４．　曲線（１次元多様体）：３次（オーダ４の）スプライン

我々は曲線を多項式で表現する方法を考える。NURBS も含めて、多項式は最も簡便で扱いやすい関数である。

４．１　３次エルミート補間関数(Cubic Hermite Interpolation Polynomials)

パラメータ区間を [0,1]とするある仮想の関数 g(t)を考える。g(t)はパラメータ値０と１の２点の値 $g_0 = g(0)$、$g_1 = g(1)$ が既知であるとして、この g(t)を表現する（補間する）３次多項式 $f(t)$ を考える。２点 g_0、g_1 において、点のデータに加えて１次微分値 s_0 と s_1 が分かっているとする。３次多項式 $f(t)$ は一般的に次のように記述できる：

$$f(t) = \sum_{j=0}^{3} a_j t^j = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$f'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$　　であり、この両式にそれぞれ t=0, 1 における値 g_0、g_1、s_0、s_1 を与えると

$f(0) = a_0 = g_0$、$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = g_1$

$f'(0) = a_1 = s_0$、$f'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = s_1$

これを解くと、$a_0 = g_0$、$a_1 = s_0$、$a_2 = -3g_0 + 3g_1 - 2s_0 - s_1$、$a_3 = 2g_0 - 2g_1 + s_0 + s_1$、すなわち、

$$\begin{aligned}
&f(t)\\
&= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\\
&= g_0 + s_0 t + (-3g_0 + 3g_1 - 2s_0 - s_1)t^2 + (2g_0 - 2g_1 + s_0 + s_1)t^3\\
&= (1 - 3t^2 + 2t^3)g_0 + (3t^2 - 2t^3)g_1 + (t - 2t^2 + t^3)s_0 + (-t^2 + t^3)s_1
\end{aligned}$$

すなわち、$f(t)$ は（式４−１）と記述できる。

（式4−1）　$$f(t) = [F_1(t) \quad F_2(t) \quad F_3(t) \quad F_4(t)]\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

ここで、

$$F_1(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3、F_2(t) = 3t^2 - 2t^3、F_3(t) = t - 2t^2 + t^3、F_4(t) = -t^2 + t^3$$

$F_1(t)$、$F_2(t)$、$F_3(t)$、$F_4(t)$ はファーガソンのブレンディング関数（Ferguson's blending function)、３次スプラインブレンディング関数（Cubic Spline Blending Function)、または、３次エルミート多項式(Cubic Hermite Polynomials)などと呼ばれ、図 4.01 のように、$F_1(t)$ と $F_2(t)$ が２点の位置データ g_0 と g_1 を補間（ブレンド）し、$F_3(t)$ と $F_4(t)$ が２点における１次微分値 s_0

