Chapitre 6

Inéquations linéaires

Table 6.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 6…

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître**…/**savoir faire**…	🪨	💎	💍
inégalités, règles opératoires			
produire des inégalités	1	2	
règles opératoires		3	4, 5
intervalles de $\mathbb{R}$			
notation	6	7	
union et intersection d'intervalles		8, 9	
résolution d'inéquations			
résolution d'inéquations linéaires		10, 11, 12	13
problèmes simples			
application directes	14, 15	16, 17	17 18
inéquations avec paramètre		19 à 23	24 à 26
modéliser par des inéquations		28, 29, 30	
résoudre des inéquations de la forme $\|ax+b\| < c$.			31

6.1 Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ et opérations

Définition 6.1 Pour tout a et $b \in \mathbb{R}$, a est supérieur à b s.s.i. la différence $(a-b)$ est positive :

$$a \geqslant b \iff (a-b) \geqslant 0$$

à retenir Comparer deux expressions a et b revient à étudier le signe de la différence.

Théorème 6.1 — L'addition. conserve l'ordre :

Pour tout $a, b, n \in \mathbb{R}$ on a : $(a \geqslant b) \quad \Rightarrow \quad (a+n \geqslant b+n)$

Démonstration. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a \geqslant b$. Pour comparer $a+n$ et $b+n$ on cherchera le *le signe de la différence* : $(a+n)-(b+n) = a+n-b-n = a-b$ ■

car $a \geqslant b$

$(a+n)-(b+n) \geqslant 0$

la différence est positive

$a+n \geqslant b+n$

Théorème 6.2 — la Multiplication. par un nombre **positif non nul** conserve l'ordre.

Pour tout $a, b, p \in \mathbb{R}$ on a : $a \geqslant b$ et $p > 0 \quad \Rightarrow \quad pa \geqslant pb$

La multiplication par un nombre **négatif non nul** inverse l'ordre.

Pour tout $a, b, n \in \mathbb{R}$ on a : $a \geqslant b$ et $n < 0 \quad \Rightarrow \quad na \leqslant nb$

Démonstration. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a \geqslant b$. Soit $n < 0$ et $p > 0$ deux réels.

Comparer pa et pb avec le *signe de la différence* :

$pa - pb = p(a-b)$

$p > 0$ *et* $a - b \geqslant 0$

$pa - pb \geqslant 0$

la différence est positive

$pa \geqslant pb$

■

6.2 Les intervalles

■ **Exemple 6.1** 1. L'ensemble réells x tel que $3 \leqslant x \leqslant 5$ est $I = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad 3 \leqslant x \leqslant 5\}$. On le note $I = [3;5]$.

2. L'ensemble des réells x tel que $x \leqslant 4$ est $J = \{x \in \mathbb{R} \quad |x \leqslant 4\}$. On le note $J =]-\infty; 4]$

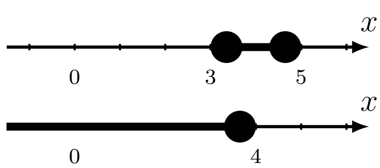


Figure 6.1 – $I = [3;5]$ et $J =]-\infty; 4]$

Table 6.2 – Les différentes variantes d'intervalles bornés par a et $b \in \mathbb{R}$

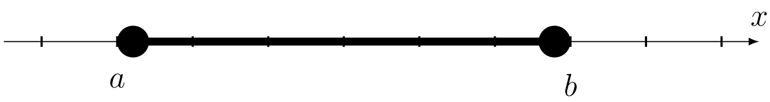
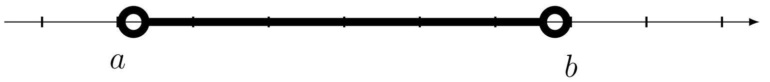
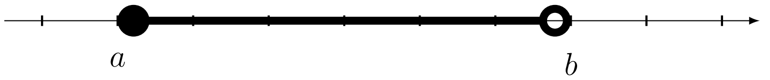
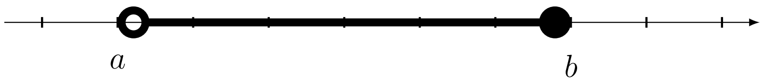
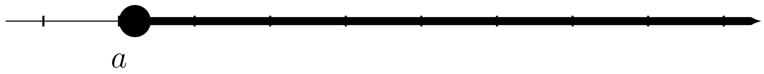
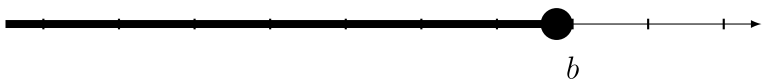
Intervalle	Inégalité	Représentation sur droite graduée
$x \in [a;b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$x \in]a;b[$	$a < x < b$	
$x \in [a;b[$	$a \leqslant x < b$	
$x \in]a;b]$	$a < x \leqslant b$	

Table 6.3 – Les différentes variantes d'intervalles infinis

Intervalle	Inégalité	Représentation sur droite graduée
$x \in [a;+\infty[$	$x \geqslant a$	
$x \in]a;+\infty[$	$x > a$	
$x \in]-\infty;b]$	$x \leqslant b$	
$x \in]-\infty;b[$	$x < b$	

Propriété 6.3 — **valeur absolue et intervalles centrés.**

Pour tout $a, r \in \mathbb{R}$ $\quad |x-a| \leqslant r \quad$ signifie $\quad x \in [r-a; r+a]$

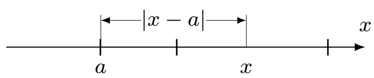


Figure 6.2 – $|x-a|$ est l'écart entre x et a.

R En dehors de cas simples, il sera plus pratique de déterminer l'intervalle centré par résolution d'inéquations simultanées.

■ **Exemple 6.2** 1. $|x-3|$ est l'écart entre x et 3. D'où $|x-3| \leqslant 0.1 \iff x \in [2{,}9; 3{,}1]$

2. $|x+2|$ est l'écart entre x et -2. D'où $|x+2| \leqslant 0.1 \iff x \in [-2{,}1; -1{,}9]$

6.3 Inéquations simples : vocabulaire

Une **inéquation à une inconnue** est une inégalité dans laquelle apparaît une lettre.

Une solution de l'inéquation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'inégalité est vraie.

