# ＭＧＣＬによる
# CAGD(Computer Aided Geometric Design)のための
# 曲面／曲線の取り扱い

2010/09/28

株式会社デージー・テクノロジーズ
水野　雄二
mizuno@dgtech.co.jp

目次

# １． 次元

## 1.1 空間次元(Space Dimension)と多様体次元(Manifold Dimension)

<u>空間次元</u>とは取扱い対象の座標値の数を言う。２次元の空間次元であれば、(x, y)の２個の実数値の対の座標値を持ち、３次元の空間次元であれば、(x, y, z)の３個の実数値の組の座標値を持つ。通常我々が扱う空間次元は２次元か３次元であるが、次章の同次座標のように４次元の空間次元を扱うこともある。

<u>多様体次元</u>とは空間内での自由度の数であり、表現する幾何図形のパラメータの数と考えて良い。たとえば、３次元空間内でのひとつのパラメータにより表現される $g(t)=(x(t),y(t),z(t))$ という曲線を考えると、ある $t$ に対して $g(t)$ は $(x(t),y(t),z(t))$ という空間内の座標値であり、曲線の空間次元は３であり、曲線の多様体次元は１である。また、$g(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ というふたつのパラメータの幾何図形は曲面であり、空間次元は３であり、多様体次元は２である。一般に、多様体次元の最大値は空間次元である。

| 多様体次元 | 対象の幾何 | パラメータ |
|---|---|---|
| 0 | 点 | なし（０個のパラメータ） |
| 1 | 曲線 | t（１個のパラメータ） |
| 2 | 曲面 | (u, v)（２個のパラメータ） |
| 3 | ソリッド | (u, v, w)（３個のパラメータ） |

$g(t)$ というように表現された幾何は、その空間次元についてはとくに断らないことが多いが、$(x(t),y(t),z(t))$（３次元空間）または、$(x(t),y(t))$（２次元空間）などを表現していると考えることとする。

## 1.2 同次座標(Homogeneous Coordinates)

同次座標とは、表現対象の空間次元よりひとつ大きな空間次元で座標値を表現し、実際の座標値はその一つ余分な座標値（これを同次座標と呼ぶ）により他の座標値を除算して求める。たとえば、(x, y, z)の座標は、同次座標値 w を付加して、(wx, wy, wz, w)として表現される。(x, y, z)≡(wx, wy, wz, w)と考える。

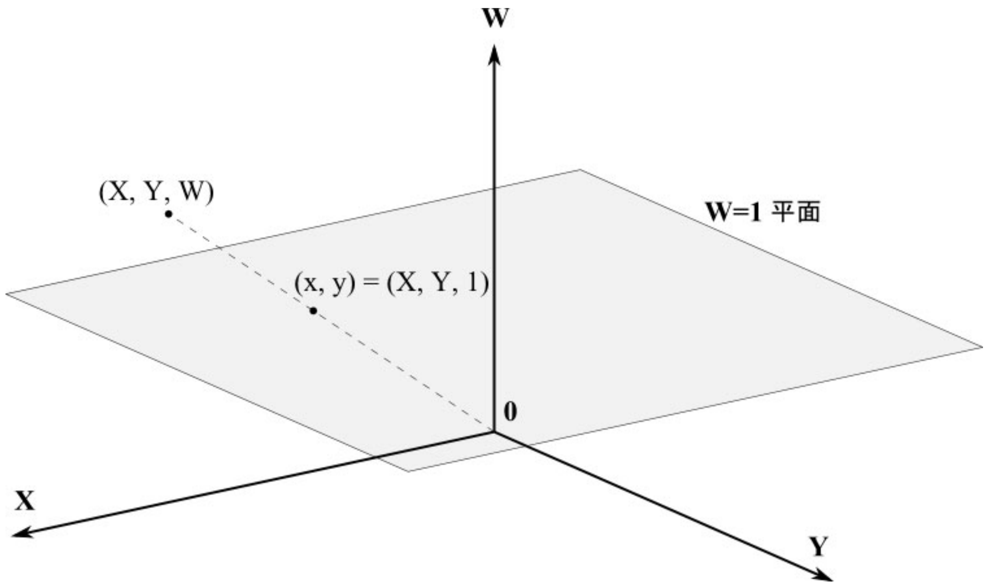


図１．１　２次元の点（x,y）の同次座標による表現

同次座標は、計算機が最も不得意とする（もっとも誤差が生じやすい）除算を後に延ばし、できるだけ除算を行わないように工夫することにより、計算誤差の発生を抑えることにも利用される（山口富士夫　著、４次元理論による図形・形状処理工学、日刊工業新聞社）が、われわれが通常利用する同次座標の利点は次のように要約できる：

（１）　円錐曲線を三角関数ではなく、通常の実数の多項式表現の曲線式で表現できる

（２）　３次元の世界を２次元のスクリーンへの投影として扱う透視変換を表現できる

（３）　無限大を有限の座標値として表現できる

NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)は（非 rational な）B-Spline 曲線を同次座標の考えで、有理数化（Rational）したものと考えてよい。