Chapitre

Équations 7

7.1 Vocabulaire

Une **équation à une inconnue** est une égalité dans laquelle apparaît une ou plusieurs lettres.

Une solution de l'équation est une valeur de la ou les inconnues pour lesquelles l'égalité est vraie.

■ **Exemple 7.1**

Soit l'équation $2x + 3 = x - 5$ d'inconnue x.

a) $x = 0$ n'est pas solution de l'équation car l'égalité $2 \times 0 + 3 = 0 - 5$ est fausse

b) $x = -8$ est une solution de l'équation, car $2 \times (-8) + 3 = (-8) - 5$ est vraie.

■ **Exemple 7.2**

Soit l'équation $2x + 3y = 15$ d'inconnues x et y.

a) Le couple $x = 6$ et $y = 1$ est un couple solution car $2 \times 6 + 3 \times 1 = 15$.

b) Le couple $x = 1$ et $y = 6$ n'est pas un couple solution car $2 \times 1 + 3 \times 6 \neq 15$.

Définition 7.1 Résoudre une équation dans $\mathbb{R}$ c'est trouver toutes les valeurs réelles des inconnues qui rendent l'égalité vraie.

On parle de résolution dans $\mathbb{N}$ si on cherche uniquement les valeurs entières.

Exemple 7.3

a) L'équation $3x = 1$ inconnue x n'admet pas de solutions entières.

b) L'équation $x^2 - 2y^2 = 0$ d'inconnues x et y n'admet pas de solutions entières.

c) $x = 3$ et $y = 2$ est un couple d'entiers solution de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ d'inconnues x et y.

Définition 7.2 Deux équations sont dites **équivalentes** (symbole $\Longleftrightarrow$) si elles ont le même ensemble de solutions c.à.d elles sont vraies pour les mêmes valeurs de x.

Exemple 7.4

a) L'équations $x^2 = x$ d'inconnue x a pour solutions $x = 0$ et 1.
L'équation $2x = x + 1$ d'inconnue x a une solution unique $x = 1$.
Les équations ne sont pas équivalentes.

b) Les équations $2x = x+1$ et $4x = x+3$ d'inconnues x ont pour seule solution $x = 1$. Elles sont équivalentes.

7.1.1 Exercices résolution d'équations en isolant l'inconnue

Exercice 1 — Vérifier si une valeur est solution d'une équation à 1 inconnue.

	Vrai	Faux
1/ 2 est une solution de l'équation $2x+1=5$ d'inconnue x	☐	☐
2/ 2 est la solution de l'équation $2x+1=5$ d'inconnue x	☐	☐
3/ 3 est une solution de l'équation $x^2=3x$ d'inconnue x	☐	☐
4/ 3 est la solution de l'équation $x^2=3x$ d'inconnue x	☐	☐

Exercice 2 — Vérifier si un couple est solution d'une équation à 2 inconnues.

	Vrai	Faux
1/ $x=-3$ et $y=3$ est couple solution de l'équation $6x+3y=-2$ d'inconnue $(x;y)$	☐	☐
2/ $x=0$ et $y=-1$ est couple solution de l'équation $-9x-7y=-7$ d'inconnue $(x;y)$	☐	☐
3/ $x=2$ et $y=5$ est un couple solution de $(x-2)(y+5)=0$ d'inconnue $(x;y)$	☐	☐
4/ $x=3$ et $y=-5$ est un couple solution de $(x-2)(y+5)=0$ d'inconnue $(x;y)$	☐	☐
5/ $x=3$ et $y=\frac{1}{3}$ est un couple solution de l'équation $xy=1$ d'inconnue $(x;y)$	☐	☐

■ **Exemple 7.5** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

$7x=-25$ $\qquad -\dfrac{3}{4}x=13$ $\qquad -3x-9=0$ $\qquad \dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{6}$

Exercice 3 — résoudre en 1 étape. Même consignes

$(E_1)\ 6x=-42$ | $(E_3)\ -\frac{3}{5}x=-60$ | $(E_5)\ \frac{x}{9}=-18$ | $(E_7)\ 24=\frac{x}{3}$ | $(E_9)\ 42x=0$