と s_1 を補間（ブレンド）している。この意味で Blending Function と呼ばれる。

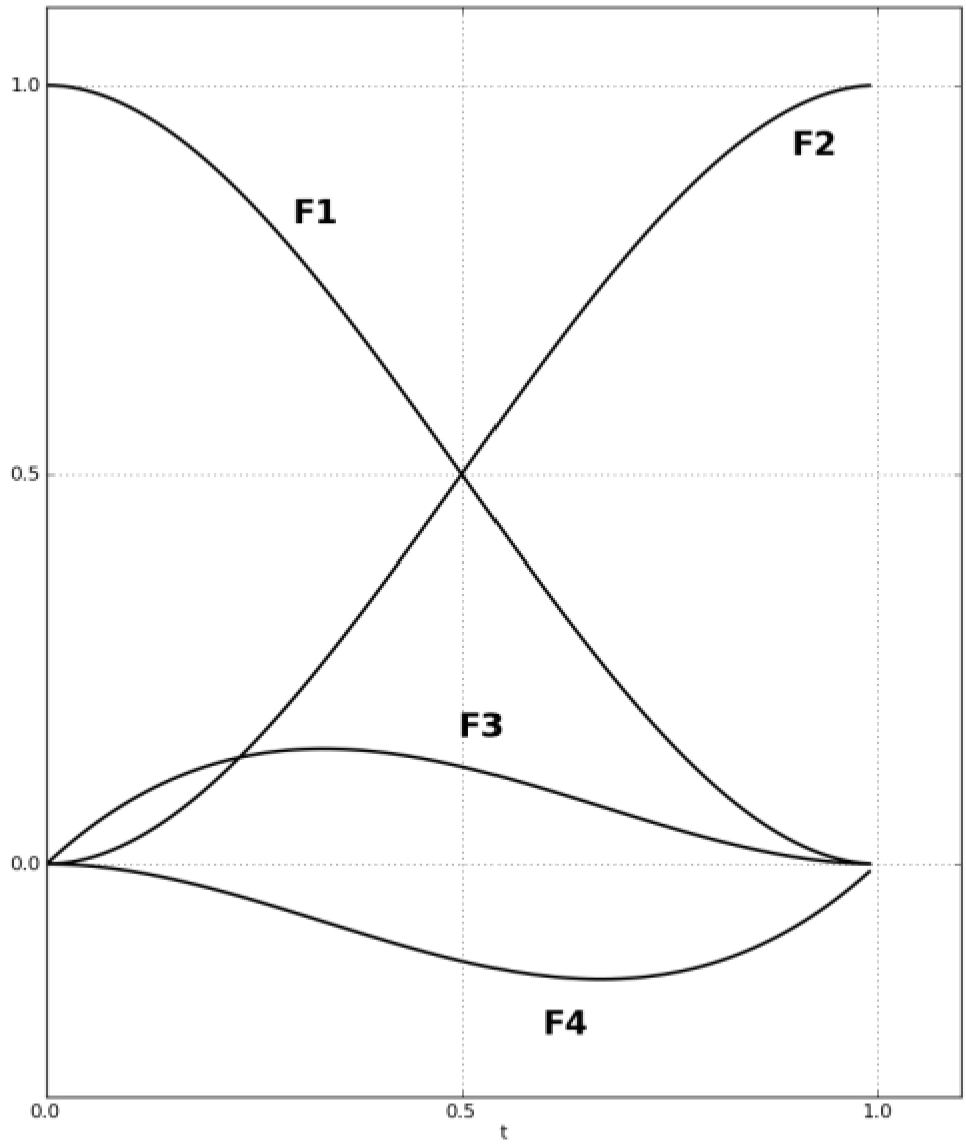

図 4.01 ブレンディング関数

$$F_1(0)=F_2(1)=1、F_1(1)=F_2(0)=F_3(0)=F_3(1)=F_4(0)=F_4(1)=0、$$
$$F_3'(0)=F_4'(1)=1、F_1'(0)=F_1'(1)=F_2'(0)=F_2'(1)=F_3'(1)=F_4'(0)=0$$

で、F1 は t=0 における位置データを、F2 は t=1 の際の位置データを、F3 は t=0 における一次微分値データを、F4 は t=1 における一次微分データを、それぞれ表現する役割を担っていることが分かる。

４．２　区分的多項式表現(Piecewise Polynomial Representation)：PP 表現

近似しようとする未知の曲線 $g(t)$ があり、その n 個のパラメータ値 τ_i　i=0,…,n-1 における

データ g_i が与えられて、(n-1)個のパラメータ区間$[\tau_i\,,\tau_{i+1}]$を異なる形の(n-1)個の多項式 f_i i=0,…,n-2 で表現する。f_i の集合としてパラメータ区間$[\tau_0\,,\tau_{n-1}]$の関数$g(t)$を近似する曲線表現 $f(t)$を、**区分的多項式表現**（Piecewise Polynomial Representation——**PP 表現**）という。$f(t)$ は（式 4－2）に記述できる。

（式4－2）　$f(t) = f_i(t)$ for $\tau_i \le t \le \tau_{i+1}$ 　for i=0, … .n-2

オーダ k（次数 k-1)、$f_i^{\,j}$ を $f_i(t)$のパラメータ値τ_i における j 次微分値とすると、$f_i(t)$は次式で記述できる。(これは $f_i(t)$を順次微分して、$t=\tau_i$ を代入すればわかる)：

（式4－3）　$$f_i(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f_i^{\,j}}{j!}(t-\tau_i) \quad \text{for i=0,…,n-2}$$

このうち、オーダ４（３次式）のものが広く利用される。オーダ４の PP 表現 $f(t)$の i 番目の多項式 $f_i(t)$は次式で表現できる

（式4－4）　$$f_i(t) = f_i^{\,0} + f_i^{\,1}(t-\tau_i) + \frac{f_i^{\,2}}{2}(t-\tau_i)^2 + \frac{f_i^{\,3}}{6}(t-\tau_i)^3 \quad \text{for i=0,…,n-2}$$

（１）　１次微分値による３次（オーダ４の）PP 表現

τ_i における一次微分値を s_i (slope i) for i=0,…,n-1 として、f_i と f_{i+1} とはτ_{i+1} にて、同じ関数値、同じ一次微分値を持つ（すなわちC^1級の連続性の PP 表現）とすると、次式が成立する。

（式4－5）　$$\begin{cases} f_i(\tau_i) = g_i, & f_i(\tau_{i+1}) = g_{i+1} \\ f_i'(\tau_i) = s_i, & f_i'(\tau_{i+1}) = s_{i+1} \end{cases} \quad \text{for i=0,…,n-2}$$

