Chapitre 13

Probabilités

Table 13.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 13…

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître…/savoir faire…**	🪨	💎	💍
Lois de probabilités et propriétés			
loi des grands nombres			
vocabulaire des événements, opérations $\cap$, $\cup$	1	2, 3	
Propriétés des lois de probabilités	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12
Modéliser une expérience aléatoire			
loi de probabilité	14, 15		
par un diagramme d'univers	16, 17, 18	19, 20, 21	
par un tableau croisé d'effectifs	22, 23, 24	25	27 28
par un diagramme de Venn	22, 23, 24		26
par un arbre de dénombrement	29, 30, 31	32, 33, 34	

13.1 Avant-propos

Une *expérience aléatoire* est une expérience *renouvelable à l'identique*, dont on connait les *issues*, et dont le résultat est *imprévisible*[1].

Chaque renouvellement de l'expérience s'appelle *épreuve*.

Les résultats expérimentaux suggèrent l'existence d'une **loi du hasard**. On ne parle pas de nombres liés à une expérience donnée, mais de « nombres idéaux » dont ceux de l'expérience se rapprochent.

1. contrairement à une expérience *déterministe* comme en Physique, où des conditions identiques conduisent à des résultats identiques –aux erreurs de mesure près

Postulat 13.1 — La loi naïve des grands nombres. Lorsqu'une expérience aléatoire a un nombre fini de résultats possibles, chacun des résultats possède une probabilité d'*apparaître*.

Quand on répète un grand nombre de fois l'expérience, la proportion d'apparition de chaque résultat est voisine de sa probabilité.

$$\text{frequence(événement)} \approx P(\text{événement}) \times \text{nbr de répétition}$$

■ **Exemple 13.1**

1. La probabilité de « Jane du CSJA gagne le 1^er^ prix avec son unique ticket » est $\frac{1}{20\ 000\ 000}$
2. L'événement « un français a gagné le 1^er^ prix au loto en 2023 » n'a rien d'extraordinaire. En effet, avec environ 750 000 participants par tirage, et 3 tirages par semaine, la loi de grands nombres estime que le nombre annuel de gagnants est environ $750\ 000 \times 3 \times 52 \times \frac{1}{20\ 000\ 000} \approx 6$.

13.2 Vocabulaire des expériences aléatoires

Définition 13.1 Pour une expérience aléatoire :

- **une issue** est notée ω, ou ω_1, $\omega_2, \ldots$. à lire « oméga »
- **l'univers** Ω désigne l'ensemble des issues possibles : $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \ldots; \omega_n\}$.

n désigne le nombre total d'issues.

- **un événement** E est une partie de Ω : $E \subset \Omega$
- ω ***réalise*** **l'événement** E signifie $\omega \in E$.

Notation 13.1 $\text{Card}(E) = |E|$ est le *cardinal* d'un événement E. C'est le nombre d'issues qui réalisent E.

Définition 13.2 — Opérations sur les événements. Pour tous événements A et B d'un univers Ω :

(i) l'événement $A \cup B$ est l'**union** de A et B.

Un événement ω réalise $A \cup B$ s'il réalise A **OU** s'il réalise B :

$\omega \in A \cup B$ si $\omega \in A$ **ou** $\omega \in B$

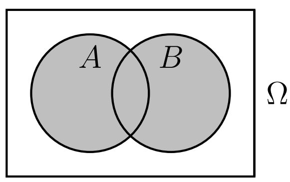


Figure 13.1 – $A \cup B$

(ii) l'événement $A \cap B$ est l'**intersection** de A et B.

L'événement ω réalise $A \cap B$ s'il réalise A **ET** s'il réalise B.

$\omega \in A \cap B$ si $\omega \in A$ **et** $\omega \in B$

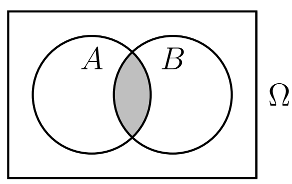
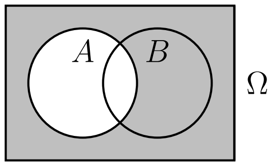


Figure 13.2 – $A \cap B$

(iii) l'événement $\overline{A}$ est l'événement **contraire** de A.

L'événement ω réalise $\overline{A}$ si ne réalise **PAS** A

$\omega \in \overline{A}$ si $\omega \notin A$



Définition 13.3 — événements particuliers.

1. $E = \Omega$ est un *événement certain* : toutes les issues réalisent E.
2. $\varnothing$ est l'*événement impossible* : aucune issue réalise $\emptyset$.
3. Deux événements E et F sont *incompatibles* (ou *disjoints*) si $E \cap F = \emptyset$.

13.3 Loi de probabilité

Pour un univers donné, on fixe une loi de probabilité.

Définition 13.4 — définition constructive d'une loi de probabilité. Pour un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

1. on attribue à chaque événement élémentaire ω une probabilité positive $p(\omega) \geqslant 0$
2. la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1 :
$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots + p(\omega_n) = 1$$
3. Pour tout événement E, la probabilité $P(E)$ est égale à la probabilité des événements élémentaires qui le réalisent :
$$P(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega)$$

■ **Exemple 13.2** On lance un dé cubique et on note la face obtenue. On choisit la loi de probabilité sur l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$\omega_i \in \Omega$	1	2	3	4	5	6	Total
$p(\omega_i)$	0	0,5	0,1	0,3	0,01	0,09	

$P(\Omega) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = \ldots\ldots\ldots$

$A =$ « obtenir un nombre pair », $P(A) = p(2) + p(4) + p(6) = \ldots\ldots\ldots$

$B =$ « obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 » ; $P(B) = \ldots\ldots\ldots$

$C =$ « obtenir un 7 » ; $P(C) = \ldots\ldots\ldots$

$\overline{A} =$ $P(\overline{A}) = \ldots\ldots\ldots$

$\overline{B} =$ $P(\overline{B}) = \ldots\ldots\ldots$

Convention lycée Dans tout exercice où figurent des expressions tel que « dés équilibrés », « tirage au hasard », « urne opaque et jetons indiscernables au toucher »... le modèle choisi sera celui de l'équiprobabilité : tous les événements élémentaires ont la même probabilité. La difficulté est d'identifier les issues équiprobables en question.

Définition 13.5 — situation d'équiprobabilité. Pour un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ avec issues équiprobables :

1. $p(\omega_1) = p(\omega_2) = \dots = p(\omega_n) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)}$
2. Pour tout événement E on a $P(E) = \dfrac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}$.

■ **Exemple 13.3** On lance un dé cubique *équilibré* et on note la face obtenue. Ici les faces sont équiprobables, l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a 6 issues équiprobables.

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \dots\dots\dots$$

$$P(\Omega) = \dots\dots\dots$$

$A =$ « obtenir un nombre pair », $\qquad P(A) = \dots\dots\dots$

$B =$ « obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 » ; $\qquad P(B) = \dots\dots\dots$

$C =$ « obtenir un 7 » ; $\qquad P(C) = \dots\dots\dots$

$\overline{A} =$ $\qquad P(\overline{A}) = \dots\dots\dots$

$\overline{B} =$ $\qquad P(\overline{B}) = \dots\dots\dots$

Théorème 13.2 — formulaire. Toute loi de probabilité sur un univers Ω vérifie les propriétés suivantes :

(P1) (*loi unitaire*) $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$

(P2) (*loi positive*) Pour tout événement A $\qquad 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

(P3) (*probabilité du complément*) Pour tout événement A $\qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(P4) (*loi additive*) Si A et B sont des événements incompatibles alors :

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

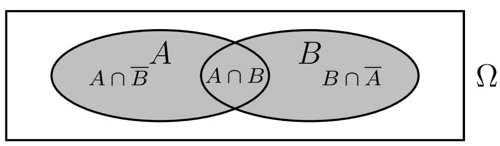
(P5) Pour tous événements A et B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

R Écritures symétriques de P3 et P5 :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

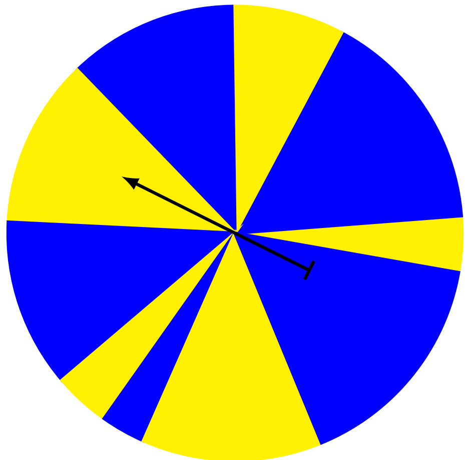
$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$



13.4 Simulation d'expériences aléatoires

■ **Exemple 13.4 — fréquences empiriques.**

Pour la roue de loterie ci-dessous, le joueur Bleu gagne si l'aiguille s'arrête sur la couleur bleue, et le joueur Jaune gagne si l'aiguille s'arrête sur la couleur jaune.