$(E_2)\ 24x=-8$ | $(E_4)\ \frac{x}{6}=12$ | $(E_6)\ -x=100$ | $(E_8)\ \frac{3}{4}x=24$ | $(E_{10})\ -\frac{5}{3}x=12$

Exercice 4 — résoudre en 2 étapes. Mêmes consignes

$(E_1)\ 4x-9=0$ | $(E_3)\ -81=-51-3x$ | $(E_5)\ -\frac{2}{9}x+\frac{5}{3}=-2$ | $(E_7)\ -\frac{7}{9}x-\frac{6}{7}=\frac{31}{21}$

$(E_2)\ -10=3x+7$ | $(E_4)\ \frac{2}{7}x-5=12$ | $(E_6)\ -\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}=\frac{1}{6}$ | $(E_8)\ \frac{9}{7}x+\frac{2}{3}=\frac{17}{21}$

■ **Exemple 7.6** Expliquer les erreurs dans les résolutions suivantes

$$
\begin{aligned}
& 2(x+6)-4=8+6x && \text{\textit{On développe le membre de gauche}}\\
\iff\ & 2x+12-4=8+6x && \text{\textit{On simplifie le membre de gauche}}\\
\iff\ & 2x+8=8+6x && \text{\textit{On ajoute -8 aux 2 membres}}\\
\iff\ & 2x=6x && \text{\textit{On divise les 2 membres par x}}\\
\iff\ & 2=6
\end{aligned}
$$

Donc $\mathscr{S}=\emptyset$.

$$
\begin{aligned}
& x(x-1)-3(x-1)=5x-5 && \text{\textit{On factorise les deux membres, facteurs commun } } (x-1)\\
\iff\ & (x-3)(x-1)=5(x-1) && \text{\textit{On divise les deux membres par} } \div(x-1)\\
\iff\ & (x-3)=5 && \text{\textit{On ajoute aux deux membres} } 3\\
\iff\ & x=8
\end{aligned}
$$

Donc $\mathscr{S}=\{8\}$.

> On ne change pas les solutions d'une équation si :
> - on **additionne, soustrait** aux **2 membres** de l'équation une même expression.
> - on **multiplie/divise** les **2 membres** de l'équation par **une même** expression **non nulle**.
> - on **développe, factorise, réduit ...** un des deux membres de l'équation.

■ **Exemple 7.7** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

$4(x+1)=x+7$ $\qquad$ $4(x-1)=-7x+5$

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x:

(E_1) $3(x+5)=x+1$	(E_4) $3(2x-5)=3(x-1)$	(E_7) $-2(3x-6)=3(-2x+4)$
(E_2) $3(x+5)=3(2x+1)$	(E_5) $3(x-5)=-3(2x+1)$	(E_8) $-3(x-5)=4-3(2x-1)$
(E_3) $3(x+5)-3(2x-1)=0$	(E_6) $-3(2x+5)=-3(2x+1)$	(E_9) $-3(2x-1)=x-3(x-5)$

■ **Exemple 7.8** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x:

$\frac{x+1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{9}{2}$ $\qquad$ $\frac{x+2}{2}-\frac{x-4}{6}=6$

$=$ $\qquad$ $=$

$=$ $\qquad$ $=$

$=$ $\qquad$ $=$

$=$ $\qquad$ $=$

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x:

(E_1) $\dfrac{x}{6}+\dfrac{x}{4}=\dfrac{5}{6}$	(E_3) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{1}{2}$	(E_5) $\dfrac{3x}{5}-\dfrac{x+2}{4}=0$
(E_2) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{4}=-\dfrac{5}{4}$	(E_4) $\dfrac{3x}{5}-\dfrac{x}{4}=\dfrac{1}{20}$	(E_6) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{x}{12}=\dfrac{1}{6}$

$(E_7)\ \dfrac{x+2}{6}+\dfrac{x+4}{8}=9$	$(E_8)\ \dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{x}{2}=3x$	$(E_9)\ \dfrac{x}{2}=1+\dfrac{2x-1}{3}$

