

2. 差分商

関数 $g(t)$ が与えられ、 $g_i = g(\tau_i)$ とする。もしくは、仮想の関数 $g(t)$ を考え、そのうちのパラメータ値 τ_i における関数値 g_i が既知であるとする（これらはデータポイントと呼ばれる）。このとき、関数 g のパラメータ値 $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ におけるオーダ n ($n-1$ 次) の差分商は、 $[\tau_0, \dots, \tau_{n-1}]g$ と記述され、次のように定義される：

$$(式2-1) \quad \begin{cases} [\tau_0, \dots, \tau_{n-1}]g = \frac{[\tau_1, \dots, \tau_{n-1}]g - [\tau_0, \dots, \tau_{n-2}]g}{\tau_{n-1} - \tau_0} \\ \vdots \\ [\tau_i, \tau_{i+1}]g = \frac{[\tau_{i+1}]g - [\tau_i]g}{\tau_{i+1} - \tau_i} = \frac{g_{i+1} - g_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} \\ [\tau_i]g = g_i \end{cases}$$

$\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ における n 点 g_0, \dots, g_{n-1} を補間するオーダ n の多項式 $f_n(t)$ を表現するニュートンの内挿公式は、差分商の表現により、(式 2-2) となる。

$$(式2-2) \quad \begin{aligned} f_n(t) &= g_0 + (t - \tau_0)[\tau_0, \tau_1]g + (t - \tau_0)(t - \tau_1)[\tau_0, \tau_1, \tau_2]g + \dots + (t - \tau_0) \cdots (t - \tau_{n-2})[\tau_0, \dots, \tau_{n-1}]g \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (t - \tau_0) \cdots (t - \tau_{i-1})[\tau_0, \dots, \tau_i]g \end{aligned}$$

これから、オーダ n の差分商 $[\tau_0, \dots, \tau_{n-1}]g$ は $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ における n 点 g_0, \dots, g_{n-1} を補間するオーダ n の多項式 $f_n(t)$ の最高次の多項式 (t^{n-1}) の係数であることがわかる。

差分商を定義する $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ は一般的には単調増加な実数で、 $\tau_i = \tau_{i+1}$ を考えないが、 τ_i における一次微分値 $s_i = \frac{dg(\tau_i)}{dt}$ が得られるとして、 $\tau_i = \tau_{i+1}$ の時には (式 2-1) は (式 2-3) に拡張される。詳細については C.Deboor : "A Practical Guide to Splines" by Springer Verlag を参照されたい。

$$(式2-3) \quad [\tau_i, \tau_{i+1}]g = s_i \quad \text{if } \tau_i = \tau_{i+1}$$