1. Faire tourner l'aiguille distribuée 24 fois, et relever la fréquence obtenue de victoire du joueur bleu.
2. Mettre en commun avec votre binôme et compléter le tableau de fréquence.
3. Déterminer une estimation de la probabilité de gagner du joueur bleu.
4. Déterminer une estimation au degré près de la somme des angles au centre des secteurs bleus de la roue.

	Bleu	**Jaune**	**Total**
fréquence sur 24 lancers			
fréquence du binôme sur 24 lancers			
fréquence relative sur 48 lancers			

■ **Exemple 13.5 — simulation à l'aide d'un algorithme Python.** Le travail de répétition d'une expérience aléatoire pour obtenir une fréquence empirique d'événements est fastidieux. On peut utiliser des scripts pour arriver à des résultats similaires à l'aide de Python et son module `random` :

- `random.randint(3,9)` tire un entier compris entre 3 et 9 inclus.
- `random.choice(["As","R","D","V"])` choisit au hasard un élément parmi une liste.

Script 13.1 – fonction `frequence` retourne la fréquence d'apparition du nombre 5 après une simulation de `n` lancers.lien

```
from random import randint          # import de l'instruction randint
def frequence(n) :                  # fréquence pour n épreuves
    compteur = 0
    for i in range(n) :
        lancer = randint(1,6)       # tirer au hasard un entier entre 1 et 6
        if lancer == 5 :            # si le lancer donne 5 alors ...
            compteur = compteur + 1 # ... on incrémente compteur de 1
    frequence = compteur/n
    return frequence
```

13.5 Exercices

Exercice 1 — concepts : Décrire l'univers, des événements et lister les issues possibles.

Compléter pour décrire les expériences aléatoires suivantes et les événments demandés :

1. On lance cinq fois une pièce de monnaie. La sortie de Pile rapporte 1 point. La sortie de Face ne rapporte rien. On s'intéresse à la somme des points obtenus à l'issue des cinq lancers.

   L'univers est $\Omega = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   On compte $|\Omega| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ issues incompatibles.

2. On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on soustrait le plus petit résultat obtenu du plus grand. Le résultat est nul si le lancer produit un double.

   L'univers est $\Omega = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   On compte $|\Omega| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ issues incompatibles.

3. Dans un restaurant les clients choisissent une entrée parmi tomates (T) ou sambusa (S), un plat principal parmi pizza (P), burger (B) ou végétarien (V) et pour le dessert une glace (G) ou un fromage (F).

   On suppose qu'ils choisissent un de chaque au hasard :

   L'univers est $\Omega = \{TPG\ ; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

   On compte $|\Omega| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ issues incompatibles.

4. Dans un jeu de 32 cartes, on trouve quatre couleurs (Carreau ♢ et Coeur ♡ sont de couleur rouge. Trèfle ♣ et Pique ♠) et, dans chaque couleur, on a une série de 8 cartes (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As).

♡	♢	♠	♣
As	As	As	As
R	R	R	R
D	D	D	D
V	V	V	V
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7

   On tire une carte d'un jeu de 32 cartes et on appelle :

   - C l'événement « la carte tirée est un cœur (♡) »
   - F l'événement « la carte tirée est une figure (A, R, D, V) »

   Décrire chaque événement par une phrase et préciser son cardinal :

   $C \cap F =$« $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ »$|C \cap F| = \ldots\ldots$

   $C \cup F =$« $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ »$|C \cup F| = \ldots\ldots$

   $\overline{C} =$« $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ »$|\overline{C}| = \ldots\ldots$

   $\overline{C} \cap F =$« $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ »$|\overline{C} \cap F| = \ldots\ldots$

   $\overline{C \cup F} =$« $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ »$|\overline{C \cup F}| = \ldots\ldots$

5. Deux épidémies sévissent en même temps dans un lycée, la gastro-entérite et un rhume.

   On choisit un élève au hasard et on nomme:

   - G l'événement « l'élève a la gastro-entérite »
   - R l'événement « l'élève a un rhume »

   Décrire à l'aide de G, R, $\overline{G}$, $\overline{R}$, $\cap$ et $\cup$ chacun des événements suivants :

   « l'élève a la gastro-entérite et le rhume »= ....

   « l'élève a le rhume mais pas la gastro-entérite »= ....

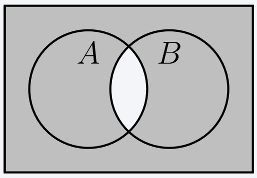
   « l'élève a au moins une des deux maladies »= ....

   « l'élève n'a aucune des deux maladies »= ....

Propriétés 13.3 — Les relations de *de Morgan*.

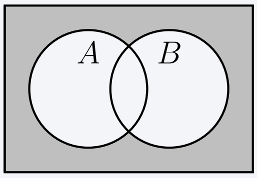
(i) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Les issues qui ne réalisent pas simultanément « A ET B » sont celles qui ne réalisent pas A OU ne réalisent pas B.

Ω 

(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Les issues qui ne réalisent pas « A OU B » sont celles qui simultanément ne réalisent pas A ET ne réalisent pas B.

Ω 

Exercice 2

On considère l'expérience aléatoire ou un élève présente une excuse pour un devoir non rendu.

Soit les événements $A =$« l'élève dit la vérité » et $B =$ « le professeur accuse l'élève de mentir ».

1. Énumérer les issues possibles de cette expérience aléatoire.

   $\Omega =$...

2. Traduisez à l'aide de A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\cap$ et $\cup$ chacun des événements suivants :

   .... = « l'élève dit la vérité et le professeur l'accuse à tort ».

   .... = « l'élève ment ».

   .... = « l'élève dit la vérité ou le professeur le croit ».

3. Décrire les événements suivants par une phrase :

   $\overline{A} \cup B =$ ....

   $\overline{A \cup B} =$ ....

   $\overline{A \cap B} =$ ....

   $\overline{\overline{A}} =$ ....

Exercice 3

Un docteur expérimente un nouveau traitement thérapeutique à des malades atteints de cancer. Ω désigne l'ensemble des patients. Soit les événements :

— $A =$ « le patient est vivant »,

— $B =$ « le patient a suivi le traitement »

— $C =$ « le patient réside en ville »

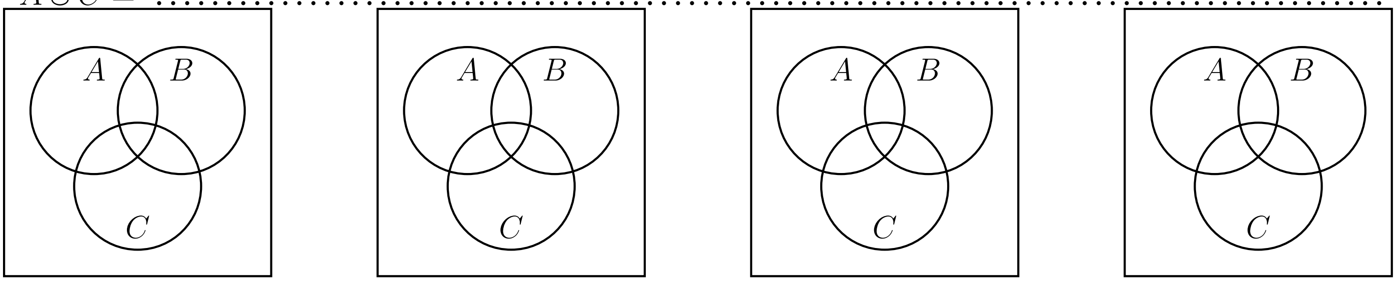
1. Énoncer puis représenter les évenements suivants dans les 4 premiers diagrammes de Venn :

   $A \cap B =$ ....