（式 4－5）で、s_i は自由に与えることができ、これから求められる区分的多項式表現 $f(t)$は、各データポイントτ_0, … , τ_{n-1} において関数 $g(t)$ と一致し、パラメータ値域$[\tau_0,\tau_{n-1}]$においてC^{1}の連続性を持つ。すなわち、τ_0, … , τ_{n-1} において位置データが一致し、連続な一次微分値を持つ。しかし、必ずしもC^2連続（τ_i における $f_{i-1}(t)$の２次微分値と $f_i(t)$の２次微分値が一致する）ではない。各内点τ_i （i=1, … ,n-2）においてC^2連続であるという条件を加えるものは一般的な３次スプラインである（(３)、(４）３次スプライン補間参照)。オーダ４の PP 表現における i 番目の区間の多項式 $f_i(t)$は、２．差分商に記述されるニュートンの内挿公式により（式 4－6）と記述できる。

（式4－6）
$$\begin{cases} f_i(t) = g_i + (t-\tau_i)[\tau_i,\tau_i]g + (t-\tau_i)^2[\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1}]g \\ +(t-\tau_i)^2(t-\tau_{i+1})[\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1},\tau_{i+1}]g \\ = g_i + (t-\tau_i)[\tau_i,\tau_i]g + (t-\tau_i)^2[\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1}]g \\ +(t-\tau_i)^2((t-\tau_i)-\Delta\tau_i)[\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1},\tau_{i+1}]g \\ = g_i + (t-\tau_i)[\tau_i,\tau_i]g + (t-\tau_i)^2([\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1}]g - \Delta\tau_i[\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1},\tau_{i+1}]g) \\ +(t-\tau_i)^3[\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1},\tau_{i+1}]g \end{cases}$$

$[\tau_i,\tau_i]g = s_i$、$[\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1}]g = \dfrac{[\tau_i,\tau_{i+1}]g - [\tau_i,\tau_i]g}{\Delta\tau_i} = \dfrac{1}{\Delta\tau_i}([\tau_i,\tau_{i+1}]g - s_i)$、

$$[\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1},\tau_{i+1}]g = \frac{[\tau_i,\tau_{i+1},\tau_{i+1}]g - [\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1}]g}{\Delta\tau_i}$$
$$= \frac{1}{\Delta\tau_i}\left(\frac{[\tau_{i+1},\tau_{i+1}]g - [\tau_i,\tau_{i+1}]g}{\Delta\tau_i} - \frac{1}{\Delta\tau_i}([\tau_i,\tau_{i+1}]g - s_i)\right)$$
$$= \frac{1}{\Delta\tau_i}\left(\frac{1}{\Delta\tau_i}(s_{i+1} - [\tau_i,\tau_{i+1}]g) - \frac{1}{\Delta\tau_i}([\tau_i,\tau_{i+1}]g - s_i)\right)$$
$$= \frac{1}{\Delta\tau_i^{\,2}}(s_i + s_{i+1} - 2[\tau_i,\tau_{i+1}]g)$$

したがって、s_iを使用して（式 4－4）の $f_i^{\,j}$ は次式で表現できる（１次微分値を用いた３次 PP 表現）:

（式4－7）
$$\begin{cases} f_i^0 = f_i(\tau_i) = g_i \\ f_i^1 = f_i'(\tau_i) = s_i \\ f_i^2 = f_i^{(2)}(\tau_i) = 2\left(\dfrac{[\tau_i,\tau_{i+1}]g - s_i}{\Delta\tau_i} - \dfrac{f_i^3\Delta\tau_i}{6}\right) = \dfrac{6[\tau_i,\tau_{i+1}]g - 4s_i - 2s_{i+1}}{\Delta\tau_i} \\ f_i^3 = f_i^{(3)}(\tau_i) = \dfrac{6s_i + 6s_{i+1} - 12[\tau_i,\tau_{i+1}]g}{(\Delta\tau_i)^2} \end{cases}$$

for i=0,…,n-2

ここで、$[\tau_i,\tau_{i+1}]g$ は関数 $g(t)$ のパラメータ値 τ_i,τ_{i+1} における２階の差分商で $[\tau_i,\tau_{i+1}]g = \dfrac{g_i - g_{i+1}}{\tau_i - \tau_{i+1}} = \dfrac{\Delta g_i}{\Delta\tau_i}$。 また、$\Delta\tau_i$ は前進差分（forward difference）で $\Delta\tau_i = \tau_{i+1} - \tau_i$。

（２）　２次微分値による表現

次の(3)の３次スプライン補間のように、$t = \tau_i$ において C^2 級、すなわち、 f_{i-1} と f_i とは τ_i に

て、二次微分値まで同一である、とすると、３次 PP 表現は、２次微分値のみで表現可能となる。

τ_i における二次微分値を $f_i^{\,2}$ を用いて、c_i (curvature i)を $c_i = \dfrac{f_i^{\,2}}{2} = \dfrac{f_i^{(2)}(\tau_i)}{2}$ として定義する。

c_i を用いて、（式４−４）の $f_i^{\,j}$ は次式で表現できる（２次微分値を用いた３次 PP 表現）：

（式4−8）

$$\begin{cases} f_i^{\,0} = f_i(\tau_i) = g_i \\ f_i^{\,1} = f_i'(\tau_i) = \dfrac{\Delta g_i}{\Delta\tau_i} - \dfrac{2\Delta\tau_i}{3}c_i - \dfrac{\Delta\tau_i}{3}c_{i+1} \\ f_i^{\,2} = f_i^{(2)}(\tau_i) = 2c_i \\ f_i^{\,3} = f_i^{(3)}(\tau_i) = \dfrac{f_i^{(2)}(\tau_{i+1}) - f_i^{(2)}(\tau_i)}{\Delta\tau_i} = \dfrac{2(c_{i+1}-c_i)}{\Delta\tau_i} \end{cases} \quad \text{for i=0,…,n-2}$$