■ **Exemple 6.3** Soit l'inéquation $4x + 7 < x^2$ d'inconnue x.

1. $x = 0$ n'est pas solution de l'inéquation car l'égalité $4 \times 0 + 7 < 0^2$ est ....
2. $x = 6$ .... de l'inéquation, car $4 \times 6 + 7 < 6^2$ est vraie.

■ **Exemple 6.4** Soit l'inéquation $7x - 12 \geqslant x^2$ d'inconnue x.

$7(3) - 12 \geqslant (3)^2$ est .... $7(4) - 12 \geqslant (4)^2$ est ....

$7(5) - 12 \geqslant (5)^2$ est .... $7(10) - 12 \geqslant (10)^2$ est ....

.... sont des solutions de l'inéquation.

Définition 6.2 Résoudre une équation dans $\mathbb{R}$ c'est trouver toutes les valeurs réelles des inconnues qui rendent l'inégalité vraie.

R Soit l'inéquation $3x + 4 > 2$, inconnue x. L'ensemble des solutions peut se noter directement $\mathscr{S} = \{x \in \mathbb{R} | 3x + 4 > 2\}$. L'objectif de ce chapitre est de simplifier l'écriture de tels ensembles.

Définition 6.3 Deux inéquations sont dites **équivalentes** (symbole $\iff$) si elles ont le même ensemble de solutions c.à.d elles sont vraies pour les mêmes valeurs de l'inconnue.

■ **Exemple 6.5** 1. Les inéquations $2x > 1$ et $2x - 1 > 0$ d'inconnue x sont équivalentes.

2. Les inéquations $x \leqslant 2$ et $x^2 \leqslant 4$ ne sont pas équivalentes. En effet $x = -3$ et $x = -4$ sont des solutions de $x \leqslant 2$ mais pas des solutions de $x^2 \leqslant 4$.

Théorème 6.4 — admis, propriétés des inéquations.

- **ajouter** aux **2 membres** d'une inéquation **une même** expression donne une inéquation équivalente. $A > B \iff A + C > B + C$
- **multiplier** les **2 membres** d'une inéquation par **une même** expression **positive non nulle** donne une inéquation équivalente. Si $(P > 0)$ alors $A \leqslant B \iff PA \leqslant PB$
- **multiplier** les **2 membres** d'une inéquation par **une même** expression **négative non nulle** donne une inéquation équivalente à condition de **changer le sens du signe de l'inéquation** Si $(N < 0)$ alors $A < B \iff NA > NB$

6.4 Exercices

6.4.1 Exercices : propriétés des inégalités

Exercice 1 Traduire les expressions suivantes par une inégalité :

1. « la somme de a et de $-b$ est strictement positive » ....
2. « la différence entre 8 et le double de y est positive ou nulle » ....
3. « la différence entre la moitié de x et de 3 est inférieure ou égale à -5 » ....
4. « la somme du carré de a et du carré de b est supérieure au produit de a et b. » ....

■ **Exemple 6.6** « Pizza TropBien fait au moins 210 € de profits en vendant x pizza à midi. En moyenne, une pizza se vend à 6 € et coûte 2.3 € diminué de 0.02 € par pizza vendue à fabriquer. » Écrire une inégalité vérifiée par x.

solution. $\underbrace{x}_{\text{nbr pizzas vendues}} \times \underbrace{(6 - (\overbrace{2.3 - 0.02x}^{\text{coût par pizza}}))}_{\text{profit par pizza}} \geqslant 210$, ce qui s'écrit $x(3.7 + 0.02x) \geqslant 210$. ■

Exercice 2 Écrire une inégalité vérifiée par x dans les cas suivants :

1. Helga a 54 points au premier test Piz, et x points au second, sans valider le module. Pour valider, un élève doit avoir un total d'au moins 120 points sur 2 tests......................
2. Harold a 65 € et met de côté 45 € chaque semaine grâce à son job d'été. Il peut acheter un vélo à au moins 310 € après x semaines. ....
3. Eugene a 50 € et met de côté 6 € par semaine. Lila n'a pas d'économies et met de côté 9 € par semaine. Après x semaines, Lila a plus d'économies que Eugene. ....
4. Arnold achète x cupcakes à 1.5 € pièce avec une partie de ses 18 €. ....
5. Rhonda utilise une partie de ses 71 € pour payer un trajet de x km en taxi. Son taxi prend 5 € de frais de service et 3 € par km de trajet. ....
6. Un enclos est de 108 m^2 accueuille x cochons. La loi impose d'avoir au minimum 12m^2 d'espace par cochon dans un enclos. ....

Exercice 3 — concepts. Complétez par $<$ ou $>$, $\geqslant$ et $\leqslant$ et choisir la(les) bonnes réponses.

1.

$a < b$	$x \leqslant y$	$a > 1$	$x \geqslant -2$
$\Rightarrow a - b \ldots\ldots 0$	$\Rightarrow y - x \ldots\ldots 0$	$\Rightarrow a - 1 \ldots\ldots 0$	$\Rightarrow x \ldots\ldots\ldots \geqslant 0$

2. **propriété n° 1** Si (A) (une expression positive) (B) (une expression négative) est ajoutée ou soustraite des deux membres d'une inégalité, le sens de l'inégalité reste inchangé.

