３．　直線と平面

３．１ 直線

直線 L(t)は空間内の点 P と方向を表すベクトル r が与えられれば、パラメータ t を用いて

(式3-1)　L(t)=P+ｒ＊t

と表わされる。ベクトル r が単位ベクトルであれば、t は点 P からの符号付き距離（点 P からベクトル r へ正の距離で、 r と反対方向へは負の距離）である。

３．２ 平面

平面は、次の P, ｒ1, ｒ2 により一意に定まり、(式 3-2)で表現される：

（１）　平面上の１点 P(x_1, y_1, z_1)

（２）　点 P を起点とする平面上にあるふたつの１次独立なベクトル
ｒ1(u_1, v_1, w_1) とｒ2(u_2, v_2, w_2)

(式3-2)
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

を展開すると(式 3-3)となる。

(式3-3)　ax+by+cz=d

ここで、a=$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$, b=$\begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w_2 & u_2 \end{vmatrix}$, c=$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$, d=ax1+by1+cz1

a,b,c,d は図形的に次のような意味を持つ：

ベクトル n=(a, b, c)は平面(式 3-2)にノーマルであり、L=$\dfrac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ は原点からの符号付き距離である。(式 3-2)を面のパラメータあるふたつの変数（u,v）を用いて記述すると、(式 3-4)となる

(式3-4) $\begin{cases} x = x_1 + u_1 u + u_2 v \\ y = y_1 + v_1 u + v_2 v \\ z = z_1 + w_1 u + w_2 v \end{cases}$

３．３ 平面と点の距離

平面 ax+by+cz=d と点 Q(α, β, γ)との距離 L_Q を考える。今(式 3-3)を正規化して $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ とすると、ベクトル **n**=(a, b, c)は平面に normal な単位ベクトル。点 Q から平面へおろした垂線の足を P とすると、点 Q から P へのベクトル $\overrightarrow{QP} = (aL_Q, bL_Q, cL_Q)$。

$P = (\alpha + aL_Q, \beta + bL_Q, \gamma + cL_Q)$ であり(式 3-3)に代入すれば：

$$a(\alpha + aL_Q) + b(\beta + bL_Q) + c(\gamma + cL_Q) = a\alpha + b\beta + c\gamma + L_Q = d$$

すなわち L_Q は(式 3-5)で与えられる。

(式3-5) $L_Q = a\alpha + b\beta + c\gamma - d$ （符号は無視する）

一般的（$a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$ の場合）には(式 3-6)で与えられる。(式 3-6)の平面への距離 L_Q は符号付きであり、L_Q の符号により平面と点 Q との位置関係を知ることができる。すなわち、２点 Q、Q' が、ある平面に対して同一側にあれば、(式 3-6)は同一符号であり、反対側にあれば異符号となる。

(式3-6) $L_Q = \dfrac{a\alpha + b\beta + c\gamma - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$