■ **Exemple 7.9** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

$x^2=5$ $\qquad x^2-9=0$ $\qquad 2x^2+5=3x^2-13$

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x:

$(E_1)\ x^2=64$	$(E_3)\ x^2+5=0$	$(E_5)\ 3-x^2=0$	$(E_7)\ 46=x^2-3$
$(E_2)\ x^2-81=0$	$(E_4)\ x^2=196$	$(E_6)\ x^2-18=82$	$(E_8)\ 3x^2-4=71$

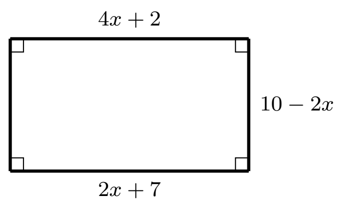
■ **Exemple 7.10** Retrouver l'écriture en fraction irréductible du rationnel dont l'écriture décimale périodique infinie est connue.

$x=0,\underline{7}$	$y=0,\underline{37}$	$z=1,4\underline{37}$
$x=0{,}777\ldots$	$y=0{,}373\ 737\ldots$	$z=1{,}437\ 373\ 7\ldots$

Exercice 8 Même consignes :

$a=\ 0,\underline{5}=0{,}555\ldots$	$c=\ 0,\underline{45}=0{,}454\ 545\ldots$	$e=\ 5,\underline{41}=5{,}414\ 141\ldots$
$b=\ 0,\underline{14}=0{,}141\ 414\ldots$	$d=\ 0,\underline{152}=0{,}152\ 152\ 152\ldots$	$f=\ 1,2\underline{76}=1{,}276\ 767\ 6\ldots$

Exercice 9



a) Écrire une équation en utilisant les deux côtés opposés de ce rectangle.
b) Résoudre et trouver la valeur de x.
c) Déterminer le périmètre de ce rectangle.

solution de l'exercice 3.

$(E_1)\ \mathcal{S}=\{-7\}$	$(E_3)\ \mathcal{S}=\{100\}$	$(E_5)\ \mathcal{S}=\{-162\}$	$(E_7)\ \mathcal{S}=\{72\}$	$(E_9)\ \mathcal{S}=\{0\}$
$(E_2)\ \mathcal{S}=\{-\dfrac{1}{3}\}$	$(E_4)\ \mathcal{S}=\{72\}$	$(E_6)\ \mathcal{S}=\{-100\}$	$(E_8)\ \mathcal{S}=\{32\}$	$(E_{10})\ \mathcal{S}=\{-\dfrac{36}{5}\}$

■

solution de l'exercice 4.

$S_1=\left\{\frac{9}{4}\right\};$	$S_3=\{10\};$	$S_5=\{16.5\};$	$S_7=\{-3.0\};$
$S_2=\left\{-\frac{17}{3}\right\};$	$S_4=\left\{\frac{119}{2}\right\};$	$S_6=\{-1.375\};$	$S_8=\{0.1111111111111111\};$

■

solution de l'exercice 5.

$(E_1)\ \mathcal{S}=\{-7\}$	$(E_3)\ \mathcal{S}=\{6\}$	$(E_5)\ \mathcal{S}=\{\frac{12}{9}\}$	(E_7) 	$(E_9)\ \mathcal{S}=\{-3\}$
$(E_2)\ \mathcal{S}=\{4\}$	$(E_4)\ \mathcal{S}=\{4\}$	(E_6) 	$(E_8)\ \mathcal{S}=\{-\frac{8}{3}\}$	

■

solutions de l'exercice 6.

$(E_1)\ \mathcal{S}=\{2\}$	$(E_3)\ \mathcal{S}=\{13\}$	$(E_5)\ \mathcal{S}=\{\dfrac{10}{7}\}$	$(E_6)\ \mathcal{S}=\{\dfrac{1}{2}\}$	$(E_8)\ \mathcal{S}=\{-\frac{2}{17}\}$
$(E_2)\ \mathcal{S}=\{-15\}$	$(E_4)\ \mathcal{S}=\{\dfrac{1}{7}\}$		$(E_7)\ \mathcal{S}=\{28\}$	$(E_9)\ \mathcal{S}=\{-4\}$

■

solutions de l'exercice 7.

