BÀI TOÁN CÂY KIM CỦA BUFFON VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

NGUYỄN HOÀNG VŨ[1]

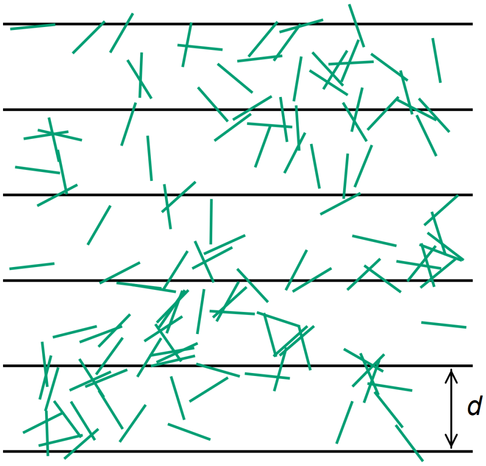
Bài toán cây kim của Buffon vẫn luôn xuất hiện trong sách giáo khoa toán dưới dạng một phương pháp để tính số π. Trong bài này, chúng ta hãy cũng Pi tìm hiểu chi tiết về bài toán này cũng như một số ứng dụng thú vị của nó trong thực tiễn.

1. Bài toán cây kim của Buffon

Georges–Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707 – 1788).

Nhà toán học Pháp thế kỉ 18, Georges Louis Leclerc, được phong Bá tước tại vùng có một ngôi làng tên Buffon nên ông còn có danh hiệu Comte de Buffon (Bá tước Buffon). Do đó các tài liệu thường gọi tắt là Buffon. Bài toán nổi tiếng mang tên ông có nội dung như sau:

"Trên một tờ giấy với các đường kẻ cách đều nhau khoảng cách d, thả ngẫu nhiên một cây kim chiều dài l $(d > l)$, hãy tìm xác suất để cây kim cắt một đường nằm ngang trên trang giấy".



Hình 1. Minh họa bài toán cây kim của Buffon.

Chúng ta hãy xét một lời giải không sử dụng tích phân được E. Barbier đưa ra năm 1860. Do $l < d$ nên chỉ có hai trường hợp xảy ra: cây kim cắt một đường kẻ và cây kim không đè lên đường kẻ nào; không tồn tại trường hợp cây kim cắt nhiều hơn một đường kẻ.

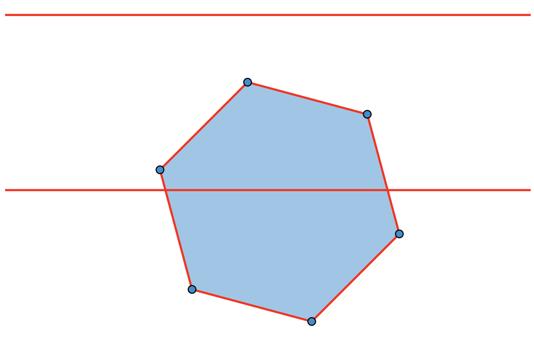
[1]*Hà Nội.*

Gọi $P(l)$ là xác suất để cây kim có độ dài l cắt một đường kẻ khi được thả. Lấy một điểm bất kỳ trên cây kim chia nó thành hai đoạn thẳng độ dài l_1 và l_2. Ta có:

$$P(l) = P(l_1) + P(l_2).$$

Quan hệ trên có thể được mở rộng ra thành dạng $P(l) = n \cdot P(\frac{l}{n})$. Tức là xác suất để một cây kim cắt đường kẻ khi được thả sẽ bằng n lần xác suất này của cây kim có độ dài bằng $\frac{1}{n}$ lần độ dài cây kim ban đầu.

Do đó, $P(l) = c \cdot l$ với c là một hằng số, $c = P(1)$ (khi $l = 1$ và $d > 1$).



Hình 2. Thả một đa giác cạnh l lên tờ giấy với các đường kẻ ngang cách đều nhau.

Ta hãy tiếp tục xét một đa giác đều N cạnh có độ dài mỗi cạnh bằng l (Hình 2). Ta đã biết ở trên rằng xác suất để mỗi cạnh của đa giác cắt một đường kẻ là $P(l)$. Đây cũng chính là giá trị kỳ vọng của số giao điểm của một cạnh với các đường kẻ, vì số giao điểm nói chung chỉ có thể là 0 hoặc 1 tương ứng với không cắt và cắt. Theo tính chất cộng tính của kỳ vọng, giá trị kỳ vọng của số giao điểm của đa giác với các đường kẻ khi thả lên tờ giấy là:

$$\begin{aligned} E &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} P(l) = N \cdot P(l) \\ &= N \cdot c \cdot l = c \cdot L, \end{aligned} \qquad (1)$$

với $L = N \cdot l$ là chu vi của đa giác đều.

Giá trị kỳ vọng

Trong một thí nghiệm ngẫu nhiên, nếu kết quả có giá trị x_i có xác suất xảy ra là p_i thì giá trị kỳ vọng của kết quả thu được được tính theo công thức:

$$E = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n.$$

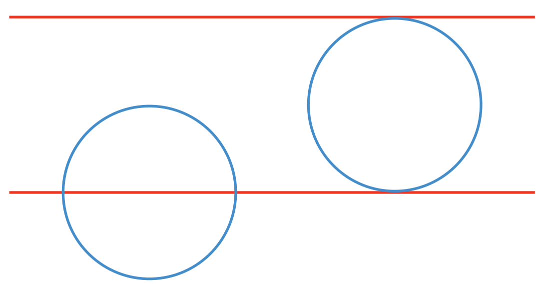
Ví dụ, với thí nghiệm gieo con xúc xắc, giá trị kỳ vọng của số chấm thu được là:

$$E = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \cdots + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3,5.$$

Chú ý rằng giá trị kỳ vọng có thể không trùng với một trong các giá trị có thể xảy ra. Theo định luật số lớn trong xác suất, với số lần thực hiện thí nghiệm càng lớn thì giá trị trung bình của các kết quả sẽ càng đến gần với giá trị kỳ vọng.

Mặt khác, nếu giữ chu vi L của đa giác không đổi, khi $N \to \infty$, đa giác của ta sẽ trở thành một đường tròn có chu vi L và bán kính $\frac{L}{2\pi}$.

Để tính hệ số c, ta xét một trường hợp đặc biệt, khi đường tròn có đường kính đúng bằng khoảng cách d giữa các dòng kẻ. Khi đó, ta có $L = \pi d$.



Hình 3. Đường tròn có đường kính d sẽ luôn cắt một đường kẻ tại hai điểm hoặc tiếp xúc hai đường kẻ.

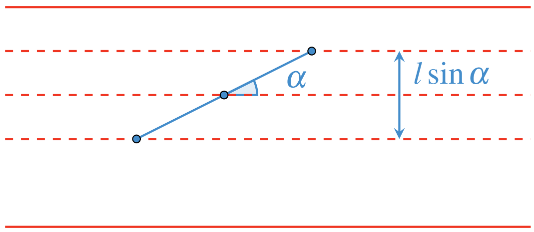
Đường tròn có đường kính d sẽ luôn cắt một đường kẻ tại 2 giao điểm hoặc tiếp xúc với 2 đường kẻ liên tiếp, do đó với đường tròn này $E = 2$. Thay vào (1) ta có:

$$2 = c \cdot \pi d$$

hay $c = \dfrac{2}{\pi d}$.

Vậy xác suất để một cây kim khi thả cắt đường nằm ngang trên giấy là

$$P(l) = \frac{2l}{\pi d}. \qquad (2)$$



Hình 4. Chứng minh công thức (2) sử dụng tích phân.

Ta cũng có thể thu được đáp án này bằng cách sử dụng tích phân. Cụ thể là ta xây dựng một mô hình xác suất cho vị trí rơi của cây kim. Gọi α $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$ là góc mà cây kim tạo với phương nằm ngang. Hình chiếu của nó theo phương vuông góc với các đường kẻ sẽ có độ dài $l \sin\alpha$, mà khoảng cách giữa hai đường kẻ là d, do đó xác suất để nó cắt một đường kẻ là $\frac{l \sin\alpha}{d}$. Coi phân bố của α là đều trên khoảng $[0, \frac{\pi}{2}]$, ta tính giá trị trung bình bằng cách lấy tích phân trên khoảng này rồi chia cho $\frac{\pi}{2}$ để thu được (2):

$$\begin{aligned} P(l) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l \sin\alpha}{d} d\alpha = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}\left[-\cos\alpha\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}. \end{aligned}$$

Với cây kim có độ dài lớn hơn d, xác suất để nó cắt ít nhất một đường kẻ trong khoảng $\left[\arcsin\left(\frac{d}{l}, \frac{\pi}{2}\right)\right]$ sẽ luôn là 1, do đó:

$$\begin{aligned} &P(l) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)} \frac{l \sin\alpha}{d} + \int_{\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\alpha\right) \\ &= 1 + \frac{2}{\pi}\left(\frac{l}{d}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}}\right) - \arcsin\frac{d}{l}\right). \qquad (3) \end{aligned}$$

Bài toán này cũng được Laplace mở rộng cho trường hợp lưới trên tờ giấy là lưới chữ nhật và tính xác suất để cây kim không cắt một đường kẻ dọc hay ngang nào.

Cũng chính Laplace đã đề xuất sử dụng thí nghiệm này để tính giá trị của số π. Đây cũng là khía cạnh được biết đến nhiều nhất về bài toán cây kim của Buffon. Thật vậy, nếu trong M lần thả cây kim, ta thu được m lần mà nó cắt một đường kẻ, công thức (2) cho ta:

$$\pi = \frac{2l}{d \cdot \left(\frac{m}{M}\right)},$$

với $\frac{m}{M}$ là xác suất thực nghiệm của sự kiện cây kim cắt một đường kẻ.

Đề xuất này của Laplace rất gần với phương pháp Monte Carlo của hơn một thế kỉ sau. Tuy vậy, về mặt thực tế, nó gặp phải một số vấn đề. Nhiều thí nghiệm được tiến hành và cho kết quả của π không quá chính xác: $3{,}1596$; $3{,}1553$; $3{,}137$.

Năm 1901, Lazzarini công bố giá trị $3{,}1415929$ cho 3408 lần thả cây kim, một giá trị khá chính xác (so với giá trị đã biết hiện nay, thì chỉ có chữ số cuối là không đúng). Tuy vậy, một số nghiên cứu đã chỉ ra kết quả này hầu như là ngụy tạo. Theo các lí thuyết về ước lượng tham số, để có độ chính xác đến 6 chữ số sau dấu phẩy, cần phải tiến hành thí nghiệm trên $1{,}3410^{14}$ lần chứ không phải vài nghìn lần. Đồng thời, số liệu của Lazzarini sử dụng phân số $\frac{355}{113}$, một số hữu tỉ được biết là một xấp xỉ tốt cho π.

Ngay cả với máy tính điện tử thì việc ước lượng π bằng cách sử dụng thí nghiệm Buffon cũng không đạt được độ chính xác quá cao do việc làm tròn số trên máy tính. Đồng thời, các chữ số của π cũng có thể được tính toán một cách chính xác hơn bởi các phương pháp khác.

Tuy vậy, bài toán cây kim của Buffon có một ý nghĩa quan trọng trong lịch sử toán học bởi sự liên hệ giữa xác suất và hình học. Đây là một hướng tiếp cận mới khác với hướng tiếp cận xác suất sử dụng tổ hợp như truyền thống.

Bài tập

1. Chứng minh rằng khi cây kim vô cùng dài thì một cách hầu chắc chắn nó sẽ luôn cắt ít nhất một đường kẻ, tức là biểu thức trong (3) có giới hạn là 1 khi $l \to \infty$.

2. Trên tờ giấy với các đường kẻ ngang cách nhau khoảng d, thả ngẫu nhiên một đường tròn với bán kính $r < \frac{d}{2}$. Hãy tính xác suất để đường tròn cắt và không cắt các đường kẻ.

3. Tương tự bài trên nhưng thả một hình vuông có cạnh $a < d$. Hãy tính xác suất để số giao điểm của các cạnh hình vuông với các đường kẻ ngang là:

a) 0 *b*) 1 *c*) 2 *d*) 3 *e*) 4

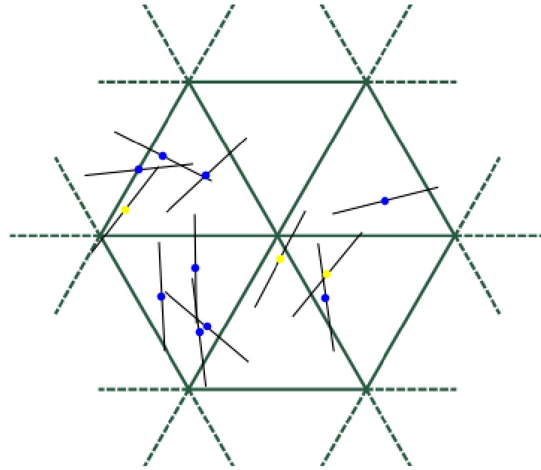
Gợi ý: Xét trường hợp $a < \frac{d}{\sqrt{2}}$ và $a > \frac{d}{\sqrt{2}}$.

4. Trong thí nghiệm Buffon, với cây kim có độ dài $l > d$, hãy chứng minh giá trị kỳ vọng của số giao điểm của cây kim với các đường kẻ ngang là $E = \frac{2l}{\pi d}$. (Gợi ý: Gọi N là số nguyên lớn nhất sao cho $d < \frac{l}{N}$, coi cây kim là hình gồm N đoạn thẳng bằng nhau).

5. Mở rộng của Laplace. Trên một lưới chữ nhật, với mỗi hình chữ nhật có chiều dài a và chiều rộng b, thả ngẫu nhiên một cây kim chiều dài l (biết rằng l nhỏ hơn cả a và b). Hãy tính xác suất để cây kim không chạm bất kỳ cạnh nào của lưới.

6. Lưới Uspensky. Cho một lưới tam giác đều như hình vẽ với d là chiều cao của mỗi tam giác đều. Thả một cây kim chiều dài $l < d$ lên lưới tam giác đều này. Hãy tính xác suất để số giao điểm của cây kim với các đường trong lưới là:

a) 0 *b*) 1 *c*) 2 *d*) 3

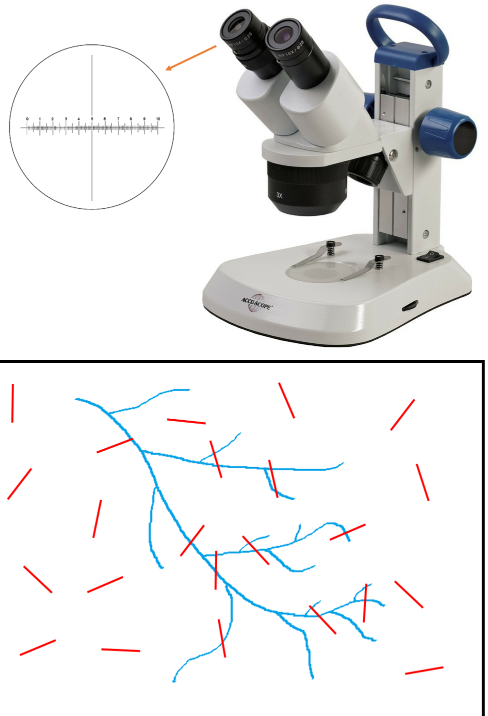


7. Bài toán sợi mì của Buffon. Trên một tờ giấy với các đường kẻ ngang song song cách nhau khoảng d, ném ngẫu nhiên một sợi mì ướt có độ dài l. Chứng minh rằng giá trị kì vọng của số giao điểm của sợi mì với các đường kẻ ngang là $E = \frac{2l}{\pi d}$. Giả sử rằng khi ném sợi mì, chiều dài của nó không đổi nhưng nó có thể uốn thành một đường cong bất kỳ.

2. Đo độ dài bằng phương pháp ngẫu nhiên

Với một số thay đổi, thí nghiệm của Buffon có thể được sử dụng để giải quyết một vấn đề thực tế trong khoa học: đo độ dài của rễ cây (Newman, 1966). Xét một bản thủy tinh mà trên đó một mẫu vật (ví dụ rễ cây) được trải phẳng. Khi quan sát mẫu vật qua kính hiển vi, người ta sử dụng một thị kính với một đường sợi tóc để soi các vùng khác nhau của bản thủy tinh.

Với mỗi lần quan sát, thị kính được quay một góc bất kì và đường sợi tóc cũng được quay theo. Sau đó, số giao điểm của đường sợi tóc với rễ cây sẽ được ghi lại. Cách thức này được lặp lại nhiều lần với các vị trí quan sát ngẫu nhiên khác nhau trên bản thủy tinh. Để tiện lợi hơn, ta có thể đặt bản thủy tinh trên một tấm giấy với các điểm ngẫu nhiên đã được đánh dấu trước. Các điểm quan sát cũng có thể là một lưới ô vuông các điểm cách đều.



Hình 5. Trên: Thị kính của kính hiển vi có đường sợi tóc (đường thẳng đứng). Dưới: minh họa phép đo độ dài rễ cây (màu xanh) với các vị trí và góc quay khác nhau của đường sợi tóc (màu đỏ). Số lượng đường sợi tóc trong hình chỉ mang tính minh họa, trong thực tế, cấu trúc rễ cây càng phức tạp thì số lượng đường sợi tóc cần sử dụng lại càng nhiều. Mỗi lần quan sát qua kính, ta chỉ thấy được một vùng hình tròn có đường kính là đường sợi tóc.

Về mặt bản chất, thay vì đếm số giao điểm của cây kim được thả ngẫu nhiên với các đường kẻ ngang, ta đếm số giao điểm của các đường sợi tóc được phân bố ngẫu nhiên với mẫu vật rễ cây (gồm nhiều đường cong) trên bản thủy tinh.

Độ dài của rễ cây có thể được tính theo công thức:

$$R = \frac{\pi N A}{2H}, \qquad (4)$$

với N là số giao điểm đã được đếm, A là diện tích bản thủy tinh và H là tổng độ dài của tất cả các đường sợi tóc.

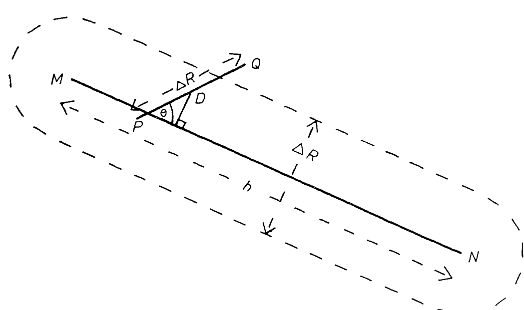
Thật vậy, xét một đoạn rễ cây PQ có chiều dài ΔR và một đường sợi tóc MN chiều dài h. Nếu khoảng cách từ trung điểm D của PQ đến MN lớn hơn $\frac{1}{2}\Delta R$ thì PQ và MN chắc chắn không cắt nhau. Miền giới hạn này được biểu diễn bằng đường nét đứt trong hình. Giả sử $\frac{\Delta R}{h}$ là nhỏ, diện tích miền này có thể được xấp xỉ bằng $\Delta R \cdot h$. Do MN được phân bố ngẫu nhiên trên bản thủy tinh, xác suất để D nằm trong miền này là $\frac{\Delta R \cdot h}{A}$.

Khi D nằm trong miền cách MN một khoảng không quá $\frac{1}{2}\Delta R$, khoảng cách từ D đến MN cần phải không lớn hơn $\frac{1}{2}\Delta R|\sin\theta|$, với θ là góc tạo bởi hai đường thẳng PQ và MN, để PQ và MN cắt nhau. Xác suất để PQ và MN cắt nhau khi D đã nằm trong miền trên là:

$$\frac{\frac{1}{2}\Delta R|\sin\theta|}{\frac{1}{2}\Delta R} = |\sin\theta|.$$

Do đó, theo công thức nhân xác suất, xác suất để PQ và MN cắt nhau là:

$$p = \frac{\Delta R \cdot h}{A}|\sin\theta|.$$



Hình 6. Đoạn rễ cây PQ và đường sợi tóc MN.

Tổng độ dài của các đoạn sợi tóc được phân bố ngẫu nhiên trên miền diện tích A là H. Các góc θ cũng nhận giá trị ngẫu nhiên trong khoảng $[0, 2\pi]$ nên giá trị kì vọng của số giao điểm của PQ với các đường sợi tóc là:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta R \cdot H}{A}|\sin\theta|d\theta = \frac{2(\Delta R \cdot H)}{\pi A}.$$

Coi rễ cây là một hình với nhiều đoạn có độ dài ΔR, ta được giá trị kì vọng của số giao điểm của rễ cây với tất cả các đường sợi tóc là:

$$N = \frac{2RH}{\pi A}.$$

Do N là giá trị kỳ vọng nên khi đo đạc người ta cần phải tiến hành nhiều lần quan sát với các vị trí ngẫu nhiên của đường sợi tóc để kết quả thí nghiệm gần với giá trị của N trong công thức.

Ví dụ, với bản thủy tinh 10×20 cm; tiến hành quan sát 40 lần, độ dài đường sợi tóc (đường kính của thị trường vùng quan sát được) là $1{,}88$ cm; số giao điểm quan sát được là 344 thì tổng độ dài của rễ cây là:

$$R - \frac{\pi \cdot 344 \cdot 10 \cdot 20}{2 \cdot 40 \cdot 1{,}88} = 1436 \text{ cm}.$$

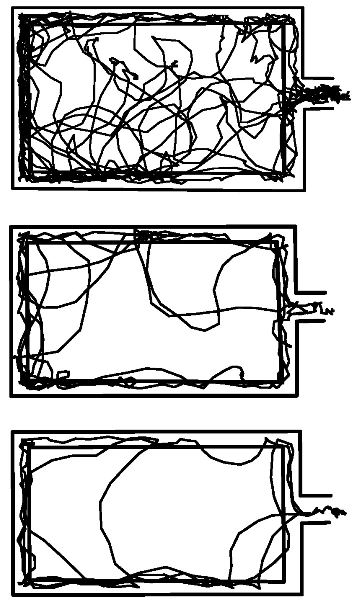
Cách đo độ dài này đã được các nhà thực vật học sử dụng trong nhiều thập kỉ mãi cho đến gần đây mới được thay thế bởi các phần mềm xử lí ảnh từ các camera có độ phân giải cao.

3. Kiến biết đo diện tích bằng xác suất?

Phương pháp đo độ dài ở phần trước cũng có thể được biến đổi để tiến hành đo diện tích.

Một nghiên cứu khá thú vị trên loài kiến *Leptothorax albipennis* đưa ra giả thuyết rằng loài kiến này đã sử dụng xác suất để tính diện tích khi chọn tổ (kiến thường cố gắng chọn tổ có diện tích lớn nhất trong các vị trí khảo sát) (Mallon & Franks, 2000).

Khi sử dụng camera để theo dõi kiến trinh sát trong phòng thí nghiệm, người ta thấy trong lần thứ nhất đến một vị trí để khảo sát, con kiến sẽ đi một cách ngẫu nhiên trong hộp theo một đường cong bao phủ phần lớn các vị trí trong hộp (gọi là đường cong L). Trong những lần tiếp theo (thường nó sẽ quay lại lần thứ hai hoặc có thể là lần thứ 3), nó sẽ đi một đường cong đơn giản hơn (gọi là đường cong S). Đồng thời, khi đến các vị trí đã đi qua (kiến khi di chuyển có thể tiết ra pheromone để đánh dấu đường đi của mình), tức là các giao điểm của L và S, kiến dành thời gian lâu hơn nhiều.



Hình 7. Từ trên xuống: Đường đi của kiến trinh sát khi khảo sát tổ được camera ghi lại trong lần khảo sát thứ nhất, thứ hai và thứ ba.

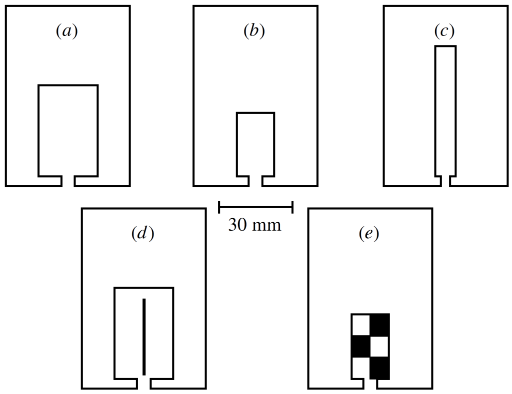
Theo các tác giả, số giao điểm của L và S được kiến trinh sát sử dụng để đánh giá diện tích của một vị trí làm tổ. Trong công thức (4), nếu ta thay các đường sợi tóc bằng một đường cong L và rễ cây R bằng đường cong S, công thức này vẫn đúng và diện tích có thể được xấp xỉ theo

$$A = \frac{2SL}{\pi N}, \tag{5}$$

với N là số giao điểm của S và L.

Để kiểm chứng việc này, thí nghiệm được tiến hành với nhiều con kiến trinh sát khác nhau trên các loại hộp để làm tổ như trong hình vẽ.

Trong thí nghiệm để chọn giữa hai tổ cùng chu vi (hình 8*a* và hình 8*c*), kiến luôn chọn tổ có diện tích lớn hơn sau khi khảo sát cả hai. Do đó, diện tích chứ không phải chu vi mới là tiêu chí chọn tổ. Vì các tổ có một tấm chắn ở giữa (hình 8*d*) cũng được chọn với khả năng tương tự như tổ bình thường, cho thấy số lần va chạm với chướng ngại vật trong tổ cũng không phải nhân tố quyết định.



Hình 8. Các loại tổ được sử dụng trong thí nghiệm về việc chọn tổ của kiến trinh sát. a) tổ tiêu chuẩn; b) tổ đồng dạng và có diện tích bằng một nửa tổ tiêu chuẩn; c) tổ có diện tích bằng một nửa tổ tiêu chuẩn nhưng có cùng chu vi; d) tổ tiêu chuẩn có tấm chắn ở giữa; e) tổ dạng b với một nửa được phủ các tấm đệm có thể nhấc ra.

Thí nghiệm cũng cho thấy khi kiến trở lại lần thứ hai, nếu tổ đã được thay bằng một tổ mới hoặc một tổ đã được một con kiến khác đi qua, nó sẽ tiến hành khảo sát lại như là đang đi qua lần thứ nhất. Điều này cho thấy trong lần khảo sát thứ nhất, kiến sẽ lưu lại pheromone đánh dấu đường đi và pheromone này đặc trưng cho từng cá thể. Việc này cũng cho phép các con kiến không làm ảnh hưởng đến quá trình khảo sát của nhau khi một vị trí có thể được nhiều hơn một con kiến đến thăm dò.

Nếu kiến trở lại lần thứ ba hoặc sau đó, thời gian nó tiến hành khảo sát cũng không khác nhiều lắm so với lần thứ hai, do đó có thể thấy pheromone chỉ được rải ở lần thăm dò thứ nhất còn các lần lặp lại sau để tăng độ chính xác của việc ước lượng.

Loại tổ trong hình 8e được thiết kế đồng dạng với tổ trong hình 8a nhưng có diện tích bằng một nửa. Đồng thời, ở nền của loại tổ này, một nửa diện tích là các tấm đệm có thể lấy ra. Sau khi kiến khảo sát tổ dạng này lần thứ nhất, người ta sẽ lấy các tấm đệm ra trước khi kiến quay lại lần thứ hai. Khi kiến trở lại, do các vị trí có đệm bị lấy ra không còn pheromone nên số giao điểm của đường đi của nó trong lần thứ hai với đường đi trong lần thứ nhất sẽ giảm một nửa. Trong thí nghiệm chọn giữa tổ dạng 8a và dạng 8e, một nửa số kiến chọn 8e dù diện tích chỉ có một nửa. Thí nghiệm với kích thước tổ lớn gấp đôi cho thấy khoảng cách L của mỗi con kiến là không đổi giữa các tổ với diện tích khác nhau. Kết hợp với với (5), có thể thấy thấy kiến đánh giá diện tích theo tỉ lệ nghịch với tần số gặp giao điểm $\frac{N}{S}$.

Việc nghiên cứu những thuật toán liên quan đến hành vi của kiến không chỉ có ý nghĩa về mặt sinh học mà còn có nhiều ứng dụng khác, ví dụ như trong việc lập trình điều khiển hành vi của robot.

4. Lời kết

Lĩnh vực xác suất hình học còn có nhiều bài toán khác có giá trị về cả mặt lý thuyết lẫn thực tiễn. Pi cũng sẽ tiếp tục giới thiệu các bài toán này đến với độc giả trong tương lai không xa.

Tài liệu tham khảo

[1] Aigner, M., & Ziegler, G. (2004). *Proof from* THE BOOK. Springer–Verlag.

[2] Mallon, E. B., & Franks, N. R. (2000). Ants estimate area using Buffon's needle. *Proc. R. Soc. Lond.* B(267), 765 – 770.