   $A \cap \overline{C} =$ ....

   $A \cap \overline{B} \cap C =$ ....

   $A \cup C =$ ....



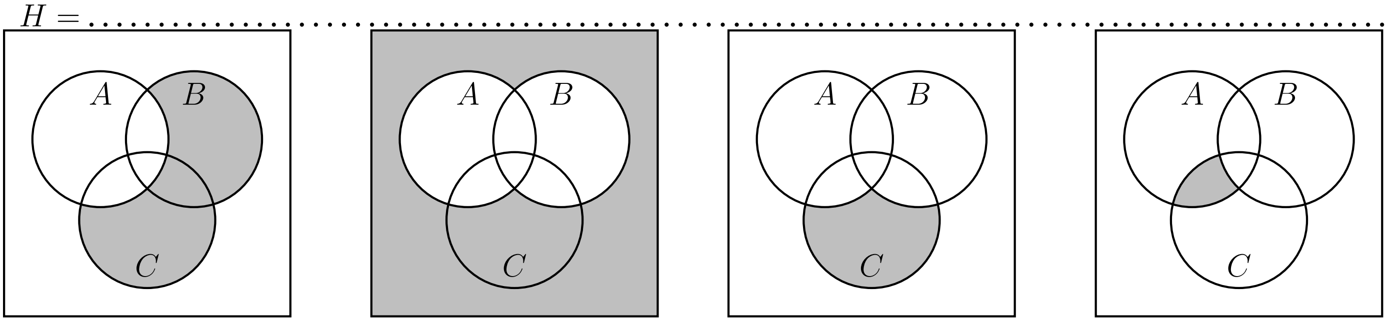
2. Pour chaque diagramme de Venn, donnez la notation correspondant à la partie colorée et énoncez les événements. Plusieurs écritures sont possibles.

   $E =$ ....

   $F =$ ....

   $G =$ ....

   $H =$ ....



13.5.1 Exercices : utiliser les propriétés des lois de probabilités

Exercice 4

On lance un dé cubique pipé. Le tableau ci-contre représente la loi de probabilité de cette expérience.

1. Calculer $P(6)$: ....
2. Calculer la probabilités des événements suivants (écrire $P(..)$ =...)

   $A =$ « La face obtenue est paire »;...

   $B =$ « la face obtenue est supérieur ou égale à 5 »...

Exercice 5

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\omega)$	0.1	0,15	0,2		0,3	0,05

On lance un dé cubique pipé. Le tableau ci-contre représente la loi de probabilité de cette expérience.

1. Calculer $P(4)$
2. Calculer la probabilités de l'événement $A =$ « La face obtenue est un carré parfait »
3. On lance ce dé 50 fois. Estimer le nombre d'observation de l'événement A.

Exercice 6

ω	1	2	3	4	5
$P(\omega)$	$3a$	$2a$	$0,01$	a	$3a$

On considère la loi de probabilité ci-contre ($0 < a < 1$) :

1. Déterminer la valeur de a.
2. En déduire la probabilité d'obtenir un nombre premier.
3. On répète l'expérience 20 fois. Estimer le nombre d'observation d'un nombre premier.

Exercice 7 — concepts. Complétez

1. $P(\Omega) =$ .... L'événement impossible est noté .... Sa probabilité est ....
2. Deux événements A et B sont incompatibles lorsque ....
3. Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = \ldots\ldots + \ldots\ldots$ et $P(A \cap B) =$ ....
4. $\overline{B}$ est l'événement .... $P(\overline{B}) = 1-$................................
5. Robin atteint sa cible avec une probabilité de $0,7$. La probabilité qu'il la rate est ....
6. Pour tout événements A et B : on peut écrire $P(A \cup B) = \ldots\ldots + \ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots$
7. Pour tout événements A et B : $P(A \cap B) = \ldots\ldots + \ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots$
8. Les événements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont ...., et $P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) =$...............
9. Pour tout événements A et B : $P(B) - P(\ldots\ldots\ldots) = P(A \cap B)$

■ **Exemple 13.6 — utiliser les propriétés des lois de probabilité.**

1. $P(A) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.2$ et $P(B) = 0.5$. Déterminer $P(A \cup B)$
2. $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,5$, $P(A \cap B) = 0,3$. Déterminer $P(\overline{A} \cup B)$.

solution. 1. $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$P(A \cup B) = P(\dots\dots) + P(\dots\dots) - P(\dots\dots) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2. $P(\overline{A}) = 1 - P(\dots\dots) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$P(\overline{A} \cap B) = P(\dots\dots\dots) - P(\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$P(\overline{A} \cup B) = P(\dots\dots) + P(\dots\dots) - P(\dots\dots) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

■

Exercice 8

A et B sont deux événements incompatibles tel que $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,22$.

Déterminer: $P\left(\overline{A}\right)$, $P\left(\overline{B}\right)$ et $P\left(A \cup B\right)$.

Exercice 9

Soit S et T deux événements tel que : $P(S) = 0,5$, $P(T) = 0,6$, $P(S \cup T) = 0,9$.

Déterminer $P\left(S \cap T\right)$, $P\left(\overline{S \cup T}\right)$ et $P\left(\overline{S \cap T}\right)$.

Exercice 10 — Entrainement formules.

1) $P(E) = 0,34$, $P(E \cup F) = 0,65$ et $P(E \cap F) = 0,23$. Calculer $P(F)$.
2) $P(E) = 0.3$, $P(F) = 0.6$ et $P(E \cup F) = 0.8$. Calculer $P(E \cap F)$
3) $P(E) = 0,35$, $P(\overline{F}) = 0,4$ et $P(E \cap F) = 0,1$. Calculer $P(F)$ puis $P(E \cup F)$
4) $P(E) = 0.3$, $P(\overline{F}) = 0.65$ et $P(E \cap F) = 0.2$. Calculer $P(E \cup F)$.
5) $P(E) = 0,5$, $P(F) = 0,24$ et $P(E \cap F) = 0,1$. Calculer $P(\overline{E \cup F})$.
6) $P(\overline{E}) = 0,7$; $P(E \cap F) = 0,2$ et $P(E \cup F) = 0,7$. Calculer $P(\overline{F})$.

Exercice 11

Expliquer pourquoi il n'existe pas d'événements V et F tel que $P(V) = 0,4$, $P(F) = 0,3$ et $P(V \cup F) = 0,8$.

Exercice 12

Expliquer pourquoi il n'existe pas d'événements V et F tel que $P(V) = 0,6$, $P(F) = 0,4$ et $P(V \cap F) = 0,5$.

13.5.2 Exercices : modéliser pour déterminer une loi de probabilité

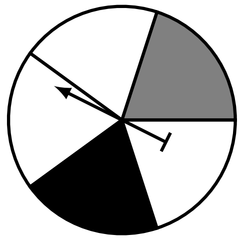
Exercice 13 — **paradoxe des 3 bancs.**

Dans la cours du lycée, il y a trois bancs à deux places. Ana est déjà assise pour prendre son déjeuner. Bertrand va s'asseoir au hasard. Tasha affirme que la probabilité qu'ils se retrouvent sur le même banc est de $\frac{1}{3}$. Naomi pense plutôt que cette probabilité est de $\frac{1}{5}$

1. Surligner le passage qui suggère une situation d'équiprobabilité.
2. Expliquer pourquoi Tasha et Naomi diffèrent sur l'interprétation de l'équiprobabilité.

> Pour les exercices qui suivent, surligner les passages qui suggèrent l'équiprobabilité, et prendre soin de relever les issues équiprobables en question.

