７．　曲面（２次元多様体）

７．１ クーンズパッチ（Coons Patch)

７．２ ブール和曲面（Boolean sum surface)

曲面 S(u,v)　(0<=u,v<=1 とする）に対するオペレータ P_1 と P_2 を次のように与える：

P_1 ：面 S のパラメータ u により S の u=0 の点 S(0,v)と S の u=1 の点 S(1,v)をあるスキーマにより補間して v=一定の u パラメータとする曲線 $S^V(u)$ を構築する曲線構築オペレータ

P_2 ：面 S のパラメータ v により S の v=0 の点 S(u,0)と S の v=1 の点 S(u,1)をあるスキーマにより補間して u=一定の v パラメータとする曲線 $S^u(v)$ を構築する曲線構築オペレータ

このとき、P_1 と P_2 のブール和 P （曲面構築オペレータ）は次のように定義される：

（式7-1）　$P = P_1 \oplus P_2 = P_1 + P_2 - P_1 P_2$

多くの曲面表現がこのブール和曲面として表現できる。

（１） 線形クーンズ曲面

P_1 と P_2 共に 2 点の線形補間（線分により結ぶ）とする。すなわち、次のように定義する。

（式7-2）　P_1 S= (1 – u)S(0,v)+uS(1,v),

（式7-3）　P_2 S=(1－v)S(u,0)+vS(u,1)

これから、

（式7-4）　$P_1 P_2$ S = P_1 (P_2 S) = P_1 ((1－v)S(u,0)+vS(u,1))
= (1－u)((1－v)S(0,0)+vS(0,1)) + u((1－v)S(1,0)+vS(1,1))
= (1－u)(1－v)S(0,0) + (1－u)vS(0,1)+u(1－v)S(1,0)+uvS(1,1)

であり、

（式7-5）　$P_1 \oplus P_2$ S
=(1－u)S(0,v)+uS(1,v)
+(1－v)S(u,0)+vS(u,1)
－(1－u)(1－v)S(0,0) +(1－u)vS(0,1)+u(1－v)S(1,0)+uvS(1,1)

（２）　一般双三次クーンズ曲面

P_1 と P_2 共に、両端点で接ベクトルを与える、2 点の 3 次スプライン補間を Ferguson のブレンド関数で求めるオペレータとする。すなわち、F_i （i=1,...,4）を Ferguson のブレンディング関

数、$S_u(u,v)=\dfrac{\partial S}{\partial u}(u,v)$、$S_v(u,v)=\dfrac{\partial S}{\partial v}(u,v)$、$S_{uv}(u,v)=\dfrac{\partial^2 S}{\partial u \partial v}(u,v)$として$P_1$と$P_2$を、

（式7-6）　$P_1\mathrm{S}=F_1(u)\,\mathrm{S}(0,\mathrm{v})+F_2(u)\,\mathrm{S}(1,\mathrm{v})+F_3(u)\ S_u(0,v)+F_4(u)\ S_u(1,v)$

（式7-7）　$P_2\mathrm{S}=F_1(v)\,\mathrm{S}(\mathrm{u},0)+F_2(v)\,\mathrm{S}(\mathrm{u},1)+F_3(v)\ S_v(u,0)+F_4(v)\ S_v(u,1)$

とすると

（式7-8）　$P_1P_2\mathrm{S}=\ P_1(P_2\mathrm{S})$

$$
\begin{aligned}
&=P_1(F_1(v)\,\mathrm{S}(\mathrm{u},0)+F_2(v)\,\mathrm{S}(\mathrm{u},1)+F_3(v)\ S_v(u,0)+F_4(v)\ S_v(u,1))\\
&=F_1(u)(F_1(v)\,\mathrm{S}(0,0)+F_2(v)\,\mathrm{S}(0,1)+F_3(v)\ S_v(0,0)+F_4(v)\ S_v(0,1))\\
&+F_2(u)(F_1(v)\,\mathrm{S}(1,0)+F_2(v)\,\mathrm{S}(1,1)+F_3(v)\ S_v(1,0)+F_4(v)\ S_v(1,1))\\
&+F_3(u)(F_1(v)\ S_u(0,0)+F_2(v)\ S_u(0,1)+F_3(v)\ S_{uv}(0,0)+F_4(v)\ S_{uv}(0,1))\\
&+F_4(u)(F_1(v)\ S_u(1,0)+F_2(v)\ S_u(1,1)+F_3(v)\ S_{uv}(1,0)+F_4(v)\ S_{uv}(1,1))
\end{aligned}
$$

$$
=\ \begin{bmatrix}F_1(u) & F_2(u) & F_3(u) & F_4(u)\end{bmatrix}[Q]\begin{bmatrix}F_1(v)\\F_2(v)\\F_3(v)\\F_4(v)\end{bmatrix}
$$