$S_1=\{-8,8\};$	$S_3=\{\};$	$S_5=\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\};$	$S_7=\{-7,7\};$
$S_2=\{-9,9\};$	$S_4=\{-14,14\};$	$S_6=\{-10,10\};$	$S_8=\{-5,5\};$

■

solution de l'exercice 8.

$a=\frac{5}{9}$; $b=\frac{14}{99}$; $c=\frac{45}{99}=\frac{5}{11}$; $d=\frac{152}{999}=\frac{19}{111}$; $10e=5+\frac{41}{99}$ et $e=\frac{536}{990}=\frac{268}{495}$; $10f=12+\frac{76}{99}$ et $f=\frac{1264}{990}=\frac{632}{495}$. ■

solution de l'exercice 9.

$4x+2=2x+7$, $x=2{,}50\,\text{cm}$, $P=34\,\text{cm}$. ■

7.2 Équations produit et quotient

Théorème 7.11 — produit nul. Si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$

Démonstration. Supposons $A = 0$, alors $AB = 0$.

Supposons que $A \neq 0$, alors A admet un inverse $\frac{1}{A}$ et son inverse est non nul.

$$\begin{aligned} AB &= 0 \\ \underbrace{\frac{1}{A} \times A}_{1} \times B &= \frac{1}{A} \times 0 \quad \times\frac{1}{A} \\ B &= 0 \end{aligned}$$

■

L'équation $x^2 = k$, d'inconnue x admet :

$k > 0$ deux solutions $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$

$k = 0$ une solution $x = 0$.

$k < 0$ aucune solution.

Cas général équation équivalente à $ax^2 + bx + c = 0$. a et b non nuls.

Il faut factoriser le membre de gauche et résoudre l'équation produit nul obtenue.

Théorème 7.12 — quotient nul. Si $\frac{A}{B} = 0$ alors $A = 0$ et $B \neq 0$

Démonstration. Comme $\frac{A}{B} = A \times \frac{1}{B}$, B doit avoir un inverse. D'où $B \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= 0 \\ A \times \frac{1}{B} &= 0 \quad \times B \\ A \times \frac{1}{B} \times B &= 0 \times B \\ A &= 0 \end{aligned}$$

■

7.2.1 Exercices équation produit

■ **Exemple 7.13** Factoriser/réduire le membre de gauche et résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations inconnue x:

$4x^2 - 9x = 0$ $\quad$ $4x^2 - 9 = 0$ $\quad$ $(-2x-7)^{15} = 0$ $\quad$ $x^2 + 4x + 4 = 0$

$x^2 = 12x - 36$ $\quad$ $9x^2 + 24x + 4 = 0$ $\quad$ $(x+1)(2x+3) + 5(x+1) = 0$

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, inconnue x.

(E_1) $(5x-10)(8x+5) = 0$
(E_2) $(8x-1)(7x-4) = 0$
(E_3) $(8x-1) + (7x-4) = 0$
(E_4) $5x^2 + 2x = 0$
(E_5) $9x^2 - 4 = 0$
(E_6) $x^2 + 10x + 25 = 0$
(E_7) $-3x^2 = 5x$
(E_8) $36x^2 = 100$
(E_9) $x^2 = 2x - 1$
(E_{10}) $x^2 + 4x = -4$
(E_{11}) $(x-3)^2(2x-1)^4 = 0$
(E_{12}) $x^2 - 6x = -9$

Exercice 2 Mêmes consignes

(E_1) $(3x+2)(8x+5) + (3x+2)(2x+3) = 0$
(E_2) $(3x-1)^2 + (3x-1)(5x-4) = 0$
(E_3) $(3x-1)^2 - (5x-4)^2 = 0$
(E_4) $(2x-5)(5x-4) = (2x-5)(8x-1)$
(E_5) $(6x-4)(-3x+2) = (10x-2)(6x-4)$
(E_6) $(2x+3)^2 = (5x+4)^2$

Exercice 3 — Un grand classique : choisir la forme algébrique la plus adaptée. On considère l'expression définie pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ par $A(x) = (x+3)^2 + 2(x+1)(x+3)$.

a) Développer, réduire et ordonner $A(x)$ (forme développée).
b) Factoriser $A(x)$ et montrer que $A(x) = (x+3)(3x+5)$ (forme factorisée).
c) Calculer $A(0)$.
d) En utilisant la forme développée donner la valeur exacte de $A(\sqrt{2})$.
e) En utilisant la forme factorisée, résoudre l'équation $A(x) = 0$.
f) L'équation $A(x) = 15$ a deux solutions. En utilisant la forme la plus adaptée, déterminer la valeur des solutions.