これは次のように求めることができる：

（式４−4）から $f_i^{(2)}(t) = f_i^{\,2} + f_i^{\,3}(t-\tau_i)$ で、$f_i^{(2)}(\tau_{i+1}) = f_i^{\,2} + f_i^{\,3}(\tau_{i+1}-\tau_i) = f_i^{\,2} + f_i^{\,3}\Delta\tau_i$。

したがって、$2c_{i+1} = f_i^{\,2} + f_i^{\,3}\Delta\tau_i = 2c_i + \dfrac{6s_i + 6s_{i+1} - 12[\tau_i,\tau_{i+1}]g}{\Delta\tau_i}$。また、（式４−7）から、

$2c_i = \dfrac{6[\tau_i,\tau_{i+1}]g - 4s_i - 2s_{i+1}}{\Delta\tau_i}$ であり、このふたつの式から s_i と s_{i+1} を c_i と c_{i+1} で表現して（式４−7）を書き直すと（式４−8）となる。

（３）　３次スプライン補間：１次微分値による形式

３次スプライン補間では、f_i は C^2 級の連続性の PP 表現（すなわち、f_{i-1} と f_i とは τ_i にて、同じ関数値、同じ一次、二次微分値を持つ）とする。（式４−7）から τ_i における f_{i-1} と f_i の２次微分値が等しいとすると：

$$f_{i-1}^{(2)}(\tau_i) = f_i^{(2)}(\tau_i)$$

$$f_{i-1}^{(2)}(\tau_i) = f_{i-1}^{2} + f_{i-1}^{3}\Delta\tau_{i-1} = \frac{6[\tau_{i-1},\tau_i]g - 4s_{i-1} - 2s_i}{\Delta\tau_{i-1}} + \frac{6s_{i-1} + 6s_i - 12[\tau_{i-1},\tau_i]g}{(\Delta\tau_{i-1})^2}\Delta\tau_{i-1}$$

$$= \frac{2s_{i-1} + 4s_i - 6[\tau_{i-1},\tau_i]g}{\Delta\tau_{i-1}}$$

$$f_i^{(2)}(\tau_i) = \frac{6[\tau_i,\tau_{i+1}]g - 4s_i - 2s_{i+1}}{\Delta\tau_i}$$　従って、

$$\frac{2s_{i-1}+4s_i-6[\tau_{i-1},\tau_i]g}{\Delta\tau_{i-1}}=\frac{6[\tau_i,\tau_{i+1}]g-4s_i-2s_{i+1}}{\Delta\tau_i}$$ これを整理すると

（式4－9） $$s_{i-1}\Delta\tau_i+2(\Delta\tau_{i-1}+\Delta\tau_i)s_i+\Delta\tau_{i-1}s_{i+1}=3[\tau_{i-1},\tau_i]g\Delta\tau_i+3[\tau_i,\tau_{i+1}]g\Delta\tau_{i-1}$$
for i=1,…,n-2

始終点における１次微分値s_0とs_{n-1}が何らかの方法で求まったとすると、（式 4－9）は(n-2)個の未知数s_i for i=1,…,n-2 に対する連立一次方程式となる。これを解いて、（式 4－7）と（式 4－4）から、３次スプラインによる補間問題を解くことができる。

（４） ３次スプライン補間：２次微分値による形式

f_iはC^2級の連続性の PP 表現（すなわち、f_{i-1}とf_iとはτ_iにて、同じ関数値、同じ一次、二次微分値を持つ）として、二次微分値c_iが既知で、τ_iにおけるf_{i-1}とf_iの１次微分値が等しいとすると：