[3] Mugford, S. T., Mallon, E. B., & Franks, N. R. (2001). The accuracy of Buffon's needle: a rule of thumb used by ants to estimate area. *Behavioral Ecology*, 12(6), 655 – 658.

[4] Newman, E. I. (1966). A Method of Estimating the Total Length of Root in a Sample. *Journal of Applied Ecology*, 139 – 145.

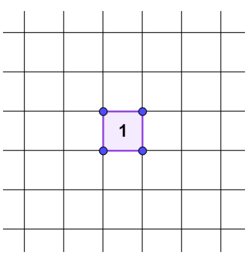
[5] Ramaley, J. F. (1969). Buffon's Noodle Problem. *The American Mathematical Monthly*, 78(8), 916 – 918.

DIỆN TÍCH TRÊN LƯỚI Ô VUÔNG (Phần I)

NGÔ VĂN MINH, PHAN NGỌC MINH VÀ NGUYỄN THỊ NHUNG

Tính diện tích của một hình là một chủ đề hay và có nhiều điều thú vị của các bạn nhỏ cuối cấp 1. Chủ đề này cũng được các thầy cô trong Câu lạc bộ Unicorn Math Circle (UMC) giảng dạy trong nhiều buổi với sự tham gia hào hứng của các bạn học và có nhiều cách giải độc đáo đã được đưa ra. Chúng ta cùng bắt đầu với một dạng tính diện tích trong những bài giảng của các thầy cô – Tính diện tích hình trên lưới ô vuông. Với cách tính được trình bày trong bài viết này, các bạn nhỏ chưa học đến những công thức tính diện tích vẫn có thể tính được diện tích của nhiều kiểu hình khác nhau nhé, vì chúng ta chỉ dựa vào các ô vuông trên lưới thôi. Hơn thế nữa, dựa vào lưới ô vuông các em còn được khám phá những định lý nổi tiếng như Định lý Pythagoras, Định lý Pick và những tính chất hay khác của Toán học.

1. Diện tích của những hình cơ bản



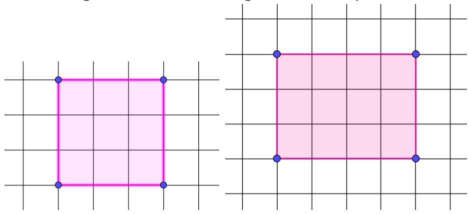
Hình 1.

Như nhiều bạn đã biết, lưới ô vuông gồm các đường thẳng song song cách đều nhau theo cả chiều ngang cũng như chiều dọc và tạo thành những hình vuông mà ta quy ước là chiếm 1 đơn vị diện tích. Hình vuông đơn vị này là cơ sở để chúng ta tính diện tích của các hình tạo ra trên lưới trong các phần dưới đây.

Trước hết ta bắt đầu với việc tìm diện tích của những hình rất đơn giản nhưng đóng vai trò quan trọng trong việc tính toán diện tích các hình ở các ví dụ sau.

Hình cơ bản đầu tiên cần tính diện tích là hình vuông và hình chữ nhật có các cạnh nằm trên các đường thẳng của lưới.

Ví dụ 1. Tính diện tích của hai hình được tô đậm trong lưới ô vuông dưới đây.



Hình 2 *Hình* 3.

Lời giải. Bằng cách đếm trực tiếp, ta thấy

– Hình A có tổng cộng 9 ô vuông nên có diện tích là 9 đơn vị;

– Hình B có tổng cộng 12 ô vuông nên có diện tích phần hình bằng 12 đơn vị.

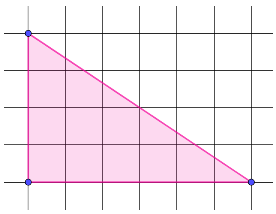
Các bạn mà học công thức tính diện tích hình vuông và hình chữ nhật rồi thì có thể nhận thấy ngay kết quả trên có thể tính được bằng cách sau.

– Cạnh của hình vuông là 3 đơn vị nên diện tích là: $3 \times 3 = 9$ đơn vị;

– Hình chữ nhật chiều dài và chiều rộng tương ứng là 4 và 3 đơn vị nên có diện tích là: $4 \times 3 = 12$ đơn vị.

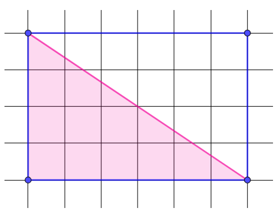
Chúng ta tiếp tục với một hình cơ bản nữa là tam giác có hai cạnh trùng với hai đường dọc và ngang của lưới ô vuông.

Ví dụ 2. Tính diện tích tam giác được tô đậm trong hình dưới đây.



Hình 4.

Lời giải. Ở ví dụ này, các bạn nhỏ quan sát một chút thì sẽ thấy ngay diện tích của tam giác đã cho bằng một nửa hình chữ nhật màu cỡ 6×4 được tô màu xanh dương dưới đây.



Hình 5.

Do diện tích hình chữ nhật được tạo bởi 24 ô vuông nên diện tích hình tam giác bằng $\frac{24}{2} = 12$ (đơn vị diện tích).

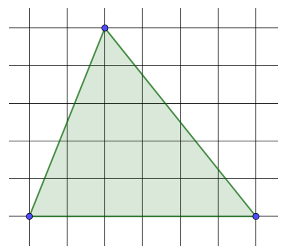
Ngoài ra, nếu bạn nhỏ nào đã biết công thức tính diện tích tam giác thì hình trong Ví dụ 2 là tam giác vuông với 2 cạnh góc vuông là 6 và 4 đơn vị. Do đó diện tích của tam giác là $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$ đơn vị.

Hai ví dụ trên cho ta một cái nhìn trực quan về bài toán tính diện tích trên lưới ô vuông, ta chỉ đơn giản dùng cách đếm đơn thuần số ô vuông trên lưới. Trong các bài toán sau, có thể có nhiều cách giải khác nhau nhưng bài viết đưa ra cách giải mà chỉ dựa vào những hình cơ bản đã biết cách tính diện tích trong Ví dụ 1 và Ví dụ 2.

2. Diện tích hình chia thành những hình cơ bản

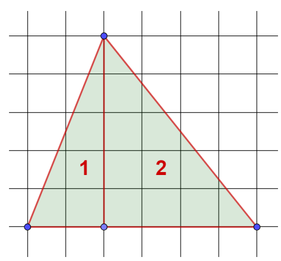
Chúng ta lại tiếp tục với tính diện tích của tam giác nhé. Lần này là tam giác chỉ có một cạnh trùng với đường dọc–ngang của lưới và nhận thấy ta không thể áp dụng luôn cách tính như trong Ví dụ 2. Tuy nhiên bằng cách chia tam giác đã cho thành các tam giác nhỏ có hai cạnh trùng với những đường thẳng của lưới, ta hoàn toàn có thể áp dụng cách tính diện tích tam giác như trong tình huống trên.

Ví dụ 3. Tính diện tích tam giác được tô đậm trong hình cho ở dưới đây.



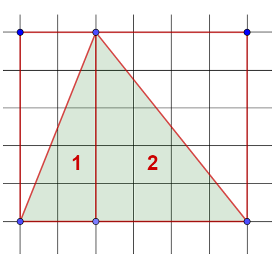
Hình 6.

Lời giải. Ta chia hình tam giác lớn thành hai hình tam giác (1) và (2).



Hình 7.

Sau đó tính diện tích từng tam giác, tương tự như trong Ví dụ 2.



Hình 8.

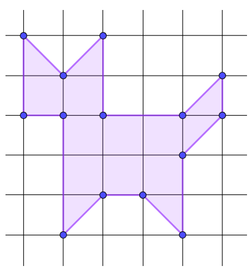
Hình tam giác (1) có diện tích bằng một nửa hình chữ nhật bên trái nên có diện tích là: $\dfrac{10}{2} = 5$ (đơn vị diện tích).

Hình tam giác (2) có diện tích bằng một nửa hình chữ nhật bên phải và do đó có diện tích là: $\dfrac{20}{2} = 10$ (đơn vị diện tích).

Suy ra hình cần tính có diện tích bằng $5 + 10 = 15$ (đơn vị diện tích).

Tính diện tích bằng cách chia hình thành những hình nhỏ hơn không chỉ dừng lại ở việc tính toán những dạng hình học quen thuộc như hình tam giác, hình chữ nhật, ... mà còn có thể áp dụng cho rất kiểu hình khác nhau. Chẳng hạn như hình "chú mèo" ngộ nghĩnh dưới đây.

Ví dụ 4. Tính diện tích "chú mèo" được cho bởi phần tô đậm trong hình sau.

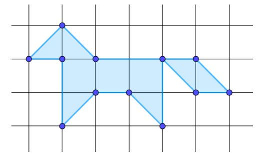


Hình 9.

Lời giải. Ở hình trên có những tam giác nửa, tức là tam giác có diện tích bằng một nửa hình vuông đơn vị và có diện tích là $\dfrac{1}{2}$ đơn vị diện tích. Ta đếm có tổng cộng 8 hình vuông và 6 hình tam giác nửa (2 tai, 2 chân và cái đuôi). Vì thế "chú mèo" có diện tích bằng $8 + \dfrac{1}{2} \times 6 = 11$ đơn vị diện tích.

Một chú ngựa xinh xắn cần tính diện tích cho các em luyện tập thêm nhé.

Bài tập 1. Tìm diện tích "chú ngựa" trong hình sau.

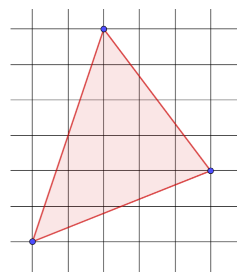


Hình 10.

3. Diện tích hình tính theo phần bù

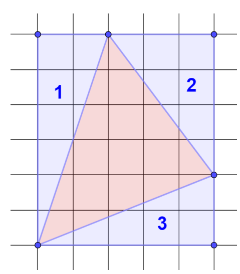
Diện tích cần tính dưới đây tiếp tục là một tam giác, nhưng lần này là một tam giác tùy ý, không có cạnh nào trùng với những đường thẳng của lưới.

Ví dụ 5. Tính diện tích của hình được tô đậm sau đây.



Hình 11.

Lời giải. Rõ ràng với tam giác này, việc tính trực tiếp phần bên trong là khó khăn. Tuy nhiên phần bù của tam giác trong hình chữ nhật bao quanh nó lại là những tam giác như trong Ví dụ 2 nên ta hoàn toàn có thể tính được ngay.



Hình 12.

Lần lượt gọi ba tam giác phần bù được tô xanh là (1), (2) và (3). Ta thấy:

– Hình (1) có diện tích bằng nửa hình chữ nhật cỡ 6×2, nên có diện tích bằng 6.

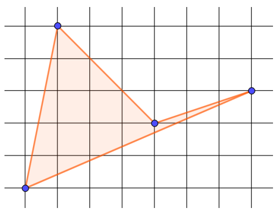
– Hình (2) có diện tích bằng nửa hình chữ nhật cỡ 4×3, nên có diện tích bằng 6.

– Hình (3) có diện tích bằng nửa hình chữ nhật cỡ 5×2, nên có diện tích bằng 5.

Vì phần bù được tạo thành bởi ba tam giác vuông (1), (2) và (3) nên diện tích của chúng bằng $6+6+5=17$. Suy ra diện tích tam giác được tô đậm bằng $30-17=13$ (đơn vị diện tích).

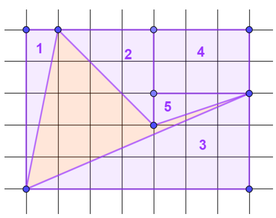
Để rèn luyện thêm cách tính diện tích dựa trên phần bù, chúng ta cùng làm tiếp ví dụ sau.

Ví dụ 6. Tính diện tích phần hình được tô đậm dưới đây.



Hình 13.

Lời giải. Trong ví dụ này, ta tiếp tục tính diện tích theo phần bù và chia phần bù của hình đã cho thành các hình quen thuộc đã biết cách tính diện tích. Mỗi bạn nhỏ có thể chọn những cách chia khác nhau, chẳng hạn ta có thể chia đơn giản như sau:



Hình 14.

Phần bù của hình đã cho được chia thành năm hình (1), (2), (3), (4) và (5). Khi đó

– Hình tam giác (1) có diện tích bằng $\frac{1}{2} \times 5 = 2{,}5$ (đơn vị diện tích)

– Hình tam giác (2) có diện tích bằng $\frac{1}{2} \times 9 = 4{,}5$ (đơn vị diện tích)

– Hình tam giác (3) có diện tích bằng $\frac{1}{2} \times 21 = 10{,}5$ (đơn vị diện tích)

– Hình chữ nhật (4) có diện tích bằng 6 (đơn vị diện tích)

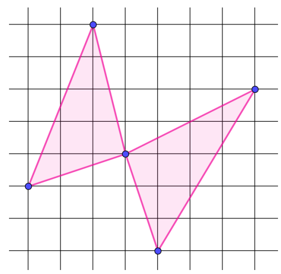
– Hình tam giác (5) có diện tích bằng $\frac{1}{2} \times 3 = 1{,}5$ (đơn vị diện tích)

Vậy tổng diện tích của chúng bằng $2{,}5+4{,}5+10{,}5+6+1{,}5=25$. Suy ra diện tích hình tam giác tô đậm bằng $7 \times 7 - 25 = 24$ (đơn vị diện tích).

Việc tính theo phần bù chỉ hiệu quả khi phần bù được cấu tạo bởi những hình cơ bản như hình chữ nhật, hình tam giác như trong hai ví dụ đầu tiên. Vì thế các bạn nhỏ cần chia thật khéo, sao cho mọi hình đều có dạng quen thuộc nhé!

Cô nàng "bướm" xinh đẹp dưới đây để thử tài chia hình của các bạn nhỏ.

Bài tập 2. Tính diện tích phần được tô đậm trong hình sau.



Hình 15.

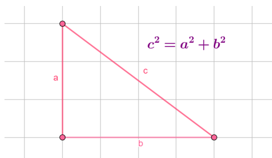
Bây giờ chúng ra sẽ vận dụng cách tính diện tích được giới thiệu ở trên để làm một điều rất thú vị, đó là chứng minh một định lý rất quen thuộc trong Toán học: Định lý Pythagoras.

4. Diện tích và định lý Pythagoras

Hẳn nhiều bạn nhỏ đã biết về định lý Pythagoras rồi đúng không. Định lý Pythagoras phát biểu rằng: "Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng bình phương của hai cạnh góc vuông", ở đây bình phương của số a, ký hiệu là a^2 là tích của a nhân với a, $a^2 = a \times a$.

Giả sử tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là a và b, cạnh huyền là c. Khi đó, định lý

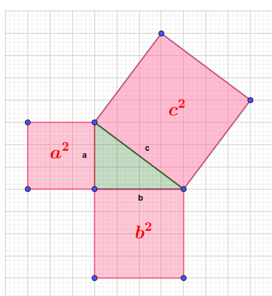
Pythagoras cho ta đẳng thức: $a^2 + b^2 = c^2$. Trong bài viết này, ta xét a, b và c là các số tự nhiên khác không, tuy nhiên những lập luận dưới đây đúng cho tam giác vuông với các cạnh không cần là số tự nhiên các em nhé.



Hình 16.

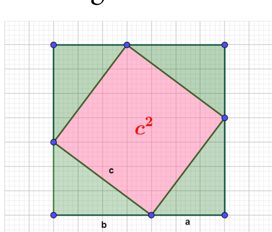
Bây giờ chúng ta cùng xem chứng minh định lý Pythagoras dựa trên việc tính diện tích các hình thế nào.

Trước hết nhận thấy rằng a^2, b^2 hay c^2 chính là diện tích của các hình vuông với cạnh tương ứng là a, b hay c. Ở đây, chúng ta sẽ dựa trên việc tính diện tích của các hình này để suy ra định lý Pythagoras.



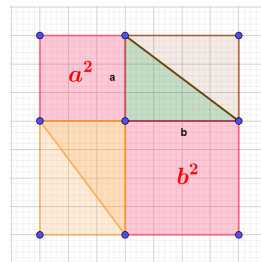
Hình 17.

Đầu tiên là ta tính diện tích của hình vuông cạnh c được tô màu hồng trong Hình 19. Diện tích của hình vuông này có thể được tính bằng cách lấy phần bù trong hình vuông bao quanh với cạnh là $a+b$. Các em có thể thấy ngay phần bù của hình vuông cần tính là 4 tam giác vuông có diện tích bằng diện tích của tam giác vuông đã cho.



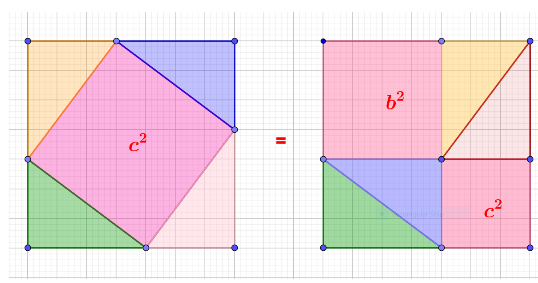
Hình 18.

Tiếp đến ta tính diện tích của hai hình vuông màu hồng có cạnh tương ứng là b và c trong Hình 20. Phần bù của tổng diện tích hai tam giác này trong hình vuông bao quanh (cạnh là $a+b$) cũng là 4 tam giác vuông có diện tích bằng tam giác đã cho.



Hình 19.

Do hai hình vuông bao quanh đều có cạnh là $a+b$ nên có cùng diện tích. Từ đó ta có ngay: $a^2 + b^2 = c^2$ và chứng minh được định lý Pythagoras!



Hình 20.

Vậy là bằng cách tính diện tích của những hình cơ bản là hình vuông và tam giác vuông mà chúng ta đã chứng minh được một định lý rất nổi tiếng. Thật là kỳ diệu phải không các em!

Trong phần đầu tiên của chủ đề này, chúng ta đã cùng nhau tìm hiểu những phương pháp thường được sử dụng khi tính diện tích của một hình trên lưới ô vuông. Những cách đưa ra dù rất đơn giản nhưng lại giúp ta làm được một điều rất hữu ích – chứng minh được định lý Pythagoras. Chủ đề diện tích trên lưới ô vuông vẫn còn nhiều thú vị nữa các bạn nhỏ nhé, các em hãy đón đọc Phần 2 của chủ đề trong số sau của Pi.

ÔNG CHỦ QUÁN KỲ LẠ

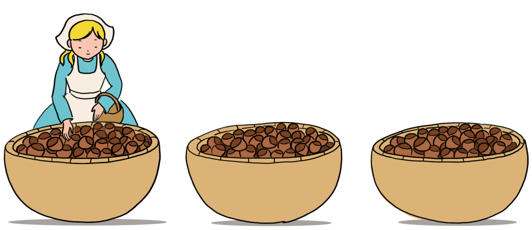
GIA DƯƠNG

Thám tử Xuân Phong lại lên đường truy tìm tên trùm Cạ đang bị lệnh truy nã. Xuân Phong chỉ biết hắn ta đang lẩn quất tại một địa điểm tên là làng Đoài, còn đường đi tới đó thế nào thì không rõ. Cứ theo những người đi đường chỉ dẫn, Xuân Phong cuối cùng cũng đi tới một ngã ba, từ đó đường bỗng chia thành hai ngả, một ngả rẽ trái, một ngả rẽ phải, thật mung lung. Xuân Phong bỗng nhìn thấy một quán nước nhỏ bên vệ đường. Ông chủ quán bước ra đon đả mời Xuân Phong vào nghỉ chân, xơi nước cho đỡ mệt. Quán của ông này nổi tiếng cả vùng, Xuân Phong cũng đã từng nghe thấy nói tới ông chủ là một người vô cùng đặc biệt. Ông ta cứ một hôm lại nói dối, rồi lại nói thật ngày hôm sau, và cứ cách nhật như vậy – hôm nói thật và hôm nói dối xen kẽ ngày. Xuân Phong có thể hỏi ông chủ quán đúng một câu hỏi để biết cách chọn đúng đường rẽ tới làng Đoài mà trùm Cạ đang trốn. Vậy Xuân Phong có thể hỏi ông ta câu hỏi nào để biết đường nào sẽ đi tới làng Đoài?

CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

1. Hai anh bạn rủ nhau đi câu cá. Khi được hỏi "Trong mỗi giỏ của các anh có bao nhiêu con cá đấy?" thì anh thứ nhất trả lời "Trong giỏ của tôi có số cá bằng nửa số cá ở giỏ của anh kia và thêm 10 con nữa". Anh thứ hai lại nói "Còn trong giỏ của tôi có số cá bằng số cá trong giỏ của anh kia và thêm 20 con nữa". Vậy cả hai anh bạn có tất cả bao nhiêu con cá nhỉ?

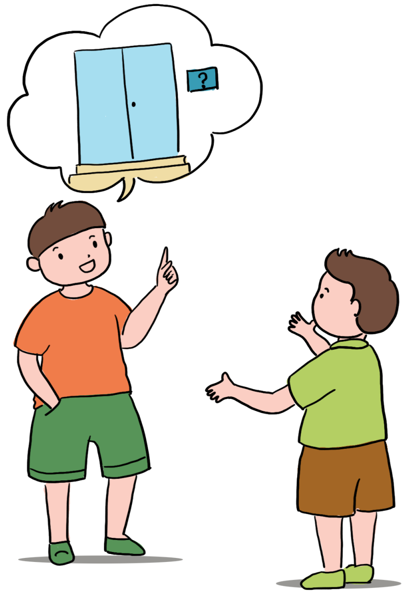
2. Lọ lem có 100 đựng hạt dẻ, lúc đầu số hạt dẻ trong mỗi rổ là như nhau. Lọ Lem lấy đi trong rổ thứ nhất một số hạt dẻ, lấy từ rổ thứ hai một số gấp đôi như thế, lấy từ rổ thứ ba một số hạt gấp ba như thế, và cứ như vậy. Cuối cùng thì trong rổ thứ 100 chỉ còn đúng một hạt dẻ, và còn lại ở tất cả trong 100 rổ tổng cộng là 14950 hạt dẻ. Hỏi ban đầu trong mỗi rổ có bao nhiêu hạt dẻ?



3. Hai bạn học sinh là Nam và Vũ gặp nhau tại nhà của Vũ. Nam nói "Nếu lấy số nhà của tớ là một số có hai chữ số trừ đi số có hai chữ số tạo thành khi viết theo thứ tự ngược lại, thì sẽ ra số nhà của cậu. Vậy tớ sống ở số nhà nào?"

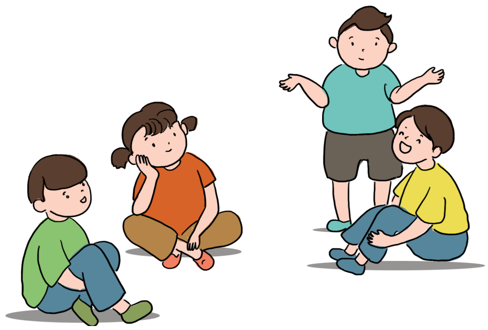
Vũ trả lời "Ôi, bài toán này dễ quá" – và giải ra luôn đáp số.

Vậy các bạn đó sống ở những số nhà nào nhỉ?



4. Lớp của Hùng có 35 học sinh. Trong số đó có 20 em tham gia câu lạc bộ Toán, 11 em tham gia câu lạc bộ Khéo tay, 10 em không tham gia vào hai nhóm này. Hỏi có tất cả bao nhiêu em vừa tham gia CLB Toán lại vẫn không quên tham gia cả CLB Khéo tay nhỉ?

5. Tùng đến trường mới có nhiều chuyện rất vui nên về khoe với bạn bè.



– Lớp tớ có 35 học sinh. Và cậu có tưởng tượng được không, mỗi người lại kết bạn với đúng 11 học sinh cùng lớp.

– Không thể thế được! Bách, người bạn thân của Tùng vừa đạt giải trong một cuộc thi Olympic, ngay lập tức trả lời.

Vì sao Bách lại nghĩ như vậy nhỉ?

6. Có 55 em học sinh tham gia một cuộc thi Olympic. Tất cả các em đều nộp bài. Khi chấm bài, mỗi câu hỏi được chấm bởi một trong ba loại điểm: điểm “+” nếu câu hỏi được trả lời hoàn toàn đúng; điểm “–” nếu câu hỏi đã có trả lời nhưng chưa ra đúng đáp số; và điểm “0” nếu câu hỏi chưa được trả lời. Sau khi chấm toàn bộ bài thi, ban tổ chức thấy không có hai bài thi nào có cả các số điểm “+” và số điểm “–” đồng thời trùng nhau. Vậy trong kỳ thi Olympic đó phải có ít nhất bao nhiêu câu hỏi?

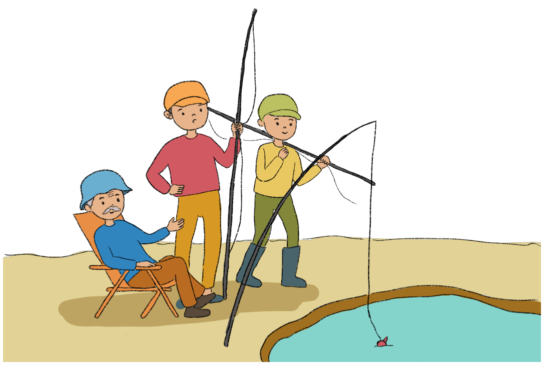
LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 7-8 năm 2022)

1. Một lần nọ, sau cơn mưa, bác Tuấn đi vào rừng để hái nấm. Bác khệ nệ bê được cả một sọt nấm nặng trĩu về. Nhưng thật buồn cho bác là về đến nhà, bác mới biết là trong số nấm tươi mới hái được thì có tới tận 90% thành phần là nước, nên hoá ra bác mất công mang nước về suốt cả một quãng đường dài. Sau khi nấm được hong khô đi chút, khối lượng của đống nấm bị giảm đi 15 kg, và bây giờ nước chỉ chiếm 60% khối lượng. Hỏi lúc đầu bác Tuấn đã mang được bao nhiêu ki–lô–gam nấm từ rừng về nhà?

Lời giải. Ta gọi n là khối lượng nấm tinh khô nguyên chất. Khi đó lúc đầu trong đống nấm tươi mang về khối lượng nước là $9n$ và tổng khối lượng đống nấm tươi mà bác Tuấn đã mang về là $10n$ (kg). Sau khi hong khô, lượng nấm tinh khô chiếm $\frac{4}{10}$ lượng nấm tươi và do đó, khối lượng toàn đống nấm sau khi hong khô là $\frac{10n}{4}$, còn lượng nước còn lại sau khi hong khô là $\frac{6n}{4}$.

Từ điều kiện suy ra $9n - \frac{6n}{4} = 15$. Hay là $\frac{30n}{4} = 15$. Từ đó ta có $n = 2$. Suy ra lúc đầu khối lượng nấm mà bác Tuấn đã mang về là 20 (kg).

2. Ông Ninh cùng với con trai mình và ông Phúc cùng với con trai mình đi ra hồ câu cá. Ông Ninh bắt được số con cá bằng với số con cá mà con trai ông bắt được. Còn ông Phúc lại bắt được số con cá nhiều gấp ba lần số con cá mà con trai ông bắt được. Họ bắt được tổng cộng 35 con. Con trai của ông Ninh đi câu cá cùng ông tên là Giao. Hỏi con ông Phúc tên là gì và mỗi người hôm đó bắt được bao nhiêu con cá?



Lời giải. Từ đề bài, nếu ký hiệu a là số con cá mà con ông Ninh bắt được, còn b là số con cá mà con ông Phúc bắt được thì ta có

$$2a + 4b = 35.$$

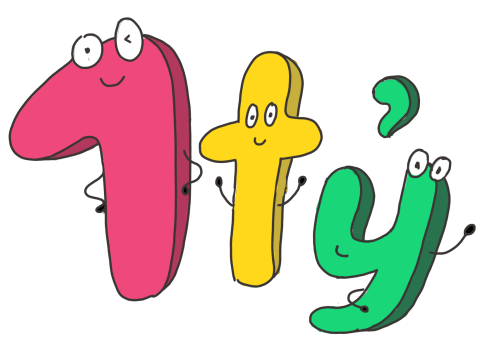
Do đẳng thức trên không thể xảy ra với bất kỳ giá trị nguyên nào của a và b, ta đi đến kết luận rằng chỉ có 3 người ra hồ câu cá chứ không phải 4 người. Tuy nhiên do con trai của ông Ninh tên là Giao, ta loại được trường hợp ông Phúc là con của ông Ninh. Vì vậy ba người đó là: ông Phúc, con trai ông ta là ông Ninh, và cháu nội ông Phúc là Giao. Ta kết luận được con của ông Phúc tên là Ninh.

Ta thấy tổng số cá 3 người bắt là $a + a + 3a = 5a = 35$. Từ đó dễ thấy Giao và ông Ninh mỗi người bắt được 7 con cá, còn ông Phúc bắt được 21 con cá.