ここで

（式7-9）
$$
[Q]=\begin{bmatrix}\mathrm{S}(0,0) & \mathrm{S}(0,1) & S_v(0,0) & S_v(0,1)\\ \mathrm{S}(1,0) & \mathrm{S}(1,1) & S_v(1,0) & S_v(1,1)\\ S_u(0,0) & S_u(0,1) & S_{uv}(0,0) & S_{uv}(0,1)\\ S_u(1,0) & S_u(1,1) & S_{uv}(1,0) & S_{uv}(1,1)\end{bmatrix}
$$

したがって

（式7-10）　$P_1\oplus P_2\mathrm{S}$

$$
\begin{aligned}
&=F_1(u)\,\mathrm{S}(0,\mathrm{v})+F_2(u)\,\mathrm{S}(1,\mathrm{v})+F_3(u)\ S_u(0,v)+F_4(u)\ S_u(1,v)\\
&+F_1(v)\,\mathrm{S}(\mathrm{u},0)+F_2(v)\,\mathrm{S}(\mathrm{u},1)+F_3(v)\ S_v(u,0)+F_4(v)\ S_v(u,1)\\
&-\begin{bmatrix}F_1(u) & F_2(u) & F_3(u) & F_4(u)\end{bmatrix}[P]\begin{bmatrix}F_1(v)\\F_2(v)\\F_3(v)\\F_4(v)\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

（３）　ゴードン曲面（Gordon Surface）

線形クーンズ曲面、一般双三次クーンズ曲面では(u,v)の各パラメータ方向に境界となる 2 本の曲線だけを与えられて内部の曲面部分を補間したが、曲面内部の線を与えてよりきめ細かな曲面制御をしたい場合がある。P_1 と P_2 として、共にそのような、オペレータを定義する。たとえば、P_1 を m 個の点と両端点の接ベクトルから曲線（すなわち両端点で接ベクトルを与える３次スプライン）を求めるオペレータ、同様に P_2 を n 個の点と両端点の接ベクトルから曲線を求めるオペレータとする：

（式7-11）　$$P_1 S = \sum_{i=0}^{m} S(u_i, v)$$

７．３ テンソル積曲面(Tensor Product Surface)

７．４ ベージェ曲面(Bezier Surface)

７．５ B スプライン曲面(B-Spline Surface)

テンソル積によるＢスプライン曲面は次式により定義される

（式7-12）　$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{i,j} B_{i,ku,u}(u) B_{j,kv,v}(v)$$

すなわち、(u,v)をパラメータとする曲面 $S(u,v)$ は次の情報から構成される。

(1)　u パラメータについて、B 表現次元ｍでオーダ ku のノットベクトル u=$(u_i)_{i=0}^{m+ku-1}$

(2)　v パラメータについて、B 表現次元 n でオーダ kv のノットベクトル v=$(v_j)_{j=0}^{n+kv-1}$

(3)　格子状の m∗n 個の制御点列 $\{\alpha_{i,j}\}_{i=0\ \ j=0}^{m-1\ \ n-1}$

$v = v_0$ に固定すると（式 7-12）は

（式7-13）　$$S(u,v_0) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{i,j} B_{i,ku,u}(u) B_{j,kv,v}(v_0) = \sum_i (\sum_j \alpha_{i,j} B_j(v_0)) B_i(u)$$

であり、$S(u,v_0)$ は、B 表現次元ｍ、オーダ ku のノットベクトル u=$(u_i)_{i=0}^{m+ku-1}$ で、$(\sum_j \alpha_{i,j} B_j(v_0))_{i=0}^{m-1}$ の制御点を持つ、u をパラメータとする線Ｂ表現であることがわかる。同様に、$u = u_0$ に固定して v をパラメータとすれば、$S(u_0,v)$ は $(\sum_i \alpha_{i,j} B_i(u_0))_{j=0}^{n-1}$ の制御点で、v=$(v_j)_{j=0}^{n+kv-1}$ のノットベクトルを持つ線Ｂ表現である。