$f'_{i-1}(\tau_i)=f'_i(\tau_i)$。（式 4－4）から $f'_{i-1}(\tau_i)=f^1_{i-1}+f^2_{i-1}\Delta\tau_{i-1}+\dfrac{f^3_{i-1}}{2}\Delta\tau^2_{i-1}$。これに（式 4－8）を代入すると

$$\begin{aligned}
f'_{i-1}(\tau_i)&=f^1_{i-1}+f^2_{i-1}\Delta\tau_{i-1}+\frac{f^3_{i-1}}{2}\Delta\tau^2_{i-1}\\
&=\frac{\Delta g_{i-1}}{\Delta\tau_{i-1}}-\frac{2\Delta\tau_{i-1}}{3}c_{i-1}-\frac{\Delta\tau_{i-1}}{3}c_i+2c_{i-1}\Delta\tau_{i-1}+\frac{1}{2}*\frac{2(c_i-c_{i-1})}{\Delta\tau_{i-1}}\Delta\tau^2_{i-1}\\
&=\frac{\Delta g_{i-1}}{\Delta\tau_{i-1}}+\frac{1}{3}\Delta\tau_{i-1}c_{i-1}+\frac{2}{3}\Delta\tau_{i-1}c_i
\end{aligned}$$

$$f'_i(\tau_i)=\frac{\Delta g_i}{\Delta\tau_i}-\frac{2\Delta\tau_i}{3}c_i-\frac{\Delta\tau_i}{3}c_{i+1}$$ 従って、

$$\frac{\Delta g_{i-1}}{\Delta\tau_{i-1}}+\frac{1}{3}\Delta\tau_{i-1}c_{i-1}+\frac{2}{3}\Delta\tau_{i-1}c_i=\frac{\Delta g_i}{\Delta\tau_i}-\frac{2\Delta\tau_i}{3}c_i-\frac{\Delta\tau_i}{3}c_{i+1}$$ これを整理すると

（式4－10） $$c_{i-1}\Delta\tau_{i-1}+2c_i(\Delta\tau_{i-1}+\Delta\tau_i)+c_{i+1}\Delta\tau_i=3\left(\frac{\Delta g_i}{\Delta\tau_i}-\frac{\Delta g_{i-1}}{\Delta\tau_{i-1}}\right)$$ for i=1,…,n-2

始終点における２次微分値c_0とc_{n-1}が何らかの方法で求まったとすると、（式 4－10）は(n-2)個の未知数c_i for i=1,…,n-2 に対する連立一次方程式となる。これを解いて、（式 4－8）と（式 4－4）から、３次スプラインによる補間問題を解くことができる。

（５） ３次スプライン補間以外の補間法

f_i を C^2 級の連続性の PP 表現とする以外の補間法（すなわち、f_{i-1} と f_i とは τ_i にて、同じ関数値、同じ一次微分値であるが、二次微分値は必ずしも連続でないとする）として次のような方法が知られている。:

<u>３次元エルミート補間(Cubic Hermite Interpolation)</u>

τ_i における一次微分値を s_i (slope i) for i=0,…,n-1 が $s_i = g'(\tau_i)$ として既知であれば、われわれは（式４−7）と（式４−4）（式４−9）から PP 表現を求めることができる。

<u>３次元ベッセル補間(Cubic Bessel Interpolation)</u>

ベッセル補間では、τ_i における一次微分値 s_i を近傍の３点からオーダ３の多項式（２次多項式）で近似して求め、（式４−7）（式４−9）から PP 表現を求める。ベッセル補間の s_i は（式４−11）により求めることができる。

（式4−11） $$s_i = \frac{\Delta\tau_i[\tau_{i-1},\tau_i]g + \Delta\tau_{i-1}[\tau_i,\tau_{i+1}]g}{\Delta\tau_i + \Delta\tau_{i+1}}$$

<u>アキマ補間(Akima's Interpolation)</u>

アキマ補間では、（式４−12）により、τ_i における一次微分値を s_i を求める。

（式4−12） $$s_i = \frac{w_{i+1}[\tau_{i-1},\tau_i]g + w_{i-1}[\tau_i,\tau_{i+1}]g}{w_{i+1} + w_{i-1}}$$

ここで、$w_i = \left|[\tau_i,\tau_{i+1}]g - [\tau_{i-1},\tau_i]g\right|$ である。

４．３　端末条件（Boundary Condition）

３次スプライン補間（式４−9）、（式４−10）では、何らかの方法で、始終点における１次微分値 s_0 と s_{n-1}、または２次微分値 c_0 と c_{n-1} を求める必要がある。これを端末条件という

（１）　始終点の１次微分値（接ベクトル）を与える：Clamped End Condition

始終点における１次微分値 s_0 と s_{n-1} がわかっているとき、すなわち、端点における接ベクトルがわかっているとき、これを端末条件とする。この条件は Clamped End Condition と呼ばれる。（式４−9）から s_0 と s_{n-1} がわかっているとき次式で PP 表現を求めることができる。