3. Chiếc đồng hồ treo tường nhà bạn Lâm chỉ 9 giờ 20 phút. Hỏi lúc đó góc tạo bởi kim giờ và kim phút bằng bao nhiêu độ (góc tương ứng với một vòng tròn là 360 độ)?

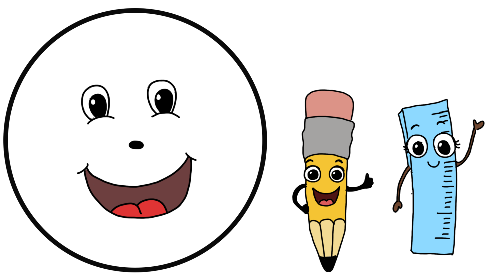
Lời giải. Vào lúc 9 giờ góc tạo bởi 2 kim giờ và kim phút là 90°. Trong một tiếng, kim giờ đi được $\frac{1}{12}$ vòng tròn, có nghĩa là $\frac{1}{12} \times 360^\circ = 30^\circ$. Như vậy trong 20 phút, kim giờ đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường này, có nghĩa là $\frac{1}{3} \times 30^\circ = 10^\circ$. Tương tự như vậy, sau một tiếng, kim phút đi được 360° và do đó sau 20 phút, nó quay được một góc bằng $\frac{20}{60} \times 360^\circ = 120^\circ$. Vì thế, đến lúc 9 giờ 20 phút góc tạo bởi hai kim bị giảm đi 10° nhưng lại tăng thêm 120°, điều này có nghĩa là nó sẽ bằng $90^\circ - 10^\circ + 120^\circ = 200^\circ$. Nếu ta lấy góc bổ sung với nó theo quy ước với những góc lớn hơn góc bẹt, thì góc tạo bởi hai kim sẽ bằng $360^\circ - 200^\circ = 160^\circ$.

4. Tích của một tỷ số tự nhiên bằng đúng 1 tỷ. Hỏi giá trị lớn nhất của tổng của chúng bằng bao nhiêu?

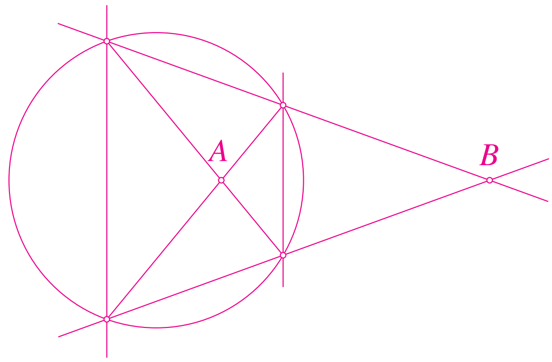


Lời giải. Nếu trong số các số tự nhiên đã cho có hai số a và b cùng lớn hơn 1, thì thay hai số (a, b) bởi cặp $(ab, 1)$ ta nhận được tích của các số không thay đổi, nhưng tổng sẽ tăng, do từ $(a-1)(b-1) > 0$ suy ra $ab+1 > a+b$. Vì thế tổng các số này sẽ lớn nhất nếu có một số bằng 1 tỷ, còn tất cả các số còn lại đều bằng đơn vị. Do đó tổng của các số có giá trị lớn nhất bằng 1999999999.

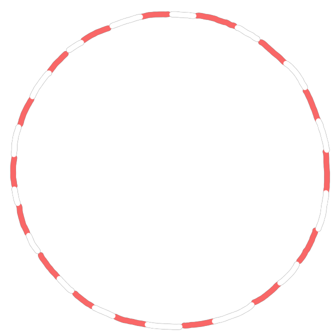
5. Làm thế nào để xác định tâm của một hình tròn nếu chỉ có một cái bút chì và một cái thước kẻ thông thường có hai cạnh song song (chiều rộng của thước kẻ nhỏ hơn đường kính của hình tròn).



Lời giải. Trong hình dưới đây chỉ ra cách vẽ một đường kính của hình tròn. Các em chỉ cần đặt thước kẻ sao cho ở hai phía của thước hiện ra các phần có độ dài khác nhau. Sau đó nối các điểm như trong hình vẽ, và đường thẳng đi qua AB cũng chứa một đường kính của đường tròn. Các em lại làm tiếp một lần nữa như vậy và rõ ràng giao điểm của hai đường kính sẽ là tâm của hình tròn đã cho.



6. Tất cả các điểm của một đường tròn được tô bằng hai màu: trắng hoặc đỏ. Em hãy chứng tỏ rằng luôn có một tam giác cân có các đỉnh nằm trên đường tròn đã cho sao cho các đỉnh của nó đều được tô bởi cùng một màu.



Lời giải. Em hãy lấy một ngũ giác đều với 5 đỉnh nằm trên đường tròn đã cho. Bằng nguyên lý Dirichlet dễ thấy phải có ít nhất 3 đỉnh cùng được tô bởi cùng một màu. Trong mọi cách chọn 3 đỉnh này, chúng luôn tạo thành một tam giác cân thoả mãn điều kiện của đề bài.

NUMBERS AND THEIR DIGITS

NGHIA DOAN[1]

A number is made up of digits.

Divisibility criteria

We start with some problems using the divisibility criteria for $3, 4,$ or 8.

Problem 1. What is the greatest multiple of 8 whose digits are all different?

Solution. The greatest multiple of 8 with different digits has at most ten digits. The *divisibility rule* for 8 states that its last three digits make a number divisible by 8. If we choose the first seven digits to be 9876543, then there are digits 0, 1 and 2 left. The greatest multiple of 8 these three digits can compose is 120. Thus the desired number is 9876543120.

Problem 2. What is the least multiple of 36 that contains only digits 4 and 5.

Solution. Divisibility rule for 9 states that the sum of digits of the number must be $9, 18, \ldots$. Let's examine the sum of the digits from the least possible value 9 and then going up. If the sum is $9,$ then 45 or 54 are not divisible by $4,$ so $9 = 4 + 5$ is not a possible sum. If the sum is $18,$ the $2-$digit multiple of 4 can be made from two pairs of 4 and 5 is 44. Thus the number is 5544.

Exercise 1. Find a $7-$digit number containing only digits 2 or digits 3 such that there are more of digits 2 than of digits 3 and the number is divisible by both 3 and 4.

Remainders of perfect powers

Now we look at the remainders of a perfect power – a perfect square, a perfect cube, or a higher power of integer – when divided by an integer such as $3, 4, 8, 9$ or $10, 100$ and so on.

Problem 3. Is there a $5-$digit perfect square whose sum of digits is 29?

Solution. A perfect square is divisible by 3 or has a remainder of 1 when divided by 3 (why?). Since the remainder of a number when divided by 3 is the same as the remainder of its sum of digits when divided by $3,$ and 29 has a remainder of 2 when divided by 3 so there is no such number.

Problem 4. Find the perfect cube n such that all digits of n are 9 except the unit digit, which is 5.

Solution. There is no such perfect cube since a perfect cube has a remainder $0, 1,$ or 8 when divided by 9.

Problem 5. What is the last digit of $\left(\ldots\left((7)^7\right)^7\ldots\right)^7$ (there are 1001 numbers 7)?

Solution. Testing case by case we have: $7 \equiv 7 \pmod{10}, 7^7 = (7)(7^2)^3 \equiv -7 \pmod{10}, (7^7)^7 \equiv (-7)^7 \equiv 7 \pmod{10}, \ldots$ By Induction Principle, it can be proved that the last digit of the generic expression is 7 if it has an odd amount of $7,$ otherwise it is 3. The given one has an odd number of $7,$ so its last digit is 7.

Problem 6. In how many zeros can the number $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ end for n positive integer?

Solution. For $n = 1,$ and $2,$ the sum ends in one and two zeros. Now, for all $n \geq 3, 2^n, 4^n$

[1] *Canada.*

are divisible by 8, and $1^n + 3^n$ congruent to 2 or 4 modulo 8. Thus, the sum cannot end in three or more zeros.

Exercise 2. Find the last five digits of 5^{1981}.

Exercise 3. Find $n > 3$ such that the $(n+1)$–digit binary number $\overline{10\ldots01}_2$ is a perfect power of 3.

Relations between digits of a number

Problem 7. Digits a, b, and c are used to form $3-$digit numbers $\overline{abc}, \overline{bca}$, and $\overline{cab}$. The sum of these numbers is 1332, find $a+b+c$.

Solution. $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, similarly with others. Their sum is $111(a+b+c) = 1332$, $a+b+c = 12$.

Problem 8. Find all $4-$digit number n whose sum of digits is $2010 - n$.

Solution. Let $n = \overline{abcd}$. Then $1001a + 101b + 11c + 2d = 2010$. If $a = 1$, then $b = 9$, so $11c + 2d = 100$, so $c = 8, d = 2$. If $a = 2$, then $b = c = 0, d = 4$. The solutions are 1982, 2004.

Exercise 4. Find a potitive integer a such that $(1+2+\ldots+a) - 1000a$ is a $3-$digit number.

Hints to the exercises

Exercise 1. First find the last two digits based on divisibility rule for 4. Then find the number of digits 2 in the first five digits.

Exercise 2. Let $\overline{10\ldots01}_2 = 2^n + 1 = 3^m$. There are two cases: m is odd or even.

Exercise 3. There are two cases, $a < 1999$ and $a \geq 2000$.

Exercise 4. Find the last 5 digits of $5^{1981} - 5^5 = 5^5(5^{1976} - 1)$.

New Words

Binary (adj): nhị phân
Criteria (n,pl): dấu hiệu
Cube (n): lập phương
Digit (n): chữ số
Divisibility (n): tính chia hết
Multiple (n): bội số
Perfect (adj): hoàn thiện
Perfect square (n): số chính phương
Power (n): lũy thừa
Relation (n): hệ thức
Remainder (n): số dư (trong phép chia)

- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P651–P660: trước ngày 15/12/2022.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P621. (Mức B) Xét ba số nguyên tố có tổng bằng 242. Hỏi, tích của chúng lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải (*dựa theo cách giải của bạn Võ Trần Tiến, lớp* 8^5*, trường THCS Long Bình Điền, tỉnh Tiền Giang*).

Ta biết rằng, tổng của ba số nguyên dương là một số chẵn khi và chỉ khi trong ba số đó, có đúng một số chẵn, hoặc cả ba số đều là số chẵn. Vì thế, do 242 là số chẵn và do chỉ có đúng một số nguyên tố chẵn, là 2, nên trong ba số nguyên tố thỏa mãn điều kiện đề bài, phải có một số là 2, và hai số còn lại là hai số lẻ. Gọi hai số lẻ này là a, b, và ký hiệu T là tích của ba số được xét; ta có

$$a+b=242-2=240, \qquad (1)$$

và $T=2ab$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b$. Khi đó, $a+b \leq 2a$; kết hợp với (1), suy ra, $a \geq 120$. Mà a là số nguyên tố và 120 không là số nguyên tố, nên ta có $a>120$. Do đó, đặt $a=120+m$, ta có m là số nguyên dương lẻ (do a là số lẻ), và

$$b=240-a=240-(120+m)=120-m.$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} T&=2(120+m)(120-m)\\ &=2\left(120^2-m^2\right). \qquad (2)\end{aligned}$$

Do đó, T lớn nhất khi m là số nguyên dương lẻ nhỏ nhất, sao cho $120+m$ và $120-m$ cùng là số nguyên tố.

Với $m=1,3,5$, ta có $120+m=121,123,125$, đều là hợp số (do $121 \vdots 11$, $123 \vdots 3$ và $125 \vdots 5$).

Với $m=7$, ta có $120+m=127$, là số nguyên tố; đồng thời, $120-m=113$, cũng là số nguyên tố.

Vì vậy, T lớn nhất khi $m=7$. Do đó, theo (2), giá trị lớn nhất của T bằng

$$2\left(120^2-7^2\right)=28702.$$

Ta có điều phải tìm theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Có thể thấy, ngoài bộ $(2,113,127)$, còn có nhiều bộ ba số nguyên tố có tổng bằng 242; chẳng hạn, các bộ $(2,7,233)$, $(2,11,229)$, $(2,13,227)$, $(2,17,223)$, ... Vì thế, câu hỏi đặt ra ở đề bài là có nghĩa.

2. Dựa vào một số ý đã nêu ở Lời giải trên, bạn đọc có thể dễ dàng tìm ra *tất cả* các bộ ba số nguyên tố có tổng bằng 242.

3. Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc, có một lời giải sai (tuy có đáp số đúng), do người giải bài đã khẳng định tích T (theo ký hiệu ở Lời giải trên đây) lớn nhất, khi ba số nguyên tố là 2, 113, 127, mà không có bất cứ lời giải thích hợp lý nào. Bên cạnh lời giải sai này, còn có một lời giải không được coi là lời giải hoàn chỉnh, do người giải bài chưa khẳng định được 113 và 127 là các số nguyên tố thỏa mãn điều kiện đã đặt ra ở lời giải của mình, để tích T là lớn nhất.

Lê Huy

P622. (Mức B) Cho x, y, z là các số thực khác 0 thoả mãn

$$\frac{x^2+y}{y^2}=\frac{y^2+z}{z^2}=\frac{z^2+x}{x^2}=2.$$

Chứng minh rằng, $\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{z^2}+\dfrac{z}{x^2}$ là một số nguyên.

Lời giải (*của người chấm bài*).

Đặt $P=\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{z^2}+\dfrac{z}{x^2}$.

Từ giả thiết của bài ra, ta có:

$$x^2=y(2y-1), \qquad (1)$$

$$y^2=z(2z-1), \qquad (2)$$

$$z^2=x(2x-1). \qquad (3)$$

Tiếp theo, cũng từ giả thiết của bài ra, theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)+(x+y+z)}{x^2+y^2+z^2}=2;$$

do đó, $x^2+y^2+z^2=x+y+z. \qquad (4)$

Xét hai trường hợp sau:

◇ *Trường hợp 1: Trong ba số x, y, z, có ít nhất một số bằng 1.*

Do P đối xứng đối với các hoán vị vòng quanh của x, y, z, nên không mất tính tổng quát, giả sử $x = 1$.

Khi đó, $z^2 = 1$ (theo (3)); suy ra, $z = \pm 1$.

Nếu $z = -1$ thì $y^2 = 3$ (theo (2)); do đó, theo (1), $y = 5$, mâu thuẫn với $y^2 = 3$.

Vì vậy, $z = -1$; suy ra, $y^2 = 1$ (theo (2)). Do đó, $y = 1$ (theo (1)).

Như vậy, trong trường hợp này, $x = y = z = 1$. Do đó, $P = 1 + 1 + 1 = 3 \in \mathbb{Z}$.

◇ *Trường hợp 2: Cả ba số x, y, z, đều khác 1.*

Do $x, y, z \neq 0$ nên

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2}{xy^2} + \frac{y^2}{yz^2} + \frac{z^2}{zx^2} \\ &= \frac{2y-1}{xy} + \frac{2z-1}{yz} + \frac{2x-1}{zx} \\ &= \frac{2(xy+yz+zx) - (x+y+z)}{xyz}. \quad (5) \end{aligned}$$

Nhân (1), (2), (3) với nhau, vế theo vế, với lưu ý $xyz \neq 0$, ta được:

$$xyz = (2y-1)(2z-1)(2x-1).$$

Do đó

$$7xyz = 4(xy+yz+zx) - 2(x+y+z) + 1. \quad (6)$$

Mặt khác, ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 2y^2 - y - 1 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = (y-1)(2y+1). \quad (7) \end{aligned}$$

Một cách hoàn toàn tương tự, ta cũng có:

$$(2) \Leftrightarrow (y-1)(y+1) = (z-1)(2z+1), \quad (8)$$

$$(3) \Leftrightarrow (z-1)(z+1) = (x-1)(2x+1). \quad (9)$$

Nhân (7), (8), (9) với nhau, vế theo vế, với lưu ý $x, y, z \neq 1$, ta được:

$$\begin{aligned} &(x+1)(y+1)(z+1) \\ &= (2y+1)(2z+1)(2x+1). \end{aligned}$$

Do đó

$$7xyz = -3(xy+yz+zx) - (x+y+z). \quad (10)$$

Từ (6) và (10), suy ra

$$x+y+z = 7(xy+yz+zx) + 1. \quad (11)$$

Do đó

$$\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2 \\ &= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \\ &= (7(xy+yz+zx)+1)^2 - 2(xy+yz+zx) \\ &= 49(xy+yz+zx)^2 \\ &\quad + 12(xy+yz+zx) + 1. \quad (12) \end{aligned}$$

Từ (4), (11) và (12), suy ra

$$\begin{aligned} &49(xy+yz+zx)^2 + 12(xy+yz+zx) + 1 \\ &= 7(xy+yz+zx) + 1; \end{aligned}$$

do đó

$$(xy+yz+zx)(49(xy+yz+zx)+5) = 0.$$

Vì thế, có thể xảy ra hai trường hợp sau:

– *Trường hợp 2.1*: $xy + yz + zx = 0$.

Khi đó, $x + y + z = 1$ (theo (11)); suy ra, $xyz = -\frac{1}{7}$ (theo (10)).

Do đó, theo (5), $P = 7 \in \mathbb{Z}$.

– *Trường hợp 2.2*: $xy + yz + zx = -\frac{5}{49}$.

Khi đó, $x + y + z = \frac{2}{7}$ (theo (11)); suy ra, $xyz = \frac{1}{343}$ (theo (10)).

Do đó, theo (5), $P = -168 \in \mathbb{Z}$.

◇ Từ kết quả xét các trường hợp nêu trên, ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Sử dụng phần mềm Maple 18, bạn đọc có thể tìm ra các giá trị thực của x, y, z ở các trường hợp 2.1 và 2.2. Điều này minh chứng cho tính chặt chẽ, chính xác toán học của Lời giải trên đây.

2. Rất tiếc, tất cả các lời giải, mà Tạp chí nhận được từ bạn đọc, đều không đúng, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau:

– Ngộ nhận rằng, các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện đề bài khi và chỉ khi $x = y = z = 1$;

– Ngộ nhận rằng, với a, b, c, x, y, z, t là các số thực, $abc \neq 0$, ta có:

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} = t \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = t.$$

Lê Huy

P623. (Mức B) Mỗi ô của bảng ô vuông kích thước 2023×2023. Ban đầu mỗi ô của bảng ghi số 1. Người ta thực hiện việc ghi xoá và ghi thêm số theo quy tắc sau: mỗi lần chọn ra 3 ô trong cùng một hàng hoặc một cột; mỗi ô được chọn, nếu ô đó đang ghi số N, người ta xoá đi và ghi số $N+1$ vào ô đó.

Hỏi sau một số hữu hạn lần thực hiện ghi và xoá số như vậy, người ta có thể làm cho tất cả các số được ghi trong bảng là các số chẵn được hay không?

Lời giải (*dựa theo Đáp án do BBT Tạp chí cung cấp*).

Xét một hàng tùy ý của bảng đã cho. Lần lượt, từ trái qua phải, đánh số thứ tự các ô vuông con của hàng này, bởi $1, 2, \ldots, 2023$. Ta gọi ô vuông con có số thứ tự i là ô i.

Thực hiện phép thay đổi số đối với các ô vuông con của hàng nêu trên, như sau:

– Với mỗi $k = 1, 2, \ldots, 673$, ở lần thực hiện thứ k, thay đổi số, theo quy tắc của đề bài, ở ba ô $3k-2$, $3k-1$, $3k$;

– Ở lần thực hiện thứ 674, thay đổi số ở ba ô 2019, 2020, 2021;

– Ở lần thực hiện thứ 675, thay đổi số ở ba ô 2019, 2022, 2023.

Khi đó, do ban đầu, ở mỗi ô của hàng đang xét có một số 1, nên sau 673 lần thực hiện đầu tiên, ở mỗi ô, từ ô 1 đến ô 2019, có một số 2, và ở mỗi ô 2020, 2021, 2022, 2023 có một số 1. Do đó, sau lần thực hiện thứ 674, ở ô 2019 có một số 3, ở mỗi ô 2022, 2023 có một số 1, và ở mỗi ô còn lại của hàng có một số 2. Vì vậy, sau lần thực hiện thứ 675, ở ô 2019 có một số 4, và ở mỗi ô còn lại có một số 2.

Như vậy, với quy trình thực hiện nêu trên, sau 675 lần thực hiện liên tiếp phép thay đổi số của đề bài, ta có thể làm cho tất cả các số ở tất cả các ô của một hàng tùy ý đều là số chẵn. Vì thế, nhờ việc thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép thay đổi số của đề bài đối với bảng đã cho, ta có thể nhận được bảng 2023×2023, mà số ở mỗi ô vuông con của nó đều là số chẵn.

Bình luận và Nhận xét

1. Từ lời giải trên dễ thấy, *câu trả lời* cho câu hỏi của bài đã ra *không thay đổi*, nếu thay bảng 2023×2023 bởi bảng $(3n+1) \times (3n+1)$, với n là một số nguyên dương tùy ý lớn hơn 1.

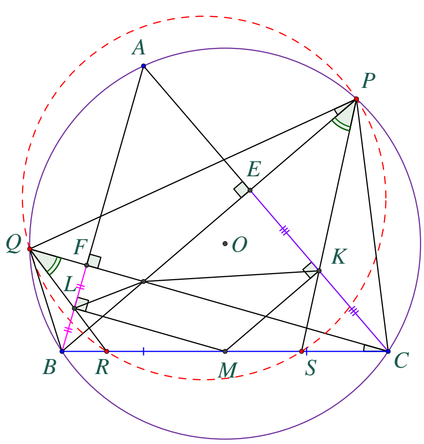
2. Từ điều vừa nêu trên, hiển nhiên xuất hiện câu hỏi: *Nếu ở bài đã ra, thay bảng* 2023×2023 *bởi bảng* 4×4, *thì câu trả lời cho câu hỏi đặt ra ở bài toán là gì?* Mời bạn đọc tìm câu trả lời cho câu hỏi vừa nêu.

3. Rất tiếc, cho tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí vẫn chưa nhận được một lời giải nào, từ bạn đọc.

Nguyễn Khắc Minh

P624. (Mức B) Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao xuất phát từ các đỉnh B, C của tam giác, tương ứng, cắt (O) tại các điểm thứ hai P, Q. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, và gọi K, L tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên AC, AB. Các đường thẳng QL, PK cắt đường thẳng BC tương ứng tại R, S. Chứng minh rằng, bốn điểm P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải (*dựa theo đa số lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).



Do tam giác ABC nhọn, nên P thuộc cung AC không chứa B, và Q thuộc cung AB không chứa C, của (O). Do đó, A, P, Q nằm cùng phía đối với đường thẳng BC. (1)

Gọi E và F tương ứng là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC.

Vì cùng vuông góc với AC nên $MK \parallel BE$, và vì cùng vuông góc với AB nên $ML \parallel BF$. Mà M là trung điểm của BC (giả thiết), nên suy ra, K, L tương ứng là trung điểm của CE, BF. (2)

Từ (1) và (2) suy ra, các điểm R, S nằm giữa B và C. (3)

Do (1) nên từ việc xét đường tròn (O), ta có:

$$\angle BQF = \angle BQC = \angle BAC = \angle BPC = \angle CPE.$$

Vì thế, tam giác vuông BFQ đồng dạng với tam giác vuông CEP. Kết hợp với (2), suy ra

$$\frac{FQ}{EP} = \frac{FB}{EC} = \frac{FL}{EK}.$$

Do đó, tam giác vuông LFQ đồng dạng với tam giác vuông KEP. Suy ra

$$\angle CQR = \angle FQL = \angle EPK = \angle BPS. \quad (4)$$

Do $BCPQ$ là tứ giác nội tiếp nên với lưu ý tới (3), ta có:

$$\angle RCQ = \angle BCQ = \angle BPQ. \quad (5)$$

Từ (4) và (5), với lưu ý tới (3), suy ra

$$\begin{aligned}\angle BRQ &= \angle CQR + \angle RCQ \\ &= \angle BPS + \angle BPQ = \angle SPQ.\end{aligned}$$

Do đó, $RSPQ$ là tứ giác nội tiếp, hay bốn điểm P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Hạ Vũ Anh

P625. (Mức B) Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{b}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 \geq \frac{b^2-bc+c^2}{a^2+bc}.$$

Lời giải (*của người chấm bài*).

Do $a, b, c > 0$ nên theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned}(a+c)^2 &= \left(a\cdot 1 + \sqrt{bc}\cdot\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}\right)^2 \\ &\leq \left(a^2+bc\right)\left(\frac{c}{b}+1\right) \\ &= \frac{\left(a^2+bc\right)(b+c)}{b}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{b^2}{(a+c)^2} \geq \frac{b^3}{\left(a^2+bc\right)(b+c)}. \quad (1)$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$\frac{c^2}{(a+b)^2} \geq \frac{c^3}{\left(a^2+bc\right)(b+c)}. \quad (2)$$

Cộng (1) với (2), vế theo vế, ta được:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{b}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 \\ \geq &\frac{b^3+c^3}{\left(a^2+bc\right)(b+c)} = \frac{b^2-bc+c^2}{a^2+bc}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức của đề bài được chứng minh.

Bình luận và Nhận xét

1. Dễ thấy, dấu đẳng thức ở bất đẳng thức của đề bài xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

2. Bằng phương pháp của lời giải trên, ta có thể chứng minh được kết quả sau:

"*Với a, b, c là các số thực dương, ta có:*

i) $\dfrac{1}{(a+b)^2} + \dfrac{1}{(a+c)^2} \geq \dfrac{1}{a^2+bc}$;

ii) $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} \geq \dfrac{a}{a^2+bc} + \dfrac{b}{b^2+ca} + \dfrac{c}{c^2+ab}$."

3. Sử dụng bất đẳng thức *i*) trên đây, ta có thể giải được bài toán bất đẳng thức trong Đề thi chọn đội tuyển Trung Quốc dự thi *IMO* năm 2004. Bài toán đó như sau:

"*Cho các số thực dương x, y, z, t thỏa mãn $xyzt = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(t+1)^2}\geq 1."$$

4. Số lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc không nhiều. Trong số này, rất tiếc, chỉ có hai lời giải đúng; các lời giải còn lại bị sai do người giải bài đã mắc một trong các lỗi cơ bản dưới đây:

– Áp dụng phép chuẩn hóa cho bất đẳng thức không thuần nhất;

– Từ $0 < x \leq y$ suy ra $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$.

Võ Quốc Bá Cẩn

P626. (Mức B) Xét các tam giác vuông mà độ dài các cạnh là các số nguyên dương và một trong các cạnh góc vuông có độ dài là 2021^{22}. Hỏi có bao nhiêu tam giác như vậy?

Lời giải (*của người chấm bài*).

Trong phần trình bày dưới đây, $|X|$ ký hiệu số phần tử của tập hữu hạn X.

Ký hiệu x là độ dài cạnh huyền và y là độ dài cạnh góc vuông còn lại của tam giác vuông thỏa mãn điều kiện đề bài. Khi đó, x, y là các số nguyên dương, $x > y$, và

$$\left(2021^{22}\right)^2+y^2=x^2. \qquad (1)$$

Hiển nhiên, số tam giác thỏa mãn điều kiện đề bài chính bằng số cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $x > y$ và (1). (2)

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 2021^{44}. \qquad (3)$$

Do đó, số cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $x > y$ và (1) bằng số cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $x > y$ và (3). (4)

Dưới đây, ta sẽ gọi cặp số nguyên dương thỏa mãn các điều kiện vừa nêu trên là *cặp số thuận*.

Xét một cặp số thuận tùy ý. Vì $x > y > 0$ nên $0 < x-y < x+y$. Do đó

$$(x-y)(x+y) > (x-y)^2;$$

kết hợp với (3), suy ra $x-y < 2021^{22}$. Vì thế, từ (3) ta có $x-y$ là một ước dương nhỏ hơn 2021^{22} của 2021^{44}. Do đó, phép đặt ứng

"cặp số thuận $(x,y) \mapsto d = x-y$"

sẽ xác lập một ánh xạ, gọi là f, từ tập T gồm tất cả các cặp số thuận đến tập S gồm tất cả các ước dương nhỏ hơn 2021^{22} của 2021^{44}.

Với $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ tùy ý thuộc T, và $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)$, dễ thấy, ta có $x_1-y_1 \neq x_2-y_2$ (vì nếu ngược lại, $x_1-y_1 = x_2-y_2$, thì theo (3), sẽ có $x_1+y_1 = x_2+y_2$; dẫn đến $x_1 = x_2$ và $y_1 = y_2$, mâu thuẫn với giả thiết $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)$). Do đó, f là một đơn ánh từ T đến S. (5)

Với d tùy ý thuộc S, xét cặp số (x,y), xác định bởi:

$$x=\frac{1}{2}\left(d+\frac{2021^{44}}{d}\right) \text{ và } y=\frac{1}{2}\left(\frac{2021^{44}}{d}-d\right)$$

Ta có

$$(x-y)(x+y)=d\cdot\frac{2021^{44}}{d}=2021^{44}. \qquad (6)$$

Vì $d \in S$ và 2021^{44} là một số lẻ nên $x,y \in \mathbb{N}^*$, và $x > y$. Từ đây và (6), suy ra $(x,y) \in T$.