3. **propriété n° 2** Si les deux membres d'une inégalité sont multipliés ou divisés par (A) (une expression positive) (B) (une expression négative) le sens de l'inégalité reste inchangé.
4. **propriété n° 3** Si les deux membres d'une inégalité sont multipliés ou divisés par (A) (une expression positive) (B) (une expression négative) le sens de l'inégalité est inversé.
5. $$\begin{array}{l} x < y \\ \Rightarrow x+2 \ldots\ldots y+2 \end{array} \Big) +\ldots\ldots \qquad \begin{array}{l} -4x > 20 \\ \Rightarrow x \ldots\ldots -5 \end{array} \Big) \times\ldots\ldots \qquad \begin{array}{l} 3x-1 < 3 \\ \Rightarrow 3x \ldots\ldots 4 \end{array} \Big) \ldots\ldots\ldots$$
6. $$\begin{array}{l} x < 5 \\ \Rightarrow x-3 \ldots\ldots 2 \end{array} \Big) +\ldots\ldots \qquad \begin{array}{l} x \leqslant -5 \\ \Rightarrow 3x \ldots\ldots\ldots \end{array} \Big) \ldots\ldots\ldots \qquad \begin{array}{l} x \geqslant -2 \\ \Rightarrow -3x \ldots\ldots\ldots \end{array} \Big) \ldots\ldots\ldots$$
7. $$\begin{array}{l} -3x \geqslant -3y \\ \Rightarrow -12x \ldots\ldots -12y \end{array} \Big) \ldots\ldots\ldots \qquad \begin{array}{l} x \leqslant -2 \\ \Rightarrow -x \ldots\ldots \end{array} \qquad \begin{array}{l} a < 2b \\ \Rightarrow ac > 2bc \end{array} \Big) \times c,\ (c \ldots 0)$$
8. $$\begin{array}{l} 4x-3 > 2y-3 \\ \Rightarrow 4x \ldots\ldots 2y \\ \Rightarrow 2x \ldots\ldots y \end{array} \begin{array}{l} \Big) \ldots\ldots\ldots \\ \Big) \ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad \begin{array}{l} x-2y > x \\ \Rightarrow -2y \ldots\ldots 0 \\ \Rightarrow y \ldots\ldots 0 \end{array} \begin{array}{l} \Big) -x \\ \Big) \times\ldots\ldots \end{array} \qquad \begin{array}{l} x < y \\ \Rightarrow -\frac{2}{3}x \ldots\ldots -\frac{2}{3}y \\ \Rightarrow -\frac{2}{3}x+1 \ldots\ldots -\frac{2}{3}y+1 \end{array} \begin{array}{l} \Big) \times \frac{-2}{3} \\ \Big) +1 \end{array}$$

> Si A et B sont deux affirmations. Pour **réfuter** l'implication « Si A alors B », il faut produire un **contre-exemple** pour lequel A est VRAIE et B est FAUSSE.

■ **Exemple 6.7** L'implication « Si $a > b$ alors $ac^2 > bc^2$ est fausse. Prenons $a = 2$, $b = 1$ et $c = 0$. On vérifie : $a > b$ est VRAIE ($2 > 1$), et $ac^2 > bc^2$ est FAUSSE ($0 > 0$)

Exercice 4 Les implications suivantes sont fausses. Donner un contre-exemple pour chacune en proposant des valeurs judicieuse pour a, b et $c \in \mathbb{R}$.

1. Si $a < b$ alors $ac \leqslant bc$.
2. Si $a > 0$ alors $ab \leqslant b$.
3. Si $a \leqslant 0$ alors $ab \leqslant 0$.
4. Si $a^2 > 0$ alors $a > 0$.
5. Si $a^2 \geqslant a$ alors $a \geqslant 0$.
6. Si $a \geqslant 0$ alors $a^2 \geqslant a$.
7. Si $a \geqslant b$ alors $\dfrac{a}{b} \geqslant 1$.
8. Si $a < 1$ alors $a^2 < a$.

Exercice 5 Dire si l'implication est vraie ou fausse. Si fausse, proposer un contre exemple.

1. Si $1 < x \leqslant 5$ alors $2 < 2x \leqslant 10$.
2. Si $-5 < x \geqslant 2$ alors $-2 < -x \geqslant 5$
3. Si $x > 1$ alors $x^2 > x$.
4. Si $x(x+1) > 0$ alors $x > 0$.
5. Si $x(x+1) > 5$ alors $x > 5$.
6. Si $x < 3$ et $y < 2$ alors $xy < 6$.
7. Si $x < 3$ et $y < 2$ alors $x + y < 5$.
8. Si $ac^2 > bc^2$ alors $a > b$.

6.4.2 Exercices : Intervalles

Exercice 6 Compléter par $\in$ ou $\notin$.

$-5 \ \ldots \ [0; +\infty[$; $\quad 3 \ \ldots \ ]2; 3]$; $\quad 3 \ \ldots \ ]3; 4]$; $\quad 3 \ \ldots \ ]-\infty; 4[$;

$3 \ \ldots \ ]-\infty; 3[$; $\quad 0 \ \ldots \ ]-\infty; 0]$; $\quad -3{,}1 \ \ldots \ [-4; -3]$; $\quad \dfrac{17}{4} \ \ldots \ ]4; 5[$;

$-5 \ \ldots \ ]-4; +\infty[$; $\quad \dfrac{1}{4} \ \ldots \ \left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right]$; $\quad -\dfrac{4}{5} \ \ldots \ [-5; -4]$; $\quad 0{,}3 \ \ldots \ \left[\dfrac{1}{3}; 1\right[$;

Exercice 7 Compléter le tableau suivant :

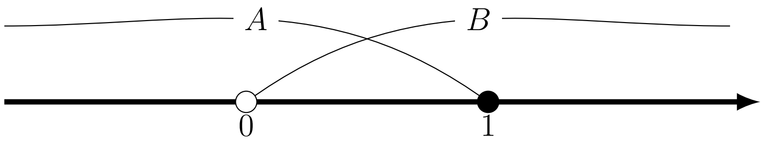
Intervalle	Inégalité(s)	Représentation sur droite réelle	Phrase
$x \in [-3; 5]$			
	$x < 3$		
			Intervalle de 4 à 6, fermé en 4 et ouvert en 6.
$x \in [2; +\infty[$			
	$-3 < x \leqslant -1$		
			Intervalle de $-\infty$ à 5, fermé en 5.
	$-3 \leqslant x \leqslant -1$		
	$5 \geqslant x > 1$		
	$x \geqslant -\dfrac{3}{4}$		
	$-4 > x > -7$		
	$5 \geqslant x > -3$		

■ **Exemple 6.8 — Intersection et unions d'intervalles.**

1. $A =]-\infty; 1]$ et $B =]0; +\infty[$.

   $A \cap B =]0; 1]$

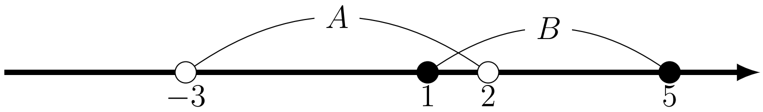
   $A \cup B =]-\infty; +\infty[$



2. $A =]-3; 2[$ et $B = [1; 5]$.