Exercice 4 — rebelotte.

On considère l'expression définie pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ par $B(x) = (2x-4)^2 - 3(x-2)(x+5)$.

a) Développer, réduire et ordonner $B(x)$ (forme développée).

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B(x) = (x-23)(x-2)$ (forme factorisée).

c) En utilisant la forme la plus adaptée calculer $B(0)$ et $B(-\sqrt{2})$.

d) En utilisant la forme la plus adaptée résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $B(x) = 0$ d'inconnue x.

e) En utilisant la forme la plus adaptée résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $B(x) = 46$ d'inconnue x.

f) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B(x) = (x-12{,}5)^2 - 110{,}25$ (forme canonique).

g) En utilisant la forme canonique résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $B(x) = -110{,}25$ d'inconnue x.

h) En utilisant la forme canonique résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $B(x) = 10{,}75$ d'inconnue x.

Exercice 5 — un dernier.

On considère l'expression définie pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ par $B(x) = (3x+5)^2 - (2x+3)^2$.

a) Développer, réduire et ordonner $C(x)$.

b) Factoriser $C(x)$ et montrer que $C(x) = (5x+8)(x+2)$.

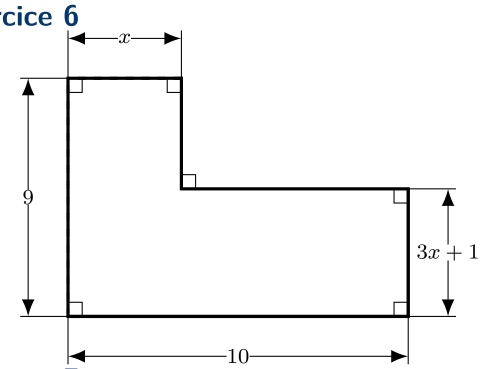
c) Calculer $C(0)$.

d) En utilisant la forme développée donner la valeur exacte de $C(-\sqrt{2})$.

e) En utilisant la forme factorisée, résoudre l'équation $C(x) = 0$.

f) L'équation $C(x) = 16$ a deux solutions. En utilisant la forme la plus adaptée, déterminer la valeur des solutions.

Exercice 6



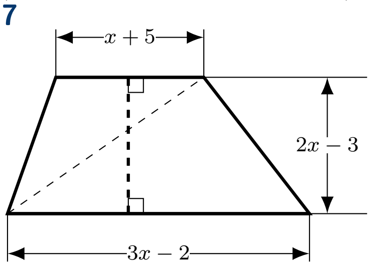
L'aire de la figure en L ci-dessous est de $65\,\text{cm}^2$. Les longueurs sont en cm.

a) Ecrire une équation vérifiée par x et en déduire que $3x^2 - 38x + 55 = 0$.

b) Développer $(3x-5)(x-11)$.

c) Résoudre en x et préciser quelles solutions sont admissibles.

Exercice 7



L'aire du trapèze ci-dessous est de $133\,\text{cm}^2$. Les longueurs sont en cm.

a) Montrer que $8x^2 - 6x - 275 = 0$.

b) Développer $(4x-25)(2x+11)$.

c) Résoudre en x et préciser la solution admissible.

solutions de l'exercice 1.

$S_1 = \left\{-\frac{5}{8}, 2\right\}$;
$S_2 = \left\{\frac{1}{8}, \frac{4}{7}\right\}$;
$S_3 = \left\{\frac{1}{3}\right\}$;
$S_4 = \left\{-\frac{2}{5}, 0\right\}$;
$S_5 = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$;
$S_6 = \{-5\}$;
$S_7 = \left\{-\frac{5}{3}, 0\right\}$;
$S_8 = \left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right\}$;
$S_9 = \{1\}$;
$S_{10} = \{-2\}$;
$S_{11} = \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$;
$S_{12} = \{3\}$;

■

solutions de l'exercice 2.

