

MGCLによる
CAGD(Computer Aided Geometric Design)のための
曲面／曲線の取り扱い

2010/09/28

株式会社デージー・テクノロジーズ

水野 雄二

mizuno@dgtech.co.jp

目次

1. 次元	3
1.1 空間次元 (SPACE DIMENSION) と多様体次元 (MANIFOLD DIMENSION)	3
1.2 同次座標 (HOMOGENEOUS COORDINATES)	3

1. 次元

1.1 空間次元(Space Dimension)と多様体次元(Manifold Dimension)

空間次元とは取扱い対象の座標値の数を言う。2次元の空間次元であれば、 (x, y) の2個の実数値の対の座標値を持ち、3次元の空間次元であれば、 (x, y, z) の3個の実数値の組の座標値を持つ。通常我々が扱う空間次元は2次元か3次元であるが、次章の同次座標のように4次元の空間次元を扱うこともある。

多様体次元とは空間内での自由度の数であり、表現する幾何図形のパラメータの数と考えて良い。たとえば、3次元空間内でのひとつのパラメータにより表現される $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$ という曲線を考えると、ある t に対して $g(t)$ は $(x(t), y(t), z(t))$ という空間内の座標値であり、曲線の空間次元は3であり、曲線の多様体次元は1である。また、 $g(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ というふたつのパラメータの幾何図形は曲面であり、空間次元は3であり、多様体次元は2である。一般に、多様体次元の最大値は空間次元である。

多様体次元	対象の幾何	パラメータ
0	点	なし (0個のパラメータ)
1	曲線	t (1個のパラメータ)
2	曲面	(u, v) (2個のパラメータ)
3	ソリッド	(u, v, w) (3個のパラメータ)

$g(t)$ というように表現された幾何は、その空間次元についてはとくに断らないことが多いが、 $(x(t), y(t), z(t))$ (3次元空間) または、 $(x(t), y(t))$ (2次元空間) など表現していると考えることとする。

1.2 同次座標(Homogeneous Coordinates)

同次座標とは、表現対象の空間次元よりひとつ大きな空間次元で座標値を表現し、実際の座標値はその一つ余分な座標値 (これを同次座標と呼ぶ) により他の座標値を除算して求める。たとえば、 (x, y, z) の座標は、同次座標値 w を付加して、 (wx, wy, wz, w) として表現される。 $(x, y, z) \equiv (wx, wy, wz, w)$ と考える。同次座標は、計算機が最も不得意とする (もっとも誤差が生じやすい) 除算を後に延ばし、できるだけ除算を行わないように工夫することにより、計算誤差の発生を抑えることにも利用される (山口富士夫 著、4次元理論による図形・形状処理工学、日刊工業新聞社) が、われわれが通常利用する同次座標の利点は次のように要約できる：

- (1) 円錐曲線を三角関数ではなく、通常の実数の多項式表現の曲線式で表現できる
- (2) 3次元の世界を2次元のスクリーンへの投影として扱う透視変換を表現できる
- (3) 無限大を有限の座標値として表現できる

NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)は（非 rational な）B-Spline 曲線を同次座標の考えで、有理数化（Rational）したものと考えてよい。