BÀI TOÁN CÂY KIM CỦA BUFFON VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

NGUYỄN HOÀNG VŨ[1]

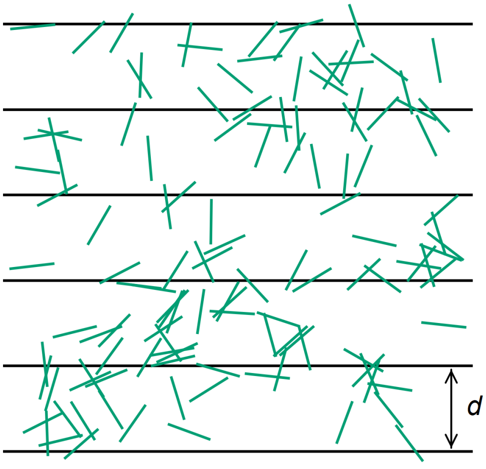
Bài toán cây kim của Buffon vẫn luôn xuất hiện trong sách giáo khoa toán dưới dạng một phương pháp để tính số π. Trong bài này, chúng ta hãy cũng Pi tìm hiểu chi tiết về bài toán này cũng như một số ứng dụng thú vị của nó trong thực tiễn.

1. Bài toán cây kim của Buffon

Georges–Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707 – 1788).

Nhà toán học Pháp thế kỉ 18, Georges Louis Leclerc, được phong Bá tước tại vùng có một ngôi làng tên Buffon nên ông còn có danh hiệu Comte de Buffon (Bá tước Buffon). Do đó các tài liệu thường gọi tắt là Buffon. Bài toán nổi tiếng mang tên ông có nội dung như sau:

"Trên một tờ giấy với các đường kẻ cách đều nhau khoảng cách d, thả ngẫu nhiên một cây kim chiều dài l $(d > l)$, hãy tìm xác suất để cây kim cắt một đường nằm ngang trên trang giấy".



Hình 1. Minh họa bài toán cây kim của Buffon.

Chúng ta hãy xét một lời giải không sử dụng tích phân được E. Barbier đưa ra năm 1860.

Do $l < d$ nên chỉ có hai trường hợp xảy ra: cây kim cắt một đường kẻ và cây kim không đè lên đường kẻ nào; không tồn tại trường hợp cây kim cắt nhiều hơn một đường kẻ.

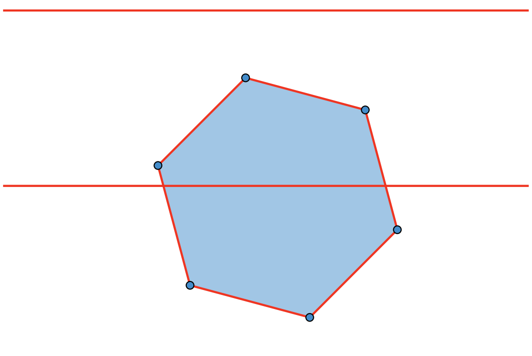
[1] *Viện Sinh thái và Môi trường Đông Dương.*

Gọi $P(l)$ là xác suất để cây kim có độ dài l cắt một đường kẻ khi được thả. Lấy một điểm bất kỳ trên cây kim chia nó thành hai đoạn thẳng độ dài l_1 và l_2. Ta có:

$$P(l) = P(l_1) + P(l_2).$$

Quan hệ trên có thể được mở rộng ra thành dạng $P(l) = n \cdot P(\frac{l}{n})$. Tức là xác suất để một cây kim cắt đường kẻ khi được thả sẽ bằng n lần xác suất này của cây kim có độ dài bằng $\frac{1}{n}$ lần độ dài cây kim ban đầu.

Do đó, $P(l) = c \cdot l$ với c là một hằng số, $c = P(1)$ (khi $l = 1$ và $d > 1$).



Hình 2. Thả một đa giác cạnh l lên tờ giấy với các đường kẻ ngang cách đều nhau.

Ta hãy tiếp tục xét một đa giác đều N cạnh có độ dài mỗi cạnh bằng l (Hình 2). Ta đã biết ở trên rằng xác suất để mỗi cạnh của đa giác cắt một đường kẻ là $P(l)$. Đây cũng chính là giá trị kỳ vọng của số giao điểm của một cạnh với các đường kẻ, vì số giao điểm nói chung chỉ có thể là 0 hoặc 1 tương ứng với không cắt và cắt. Theo tính chất cộng tính của kỳ vọng, giá trị kỳ vọng của số giao điểm của đa giác với các đường kẻ khi thả lên tờ giấy là:

$$\begin{aligned} E &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} P(l) = N \cdot P(l) \\ &= N \cdot c \cdot l = c \cdot L, \end{aligned} \qquad (1)$$

với $L = N \cdot l$ là chu vi của đa giác đều.

Giá trị kỳ vọng

Trong một thí nghiệm ngẫu nhiên, nếu kết quả có giá trị x_i có xác suất xảy ra là p_i thì giá trị kỳ vọng của kết quả thu được được tính theo công thức:

$$E = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n.$$

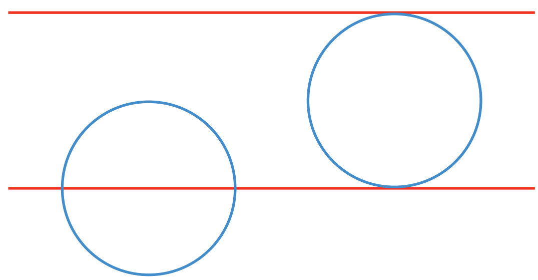
Ví dụ, với thí nghiệm gieo con xúc xắc, giá trị kỳ vọng của số chấm thu được là:

$$E = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \cdots + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3,5.$$

Chú ý rằng giá trị kỳ vọng có thể không trùng với một trong các giá trị có thể xảy ra. Theo định luật số lớn trong xác suất, với số lần thực hiện thí nghiệm càng lớn thì giá trị trung bình của các kết quả sẽ càng đến gần với giá trị kỳ vọng.

Mặt khác, nếu giữ chu vi L của đa giác không đổi, khi $N \to \infty$, đa giác của ta sẽ trở thành một đường tròn có chu vi L và bán kính $\frac{L}{2\pi}$.

Để tính hệ số c, ta xét một trường hợp đặc biệt, khi đường tròn có đường kính đúng bằng khoảng cách d giữa các dòng kẻ. Khi đó, ta có $L = \pi d$.



Hình 3. Đường tròn có đường kính d sẽ luôn cắt một đường kẻ tại hai điểm hoặc tiếp xúc hai đường kẻ.

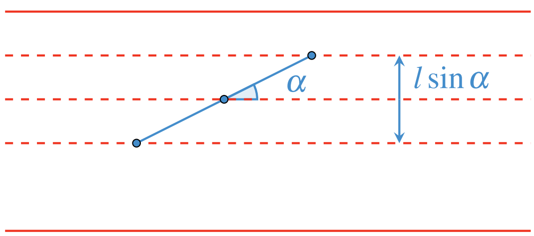
Đường tròn có đường kính d sẽ luôn cắt một đường kẻ tại 2 giao điểm hoặc tiếp xúc với 2 đường kẻ liên tiếp, do đó với đường tròn này $E = 2$. Thay vào (1) ta có:

$$2 = c \cdot \pi d$$

hay $c = \frac{2}{\pi d}$.

Vậy xác suất để một cây kim khi thả cắt đường nằm ngang trên giấy là

$$P(l) = \frac{2l}{\pi d}. \qquad (2)$$



Hình 4. Chứng minh công thức (2) sử dụng tích phân.

Ta cũng có thể thu được đáp án này bằng cách sử dụng tích phân. Cụ thể là ta xây dựng một mô hình xác suất cho vị trí rơi của cây kim. Gọi α $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$ là góc mà cây kim tạo với phương nằm ngang. Hình chiếu của nó theo phương vuông góc với các đường kẻ sẽ có độ dài $l\sin\alpha$, mà khoảng cách giữa hai đường kẻ là d, do đó xác suất để nó cắt một đường kẻ là $\frac{l\sin\alpha}{d}$. Coi phân bố của α là đều trên khoảng $[0, \frac{\pi}{2}]$, ta tính giá trị trung bình bằng cách lấy tích phân trên khoảng này rồi chia cho $\frac{\pi}{2}$ để thu được (2):

$$\begin{aligned} P(l) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l\sin\alpha}{d}\,d\alpha = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}\left[-\cos\alpha\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}. \end{aligned}$$

Với cây kim có độ dài lớn hơn d, xác suất để nó cắt ít nhất một đường kẻ trong khoảng $\left[\arcsin\left(\frac{d}{l}, \frac{\pi}{2}\right)\right]$ sẽ luôn là 1, do đó:

$$\begin{aligned} &P(l) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)} \frac{l\sin\alpha}{d} + \int_{\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)}^{\frac{\pi}{2}} 1\,d\alpha\right) \\ &= 1 + \frac{2}{\pi}\left(\frac{l}{d}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}}\right) - \arcsin\frac{d}{l}\right). \qquad (3) \end{aligned}$$

Bài toán này cũng được Laplace mở rộng cho trường hợp lưới trên tờ giấy là lưới chữ nhật và tính xác suất để cây kim không cắt một đường kẻ dọc hay ngang nào.