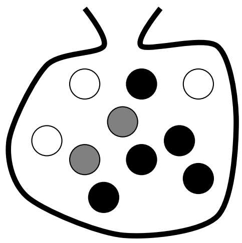
Exercice 14



On fait tourner une aiguille, elle pointe au hasard sur des 3 couleurs. Identifier les issues et compléter le tableau de la loi de probabilité.

ω				**Total**
$P(\omega)$				

Exercice 15

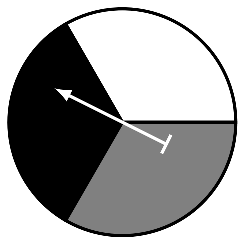


Le sac représenté contient des boules blanches, grises et noires indiscernables au toucher. On pioche une urne au hasard et on note sa couleur. Identifier les issues possibles et compléter le tableau de la loi de probabilité.

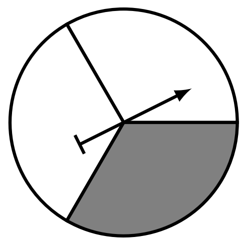
ω				**Total**
$P(\omega)$				

Exercice 16

On fait tourner deux aiguilles et on note le couple de couleurs obtenues. On suppose que les aiguilles s'arrètent au hasard sur les secteurs de même taille.



Aiguille n° 1



Aiguille n° 2

1. Complète le diagramme d'univers de cette expérience :

		issues équiprobables aiguille n° 2		
		Blanc		
issues équiprobables aiguille n° 1	Noir	(N ; B)		

2. P(« obtenir deux couleurs identiques ») = ...
3. P(« obtenir deux couleurs différentes ») = ...

Exercice 17

On lance un jeton et un dé cubique équilibrés.

Compléter le diagramme de l'univers des issues possibles et déterminer :

$P($« obtenir face ou un diviseur de 12 »$) = ..$

		issues équiprobables du dé					
		1					
issues équiprobables de la pièce	Pile	P1					

Exercice 18 — Avec deux dés.

On lance simultanément un dé Noir et un dé Bleu (cubiques) et on note la somme S des deux nombres obtenus. On cherche la loi de probabilité des sommes possibles.

1. Complète le tableau à double entrée ci-contre avec les sommes obtenues.
2. Sachant que les deux dés sont équilibrés, en déduire la loi de probabilité des sommes obtenues :

		Dé n° 2					
		1	2	3	4	5	6
Dé n° 1	1						
	2						
	3						
	4			7			
	5						
	6						

k	2											Total
$P(S=k)$												

3. Représenter dans le graphique ci-dessous la loi de probabilité de la somme.
4. Déterminer les probabilités des événements suivants (ÉCRIRE CLAIREMENT $P(\ldots) = \ldots$) :

   $A =$ « somme égale à 4 » ....

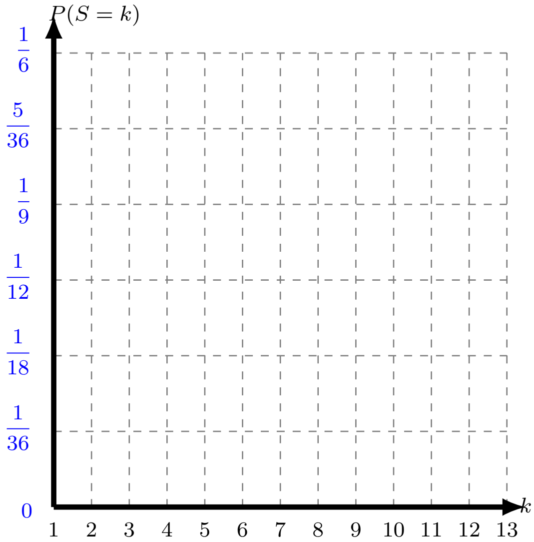
   $B =$ « somme égale à 12 » ....

   $C =$ « somme supérieure ou égale à 7 » ....

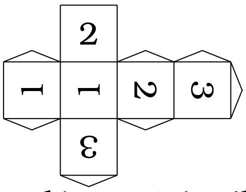
   $D =$ « somme strictement inférieure à 4 » ....

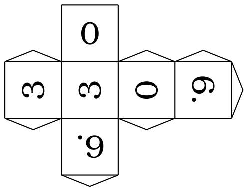
   $E =$ « somme paire » ....

   $F =$ « somme égale à 7 et produit égal à 12 » ....



Exercice 19

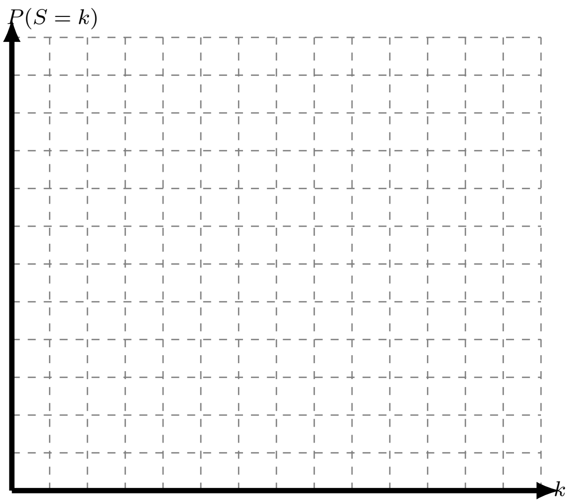
On lance un dé cubique bleu de patron 

et un rouge 

et on note la somme des faces. On suppose que les dés sont équilibrés.

1. Compléter le diagramme d'univers de l'expérience aléatoire.
2. Déduire la loi de probabilité de la somme en complétant le tableau.
3. Représenter dans le graphique la loi de probabilité de la somme. À vous de préciser l'échelle verticale.

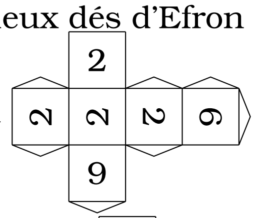
		Dé nº 2
Dé nº 1		

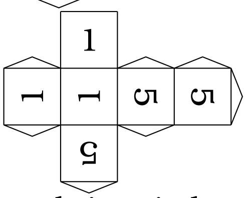


k												Total
$P(S = k)$												

Exercice 20

On lance deux dés d'Efron :

— un bleu 

— et un vert 

puis on note celui qui donne le plus grand nombre.

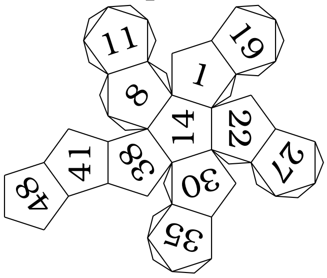
Compléter le diagramme d'univers et déterminer la probabilité que le dé Bleu l'emporte.

		Dé nº 2
Dé nº 1		

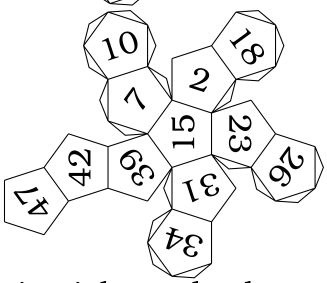
Exercice 21

On lance deux dés équilibrés à 12 faces :

— un noir



— et un rouge



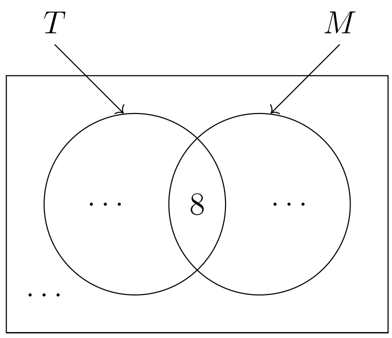
puis on note celui qui donne le plus grand nombre.

		Dé n° 2
Dé n° 1		

Compléter le diagramme d'univers et déduire que la probabilité que le dé Noir l'emporte est $\frac{1}{2}$.

Exercice 22 — modéliser avec des diagrammes de Venn ou un tableau croisé des effectifs.

Sur 60 élèves d'un lycée : 8 font le club Théatre et le club Musique, 6 font club Théatre mais pas Musique et 19 font le club Musique.