$S_1 = \left\{-\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}\right\}$;
$S_2 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{5}{8}\right\}$;
$S_3 = \left\{\frac{5}{8}, \frac{3}{2}\right\}$;
$S_4 = \left\{-1, \frac{5}{2}\right\}$;
$S_5 = \left\{\frac{4}{13}, \frac{2}{3}\right\}$;
$S_6 = \left\{-1, -\frac{1}{3}\right\}$;

■

7.3 Fractions algébriques

■ **Exemple 7.14 — Je fais.** Simplifier les expressions suivantes en trouvant un facteur commun :

$A = \dfrac{14x+8}{2x^2+2}$ $\qquad B = \dfrac{5x^2+2x}{3x}$ $\qquad C = \dfrac{8+4x}{6x+12}$ $\qquad C = \dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

$=$ $\qquad =$ $\qquad =$ $\qquad =$

$=$ $\qquad =$ $\qquad =$ $\qquad =$

$=$ $\qquad =$ $\qquad =$ $\qquad =$

Exercice 1 — À vous. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que les dénominateurs sont non nuls, simplifier au maximum les fractions algébriques suivantes :

$A(x) = \dfrac{2x^2+8x}{4x}$	$C(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3}$	$E(x) = \dfrac{x^2-10x+25}{x-5}$	$G(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2-1}$
$B(x) = \dfrac{5x-15}{6x-18}$	$D(x) = \dfrac{x-2}{x^2-2x}$	$F(x) = \dfrac{x+5}{x^2-25}$	$H(x) = \dfrac{9x^2-12x+4}{9x^2-4}$

> Pour certaines expressions de x, il convient avant de procéder à leur manipulation de préciser leur **domaine de définition**. Il s'agit des valeurs de la variable x pour lesquelles l'expression a un sens, en particulier les **dénominateurs** ne doivent pas s'annuler.

■ **Exemple 7.15** Préciser le domaine de définition des expressions suivantes :

$B(x) = \dfrac{5x-15}{6x-18}$ $\qquad D(x) = \dfrac{x-2}{x^2-2x}$ $\qquad H(x) = \dfrac{9x^2-12x+4}{9x^2-4}$

Exercice 2 Préciser le domaine de définition des expressions de l'exercice 1.

■ **Exemple 7.16** Préciser le domaine et ramener au même dénominateur les expressions suivantes.

$A = \dfrac{2}{x+1} + 1$ $\qquad B = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x-1}$ $\qquad C = \dfrac{2}{x+3} + \dfrac{2}{x-3}$

Exercice 3 Préciser le domaine de chaque expression, la réduire au même dénominateur, puis la simplifier au maximum.

$$A(x) = \frac{4}{x} + \frac{x-1}{3x-5}$$
$$B(x) = \frac{3}{5x} + \frac{11x}{x+1}$$
$$C(x) = \frac{3x-2}{5x-3} - \frac{2-3x}{7x-2}$$
$$D(x) = \frac{5}{2x-1} + 1$$
$$E(x) = 2x+1 - \frac{2}{2x+1}$$

$$F(x) = \frac{2}{x-2} + \frac{5}{x+3}$$
$$G(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x-5}$$
$$H(x) = \frac{3x+4}{2x-9} \times \frac{4x^2-36x+81}{9x^2-16}$$
$$I(x) = \frac{1}{2x-7} - \frac{1}{2x+9}$$
$$J(x) = \frac{x^2-2x+1}{(23x-5)^2} \times \frac{46x-10}{1-x}$$

solution de l'exercice 1. $A = \frac{x}{2} + 2$; $B = \frac{5}{6}$; $C = x - 3$; $D = \frac{1}{x}$; $E = x - 5$; $F = \frac{1}{x-5}$; $G = \frac{x}{x-1}$; $H = \frac{3x-2}{3x+2}$; ■

solution de l'exercices 2 . $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; $D_3 = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; $D_4 = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$; $D_5 = \mathbb{R} \setminus \{5\}$; $D_6 = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$; $D_7 = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; $D_8 = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$; ■

solution de l'exercice 3 .