Cũng chính Laplace đã đề xuất sử dụng thí nghiệm này để tính giá trị của số π. Đây cũng là khía cạnh được biết đến nhiều nhất về bài toán cây kim của Buffon. Thật vậy, nếu trong M lần thả cây kim, ta thu được m lần mà nó cắt một đường kẻ, công thức (2) cho ta:

$$\pi = \frac{2l}{d \cdot \left(\frac{m}{M}\right)},$$

với $\frac{m}{M}$ là xác suất thực nghiệm của sự kiện cây kim cắt một đường kẻ.

Đề xuất này của Laplace rất gần với phương pháp Monte Carlo của hơn một thế kỉ sau. Tuy vậy, về mặt thực tế, nó gặp phải một số vấn đề. Nhiều thí nghiệm được tiến hành và cho kết quả của π không quá chính xác: $3{,}1596$; $3{,}1553$; $3{,}137$.

Năm 1901, Lazzarini công bố giá trị $3{,}1415929$ cho 3408 lần thả cây kim, một giá trị khá chính xác (so với giá trị đã biết hiện nay, thì chỉ có chữ số cuối là không đúng). Tuy vậy, một số nghiên cứu đã chỉ ra kết quả này hầu như là ngụy tạo. Theo các lí thuyết về ước lượng tham số, để có độ chính xác đến 6 chữ số sau dấu phẩy, cần phải tiến hành thí nghiệm trên $1{,}3410^{14}$ lần chứ không phải vài nghìn lần. Đồng thời, số liệu của Lazzarini sử dụng phân số $\frac{355}{113}$, một số hữu tỉ được biết là một xấp xỉ tốt cho π.

Ngay cả với máy tính điện tử thì việc ước lượng π bằng cách sử dụng thí nghiệm Buffon cũng không đạt được độ chính xác quá cao do việc làm tròn số trên máy tính. Đồng thời, các chữ số của π cũng có thể được tính toán một cách chính xác hơn bởi các phương pháp khác.

Tuy vậy, bài toán cây kim của Buffon có một ý nghĩa quan trọng trong lịch sử toán học bởi sự liên hệ giữa xác suất và hình học. Đây là một hướng tiếp cận mới khác với hướng tiếp cận xác suất sử dụng tổ hợp như truyền thống.

Bài tập

1. Chứng minh rằng khi cây kim vô cùng dài thì một cách hầu chắc chắn nó sẽ luôn cắt ít nhất một đường kẻ, tức là biểu thức trong (3) có giới hạn là 1 khi $l \to \infty$.

2. Trên tờ giấy với các đường kẻ ngang cách nhau khoảng d, thả ngẫu nhiên một đường tròn với bán kính $r < \frac{d}{2}$. Hãy tính xác suất để đường tròn cắt và không cắt các đường kẻ.

3. Tương tự bài trên nhưng thả một hình vuông có cạnh $a < d$. Hãy tính xác suất để số giao điểm của các cạnh hình vuông với các đường kẻ ngang là:

a) 0 *b*) 1 *c*) 2 *d*) 3 *e*) 4

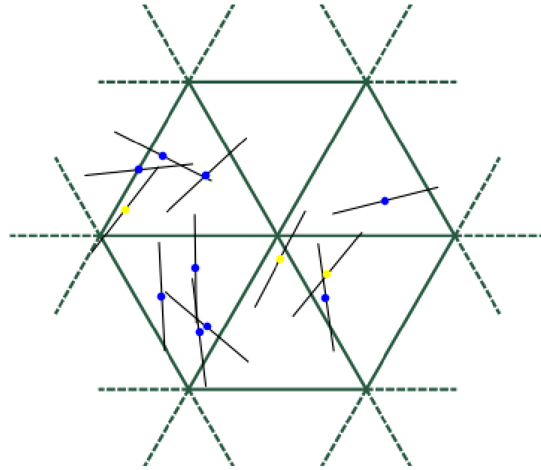
Gợi ý: Xét trường hợp $a < \frac{d}{\sqrt{2}}$ và $a > \frac{d}{\sqrt{2}}$.

4. Trong thí nghiệm Buffon, với cây kim có độ dài $l > d$, hãy chứng minh giá trị kỳ vọng của số giao điểm của cây kim với các đường kẻ ngang là $E = \frac{2l}{\pi d}$. (Gợi ý: Gọi N là số nguyên lớn nhất sao cho $d < \frac{l}{N}$, coi cây kim là hình gồm N đoạn thẳng bằng nhau).

5. Mở rộng của Laplace. Trên một lưới chữ nhật, với mỗi hình chữ nhật có chiều dài a và chiều rộng b, thả ngẫu nhiên một cây kim chiều dài l (biết rằng l nhỏ hơn cả a và b). Hãy tính xác suất để cây kim không chạm bất kỳ cạnh nào của lưới.

6. Lưới Uspensky. Cho một lưới tam giác đều như hình vẽ với d là chiều cao của mỗi tam giác đều. Thả một cây kim chiều dài $l < d$ lên lưới tam giác đều này. Hãy tính xác suất để số giao điểm của cây kim với các đường trong lưới là:

a) 0 *b*) 1 *c*) 2 *d*) 3

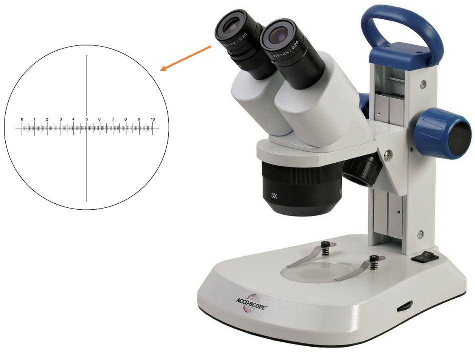


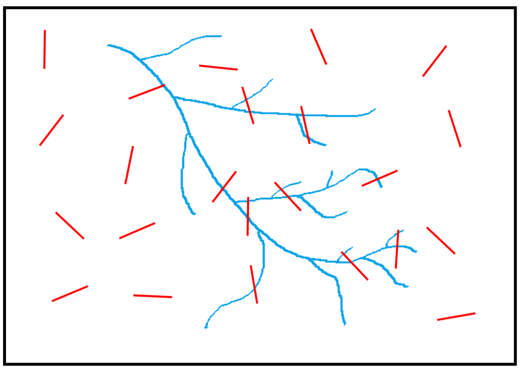
7. Bài toán sợi mì của Buffon. Trên một tờ giấy với các đường kẻ ngang song song cách nhau khoảng d, ném ngẫu nhiên một sợi mì ướt có độ dài l. Chứng minh rằng giá trị kì vọng của số giao điểm của sợi mì với các đường kẻ ngang là $E = \frac{2l}{\pi d}$. Giả sử rằng khi ném sợi mì, chiều dài của nó không đổi nhưng nó có thể uốn thành một đường cong bất kỳ.

2. Đo độ dài bằng phương pháp ngẫu nhiên

Với một số thay đổi, thí nghiệm của Buffon có thể được sử dụng để giải quyết một vấn đề thực tế trong khoa học: đo độ dài của rễ cây (Newman, 1966). Xét một bản thủy tinh mà trên đó một mẫu vật (ví dụ rễ cây) được trải phẳng. Khi quan sát mẫu vật qua kính hiển vi, người ta sử dụng một thị kính với một đường sợi tóc để soi các vùng khác nhau của bản thủy tinh.

Với mỗi lần quan sát, thị kính được quay một góc bất kì và đường sợi tóc cũng được quay theo. Sau đó, số giao điểm của đường sợi tóc với rễ cây sẽ được ghi lại. Cách thức này được lặp lại nhiều lần với các vị trí quan sát ngẫu nhiên khác nhau trên bản thủy tinh. Để tiện lợi hơn, ta có thể đặt bản thủy tinh trên một tấm giấy với các điểm ngẫu nhiên đã được đánh dấu trước. Các điểm quan sát cũng có thể là một lưới ô vuông các điểm cách đều.





Hình 5. Trên: Thị kính của kính hiển vi có đường sợi tóc (đường thẳng đứng). Dưới: minh họa phép đo độ dài rễ cây (màu xanh) với các vị trí và góc quay khác nhau của đường sợi tóc (màu đỏ). Số lượng đường sợi tóc trong hình chỉ mang tính minh họa, trong thực tế, cấu trúc rễ cây càng phức tạp thì số lượng đường sợi tóc cần sử dụng lại càng nhiều. Mỗi lần quan sát qua kính, ta chỉ thấy được một vùng hình tròn có đường kính là đường sợi tóc.

Về mặt bản chất, thay vì đếm số giao điểm của cây kim được thả ngẫu nhiên với các đường kẻ ngang, ta đếm số giao điểm của các đường sợi tóc được phân bố ngẫu nhiên với mẫu vật rễ cây (gồm nhiều đường cong) trên bản thủy tinh.

Độ dài của rễ cây có thể được tính theo công thức:

$$R = \frac{\pi NA}{2H}, \tag{4}$$

với N là số giao điểm đã được đếm, A là diện tích bản thủy tinh và H là tổng độ dài của tất cả các đường sợi tóc.

