMBO$ est un parallélogramme.
c) $A(-2;1)$, $B=(1;2)$. $M(x;y)$ est tel que $ABMI$ est un parallélogramme.
d) $A(-3;-2)$, $B(-1;-1)$. $M(x;y)$ est tel que A est le milieu du segment $[MB]$
e) $A(-3;-2)$, $B(-1;-1)$. $M(x;y)$ est tel que M est le milieu du segment $[AB]$
f) $A(2;5)$, $B=(1;1)$. $M(x;y)$ est tel que M est le milieu du segment $[AB]$
g) $A(1;5)$. $M(x;y)$ est le symétrique de A par rapport à l'origine O.

> Dans les exercices suivants, le repère $(O;I,J)$ est orthonormé.

Exercice 7 Soit les points $B(-10;-5)$, $E(-16;3)$, $A(-48;-21)$ et $U(-42;-29)$

a) Montrer que $BEAU$ est un parallélgoramme.
b) Calculer les longueurs des côtés adjacents BE et EA.
c) Calculer les longueurs des diagonales BA et EU.
d) Que pouvez vous dire du quadrilatère $BEAU$?

Exercice 8 Soit les points $C(-7;9)$, $A(6{,}5;2)$, $F(-4;13)$ et $E(-17{,}5;20)$

a) Montrer que $CAFE$ est un parallélgoramme.
b) Calculer les longueurs des diagonales CF et AE.
c) Calculer les longueurs des côtés adjacents CA et AF.
d) Que pouvez vous dire du quadrilatère $CAFE$?

Exercice 9 Soit le parallélogramme $ARMY$ tel que $A(-6;7)$; $R(-11;9)$; $Y(-7;13)$.

a) Calculer la longueur de la diagonale RY
b) Calculer les coordonnées de M, et en déduire la longueur de la diagone AM.

> Dans les 2 derniers exercices, utiliser directement la formule des coordonnées du milieu d'un segment sans passez par des égalités vectorielles.

Exercice 10 Soit $F(10;-8)$, $U(13;0)$, $N(24;9)$ et $F(21;1)$.

Montrer que $FUNK$ est un parallélogramme en démontrant que les diagonales ont même milieu.

Exercice 11 Soit $P(2;3)$, $Q(5;4)$ et $R(4;5)$.

a) Calculer les coordonnées du milieu de $[PQ]$.
b) Montrer que R appartient au cercle de diamètre $[PQ]$.

solution de l'exercice 1.

	Vrai	Faux
1/ Q est l'image de P par la translation $\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}$	☒	☐
2/ Q est l'image de P par la translation $\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BQ}$	☐	☒
3/ Le quadrilatère $JOLI$ est un parallélogramme revient à dire $\overrightarrow{JO}=\overrightarrow{LI}$	☐	☒
4/ Le quadrilatère $JOLI$ est un parallélogramme revient à dire $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{LI}$	☒	☐
5/ Le quadrilatère $JOLI$ est un parallélogramme revient à dire $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{JI}$	☒	☐
6/ Le quadrilatère $JOLI$ est un parallélogramme revient à dire $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{IJ}$	☐	☒
7/ Si I est le centre du parallélogramme $ECHO$ alors $\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{IC}$	☐	☒
8/ Si I est le centre du parallélogramme $ECHO$ alors $\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{CI}$	☒	☐
9/ Si Q est l'image de P par la symétrie de centre R, alors $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{RQ}$	☒	☐
10/ Si M est le milieu de $[AB]$ alors $AM=BM$	☐	☒
11/ Si $AM=BM$ alors M est nécessairement le milieu de $[AB]$	☐	☒
12/ Si $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ alors M est nécessairement le milieu de $[AB]$	☐	☒
13/ Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ alors $AB=CD$	☒	☐
14/ Si $AB=CD$ alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$	☐	☒
15/ Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ alors $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$	☒	☐

■

solution de l'exercice 2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}=\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$. ■

solution de l'exercice 3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-24\\26\end{pmatrix}=\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x+4\\y-7\end{pmatrix}$. $M(-28;33)$. ■

solution de l'exercice 4. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-23\\2\end{pmatrix}=\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-11-x\\-13-y\end{pmatrix}$. $M(12;-15)$. ■

solution de l'exercice 5. $\overrightarrow{DT}\begin{pmatrix}29\\-22\end{pmatrix}=\overrightarrow{TR}\begin{pmatrix}x-15\\y+7\end{pmatrix}$. $R(44;-29)$.

$\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix}-1\\-18\end{pmatrix}=\overrightarrow{TK}\begin{pmatrix}x-15\\y+7\end{pmatrix}$. $K(14;-25)$. ■

solution de l'exercice 6. a) $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\overrightarrow{TR}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. $M(0;1)$.

b) $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix}$. $M(2;3)$.

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\end{pmatrix}$. $M(4;1)$.

d) $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} = \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y+2\end{pmatrix}$. $M(-5;-3)$.

e) $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y+2\end{pmatrix} = \overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-1-x\\-1-y\end{pmatrix}$. $M(-2;-\frac{3}{2})$.

f) $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-5\end{pmatrix} = \overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}1-x\\1-y\end{pmatrix}$. $M(-\frac{3}{2};3)$.

g) $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix} = \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. $M(-1;5)$.

■

solution de l'exercice 7.

a) $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix} = \overrightarrow{UA}\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$

b) $BE = 10$ et $EA = 40$.

c) $BA = 10\sqrt{17}$ et $EU = 10\sqrt{17}$.

d) $BEAU$ est un rectangle qui n'est pas carré.

■

solution de l'exercice 8.

a) $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}13{,}5\\-7\end{pmatrix} = \overrightarrow{UA}\begin{pmatrix}13{,}5\\-7\end{pmatrix}$

b) $CA = AF = \frac{5\sqrt{37}}{2}$.

c) $CF = 5$ et $AE = \sqrt{445}$.

d) $CAFE$ est un losange qui n'est pas carré.

■