

A.4 Fonction cube

Théorème A.4 — Identités remarquables avec des cubes.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Démonstration.

■

Théorème A.5 — Identités remarquables avec des cubes.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Démonstration.

■

Définition A.3 La fonction cube est la fonction f définie sur \mathbb{R} d'expression $f(x) = x^3$

Proposition A.6 — sens de variation. La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} .

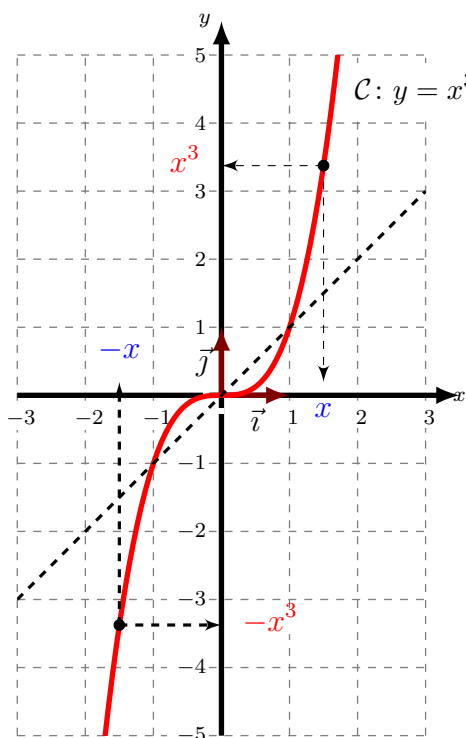


Figure A.6 – Tableau de variation de la fonction cube

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^3$	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$

Théorème A.7 — équation $x^3 = k$ d'inconnue x . Pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'équation $x^3 = k$ admet une unique solution notée $k^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{k}$.

■ **Exemple A.5** Résoudre l'inéquation $x^3 > 2$ d'inconnue x

Exercices : Fonction cube

Exercice 1 — calculer les images et antécédents par une fonction cube.

f est la fonction cube définie dans \mathbb{R} par $f(x) = x^3$

- Sans calculatrice. Calculer (et simplifier) les images de 2, -3, 4 et -5.
- Quels sont les antécédents éventuels de -8 ? de 125 ? de 9 ? de -9 ?

■ **Exemple A.6** — Résoudre équations et inéquations en isolant x^3 .

$$x^3 > 27$$

$$3x^3 + 12 \geq 204$$

$$-3x^3 + 15 \geq 207$$

Exercice 2 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes en isolant x^3 .

$$(E_1) \quad x^3 = 9 \quad \mid \quad (E_2) \quad 10x^3 + 8 = -632 \quad \mid \quad (E_3) \quad -9x^3 - 1 = 575 \quad \mid \quad (E_4) \quad 3x^3 = 5$$

Exercice 3 Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes en isolant x^3 .

$$\begin{array}{l|l|l} (I_1) \quad x^3 > 9 & (I_3) \quad 3x^3 > 375 & (I_5) \quad -9x^3 - 1 < 575 \\ (I_2) \quad x^3 \leq 27 & (I_4) \quad 2x^3 - 14 > -30 & (I_6) \quad -27 > x^3 \geq -64 \end{array}$$

Exercice 4 — Utiliser le sens de variation de la fonction cube. Soit a un nombre réel. En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carré ou de son tableau de variation, encadrer au mieux a^3 dans chaque cas suivant :

$$\begin{array}{l|l|l|l} \text{a) } a \geq -5 & \text{c) } -3 \leq a < 2 & \text{e) } 2 \leq a \leq 5 & \text{g) } -5 < 2a \leq 1 \\ \text{b) } a < 2 & \text{d) } -2 < a \leq 5 & \text{f) } -2 > a \geq -5 & \text{h) } 5 > -3a - 1 > 1 \end{array}$$

Exercice 5 — Comparer x^3 , x^2 et x pour différentes valeurs de $x \in \mathbb{R}$.

- Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $x^3 > x^2$.
- Si $x > 1$, ranger dans l'ordre croissant : 0, x , 1, x^3 et x^2 .
- Si $0 < x < 1$, ranger dans l'ordre croissant 0, x , 1, x^3 et x^2 .
- Ci-contre les représentations graphiques des fonctions $f: x \mapsto x^2$, $g: x \mapsto x$ et $h: x \mapsto x^3$. Associer chaque courbe à la fonction correspondante.