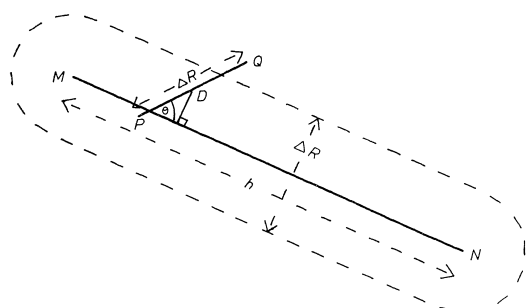
Thật vậy, xét một đoạn rễ cây PQ có chiều dài ΔR và một đường sợi tóc MN chiều dài h. Nếu khoảng cách từ trung điểm D của PQ đến MN lớn hơn $\frac{1}{2}\Delta R$ thì PQ và MN chắc chắn không cắt nhau. Miền giới hạn này được biểu diễn bằng đường nét đứt trong hình. Giả sử $\frac{\Delta R}{h}$ là nhỏ, diện tích miền này có thể được xấp xỉ bằng $\Delta R \cdot h$. Do MN được phân bố ngẫu nhiên trên bản thủy tinh, xác suất để D nằm trong miền này là $\frac{\Delta R \cdot h}{A}$.

Khi D nằm trong miền cách MN một khoảng không quá $\frac{1}{2}\Delta R$, khoảng cách từ D đến MN cần phải không lớn hơn $\frac{1}{2}\Delta R|\sin\theta|$, với θ là góc tạo bởi hai đường thẳng PQ và MN, để PQ và MN cắt nhau. Xác suất để PQ và MN cắt nhau khi D đã nằm trong miền trên là:

$$\frac{\frac{1}{2}\Delta R|\sin\theta|}{\frac{1}{2}\Delta R} = |\sin\theta|.$$

Do đó, theo công thức nhân xác suất, xác suất để PQ và MN cắt nhau là:

$$p = \frac{\Delta R \cdot h}{A}|\sin\theta|.$$



Hình 6. Đoạn rễ cây PQ và đường sợi tóc MN.

Tổng độ dài của các đoạn sợi tóc được phân bố ngẫu nhiên trên miền diện tích A là H. Các góc θ cũng nhận giá trị ngẫu nhiên trong khoảng $[0, 2\pi]$ nên giá trị kì vọng của số giao điểm của PQ với các đường sợi tóc là:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Delta R \cdot H}{A}|\sin\theta|d\theta = \frac{2(\Delta R \cdot H)}{\pi A}.$$

Coi rễ cây là một hình với nhiều đoạn có độ dài ΔR, ta được giá trị kì vọng của số giao điểm của rễ cây với tất cả các đường sợi tóc là:

$$N = \frac{2RH}{\pi A}.$$

Do N là giá trị kỳ vọng nên khi đo đạc người ta cần phải tiến hành nhiều lần quan sát với các vị trí ngẫu nhiên của đường sợi tóc để kết quả thí nghiệm gần với giá trị của N trong công thức.

Ví dụ, với bản thủy tinh 10×20 cm; tiến hành quan sát 40 lần, độ dài đường sợi tóc (đường kính của thị trường vùng quan sát được) là $1{,}88$ cm; số giao điểm quan sát được là 344 thì tổng độ dài của rễ cây là:

$$R - \frac{\pi \cdot 344 \cdot 10 \cdot 20}{2 \cdot 40 \cdot 1{,}88} = 1436 \text{ cm}.$$

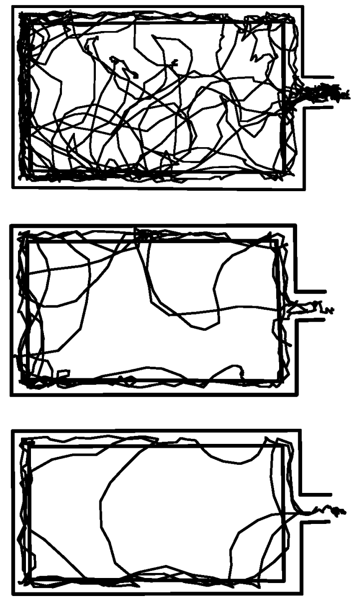
Cách đo độ dài này đã được các nhà thực vật học sử dụng trong nhiều thập kỉ mãi cho đến gần đây mới được thay thế bởi các phần mềm xử lí ảnh từ các camera có độ phân giải cao.

3. Kiến biết đo diện tích bằng xác suất?

Phương pháp đo độ dài ở phần trước cũng có thể được biến đổi để tiến hành đo diện tích.

Một nghiên cứu khá thú vị trên loài kiến *Leptothorax albipennis* đưa ra giả thuyết rằng loài kiến này đã sử dụng xác suất để tính diện tích khi chọn tổ (kiến thường cố gắng chọn tổ có diện tích lớn nhất trong các vị trí khảo sát) (Mallon & Franks, 2000).

Khi sử dụng camera để theo dõi kiến trinh sát trong phòng thí nghiệm, người ta thấy trong lần thứ nhất đến một vị trí để khảo sát, con kiến sẽ đi một cách ngẫu nhiên trong hộp theo một đường cong bao phủ phần lớn các vị trí trong hộp (gọi là đường cong L). Trong những lần tiếp theo (thường nó sẽ quay lại lần thứ hai hoặc có thể là lần thứ 3), nó sẽ đi một đường cong đơn giản hơn (gọi là đường cong S). Đồng thời, khi đến các vị trí đã đi qua (kiến khi di chuyển có thể tiết ra pheromone để đánh dấu đường đi của mình), tức là các giao điểm của L và S, kiến dành thời gian lâu hơn nhiều.



Hình 7. Từ trên xuống: Đường đi của kiến trinh sát khi khảo sát tổ được camera ghi lại trong lần khảo sát thứ nhất, thứ hai và thứ ba.

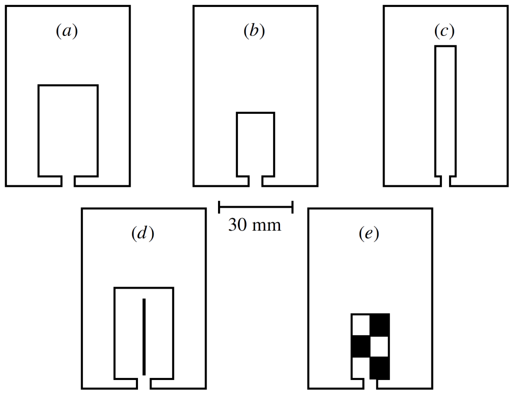
Theo các tác giả, số giao điểm của L và S được kiến trinh sát sử dụng để đánh giá diện tích của một vị trí làm tổ. Trong công thức (4), nếu ta thay các đường sợi tóc bằng một đường cong L và rễ cây R bằng đường cong S, công thức này vẫn đúng và diện tích có thể được xấp xỉ theo

$$A = \frac{2SL}{\pi N}, \tag{5}$$

với N là số giao điểm của S và L.

Để kiểm chứng việc này, thí nghiệm được tiến hành với nhiều con kiến trinh sát khác nhau trên các loại hộp để làm tổ như trong hình vẽ.

Trong thí nghiệm để chọn giữa hai tổ cùng chu vi (hình 8*a* và hình 8*c*), kiến luôn chọn tổ có diện tích lớn hơn sau khi khảo sát cả hai. Do đó, diện tích chứ không phải chu vi mới là tiêu chí chọn tổ. Vì các tổ có một tấm chắn ở giữa (hình 8*d*) cũng được chọn với khả năng tương tự như tổ bình thường, cho thấy số lần va chạm với chướng ngại vật trong tổ cũng không phải nhân tố quyết định.



Hình 8. Các loại tổ được sử dụng trong thí nghiệm về việc chọn tổ của kiến trinh sát. a) tổ tiêu chuẩn; b) tổ đồng dạng và có diện tích bằng một nửa tổ tiêu chuẩn; c) tổ có diện tích bằng một nửa tổ tiêu chuẩn nhưng có cùng chu vi; d) tổ tiêu chuẩn có tấm chắn ở giữa; e) tổ dạng b với một nửa được phủ các tấm đệm có thể nhấc ra.

Thí nghiệm cũng cho thấy khi kiến trở lại lần thứ hai, nếu tổ đã được thay bằng một tổ mới hoặc một tổ đã được một con kiến khác đi qua, nó sẽ tiến hành khảo sát lại như là đang đi qua lần thứ nhất. Điều này cho thấy trong lần khảo sát thứ nhất, kiến sẽ lưu lại pheromone đánh dấu đường đi và pheromone này đặc trưng cho từng cá thể. Việc này cũng cho phép các con kiến không làm ảnh hưởng đến quá trình khảo sát của nhau khi một vị trí có thể được nhiều hơn một con kiến đến thăm dò.

Nếu kiến trở lại lần thứ ba hoặc sau đó, thời gian nó tiến hành khảo sát cũng không khác nhiều lắm so với lần thứ hai, do đó có thể thấy pheromone chỉ được rải ở lần thăm dò thứ nhất còn các lần lặp lại sau để tăng độ chính xác của việc ước lượng.