（式4－13）
$$\begin{cases} 2(\Delta\tau_0+\Delta\tau_1)s_1+\Delta\tau_0 s_2=3[\tau_0,\tau_1]g\Delta\tau_1+3[\tau_1,\tau_2]g\Delta\tau_0-s_0\Delta\tau_1 \\ s_{i-1}\Delta\tau_i+2(\Delta\tau_{i-1}+\Delta\tau_i)s_i+\Delta\tau_{i-1}s_{i+1}=3[\tau_{i-1},\tau_i]g\Delta\tau_i+3[\tau_i,\tau_{i+1}]g\Delta\tau_{i-1} \\ for\quad i=2,\dots,n-3 \\ s_{n-3}\Delta\tau_{n-2}+2(\Delta\tau_{n-3}+\Delta\tau_{n-2})s_{n-2}=3[\tau_{n-3},\tau_{n-2}]g\Delta\tau_{n-2}+3[\tau_{n-2},\tau_{n-1}]g\Delta\tau_{n-3}-\Delta\tau_{n-3}s_{n-1} \end{cases}$$

これを行列の形で記述すると、

（式4－14）　$R_1S_1=H_1$

となる。ここで、R_1は帯幅３の(n-2)*(n-2)の対角行列、S_1,H_1は(n-2)*１の行列で、次式で定義される。S_1は、$S_1=R_1^{-1}H_1$により求めることができる。

$$R_1=\begin{bmatrix} 2(\Delta\tau_0+\Delta\tau_1) & \Delta\tau_0 & & & & \\ \Delta\tau_2 & 2(\Delta\tau_1+\Delta\tau_2) & \Delta\tau_1 & & & \\ & & \vdots & & & \\ & \Delta\tau_i & 2(\Delta\tau_{i-1}+\Delta\tau_i) & \Delta\tau_{i-1} & & \\ & & \vdots & & & \\ & & \Delta\tau_{n-3} & 2(\Delta\tau_{n-4}+\Delta\tau_{n-3}) & \Delta\tau_{n-4} \\ & & & \Delta\tau_{n-2} & 2(\Delta\tau_{n-3}+\Delta\tau_{n-2}) \end{bmatrix}$$

$$S_1=\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_i \\ \vdots \\ s_{n-3} \\ s_{n-2} \end{bmatrix}、\quad H_1=\begin{bmatrix} 3[\tau_0,\tau_1]g\Delta\tau_1+3[\tau_1,\tau_2]g\Delta\tau_0-s_0\Delta\tau_1 \\ 3[\tau_1,\tau_2]g\Delta\tau_2+3[\tau_2,\tau_3]g\Delta\tau_1 \\ \vdots \\ 3[\tau_{i-1},\tau_i]g\Delta\tau_i+3[\tau_i,\tau_{i+1}]g\Delta\tau_{i-1} \\ \vdots \\ 3[\tau_{n-4},\tau_{n-3}]g\Delta\tau_{n-3}+3[\tau_{n-3},\tau_{n-2}]g\Delta\tau_{n-4} \\ 3[\tau_{n-3},\tau_{n-2}]g\Delta\tau_{n-2}+3[\tau_{n-2},\tau_{n-1}]g\Delta\tau_{n-3}-\Delta\tau_{n-3}s_{n-1} \end{bmatrix}$$

また、２次微分値c_iの表現（式 4－10）を利用するには、（式 4－8）で i=0 として、$f_0^1=s_0=\dfrac{\Delta g_0}{\Delta\tau_0}-\dfrac{2\Delta\tau_0}{3}c_0-\dfrac{\Delta\tau_0}{3}c_1$、（式４－4）を１回微分後 i=n-2, t=$\tau_{n-1}$として（式４－8）から

$f'_{n-2}(\tau_{n-1})=s_{n-1}=\dfrac{\Delta g_{n-2}}{\Delta\tau_{n-2}}+\dfrac{1}{3}\Delta\tau_{n-2}c_{n-2}+\dfrac{2}{3}\Delta\tau_{n-2}c_{n-1}$で、（式４－15）が成り立つ。

（式4－15）
$$\begin{cases} 2\Delta\tau_0 c_0 + \Delta\tau_0 c_1 = 3\dfrac{\Delta g_0}{\Delta\tau_0} - 3s_0 \\ c_{i-1}\Delta\tau_{i-1} + 2c_i(\Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i) + c_{i+1}\Delta\tau_i = 3(\dfrac{\Delta g_i}{\Delta\tau_i} - \dfrac{\Delta g_{i-1}}{\Delta\tau_{i-1}}) \quad \text{for i=1,...,n-2} \\ \Delta\tau_{n-2} c_{n-2} + 2\Delta\tau_{n-2} c_{n-1} = 3s_{n-1} - 3\dfrac{\Delta g_{n-2}}{\Delta\tau_{n-2}} \end{cases}$$