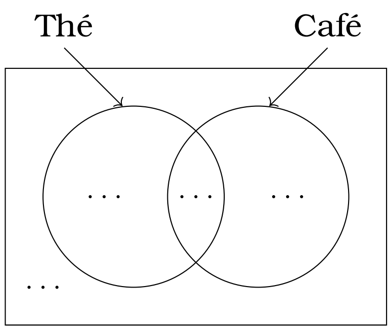
$\text{Card}(\Omega) = 60$

	T	$\overline{T}$	**Total**
M	**8**		
$\overline{M}$			
Total			**60**

1. Compléter le tableau croisé des effectifs et le diagramme de Venn
2. On choisit un élève au hasard parmi ceux du lycée. Décrire l'événement $\overline{M} \cap \overline{T}$ et déterminer sa probabilité.

Exercice 23

Sur 85 personnes interrogées sur leur préférences entre café et thé : 18 n'aiment aucune des boissons, 29 aiment le thé mais pas le café et 22 aiment le café, mais pas le thé.



$\text{Card}(\Omega) = \ldots$

	T	$\overline{T}$	**Total**
C			
$\overline{C}$			
Total			85

Soit les événements : $C =$« l'individu aime le café »et $T =$ « l'individu aime le thé ».

1. Compléter le tableau effectifs croisés et le diagramme de Venn

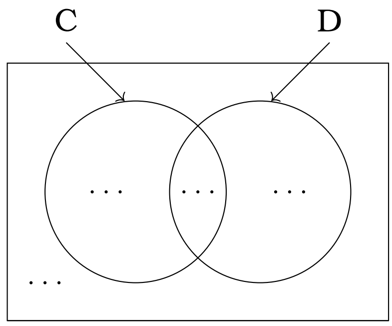
2. On choisit un individu au hasard. Donner la probabilité qu'il aime le café et le thé.

Exercice 24

Sur 100 personnes interrogées : 23 affirment posséder un chat, 31 affirment posséder un chien et 56 affirment posséder ni chat ni chien.

Soit les événements C =« l'individu a un chat »et D = « l'individu a un chien ».

1) Compléter le diagramme de Venn et le tableau croisé des effectifs.
2) On choisit un individu au hasard. Donner la probabilité qu'il a un chien et un chat ? (ÉCRIRE)$P(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$)



$\text{Card}(\Omega) = \ldots$

	D	$\overline{D}$	**Total**
C			
$\overline{C}$			
Total			

Exercice 25

Afin de mieux connaître sa clientèle, une station de sports d'hiver a effectué une enquête auprès de 250 skieurs. Voici la synthèse des réponses au sondage:

- deux tiers des personnes qui viennent tous les week-ends possèdent leur matériel;
- la moitié des personnes venant deux semaines par an possèdent également leur matériel;
- 44% des personnes interrogées louent sur place.

On considère les événements suivants :

- M: « la personne possède son matériel »;
- L : « la personne loue ses skis sur place »;
- A : « la personne loue ses skis ailleurs »;
- S : « la personne vient une semaine par an »;
- W : « la personne vient tous les week-ends »;
- Q : « la personne vient deux semaines par an ».

	M	L	A	Total
S	25			
W			5	30
Q		30		100
Total				250

1. Compléter le tableau ci-contre présentant la synthèse des réponses.
2. On choisit au hasard un client parmi les 250 personnes. Déterminer les probabilités :

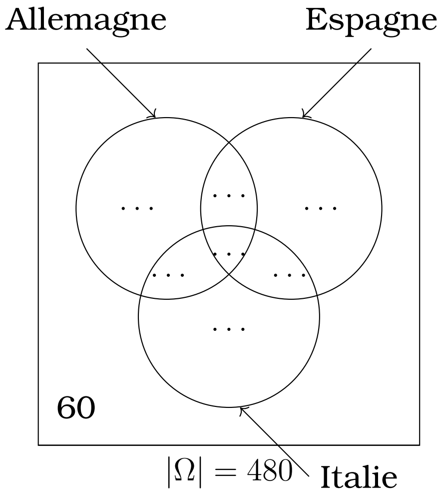
   a) $P(Q) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $P(L) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $P(\overline{M}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   b) $P(Q \cap L) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $P(Q \cup L) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $P(\overline{Q} \cap L) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 26

Dans un établissement scolaire, on a interrogé 480 élèves de Seconde sur leur séjour en Espagne, en Italie et en Allemagne :

- 220 élèves ont séjourné en Allemagne ;
- 218 élèves en Italie et 217 en Espagne ;
- 105 ont séjourné en Italie et en Espagne ;
- 100 ont séjourné en Italie et en Allemagne
- 93 ont séjourné en Espagne et en Allemagne ;
- 60 élèves n'ont séjourné dans aucun des 3 pays.



1. Compléter le diagramme de Venn.
2. On interrroge au hasard un élève. Quelle est la probabilité qu'il a séjourné dans les 3 pays ?

> C'est à vous de décider si l'expérience aléatoire est modélisable par un tableau croisé des effectifs ou diagramme de Venn

Exercice 27

Un nouveau test antidopage est testé sur 36 athlètes. On sait que 9 athlètes sont dopés et que 6 ont été testés positifs. De plus, 13 athlètes sont soit dopés soit testés positifs.

On considère les événements $D =$« l'athlète est dopé » et $T^+ =$« l'athlète est testé positif ». Définir par une phrase les événements $D \cap \overline{T^+}$ (Faux négatif) et $\overline{D} \cap T^+$ (Faux positif) et déterminer leur probabilités.

Exercice 28 — Des groupes de spécialité.

Dans une classe de 2$^{\text{nde}}$, il y a 35 élèves :

- 19 ont pris l'enseignement d'exploration « Méthodes et pratiques scientifiques », les autres ont pris l'enseignement d'exploration « Littérature et société » ;
- il y a 15 garçons ;
- 12 filles ont pris l'enseignement d'exploration « Méthodes et pratiques scientifiques ».

On choisit un élève au hasard dans la classe, chaque élève ayant la même probabilité d'être choisi, et on définit les évènements suivants :

- M : l'élève choisi a pris l'enseignement d'exploration « Méthodes et pratiques scientifiques » ;
- G : l'élève choisi est un garçon.

1. Déterminer les probabilités des évènements M et G.
2. Définir par une phrase les évènements $M \cap G$, $M \cup G$ et $\overline{M} \cap G$ et déterminer leurs probabilités.

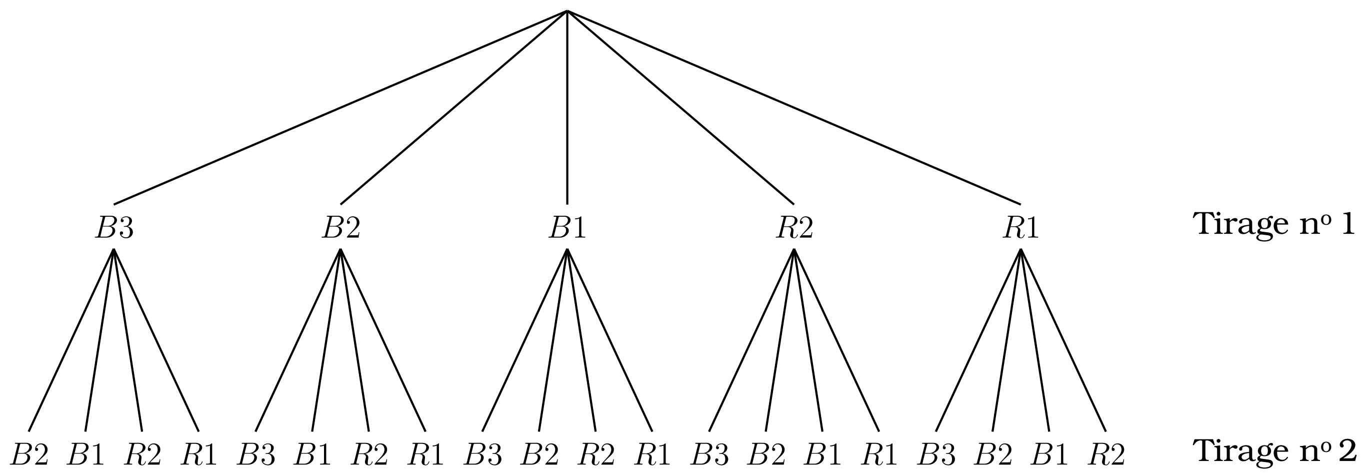
■ **Exemple 13.7 — Modéliser à l'aide d'un arbre de dénombrement.**

Une boite opaque contient 2 rubans rouges et 3 rubans bleus. On tire au hasard 1 premier ruban de la boite sans regarder (et sans le remettre), puis un second, et on note les couleurs de chaque.