Loại tổ trong hình 8*e* được thiết kế đồng dạng với tổ trong hình 8*a* nhưng có diện tích bằng một nửa. Đồng thời, ở nền của loại tổ này, một nửa diện tích là các tấm đệm có thể lấy ra. Sau khi kiến khảo sát tổ dạng này lần thứ nhất, người ta sẽ lấy các tấm đệm ra trước khi kiến quay lại lần thứ hai. Khi kiến trở lại, do các vị trí có đệm bị lấy ra không còn pheromone nên số giao điểm của đường đi của nó trong lần thứ hai với đường đi trong lần thứ nhất sẽ giảm một nửa. Trong thí nghiệm chọn giữa tổ dạng 8*a* và dạng 8*e*, một nửa số kiến chọn 8*e* dù diện tích chỉ có một nửa. Thí nghiệm với kích thước tổ lớn gấp đôi cho thấy khoảng cách L của mỗi con kiến là không đổi giữa các tổ với diện tích khác nhau. Kết hợp với với (5), có thể thấy thấy kiến đánh giá diện tích theo tỉ lệ nghịch với tần số gặp giao điểm $\frac{N}{S}$.

Việc nghiên cứu những thuật toán liên quan đến hành vi của kiến không chỉ có ý nghĩa về mặt sinh học mà còn có nhiều ứng dụng khác, ví dụ như trong việc lập trình điều khiển hành vi của robot.

4. Lời kết

Lĩnh vực xác suất hình học còn có nhiều bài toán khác có giá trị về cả mặt lý thuyết lẫn thực tiễn. Pi cũng sẽ tiếp tục giới thiệu các bài toán này đến với độc giả trong tương lai không xa.

Tài liệu tham khảo

[1] Aigner, M., & Ziegler, G. (2004). *Proof from* THE BOOK. Springer–Verlag.

[2] Mallon, E. B., & Franks, N. R. (2000). Ants estimate area using Buffon's needle. *Proc. R. Soc. Lond.* B(267), 765 – 770.

[3] Mugford, S. T., Mallon, E. B., & Franks, N. R. (2001). The accuracy of Buffon's needle: a rule of thumb used by ants to estimate area. *Behavioral Ecology*, 12(6), 655 – 658.

[4] Newman, E. I. (1966). A Method of Estimating the Total Length of Root in a Sample. *Journal of Applied Ecology*, 139 – 145.

[5] Ramaley, J. F. (1969). Buffon's Noodle Problem. *The American Mathematical Monthly*, 78(8), 916 – 918.

CÓ ĐÁNG HỔ THẸN KHI TẶNG MỘT CUỐN SÁCH TOÁN CHO NỮ HOÀNG?*

AMIROUCHE MOKTEFI

(Người dịch: Huệ Chi)

Ai cũng biết rằng Charles Lutwidge Dodgson (bút danh Lewis Carroll, 1832 – 1898; Hình 1), tác giả của *Alice ở xứ xở diệu kỳ*, là một nhà toán học. Dodgson là một giảng viên toán tại trường Christ Church thuộc Đại học Oxford và đã có nhiều công trình toán học về hình học, đại số, logic và lý thuyết bỏ phiếu. Hầu hết mọi đánh giá về toán học của Dodgson đều nhắc đến một câu chuyện thú vị (sau đây gọi là *câu chuyện*) liên quan đến nữ hoàng Victoria. Nữ hoàng được cho là rất thích truyện *Alice*, xuất bản năm 1865, và đã yêu cầu tác phẩm tiếp theo của tác giả. Với sự ngạc nhiên và thất vọng, bà đã nhận được cuốn *Chuyên luận về định thức* của Dodgson, xuất bản năm 1867. Câu chuyện này là một giai thoại kinh điển mà người ta thường bắt gặp trong các tác phẩm về toán học.

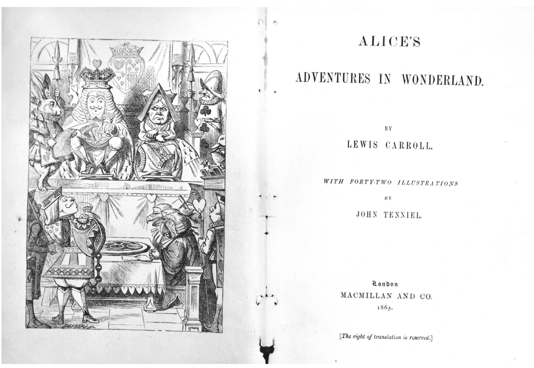
Những bài viết về *câu chuyện* cũng đôi khi nhắc nhở chúng ta rằng chính Dodgson đã phủ nhận nó vào năm 1896, nhưng sự lan rộng của tin đồn dường như không thể ngăn được. Có thể dễ dàng hiểu được sức hấp dẫn của nó, vì nó thể hiện một cách hoàn hảo quan niệm rộng rãi về Dodgson nói riêng và toán học nói chung. Đầu tiên, câu chuyện truyền tải một cái nhìn rộng rãi về Dodgson như một nhân vật kép: một mặt là nhà toán học buồn tẻ và mặt khác là một tiểu thuyết gia giàu trí tưởng tượng. Thứ hai, phản ứng được cho là của nữ hoàng tiêu biểu cho niềm tin rằng toán học và văn học bắt nguồn từ những bộ óc và nền văn hóa khác nhau. Điều thú vị là nhiều lời kể về *câu chuyện* nói rằng nữ hoàng không hài lòng khi nhận được cuốn sách. Người ta cũng nói rằng Dodgson, người rất tôn kính hoàng gia, không thể nào thực hiện một "hành động hoàn toàn ngược với tính cách" như vậy (Beale 1973). Nhưng tặng một cuốn sách toán cho nữ hoàng thì có gì sai?

Hình 1. Charles L. Dodgson (from the Wakeling Collection).

Nguồn Math. Intellegencer, Số 41.

Câu chuyện lan truyền chóng mặt

Khi *Alice ở xứ xở diệu kỳ* ra mắt (Dodgson 1865, Hình 2), Dodgson là một tác giả vô danh. Ông mới chỉ xuất bản một số tập sách nhỏ về toán học và các tác phẩm nhỏ. Đặc biệt, vào năm 1856, ông đã đóng góp một số bài thơ cho tạp chí *Chuyến tàu*, ở đó ông sử dụng bút danh Lewis Carroll, lấy từ tên của mình (Lewis từ Lutwidge và Carroll từ Charles). Những năm sau đó, ông chủ yếu sử dụng tên thật cho các công trình toán học và bút danh cho các tác phẩm văn học để giữ kín danh tính của mình. Thành công tức thì của cuốn sách *Alice* đã làm cho bút danh văn học của ông được đông đảo công chúng biết đến, nhưng họ không biết được ông có thể là ai.



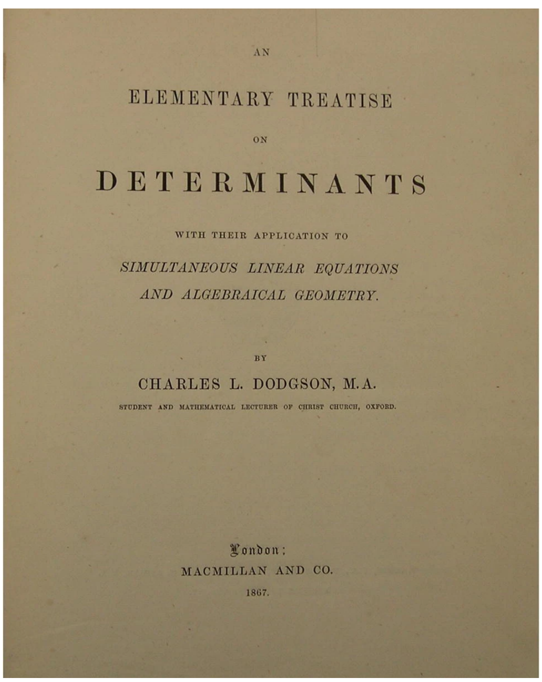
Hình 2. The title page of Dodgson's Alice's Adventures in Wonderland, 1865 (Photo by George Bayntun, Collection of Charlie Lovett).

Cuốn sách cũng được hưởng một nỗ lực quảng bá lớn của cả nhà xuất bản và tác giả. Vô số các bản sao đã được gửi đến các tạp chí để đánh giá, hoặc tặng bạn bè làm quà. Cháu trai, đồng thời là người viết tiểu sử đầu tiên của Dodgson, Stuart D. Collingwood, đã thuật lại rằng bản sao đầu tiên của cuốn sách được gửi đến Alice ngoài đời thực, người đã truyền cảm hứng cho câu chuyện, còn bản thứ hai được gửi đến công chúa Beatrice, con gái út của nữ hoàng Victoria (Collingwood 1898, tr.104) . Đáp lại, Dodgson nhận được một lá thư cho biết "cuốn sách nhỏ mà Bệ hạ rất hài lòng khi cho phép đọc nó cho công chúa Beatrice" (Wakeling 1999, tr. 122).

Với sự khen ngợi của giới phê bình và số lượng lớn sách bán được, ý tưởng về phần tiếp theo hẳn đã nhanh chóng nảy ra với Dodgson và nhà xuất bản của ông. Ngay từ năm 1866, Dodgson đã đề cập đến việc "đang cân nhắc ý tưởng về việc viết một thứ kiểu như phần tiếp theo". Công chúng rõ ràng đã mơ màng về những cuộc phiêu lưu khác, và có tin đồn rằng "Lewis Carroll đang viết tiếp" (Collingwood 1898, tr.129).