これを行列の形で記述すると

（式4－16）　$R_2 C = H_2$

となる。ここで、R_2 は帯幅３で n*n の対称対角行列(symmetric tridiagonal matrix)、C, H_2 は n*１の行列で、次式で定義される。C は、$C = R_2^{-1} H_2$ により求めることができる。

$$R_2 = \begin{bmatrix} 2\Delta\tau_0 & \Delta\tau_0 & & & & \\ \Delta\tau_0 & 2(\Delta\tau_0 + \Delta\tau_1) & \Delta\tau_1 & & & \\ & & \vdots & & & \\ & \Delta\tau_{i-1} & 2(\Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i) & \Delta\tau_i & & \\ & & \vdots & & & \\ & & \Delta\tau_{n-3} & 2(\Delta\tau_{n-3} + \Delta\tau_{n-2}) & \Delta\tau_{n-2} \\ & & & \Delta\tau_{n-2} & 2\Delta\tau_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}、\quad H_2 = \begin{bmatrix} 3[\tau_0, \tau_1]g - 3s_0 \\ 3[\tau_1, \tau_2]g - 3[\tau_0, \tau_1]g \\ \vdots \\ 3[\tau_i, \tau_{i+1}]g - 3[\tau_{i-1}, \tau_i]g \\ \vdots \\ 3[\tau_{n-2}, \tau_{n-1}]g - 3[\tau_{n-3}, \tau_{n-2}]g \\ 3s_{n-1} - 3[\tau_{n-2}, \tau_{n-1}]g \end{bmatrix}$$

（２）　始終点の２次微分値を与える

始終点における２次微分値 c_0 と c_{n-1} がわかっているのであれば、（式４－10）から次式が得られる。

（式4－17）
$$\begin{cases} c_0 = c_0 \\ c_{i-1}\Delta\tau_{i-1} + 2c_i(\Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i) + c_{i+1}\Delta\tau_i = 3\left(\dfrac{\Delta g_i}{\Delta\tau_i} - \dfrac{\Delta g_{i-1}}{\Delta\tau_{i-1}}\right) \quad \text{for i=1,...,n-2} \\ c_{n-1} = c_{n-1} \end{cases}$$

これを行列の形で記述すると、

（式4－18）　$R_3 C_3 = H_3$

ここで、R_3は、帯幅３で(n-2)*(n-2)の対称対角行列(symmetric tridiagonal matrix)、C_3, H_3は(n-2)*１の行列で、次式で定義される。C_3は、$C_3 = R_3^{-1} H_3$により求めることができる。

$$R_3 = \begin{bmatrix} 2(\Delta\tau_0 + \Delta\tau_1) & \Delta\tau_1 & & & & & \\ \Delta\tau_1 & 2(\Delta\tau_1 + \Delta\tau_2) & \Delta\tau_2 & & & & \\ & & \vdots & & & & \\ & \Delta\tau_{i-1} & 2(\Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i) & \Delta\tau_i & & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & \Delta\tau_{n-4} & 2(\Delta\tau_{n-4} + \Delta\tau_{n-3}) & \Delta\tau_{n-3} \\ & & & \Delta\tau_{n-3} & 2(\Delta\tau_{n-3} + \Delta\tau_{n-2}) \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_{n-3} \\ c_{n-2} \end{bmatrix}、\quad H_3 = \begin{bmatrix} 3[\tau_1, \tau_2]g - 3[\tau_0, \tau_1]g - c_0\Delta\tau_0 \\ 3[\tau_2, \tau_3]g - 3[\tau_1, \tau_2]g \\ \vdots \\ 3[\tau_i, \tau_{i+1}]g - 3[\tau_{i-1}, \tau_i]g \\ \vdots \\ 3[\tau_{n-3}, \tau_{n-2}]g - 3[\tau_{n-4}, \tau_{n-3}]g \\ 3[\tau_{n-2}, \tau_{n-1}]g - 3[\tau_{n-3}, \tau_{n-2}]g - c_{n-1}\Delta\tau_{n-2} \end{bmatrix}$$

（３）　始終点の１次微分値を与える

１次微分値s_iの表現（式４－9）を利用するには（式４－7）でi=0として、

$f_0^2 = c_0 = \dfrac{6[\tau_0, \tau_1]g - 4s_0 - 2s_1}{\Delta\tau_0}$で、$2s_0 + s_1 = 3[\tau_0, \tau_1]g - \dfrac{c_0\Delta\tau_0}{2}$、

（式４－４）を２回微分した後 i=n-2, t= τ_{n-1}として（式４－７）から、

$f_{n-2}^{(2)}(\tau_{n-1}) = c_{n-1} = \dfrac{2s_{n-2} + 4s_{n-1} - 6[\tau_{n-2}, \tau_{n-1}]g}{\Delta\tau_{n-2}}$ で、

$$s_{n-2} + 2s_{n-1} = 3[\tau_{n-2}, \tau_{n-1}]g + \frac{c_{n-1}\Delta\tau_{n-2}}{2}$$

これから、次式が成り立つ。

（式4－19）
$$\begin{cases} 2s_0 + s_1 = 3[\tau_0, \tau_1]g - \dfrac{c_0\Delta\tau_0}{2} \\ s_{i-1}\Delta\tau_i + 2(\Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i)s_i + \Delta\tau_{i-1}s_{i+1} = 3[\tau_{i-1}, \tau_i]g\Delta\tau_i + 3[\tau_i, \tau_{i+1}]g\Delta\tau_{i-1} \\ \text{for i} = 1, \ldots, \text{n - 2} \\ s_{n-2} + 2s_{n-1} = 3[\tau_{n-2}, \tau_{n-1}]g + \dfrac{c_{n-1}\Delta\tau_{n-2}}{2} \end{cases}$$