On compte 4 issues possibles :

- $BB =$ « tirer deux rubans bleus »
- $RR =$ « tirer deux rubans rouges »
- $BR =$ « tirer un ruban bleu puis un rouge »
- $RB =$ « tirer un ruban rouge puis un bleu »

Ces issues ne sont pas équiprobbles ! Il y a plus de rubans bleus que de rouges !)



Notez que :

— L'expérience aléatoire est constituée de 2 expériences aléatoires élémentaires (1^er^tirage ...).

— Chaque niveau correspond à une expérience aléatoire élémentaire.

— Les bifurcations à chaque niveau correspondent aux issues possibles d'une l'expérience élémentaire.

— Chaque chemin le long de l'arbre correspond à une issue. Le chemin $R1B3$ correspond à l'issue « $R1$ au tirage nº 1 PUIS $B3$ au tirage nº 2 ».

— Les chemins différents sont des issues *incompatibles*.

— Les issues sont *équiprobables si le nombre de bifurcations à chaque niveau est le même pour tous les noeuds*. Ici $\frac{1}{20}$.

$P(RR) = P(R1R2) + P(R2R1) = \dfrac{2}{20}$,

$P(BR) = P(\{R1B1, R2B1, R1B2, R2B2, R1B3, R2B3\}) = \dfrac{6}{20}$.

$P(RB) =$ ....

$P(BB) =$ ....

$P($un ruban rouge est tiré au premier tirage$) =$ ....

$P($un ruban rouge est tiré au second tirage$) =$ ....

Exercice 29

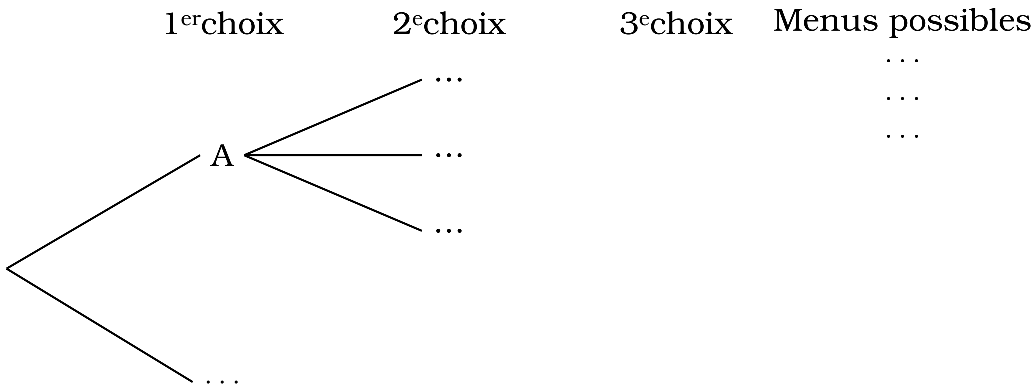
On reprend l'exemple précédent avec une boite opaque contenant 2 rubans rouges, 3 rubans bleus, mais cette fois on remet dans la boite le premier ruban tiré.

1. Comment est modifié l'arbre précédent ? Rajouter en rouge les branches supplémentaires.
2. Déduire la nouvelle valeur de $P(RR) =$ ....
3. Quelle est la probabilité de tirer aucun ruban rouge ? ....
4. $P($un ruban rouge est tiré au second tirage$) =$ ....

Exercice 30 — le menu.

Au restaurant scolaire le menu se compose forcement d'une entrée, d'un plat et d'un dessert. Les élèves doivent choisir une entrée parmi Artichaut (A) ou Betterave (B), puis choisir un plat parmi Cheval (C), Daube (D) ou Escalope (E) et choisir un dessert parmi Fromage (F) ou Gâteau (G).

1. Compléter l'arbre et identifier tous menus possibles.



2. On choisit un menu au hasard. Déterminez les probabilités :

a) $P(E) =$ ....

b) $P(A \cup F) =$ ....

c) $P(\overline{C}) =$ ....

d) $P(\overline{A} \cap \overline{F}) =$ ....

Exercice 31 — Garçons ou filles ?.

On s'intérèsse aux familles de trois enfants, sans jumeaux, et en ne tenant compte que du sexe des enfants. On suppose qu'à chacune des 3 naissances, les issues $F =$ « l'enfant est une fille » ou $G =$ « l'enfant est un garçon » sont équiprobables.

1. Construire l'arbre des probabilités correspondant à la situation décrite (famille de 3 enfants). Identifier les issues possibles.
2. Déterminer, sans justifier, la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) A : « la famille n'a aucune fille ».

b) B : « la famille a exactement deux filles ».

c) C : « la famille a au moins deux filles ».

d) D : « la famille a une unique fille ».

Exercice 32

On lance un jeton équilibré 4 fois d'affilée.

1. Construire l'arbre des probabilités correspondant à quatre lancers.
2. Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir au moins 3 fois Pile ».

Exercice 33 — Tirage successif sans remise.

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes, on note sa couleur (Cœur, Carreau, Pique ou Trèfle), sans la remettre dans le jeu avant d'en tirer une seconde.

1. Si on représente la situation par un arbre de probabilité, combien d'issues possibles devront apparaitre ?
2. Sans représenter l'arbre des isues, donner les probabilités suivantes :

a) $P($tirer 2 cœurs$)$

b) $P($ne pas tirer de cœur$)$

c) $P($tirer deux fois la même carte$)$

d) $P($tirer deux cartes différentes$)$

Exercice 34 — pause thé.

Un singe, un penguin et un mathématicien vont un salon de thé pour déguster leur cake favori. Chacun laisse son chapeau à l'entrée. En repartant, ils mettent les chapeaux aléatoirement.

1. Construire l'arbre des probabilités correspondant à trois choix successifs d'un chapeau.
2. Quelle est la probabilité qu'aucun des trois, ne soit reparti avec son chapeau de départ ?

13.6 Exercices : solutions et éléments de réponse

solution de l'exercice 1. ■

solution de l'exercice 2. ■

solution de l'exercice 3. ■

solution de l'exercice 4. ■

solution de l'exercice 5. ■

solution de l'exercice 6. ■

solution de l'exercice 7. ■

solution de l'exercice 8. ■

solution de l'exercice 9. ■

solution de l'exercice 10. ■

solution de l'exercice 11. ■

solution de l'exercice 12. ■

solution de l'exercice 14. ■

solution de l'exercice 15. ■

solution de l'exercice 16. ■

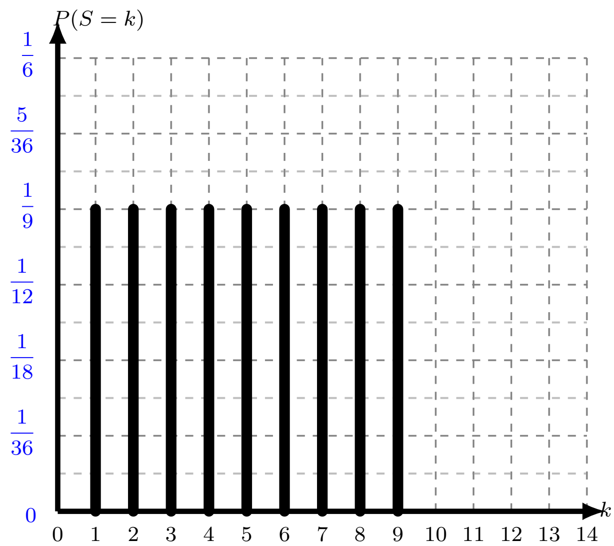
solution de l'exercice 17. ■

solution de l'exercice 18. ■

solution de l'exercice 19.