Quả thực là Dodgson đang viết. Bên cạnh những thứ khác, ông đang nghiên cứu về thứ có thể là đóng góp quan trọng nhất của ông cho nghiên cứu toán học. Thật vậy, ông đã đưa ra một phương pháp mới để tính toán các định thức, trình bày nó trước Hiệp hội Hoàng gia Luân Đôn vào tháng 5 năm 1866, và sau đó công trình này xuất hiện trong Kỷ yếu của Hiệp hội Hoàng gia Luân Đôn. Trong vòng một năm sau đó, Dodgson đã phát triển bài báo của mình thành một "cuốn sách nhỏ", mà ông ghi lại trong nhật ký của mình là "đã mang lại cho [ông] nhiều rắc rối hơn bất cứ thứ gì mà ông đã từng viết" (Wakeling 1999, 206 – 207). Việc xuất bản cuốn sách bị gián đoạn bởi một chuyến đi đến nước Nga cùng với Henry Parry Liddon từ tháng 7 đến tháng 9 năm 1867. *Chuyên luận về định thức* cuối cùng được xuất bản vào đầu tháng 12 năm đó (Hình 3). Cuốn sách này đã nhận được một số lời khen ngợi về đóng góp và tính mới, nhưng bị chỉ trích vì văn phong logic nặng nề và sự lựa chọn thuật ngữ và ký hiệu gây khó đọc.

Chuyên luận về định thức là cuốn sách đầu tiên của Dodgson kể từ Alice, nhưng nó không có liên hệ gì với cuốn truyện tuyệt vời đó. Trước khi hoàn thành, Dodgson đã thông báo cho nhà xuất bản của mình, Macmillan, trong một bức thư ngày 11 tháng 2 năm 1867, về ý định đề tên thật của mình cho cuốn sách: "Tôi có một cuốn sách nhỏ, sắp hoàn thành, mà tôi muốn các ông xuất bản cho tôi – nhưng tôi e rằng nó không thể được giới thiệu như là của tác giả 'của *Những cuộc phiêu lưu của Alice*'". Độc giả của chuyên luận chắc chắn không có lý do gì để nghi ngờ rằng tác giả của nó thực sự là người đã viết ra *Alice*. Vào thời điểm đó, Dodgson đã giữ được bí mật danh tính của mình và chỉ tiết lộ nó cho một số bạn bè và những người quen may mắn. Những bức thư gửi cho Lewis Carroll được gửi đến nhà xuất bản Macmillan, sau đó nhà xuất bản chuyển tiếp tới ông dưới cái tên Charles L. Dodgson ở Oxford. Khi một cô bé yêu cầu ông viết một câu chuyện Alice khác vào năm 1867, ông hồi âm dưới cái tên Dodgson, khẳng định rằng ông có một thông điệp cho cô ấy "từ một người bạn ... ông Lewis Carroll, một sinh vật kỳ dị, khá thích nói những chuyện vô nghĩa".


AN

ELEMENTARY TREATISE

ON

DETERMINANTS

WITH THEIR APPLICATION TO

SIMULTANEOUS LINEAR EQUATIONS

AND ALGEBRAICAL GEOMETRY.

BY

CHARLES L. DODGSON, M.A.

STUDENT AND MATHEMATICAL LECTURER OF CHRIST CHURCH, OXFORD.

London:

MACMILLAN AND CO.

1867.

Hình 3. The title page of Dodgson's Elementary Treatise on Determinants, 1867 (from the Wakeling Collection)

Khi *Chuyên luận về định thức* ra mắt, có lẽ chỉ có một nhóm nhỏ độc giả có đặc quyền mới biết được bí mật nhỏ của tác giả, và "nó là một phát hiện hoàn toàn bất ngờ với những sinh viên đại học lần đầu tiên được biết rằng ông Dodgson của trường Christ Church và Lewis Carroll chính là một" (Colingwood 1898, tr.110). Một trong những người viết đánh giá về chuyên luận dường như biết điều đó, vì ông ta kết thúc bài đánh giá của mình bằng cách hy vọng "có thêm khảo sát về thế giới thần tiên đại số tùy chọn [của tác giả]". Sự ám chỉ này đến truyện *Alice* chắc hẳn đã khiến Dodgson khó chịu, một người đã rất cố gắng giữ bí mật về danh tính của mình. Dodgson phàn nàn trong một bức thư gửi cho chị dâu của mình, vào ngày 31 tháng 7 năm 1890, rằng ông thấy khá kỳ lạ rằng "mọi người sẽ không hiểu rằng, khi một tác giả sử dụng *bút danh*, thì mục đích là *tránh* việc công khai danh tính cá nhân, điều mà họ luôn cố gắng thúc giục anh ta". Có vẻ như việc Dodgson nhất quyết giữ bí mật danh tính của mình chỉ khiến những "kẻ săn đuổi" ông trở nên đông đảo và quyết tâm hơn. Quả là tình huống đó hẳn đã gợi nên sự tò mò và hấp dẫn, và dễ dàng hình dung được sự ngạc nhiên của một độc giả nhiệt tình của *Alice*, không biết rằng tác giả của nó là một giảng viên toán tại Oxford, khi đối diện với cuốn sách tiếp theo của tác giả, về chủ đề định thức, và được cho biết tác giả thực sự là ai. Những gì đã có thể là một giai thoại thú vị đã trở thành một câu chuyện lan truyền chóng mặt khi độc giả bối rối tình cờ lại chính là nữ hoàng.

Câu chuyện này quá hay và không khó để có thể là sự thật. Thực sự là nữ hoàng biết, và có thể rất thích truyện *Alice*. Bà chỉ cần hỏi, và có thể bà ấy đã hỏi, về cuốn sách tiếp theo của tác giả, để khiến cho *câu chuyện* xảy ra. Đó là một *câu chuyện* tuyệt vời, và sẽ còn tuyệt vời hơn nếu Dodgson không hoàn toàn phủ nhận nó, gần ba mươi năm sau thời điểm mà nó được cho là đã xảy ra.

Phủ nhận

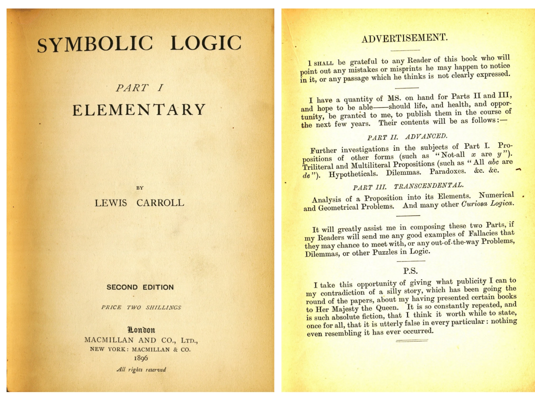
Đến năm 1896, Dodgson là một tác giả nổi tiếng từ chối tận hưởng danh tiếng của mình. Phần tiếp theo của câu chuyện, *Đi qua tấm* *gương*, cũng thành công như truyện *Alice ở xứ sở diệu kỳ*.

Sau đó, ông xuất bản nhiều tác phẩm hư cấu khác, nhưng không có tác phẩm nào thực sự sánh được với hai truyện *Alice*. Là một nhà toán học, ông cũng đã xuất bản nhiều về nhiều chủ đề khác nhau, đặc biệt là bảo vệ một cách đẹp đẽ hình học Euclid trước những sách giáo khoa mới muốn thay thế nó trong các trường trung học và đại học. Trong những năm cuối đời, ông viết một chuyên luận về logic nhằm giúp chủ đề này có thể tiếp cận tới một công chúng rộng rãi. Không giống như các đồng nghiệp của mình tại Đại học Oxford, Dodgson đã chấp nhận lý thuyết logic hình thức mới được phát triển ở Anh bởi George Boole và những người theo trường phái của ông. Phần đầu tiên của chuyên luận của Dodgson, *Logic hình thức*, xuất bản vào tháng 2 năm 1896. Lần tái bản thứ nhất, ra mắt vào đầu tháng 6 cùng năm, có lời tựa được đề ngày 11 tháng 5 năm 1896 (Hình 4). Ngoài một vài thay đổi và sửa chữa nhỏ, nó có một phần tái bút sau trang tiêu đề, với ghi chú sau:

Tôi xin nhân cơ hội này để phủ nhận một cách công khai nhất có thể một câu chuyện ngớ ngẩn, được lan truyền trên báo chí, về việc tôi đã tặng một số cuốn sách nào đó cho Nữ hoàng. Nó được lặp đi lặp lại liên tục, và là thêu dệt hoàn toàn, đến nỗi tôi nghĩ rằng đáng để tuyên bố, một lần dứt điểm, rằng nó tuyệt đối sai trong mọi chi tiết: không có bất kỳ điều gì thậm chí hơi giống như thế đã từng xảy ra cả.

Dodgson đã giữ ghi chú này trong lần tái bản thứ hai của cuốn sách, có lời tựa đề ngày 20 tháng 7 năm 1896, nhưng vì lý do nào đó đã bỏ nó khỏi lần tái bản thứ ba, xuất bản vào đầu năm 1897 nhưng có lời tựa vào Giáng sinh năm 1896.