   $A \cap B = [1; 2[$

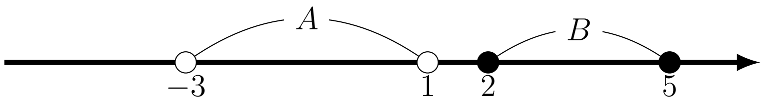
   $A \cup B =]-3; 5]$



3. $A =]-3; 1[$ et $B = [2; 5]$.

   $A \cap B = \emptyset$

   $A \cup B =]-3; 1[\cup [2; 5]$



> L'intersection d'intervalles est un intervalle. L'union n'est pas nécéssairement un intervalle.

Exercice 8 Pour chaque cas déterminez les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$

1. $A = [-10; 2[$ et $B = [-5; 3]$.

   $A \cap B =$ ....

   $A \cup B =$ ....

2. $A =]-\infty; 2[$ et $B = [0; 5[$.

   $A \cap B =$ ....

   $A \cup B =$ ....

3. $A = [3; +\infty[$ et $B =]-\infty; 6[$.

   $A \cap B =$ ....

   $A \cup B =$ ....

4. $A =]-\infty; -2[$ et $B =]-4; 3[$.

   $A \cap B =$ ....

   $A \cup B =$ ....

5. $A =]-4; 2]$ et $B = [2; 5]$.

   $A \cap B =$ ....

   $A \cup B =$ ....

6. $A = [-4; 2]$ et $B =]2; 5]$.

   $A \cap B =$ ....

   $A \cup B =$ ....

Exercice 9 — entrainement. Déterminez les ensembles ci-dessous.

1. $[2;5] \cap [3;6[$ | **2.** $]-\infty;3] \cap [-7;10]$ | **3.** $[-5;2] \cup [0;5]$ | **4.** $[-2;0] \cap [4;5[$

6.4.3 Exercices : résolution d'inéquations linéaires

■ **Exemple 6.9** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

$$\begin{aligned} & 3x+4>10 && -4 \\ \iff\ & 3x>6 && \times\tfrac{1}{3} \\ \iff\ & \frac{3}{3}x>\frac{6}{3} \\ \iff\ & x>2 \end{aligned}$$

$\mathscr{S}=]2;+\infty[$

$$\begin{aligned} & -2x-8\geqslant 10 && +8 \\ \iff\ & -2x\geqslant 18 && \times\tfrac{1}{-2} \\ \iff\ & \frac{-2}{-2}x\leqslant\frac{18}{-2} \\ \iff\ & x\leqslant -9 \end{aligned}$$

$\mathscr{S}=]-\infty;-9]$

$$\begin{aligned} & \frac{-3}{2}x-8\leqslant 10 && +8 \\ \iff\ & \ldots\ldots\ldots\ldots && \times\frac{2}{-3} \\ \iff\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \iff\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$\mathscr{S}=$

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

(I_1) $x+1<9$

(I_2) $x-4>3$

(I_3) $-6x\geqslant 30$

(I_4) $-3x\leqslant -2$

(I_5) $-x<8$

(I_6) $-3-x>2$

(I_7) $7<2x-11$

(I_8) $-8x-5>0$

(I_9) $42x>0$

(I_{10}) $14-6x\geqslant -10$

(I_{11}) $-\dfrac{6}{7}x-1{,}2<3{,}6$

(I_{12}) $\dfrac{3}{2}x-1>4$

■ **Exemple 6.10 — Encadrements.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

$$\begin{array}{rcccccl} & -1 & < & x+2 & < & 5 & \\ & -2 & & -2 & & -2 & \quad -2 \\ \iff & -3 & < & x & < & 3 & \end{array}$$

$\mathscr{S}=]-3;3[$

$$\begin{array}{cccccl} -4 & > & -2x & \geqslant & -10 & \\ \dfrac{-4}{-2} & < & \dfrac{-2}{-2}x & \leqslant & \dfrac{-10}{-2} & \quad \times\dfrac{1}{-2} \\ 2 & < & x & \leqslant & 5 & \end{array}$$

$\mathscr{S}=]2;5]$

$$\begin{array}{cccccl} -5 & \leqslant & -3x+7 & < & 16 & \quad -7 \\ -12 & \leqslant & -3x & < & 9 & \quad \times\dfrac{1}{-3} \\ \dfrac{-12}{-3} & \geqslant & \dfrac{-3}{-3}x & > & \dfrac{9}{-3} & \\ 4 & \geqslant & x & > & -3 & \end{array}$$

$\mathscr{S}=]-3;4]$

Exercice 11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

(I_1) $-3<x-4<7$

(I_2) $4<5x-4\leqslant 5$

(I_3) $-6\leqslant 3+x<4$

(I_4) $2\leqslant 2x<10$

(I_5) $-1\leqslant -x<3$

(I_6) $-3\leqslant 1-x<4$

(I_7) $-3\leqslant 2x-1<1$

(I_8) $8<-2+3x<16$

(I_9) $4<2x-1\leqslant 10$

■ **Exemple 6.11** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

$$\begin{aligned} & 6x-6\geqslant 3x+2 && -3x+6 \\ \iff\ & 3x\geqslant 8 && \times\tfrac{1}{3} \\ \iff\ & \frac{3}{3}x\geqslant\frac{8}{3} \\ \iff\ & x\geqslant\frac{8}{3} \end{aligned}$$

$\mathscr{S}=\left[\dfrac{8}{3};+\infty\right[$

$$\begin{aligned} & -3x-15<-3(x+6) \\ \iff\ & -3x-15<-3x-18 && +3x \\ \iff\ & -15<-18 \end{aligned}$$

impossible

$\mathscr{S}=\varnothing$

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

(I_1) $3x > 2x+1$	(I_3) $x+5 < 10x$	(I_5) $1-7x \leqslant 7+x$
(I_2) $12x \leqslant 8x+128$	(I_4) $3x+1 \geqslant 3(x+2)$	(I_6) $5(x-1) > 4(2x-1)$

■ **Exemple 6.12** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

$$\begin{aligned}
& \frac{5x+9}{4} \geqslant \frac{5x+2}{6} && \text{\textit{parenthèses autour des numérateurs}}\\
\iff & \frac{(5x+9)}{4} \geqslant \frac{(5x+2)}{6} && \times 12, \text{\textit{ multiplier par le dénominateur commun}}\\
\iff & \frac{12(5x+9)}{4} \geqslant \frac{12(5x+2)}{6} && \text{\textit{simplifier}}\\
\iff & 3(5x+9) \geqslant 2(5x+2) && \text{\textit{développer et réduire}}\\
\iff & 15x+27 \geqslant 10x+4 && -10x-27\\
\iff & 5x \geqslant -23 && \times\frac{1}{5}\\
\iff & x \geqslant \frac{-23}{5}
\end{aligned}$$

$$\mathscr{S} = \left[\frac{-23}{5}; +\infty\right[$$

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x

(I_1) $\dfrac{3x-2}{2} > \dfrac{x-1}{3}$	(I_2) $\dfrac{2x-5}{3} < \dfrac{6x-1}{4}$	(I_3) $\dfrac{3x-1}{4} - 1 \geqslant 0$

6.4.4 Exercices : problèmes simples

Exercice 14

Sachant que $\dfrac{2(2x-3)}{3}$ est positif, déterminer les valeurs possibles de x.