Rouge et Bleu

		Dé Bleu					
		1	2	3			
Dé Red	0	1	2	3			
	3	4	5	6			
	6	7	8	9			



solution de l'exercice 20.

solution de l'exercice 21.

solution de l'exercice 22.

solution de l'exercice 23.

solution de l'exercice 24.

solution de l'exercice 25.

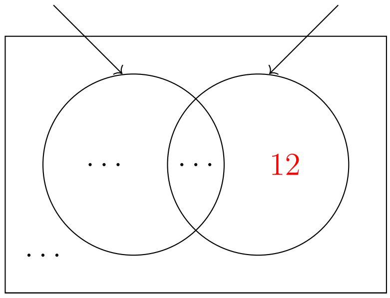
solution de l'exercice 26.

solution de l'exercice 27.

Le choix vous est laissé de trouver les effectifs des 4 sous-catégories. Il, elle peut s'aider d'un tableau double-entrée, ou d'un diagramme de Venn (et même d'un arbre des effectifs, plus rare en France). En rouge les valeurs provenant de la lecture directe de l'énoncé.

	G	$\overline{G}$	**Total**
M	7	12	19
$\overline{M}$	8	8	16
Total	15	20	35

G; Card$(G) = 15$ M; Card$(M) = 19$



Card$(\Omega) = 35$

■

solution de l'exercice 28.

Vous devez avant de répondre aux questions identifier pour l'expérience aléatoire "choisir au hasard un élève dans la classe"

— les issues : 35 élèves. Donc Card$(\Omega) = 35$.

— les issues sont équiprobables, convention lycée avec le mot "au hasard".

1) $P(M) = \dfrac{\text{Card}(M)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{19}{35}$.

2) $P(M) = \dfrac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{15}{35}$.

3) $M \cap G$= « l'élève choisi est un garçon ET a pris méthodes scientifiques ».

$P(M \cap G) = \dfrac{\text{Card}(M \cap G)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{7}{35}$.

4) $M \cup G$= « l'élève choisi est un garçon OU a pris méthodes scientifiques ».

$P(M \cup G) = \dfrac{\text{Card}(M \cup G)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{7+12+8}{35} = \dfrac{27}{35}$.

5) $\overline{M} \cap G$= « l'élève choisi est un garçon ET n'a pas pris méthodes scientifiques ».

$P(\overline{M} \cap G) = \dfrac{\text{Card}(\overline{M} \cap G)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{8}{35} = \dfrac{8}{35}$.

■

solution de l'exercice 29.

■

solution de l'exercice 30.

■

solution de l'exercice 31.

■

solution de l'exercice 32.

■

solution de l'exercice 33.

■

solution de l'exercice 34.

■

13.7 B.A.R. de Maths : lois de probabilités

Problème 1 — entrainement.

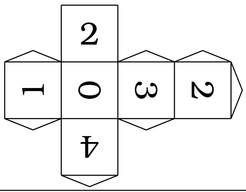
On lance deux dés et on note la somme des faces. On suppose que les dés sont équilibrés.

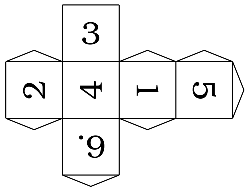
Pour chaque paire :

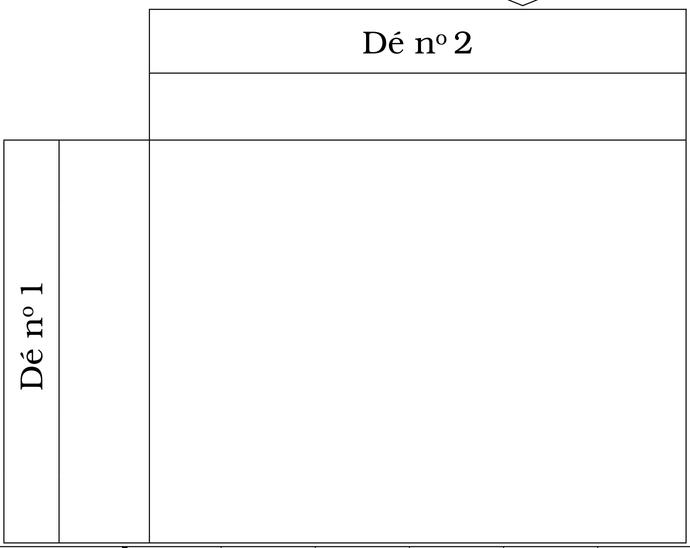
— Compléter le diagramme d'univers de l'expérience aléatoire.

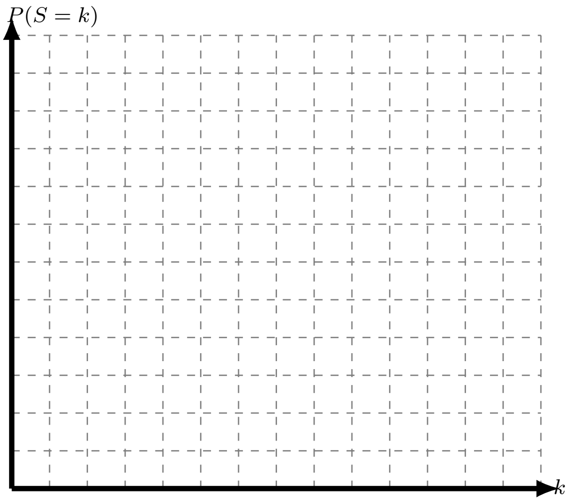
— Déduire la loi de probabilité de la somme en complétant le tableau.

— Représenter dans le graphique la loi de probabilité de la somme. À vous de préciser l'échelle verticale.

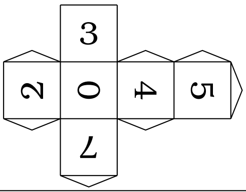
1. dé cubique rouge d6 de patron 

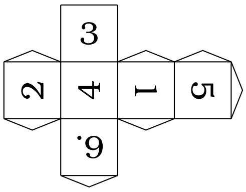
et un noir d6 



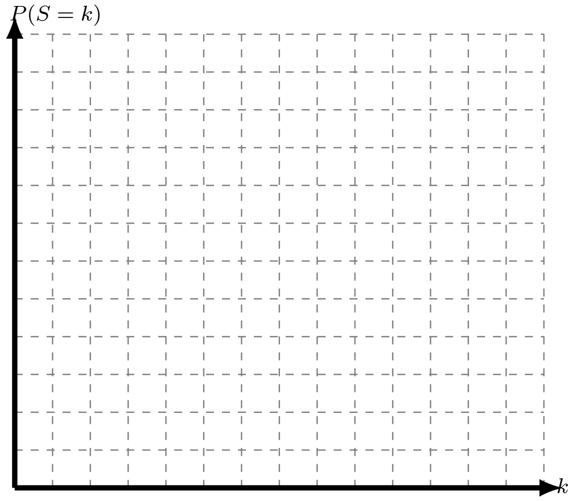


k												Total
$P(S = k)$												

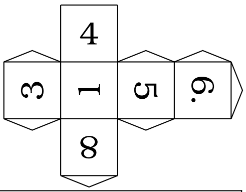
2. dé cubique bleu d6 de patron 

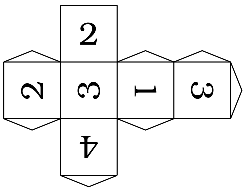
et un noir d6 

		Dé n° 2
Dé n° 1		

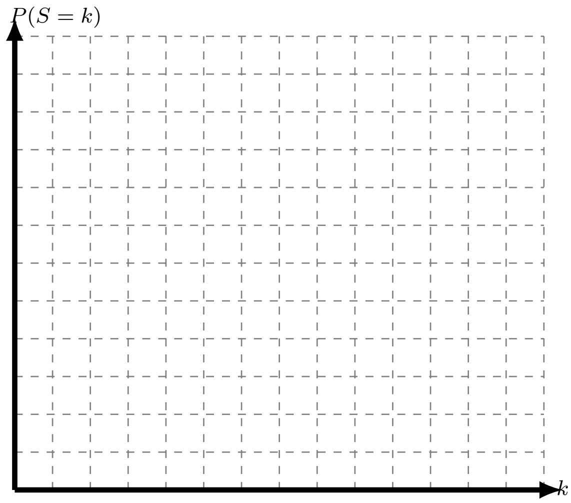


k											Total
$P(S=k)$											

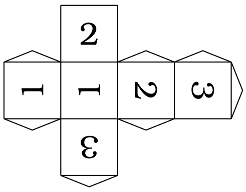
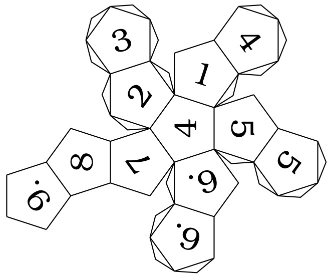
3. dés de Sicherman d6 de patron 