Trong ghi chú này, Dodgson đã mạnh mẽ phủ nhận một "câu chuyện ngớ ngẩn" về việc ông đã tặng một số cuốn sách cho nữ hoàng. Có thể lưu ý rằng giải thích của Dodgson là rất ít ỏi và có thể đề cập đến một sự việc khác, nhưng có vẻ như chỉ đơn giản là ông không muốn kể chi tiết về giai thoại để không quảng bá thêm về nó. Dodgson rõ ràng không thấy thích thú gì với *câu chuyện*. Vì tin đồn đề cập đến các sự kiện được cho là diễn ra vào năm 1867, một số tác giả tự hỏi tại sao Dodgson phải mất gần ba mươi năm để phủ nhận nó (Wakeling 2015, tr. 315). Derek Hudson cho rằng Dodgson có thể đã dùng thời gian này để tranh luận "với chính bản thân mình liệu có đúng khi phản bác câu chuyện hay không (Hudson 1976, tr.133). Một lời giải thích hợp lý hơn có thể là Dodgson chỉ đơn giản là phủ nhận câu chuyện khi nó được lan truyền rộng ra, vì không có lý do gì để cho rằng tin đồn được bắt đầu trong cùng thời kỳ mà những sự việc được kể lại trong *câu chuyện* được cho là đã xảy ra.


SYMBOLIC LOGIC

PART I

ELEMENTARY

BY

LEWIS CARROLL

SECOND EDITION

PRICE TWO SHILLINGS

London

MACMILLAN AND CO., LTD.,

NEW YORK: MACMILLAN & CO.

1896

All rights reserved

ADVERTISEMENT.

I SHALL be grateful to any Reader of this book who will point out any mistakes or misprints he may happen to notice in it, or any passage which he thinks is not clearly expressed.

I have a quantity of MS. on hand for Parts II and III, and hope to be able——should life, and health, and opportunity, be granted to me, to publish them in the course of the next few years. Their contents will be as follows:—

PART II. ADVANCED.

Further investigations in the subjects of Part I. Propositions of other forms (such as "Not-all *x* are *y*"). Triliteral and Multiliteral Propositions (such as "All *abc* are *de*"). Hypotheticals. Dilemmas. Paradoxes. &c. &c.

PART III. TRANSCENDENTAL.

Analysis of a Proposition into its Elements. Numerical and Geometrical Problems. And many other *Curiosa Logica*.

It will greatly assist me in composing these two Parts, if my Readers will send me any good examples of Fallacies that they may chance to meet with, or any out-of-the-way Problems, Dilemmas, or other Puzzles in Logic.

P.S.

I take this opportunity of giving what publicity I can to my contradiction of a silly story, which has been going the round of the papers, about my having presented certain books to Her Majesty the Queen. It is so constantly repeated, and is such absolute fiction, that I think it worth while to state, once for all, that it is utterly false in every particular: nothing even resembling it has ever occurred.

Hình 4. The title page of Dodgson's Symbolic Logic, second edition, 1896, and the Advertisement page, which includes a denial of the story (from the Wakeling Collection).

Trên thực tế, có vẻ như không biết tin đồn đã bắt đầu từ khi nào. Trong một thời gian dài, người ta thậm chí đã nghĩ rằng không có bằng chứng văn bản nào về sự tồn tại của tin đồn trước sự phủ nhận của chính Dodgson vào năm 1896. Tuy nhiên, trong những năm gần đây, một số bài báo trước đó về nó đã được tìm thấy, và giờ đây mọi thứ trở nên rõ ràng rằng tin đồn đã lan truyền khá rộng vào quãng thời gian mà Dodgson phủ nhận nó. Tin đồn chắc chắn tồn tại ít nhất từ năm 1892, vì nó được tìm thấy trên một số tờ báo thời đó, chẳng hạn như *Sporting Times*. Nó dường như đã được lan truyền rộng rãi hơn sau năm 1895, đặc biệt là sau khi nó được Ethel Mackenzie McKenna kể lại trong số tháng 8 năm 1895 của *Tạp chí Ladies' Home*:

"Trong thời kỳ mới mẻ của sự thành công rực rỡ, "Alice" nằm trên tay của mọi người và những chuyến phiêu lưu vào thế giới thần tiên của cô là niềm vui thích của người lớn cũng như trẻ em. Nữ hoàng Victoria đã gửi một thông điệp đến tác giả, xin ông gửi cho bà cuốn sách tiếp theo của mình. Giống như tất cả các thần dân của mình, bà nóng lòng muốn nghe nhiều hơn về đứa trẻ thú vị, mà nguyên mẫu là con gái của hiệu trưởng của trường Christ Church. Bà đã rất kinh ngạc khi không lâu sau đó nhận được một cuốn "*Chuyên luận về định thức*" của C. L. Dodgson, vì khi đó, ông vẫn giữ bí mật về danh tính của mình, và Nữ hoàng, cũng như cả thế giới, đã tin rằng ông chỉ đơn thuần là một người hài hước."

Tạp chí của Mỹ này có lượng độc giả rộng lớn và ngày càng tăng vào thời Dodgson, và vào năm 1904, nó trở thành tạp chí đầu tiên đạt được số lượng một triệu người đặt báo. Lời kể của McKenna về *câu chuyện* được đăng lại trên các tạp chí khác của Mỹ, nhất là trong các mục tin đồn, tin vắn và tin tức văn học. *Câu chuyện* hẳn cũng đã lan tới một số tờ báo của Anh, vì nó được đăng trên tờ *Newcastle Weekly Courant*. Đúng là *câu chuyện* không được tìm thấy trên các tờ báo lớn của Anh, một sự thật có thể được giải thích là do họ không muốn xuất bản những bài viết tiết lộ danh tính của Dodgson. Được biết, Dodgson không hài lòng với những bài viết như vậy và đã liên tục viết thư phàn nàn đến những tạp chí và nhà xuất bản của Anh đã tiết lộ hoặc muốn tiết lộ tên thật đằng sau bút danh của ông. Các tạp chí nước ngoài hiển nhiên nằm ngoài tầm ảnh hưởng của Dodgson, như ông thừa nhận trong một bức thư gửi cho Falconer Madan vào ngày 8 tháng 12 năm 1880: "Tôi e rằng các ấn phẩm của Mỹ nằm ngoài tầm khiếu nại của các nhà văn Anh: chỉ ở Anh, người ta mới có thể hy vọng ngăn tên mình được công bố."

Vào năm 1895, *câu chuyện* rõ ràng là đã "lan truyền trên báo chí" và được "lặp đi lặp lại liên tục", như Dodgson đã viết trong lời phủ nhận của mình. Người ta lập luận rằng "không chắc Dodgson đã xem tạp chí [*Tạp chí Ladies' Home*] này" (Wakeling 2005, tr. 257); tuy nhiên, ông có thể đã thấy một trích dẫn về nó được đăng lại trên các tờ báo của Anh. Chúng ta cũng biết rằng Edward Bok, chủ bút của *Tạp chí Ladies' Home*, đã đến thăm Dodgson ở Oxford để thuyết phục ông đóng góp bài cho tạp chí. Chuyến thăm này được ghi lại trong tự truyện của Bok, nhưng ngày tháng không được nêu rõ ràng. Tuy nhiên, lời kể đó gợi ý rằng nó trùng hợp với lần Bok đến thăm Rudyard Kipling, người đã được thuyết phục đóng góp câu chuyện "William the Conqueror" của mình cho tạp chí. Do câu chuyện của Kipling xuất bản vào cuối năm 1895, sẽ khá hợp lý khi cho rằng chuyến thăm diễn ra trước đó. Điều thú vị là Bok kể về việc ông đã hỏi Dodgson về câu chuyện gửi tặng cuốn sách *Chuyên luận về định thức* cho nữ hoàng, một câu hỏi mà Dodgson không bình luận, nhưng "khuôn mặt của ông ấy hoàn toàn không có biểu hiện gì ngoài vẻ trắc ẩn nhằm nói với người chủ bút rằng ông ta đang mắc một sai lầm khủng khiếp" (Bok 1920, tr. 222 – 223). Trước sự thất vọng lớn của Bok, Dodgson chỉ đơn giản phủ nhận việc mình là tác giả của hai cuốn sách *Alice*. Nếu lời kể của Bok là sự thật, ông ta đã sớm được chứng kiến Dodgson bác bỏ câu chuyện, trước khi ông phủ nhận bằng văn bản, trong cuốn sách. Nhưng chúng ta có nên tin Dodgson không?

Liệu rằng nó đã xảy ra?

Việc tìm hiểu sự thật về *câu chuyện* có vẻ là việc làm kỳ quái và thiếu tôn trọng bởi vì Dodgson đã phủ nhận nó một cách rõ ràng. Tuy nhiên, chúng ta không được quên rằng Dodgson thường xuyên phủ nhận (một cách không đúng) rằng ông là tác giả của *Alice*, vì vậy chúng ta không có thêm lý do gì để tin vào sự thật của lời phủ nhận này so với tất cả những lời phủ nhận khác mà chúng ta biết là không đúng. Câu chuyện của chúng ta kết nối tác giả của *Alice* với tác giả của *Chuyên luận về định thức*. Dodgson không có lựa chọn nào khác ngoài việc phủ nhận nó, bất kể sự thật là gì, nếu ông ấy muốn – và chúng ta biết rằng ông thực sự muốn – giữ bí mật về danh tính của mình.