$$A(x) = \frac{x^2+11x-20}{3x^2-5x}; \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{5}{3}\right\};$$
$$B(x) = \frac{55x^2+3x+3}{5x^2+5x}; \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\};$$
$$C(x) = \frac{36x^2-39x+10}{35x^2-31x+6}; \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{7}, \frac{3}{5}\right\};$$
$$D(x) = \frac{2x+4}{2x-1}; \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\};$$
$$E(x) = \frac{4x^2+4x-1}{2x+1}; \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\};$$

$$F(x) = \frac{7x-4}{x^2+x-6}; \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\};$$
$$G(x) = \frac{-2x-5}{x^2-5x}; \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 5\};$$
$$H(x) = \frac{2x-9}{3x-4}; \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{9}{2}\right\};$$
$$I(x) = \frac{16}{4x^2+4x-63}; \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right\};$$
$$J(x) = \frac{2-2x}{23x-5}; \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{23}, 1\right\};$$

■

7.4 Équations rationnelles

■ **Exemple 7.17** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations rationnelles suivantes

$\dfrac{9x-5}{8x-3}=0$ $\dfrac{-9x-5}{3x-4}=5$ $\dfrac{2}{6x-1}=\dfrac{3}{5x-7}$

Exercice 1 Préciser le domaine de résolution puis résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1) $\dfrac{7x-6}{3x-5}=0$ | (E_2) $\dfrac{4x+6}{2x-5}=0$ | (E_3) $\dfrac{20x^2-8x}{2x-2}=0$ | (E_4) $\dfrac{6x^2-15x}{2x-5}=0$

Exercice 2 Préciser le domaine de résolution puis résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1) $\dfrac{x+4}{-3x-3}=\dfrac{7}{2}$ | (E_2) $\dfrac{-x-6}{3-2x}=5$ | (E_3) $\dfrac{-6x-1}{-3x-3}=11$ | (E_4) $\dfrac{2x-6}{2x+1}=-11$

Exercice 3 Préciser le domaine de résolution puis résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1) $1-\dfrac{2x}{2x+1}=\dfrac{3}{2x}$ | (E_2) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x^2}$ | (E_3) $x-\dfrac{1}{x}=0$ | (E_4) $x-1=\dfrac{4}{x-1}$

solution de l'exercice 1 .

(E_1) D.R. $=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{3}\right\}$; $S_1=\left\{\frac{6}{7}\right\}$;

(E_1) D.R. $=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{2}\right\}$; $S_1=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$;

(E_1) D.R. $=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $S_1=\left\{0,\frac{2}{5}\right\}$;

(E_1) D.R. $=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{2}\right\}$; $S_1=\{0\}$;

■

solution de l'exercice 2 .

(E_1) D.R. $=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; $S_1=\left\{-\frac{29}{23}\right\}$;

(E_2) D.R. $=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$; $S_2=\left\{\frac{7}{3}\right\}$;

(E_3) D.R. $=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; $S_3=\left\{-\frac{32}{27}\right\}$;

(E_4) D.R. $=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; $S_4=\left\{-\frac{5}{24}\right\}$;

■

solution de l'exercices 3 .

(E_1) D.R. $=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2},0\right\}$; $S_1=\left\{-\frac{3}{4}\right\}$;

(E_2) D.R. $=\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$; $S_2=\{\}$;

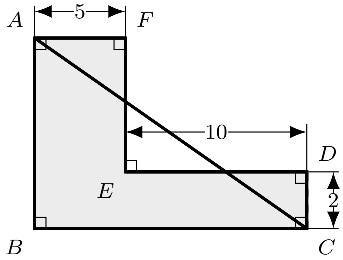
(E_3) D.R. $=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $S_3=\{-1,1\}$;

(E_4) D.R. $=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $S_4=\{-1,3\}$;

■

7.5 Club de Maths : équations simples et moins simples

Problème 1



Quelle doit être la longueur EF pour que l'aire de la partie colorée soit égale à l'aire du triangle ABC ?