Do $x-y = d$ nên d là ảnh của (x,y) qua f. Vì thế, f là một toàn ánh từ T đến S. (7)

Từ (6) và (7) suy ra, f là một song ánh từ T đến S. Do đó, $|T| = |S|$.

Vì ứng với mỗi ước dương nhỏ hơn 2021^{22} của 2021^{44} có đúng một ước dương lớn hơn 2021^{22} của 2021^{44}, ứng với mỗi ước dương lớn hơn 2021^{22} của 2021^{44} có đúng một ước dương nhỏ hơn 2021^{22} của 2021^{44}, và 2021^{22} là một ước dương của 2021^{44}, nên

$$|S| = \frac{N-1}{2},$$

trong đó, N là số ước dương của 2021^{44}.

Vì $2021^{44} = 43^{44}\cdot 47^{44}$ là phân tích chuẩn của 2021^{44}, nên

$$N = (44+1)(44+1) = 2025.$$

Do đó

$$|S| = \frac{2025-1}{2} = 1012.$$

Vì vậy, $|T| = 1012$. Từ đây và (4), (2), ta có số tam giác cần tìm theo yêu cầu đề bài là 1012.

Bình luận và Nhận xét

1. Lập luận "Từ $x-y$ là một ước dương nhỏ hơn 2021^{22} của 2021^{44}, và với mỗi ước dương nhỏ hơn 2021^{22} của 2021^{44} xác định được ít nhất một cặp số thuận (theo "định nghĩa" trong lời giải trên), suy ra, số cặp số thuận bằng số ước dương nhỏ hơn 2021^{22} của 2021^{44}" là một lập luận sai kiến thức cơ bản; vì lập luận đó tương đương với khẳng định "nếu tồn tại một toàn ánh từ tập X đến tập Y thì $|X| = |Y|$".

2. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải sai (do người giải bài đếm "thừa", vì quên rằng 2021622 là một ước dương của 2021^{44}) và một lời giải không hoàn chỉnh (do người giải bài lập luận thiếu chặt chẽ, thiếu chính xác).

Hà Thanh

P627. (Mức A) Xét x, y là hai số thực dương thoả mãn $xy \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{3}{4(x+y)}.$$

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Trần Minh Hoàng, lớp 10T1, trường THPT chuyên Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh*).

Đặt $a = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ và $b = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$; ta có $a, b > 0$, và P được viết lại dưới dạng:

$$P = a + b - \frac{3}{4(x+y)}. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz cho hai bộ số thực $(x, 1)$ và $(1, y)$, ta được:

$$(x+y)^2 \leq \left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right);$$

suy ra

$$\frac{1}{x+y} \geq \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}} = ab \quad (\text{do } x, y > 0) \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có

$$P \leq a + b - \frac{3}{4}ab. \quad (3)$$

Vì $xy \geq 1$ nên

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{x^2+y^2+2}{(x^2+1)(y^2+1)} \\ &= \frac{x^2+y^2+2}{(x+y)^2+(xy-1)^2} \\ &\leq \frac{(x+y)^2}{(x+y)^2+(xy-1)^2} \leq 1. \end{aligned}$$

Do đó, $(a+b)^2 \leq 2ab + 1$; suy ra

$$ab \geq \frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{1}{2}.$$

Từ (3) và (4), ta được:

$$\begin{aligned} P &\leq a + b - \frac{3}{8}(a+b)^2 + \frac{3}{8} \\ &= \frac{25}{24} - \left(a + b - \frac{4}{3}\right)^2 \leq \frac{25}{24}. \end{aligned}$$

Hơn nữa, với $x = \frac{9-4\sqrt{2}}{7}$ và $y = \frac{9+4\sqrt{2}}{7}$, ta có $x, y > 0, xy = 1$, và bằng tính toán trực tiếp, dễ dàng tính được $P = \frac{25}{24}$.

Vì vậy, giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{25}{24}$.

Bình luận và Nhận xét

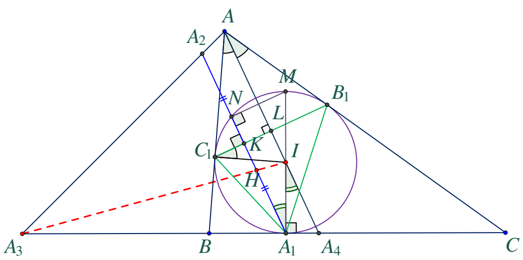
1. Các giá trị x, y ở phần cuối của Lời giải trên được tìm ra từ việc xét khả năng xảy ra dấu đẳng thức ở các bất đẳng thức trong lời giải.

2. Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc, có một lời giải sai, do người giải bài đã nhầm lẫn trong các đánh giá.

Lưu Thị Thanh Hà

P628. (Mức A) Cho tam giác không cân ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi A_1, B_1, C_1 tương ứng là tiếp điểm của BC, CA, AB với (I); A_2, B_2, C_2 lần lượt là đối xứng của A_1, B_1, C_1 tương ứng qua các đường thẳng B_1C_1, C_1A_1 và A_1B_1. Các đường thẳng AA_2, BC cắt nhau tại A_3; BB_2 và CA cắt nhau tại B_3; CC_2 và AB cắt nhau tại C_3. Chứng minh rằng, A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

Lời giải (*của người chấm bài*).



Gọi H là trực tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

Vì tam giác ABC không cân nên nó không là tam giác đều. Suy ra, $A_1B_1C_1$ là tam giác không đều; do đó, $H \not\equiv I$.

Do $A_1H \perp B_1C_1$ và $A_1A_2 \not{B}_1C_1$, nên H nằm trên đường thẳng A_1A_2.

Gọi L, A_4 tương ứng là giao điểm của đường thẳng AI và B_1C_1, BC.

Do tam giác ABC không cân tại A, nên I không nằm trên đường thẳng AA_1; do đó, $A_4 \not\equiv A_1$ (1)

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn, $Ai \perp B_1C_1$; suy ra:

– L là trung điểm của B_1C_1, (2)

– $A_1A_2 \parallel A_4A$ (do cùng vuông góc với B_1C_1 và (1)). (3)

Từ (2), do H, I tương ứng là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$, suy ra

$$A_1H = 2IL. \tag{4}$$

Do $IC_1 \perp AB, IA \perp B_1C_2$, và $\angle IAC_1, \angle IC_1L$ là các góc nhọn, nên $\angle IAC_1 = \angle IC_1L]$. Do đó, tam giác vuông (tại C_1) AC_1I đồng dạng với tam giác vuông (tại L) C_1LI. Suy ra

$$\frac{AI}{C_1I} = \frac{C_1I}{LI}. \tag{5}$$

Gọi M là điểm đối xứng với A_1 qua I. Từ (5) và (4), ta có:

$$\frac{AI}{C_1I} = \frac{A_1M}{A_1H} \tag{6}$$

Gọi K là giao điểm của A_1A_2 và B_1C_1; gọi N là giao điểm thứ hai (khác A_1) của A_1A_2 và đường tròn (I).

Do A_1, A_2 đối xứng với nhau qua B_1C_1 nên K là trung điểm A_1A_2; mặt khác, do H là trực tâm tam giác $A_1B_1C_1$, và $HN \perp B_1C_1$, nên K là trung điểm HN. Suy ra, $A_1H = A_2N$; do đó, $A_1N = A_2H$. (7)

Từ (3) suy ra $\angle MA_1N = \angle A_4IA_1$; do đó, tam giác vuông (tại A_1) IA_1A_4 đồng dạng với tam giác vuông (tại N) A_1NM. Suy ra

$$\frac{IA_1}{A_1N} = \frac{IA_4}{A_1M}. \tag{8}$$

Nhân (6) với (8), vế theo vế, ta được

$$\frac{AI}{A_1N} = \frac{IA_4}{A_1H};$$

suy ra, $\frac{AI}{IA_4} = \frac{A_1N}{A_1H}$. Kết hợp với (7), ta được:

$$\frac{AI}{IA_4} = \frac{A_2H}{HA_1}.$$

Từ đây và (3), theo định lý Thales, suy ra, ba điểm A_3, H, I thẳng hàng; nói một cách khác, A_3 nằm trên đường thẳng HI.

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được, các điểm B_3, C_3 nằm trên đường thẳng HI. Vì thế, ba điểm A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

Bình luận và Nhận xét

1. Với giả thiết tam giác ABC cân, chẳng hạn tại A, *nhưng không đều*, ta có $A_3 \equiv A_4$ và bốn điểm đôi một phân biệt A, H, I, A_1 thẳng hàng. Do vậy, trong trường hợp này, A_3 vẫn nằm trên đường thẳng HI. Vì thế, từ lời giải trên dễ thấy, khẳng định của bài ra vẫn đúng, khi thay giả thiết "không cân" bởi giả thiết ("nhẹ nhàng" hơn) "*không đều*".

2. Bài đã ra (với việc thay giả thiết "không cân" bởi giả thiết "không đều") là một kết quả hay, thú vị về đường thẳng Euler của một tam giác. Kết quả này đã được Lev Emelyanov công bố trong bài báo "On the Intercepts of the OI – Line", đăng trên Forum Geometricorum, Vol. 4, năm 2004 (trang 81 – 84). Forum Geometricorum là một Tạp chí về Hình học Euclid cổ điển và các lĩnh vực liên quan, được ấn hành bởi Đại học Atlantic Florida. Bạn đọc có thể tìm đọc Tạp chí này online, tại trang web http://forumgeom.fau.edu.

3. Tất cả lời giải Tạp chí nhận được, từ bạn đọc, đều là lời giải đúng.

Hạ Vũ Anh

P629. (Mức A) Cho n là một số nguyên dương có tính chất: không tồn tại các số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng, tồn tại các số nguyên không âm u, v sao cho: $n = u^2 + v^2$.

Lời giải (*phỏng theo lời giải của bạn Hồ Trần Khánh Linh, lớp* 12 *Toán* 2*, trường THPT chuyên ĐHSP, ĐHSP Hà Nội*).

Trong Lời giải này, ta quy ước gọi một số nguyên dương là *số tốt*, nếu nó biểu diễn được dưới dạng tổng bình phương của hai số nguyên không âm.

Trước hết, dễ thấy $n = 1$ là một số nguyên dương có tính chất đã nêu trong đề bài, vì $\frac{4}{1} = 4$ và với mọi a, b, c nguyên dương, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$.

Do $1 = 0^2 + 1^2$, nên $n = 1$ là một số tốt. (1)

Xét $n > 1$.

Ta có hai Nhận xét sau:

Nhận xét 1 : *n không thể là số chẵn*, vì nếu ngược lại, n là số chẵn, thì chọn $a = \frac{n}{2}$, $b = c = n$, ta sẽ có $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ và

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{4}{n}.$$

Nhận xét 2 : *n không thể có ước nguyên tố dạng* $4k+3, k \in \mathbb{N}$, vì nếu ngược lại, n có ước nguyên tố p có dạng đó, thì chọn $a = \frac{n(p+1)}{4}$, $b = c = \frac{n(p+1)}{2p}$, ta sẽ có $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ và

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{n(p+1)} + \frac{2p}{n(p+1)} + \frac{2p}{n(p+1)} = \frac{4}{n}.$$

Từ hai Nhận xét trên suy ra, n chỉ có ước nguyên tố dạng $4k+1, k \in \mathbb{N}^*$ (2)

Theo định lý Fermat về tổng hai số chính phương, mọi số nguyên tố có dạng $4k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$ đều là số tốt. (3)

Do

$$\left(x^2+y^2\right)\left(s^2+t^2\right) = (xs+yt)^2 + (xt-ys)^2,$$

nên tích của hai số tốt là một số tốt. (4)

Từ (2), (3) và (4) suy ra, mọi số $n > 1$ đều là số tốt. (5)

Từ (1) và (5) hiển nhiên có: mọi số n được cho ở đề bài đều là số tốt; nghĩa là, tồn tại các số nguyên không âm u, v sao cho $n = u^2 + v^2$.

Bình luận và Nhận xét

1. Lời giải trên cho thấy, bài đã ra là một khai thác nhẹ nhàng, thú vị từ định lý Fermat về tổng của hai số chính phương.

2. Để tiện cho việc theo dõi của bạn đọc, xin nhắc lại định lý vừa nêu trên.

Định lý Fermat về tổng của hai số chính phương. *Số nguyên tố lẻ p biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số chính phương khi và chỉ khi $p \equiv 1 \pmod 4$.*

Vì một số chính phương chỉ có số dư là 0 hoặc 1 trong phép chia cho 4, nên điều kiện cần (chỉ khi) nêu trong định lý trên là hiển nhiên.

Đối với điều kiện đủ (khi), có nhiều cách để chứng minh; một trong các cách đó, là chứng minh theo lược đồ sau (được Euler đưa ra vào năm 1747):

– Quy ước gọi một số nguyên dương là *số tốt*, nếu nó biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số chính phương.

– Bằng phương pháp phản chứng, chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. *Nếu a, b là hai số nguyên dương, nguyên tố cùng nhau, thì mọi ước dương lớn hơn* 1 *của $a^2 + b^2$ đều là số tốt.*

– Xét số nguyên tố p tùy ý có dạng $p = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Theo định lý nhỏ Fermat, với mọi $m \in \{1, 2, \ldots, 4k\}$, $m^{4k} \equiv 1 \pmod p$.

Do đó, với mỗi $m \in \{2, \ldots, 4k\}$, ta có:

$$m^{4k} - (m-1)^{4k}$$
$$= \left(m^{2k} - (m-1)^{2k}\right)\left(m^{2k} + (m-1)^{2k}\right)$$
$$\equiv 0 \pmod{p}.$$

Từ đó, do p là số nguyên tố, suy ra

$$p \mid \left(m^{2k} - (m-1)^{2k}\right),$$

$$\text{hoặc } p \mid \left(m^{2k} + (m-1)^{2k}\right).$$

Dễ thấy, không thể xảy ra trường hợp

$$p \mid \left(m^{2k} - (m-1)^{2k}\right)$$

với mọi $m \in \{2, \ldots, 4k\}$, vì nếu như thế thì phương trình

$$x^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

sẽ có $4k$ nghiệm (là $1, 2, \ldots, 4k$), trái với định lý Lagrange.

Vì vậy, tồn tại $m \in \{2, \ldots, 4k\}$, sao cho

$$p \mid \left(m^{2k} + (m-1)^{2k}\right).$$

Từ đó, do $(m, m-1) = 1$ nên theo Bổ đề trên, p là một số tốt; nghĩa là, p biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số chính phương.

(Về định lý Lagrange, bạn đọc có thể tham khảo trong Tạp chí Pi, số 10 năm 2022, trang ... .)

3. Một số kết quả thú vị, có liên quan gần với định lý Fermat:

Với p là một số nguyên tố, ta có:

$\diamond$ $p = x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow p \equiv 1, 3 \pmod{8}$;

$\diamond$ $p = x^2 + 3y^2 \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{3}$;

$\diamond$ $p = x^2 + 5y^2 \Leftrightarrow p \equiv 1, 9 \pmod{20}$;

$\diamond$ $2p = x^2 + 5y^2 \Leftrightarrow p \equiv 3, 7 \pmod{20}$.

(Trong các kết quả trên, x, y là các số tự nhiên.)

Các kết quả 1, 2 (theo thứ tự liệt kê) do Fermat tìm ra; các kết quả 3, 4 do Euler dự đoán, và sau đó, được Lagrange chứng minh.

4. Nếu bỏ qua các lỗi "chính tả" thì trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, chỉ có lời giải của bạn *Hồ Trần Khánh Linh* được coi là hoàn chỉnh. Tất cả các lời giải còn lại hoặc không hoàn chỉnh (do người giải bài thiếu xét trường hợp $n = 1$), hoặc sai (do người giải bài ngộ nhận rằng một số nguyên tố chỉ hoặc có dạng $4k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$, hoặc có dạng $4k+3, k \in \mathbb{N}$).

Lưu Thị Thanh Hà

P630. (Mức A) Bạn Pi ghi lên bảng một số 1; sau đó, thực hiện việc xoá và ghi thêm số, theo quy tắc: Mỗi lần, xoá một số N tuỳ ý đang có trên bảng, rồi ghi thêm lên bảng số $N+1$, hoặc số $3N$.

Pi thực hiện việc xoá và ghi thêm số, để trên bảng có một số chia hết cho 47, và Pi dừng việc xoá–ghi thêm số ngay sau khi ghi được một số như vậy.

Mỗi lần xoá số N và ghi số $3N$, Pi được nhận một viên kẹo xốp, còn nếu ghi số $N+1$ thì được nhận một viên kẹo dẻo. Vì không thích kẹo dẻo, nên trong quá trình xoá-ghi thêm số, Pi luôn cố gắng để được nhận kẹo xốp. Hỏi, Pi phải nhận ít nhất bao nhiêu viên kẹo dẻo?

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Trần Minh Hoàng, lớp 10T1, trường THPT chuyên Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh*).

Gọi mỗi lần xóa số N và ghi số $3N$ là một "*bước nhân*", mỗi lần lần xóa số N và ghi số $N+1$ là một "*bước cộng*".

Mỗi quá trình thực hiện việc xóa và ghi thêm số, kể từ lúc bắt đầu thực hiện đến khi dừng lại, được gọi tắt là một *quá trình*.

Do ban đầu, ở trên bảng chỉ có một số, nên từ quy tắc xóa và ghi số suy ra, tại mọi thời điểm, ở trên bảng chỉ có đúng một số. (1)

Tiếp theo, nhận thấy, $47 \mid 3N$ khi và chỉ khi $47 \mid N$ (do $(3, 47) = 1$). Do đó, bước cuối cùng của mọi quá trình đều phải là một bước cộng. (2)

Vì vậy, gọi k là số bước cộng của một quá trình tùy ý, ta có $k \geq 1$. (3)

Giả sử tồn tại một quá trình có $k = 1$, và giả sử quá trình này gồm $m+1$ bước ($m \in \mathbb{N}^*$). Khi đó, theo (1) và (2), số được ghi lên bảng ở bước cuối cùng của quá trình là 3^m+1. Vì thế

$$47|3^m+1; \quad (4)$$

suy ra, $47|3^{2m}-1$. Do đó, ký hiệu h là cấp của 3 modulo 7, ta có $h|2m$. (5)

Vì

$$3^{23}=\left(3^5\right)^4\cdot 3^3\equiv 8^4\cdot 27\equiv 17^2\cdot 27$$
$$\equiv 7\cdot 27\equiv 1\,(\bmod 47),$$

nên $h|23$. Mà 23 là số nguyên tố, và $3^1\not\equiv 1\,(\bmod 47)$, nên $h=23$. Vì thế, theo (5), $23|2m$; do đó, $23|m$ (vì $(2,23)=1$). Suy ra, $47|3^m-1$; kết hợp với (4), ta được

$$2=(3^m+1)-(3^m-1)\equiv 0\,(\bmod 47),$$

là điều vô lý.

Vì vậy, không tồn tại quá trình nào có $k=1$. Do đó, từ (3) suy ra, $k\geq 2$. (6)

Xét việc thực hiện phép xóa và ghi thêm số, như sau:

– Bảy lần đầu tiên: thực hiện bước nhân;
– Lần thứ 8: thực hiện bước cộng;
– Hai lần tiếp theo: thực hiện bước nhân;
– Lần thứ 11: thực hiện bước cộng.

Do $1\not\equiv 0\,(\bmod 47)$ và $(3,47)=1$, nên tất cả các số được ghi lên bảng ở bảy lần đầu tiên đều không chia hết cho 47.

Số được ghi ở lần thứ 8 là $3^7+1\not\equiv 0\,(\bmod 47)$, nên các số được ghi ở hai lần tiếp theo cũng không chia hết cho 47.

Số được ghi ở lần thứ 11 là $\left(3^7+1\right)\cdot 3^2+1\equiv 26\cdot 9+1\equiv 0\,(\bmod 47)$.

Vì vậy, việc thực hiện phép xóa và ghi thêm số như trên cho ta một quá trình, với số bước cộng bằng 2. Điều này và (6) cho thấy, giá trị nhỏ nhất của k bằng 2. Nói một cách khác, Pi phải nhận ít nhất 2 viên kẹo dẻo.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được, từ bạn đọc, đều là lời giải đúng.

Nguyễn Khắc Minh

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI HOÀN CHỈNH

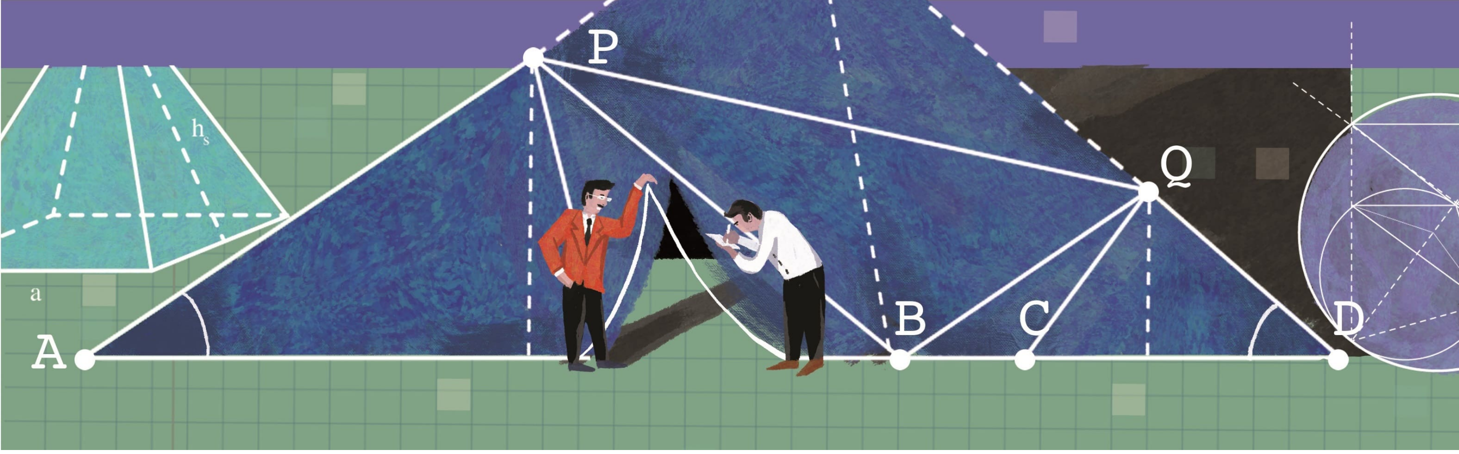
Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải hoàn chỉnh.

KHỐI THCS

- Trường **THCS Long Bình Điền**, Tỉnh Tiền Giang: *Võ Trần Tiến* (lớp 8^5, P621).

KHỐI THPT

- Trường **THPT số 2 Phù Cát**, Tỉnh Bình Định: *Nguyễn Hữu Trí* (lớp 10A1; P624).
- Trường **THPT chuyên Lê Quý Đôn**, Tp. Đà Nẵng: *Nguyễn Châu Tuấn Kiệt* (lớp 10A2; P624, P625, P628).
- Trường **THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu**, Tỉnh Đồng Tháp: *Lâm Nhật Tiến* (lớp 10T1; P624).
- Trường **THPT chuyên Hà Tĩnh**, Tỉnh Hà Tĩnh: *Trần Minh Hoàng* (lớp 10T1; P627, P628, P630).
- Trường **THPT Gia Định**, Tp. Hồ Chí Minh: *Lê Nam Khánh* (lớp 11CT; P624, P628), *Nguyễn Hà Ngọc Uyên* (lớp 12CT; P624).
- Trường **THPT chuyên Hưng Yên**, Tỉnh Hưng Yên: *Trần Hữu Dương* (lớp 11 Toán 1; P621, P625).
- Trường **THPT chuyên Lương Văn Chánh**, Tỉnh Phú Yên: *Nguyễn Thị Bảo Tiên* (lớp 11 Toán 1; P624).
- Trường **THPT chuyên Khoa học tự nhiên**, ĐH Khoa học tự nhiên – ĐHQG Hà Nội: *Vương Khánh Toàn* (lớp 10A1 Toán; P627).
- Trường **THPT chuyên Sư phạm**, ĐH Sư phạm Hà Nội: *Hồ Trần Khánh Linh* (lớp 12 Toán 2; P627, P628, P629, P630).



TIẾP NỐI BÀI VIẾT VỀ BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

NGUYỄN TUẤN ANH[1]

Giới thiệu

Trong tạp chí Pi tháng 10 năm 2021, tác giả Trần Nam Dũng giới thiệu đến bất đẳng thức Bernoulli, ở đó tác giả có đề cập đến việc bất đẳng thức Cauchy (hay còn gọi là bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân) tương đương với bất đẳng thức Bernoulli. Bài viết này sẽ tổng hợp nhiều hơn các bất đẳng thức tương đương như vậy cũng như một số chứng minh đặc sắc có liên quan. Bài viết kết thúc với một số bài toán xuất hiện trong các kỳ thi Olympic mà ở đó bất đẳng thức Bernoulli có vai trò then chốt trong lời giải.

1. Một số bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức Bernoulli

Nhắc lại rằng bất đẳng thức Bernoulli cho số mũ thực được phát biểu như sau (xem [1, Định lý 2]: Cho số thực $x > -1$ và số thực α. Khi đó,

(1) Với $0 < \alpha < 1$, ta có $(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x$.

(2) Với $\alpha > 1$ hoặc $\alpha < 0$, ta có $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Chúng ta sẽ bắt đầu với kết quả sau đây.

Định lý 1. *Các mệnh đề sau là tương đương:*

(a) *Với $x > -1$ và $\alpha \in (0;1)$ thì $(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x$.*

(b) *Với mọi số thực dương α, x, y, trong đó $\alpha \in (0;1)$, ta có $x^{\alpha}y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha)y$.*

(c) *Hàm số $y = \ln x$ là hàm lõm trên $(0;+\infty)$. (Ở đây, ta nói một hàm số f trên khoảng I là lõm nếu với mọi $x, y \in I$ và $\alpha \in (0,1)$ thì $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$.[2])*

(d) *(Bất đẳng thức Young.) Với x, y, p, q là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ thì*

$$xy \leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}.$$

Chứng minh.

• $(a) \Rightarrow (b)$. Thay $x+1$ bằng x vào bất đẳng thức (a) ta có $x^{\alpha} \leq 1+\alpha(x-1)$, hay

$$x^{\alpha} \leq (1-\alpha)+\alpha x$$

với mọi $x > 0, \alpha \in (0;1)$. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức vừa nhận được với số thực dương y ta được:

$$x^{\alpha}y \leq (1-\alpha)y+\alpha xy.$$

(Bất đẳng thức này đúng với mọi $x > 0, y > 0, \alpha \in (0;1)$.) Thay x bằng $\frac{x}{y}$ vào bất đẳng

[1] *THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp.*

[2] *Lưu ý rằng định nghĩa này khác với một số tài liệu, trong đó hàm số như vậy được gọi là lồi!*

thức này, ta thu được:

$$x^\alpha y^{1-\alpha} \le (1-\alpha)y + \alpha x,$$

nghĩa là bất đẳng thức (b) là đúng.

• $(b) \Rightarrow (c)$ Sử dụng định nghĩa của hàm lõm.

• $(c) \Rightarrow (d)$. Vì $y = \ln x$ là hàm lõm nên:

$$\ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \ge \frac{1}{p}\ln x^p + \frac{1}{q}\ln x^q,$$

do đó

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \ge xy,$$

hay nói cách khác, (d) đúng.

• $(d) \Rightarrow (a)$. Xét $\alpha \in (0;1)$. Khi đó tồn tại số thực $p > 1$ sao cho $\frac{1}{p} = \alpha$. Đặt $1-\alpha = \frac{1}{q}$ (như vậy $q > 1$). Thay x, y tương ứng bởi x^p, y^q vào bất đẳng thức Young ta nhận được

$$x^\alpha y^{1-\alpha} \le \alpha x + (1-\alpha)y.$$

Bất đẳng thức này đúng với mọi số thực $x, y > 0, \alpha \in (0;1)$. Đặc biệt, với $y = 1$ ta được:

$$x^\alpha \le \alpha x + (1-\alpha),$$

với mọi $x, \alpha \in (0;1)$, hay nói cách khác:

$$x^\alpha \le 1 + \alpha(x-1).$$

Thay x bằng $x+1$, ta thu được:

$$(x+1)^\alpha \le 1 + \alpha x$$

với mọi $x > -1, \alpha \in (0;1)$. Vậy (a) đúng.