Chúng ta hầu như không thể nhấn mạnh đủ mức độ quan trọng của việc giữ kín danh tính đối với Dodgson. Các tiểu sử về ông chứa nhiều mẩu chuyện về việc ông từ chối là tác giả của truyện *Alice* khi được hỏi về nó. Dodgson cũng từ chối lời mời tham dự các buổi chiêu đãi do nhà xuất bản của ông tổ chức, nơi "hầu như không thể giữ được sự ẩn danh". Khi những lá thư được gửi đến trường Christ Church cho ông dưới cái tên Lewis Carroll , ông đã gửi trả lại chúng mà không mở. Năm 1890, ông thậm chí còn ban hành một thông cáo để gửi cho những người đã gửi thư đến như sau:

"Ông Dodgson thường xuyên bị những người lạ gửi thư đến với giả định khá trái phép rằng ông tuyên bố, hoặc trong một chừng mực nào đó thừa nhận quyền tác giả của những cuốn sách không được xuất bản dưới tên ông, đến mức ông thấy cần phải tuyên bố điều này, một lần dứt điểm, như một câu trả lời cho tất cả các bức thư như vậy. Ông ta không tuyên bố hay thừa nhận bất kỳ mối liên hệ nào với bất kỳ bút danh nào, hoặc với bất kỳ cuốn sách nào không được xuất bản dưới tên của chính ông ta. Do đó, không có quyền giữ lại, hoặc thậm chí đọc thư bên trong, ông ta gửi trả lại nó cho người viết thư đã viết sai địa chỉ."

Lưu ý rằng Dodgson không chính thức phủ nhận là tác giả của các truyệnAlice trong thông cáo này; ông chỉ đơn thuần từ chối việc đòi hoặc thừa nhận quyền tác giả đó. Nhưng Lloyd Humberstone khuyến cáo một cách đúng đắn rằng "Chúng ta không nên coi trọng những lời phủ nhận [của Dodgson] hơn những lời phủ nhận của một nghi phạm bị bắt trong cuộc truy tìm Jack the Ripper của cảnh sát, người khẳng định rằng anh ta không muốn được biết đến với cái tên đó, rằng anh ta không tuyên bố – hay thừa nhận – đã thực hiện bất kỳ vụ giết người nào, v.v." (Humberstone 1995, tr. 498).

Đúng là bí mật về danh tính của Dodgson dần dần được hé lộ và có lẽ nó đã trở thành một bí mật công khai vào những năm cuối đời của ông. Các tờ báo thỉnh thoảng có đề cập đến danh tính của ông, và từ điển các bút danh thường liệt kê ông. Khá hợp lý khi cho rằng bí mật có lẽ được lan truyền qua số đông bạn bè và người quen của ông. Tuy nhiên, Dodgson vẫn từ chối thừa nhận là tác giả của những truyện *Alice* khi những người lạ tiếp cận ông hoặc viết thư cho ông về nó. Những nỗ lực nhiệt thành của Dodgson để bảo vệ bí mật của mình, thậm chí ngay cả sau này khi danh tính của ông đã được biết đến rộng rãi, hẳn đã khiến những người cùng thời của ông phải tò mò. Các cuốn tiểu sử về ông thuật lại cái cách mà trong suốt cuộc đời của mình, ông ấy là "*mục tiêu thường xuyên của những lời đồn đại*".

Việc phủ nhận *câu chuyện* của Dodgson cần phải được hiểu trong bối cảnh này: *câu chuyện* chỉ là một trong số rất nhiều tin đồn về tác giả của *Alice* và sự phủ nhận chỉ là một trong số rất nhiều tình huống mà Dodgson cố gắng giữ bí mật danh tính của mình. Tuy nhiên, có một nét nổi bật về việc Dodgson phủ nhận *câu chuyện* trong cuốn *Logic Hình thức* của ông. Dodgson tin tưởng vào lợi ích xã hội của logic hình thức và muốn cuốn sách của mình dễ tiếp cận đối với rộng rãi độc giả. Để quảng bá rộng rãi hơn cho cuốn sách chuyên luận của mình, ông đã dùng bút danh văn học của mình thay vì tên thật, vốn thường được sử dụng cho các công trình toán học. Vì vậy, lời phủ nhận mà ông đưa vào chuyên luận có thể là dịp duy nhất mà Dodgson, dưới cái tên Lewis Carroll, phủ nhận mối liên hệ của ông với Charles L. Dodgson.

Chúng tôi đã nói ở trên rằng *câu chuyện* thực sự không khó để có thể là thật. Thật vậy, có những lý do chính đáng để tin rằng *câu chuyện* đã thực sự xảy ra, và người ta sẽ không ngạc nhiên nếu nó đã xảy ra. Tuy nhiên, Thomas B. Strong, một người bạn của Dodgson, trong hồi ký viết năm 1932, đưa ra hai lý do để không tin vào điều đó:

"Thật trái ngược với toàn bộ thái độ của Dodgson đối với Hoàng gia và với cung cách đúng mực của ông ấy nếu ông ấy giễu cợt Nữ hoàng như vậy. Và nó hoàn toàn trái ngược với thái độ của ông ấy đối với những cuốn sách của mình. Ông ấy luôn từ chối thừa nhận với bất kỳ người nào, ngoại trừ một số những người có đặc quyền đặc biệt, rằng ông ấy là Lewis Carroll."

Có vẻ như Strong không nhận thấy rằng hai lý do ông ấy đưa ra có phần trái ngược nhau. Thật vậy, Dodgson hoặc phải gửi cuốn sách tiếp theo của mình, và do đó tiết lộ danh tính của ông, hoặc từ chối gửi nó, và do đó từ chối yêu cầu của nữ hoàng, mặc dù ông có thể đã lập luận rằng cuốn sách tiếp theo của Lewis Carroll hoàn toàn không phải là cuốn sách tiếp theo của Charles Dodgson.

Lưu ý rằng lý do đầu tiên mà Strong đưa ra cho thấy rằng việc Dodgson gửi tặng một cuốn sách toán cho nữ hoàng là điều đáng hổ thẹn và thô lỗ. Nhưng lý do thứ hai có vẻ như không đúng, vì chúng ta có thể tưởng tượng Dodgson hẳn sẽ vui vẻ coi nữ hoàng là một trong số "những người có đặc quyền" được ông đã tiết lộ danh tính của mình, và chắc chắn ông đã tiết lộ điều đó để được giao thiệp với một số nhân vật nổi tiếng cùng thời.

Dodgson không đáng tin cậy lắm khi ông phủ nhận những *câu chuyện* tiết lộ danh tính của mình; thậm chí chỉ cần nhìn qua danh sách những phủ nhận của ông là đủ để ủng hộ việc không tin vào ông. Nhưng có thể có một lý do chính đáng để tin Dodgson một lần. Thật vậy, việc Dodgson phủ nhận *câu chuyện* sẽ không ảnh hưởng đến niềm tin của chúng ta về nó nếu nhân vật liên quan không phải là nữ hoàng. Tôi không tin rằng việc tặng một cuốn sách toán học cho nữ hoàng sẽ đi ngược lại cách hành xử đúng mực của Dodgson. Tuy nhiên, việc công khai phủ nhận một câu chuyện liên quan đến nữ hoàng, câu chuyện có thể sẽ được nữ hoàng công nhận là thật, có thể sẽ bị coi là đáng hổ thẹn đối với một thần dân thời Victoria, một người "yêu nước nồng nàn và là một tín đồ trung thành của những hoạt động của hoàng gia" (Hudson 1976, 133).

Được biết, Dodgson rất kính trọng nữ hoàng và hoàng gia. Trong suốt cuộc đời mình, ông đã có một số dịp gặp gỡ các thành viên của hoàng gia, và ông chắc chắn đã quen với một số người trong họ. Ông đã tường thuật chi tiếttrong nhật ký của mình chuyến thăm trường Christ Church của nữ hoàng, vào tháng 12 năm 1860. Trong các chuyến thăm Oxford của các thành viên hoàng gia, ông tìm cách được giới thiệt để chụp ảnh họ. Dodgson là một nhiếp ảnh gia có tiếng, được nhiều nhân vật nổi tiếng cùng thời làm mẫu. Đáng chú ý, ông đã chụp được ảnh Hoàng tử Frederick của Đan Mạch vào năm 1863 và Hoàng tử Leopold (con trai út của nữ hoàng) vào năm 1875. Theo Collingwood, một số bức ảnh của Dodgson "đã được nữ hoàng xem, và bà nói rằng rất thích chúng" (Collingwood 1898, tr. 102 – 104).

Đúng là trong thư từ cá nhân của mình, Dodgson đã bịa ra một số câu chuyện liên quan đến nữ hoàng để mua vui cho các bạn thư của ông. Một lần, ông đã "soạn một bức thư giả của nữ hoàng Victoria mời mình đến một bữa tiệc trong vườn". Một lần khác, ông giả vờ rằng nữ hoàng đã hỏi xin ông một bức ảnh, nhưng ông từ chối vì "nguyên tắc của ông là không bao giờ cho ảnh của mình, ngoại trừ cho những cô gái *trẻ*" (Cohen và Green 1979, tr. 135 – 136 và 116). Edward Wakeling đã nhận xét tinh tế rằng "đó dĩ nhiên chính là cách mà những câu chuyện và tin đồn bắt đầu" (Wakeling 2015, tr. 316). Vì vậy, có thể *câu chuyện* của chúng ta cũng được bắt đầu bởi chính Dodgson, để đùa vui một số người bạn gần gũi, trước khi trò đùa trở thành một tin đồn không thể ngăn chặn.