Exercice 15 — bis.

Sachant que $\dfrac{1-2x}{5}$ n'est pas inférieur à $3x+2$. Déterminer les valeurs possibles de x.

Exercice 16

Déterminer les entiers négatifs non nuls solutions de l'inéquation $3x+6 > -3$.

Exercice 17 — bis.

Déterminer les entiers positifs non nuls solutions de l'inéquation $3x-5 > 5x-13$.

Exercice 18

La plus petite solution entière de l'inéquation $4(x-3)+5 < 6(x-2)+1$, inconnue x, est aussi solution de l'équation $4x - ax = 3$. Déterminer la valeur de a.

Exercice 19

3 est une solution de l'inéquation $mx^2 - 5x + 3m - 1 \leqslant 0$, inconnue x. Déterminer une inéquation vérifiée par m est en déduire les valeurs possibles de m.

Exercice 20 — bis.

-2 est une solution de l'inéquation $x^3+3mx \geqslant 1-2m$, inconnue x. Déterminer une inéquation vérifiée par m est en déduire les valeurs possibles de m.

Exercice 21

Soit l'équation $5x = m-11$, inconnue x. Sachant que la solution pour x est positive non nulle, déterminer les valeurs possibles du paramètre m.

Exercice 22 — bis.

Soit l'équation $5x-2m = -x+5$, inconnue x. Sachant que la solution pour x est supérieure ou égale à 1, déterminer les valeurs possibles de m

Exercice 23 — bis.

Soit l'équation $(1-m)x = 1-2x$, inconnue x. Sachant que la solution pour x est un nombre strictement négatif, déterminer les valeurs possibles pour m.

Exercice 24

Soit l'inéquation $2x - a \geqslant 0$, inconnue x. Sachant que $x=1$, $x=2$ et $x=3$ sont des solutions entières, déterminer les valeurs possibles pour a.

Exercice 25

Soit l'inéquation $(a-3)x > a-3$, inconnue x. Sachant que l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} =]-\infty;1[$, déterminer la valeur de a.

Exercice 26

Soit l'inéquation $\dfrac{ax-5}{6} - \dfrac{2-ax}{4} > 0$, inconnue x. Sachant que l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} =]1;+\infty[$, déterminer les valeurs possibles de a.

Exercice 27 — communiquer.

Pour chaque inéquation, proposer une valeur solution qui n'appartient pas à $\mathscr{S}$ et déterminer les erreurs dans la résolution proposée.

$$\begin{aligned} & 3x > 5x && \textit{diviser par } x \\ \iff & \frac{3x}{x} > \frac{5x}{x} && \textit{simplifier} \\ \iff & 3 > 5 && \end{aligned}$$

impossible

$\mathscr{S} = \varnothing$

$$\begin{aligned} & ax \geqslant 1 && \textit{diviser par } a \\ \iff & \frac{ax}{ax} \geqslant \frac{1}{a} && \textit{simplifier} \\ \iff & x \geqslant \frac{1}{a} && \end{aligned}$$

$\mathscr{S} = \left[\frac{1}{a};+\infty\right[$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} \geqslant 10 && \textit{multiplier par } x \\ \iff & \frac{x}{x} \geqslant 10x && \textit{simplifier} \\ \iff & 1 \geqslant 10x && \textit{diviser par } 10 \\ \iff & \frac{1}{10} \geqslant x && \end{aligned}$$

$\mathscr{S} = \left]-\infty;\frac{1}{10}\right]$

Exercice 28

Un test comportant 20 questions. Dans ce test, une bonne réponse rapporte 10 points, et 5 points sont enlevés pour une réponse incorrecte ou incomplète, et il faut au moins 80 points pour être reçu.

On note x le nombre de bonne réponse. Donner une inéquation vérifiée par x si le candidat est reçu et en déduire la valeur minimale.

Exercice 29

Un groupe de x enfants se partage les mêmes jouets. Si chaque enfants reçoit 4 jouets, il en restera 27. Si chaque enfant en prend 5, il n'en aura pas assez.

Ecrire une inéquation en x et déterminer les valeurs possibles de x.

Exercice 30 Le tarif du parking A est 2.5 € par heure de stationnement. Le tarif du parking B est de 3 € la première heure, puis 2 € les suivantes.

1. Pour une durée de parking de 3 h, quelle formule est la plus avantageuse ?
2. Pour une durée de parking de x h, le parking B est le plus avantageux. Donner une inéquation vérifiée par x et en déduire la valeur minimale de x.