Tóm lại $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$.

Tiếp theo, tác giả xin trình bày một mạch tương đương dài hơn giữa nhiều bất đẳng thức quen thuộc với bất đẳng thức Bernoulli.

Định lý 2. *Các mệnh đề sau là tương đương:*

(T_1): *Với* $x > -1, \alpha \ge 1$ *thì* $(1+x)^\alpha \ge 1 + \alpha x$.

(T_2): *Với* $x > -1, \alpha \le 0$ *thì* $(1+x)^\alpha \ge 1 + \alpha x$.

(T_3): *Với* $x > -1, 0 \le \alpha \le 1$ *thì* $(1+x)^\alpha \le 1 + \alpha x$.

(T_4): *Với mọi số nguyên dương* n *và các số thực* $a_i, q_i > 0$ *(*$1 \le i \le n$*),* $\alpha \ge 1$ *thỏa mãn* $\sum_{i=1}^n q_i = 1$ *thì*

$$\sum_{i=1}^n q_i a_i^\alpha \le \left(\sum_{i=1}^n q_i a_i\right)^\alpha.$$

(T_5): *Với mọi số nguyên dương* n *và các số thực*$a_i, q_i > 0$ *(*$1 \le i \le n$*),* $\alpha \ge 1$ *thỏa mãn* $\sum_{i=1}^n q_i = 1$ *thì*

$$\sum_{i=1}^n q_i a_i^\alpha \ge \left(\sum_{i=1}^n q_i a_i\right)^\alpha.$$

(T_6): *Với mọi số nguyên dương* n *và các số thực dương* a_i, p_i *(*$1 \le i \le n$*), định nghĩa* M_r *(*$r > 0$*) như sau:*

$$M_r = \begin{cases} \left(\dfrac{p_1 a_1^r + p_2 a_2^r + \ldots + p_n a_n^r}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right)^{\frac{1}{r}}, r \ne 0 \\ \left(a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}}, r = 0 \end{cases}$$

Khi đó, với mọi $r < s$ *thì*

$$M_r \le M_s.$$

(T_7): *(Bất đẳng thức Holder.) Với mọi số nguyên dương* n *và các số thực dương* a_i, b_i *(*$1 \le i \le n$*),* p, q *thỏa mãn* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Khi đó:*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(T_8): *(Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz.) Với mọi số nguyên dương* n *và các số thực dương* a_i, b_i *(*$1 \le i \le n$*) thì*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

(T_9): *Với mọi số thực dương* a, b,

$$\frac{1}{2}\ln a + \frac{1}{2}\ln b \le \ln\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

(T_{10}): *Với mọi số nguyên dương* n *và các số* *thực dương a_i, p_i ($1 \le i \le n$) thì*

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_i \ln a_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \le \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\right).$$

(T_{11}): *Với mọi số nguyên dương n và các số thực dương a_i, p_i ($1 \le i \le n$) thì*

$$\prod_{i=1}^n a_i^{\frac{p_i}{\sum_{k=1}^n p_k}} \le \frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i}{\sum_{k=1}^n p_k}.$$

(T_{12}): *Với mọi số nguyên dương m, n và các số thực dương α_j, β_i ($1 \le i \le n, 1 \le j \le m$) thỏa mãn $\sum_{j=1}^n \alpha_j = \sum_{i=1}^m \beta_i = 1$, định nghĩa*

$$G_i = a_{i,1}^{\alpha_1} a_{i,2}^{\alpha_2} \cdots a_{i,n}^{\alpha_n}$$
$$\text{và } A_j = \beta_1 a_{1,j} + \beta_2 a_{2,j} + \cdots + \beta_m a_{m,j},$$

(với $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ và $a_{k,l} > 0$). Khi đó:

$$\sum_{i=1}^m \beta_i G_i \le \prod_{j=1}^n A_j^{\alpha_j}.$$

(T_{13}): *Với mọi số nguyên dương m, n và $a_{i,j}$, ($1 \le i \le m, 1 \le j \le n$), α_k, ($1 \le k \le n$) là các số thực dương thỏa mãn $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, ta có*

$$\sum_{i=1}^m a_{i,1}^{\alpha_1} a_{i,2}^{\alpha_2} \cdots a_{i,n}^{\alpha_n} \le \prod_{j=1}^n \left(a_{1,j} + a_{2,j} + \cdots + a_{m,j}\right)^{\alpha_j}.$$

(T_{14}): *Với mọi số nguyên $m, n \ge 2$ và các số thực dương $a_{i,j}$ ($1 \le i \le m, 1 \le j \le n$), đặt*

$$A_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_{i,j}, G_i = \left(\prod_{j=1}^n a_{i,j}\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$(1 \le j \le n, 1 \le i \le m).$$

Khi đó,

$$\sqrt[n]{A_1 A_2 \cdots A_n} \ge \frac{G_1 + G_2 + \cdots + G_m}{m}.$$

(T_{15}): *(Bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân.) Với mọi số nguyên dương n và các số thực dương a_i ($1 \le i \le n$), ta có:*

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = G_n.$$

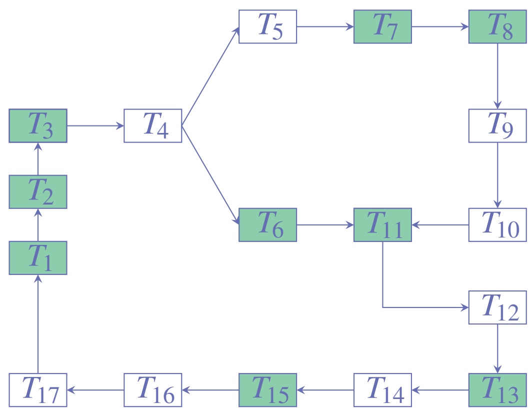
(T_{16}): *Với mọi số thực dương a, b là các số thực và số hữu tỷ $r \in (0; 1)$, ta có:*

$$a^r b^{1-r} \le ra + (1-r)b.$$

(T_{17}): *Với mọi số thực $x \ge 0$ và số nguyên dương n,*

$$x - 1 \ge n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Chứng minh. Sơ đồ chứng minh:



(Các mệnh đề T_i được tô màu xanh là các bất đẳng thức cổ điển, thường được sử dụng.)

Bạn đọc có thể thử sức mình bằng cách tự chứng minh các mũi tên $(T_i) \Rightarrow (T_j)$ trong sơ đồ trên hoặc tham khảo bài viết [2]. (Bạn đọc sẽ tìm thấy trong tài liệu đã dẫn một mạch dài hơn của các bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức Bernoulli). Dưới đây, để minh họa, người viết chỉ điểm qua chứng minh mũi tên $(T_{17}) \Rightarrow (T_1)$. Xét số nguyên dương n và số thực $x > 0$. Ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{x^n - 1}{n} \\
&= \frac{x - 1}{n(n+1)}\left(nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - 1\right) \\
&= \frac{(x-1)^2}{n(n+1)}\left[x^{n-1} + \left(x^{n-1} + x^{n-2}\right) + \ldots \right. \\
&\quad \left. + \left(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1\right)\right].
\end{aligned}$$

Hệ thức trên đây, kết hợp với lập luận bằng quy nạp, dẫn đến

$$\frac{x^m-1}{m} \geq \frac{x^n-1}{n},$$

với mọi số nguyên dương $m \geq n$. Thay x^n bằng x và $r = \frac{n}{m}$ vào bất đẳng thức vừa thu được, ta có

$$x^r - 1 \geq r(x-1).$$

Bất đẳng thức này đúng với mọi số hữu tỷ $r \geq 1$ và số thực $x > 0$. Lại vì tập các số hữu tỷ lớn hơn hoặc bằng 1 trù mật trong tập các số thực lớn hơn hoặc bằng 1 nên ta có thể kết luận rằng

$$x^\alpha - 1 \geq \alpha(x-1)$$

với mọi số thực $\alpha \geq 1, x > 0$. Thay x bởi $x+1$ ta có bất đẳng thức (T_1).

2. Nét đẹp qua phép chứng minh

Một lời giải hay, đáng học hỏi chưa hẳn là một lời giải ngắn gọn. Bởi vì điểm hay có thể đến từ ý tưởng hoặc từ kỹ thuật xử lý bài toán (kéo theo là lời giải có thể tương đối dài hoặc không đơn giản). Trong mục này, mời bạn đọc đến với những lời giải như vậy.

Ví dụ 1. *Ta nhắc lại hai bất đẳng thức sau:*

• ***(AM – GM)*** *Với mọi số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ta có*

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

• ***(Bất đẳng thức Bernoulli cơ bản)*** *Với mọi số tự nhiên n và số thực dương x, ta có*

$$x^n \geq 1+n(x-1).$$

a) Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, hãy chứng minh bất đẳng thức Bernoulli cơ bản.

b) Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli cơ bản, hãy chứng minh bất đẳng thức AM – GM.

Lời giải. a) Với $n = 0, 1$ thì bất đẳng thức Bernoulli cơ bản là hiển nhiên vì nó trở thành đẳng thức. Giả sử $n \geq 2$. Ta xét hai trường hợp

• Với $0 < x \leq 1 - \frac{1}{n}$ thì bất đẳng thức là hiển nhiên do vế trái dương trong khi vế phải không dương.

• Với $x > 1 - \frac{1}{n}$, áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$x^n = \left\{\frac{[1+n(x-1)] + \overbrace{1+\ldots+1}^{n-1}}{n}\right\}^n$$
$$\geq [1+n(x-1)]\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1 = 1+n(x-1).$$

Ta chứng minh xong bất đẳng thức Bernoulli cơ bản.

b) Đặt

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

trong đó $a_1, a_2, \ldots$ là các số thực dương. Trước hết, với $n = 1$ thì bất đẳng thức cần chứng minh là tầm thường Xét trường hợp $n \geq 2$. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right)$$
$$= \frac{A_{n-1}+nA_n-nA_{n-1}}{A_{n-1}}$$
$$= \frac{nA_n-(n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{a_n}{A_{n-1}}.$$

Hay nói cách khác,

$$A_n^n \geq a_n \cdot A_{n-1}^{n-1}.$$

Áp dụng liên tục các bất đẳng thức như vậy, ta thu được

$$A_n^n \geq a_n\cdot A_{n-1}^{n-1} \geq a_n\cdot a_{n-1}\cdot A_{n-2}^{n-2}$$
$$\geq \cdots \geq a_n\cdot a_{n-1}\cdots a_3\cdot A_2^2$$
$$\geq a_n\cdot a_{n-1}\cdots a_3\cdot a_2\cdot a_1.$$

Thế nhưng bất đẳng thức $A_n^n \geq a_1a_2\cdots a_n$ tương đương với $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ nên bất đẳng thức AM – GM được chứng minh.

Ví dụ 2. *Cho số thực $x > -1$ và số nguyên k. Chứng minh rằng $(1+x)^k \geq 1+kx$.*

Lưu ý: trong ví dụ trên, số nguyên k có thể âm.

Với mỗi $x > -1$ cố định, ta xét hàm $\mathscr{B}$ sau đây:

$$\begin{aligned}\mathscr{B} &: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\\ &k \mapsto (1+x)^{-k}(1+kx).\end{aligned}$$

Có thể thấy rằng $\mathscr{B}(0) = \mathscr{B}(1) = 1$. Ta sẽ chứng minh 1 cũng chính là giá trị lớn nhất của $\mathscr{B}$, từ đó ta thu được kết luận của bài toán. Ta có

$$\begin{aligned}&\mathscr{B}(k) - \mathscr{B}(k-1)\\ &= \frac{1+kx}{(1+x)^k} - \frac{1+(k-1)x}{(1+x)^{k-1}}\\ &= \frac{1+kx-[1+(k-1)x](1+x)}{(1+x)^k} = \frac{(1-k)x^2}{(1+x)^k}.\end{aligned}$$

Vì thế $\mathscr{B}(k) - \mathscr{B}(k-1) \geq 0$ nếu $k \leq 0$ và $\mathscr{B}(k) - \mathscr{B}(k-1) \leq 0$ nếu $k \geq 2$. Ta suy ra giá trị lớn nhất của $\mathscr{B}$ là 1 và do đó chứng minh hoàn tất.

Ví dụ 3. (Bất đẳng thức Bernoulli cho số mũ nằm trong khoảng $(0;1)$). *Cho các số thực $x > -1$ và $0 < \alpha < 1$. Chứng minh rằng $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$.*

Lời giải. Ta xét tập hợp T sau đây:

$$T = \{\alpha \in (0;1) : \forall\, y > -1 \text{ thì } (1+y)^\alpha \leq 1+\alpha y\}.$$

Trước tiên, ta sẽ chứng minh T có ba tính chất sau:

(1) $\frac{1}{2} \in T$.

(2) Nếu $\alpha \in T$ thì $1-\alpha \in T$.

(3) Nếu $\alpha, \beta \in T$ thì $\alpha\beta \in T$. Hơn nữa, nếu $\alpha+\beta < 1$ thì $\alpha+\beta \in T$.

Thật vậy,

(1) Trước hết ta thấy rằng $\left(1+\frac{y}{2}\right)^2 = 1+y+\frac{y^2}{4} \geq 1+y$, cho nên $1+\frac{y}{2} \geq (1+y)^{\frac{1}{2}}$. Hay nói cách khác $\frac{1}{2} \in T$.

(2) Giả sử $\alpha \in T$. Với mọi $y > -1$ ta có

$$\frac{-y}{1+y} = -1 + \frac{1}{1+y} > -1.$$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned}(1+y)^{1-\alpha} &= (1+y)\left(1+\frac{-y}{1+y}\right)^\alpha\\ &\leq (1+y)\left(1+\frac{-\alpha y}{1+y}\right)\\ &= 1+(1-\alpha)y.\end{aligned}$$

Như vậy $1-\alpha \in T$.

(3) Giả sử $\alpha, \beta \in T$ với $0 < \alpha < \beta < 1$. Khi đó:

$$(1+y)^{\alpha\beta} = [(1+y)^\alpha]^\beta \leq (1+\alpha y)^\beta \leq 1+\alpha\beta y.$$

Tức là $\alpha\beta \in T$. Hơn nữa,

$$\begin{aligned}&(1+y)^{\alpha+\beta}\\ =&(1+y)^\alpha(1+y)^\beta \leq (1+\alpha y)(1+\beta y)\\ =&1+(\alpha+\beta)y+(\alpha\beta)y^2\\ =&\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}y\right)^2+\left[\alpha\beta-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right]y^2\\ \leq&\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}y\right)^2.\end{aligned}$$

Tức là

$$(1+y)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \leq 1+\frac{\alpha+\beta}{2}y.$$

Như vậy ta được $\frac{\alpha+\beta}{2} \in T$.

Tiếp theo, bằng phương pháp quy nạp theo n, và sử dụng các tính chất (1) và (3), ta chứng minh được rằng:

$$A = \left\{\frac{m}{2^n} : m, n \in \mathbb{N}^*, m < 2^n\right\} \subseteq T.$$

Cuối cùng, vì A trù mật trong $(0;1)$ nên T cũng trù mật trong $(0;1)$. Từ đây, bằng cách lập luận dựa vào tính chất liên tục, ta thấy rằng $T = (0,1)$. (Cụ thể, với một dãy số $\alpha_i \in T$ mà $\lim \alpha_i = \alpha$ thì $\alpha \in T$). Suy ra với mọi số thực $0 < \alpha < 1$ và mọi số thực $x > -1$ thì

$$(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x.$$

Chứng minh hoàn tất.

3. Bất đẳng thức Bernoulli qua một số bài toán Olympic

Bất đẳng thức Bernoulli khi áp dụng cũng đòi hỏi một số kỹ thuật nhất định. Mời bạn đọc khám phá chúng qua các bài toán sau.

Bài tập 1 (Olympic New Zealand năm 2019). *Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:*

$$a^a + b^b + c^c \geq 3.$$

Bài tập 2. (Olympic Nhật Bản năm 2005). *Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:*

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leq 1.$$

Bài tập 3. (Dự tuyển kỳ thi IMO năm 2004). *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\leq \frac{1}{abc}.$$

Bài tập 4. (Olympic Bắc Trung Quốc năm 2009). *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{x^{2009}-2008(x-1)}{y+z}+\frac{y^{2009}-2008(y-1)}{x+z}+\frac{z^{2009}-2008(z-1)}{x+y}\geq \frac{1}{2}(x+y+z).$$

Bài tập 5. (Kỳ thi tuyển chọn đội tuyển Đài Loan năm 2016).

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=(a+b+c)^{2016}\left(\frac{1}{a^{2016}+b^{2016}}+\frac{1}{b^{2016}+c^{2016}}+\frac{1}{c^{2016}+a^{2016}}.\right)$$

Bài tập 6. (Dự tuyển kỳ thi IMO năm 2001). *Cho $\{a_n\}$ là một dãy các số thực dương. Chứng minh rằng có vô số n sao cho:*

$$1+a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2}.$$

Bài tập 7. (Dự tuyển kỳ thi IMO năm 2017). *Cho $a_1, a_2, \cdots, a_n, k, M$ là các số nguyên dương sao cho:*

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=k \text{ và } a_1a_2\cdots a_n=M.$$

Chứng minh rằng nếu $M>1$ thì $M(x+1)^k<(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$ với mọi $x>0$.

Lời kết

Việc nhìn lại các bất đẳng thức và tìm ra sợi dây liên kết giữa chúng cũng là một cách học bất đẳng thức thú vị. Chắc hẳn những sợi dây như vậy sẽ còn rất nhiều, chúng đang chờ bạn đọc khám phá. Cuối cùng, người viết gửi lời cảm ơn đến tác giả Trần Nam Dũng đã có bài viết gợi mở cho bài viết này, và đến người phản biện vì những góp ý bổ ích cho bài viết.

Tài liệu tham khảo.

[1] Trần Nam Dũng, *Bất đẳng thức Bernoulli*. Tạp chí Pi, số 10 năm 2021.

[2] Yuan–Chuan Li, Cheh–Chih Yeh. *Some Equivalent Forms of Bernoulli's Inequality: A Survey*. Applied Mathematics, 2013.

[3] Maligranda, L. *The AM–GM Inequality is Equivalent to the Bernoulli Inequality*. Math Intelligencer 34, 1 – 2 (2012).

OLYMPIC TOÁN HỌC "CHINH PHỤC ĐỒI CHIM SẺ" 2020-2021

HOÀNG NGỤ HUẤN[1]

Xin được giới thiệu với bạn đọc về kỳ thi "chinh phục đồi chim sẻ". Đây là kỳ thi do Trường đại học tổng hợp Moscow và nhà xuất bản thanh niên Moscow cùng phối hợp tổ chức từ năm 2005 nhằm tuyển chọn sinh viên cho trường Đại học tổng hợp Moscow. Xin được nói thêm Trường Đại học tổng hợp Moscow là trường đại học lâu đời nhất và cũng là trường đại học nổi tiếng nhất nước Nga. Nơi đây đã đào tạo ra rất nhiều nhà khoa học danh tiếng. Thi đỗ vào trường là niềm mơ ước của rất nhiều học sinh Nga. Tham gia kỳ thi này là học sinh các lớp từ 9 tới 11. Trong đó có kỳ thi riêng dành cho lớp 11 và cho các bạn lớp 9 và 10. Năm 2009 có 500 bạn học sinh đã được giải thưởng kỳ thi này và khoảng 400 bạn đã trở thành sinh viên của trường. Sau đây là bài kiểm tra của năm 2021.

Kỳ thi "Chinh phục đồi chim sẻ" năm học $2020/2021$ gồm hai vòng và đều tiến hành thi online. Vòng tuyển loại (diễn ra vào tháng $11-12$ năm 2020) kéo dài 24h gồm hai vòng nhỏ hơn: vòng loại có 6 bài toán và kéo dài 3 giờ, phần sáng tạo gồm 3 bài toán và cần phải gửi lời giải trong khoảng thời gian còn lại. Vượt qua vòng tuyển loại, các bạn trẻ sẽ được tham gia vào vòng chung kết diễn ra vào tháng 4 năm 2021.

Vòng loại

Mỗi học sinh sẽ nhận được danh sách các bài toán riêng khác biệt. Sau đây là một ví dụ về sáu bài toán của vòng loại.

1. Giải bất phương trình

$$\frac{\sqrt{x+5}-x-3}{x^2-15x+54} \geq 0$$

Trong đó hãy tìm số lượng nghiệm nguyên của bất phương trình trên.

2. Giải phương trình $\cos 2x + \cos 6x + 2\sin^2 x = 1$.

Trong đó hãy chỉ ra tổng các nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{5\pi}{6};\ \pi\right]$, làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy.

3. Từ điểm M nằm trong tam giác ABC hạ các đường vuông góc xuống các cạnh BC, AC, AB. Các đường vuông góc này có độ dài tương ứng là k, l và m. Tìm diện tích của tam giác ABC, biết rằng $\angle CAB = \alpha$ và $\angle ABC = \beta$. Nếu kết quả thu được không là số nguyên, hãy làm tròn nó tới số nguyên gần nhất.

Cho biết các giá trị số là: $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{4}, k = 3, l = 2, m = 4$.

4. Giải hệ sau

$$\begin{cases} x^3+3y^2 = 11, \\ x^2y+xy^2 = 6. \end{cases}$$

[1] *Trường Đại học Mỏ–Địa chất.*

Với mỗi nghiệm (x,y) của hệ, hãy tính giá trị của biểu thức $\frac{x}{y}$; sau đó tìm giá trị nhỏ nhất trong các giá trị thu được – lấy xấp xỉ tới hai chữ số sau dấu phảy.

5. Có hai hợp kim. Hợp kim thứ nhất chứa $p\%$ tạp chất, hợp kim thứ hai chứa $q\%$ hợp chất. Hỏi rằng cần phải nung chảy hai hợp kim theo một tỷ lệ nào để thu được một hợp kim mới chứa $r\%$ tạp chất. Trong đáp án khi tính xấp xỉ tỷ lệ khối lượng của hợp kim thứ nhất với khối lượng của hợp kim thứ hai thì làm tròn tới hai chữ số sau dấu phảy.

Các dữ liệu số: $p=70, q=5, r=40$.

6. Hãy tìm tất cả các số nguyên a có giá trị tuyệt đối không vượt quá 15 sao cho bất đẳng thức

$$\frac{4x-a-4}{6x+a-12} \le 0$$

thỏa mãn với mọi x thuộc khoảng $[2,3]$. Sau đó hãy tính tổng tất cả các giá trị a vừa tìm được.

Vòng tuyển chọn (phần sáng tạo)

7. Tìm tất cả các số tự nhiên n không vượt quá 100 sao cho tổng $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ chia hết cho 50.

Với những giá trị n vừa tìm được, hãy sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần: $n_1<n_2<\ldots<n_k$. Từ đó hãy cho biết n_{k-2} là số nào?

8. Cho trước một đường tròn, trong tất cả các tam giác nội tiếp đường tròn có tổng bình phương của các góc là $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2=\frac{\pi^2}{2}$ (các góc α, β, γ được tính bằng radian) hãy tìm tất cả các tam giác có diện tích lớn nhất.

Với mỗi tam giác tìm được, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tích các cặp góc. Giá trị nhỏ nhất được làm tròn tới hai chữ số sau dấu phảy.

9. Hãy tìm tất cả các cặp số dương x, y thỏa mãn đẳng thức

$$\begin{aligned}&\frac{4x^2y+6x^2+2xy-4x}{3x-y-2}\\&+\sin\left(\frac{3x^2+xy+x-y-2}{3x-y-2}\right)\\&=2xy+y^2+\frac{x^2}{y^2}+\frac{2x}{y}+\frac{2xy(x^2+y^2)}{(3x-y-2)^2}+\\&+\frac{1}{(x+y)^2}\left(x^2\sin\frac{(x+y)^2}{x}\right.\\&\left.+y^2\sin\frac{(x+y)^2}{y^2}+2xy\sin\frac{(x+y)^2}{3x-y-2}\right).\end{aligned}$$

Trong đáp án hãy viết tổng x^2+y^2 của tất cả các nghiệm (x,y). Kết quả được làm tròn tới hai chữ số sau dấu phảy.

Vòng chung kết

Đề 1

10. Viết các số tự nhiên bắt đầu từ 20 thành một dòng: $20212223\ldots$ Hỏi rằng trong dãy ký tự thu được, chữ số nào đứng ở vị trí 2021?

11. Hãy tìm tất cả các giá trị của a sao cho phương trình

$$|x|-\arcsin x+b\cdot(\arccos x+|x|-1)+a=0$$

có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của b.

12. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm

$$2^{\lg(x^2-3)}=\lg 2^{x^2-2}?$$

13. Giải hệ sau

$$\begin{cases}2x-3y+\frac{1}{xy}=6,\\3z-6x+\frac{1}{xz}=2,\\6y-2z+\frac{1}{yz}=3.\end{cases}$$

14. Gấp một tờ giấy hình vuông có diện tích là 17 theo đường thẳng đi qua tâm. Sau đó dính các mảnh lại với nhau. Hãy tìm diện tích lớn nhất trong các hình có thể tạo được.

Trong khuôn khổ có hạn của bài báo, chúng tôi chỉ trình bày lời giải chi tiết đối với một số bài chọn lọc.

Đáp án và lời giải

Vòng loại

1. Đáp án: 7.

2. Đáp án: $2{,}88$ (giá trị chính xác: $\frac{11\pi}{12}$).

3. Đáp án: 67.

4. Đáp án: $-1{,}31$ (giá trị chính xác: $-\frac{1+\sqrt{217}}{12}$).

5. Đáp án: $1{,}17$ (giá trị chính xác: $\frac{7}{6}$).

6. Đáp án: -7.

Vòng tuyển chọn (phần sáng tạo)

7. Đáp án: 87.

8. Đáp án: $0{,}27$ (giá trị chính xác: $\frac{\pi^2}{36}$).

9. Đáp án: $4{,}33$ ($x = \frac{9+\sqrt{17}}{8}$, $y = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ và $x^2+y^2 = \frac{85+13\sqrt{17}}{32} \approx 4{,}33$).

Vòng chung kết

Đề 1

10. Đáp án: 7.

11. Đáp án: $\frac{\pi}{2}-1$.

Lời giải. Khi $b=-1$, phương trình có dạng $|x| - \arcsin x - \arccos x - |x| + 1 + a = 0$. Với $x \in [-1;1]$ phương trình tương đương với $1 + a - \frac{\pi}{2} = 0$. Như vậy, khi $b=-1$ nghiệm chỉ tồn tại khi $a = \frac{\pi}{2} - 1$.

Mặt khác, khi $a = \frac{\pi}{2}-1$ phương trình $|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$ có nghiệm $x=1$ với bất kỳ giá trị nào của b.

Chú thích. Các bạn thí sinh có nhiều lời giải không đúng vì dựa trên suy luận sau: câu văn từ điều kiện của bài toán "với mọi giá trị của b có ít nhất một nghiệm" thì bị hiểu nhầm là "có cùng một nghiệm với mọi trí trị của b" (Đây là một bài toán khác, đơn giản hơn mặc dù đáp áp của nó trùng với đáp án của bài toán đã cho).

12. Đáp án: 4.

Lời giải. Phương trình được biến đổi về dạng

$$t^{\alpha} = \alpha(t+1),$$

với $\alpha = \lg 2 \in (0,1), t = x^2 - 3 > 0$.

Vì vế trái của phương trình $f(t) = t^{\alpha}$ là hàm lũy thừa với miền xác định $t \geq 0$; và với $\alpha \in (0,1)$ thì đây là hàm lõm. Trong khi đó vế phải của phương trình $g(t) = \alpha(t+1)$ là hàm tuyến tính với hệ số góc dương nên đồ thị của hai hàm số $f(t)$ và $g(t)$ sẽ cắt nhau tại không quá hai điểm.

Vì $f(0) = 0 < \alpha = g(0)$ và $f(1) = 1 = \lg 10 > \lg 4 = 2\alpha = g(1)$, nên trong khoảng $(0;1)$ tồn tại ít nhất một điểm.

Vì $f(1) > g(1)$, $f(10) = 10^{\lg 2} = 2 = \lg 100 < \lg 2^{11} = 11\alpha = g(10)$, nên trong khoảng $(1;10)$ cũng tồn tại ít nhất một nghiệm.

Điều đó có nghĩa là đồ thị hai hàm số cắt nhau tại đúng hai điểm (một điểm nằm giữa 0 và 1, một điểm khác nằm giữa 1 và 10).

Mỗi nghiệm dương t lại sinh ra hai nghiệm của phương trình đầu. Vì vậy, có cả thảy là 4 nghiệm.

13. Đáp án: $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = 1$ và $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}, z = -1$.