et un d6 

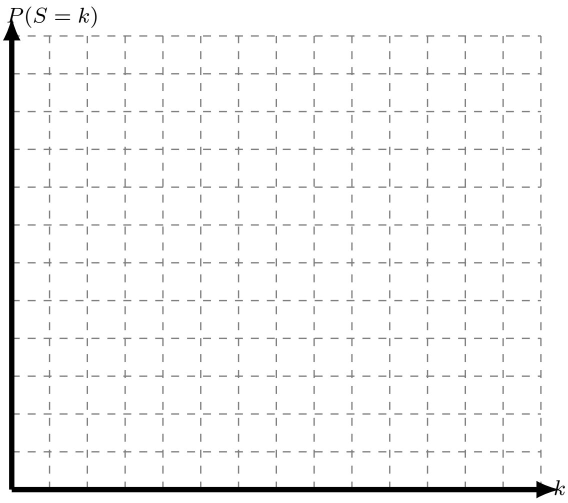
		Dé n° 2
Dé n° 1		



k											Total
$P(S=k)$											

4. dé cubique noir d6 de patron  et un noir d12 

		Dé n° 2
Dé n° 1		



k											Total
$P(S=k)$											

Problème 2 — Bataille à 3 dés : Dés d'Oskar.

Dans une bataille de dés à 3 joueurs, chacun des joueurs A, B et C choisit un dé. Le joueur C est le dernier à choisir. Le vainqueur d'une manche est celui qui obtient le plus grand résultat. Oskar van Deventer, créateur néerlandais de puzzles, a inventé un jeu de 7 dés bien particulier : quel que soit le choix des joueurs A et B, le joueur C peut choisir un dé qui a plus de chance de donner un plus grand résultat que les deux autres.

1. Relevez les faces des 7 dés :
   - Blanc : ....
   - Ivoire : ....
   - Jaune : ....
   - Vert : ....
   - Rouge : ....
   - Bleu : ....
   - Marron : ....
2. Le joueur A choisit le dé ivoire, et B choisit le dé Marron. À l'aide des tableaux double entrée suivants, montrer que si le joueur C choisit le dé Blanc, il aura plus de chance d'obtenir un plus grand résultat que chacun des joueur A et B.

		Dé
Dé		

		Dé
Dé		

bat ; bat ;

3. En utilisant les diagrammes pour comparer les différents dés, élaborer une stratégie du dé à choisir par le joueur C selon selon les dés choisis par les joueurs A et B.

		Dé
Dé		

		Dé
Dé		

		Dé
Dé		

bat ; bat ; bat

		Dé
Dé		

		Dé
Dé		

		Dé
Dé		

bat ; bat ; bat

		Dé
Dé		

		Dé
Dé		

		Dé
Dé		

bat ; bat ; bat

		Dé
Dé		

		Dé
Dé		

		Dé
Dé		

bat ; bat ; bat

		Dé
Dé		

		Dé
Dé		

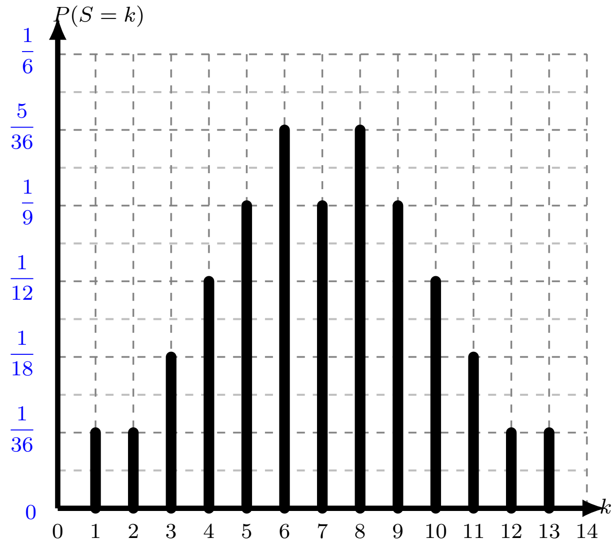
		Dé
Dé		

bat ; bat ; bat

solution du problème 1.

Bleu et Noir

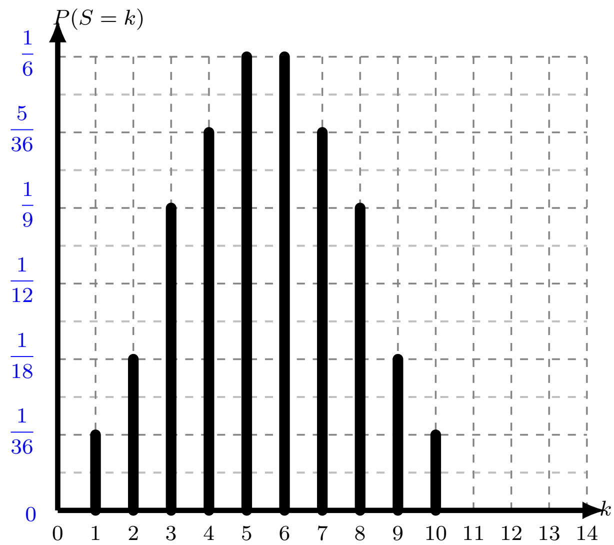
		Dé Bleu					
		0	2	3	4	5	7
Dé Noir	1	1	3	4	5	6	8
	2	2	4	5	6	7	9
	3	3	5	6	7	8	10
	4	4	6	7	8	9	11
	5	5	7	8	9	10	12
	6	6	8	9	10	11	13



k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Total
$P(S=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36}=1$

Rouge et Noir

		Dé Rouge					
		0	1	2	2	3	4
Dé Noir	1	1	2	3	3	4	5
	2	2	3	4	4	5	6
	3	3	4	5	5	6	7
	4	4	5	6	6	7	8
	5	5	6	7	7	8	9
	6	6	7	8	8	9	10

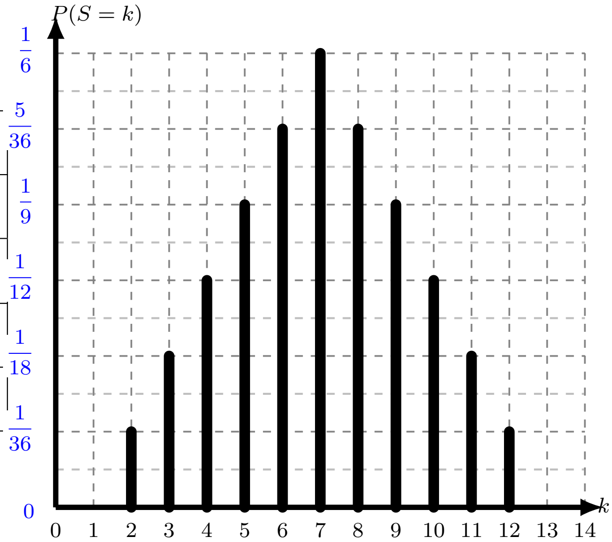


k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Total
$P(S=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$				$\frac{36}{36}=1$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Total
$P(S=k)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$					$\frac{36}{36}=1$

d3 standard et d12 non standard (même graphique et loi de probabilité pour les dés de Sicherman)

		Dé d12											
		1	2	3	4	4	5	5	6	6	7	8	9
Dé d3	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	9	10
	2	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	10	11
	3	4	5	6	7	7	8	8	9	9	10	11	12



■

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Total
$P(S=k)$		$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$		$\frac{36}{36}=1$