Problème 2 Un père et son fils ont 35 et 3 ans, respectivement. Dans combien d'années le père aura-t-il le double de l'âge de son fils ?

Problème 3 Un joueur obtient huit fois le score 7 puis x fois le score 10. À la fin du jeu, son score moyen est de 9. Combien vaut alors x ?

Problème 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ en développant et en simplifiant les équations suivantes d'inconnue x :

(E_1) $(x-1)^2+(x+3)^2=2(x-2)(x+1)+38$ | (E_2) $5(x^2-2x-1)+2(3x-2)=5(x+1)^2$

Problème 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ en factorisant les équations suivantes d'inconnue x :

(E_1) $-\dfrac{3x^2}{5}+x=0$ | (E_2) $-\dfrac{5x^2}{7}-\dfrac{3x}{4}=0$

Problème 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ en factorisant les équations suivantes d'inconnue x :

(E_1) $(x+5)(4x-1)+x^2-25=0$ | (E_2) $(x+4)(5x+9)-x^2+16=0$

Problème 7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ en factorisant les équations suivantes d'inconnue x :

(E_1) $7x^3-175x=0$ | (E_2) $(x+5)(3x+2)^2=x^2(x+5)$

Problème 8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

(E_1) $\dfrac{4x+7}{x-1}=\dfrac{12x+5}{3x+4}$ | (E_2) $\dfrac{7}{x-5}=\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{3}{x-2}$ | (E_3) $\dfrac{9}{x}=\dfrac{8}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$

Problème 9 On note a une longueur, pour l'instant inconnue. Un rectangle de largeur a et de longueur $a+1$ a la même aire qu'un autre rectangle qui lui est de largeur $a-1$ et de longueur $a+3$. Est-ce possible et si oui, combien de valeurs possibles de a existe-t-il ?

Problème 10 Une boîte de café coûte 100 € à l'achat et se vend 140 € : elle permet une marge de 40%. Pour une boîte de cacao, la marge est de 20%. Si le nombre de boîtes de café vendues est le double du nombre de boîte de cacao vendues, et si la marge totale est de 36% (par rapport au prix d'achat), à quel prix s'est vendue chaque boîte de cacao ?

Problème 11 Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{b}{c} = \dfrac{1}{4}$, donner la valeur de $\dfrac{a-b}{b-c}$.

Problème 12 Trouver x sachant que $\dfrac{5}{9} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

[1]

solution du problème 1. $x = EF$. $7.5(x+2) = 5x+30$. $x = 6$.

■

solution du problème 2. $35 + x = 2(3+x)$, $x = 29$.

■

solution du problème 3. $\dfrac{8\times 7 + 10x}{x+8} = 9$, $x = 16$. ■

solution du problème 4. Pour vérification, chacune des deux équations admet une solution, et leur somme faut 3.

■

solution du problème 5. Pour vérification : chacune des deux équations admet deux solutions et la somme des quatre solutions vaut $\dfrac{37}{60}$.

■

solution du problème 6. Pour vérification : chacune des deux équations admet deux solutions et la somme des quatre solutions vaut $\dfrac{-171}{20}$.

■

solution du problème 7. Pour vérification : chacune des deux équations admet trois solutions et la somme des six solutions vaut $\dfrac{-13}{2}$.

■

solution du problème 8. Pour vérification : chacune des trois équations admet une solution et la somme des trois solutions vaut $\dfrac{529}{308}$.

■

solution du problème 9. Les termes quadratiques (en a^2) se simplifient et $a = 3$.

■

solution du problème 10. x = prix d'achat de la boîte de cacao, n = nombre de boîtes de cacao vendues. $0.20 \times nx + 2n \times 40 = 0.36 \times \underbrace{(nx + 2n \times 100)}_{\text{prix d'achat total}}$.

x est donc solution de $0.20x + 80 = 0.36(x+200)$. $x = 50$. Le prix de vente est de 60€ .

■

1. Ces exercices sont majoritairement tiré d'un recueil du club de Maths de Nancy