これを行列の形で記述すると

（式4－20）　$R_4 S = H_4$

ここで、R_4 は帯幅３で n*n の対角行列、S, H_4 は n*１の行列で、次式で定義される。

$$R_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \Delta\tau_1 & 2(\Delta\tau_0 + \Delta\tau_1) & \Delta\tau_0 & & & \\ & & \vdots & & & \\ & \Delta\tau_i & 2(\Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i) & \Delta\tau_{i-1} & & \\ & & \vdots & & & \\ & & \Delta\tau_{n-2} & 2(\Delta\tau_{n-3} + \Delta\tau_{n-2}) & \Delta\tau_{n-3} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_i \\ \vdots \\ s_{n-2} \\ s_{n-1} \end{bmatrix} 、\quad H_4 = \begin{bmatrix} 3[\tau_0, \tau_1]g - \dfrac{c_0\Delta\tau_0}{2} \\ 3[\tau_0, \tau_1]g\Delta\tau_1 + 3[\tau_1, \tau_2]g\Delta\tau_0 \\ \vdots \\ 3[\tau_{i-1}, \tau_i]g\Delta\tau_i + 3[\tau_i, \tau_{i+1}]g\Delta\tau_{i-1} \\ \vdots \\ 3[\tau_{n-3}, \tau_{n-2}]g\Delta\tau_{n-2} + 3[\tau_{n-2}, \tau_{n-1}]g\Delta\tau_{n-3} \\ 3[\tau_{n-2}, \tau_{n-1}]g + \dfrac{c_{n-1}\Delta\tau_{n-2}}{2} \end{bmatrix}$$

S は $S = R_4^{-1}H_4$ により求めることができる

（4）　自由端末条件：free end condition

$c_0 = c_{n-1} = 0$ とする端末条件は、自由端末条件とよばれる。この端末条件のスプラインは<u>自然スプライン（natural spline）</u>と呼ばれることもある。

（式4－21）
$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_{i-1}\Delta\tau_{i-1} + 2c_i(\Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i) + c_{i+1}\Delta\tau_i = 3\left(\dfrac{\Delta g_i}{\Delta\tau_i} - \dfrac{\Delta g_{i-1}}{\Delta\tau_{i-1}}\right) \quad \text{for i=1,...,n-2} \\ c_{n-1} = 0 \end{cases}$$

曲線の傾向として見ると、自由端末条件は直線と曲率連続で接続する曲線ということとなる。複数の曲線を接続するとき、端点で直線と接続する場合以外、この端末条件はあまり良好な曲線とはならない。

４．４　クラス MGPPRep

クラス MGPPRep(PP-Representation)は（式 4－3）のＰＰ表現をＣ＋＋のクラス化したもの。オーダ k（次数 k-1）のクラス MGPPRep は n 個のブレークポイント$\{\tau_i\}_{i=0}^{n-1}$を持ち、パラメータ値域は$\tau_0 \le t \le \tau_{n-1}$で、PP 表現の多項式 $f_i(t)$ は i=0,...,n-2 の(n-1)個の区間で定義される。メンバデータ m_coef は(n-1)個の区間の関数 $f_i(t)$ のパラメータτ_iにおける j 次微分値 $f_i^{\,j}$ を空間次元 m_sdim 分格納している。

プログラムリスト1　Program code MGPPRep のメンバーデータ

```
class MGCLASS MGPPRep {
...............
////////// Member data ////////
private:
    size_t m_order;       // Order of PP-Rep.
    size_t m_nbreak; // number of Break points(Interval number=m_nbreak-1).
                      // m_nbreak==m_break_point.length()
    size_t m_sdim;        // Space Dimension.
    MGNDDArray m_break_point;//Break point sequence.
    double* m_coef;       //PP coef.
...............
  }
```

後の B スプラインの項で記述されるが、すべての多項式表現は B-Spline 関数の形に変換できる（B 表現）。B-Spline または、NURBS のほうが MGPPRep で利用される明示的な多項式表現より、表現能力は高い。表現を保持するためのメモリ効率に関しても NURBS のほうが効率が良く、MGPPRep は PP 表現の手法としては一般に利用しない。歴史的には、表現を求めるためにいろいろの手法が開発されており（たとえば、Shoenberg&Reinsch の平滑化関数など）PP 表現を明示

的な多項式表現として求めることもあるが、それは一時的な表現であり、保持する形式としては、すべて B-Spline の形に変換して保持される。Shoenberg&Reinsch の平滑化関数関数でも、B-Spline の形に変換して求められる。