Lời giải. Nhân phương trình đầu với $(2x-3y)$, phương trình hai với $(3z-6x)$, phương trình thứ ba với $(6y-2z)$. Sau đó cộng chúng lại và thu được phương trình hệ quả:

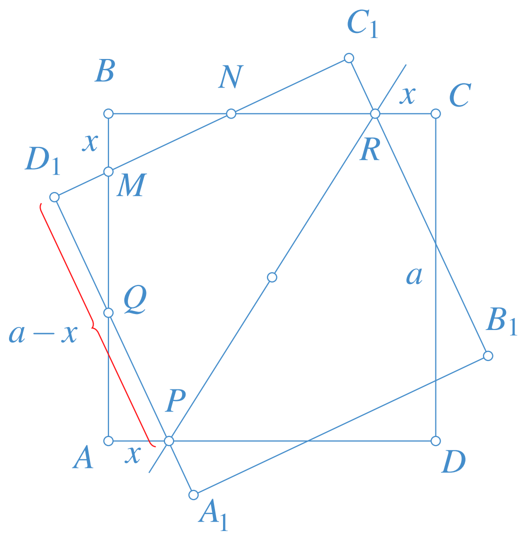
$$\begin{aligned}
&(2x-3y)^2 + (3z-6x)^2 + (6y-2z)^2 \\
&+ \frac{2x-3y}{xy} + \frac{3z-6x}{xz} + \frac{6y-2z}{yz} \\
&= 6(2x-3y) + 2(3z-6x) + 3(6y-2z) \\
\Leftrightarrow\ &(2x-3y)^2 + (3z-6x)^2 + (6y-2z)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &2x = 3y = z
\end{aligned}$$

Thế $2x = 3y = z$ vào hệ, ta được: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}, z = 1$ hoặc $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}, z = -1$.

Chú thích. Dễ dàng nhận thấy là nếu $2x = 3y = z$, thì tất cả các nhân tử nhân thêm vào phương trình đều bằng 0. Thế nhưng nó không làm xuất hiện nghiệm ngoại lai vì phương trình tổng vẫn là phương trình hệ quả của hệ đã cho.

14. Đáp án: $17\left(2-\sqrt{2}\right)$.

Lời giải. Gọi cạnh của hình vuông là a. Giả sử đường thẳng cắt và tạo trên cạnh hình vuông AD một đoạn $AP = x < \frac{a}{2}$ (Hình 2).



Hình 2

Hình vẽ thu được đối xứng qua đường thẳng PR. Mặt khác, hình vuông $A_1B_1C-1D_1$ là ảnh của hình vuông $ABCD$ qua phép quay quanh tâm của hình vuông. Khi đó $x = AP = PA_1 = C_1R = RC = BM = MD_1$. Vì vậy các tam giác vuông AQP, MBN, NC_1R, QD_1M là bằng nhau.

Như vậy diện tích của hình thu được bằng tổng diện tích của hình thang vuông PD_1C_1R và diện tích của hai tam giác vuông bằng nhau AQP, MBN. Diện tích hình thang vuông bằng $\frac{a^2}{2}$. Vì vậy ta cần tìm diện tích lớn nhất của tam giác vuông AQP. Chu vi của nó là $AP + AQ + QP = BM + AQ + QM = AB = a$. Trong số các tam giác vuông có chu vi không đổi, thì tam giác vuông cân có diện tích lớn nhất.

Ta sẽ chứng minh khẳng định trên. Gọi a, b là các cạnh của tam giác vuông còn c là độ dài của cạnh huyền. Chu vi tam giác là $P = a + b + c$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy có $P = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \geq 2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab} = \sqrt{ab}\left(2 + \sqrt{2}\right)$. Từ đó suy ra $S = \frac{ab}{2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{P}{2+\sqrt{2}}\right)^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ta cũng có thể chứng minh khẳng định trên thuần túy bằng hình học: nếu trong góc vuông ABC dựng một đường tròn nội tiếp có bán kính là $\frac{P}{2}$, thì đường tròn này sẽ là đường tròn bàng tiếp của tất cả các tam giác vuông có chu vi là P và các cạnh góc vuông BX, BY nằm trên hai cạnh của góc. Vì chu vi cho trước, cho nên tam giác có diện tích lớn nhất là tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. Bán kính này đạt giá trị lớn nhất khi đường tròn nội tiếp tiếp xúc với đường tròn bang tiếp (nếu bán kính lớn hơn nữa thì hai đường tròn này sẽ cắt nhau, đó là điều không thể), tức là khi tam giác cân. Như vậy $\angle QPA = 45^\circ$, $\angle RPD = \angle QPR = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ$. Khi đó $a = AB = 2x + x\sqrt{2}$. Từ đây rút ra được $x = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$, diện tích tam giác ΔQPA bằng $\frac{x^2}{2} = \frac{a^2\left(4+2-4\sqrt{2}\right)}{8} = \frac{a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4}$. Điều đó có nghĩa là diện tích cần tìm là $\frac{a^2}{2} + 2 \cdot \frac{a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4} = \frac{a^2\left(1+3-2\sqrt{2}\right)}{2} = a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$.

Vẫn tồn tại một lời giải khác hoàn toàn bằng đại số. Giả sử cạnh của hình vuông bằng a, đường thẳng cắt cạnh AD của hình vuông một đoạn $AP = x < \frac{a}{2}$. Ta sẽ đi tìm AQ. Ký hiệu các góc $\angle RPS = \angle RPQ = \alpha$, $\angle QPA = \beta$. Từ tam giác PRS (với S là hình chiếu của điểm R lên cạnh AD), ta tìm được $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{a-2x}$. Do đó $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{a(a-2x)}{2x(x-a)}$, $AQ = x \cdot \operatorname{tg}\beta = x\operatorname{tg}(-2\alpha) = \frac{a(a-2x)}{2(a-x)}$.

Từ đó suy ra, các cạnh của tam giác vuông bằng x và $\frac{a(a-2x)}{2(a-x)}$. Khi đó diện tích cần tìm bằng $\frac{a^2}{2} + \frac{ax(a-2x)}{2(a-x)}$. Bằng cách tính đạo hàm, ta có thể suy ra rằng hàm số $f(x) = \frac{x(a-2x)}{(a-x)}$ đạt cực đại tại $x = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$. Nó tương ứng với các góc $\beta = \frac{\pi}{4}, 2\alpha = \frac{3\pi}{4}, \alpha = \frac{3\pi}{8}$.

GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày lời giải của các bài toán trong kỳ thi Olympic Toán học trẻ của Ba Lan năm 2022 đăng trong số báo $7-8/2022$.

OC16. Trong lớp của Marek có 17 học sinh và tất cả đều làm một bài kiểm tra. Biết rằng điểm của Marek cao hơn 17 điểm so với điểm trung bình của các học sinh còn lại trong lớp. Hỏi điểm của Marek cao hơn điểm trung bình của cả lớp là bao nhiêu?

Lời giải. Ta gọi điểm của Marek là m. Khi đó, điểm trung bình của tất cả 16 học sinh còn lại là $m-17$, do đó tổng điểm của họ là $16(m-17)$. Như vậy tổng điểm thu được của cả lớp bằng

$$\begin{aligned} 16(m-17)+m &= 17m-16\times 17 \\ &= 17(m-16). \end{aligned}$$

Do đó ta suy ra điểm trung bình của cả lớp là $\frac{17(m-16)}{17}=m-16$. Như vậy điểm của Marek cao hơn 16 điểm so với điểm trung bình của cả lớp.

Ta cũng có thể giải cách thứ hai như sau. Nếu Marek chia bớt cho mỗi bạn còn lại trong lớp 1 điểm thì điểm trung bình của 16 bạn còn lại sẽ tăng lên 1 điểm còn điểm trung bình của cả lớp không thay đổi. Trong khi đó điểm của Marek, sau khi giảm đi 16 điểm, đúng bằng điểm trung bình của 16 bạn còn lại, sau khi mỗi bạn nhận thêm 1 điểm. Như vậy giá trị này cũng chính là điểm trung bình của cả lớp. Tức là điểm trung bình của cả lớp kém Marek 16 điểm.

OC17. Giả sử mỗi ô vuông trong bảng dưới đây được điền một số nguyên dương từ 1 đến 17 sao cho:

– Các số được điền đôi một phân biệt;

– Tổng của các số trong mỗi cột đều bằng nhau và tổng các số ở hàng trên cùng gấp đôi tổng các số ở hàng dưới cùng.

Hỏi trong các số từ 1 đến 17, số nào không được điền vào bảng? Vì sao?

Lời giải. Gọi n là số không xuất hiện trong bảng. Khi đó tổng các số trong bảng là $1+2+\cdots 17-n=153-n$. Từ giả thiết, ta suy ra tổng các số trong bảng phải chia hết cho 3 và 8. Như vậy $(153-n)$ chia hết cho 24. Chỉ có duy nhất một giá trị $n=9$ thỏa mãn.

Có nhiều cách để điền các số $1\leq n\leq 17$, $n\neq 9$ vào bảng thỏa mãn tất cả các điều kiện trong đầu bài. Chẳng hạn, ta điền như sau:

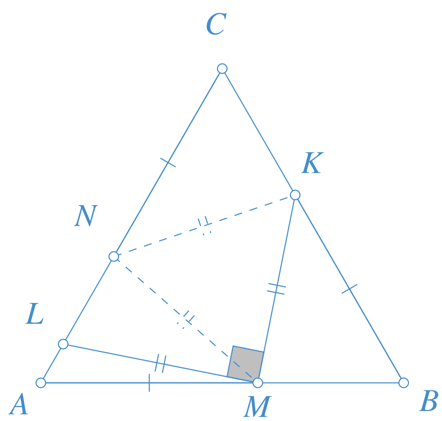
17	16	3	14	13	12	11	10
1	2	15	4	5	6	7	8

OC18. Các điểm K,L,M lần lượt nằm trên các cạnh BC,CA,AB của tam giác đều ABC và thỏa mãn các điều kiện sau:

$$KM=LM, \angle KML=90^\circ \text{ và } AM=BK.$$

Chứng minh rằng $\angle CKL=90^\circ$.

Lời giải.



Lấy điểm N trên cạnh AC sao cho $AM = BK = CN$ như hình bên trên. Từ đó ta có $BM = CK = AN$, vì vậy các tam giác AMN, BKM, CNK bằng nhau (cạnh–góc–cạnh) và do đó tam giác KMN đều.

Từ việc tam giác KMN đều, kết hợp với giả thiết $KM = LM$ ta suy ra tam giác NML cân tại M. Hơn nữa ta có $\angle LMN = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Vì vậy, $\angle NLM = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$. Ta nhận được $\angle CLK = \angle NLM - \angle KLM = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$. Từ đây ta suy ra $\angle CKL = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$.

Nhận xét. Giả thiết $\angle KML = 90^\circ$ có thể thay bằng điều kiện yếu hơn là $\angle KML \neq 60^\circ$. Thực vậy, khi đó $L \neq N$ và vẫn lý luận như trên ta cũng nhận được tam giác NML cân tại M. Do đó

$$\begin{aligned}\angle CLK &= \angle NLM - \angle KLM\\ &= \frac{180^\circ - \angle NML}{2} - \frac{180^\circ - \angle NML - 60^\circ}{2}\\ &= 30^\circ.\end{aligned}$$

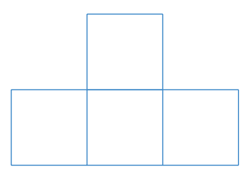
Như vậy ta vẫn nhận được $\angle CKL = 90^\circ$.

Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc ba bài toán trong kỳ thi Olympic Toán học Trẻ của Canada năm học 2022. Các bài toán này phù hợp với trình độ học sinh năm cuối cấp Trung học cơ sở.

OC25. Cho ABC là tam giác nhọn nội tiếp đường tròn Γ. Đường thẳng qua A vuông góc với BC cắt Γ tại D, và đường thẳng qua B vuông góc với AC cắt Γ tại E. Chứng minh rằng nếu $AB = DE$, thì $\angle ACB = 60^\circ$.

OC26. Giả sử bạn có vô hạn các hình chữ T (bao gồm bốn hình vuông cạnh 1) như trong hình vẽ, và một bảng ô vuông cỡ $n \times n$. Bạn được phép đặt một số hình trên bảng (có thể xoay chúng), miễn là không có hai hình nào chồng lên nhau và không có hình nào vượt ra khỏi bảng.

Với những giá trị nào của n thì bạn có thể phủ toàn bộ bảng?

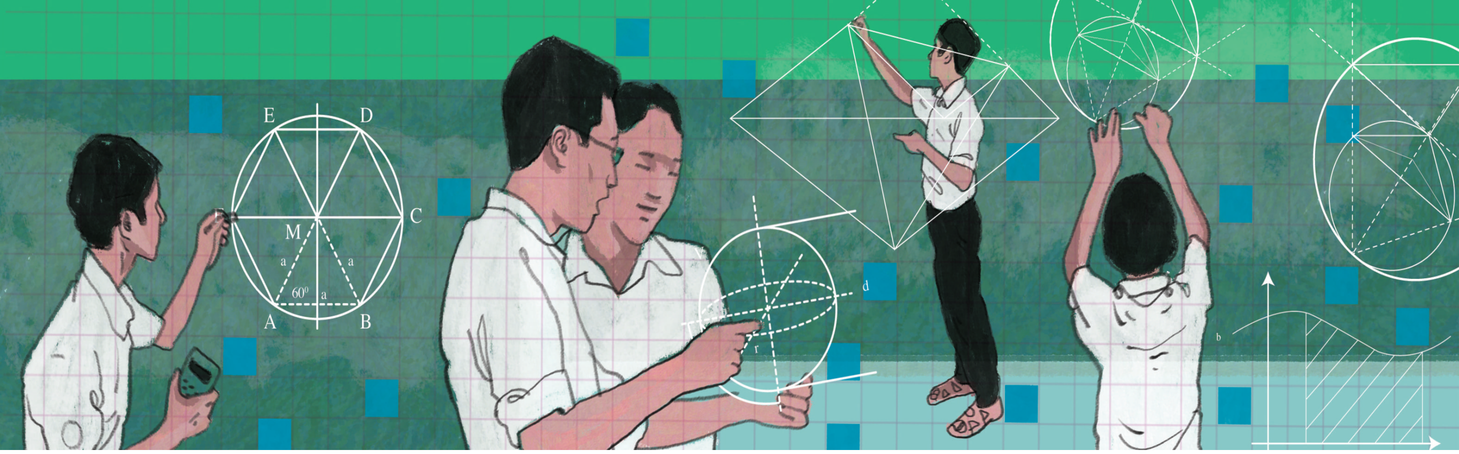


OC27. Giả sử rằng các số thực a và b thỏa mãn

$$ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b}\,\sqrt{b^2+a} = 0.$$

Tìm giá trị của biểu thức

$$S = a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b}.$$



PHAN THÀNH NAM: NHÀ TOÁN HỌC YÊU VẬT LÝ VÀ GIỎI VĂN

THƯ HIỀN[1]

***LTS.** Phan Thành Nam dành giải thưởng của Hội toán học châu Âu năm 2020. Giải thưởng này được trao bốn năm một lần trong Đại hội Toán học Châu Âu (ECM) cho các nhà khoa học trẻ (không quá 35 tuổi) nhằm ghi nhận những đóng góp xuất sắc trong lĩnh vực toán học. Nhân dịp Phan Thành Nam về công tác tại Việt Nam, anh đã có những chia sẻ với Pi về con đường học tập của mình.*

Dù ẵm giải nhì học sinh giỏi văn cấp tỉnh dành cho học sinh THCS nhưng cậu học trò Phan Thành Nam lại ước mơ trở thành nhà vật lý. Vậy là anh quyết tâm thi chuyên toán vì nghe nói muốn hiểu vật lý thì phải giỏi toán. Giấc mơ thuở thiếu thời đó đã dẫn dắt anh đến với giải thưởng chính của Hội toán học châu Âu EMS, bởi những thành tựu dùng toán để giải quyết các vấn đề vật lý lượng tử ...

GS. Phan Thành Nam tại Viện nghiên cứu cao cấp về Toán. Ảnh: Quang Huy.

Ước mơ khởi đầu: trở thành nhà vật lý

Xin chào Phan Thành Nam, anh có thể chia sẻ với Pi về hành trình dẫn anh đến với toán học? Hẳn là anh đã từng là học sinh chuyên toán từ nhỏ, vào ĐH cũng học toán?

Đúng là hồi lớp 6 thì tôi học chuyên toán trường Lương Văn Chánh ở Phú Yên. Gọi là lớp chuyên toán nhưng cũng chỉ khác lớp thường là mỗi tuần chúng tôi được bồi dưỡng thêm vài buổi với nội dung học vượt ra ngoài sách giáo khoa, còn giờ học chính khóa thì cũng học như các bạn lớp thường. Nhưng sau đó mô hình chuyên cấp THCS không còn, lên lớp 7 tôi trở về học lớp thường. Tôi học đều và thích nhiều môn, năm lớp 9 còn được giải nhì học sinh giỏi cấp tỉnh môn văn.

Ơ, sao tự nhiên anh lại đi thi học sinh giỏi môn văn?

Ban đầu tôi thi học sinh giỏi toán, nhưng bị trượt, không được chọn vào đội tuyển của trường để đi thi tiếp. Vì thế mà cô giáo dạy

[1] *Tòa soạn Hà Nội, Báo Thanh Niên.*

văn khích lệ tôi thi học sinh giỏi môn văn. Tôi thấy đây là một gợi ý hay, môn văn là môn "truyền thống" của gia đình tôi, mẹ tôi là giáo viên văn, ba tôi vốn học cử nhân văn ở Trường ĐH Tổng hợp Huế và sau này làm nhà báo. Trong nhà tôi có rất nhiều sách văn học, lúc rảnh rỗi tôi đọc hết nên cũng rất thích môn văn.

Giải nhì văn cấp tỉnh là một thành tựu ngọt ngào, sao anh không tiếp tục đầu tư cho môn văn mà lại trở thành nhà toán học?

Thật ra khi đó tôi lại ôm ấp một giấc mơ khác, đó là trở thành nhà vật lý. Ấy là do ảnh hưởng của cuốn sách ***"Các nhà vật lý đi tiên phong"***, mà hồi đó tôi vừa đọc xong. Tuy nhiên trong sách đó viết rằng để hiểu vật lý thì phải giỏi toán, nên khi vào cấp 3, tôi chọn thi vào lớp chuyên toán ở Trường THPT chuyên Lương Văn Chánh.

Thi vào đội tuyển toán của trường THCS mà còn bị trượt, vậy mà lại tiếp tục mơ mộng thi vào chuyên toán trường chuyên của tỉnh. Xem ra anh cũng "liều"?

Đúng là có một chút liều. Nhưng vì nhờ việc trượt đội tuyển toán ở lớp 9 mà tôi nhận ra mình còn thiếu kiến thức nào để bổ sung trong quá trình ôn thi vào lớp 10 chuyên toán sau này. Trước đó tôi gần như không học nội dung gì ngoài SGK. Khi ôn thi chuyên toán, tôi mới bắt đầu đào sâu một số nội dung ngoài SGK.

Thật may là tôi đã đỗ chuyên toán, tuy với mức điểm trung bình nhưng đó là một sự khởi đầu tuyệt vời bởi từ đó tôi được học các thầy dạy toán rất giỏi, họ gieo vào tôi tình yêu, niềm đam mê với toán.

Học để thỏa mãn đam mê chứ không vì thi thố

Đỗ chuyên toán với mức điểm trung bình, vậy việc học sau đó của anh có chật vật để theo kịp các bạn trong lớp không?

Tôi thấy việc học cũng nhẹ nhàng. Cuối năm lớp 10 tôi còn được chọn đi dự kỳ thi Olympic 30.4, nhờ đó mà tôi được giao lưu với các bạn học sinh giỏi toán các địa phương khác. Chúng ta vẫn nói về tầm quan trọng của việc được học với các thầy giỏi, nhưng từ trải nghiệm của chính mình, tôi thấy việc được học chung với các bạn giỏi cũng quan trọng không kém.

Hồi đó lớp tôi có một bạn rất giỏi, tên là Phùng Trọng Thực (hiện là GV Trường ĐH Bách khoa TP.HCM). Có lần Thực đưa cho tôi một bài toán rất hay và lạ, hỏi có giải được không? Thực cho biết bài toán đó có trong tờ tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, đây là lần đầu tôi biết tới tạp chí này. Từ đó, 2 đứa cùng có thêm một niềm vui chung là ngóng chờ tạp chí ***Toán học và Tuổi trẻ*** về hàng tháng để ngồi giải bài. Chúng tôi áng chừng thời gian tạp chí về đến Phú Yên (thường chậm hơn thời điểm phát hành ở Hà Nội vài ngày), những ngày đó lảng vảng quanh bưu điện liên tục để hễ tạp chí về đến nơi là mua được ngay.

Thời gian đầu, gần như chúng tôi chẳng giải được bài toán nào đăng trong tạp chí đó. Lúc đó chúng tôi mới vào lớp 10, nhưng có nhiều bài thuộc chương trình lớp 11 – 12, nên chúng tôi tự học các kiến thức liên quan trong SGK các lớp trên để có đủ nền tảng cần thiết. Nhờ sự "máu mê" đó mà chúng tôi bắt đầu giải được bài đầu tiên, rồi bài thứ hai, thứ ba ...

Lên lớp 11 thì tôi đạt giải nhì HSG quốc gia, được ra Hà Nội thi chọn đội tuyển quốc tế. Có khoảng 40 bạn dự thi, để chọn ra 6 bạn. Đề thi rất khó, có những dạng toán tôi chưa gặp bao giờ. Tôi nhớ một kỷ niệm vui là nhờ được mang đồ ăn vào phòng thi, mà tôi có việc để làm lúc thi, tức là tôi chủ yếu ngồi ăn chứ toán thì không làm được bao nhiêu.

Lớp 12 tôi cũng được đi thi quốc gia, nhưng chỉ đạt giải khuyến khích. Lúc đó tôi cảm thấy rất tự tin, vì đã học thêm được rất nhiều kiến thức so với năm lớp 11, nhưng khi vào phòng thi lại làm bài không tốt.

Không được "hái quả ngọt" vào năm học lớp 12 mà anh không nản lòng à, để lại vẫn tiếp tục học toán khi lên ĐH?

Lúc đó tình yêu toán đã bén rễ sâu đậm trong tôi, tôi học là để thỏa mãn đam mê chứ không phải để thi thố.

Nhờ đạt giải học sinh giỏi quốc gia, tôi được tuyển thẳng vào ĐH. Lúc đó tôi có nhiều lựa chọn. Ngành CNTT của Trường ĐH Bách khoa TP.HCM là ngành thời thượng. Các trường y dược cũng là mục tiêu phấn đấu của nhiều bạn học sinh giỏi. Còn khoa toán tin Trường ĐH Khoa học tự nhiên, ĐH Quốc gia TP.HCM có điểm chuẩn rất thấp, khoảng 15 điểm/3 môn là đỗ. Tuy nhiên tôi chẳng bận tâm, vì thích toán quá rồi, cứ được học toán tiếp là tôi học.

Lúc đó tôi rất thích cuốn sách ***"Tìm tòi để học giỏi toán"*** của anh Lê Quang Nẫm. Biết anh Nẫm là sinh viên Trường ĐH Khoa học tự nhiên, ĐH Quốc gia TP.HCM, tôi muốn vào đó học, với hy vọng có cơ hội được gặp anh, hoặc được học với các thầy của anh.

Anh Lê Quang Nẫm hơn tôi khoảng 5 tuổi, lúc là học sinh đã rất nổi tiếng. Anh là con nhà nghèo, khi anh trúng tuyển vào lớp 10 Trường Phổ thông Năng khiếu của ĐH Quốc gia TP.HCM thì ba của anh phải từ Quảng Ngãi vào TP.HCM để đạp xích lô nuôi anh ăn học. Học xong cấp 3 anh vào khoa Toán tin Trường ĐH Khoa học tự nhiên, và tốt nghiệp thủ khoa. Nhưng đó là những thông tin về sau tôi mới biết. Còn khi đọc cuốn sách của anh Nẫm tôi cảm thấy ngưỡng mộ vì anh viết hấp dẫn quá.

Ba mẹ anh có ý kiến thế nào khi anh chọn học toán?

Ba mẹ tôi dân chủ lắm, chỉ cung cấp thông tin về một số trường/ngành mà ba mẹ nghĩ là tốt, còn quyết định là do tôi. Thật sự lúc đó tôi cũng không mường tượng con đường học Toán ở ĐHKHTN TPHCM là như thế nào. Tôi chỉ nghĩ là có thể nó sẽ giúp mình trở thành giáo viên dạy toán, mà như thế cũng tốt. Thời đó sinh viên tốt nghiệp các ngành khoa học cơ bản mà có chứng chỉ sư phạm là cũng được dạy phổ thông.

Đó là một quyết định sáng suốt. Vì khi vào học đại học thì tôi rất may mắn gặp được các thầy giỏi, tâm huyết. Thầy này giúp tôi đến với thầy khác, nhờ thế mà hành trình giúp tôi đến với toán học khá suôn sẻ.

Dùng toán để hiểu vật lý và khám phá thế giới

Anh được Hội toán học châu Âu trao giải thưởng chính là bởi thành tựu nào trong nghiên cứu toán học của anh?

Họ xét giải trên cơ sở một cụm công trình, cụ thể là ghi nhận đóng góp của tôi cho lĩnh vực vật lý lượng tử đa hạt. Thông thường trong vật lý lượng tử, để biết tính chất của một hệ thì mình phải giải một phương trình Schrödinger (phương trình được đặt theo tên nhà vật lý học người Áo, người đầu tiên thiết lập phương trình này và được giải Nobel vật lý năm 1933). Nếu hệ chỉ có một hạt, thì phương trình Schrödinger chỉ có một biến trong không gian ba chiều. Nếu hệ có N hạt thì phương trình có N biến, và trong nhiều ứng dụng số lượng biến số rất lớn tới mức mình không thể giải được, kể cả giải chính xác hoặc giải số bằng máy tính.

GS. Phan Thành Nam và một sinh viên. Ảnh: Quang Huy.

Vì đó là một bài toán rất phức tạp, mình cần sẽ tiếp cận bằng các phương pháp xấp xỉ, thường là thay phương trình tuyến tính nhiều biến bằng phương trình phi tuyến một biến. Đây là phương pháp mà các nhà vật lý học đã phát triển trong một thời gian dài. Câu hỏi đặt ra là làm sao chứng minh được phương pháp xấp xỉ đó là đúng, nghĩa là khi số hạt N tiến về vô cùng thì mô hình xấp xỉ trở thành chính xác. Bằng cách sử dụng và phát triển các công cụ trong toán giải tích, tôi chứng minh được rằng trong những điều kiện cụ thể thì một số mô hình xấp xỉ sẽ đúng với những nguyên lý căn bản trong cơ học lượng tử.

Ở trên anh kể chuyện hồi lớp 9 anh từng mơ ước trở thành nhà vật lý nên nên mới cố gắng học giỏi toán. Vậy việc sau này anh chọn nghiên cứu sâu về toán trong vật lý lượng tử, việc này có liên quan gì tới ước mơ hồi đó?

Đúng là có liên quan. Sau khi làm thạc sĩ, tôi xin được một số học bổng tiến sĩ khác nhau, có cả toán lý thuyết và toán ứng dụng. Tình cờ trong thời gian này, tôi đọc một cuốn sách rất thú vị là ***"Lưới trời ai dệt"*** của tác giả Nguyễn Tường Bách. Trong cuốn đó, tác giả trình bày về vật lý lượng tử một cách rất cuốn hút, với nhiều mối liên quan tới triết học Phật giáo. Điều này làm sống lại ước mơ hồi năm lớp 9, vốn vẫn quanh quẩn trong tâm trí tôi, đó là học về Vật lý Toán.

Vì thế mà tôi chọn GS Jan Philip Solovej ở ĐH Copenhaghen để xin học lên tiến sĩ. Khi đó, tôi vào trang khoa toán tìm các giáo sư, và cảm thấy các công trình nghiên cứu của GS Solovej về vật lý lượng tử là vô cùng hấp dẫn. Mặc dù tôi không hiểu rõ các công trình đó, nhưng cảm thấy các kiến thức toán này nếu cố gắng mình sẽ học được, nên quyết định xin theo thầy. Tôi rất may mắn là được thầy đồng ý.

Tôi nghĩ môn vật lý ở chương trình phổ thông là một môn học thú vị, nó giúp cho những đứa trẻ thỏa mãn sự tò mò khi tìm hiểu các hiện tượng tự nhiên. Sau này, nhờ sử dụng các công cụ bên toán mà tôi hiểu được chính xác các khái niệm vật lý, điều này kiến tôi thấy rất sung sướng. Mặc dù có thể đó là những điều nhân loại hiểu ra từ cách đây hàng trăm năm, nhưng khi được đi lại trên con đường khám phá thế giới mà nhân loại đã từng đi, tôi vẫn thấy thật hạnh phúc.