■ **Exemple 6.13 — Valeur absolue.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, inconnue x :

$$\begin{aligned} & |x+2| \leqslant 1 \\ \iff & -1 \leqslant x+2 \leqslant 1 \\ \iff & -3 \leqslant x \leqslant -1 \quad \Big) -2 \\ & \mathscr{S} = [-3;-1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |2x-3| \leqslant 0.5 \\ \iff & -0.5 \leqslant 2x-3 \leqslant 0.5 \\ \iff & 3-0{,}5 \leqslant 2x \leqslant 3+0{,}5 \quad \Big) +3 \\ \iff & 2{,}5 \leqslant 2x \leqslant 3{,}5 \\ \iff & 1{,}25 \leqslant x \leqslant 1{,}75 \quad \Big) \times\frac{1}{2} \\ & \mathscr{S} = [1{,}25; 1{,}725] \end{aligned}$$

$$|5x+1| \leqslant -5$$

impossible

$$\mathscr{S} = \varnothing$$

$$\begin{aligned} & |x+3| > 6 \\ \iff & x+3 > 6 \text{ ou } x+3 < -6 \\ \iff & x > 3 \text{ ou } x < -9 \\ & \mathscr{S} =]-\infty; -9[\cup]3; +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |2x| \geqslant 10 \\ \iff & 2x \geqslant 10 \text{ ou } 2x \leqslant -10 \\ \iff & x \geqslant 5 \text{ ou } x \leqslant -5 \\ & \mathscr{S} =]-\infty; 5] \cup [5; +\infty[\end{aligned}$$

$$|x+3| \geqslant -3$$

toujours vraie

$$\mathscr{S} = \mathbb{R}$$

Exercice 31 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, inconnue x :

(I_1) $\lvert x+6\rvert > 7$	(I_4) $\lvert x+5\rvert < -2$	(I_7) $\lvert 5x+3\rvert < 1$
(I_2) $\lvert x+3\rvert < 4$	(I_5) $\left\lvert \frac{-1}{4}x \right\rvert > 12$	(I_8) $\lvert 1+2x\rvert \geqslant -1$
(I_3) $\lvert 6x\rvert < 12$	(I_6) $\lvert 3x-5\rvert > 10$	(I_9) $\lvert 2x-5\rvert < 7$

6.5 Exercices : solutions et éléments de réponse

solution de l'exercice 2.

a) $x =$ note au test, $x \in \mathbb{N}$. x vérifie $54 + x < 120$. $\cancel{54 + x < 120}$

b) $x =$ nombre de semaines, $x \in \mathbb{N}$. x vérifie $65 + 45x \geqslant 310$. $\cancel{65 + 45x \geqslant 310}$

c) $x =$ nombre de semaines, $x \in \mathbb{N}$. x vérifie $50 + 6x < 9x$. $\cancel{50 + 6x < 9x}$

d) $x =$ nombre de cupcakes, $x \in \mathbb{N}$. x vérifie $18 \geqslant 1.5x$. $\cancel{18 \geqslant 1.5x}$

e) $x =$ longueur du trajet en km, $x \in \mathbb{R}$. x vérifie $71 \geqslant 3x + 5$. $\cancel{71 \geqslant 3x + 5}$

f) $x =$ nbr de cochons, $\dfrac{108}{x} \geqslant 12$.

■

solution de l'exercice 10.

(I_1) $\mathscr{S} =]-\infty, 8[$

(I_2) $\mathscr{S} =]7, \infty[$

(I_3) $\mathscr{S} =]-\infty, -5]$

(I_4) $\mathscr{S} = \left[\dfrac{2}{3}, \infty\right[$

(I_5) $\mathscr{S} =]-8, \infty[$

(I_6) $\mathscr{S} =]-\infty, -5[$

(I_7) $\mathscr{S} =]9, \infty[$

(I_8) $\mathscr{S} = \left]-\infty, -\dfrac{5}{8}\right[$

(I_9) $\mathscr{S} =]0, \infty[$

(I_{10}) $\mathscr{S} =]-\infty, 4]$

(I_{11}) $\mathscr{S} = \left]-\dfrac{28}{5}, \infty\right[$

(I_{12}) $\mathscr{S} = \left]\dfrac{10}{3}, \infty\right[$

■

solution de l'exercice 11.

(I_1) $\mathscr{S} =]1, 11[$

(I_2) $\mathscr{S} = \left]\dfrac{8}{5}, \dfrac{9}{5}\right]$

(I_3) $\mathscr{S} = [-9, 1[$

(I_4) $\mathscr{S} = [1, 5[$

(I_5) $\mathscr{S} =]-3, 1]$

(I_6) $\mathscr{S} =]-3, 4]$

(I_7) $\mathscr{S} = [-1, 1[$

(I_8) $\mathscr{S} = \left]\dfrac{10}{3}, 6\right[$

(I_9) $\mathscr{S} = \left]\dfrac{5}{2}, \dfrac{11}{2}\right]$

■

solution de l'exercice 12.

(I_1) $\mathscr{S} =]1, \infty[$

(I_2) $\mathscr{S} =]-\infty, 32]$

(I_3) $\mathscr{S} = \left]\dfrac{5}{9}, \infty\right[$

(I_4) $\mathscr{S} = \emptyset$

(I_5) $\mathscr{S} = \left[-\dfrac{3}{4}, \infty\right[$

(I_6) $\mathscr{S} = \left]-\infty, -\dfrac{1}{3}\right[$

■

solution de l'exercice 13.

(I_1) $\mathscr{S} = \left]\dfrac{2}{5}, \infty\right[$

(I_2) $\mathscr{S} = \left]-\infty, -\dfrac{17}{10}\right[$

(I_3) $\mathscr{S} = \left[\dfrac{5}{3}, \infty\right[$

■

solution de l'exercice 14. On a $x > \dfrac{3}{2}$. ■

solution de l'exercice 15. ■

solution de l'exercice 16.

La résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $3x+6>-3$ est $\mathscr{S}=]-3;+\infty[$. Les solutions entières négatives sont -2 et -1. ■

solution de l'exercice 17.

La résolution dans $\mathbb{R}$ est $\mathscr{S}=]-\infty;4[$. Les solutiosns entières positives sont 1, 2 et 3. ■

solution de l'exercice 18.

La résolution dans $\mathbb{R}$ de $4(x-3)+5<6(x-2)+1$ est $\mathscr{S}=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$. La plus petite solution entière de est $x=1$.

1 est solution de $4x-ax=3$, donc a vérifie $4(1)-a(1)=3$, d'où $a=1$. ■

solution de l'exercice 19.

3 est solution, donc m vérifie $m(3)^2-5(3)+3m-1\geqslant 0$, donc $6m-16\geqslant 0$. $\therefore m\geqslant\frac{8}{3}$. ■

solution de l'exercice 20.

-2 est solution, donc m vérifie $(-2)^3+3m(-2)\geqslant 1-2m$, d'où $8-6m\geqslant 1-2m$. $\therefore m\geqslant\frac{7}{4}$. ■

solution de l'exercice 21.

La solution $x=\frac{m-11}{5}$ est strictement positive. Donc m vérifie $\frac{m-11}{5}>0$. $\therefore m>11$. ■

solution de l'exercice 22.