Sẽ cùng các đồng nghiệp người Việt ở nước ngoài giúp VN lấp khoảng trống vật lý toán...

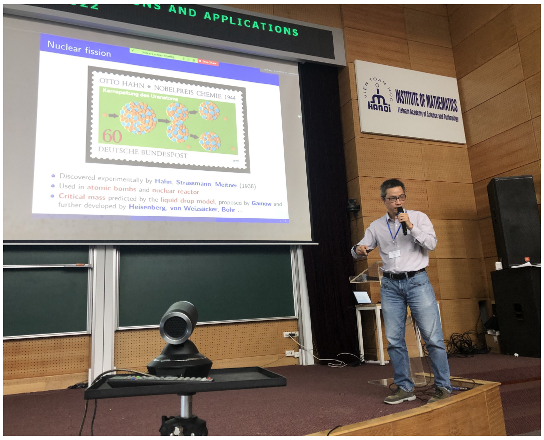
Anh có biết, ở Việt Nam, có những ai làm việc trong lĩnh vực nghiên cứu của anh không?

Tôi gần như không biết có ai làm về lĩnh vực này ở VN! Có một số nhóm vật lý lý thuyết làm việc trực tiếp với những mô hình xấp xỉ phi tuyến, và một số nhóm vật lý thực nghiệm kiểm tra các mô hình xấp xỉ đó có đúng hay không. Nhưng có vẻ như không có nhà toán học nào nghiên cứu những phương trình nhiều hạt từ các nguyên lý cơ bản nhất.

Có nghĩa là lĩnh vực này đang có một khoảng trống lớn ở VN?

Vâng, đúng rồi. Nhưng tôi nghĩ tôi có thời gian để giúp cải thiện việc này.

Đầu tháng 8 vừa rồi, tôi cùng anh Nguyễn Trọng Toán (GS ở ĐH bang Pennsylvania, Mỹ) tổ chức một trường hè về vật lý toán bên Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán (nơi GS Ngô Bảo Châu là Giám đốc khoa học – PV). Chúng tôi bất ngờ trước sự say mê học hỏi của các bạn trẻ. Trong cả buổi sáng họ nghe chúng tôi giảng bài, tới buổi chiều vẫn kiên trì ngồi lại lớp học làm bài tập. Sau đó tôi dự hội thảo về phương trình đạo hàm riêng kỷ niệm ngày sinh GS Đinh Nho Hào ở Viện toán học VN. Tôi thấy nhiều báo cáo đạt chất lượng rất cao, ngang tầm chất lượng các hội thảo đẳng cấp quốc tế. Điều đặc biệt là có nhiều báo cáo của các bạn trẻ. Do đó, tôi thấy rất lạc quan với sự phát triển của ngành này ở trong nước, và trước mắt tôi có thể dùng các công cụ của ngành phương trình đạo hàm riêng để tương tác với các nhà toán học trong nước.



GS. Phan Thành Nam báo cáo tại Viện Toán học. Ảnh: Viện Toán học.

Để xây dựng ngành của mình ở VN, tôi cần phải tiếp tục tổ chức một số trường hè, tổ chức dạy học một số môn học trong các khoa toán của các trường ĐH. Tôi đã trao đổi với một số nhà toán học trong nước và được các anh ủng hộ. Trước hết các thầy trong nước sẽ dạy trước cho sinh viên một số kiến thức tổng quát, sau đó tôi sẽ dạy phần tiếp theo, đi sâu hơn vào lĩnh vực nghiên cứu hiện đại. Bằng các giải pháp đồng thời như trên, tôi hy vọng sẽ có một số bạn trẻ sẽ nảy sinh đam mê về vật lý toán.

Một thuận lợi là với riêng ngành giải tích – phương trình đạo hàm riêng, tôi có nhiều "đồng minh" là các anh chị người Việt xuất thân từ trường ĐH Khoa học tự nhiên, ĐH Quốc gia TP.HCM và đã đạt được vị trí vững vàng trong các trường đại học hàng đầu trên thế giới. Ở Châu Âu có anh Nguyễn Hoài Minh (GS ĐH Paris Sorbonne ở Pháp); anh Nguyễn Lê Lực (GS ĐH ở Anh); anh Trương Trung Tuyến (GS ĐH Oslo, Na Uy). Ở Mỹ có anh Nguyễn Trọng Toán (GS ĐH bang Pennsylvania), anh Lê Quang Nẫm (GS ĐH Indiana), anh Trần Vĩnh Hưng (GS ĐH Wisconsin–Madison), anh Phan Văn Tuộc (GS ĐH Tennessee), anh Trần Minh Bình (GS ĐH Texas A&M) ... và rất nhiều anh chị khác. Đó là những người trẻ trên dưới 40 tuổi, đang làm việc rất tích cực, và mọi người đều đồng lòng hướng về VN với mong muốn tham gia vào sự phát triển toán học trong nước.

Xin cảm ơn GS Phan Thành Nam!

CÁC NHÀ TOÁN HỌC HY LẠP TỪ PYTHAGORAS TỚI EUCLID (Thế kỷ V đến thế kỷ III trước Công nguyên) Phần III: Học viện Plato

TẠ DUY PHƯỢNG[1]

Học viện Plato

Thế kỷ thứ tư TCN đã mở đầu bằng cái chết của Socrates (khoảng $470-399$ TCN), một học giả đã áp dụng phương pháp biện chứng của Zeno và bác bỏ thuyết Pythagoras của Archytas (khoảng $420-347$ TCN). Socrates thừa nhận rằng khi còn trẻ, ông đã bị thu hút bởi những câu hỏi như tại sao tổng $2+2$ lại bằng tích 2×2 nhưng khi nhận ra rằng cả toán học và khoa học đều không thể thỏa mãn mong muốn của ông để hiểu bản chất của sự vật, ông đã tự nghiên cứu để hiểu những điều bản chất.

Trong *Phaedo* của Plato, cuộc đối thoại trong đó những giờ cuối cùng của Socrates được mô tả rất đẹp, chúng ta thấy những nghi ngờ siêu hình sâu sắc như thế nào loại trừ mối quan tâm của Socrate về toán học hoặc khoa học tự nhiên:

Tôi không thể tự thỏa mãn bản thân rằng, khi một cái được thêm vào một cái, mà phép cộng được thực hiện trở thành hai.

Tôi không thể hiểu làm thế nào khi tách khỏi nhau, mỗi trong số chúng là một chứ không phải hai, và bây giờ, khi chúng được kết hợp lại với nhau, chỉ là sự đặt cạnh nhau, là nguyên nhân khiến chúng trở thành hai.

Do đó, ảnh hưởng của Socrates trong sự phát triển của toán học là không đáng kể, nếu không nói là tiêu cực. Điều đáng ngạc nhiên là chính học trò và người ngưỡng mộ ông là Plato đã trở thành cảm hứng toán học của thế kỷ thứ tư TCN.

Mặc dù bản thân Plato không có đóng góp kết quả toán học nổi bật cụ thể nào, nhưng ông đã là trung tâm của hoạt động toán học thời gian đó, hướng dẫn và truyền cảm hứng cho sự phát triển của toán học. Tại cửa trường học của ông, Học viện (The Academy) ở Athens, được khắc khẩu hiệu "Ai không biết hình học không vào đây".

ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ.

Sự nhiệt tình của Plato đối với toán học khiến ông được biết đến không phải với tư cách là một nhà toán học, mà là "người tạo ra các nhà toán học".

---

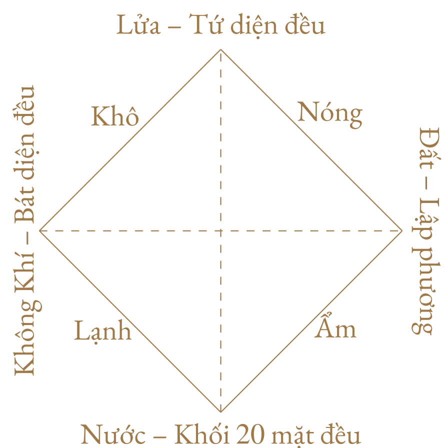
[1] *Cộng tác viên Viện Toán học.*

Hình 6: The School of Athens của Rafael tại Vaticant.

Sáu nhà toán học (ngoài Plato và Aristotle) sống giữa năm mất của Socrates (399 TCN) và năm mất của Aristotle (322 TCN) – gồm Theodorus xứ Cyrene (thế kỷ V TCN), Theaetetus (khoảng 414 – 369 TCN), Eudoxus xứ Cnidus (khoảng 410 – 347 TCN), hai anh em Menaechmus (380 – 320 TCN) và Dinostratus (390 – 320 TCN), và Autolycus xứ Pitane (360 – 320 TCN) – là những nhà toán học đã có liên kết ít nhiều chặt chẽ với Học viện Plato.

Rõ ràng là việc Plato rất coi trọng toán học không đến từ Socrates. Trên thực tế, các bài giảng trong thời kỳ đầu và tác phẩm Đối thoại (Dialogues) của Plato hiếm khi đề cập đến toán học. Archytas, một người bạn của Plato, là người đã khiến Plato quan tâm đến toán học, khi Ông đến thăm bạn ở Sicily vào năm 388 TCN. Có lẽ chính khi đó, Plato mới biết đến năm hình đa diện đều, được liên kết với bốn nguyên tố (nước, lửa, không khí và đất) của Empedocles (490 – 430 TCN) trong một sơ đồ vũ trụ đã mê hoặc các nhà nghiên cứu trong nhiều thế kỷ (Hình 7).

Có thể, sự coi trọng của Pythagoras đối với khối 12 mặt đều đã khiến Plato xem xét nó, khối đa diện đều thứ năm và cuối cùng, như một biểu tượng của vũ trụ. Plato đặt ý tưởng của ông về đa diện đều thành một cuộc đối thoại có tiêu đề *Timaeus*, được đặt tên cho một người đóng vai trò là người đối thoại chính thuộc trường phái Pythagoras. Không biết Timaeus xứ Locri có thực sự tồn tại không, hay Plato đã phát minh ra Timaeus như một nhân vật để thể hiện quan điểm của Pythagoras, khi ấy vẫn còn mạnh mẽ ở khu vực mà ngày nay là nước Ý.



Hình 7: Sơ đồ vũ trụ ứng với khối đa diện.

Các khối đa diện đều thường được gọi là "vật thể vũ trụ" hoặc "khối đa diện Plato" bởi vì cách mà Plato trong *Timaeus* đã áp dụng chúng vào giải thích các hiện tượng khoa học.

Mặc dù đối thoại này, có lẽ được viết khi Plato đã gần bảy mươi tuổi, cung cấp bằng chứng xác thực sớm nhất cho sự liên kết của bốn nguyên tố với khối đa diện đều, phần lớn sự tưởng tượng này có thể là do trường phái Pythagoras.

Proclus (khoảng 410 – 485) quy việc xây dựng hình học vũ trụ cho Pythagoras, nhưng có thể bạn của Plato là Theaetetus (khoảng 414 – 369 TCN) đã viết về liên kết giữa vũ trụ và khối đa diện đều.

Quyển XIII của *Cơ sở* của Euclid nói rằng chỉ có ba trong số năm khối đa diện là do Pythagoras, và nhờ Theaetetus mà khối bát diện và hai mươi mặt đều đã được biết đến.

Có vẻ như Theaetetus đã thực hiện một trong những nghiên cứu quy mô nhất về năm khối đa diện, và định lý nói rằng có và chỉ có năm khối đa diện đều là thuộc về Theaetetus. Có lẽ ông cũng là tác giả của các tính toán về tỷ lệ các cạnh của khối đa diện đều và bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

Theaetetus là một thanh niên Athens chết vì bệnh kiết lỵ kết hợp với vết thương trong trận chiến, và cuộc đối thoại của Plato mang tên ông là một sự tưởng nhớ của Plato đối với người bạn của mình.

Trong cuộc đối thoại, có bối cảnh trước đó khoảng ba mươi năm, Theaetetus thảo luận với Socrates và Theodorus về bản chất của các đại lượng vô ước với nhau (hay các đại lượng không thông ước với nhau). Người ta đã giả định rằng cuộc thảo luận này phần nào có dạng mà chúng ta tìm thấy trong phần mở đầu của Quyển X của *Cơ sở*.

Ở đây, sự phân biệt không chỉ được thực hiện giữa các đại lượng thông ước và vô ước, mà còn giữa các đại lượng khi độ dài là vô ước với nhau, nhưng có diện tích thông ước với nhau. Như $\sqrt{3}$ và $\sqrt{5}$ không thông ước về độ dài, nhưng thông ước về diện tích, vì các hình vuông của chúng có tỷ lệ là $3/5$.

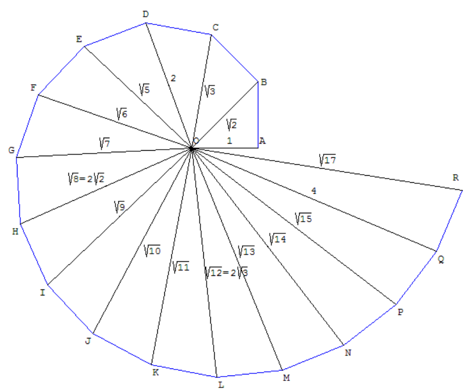
Mặt khác, các đại lượng $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ và $\sqrt{1+\sqrt{5}}$ là không thông ước cả về độ dài và diện tích.

Cuộc đối thoại mà Plato sáng tác để tưởng nhớ người bạn Theaeteus của mình chứa thông tin về một nhà toán học khác, Theodorus xứ Cyrene, thầy của Plato và Theaetetus, người mà Plato ngưỡng mộ và là người đã đóng góp vào sự phát triển của lý thuyết về các đại lượng vô ước.

Không biết bằng cách nào mà Theodorus đã làm điều này và tại sao ông lại dừng lại ở $\sqrt{17}$

Theodorus là người đầu tiên chứng minh tính vô tỷ của căn bậc hai của các số nguyên không chính phương từ 3 đến 17.

Chứng minh, trong mọi trường hợp, được đưa ra bởi Aristotle khi ông xây dựng trục xoắn ốc dọc theo đoạn $\sqrt{2}$. Các tác phẩm lịch sử cổ đại chỉ ra rằng Theodorus đã khám phá ra điều này và sau này nó được đưa vào *Cơ sở*, nhưng các tác phẩm của Theodorus đã bị mất.



Hình 8: Xoắn ốc Theodorus.

Plato có vai trò quan trọng trong lịch sử toán học phần lớn vì ông là người truyền cảm hứng và là người sáng lập Học viện đào tạo ra nhiều nhà toán học, cũng như do sự nhạy bén của ông về sự phân biệt ở Hy Lạp cổ đại giữa số học (theo nghĩa của lý thuyết về các con số) và kỹ thuật tính toán.

Plato cho rằng toán học là cần thiết cho doanh nhân và quân sự, "phải học nghệ thuật của những con số, nếu không anh ta sẽ không biết cách dàn quân".

Mặt khác, nhà triết học phải là một nhà số học "bởi vì anh ta phải nhảy ra khỏi biển của những thay đổi và nắm giữ bản thể đích thực." Hơn nữa, Plato nói trong tác phẩm *Cộng hòa (The Republic)*: "Số học có tác dụng rất lớn và nâng cao, buộc tâm trí nghĩ về số trừu tượng."

Trong số học, Plato đã nhìn thấy một hố ngăn cách lý thuyết và các khía cạnh tính toán, cũng như trong hình học, ông cũng tán thành toán học thuần túy chống lại quan điểm duy vật.

Bất kỳ một trong số vô số đường kính của đường tròn là trục đối xứng của hình. Bất cứ điểm nào trên một đường thẳng kéo dài vô hạn có thể được coi là tâm của đối xứng, giống như bất kỳ đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng đã cho là trục đối xứng của đường thẳng đã cho. Triết học Plato, với sự áp dụng các ý tưởng của nó, tự nhiên sẽ tìm thấy vai trò của đường thẳng và đường tròn giữa các hình hình học. Tương tự, Plato tôn vinh tam giác.

Sự liên kết của bốn khối đa diện đầu tiên với bốn yếu tố phổ quát truyền thống của vũ trụ đã cung cấp cho Plato trong *Timaeus* một lý thuyết thống nhất tuyệt đẹp về vật chất, theo đó mọi thứ đều được xây dựng bằng các tam giác vuông lý tưởng. Toàn bộ sinh lý học, cũng như khoa học về chất trơ, dựa trên các hình tam giác.

Pythagoras nổi tiếng là người đã thiết lập toán học như một chủ đề tự do, nhưng Plato đã có ảnh hưởng trong việc làm cho toán học trở thành một phần thiết yếu của chương trình đào tạo.

Có lẽ bị ảnh hưởng bởi Archytas, Plato đã thêm vào các chủ đề ban đầu trong bộ bốn (quadrivium: Số học, Hình học, Âm nhạc, Thiên văn) một môn học mới: Hình học không gian, vì ông tin rằng hình học không gian đã không được nhấn mạnh đầy đủ. Plato cũng thảo luận về nền tảng của toán học, làm rõ một số định nghĩa và xây dựng lại các giả thiết. Ông nhấn mạnh rằng lý luận được sử dụng trong hình học không đề cập đến những con số hữu hình mô tả chúng, mà là những ý tưởng tuyệt đối mà chúng đại diện. Những người theo thuyết Pythagoras đã định nghĩa điểm là "sự thống nhất có vị trí," nhưng Plato lại nghĩ về nó như là sự khởi đầu của một đường thẳng.

Định nghĩa của một đường là "chiều dài không có chiều rộng" dường như bắt nguồn từ trường phái Plato.

Trong số học, Plato không chỉ nhấn mạnh sự phân biệt giữa số lẻ và số chẵn, mà còn là các loại "chẵn nhân chẵn", "chẵn nhân lẻ" và "lẻ nhân lẻ". Mặc dù ta biết rằng Plato đã thêm vào các tiên đề của toán học, chúng ta không có một cơ sở nào để khẳng định điều này.

Rất ít đóng góp toán học cụ thể được quy cho Plato. Một công thức cho bộ ba Pythagoras – $(2n)^2+(n^2-1)^2=(n^2+1)^2$, trong đó n là số tự nhiên bất kỳ – mang tên Plato, nhưng đây chỉ là một phiên bản sửa đổi của kết quả được người Babylon và người Pythagoras đã biết.

Có lẽ thực sự có ý nghĩa quan trọng hơn cả trong những thứ được gán cho Plato là cái gọi là phương pháp phân tích (analytic method).

Trong chứng minh toán học, ta bắt đầu với những gì đã cho, và từ các tiên đề và các định đề. Tiến hành từng bước một, sau đó đến khẳng định cần được chứng minh.

Plato dường như đã chỉ ra rằng về mặt sư phạm, khi không tìm được một chuỗi lý luận hiển nhiên từ giả thiết đến kết luận, thường là thuận tiện hơn nếu ta bắt đầu bằng mệnh đề cần được chứng minh và từ đó suy ra một kết luận được biết là đúng. Nếu, sau đó, có thể đảo ngược các bước trong chuỗi lý luận này, kết quả sẽ là mệnh đề đã được chứng minh.

Plato không hẳn là người đầu tiên nêu lên quan điểm phân tích. Nhưng những gì Plato có thể đã làm là chính thức hóa quá trình này, hoặc có thể ông đã đặt tên cho nó.

Vai trò của Plato trong lịch sử toán học vẫn còn bị tranh cãi gay gắt. Một số người coi ông là một nhà tư tưởng đặc biệt sâu sắc và nhạy bén. Những người khác hình dung ông như một người đã thu hút các nhà toán học theo con đường lý luận trừu tượng, đi xa những vấn đề thực tiễn.

Trong mọi trường hợp, ít ai có thể phủ nhận rằng Plato đã có tác động to lớn đối với sự phát triển của toán học. Học viện Plato ở Athens trở thành trung tâm toán học của thế giới, và từ ngôi trường này, xuất hiện các giáo viên và nghiên cứu viên hàng đầu đến vào giữa thế kỷ thứ tư TCN. Trong số này, nổi tiếng nhất là Eudoxus xứ Cnidus (khoảng 408 – 335 TCN), một học trò của Plato và người đã trở thành nhà toán học và nhà thiên văn học nổi tiếng nhất trong thời đại của mình.

Tài liệu chính dùng để soạn

[1] David M. Burton, *The History of Mathematics, An Introduction*, Seventh Edition, McGraw–Hill, 2011. Chapter 3: The Beginnings of Greek Mathematics, pp. 116 – 139.

[2] Euclid's *Elements of Geometry*, edited and provided with a modern English translation by Richard Fitzpatrick, Independently published, 2008, 544 p.

[3] David Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy*, Second Edition, Clarendon Press, Oxford, 1999, 441 p.

[4] Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1921, Volume 1: From Thales to Euclid, pp. 170 – 315.

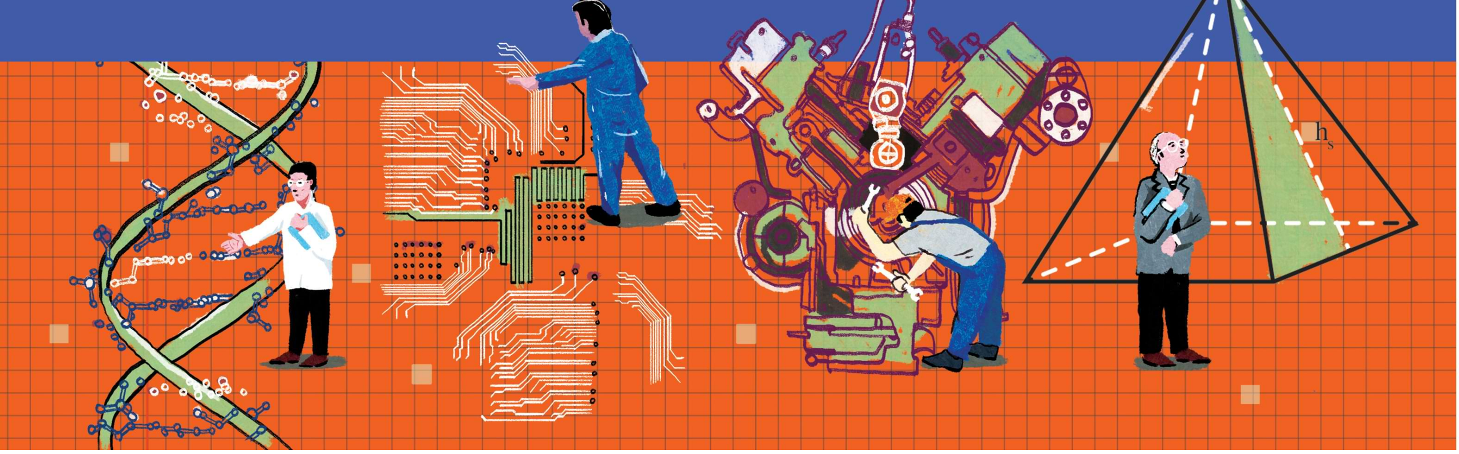
[5] Victor J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, Third Edition, Addison–Wesley, 2009. Chapter 2: *The Beginnings of Mathematics in Greek*, pp. 40 – 49.

[6] Uta C. Merzbach and Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, Third Edition, John Wiley & Sons, 2011, pp. 65 – 80.

[7] George Johston Allman, *Greek Geometry, From Thales to Euclid*, Dublin Universty Press, 1885, 432 p.

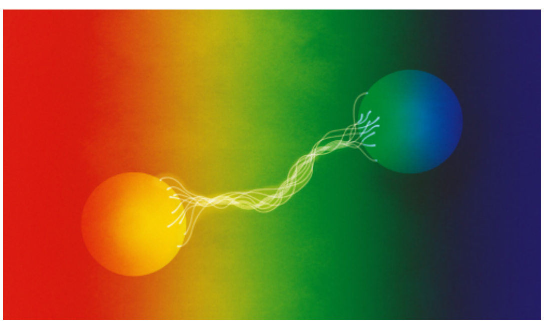
[8] R. Lloyd, *Early Greek Science: Thales to Aristotle*, 1970, Chatto & Windus, London, 156 p.

[9] Arpad Szabo, *The beginnings of Greek Mathematics*, Springer, 1978, 363 p.



RÀNG BUỘC LƯỢNG TỬ-MỘT CÔNG CỤ MẠNH[1]

Bằng những thí nghiệm đột phá, ***Alain Aspect, John Clauser*** *và* ***Anton Zeilinger*** *đã chỉ ra khả năng nghiên cứu và kiểm soát các hạt ở trạng thái ràng buộc. Điều xảy đến với một hạt trong một cặp bị ràng buộc với nhau sẽ quyết định điều xảy đến với hạt còn lại, kể cả khi chúng cách nhau quá xa để có thể tác động đến nhau. Các công cụ thực nghiệm do ba nhà khoa học được giải phát triển đã đặt nền móng cho một kỷ nguyên mới của công nghệ lượng tử.*



Những nền tảng cơ bản của cơ học lượng tử không chỉ là vấn đề lý thuyết hay triết học. Nhiều nghiên cứu và phát triển đang diễn ra mạnh mẽ nhằm sử dụng những tính chất đặc biệt của từng hệ hạt riêng rẽ để tạo ra máy tính lượng tử, cải tiến đo lường, xây dựng các mạng lượng tử và thiết lập phương thức truyền tin bảo mật bằng mật mã lượng tử.

Nhiều ứng dụng phụ thuộc vào cách cơ học lượng tử cho phép hai hay nhiều hạt tồn tại trong cùng một trạng thái, bất kể khoảng cách giữa chúng. Hiện tượng này, được gọi là ràng buộc lượng tử, là một trong những yếu tố gây tranh luận nhiều nhất trong cơ học lượng tử kể từ khi lý thuyết này được phát biểu. Albert Einstein từng nói về "tác động ma quái từ xa" và Erwin Schrödinger nói đó là đặc điểm quan trọng nhất của cơ học lượng tử.

Các nhà khoa học được giải năm nay đã tìm hiểu các trạng thái ràng buộc lượng tử này, và các thí nghiệm của họ đã đặt nền móng cho cuộc cách mạng đang diễn ra trong công nghệ lượng tử.

Khác xa trải nghiệm thường ngày

Khi hai hạt ở trong trạng thái ràng buộc lượng tử, nếu đo được một thuộc tính của một hạt, người ta có thể xác định ngay kết quả của phép đo tương đương đối với hạt còn lại mà không cần phải kiểm tra.

Thoáng nhìn thì điều này có lẽ không có gì lạ. Nếu nghĩ về những quả bóng thay vì các hạt, ta có thể hình dung một thí nghiệm trong đó quả bóng đen được ném về một hướng, quả bóng trắng được ném về hướng ngược lại. Một người quan sát khi bắt được quả bóng trắng sẽ có thể nói ngay rằng quả bóng được ném theo hướng ngược lại có màu đen.

---

[1] *Nguồn: https://www.nobelprize.org/uploads/2022/10/popular-physicsprize2022.pdf.*
Dịch: Nguyễn Hoàng Thạch (Viện Toán học); hiệu đính: Nguyễn Trần Thuật (ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội).

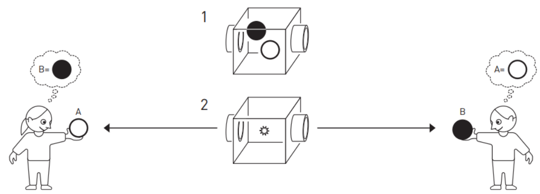
Điểm đặc biệt của cơ học lượng tử là những thứ tương đương với những quả bóng (nói ở trên) không có trạng thái xác định cho đến khi chúng được đo. Cứ như thể tất cả bóng đều màu xám, cho tới khi ai đó nhìn vào một quả trong số chúng. Khi đó, quả bóng được quan sát có thể lấy ngẫu nhiên tất cả màu đen hoặc tất cả màu trắng của cả cặp, và quả bóng còn lại lập tức trở thành màu còn lại.

Nhưng làm sao biết được rằng hai quả bóng không có màu xác định ngay từ đầu? Ngay cả khi chúng đều trông màu xám, biết đâu ẩn bên trong chúng có những nhãn cho biết chúng cần biến thành màu gì khi có người nhìn.

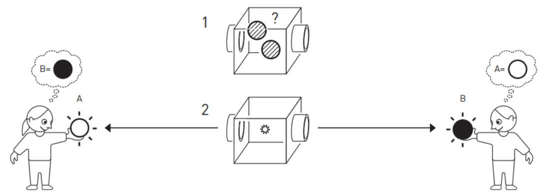
Màu sắc có tồn tại khi không ai nhìn?