La solution $x=\frac{2m+5}{6}$ est supérieure ou égale à 1. Donc m vérifie $\frac{2m+5}{6}\geqslant 1$. $\therefore m\geqslant\frac{1}{2}$. ■

solution de l'exercice 23.

La solution $x=\frac{1}{3-m}$ est strictement négative. Donc m vérifie $\frac{1}{3-m}<0$. Il faut $3-m<0$. $\therefore m>3$. ■

solution de l'exercice 24.

a vérifie simultanément les inéquations $2-a\geqslant 0$ et $4-a\geqslant 0$ et $6-a\geqslant 0$. Il faut donc $a\leqslant 2$.

Autre approche $2x-a\geqslant 0 \iff x\geqslant\frac{a}{2}$. 1, 2 et 3 sont des solutions entières, donc a doit vérifier **simultanément** les inéquations $1\geqslant\frac{a}{2}$ et $2\geqslant\frac{a}{2}$ et $3\geqslant\frac{a}{2}$.

Il faut $a\leqslant 6$ et $a\leqslant 4$ et $a\leqslant 2$. $\therefore a\leqslant 2$. ■

solution de l'exercice 25.

$$\left.\begin{aligned}&(a-3)x > a-3\\ \iff\ & x > \frac{a-3}{a-3} = 1\end{aligned}\right) \textit{Si } a-3>0$$

$$\text{et } \left.\begin{aligned}&(a-3)x > a-3\\ \iff\ & x < \frac{a-3}{a-3} = 1\end{aligned}\right) \textit{Si } a-3<0$$

Il faut donc $a-3<0$, $\therefore a<3$. ■

solution de l'exercice 26.

$$\left.\begin{aligned}\frac{(ax-5)}{6} - \frac{(2-ax)}{4} &> 0\\ \frac{12(ax-5)}{6} - \frac{12(2-ax)}{4} &> 0\end{aligned}\right) \times 12$$

$$2(ax-5) - 3(2-ax) > 0$$

$$2ax + 3ax - 10 - 6 > 0$$

$$5ax - 16 > 0$$

$$ax > \frac{16}{5}$$

$$x > \frac{16}{5a} \quad \textit{Si } a>0$$

$$x < \frac{16}{5a} \quad \textit{Si } a<0$$

Comme $\mathscr{S} =]1;+\infty[$, donc $a>0$ et $\dfrac{16}{5a} = 1$. $\therefore a = \dfrac{16}{5}$. ■

solution de l'exercice 28.

x= nombre de réponses correctes. Il faut $10x - 5(20-x) \geqslant 80$. Ce qui donne $15x \geqslant 180$, d'où $x = 12$. ■

solution de l'exercice 29.

$4x + 27 =$ nombre total de jouets $< 5x$. Donc $x > 27$. ■

solution de l'exercice 30.

$x =$ durée de parking en heures

1. Pour $x = 3$, $A = 2.5 \times 3 = 7.5\,e$, et $B = 3 + 2(3-1) = 7\,e$.
2. À partir de la question 1, on peut poser que :

   Tarif A $A(x) = 2.5x$

   Tarif B $B(x) = 3 + 2(x-1)$

On cherche $x > 0$ tel que $A(x) > B(x)$, donc $2.5x > 3 + 2(x-1)$, $0.5x > 1$, $x > 2$. Le parking B est le plus avantageux à partir de $2h$.

■

solution de l'exercice 31.

(I_1) $\mathscr{S} =]-\infty, -13[\cup]1, \infty[$

(I_2) $\mathscr{S} =]-7, 1[$

(I_3) $\mathscr{S} =]-2, 2[$

(I_4) $\mathscr{S} = \emptyset$

(I_5) $\mathscr{S} =]-\infty, -48[\cup]48, \infty[$

(I_6) $\mathscr{S} = \left]-\infty, -\dfrac{5}{3}\right[\cup]5, \infty[$

(I_7) $\mathscr{S} = \left]-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{2}{5}\right[$

(I_8) $\mathscr{S} = \mathbb{R}$

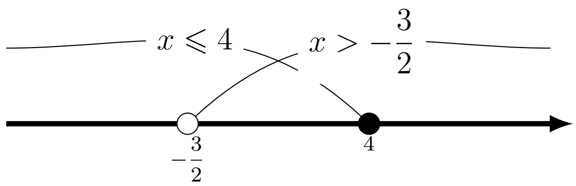
(I_9) $\mathscr{S} =]-1, 6[$

■

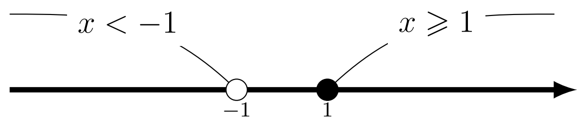
6.6 Club maths : systèmes d'inéquations

■ **Exemple 6.14 — Inéquations simultanées.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'inéquations suivantes :

$$\begin{cases} 2x > -3 \\ x \leqslant 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -\dfrac{3}{2} \\ x \leqslant 4 \end{cases} \iff -\frac{3}{2} < x \leqslant 4 \qquad \begin{cases} 2x - 1 \geqslant 3 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x < -1 \end{cases} \quad \text{impossible}$$



$\mathscr{S} =]-\frac{3}{2};4]$



$\mathscr{S} = \varnothing$

Exercice 32

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'inéquations suivantes :

$(S_1)\begin{cases} x < 9 \\ x < -3 \end{cases}$ $(S_3)\begin{cases} x - 2 \leqslant -1 \\ x + 2 \geqslant 3 \end{cases}$ $(S_5)\begin{cases} 3x < 4x \\ 5x - 4 \geqslant 2 + 7x \end{cases}$

$(S_2)\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x > 5 \end{cases}$ $(S_4)\begin{cases} 3x + 1 \leqslant 4 \\ 2x - 3 > 7 \end{cases}$ $(S_6)\begin{cases} 2x + 1 < 3 \\ 3(x-2) - 1 \geqslant 2(x-4) \end{cases}$

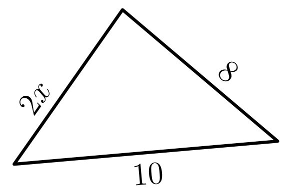
Exercice 33

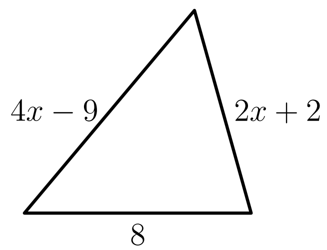
Déterminer les **entiers positifs** solutions des systèmes suivants :