Những cặp hạt bị ràng buộc với nhau trong cơ học lượng tử có thể được ví với một cái máy bắn những quả bóng khác màu về hai hướng ngược nhau. Khi Bob bắt được một quả bóng và thấy rằng nó màu đen, anh ta biết ngay rằng Alice bắt được một quả bóng trắng. Trong một lý thuyết sử dụng những biến ẩn, những quả bóng sẽ luôn chứa thông tin ẩn về màu chúng sẽ hiển thị. Tuy nhiên, cơ học lượng tử nói rằng những quả bóng có màu xám cho tới khi được nhìn, khi đó một quả trở thành màu trắng, một cách ngẫu nhiên, và quả còn lại trở thành màu đen. Các bất đẳng thức Bell chỉ ra rằng có những thí nghiệm có thể phân biệt những trường hợp này. Những thí nghiệm đó đã chứng minh rằng mô tả của cơ học lượng tử là đúng đắn.

Một phần quan trọng trong những nghiên cứu được trao giải Nobel Vật lý năm nay là hiểu biết lý thuyết sâu sắc có tên gọi *các bất đẳng thức Bell*. Các bất đẳng thức Bell giúp phân biệt được sự bất định của cơ học lượng tử với một mô tả khác sử dụng các *biến ẩn*. Các thí nghiệm cho thấy tự nhiên tuân theo những dự đoán của cơ học lượng tử. Những quả bóng có màu xám, không chứa thông tin bí mật, và việc quả nào trở thành đen, quả nào trở thành trắng là ngẫu nhiên.



Hình 1: Biến ẩn.



Hình 2: Cơ học lượng tử.

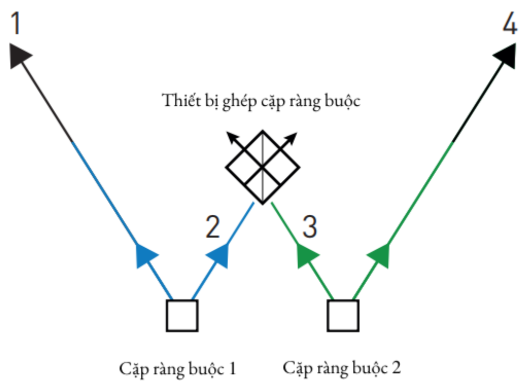
Tài nguyên quan trọng nhất của cơ học lượng tử

Các trạng thái ràng buộc lượng tử mang lại những phương thức mới tiềm năng để lưu trữ, trao đổi và xử lý thông tin.

Những điều thú vị xảy ra khi hai hạt trong một cặp ràng buộc di chuyển theo hai hướng ngược nhau, sau đó một trong chúng gặp một hạt thứ ba và hai hạt này lại trở thành ràng buộc với nhau. Khi đó, chúng bước vào một trạng thái chung mới. Hạt thứ ba bị mất nhận dạng, nhưng các tính chất ban đầu của nó được chuyển sang hạt lẻ được tách ra từ cặp đầu tiên. Cách truyền một trạng thái lượng tử chưa biết từ một hạt sang một hạt khác như thế này được gọi là *viễn tải lượng tử*. Thí nghiệm kiểu này được thực hiện lần đầu tiên vào năm 1997 bởi **Anton Zeilinger** và các đồng nghiệp.

Điều đáng chú ý là viễn tải lượng tử là cách duy nhất để truyền thông tin lượng tử từ hệ này sang hệ khác mà không bị thất thoát thông tin. Việc đo tất cả các thuộc tính của một hệ lượng tử rồi chuyển thông tin cho một người nhận để xây dựng lại hệ đó là hoàn toàn không thể. Lý do là một hệ lượng tử có thể chứa đồng thời một vài phiên bản khác nhau của mỗi thuộc tính, mà mỗi phiên bản đều có thể xuất hiện trong một phép đo với một xác suất nhất định. Khi một phép đo được thực hiện, ngay lập tức chỉ còn một phiên bản tồn tại, tức là phiên bản mà thiết bị đo đọc được. Các phiên bản khác biến mất và không có cách nào để biết một chút gì về chúng. Tuy nhiên, những thuộc tính lượng tử hoàn toàn chưa xác định có thể được truyền bằng viễn tải lượng tử và xuất hiện nguyên vẹn ở một hạt khác, đổi lại bằng việc bị phá hủy ở hạt ban đầu.

Một khi đã chứng minh được điều này bằng thực nghiệm, bước tiếp theo là sử dụng hai cặp hạt ràng buộc. Nếu một hạt của mỗi cặp được được ghép với nhau theo một cách nào đó, hai hạt còn lại có thể bị ràng buộc với nhau mặc dù chưa từng tiếp xúc. Sự hoán đổi cặp ràng buộc này được chứng minh lần đầu tiên vào năm 1998 bởi nhóm nghiên cứu của Anton Zeilinger.



Hình 3: Những cặp ràng buộc chưa từng gặp nhau. Hai cặp ràng buộc được phát từ hai nguồn khác nhau. Một hạt từ mỗi cặp (2 và 3) được đưa đến với nhau theo một cách nào đó, tạo thành một cặp ràng buộc. Hai hạt còn lại (1 và 4) cũng sẽ bị ràng buộc với nhau. Bằng cách này, hai hạt chưa từng tiếp xúc với nhau có thể trở thành bị ràng buộc với nhau.

Các cặp ràng buộc gồm hai photon, hạt ánh sáng, có thể có thể được gửi về hai hướng khác nhau theo các sợi quang học và đóng vai trò tín hiệu trong một mạng lượng tử. Các photon chỉ có thể được truyền đi một khoảng cách giới hạn trong sợi quang học trước khi bị hấp thụ hoặc mất các thuộc tính. Tín hiệu quang học thông thường có thể được khuếch đại trên đường truyền, nhưng với các cặp ràng buộc thì không làm như vậy được. Bộ phận khuếch đại cần thu và đo ánh sáng, do đó sẽ phá hủy trạng thái ràng buộc. Tuy nhiên, sự hoán đổi cặp ràng buộc có thể giúp gửi trạng thái ban đầu đi xa hơn, qua đó truyền nó qua những khoảng cách lớn hơn giới hạn trước đó.

Từ nghịch lý tới bất đẳng thức

Bước tiến này dựa trên nhiều năm phát triển. Nó bắt đầu với cái nhìn sâu sắc rằng cơ học lượng tử cho phép một hệ lượng tử riêng lẻ được chia thành nhiều phần tách biệt hẳn nhau nhưng vẫn hoạt động như một thể duy nhất.

Điều này trái với tất cả những ý tưởng thông thường về quan hệ nhân quả và bản chất của hiện thực. Làm sao mà một thứ có thể bị ảnh hưởng bởi một sự kiện xảy ra ở nơi khác, mà không hề nhận được một dạng tín hiệu nào từ đó? Tín hiệu không thể di chuyển nhanh hơn ánh sáng, nhưng trong cơ học lượng tử, có vẻ như không cần bất cứ một tín hiệu nào để kết nối các phần khác nhau của một hệ rộng lớn.

Albert Einstein coi điều này là bất khả thi và đã nghiên cứu hiện tượng này cũng với các đồng nghiệp Boris Podolsky và Nathan Rosen. Họ trình bày lập luận của mình vào năm 1935: cơ học lượng tử có vẻ không cung cấp một mô tả đầy đủ về hiện thực. Điều này về sau được gọi là nghịch lý EPR, theo các chữ cái đầu của tên ba tác giả.

John Stewart Bell (1928 – 1990), nhà vật lý học người Bắc Ai–len làm việc tại CERN, phòng thí nghiệm vật lý hạt của châu Âu, tìm hiểu vấn đề một cách kỹ càng hơn. Ông phát hiện ra rằng có một kiểu thí nghiệm có thể xác định thế giới thuần túy là cơ học lượng tử, hay có một cách mô tả nào khác với những biến ẩn. Nếu thí nghiệm của ông được lặp lại nhiều lần, tất cả các lý thuyết với biến ẩn cho một hệ số tương quan giữa các kết quả, và giá trị này phải nhỏ hơn hoặc bằng một giá trị xác định. Đây chính là bất đẳng thức Bell.

Tuy nhiên, cơ học lượng tử có thể vi phạm bất đẳng thức này. Nó dự đoán những giá trị hệ số tương quan giữa các kết quả lớn hơn so với những giá trị có thể đạt được với biến ẩn.

John Clauser bắt đầu quan tâm đến nền tảng cơ bản của cơ học lượng tử từ khi còn là sinh viên trong những năm 1960. Sau khi đọc về ý tưởng của John Bell, ông không thể thoát khỏi nó, và cuối cùng, ông cùng với ba nhà khoa học khác đã đề xuất được một kiểu thí nghiệm thực tế để kiểm tra bất đẳng thức Bell.

Trong thí nghiệm này, một cặp hạt ràng buộc được đưa về hai hướng ngược nhau. Trong thực tế, thí nghiệm sử dụng các photon với một thuộc tính được gọi là trạng thái phân cực. Khi các hạt được phát ra, hướng phân cực chưa được xác định, điều chắc chắn duy nhất là các hạt có phân cực song song với nhau. Điều này có thể được nghiên cứu bằng cách dùng một kính lọc chỉ cho phép một hướng phân cực nhất định đi qua (Hình 4). Đây chính là hiệu ứng được dùng trong nhiều loại kính râm để chặn ánh sáng đã bị phân cực tại một bề mặt nào đó, chẳng hạn phản chiếu trên mặt nước.

Nếu hai hạt trong thí nghiệm được phóng đến hai kính lọc đặt song song với nhau, chẳng hạn cùng thẳng đứng, và một hạt lọt qua, thì hạt còn lại cũng sẽ lọt qua. Nếu hai kính lọc vuông góc với nhau, một hạt bị chặn lại còn hạt kia đi qua. Mẹo ở đây là đo với các kính lọc đặt lệch nhau và theo nhiều hướng khác nhau, vì khi đó có thể có nhiều kết quả khác nhau: khi thì cả hai hạt lọt qua, khi thì chỉ một hạt, khi lại không hạt nào. Tần suất cả hai hạt lọt qua phụ thuộc vào góc giữa hai tấm kính lọc.

Cơ học lượng tử dẫn đến một mối tương quan giữa các lần đo. Xác suất để một hạt lọt qua phụ thuộc vào góc của tấm kính lọc kiểm tra sự phân cực của hạt còn lại ở phía đối diện của thí nghiệm. Điều này có nghĩa là tại một số góc, kết quả của cả hai phép đo vi phạm bất đẳng thức Bell và có hệ số tương quan lớn hơn giá trị có thể đạt được nếu các kết quả được quyết định bởi biến ẩn và đã được định sẵn từ lúc các hạt được phát ra.

Bất đẳng thức bị vi phạm

John Clauser lập tức bắt tay vào thực hiện thí nghiệm. Ông chế tạo một thiết bị đồng thời phát ra hai photon ràng buộc với nhau, mỗi photon hướng đến một kính lọc kiểm tra tính phân cực của chúng. Năm 1972, cùng với nghiên cứu sinh Stuart Freedman (1944 – 2012), ông đưa ra được một kết quả cho thấy rõ ràng bất đẳng thức Bell bị vi phạm, và phù hợp với những dự đoán của cơ học lượng tử.

Trong những năm tiếp theo, John Clauser và các nhà vật lý khác tiếp tục thảo luận về thí nghiệm và những hạn chế của nó. Một trong những hạn chế là thí nghiệm nói chung không hiệu quả, trong cả việc phát lẫn việc thu các hạt. Các phép đo cũng được cố định trước, với các kính lọc gắn cố định. Do đó có những lỗ hổng, theo đó người quan sát có thể nghi ngờ các kết quả: nếu vì lý do nào đó mà thí nghiệm chỉ lựa chọn những hạt có tương quan lớn mà không phát hiện các hạt khác thì sao? Nếu đúng như vậy thì các hạt vẫn có thể mang thông tin ẩn.

Loại bỏ lỗ hổng này là một việc khó khăn vì các trạng thái ràng buộc lượng tử rất mong manh và khó điều khiển; cần phải xử lý từng photon riêng. Nghiên cứu sinh người Pháp Alain Aspect không chùn bước, và đã xây dựng một phiên bản thí nghiệm mới mà sau này ông đã tinh chỉnh thêm nhiều lần. Trong thí nghiệm của mình, ông có thể ghi lại những photon nào lọt qua kính lọc và những photon nào thì không. Có nghĩa là nhiều photon được phát hiện hơn, và các kết quả đo tốt hơn.

Trong phiên bản cuối cùng của các thử nghiệm của mình, ông có thể lái các photon đến hai kính lọc khác nhau đặt ở các góc khác nhau. Sự tinh tế nằm ở một cơ chế đổi hướng các photon trong cặp ràng buộc sau khi chúng đã được tạo ra và phát đi từ nguồn. Các kính lọc chỉ ở cách sáu mét, do đó sự đổi hướng cần xảy ra trong vài phần tỷ giây. Nếu thông tin photon sẽ đến kính lọc nào ảnh hưởng đến cách photon được phát từ nguồn, photon sẽ không đến kính lọc đó. Thông tin về các kính lọc ở một đầu thí nghiệm cũng không thể truyền đến đầu kia và ảnh hưởng tới các kết quả đo ở đó.

Bằng cách này, Alain Aspect đã giải quyết một lỗ hổng quan trọng và đưa ra một kết quả rõ ràng: cơ học lượng tử là đúng và không có biến ẩn.

Kỷ nguyên thông tin lượng tử

Những thí nghiệm này và những thí nghiệm tương tự đặt nền móng cho những nghiên cứu mạnh mẽ đang diễn ra trong khoa học thông tin lượng tử.

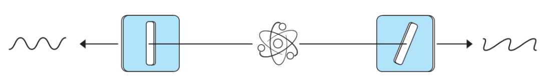
Việc có thể điều khiển các trạng thái lượng tử và tất cả các lớp thuộc tính của chúng giúp chúng ta tiếp cận những công cụ có tiềm năng bất ngờ. Đây là cơ sở của tính toán lượng tử, truyền và lưu trữ thông tin lượng tử, và các thuật toán mã hóa lượng tử. Người ta đang sử dụng các hệ có nhiều hơn hai hạt – tất cả trong trạng thái ràng buộc – mà Anton Zeilinger và các đồng nghiệp là những người đầu tiên khám phá.

Những công cụ ngày càng tinh tế này kéo những ứng dụng thực tế lại ngày càng gần. Người ta đã tạo ra được các trạng thái ràng buộc lượng tử giữa các photon đi xa hàng chục ki–lô–mét trong sợi quang học, cũng như giữa vệ tinh và trạm trên mặt đất. Trong một thời gian ngắn, các nhà khoa học trên khắp thế giới đã tìm ra nhiều cách sử dụng tính chất mạnh nhất của cơ học lượng tử.

Cuộc cách mạng lượng tử đầu tiên cho chúng ta transistor và laser, giờ đây chúng ta đang bước vào một kỷ nguyên mới, nhờ những công cụ hiện đại để điều khiển các hệ hạt ràng buộc.

John Clauser *dùng các nguyên tử calcium có thể phát ra các cặp photon ràng buộc sau khi được một ánh sáng đặc biệt chiếu vào. Ông đặt hai kính lọc ở hai phía để đo sự phân cực của các photon. Sau một loạt các phép đo, ông chứng minh được rằng chúng vi phạm một bất đẳng thức Bell.*

Alain Aspect *phát triển thí nghiệm này, sử dụng một phương pháp mới để kích thích các nguyên tử sao cho chúng phát ra các cặp photon ràng buộc với tần suất cao hơn. Ông cũng có thể chuyển giữa các thiết lập khác nhau, vì vậy hệ không chứa sẵn một thông tin nào có thể ảnh hưởng đến kết quả.*



Anton Zeilinger *sau đó thực hiện thêm nhiều thử nghiệm về các bất đẳng thức Bell. Ông tạo ra các cặp photon ràng buộc bằng cách chiếu một loại laser vào một tinh thể đặc biệt, và sử dụng các số ngẫu nhiên để chuyển giữa các thiết lập đo. Một thí nghiệm sử dụng các tín hiệu từ các thiên hà xa xôi để điều khiển các kính lọc và đảm bảo các tín hiệu không ảnh hưởng lẫn nhau.*

Hình 4: Thí nghiệm với các bất đẳng thức Bell.

TÀN CUỘC KHÔNG XE

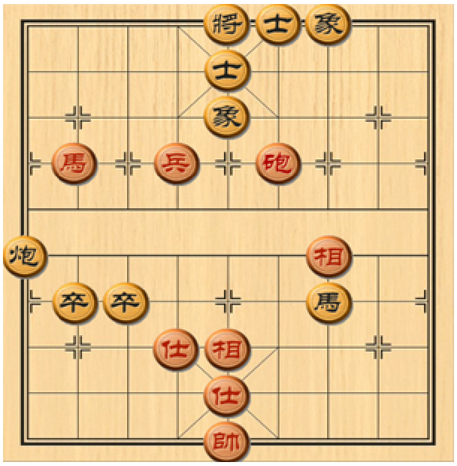
TRẦN VĂN DŨNG[1]

Tàn cuộc Pháo–Mã–Chốt, thường được gọi với những cái tên khác như: Cờ tàn không Xe hay cờ tàn đi bộ ... Đó là loại hình tàn cuộc rất thường hay gặp trong thực chiến. Lúc này ván đấu đã đi đến giai đoạn cuối cùng, đôi bên đã đổi hết 2 quân Xe chủ lực, và đây chính là thời điểm các kỳ thủ cần phải vận dụng hết nội lực cờ tàn, đặc biệt là kỹ năng sử dụng những quân "nhẹ" nhằm giành lấy kết quả có lợi nhất.

Tuy nhiên, đối với các kỳ thủ nghiệp dư, chưa có nhiều kinh nghiệm và kiến thức về cờ Tàn thường cảm thấy rằng Pháo Mã Chốt rất khó sử dụng nếu thiếu đi quân Xe trợ chiến. Vì lẽ đó, khi đối diện với những hình cờ không Xe thường gặp không ít lúng túng, điều quân thiếu kế hoạch làm cục diện trở nên rối ren và phức tạp hơn, đi những nước đi tự làm khó, bỏ qua những cơ hội chiến thắng, thậm chí còn có thể để thua trong những tình huống hòa cơ bản.

Ngày nay, trình độ chung của các kỳ thủ ngày càng được cải thiện, những cuộc chiến đỉnh cao xuất hiện càng nhiều, tàn cuộc không xe lại càng đóng vai trò quan trọng hơn bao giờ hết. Để xử lý tốt loại hình này, đòi hỏi các kỳ thủ phải có nền móng kiến thức cờ tàn thật sự vững chắc, đồng thời cũng cần sở hữu kỹ năng điều động các quân khéo léo và uyển chuyển, nhạy bén trong nghệ thuật chuyển đổi hình trận.

Trong bài viết kỳ này, tác giả sẽ gửi đến bạn đọc Pi những ván cờ tàn sử dụng những nước đi Pháo Mã Chốt đặc sắc. Mong rằng sau những ví dụ này, bạn đọc sẽ rút ra được những kinh nghiệm bổ ích khi xử lý những hình cờ tàn không Xe, một trong những vẻ đẹp của nghệ thuật Tượng Kỳ.



Hình 1.

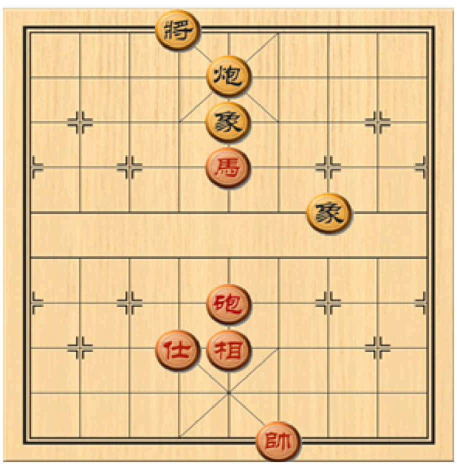
1. Hình 1, nhìn qua có vẻ như hình cờ đang cân bằng, đôi bên đều còn Pháo Mã Chốt và đầy đủ Sỹ Tượng. Thậm chí Đen có lợi thế hơn vì hơn 1 Chốt qua sông và hệ thống Sỹ Tượng của Đỏ ở vị trí không ổn định. Nhưng Đỏ được quyền đi trước và tung ra những đòn đánh để kết thúc ván cờ như sau:

[1] *Trung tâm Quy hoạch và Điều tra tài nguyên – môi trường biển khu vực phía Nam.*

1) M8.7 Tg–4 **2)** P4/1 Tg.1(∗) **3)** P4 – 6 S5.4 **4)** C6.1 Tg–5 **5)** P6 – 8 Tg–6(∗∗) **6)** C6 – 5 S6.5 **7)** M7/6 S5.4 **8)** P8 – 4 (1 – 0)

(∗): *Nhận thấy các quân đang ở vị trí thuận lợi Đỏ ngay lập tức có 2 nước liên tục điều quân đến vị trí thuận lợi, trước tấn Mã chiếu ngọa tào, sau thoái Pháo dọa sát. Do đó, bắt buộc Đen phải di chuyển Tướng đến vị trí kém an toàn.*

(∗∗): *Liên tục là những nước quấy rối và dọa sát của Đỏ, tạo điều kiện cho quân Chốt ngang nhiên áp sát trận địa, bẻ bớt Sỹ Tượng nhưng Đen chỉ biết chống trả một cách bị động. Thắng lợi giành cho Đỏ chỉ còn là vấn đề thời gian.*



Hình 2.

2. Hình 2, đây là một trong những dạng căn bản của cờ tàn Pháo, Mã. Đỏ đang có lợi thế khi hơn 1 quân chủ lực. Tuy nhiên, bên Đen còn Pháo và song Tượng phòng thủ cũng rất dẻo dai, nếu bên cầm Đỏ thiếu kinh nghiệm sẽ không dễ gì giành chiến thắng. Đỏ cần phải chơi như sau:

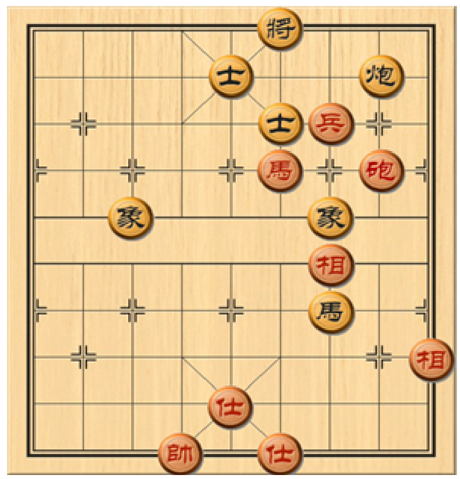
1) M5.7 P5 – 3(∗) **2)** P5.3 Tg.1 **3)** T5.3 T5.3 **4)** P5 – 4 T3/5 **5)** Tg4 – 5(∗∗) T7/9 **6)** P4/5 Tg/1 **7)**P4 – 7 T5.7 **8)** P7 – 6(∗∗∗) (1 – 0)

(∗): *Tấn Mã vừa chiếu Tướng, vừa dùng Pháo bắt Mã một nước đi cần thiết để khóa quân đối phương, để tránh mất quân, Đen phải bình Pháo cản Mã Đỏ.*

(∗∗) *Liên tiếp là những nước đi rất có ý đồ của Đỏ, nhằm dùng mặt Tướng chiếm lấy trung lộ, chuẩn bị thoái Pháo phối hợp với Sỹ để lấy mạng tướng đối phương.*

(∗∗∗): *Đỏ thoái pháo về cung Tướng, vừa dọa P4 – 6 sát cục lại vừa có thể đi P4 – 7 khi cần thiết.*

Nhìn chung, với dạng cờ tàn này, Mã tấn công tầm gần còn Pháo uy hiếp tầm xa; 2 quân này sẽ luân phiên đổi vai trò cho nhau, Mã khống chế thì Pháo sẽ là quân tìm cách chiếu hết và ngược lại.



Hình 3.

3. Hình 3, đôi bên đang có quân lực khá đồng đều, nhưng chỉ cần ưu thế 1 Chốt và 3 quân tấn công đang tập trung bên cánh phải, Đỏ đã kết thúc ván đấu như sau:

1) C3.1(∗) M7/9 **2)** P2.1 P8 – 9 **3)** P2.2 Tg–5(∗∗) **4)** M4.2 P9.2 **5)** C3 – 4 P9 – 8 **6)** M2.3(∗∗∗) S5/6 **7)** P2 – 1 P8/3 **8)** M3/4 T3/1 **9)** P1/1(∗∗∗∗) (1 – 0)

(∗): *Nhận thấy Pháo Đen đang ở vị trí khá xấu, Đỏ ngay lập tức tấn Chốt chiếm tiên thủ, cũng vừa để áp sát cung Tướng đối phương.*

(∗∗): *Ý muốn đổi quân cầu hòa của Đen được bộc lộ rất rõ ở nước M7/9, tất nhiên Đỏ không dễ gì chấp nhận điều đó. Sau khi tấn Pháo ép buộc Pháo Đen phải né tránh, Đỏ ngay lập* *tức tấn Pháo xuống tuyến đáy, đe dọa sát cuộc ngay lập tức.*

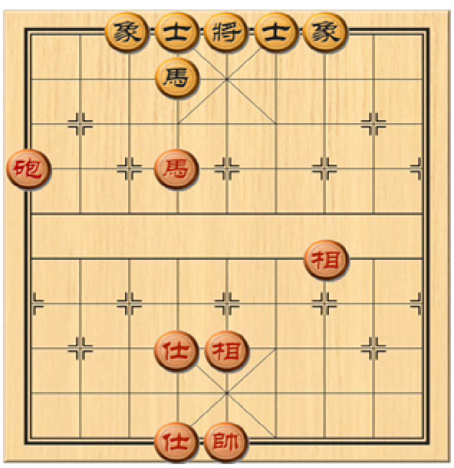
(∗∗∗)*: Sau một loạt nước điều quân, hệ thống Pháo Mã Chốt của Đỏ đã tập trung tại vị trí đắc địa, sẵn sàng lấy mạng Tướng địch bất cứ lúc nào.*

(∗∗∗∗)*: Mặc dù Đen rất tích cực trong việc phòng thủ, hết thoái Sỹ rồi lùi Pháo về làm dày tuyến đáy nhưng đều vô ích. Sau khi Đỏ đi P1/1, Đen nhìn thấy trước nước bình Chốt sát cục nhưng không có cách nào phòng thủ, Đen chấp nhận đầu hàng.*

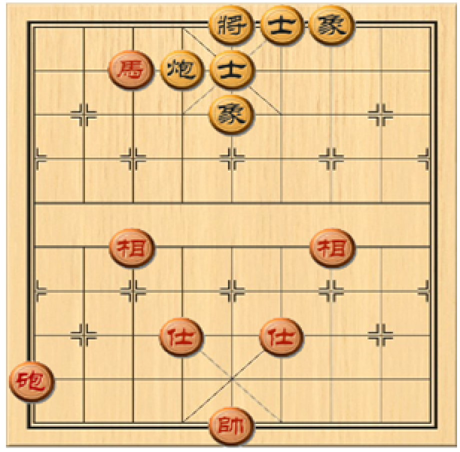
Chú thích: C: Chốt, X: Xe, M: Mã, P: Pháo, Tg: Tướng, S: Sỹ, T: Tượng, s: Sau.

Câu đố kỳ này

Cả 2 hình cờ dưới đây đều có đặc điểm là Đỏ đều hơn 1 quân chủ lực, đôi bên đều còn đầy đủ Sỹ Tượng, điểm khác biệt duy nhất là tại hình 4 Đen còn Mã và hình 5 còn Pháo. Chính sự khác biệt này tạo ra kết quả khác biệt. Câu hỏi đặt ra là, nếu đôi bên đi những nước đi chính xác, hình nào bên Đỏ giành chiến thắng và hình nào có kết quả hòa ?



Hình 4.



Hình 5.

Đáp án: Đối với những ai có một chút kiến thức về cờ tàn căn bản thì sẽ không mấy khó khăn để tìm ra đáp án trong 2 hình cờ trên. Nếu đôi bên đi chính xác thì Hình 4 sẽ có kết quả thắng và Hình 5 có kết quả hòa, cụ thể như sau:

Hình 4: **1)** M6.7 S4.5 **2)** P9/5 S5.4 **3)** P9 – 3 T7.9 **4)** P3 – 6 S6.5 **5)** T5/3 Tg–4 **6)** P6 – 7 T3.1 **7)** M7/9. Đen mất Tượng chắc chắn thua cuộc (1 – 0).

Hình 5: **1)** M7/8 S5.6 **2)** T7/5 Ss.5 **3)** S6/5 P4.5 **4)** P9.4 P4 – 8 **5)** M8.7 Tg–4 **6)** P9 – 5 P8/3 **7)** M7/6 P8/2 **8)** T5/7 T5/3 **9)** T3/5 P8 – 6 **10)** M6/8 T3.5 **11)** M8.6 P6 – 7 **12)** P5 – 6 Tg–5 **13)** P6 – 4 T5/3. Mặc dù Đỏ hơn quân nhưng Đen phòng thủ vô cùng chắc chắn, hòa cuộc (1/2).