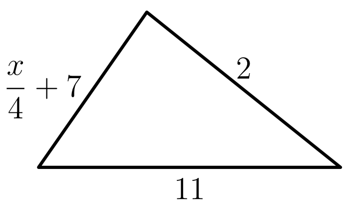
$(S_1)\begin{cases} 2(x+2) + 1 > -3 \\ -1 + 2x < 8 - \dfrac{x}{4} \end{cases}$ $(S_2)\begin{cases} 2x - 1 < x + 1 \\ x + 8 > 4x - 1 \end{cases}$ $(S_3)\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 5 \\ \dfrac{x+10}{2} < 7 \end{cases}$

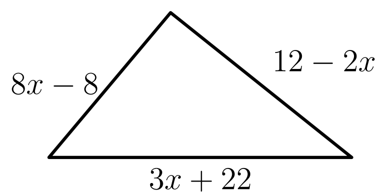
Exercice 34

Pour chaque figure, préciser les inéquations vérifiées par x pour que le triangle soit constructible, puis déterminer l'ensemble des solutions.









Exercice 35

Soit un triangle de côtés $4a+5$, $2a-1$ et $20-a$, avec a un entier. Déterminer les valeurs possibles du périmètre de ce triangle.

Exercice 36

La solution entière du système $\begin{cases} 2x > 3x - 3 \\ 3x - a > -61 \end{cases}$ d'inconnue x est 2. Déterminer les valeurs possibles de a.

Exercice 37

Déterminer les solutions entières du système $\begin{cases} 2(x+2) > x + 5 \\ 3(x-2) + 8 \geqslant 2x \end{cases}$ d'inconnue x.

Exercice 38

L'ensemble solution du système $\begin{cases} x + 5 > 2a \\ x + a < 3b \end{cases}$ d'inconnue x est $\mathscr{S} =]-9; 10[$. Déterminer les valeurs de a et b.

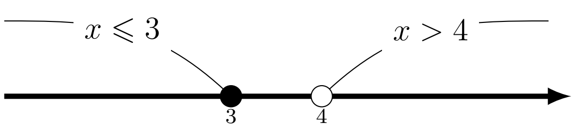
Exercice 39

L'ensemble solution du système $\begin{cases} 2x + 2 > 4(x-2) \\ x + a < 1 \end{cases}$ d'inconnue x est $\mathscr{S} =]-\infty; 5[$. Déterminer les valeurs possibles de a.

■ **Exemple 6.15 — Disjonctions.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

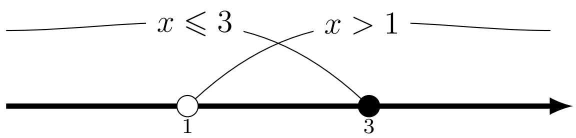
$x > 4$ ou $x \leqslant 3$

$\mathscr{S} =]-\infty; 3] \cup]4; +\infty[$



$x > 1$ ou $x \leqslant 3$

$\mathscr{S} = \mathbb{R}$



Exercice 40 Mêmes consignes

(I_1) $x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 1$

(I_2) $x < 4$ ou $x > 8$

(I_3) $-2x > 10$ ou $4x > 16$

(I_4) $-3x + 1 > 10$ ou $2x + 1 > 11$

(I_5) $x + 5 \leqslant -4$ ou $x + 5 \geqslant 4$

(I_6) $15 > 4x - 1$ ou $1 < 4x - 15$

6.6.1 Club maths : solutions et éléments de réponse

solution de l'exercice 32.

(I_1) $\mathscr{S} =]-\infty, -3[$

(I_2) $\mathscr{S} = \emptyset$

(I_3) $\mathscr{S} = \{1\}$

(I_4) $\mathscr{S} = \emptyset$

(I_5) $\mathscr{S} = \emptyset$

(I_6) $\mathscr{S} = [-2, 1[$

■

solution de l'exercice 33.

(I_1) $\mathscr{S} =]-4, 4[$

(I_2) $\mathscr{S} =]-\infty, 2[$

(I_3) $\mathscr{S} = [3, 4[$

■

solution de l'exercice 37. ■

solution de l'exercice 38.

$\begin{cases} x+5 > 2a \\ x+a < 3b \end{cases} \iff \begin{cases} x > 2a-5 \\ x < 3b-a \end{cases}$. Il faut $\begin{cases} 2a-5 = -9 \\ 3b-a = 10 \end{cases}$, $a = -2$ et $b = \dfrac{8}{3}$. ■

solution de l'exercice 39.

$\begin{cases} 2x+2 > 4(x-2) \\ x+a < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 5 > x \\ x < 1-a \end{cases}$. Ceci est équivalent à $x < 5$ si $1-a \geqslant 5$. $\therefore a \leqslant -4$. ■

solution de l'exercice 36.

■

solution de l'exercice 34. ■

solution de l'exercice 35.

Inégalité triangulaire, a doit vérifier $\begin{cases} 4a+5+2a-1 > 20-a \\ 4a+5+20-a > 2a-1 \\ 20-a+2a-1 > 4a+5 \end{cases} \iff \begin{cases} 7a > 16 \\ a > -24 \\ 3a < 14 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} a > \dfrac{16}{7} \\ a > -24 \\ a < \dfrac{14}{3} \end{cases}$. Les seuls entiers qui verifient ce systèmes sont $a = 3$ et $a = 4$.

Le périmètre $\mathscr{P} = 24 + 5a$ vaut soit 44 soit 39. ■

solution de l'exercice 40 .

(I_1) $\mathscr{S} =]-\infty, -3] \cup [1, \infty[$

(I_2) $\mathscr{S} =]-\infty, 4[\cup]8, \infty[$

(I_3) $\mathscr{S} =]-\infty, -5[\cup]4, \infty[$

(I_4) $\mathscr{S} =]-\infty, -3[\cup]5, \infty[$

(I_5) $\mathscr{S} =]-\infty, -9] \cup [-1, \infty[$

(I_6) $\mathscr{S} =]-\infty, 4[\cup]4, \infty[$

■