Tác giả của *Alice*

Đương nhiên, sự phủ nhận của Dodgson về *câu chuyện* vào năm 1896 không làm nó ngừng lan truyền. Ví dụ, nó được tìm thấy vào năm sau đó trong mục về Dodgson trong cuốn sách đầy tham vọng *Thư viện về Văn học hay nhất thế giới*, trong đó chủ biên nhận xét rằng

"hiếm khi một bộ óc kép như vậy – khi thì viết những điều hoàn toàn ngớ ngẩn và rất dí dỏm, khi thì lại khám phá những điều phức tạp của toán học cao cấp – lại có một thể hiện kỳ lạ hơn (Warner 1897, tr. 309).

Câu chuyện cũng được tìm thấy vào năm 1897 trong chuyên mục tin ngắn của tờ *Northern Echo*, kèm theo một số câu thơ lấy cảm hứng từ đó.

Kể từ đó, *câu chuyện* được kể thường xuyên đến mức có đến mấy bản khác nhau của nó. Một số phiên bản cho rằng Dodgson đã gửi cho nữ hoàng cả một bộ sách chứ không chỉ là cuốn *Chuyên luận về định thức*. Một số phiên bản khác cho rằng thực ra người bán sách của nữ hoàng mới là người được yêu cầu giao sách của Dodgson cho nữ hoàng. Bất chấp sự khác biệt của chúng, tất cả các lời kể đều thống nhất ở một điểm trọng tâm: nữ hoàng đã yêu cầu một tác phẩm khác của tác giả của một câu chuyện thiếu nhi và thật ngạc nhiên, bà đã nhận được một cuốn sách toán.

Không khó để hiểu được sự thành công của "giai thoại hấp dẫn không chịu phai nhạt, mặc dù nó khá sai sự thật" này (Hudson 1976, tr. 132). "Riêng việc nó trùng khớp quá mức với hình ảnh phổ biến" về tính cách kép đã đủ giải thích cho sự dai dẳng của nó (Heath 1974, tr.3). Từ lâu, công việc chính của các nhà viết tiểu sử của Dodgson là giải quyết điều mà họ coi là một nghịch lý: "Bằng cách nào mà Lewis Carroll, một nhà toán học khó tính, dè dặt và sùng đạo sâu sắc thời Victoria, lại có thể tạo ra những câu chuyện đã trở thành những tác phẩm thiếu nhi kinh điển được yêu thích nhất trong văn học Anh?" (Cohen 1995, tr. 19).

Nhiều nhà nghiên cứu đã cố gắng giải quyết bí ẩn này và chứng minh sự thống nhất (hoặc ít nhất là sự tương đồng) giữa hai mặt của thiên tài của Dodgson. Một số người đã diễn giải quá mức các câu chuyện Alice nhằm tìm kiếm những chân lý toán học ẩn náu mà chỉ một nhà toán học mới có thể lồng vào đó. Một số người khác đã phóng đại phần toán học giải trí của Dodgson mà chỉ một nhà văn hài hước mới có thể tạo ra. Nhưng từ lâu, chiến lược chính của các người theo chủ nghĩa Carroll là làm cho cái tên Dodgson trở nên mờ nhạt, chìm về phía sau vì cho rằng "những công trình của Charles Dodgson kém thú vị hơn những tác phẩm của Lewis Carroll".

Việc hạ thấp Dodgson để ủng hộ Carroll đã bắt đầu từ khi Dodgson còn sống. Ví dụ, một người viết nhận xét về cuốn sách *Pillow–Problems* của Dodgson, một tập hợp các bài toán mà ông ký bằng tên thật của mình, đã bày tỏ một cách rõ ràng thị hiếu của mình:

"Và, sau cùng, thế giới cần Lewis Carroll, người một mình hiểu được "trí thông minh siêu hình" của trẻ nhỏ, và tức thì đưa người lớn tuổi nhất trong chúng ta đi dạo qua vùng đất mơ ước của chúng, hơn là ông Dodgson, người không có vẻ gì là một người du hành trong biển sâu của tư tưởng (Newton, Kelvin là vậy) mà chỉ là một nhà toán học tao nhã."

Ngoài sự bực bội khi thấy danh tính của mình bị tiết lộ, người ta có thể tưởng tượng được Dodgson có thể đã cảm thấy khó chịu như thế nào khi danh tiếng văn học can thiệp vào việc đánh giá các công trình toán học của ông. Tuy nhiên, sự cám dỗ của việc liên kết hai cái tên là rất mạnh, và nhiều đồng nghiệp làm toán của Dodgson chắc chắn đã không cưỡng lại được. Ví dụ, Hugh MacColl, người đã đã viết nhận xét về một số cuốn sách toán của Dodgson trong tạp chí *Athenaeum* đã đề cử cuốn sách *Lý thuyết mới của sự song song* của Dodgson, mà ông thấy "cũng thú vị như những điều kỳ lạ cô bé Alice đã gặp ở xứ sở diệu kỳ". Một ví dụ khác xảy ra vào năm 1894, khi một bài toán logic do Dodgson nghĩ ra được lưu truyền giữa các nhà logic học người Anh. John Venn muốn thảo luận về nó trên báo in và xin phép Dodgson. Ông đồng ý nhưng yêu cầu Venn "không được đề cập với bất kỳ ai *tên thật* [của ông], một cách có liên quan đến bút danh [của ông]". Venn hẳn đã rất bối rối, vì ông đã không đề cập đến cả hai cái tên trong cuốn sách của mình, mà chỉ gọi bài toán logic đang được thảo luận là Bài toán Alice, "người đề xuất nó, đối với độc giả nói chung, được biết đến nhiều hơn trong một nhánh văn học rất khác."

Tình hình sau đó không có nhiều thay đổi. Trong cuốn *Cơ sở về Lịch sử toán* học, Nicolas Bourbaki gọi *Chuyên luận về định thức* của Dodgson là "một cuốn sách khó hiểu, với sự cẩn thận và tỉ mỉ đặc trưng của ông, tác giả nổi tiếng của *Alice ở xứ sở diệu kỳ*" mà không nêu tên tác giả của nó; chỉ cần biết rằng chuyên luận được viết bởi tác giả của *Alice*. Sự nổi tiếng ngày nay của Dodgson trong giới toán học chắc chắn đã được hưởng lợi từ vị thế văn học của ông. Ngày nay, có một nhánh nghiên cứu đáng nể chuyên về Dodgson trong cộng đồng các nhà sử học toán học, không như nhiều đồng nghiệp đã bị lãng quên của ông. Dodgson có lẽ sẽ không bao giờ thiếu độc giả, nhưng ông luôn đối mặt với nguy cơ không được đọc một cách nghiêm túc. Độc giả hiện đại của Dodgson biết rằng họ đang đọc "tác giả của Alice." Thật vậy, có lẽ phần lớn độc giả của Dodgson đọc sách của ông chính là vì họ biết ông là tác giả của *Alice*. Như vậy, họ thường mong gặp những điều huyền ảo ở những nơi không có nhiều, và khi không có nhiều, đôi khi họ thêm thắt một chút.

Thật là xấu hổ cho nữ hoàng nếu bài viết này kết thúc mà không có một vài lời về cách bà được miêu tả trong *câu chuyện*. Mọi người dễ dàng hiểu được sự ngạc nhiên của bà khi nhận được chuyên luận về định thức của Dodgson, nếu bà quả thựcnhận được cuốn sách, với lý do rằng "nữ hoàng, giống như phần còn lại của thế giới, tin rằng ông ấy chỉ đơn thuần là một người hài hước" (McKenna 1895, tr. 8). Bà có lẽ cũng sẽ phản ứng tương tự nếu nhận được một chuyên luận về thực vật nhiệt đới hoặc một nghiên cứu về nghệ thuật thời trung cổ, khi tất cả những gì bà mong đợi là một câu chuyện cho trẻ em. Tuy nhiên, sự đặc biệt của *câu chuyện* rõ ràng nảy ra từ định kiến sáo mòn rằng toán học và văn học thuộc về các lĩnh vực tách biệt và không thể dung hòa. Nữ hoàng đã rất ngạc nhiên vì bà mong đợi tác giả là "một người hài hước", nhưng điều khiến cho sự ngạc nhiên của bà vô cùng thú vị là nếu như bà đã kỳ vọng tác giả là bất kỳ ai khác khác ngoài "một người hài hước", có lẽ bà sẽ không thể ngờ ông ta là một nhà toán học.

Ngoài sự ngạc nhiên, nhiều phiên bản của *câu chuyện* cho rằng nữ hoàng không hề cảm thấy thích thú. Chúng ta đã thấy một số nhà bình luận phủ nhận câu chuyện với lý do rằng việc tặng một cuốn sách như vậy là vô lễ. Nếu *câu chuyện* quả thực đã xảy ra, những nhà bình luận như vậy cho rằng nữ hoàng sẽ cảm thấy bị xúc phạm. Chúng tôi không biết năng lực toán học của nữ hoàng, nhưng giả sử rằng bà không phải là một người yêu thích toán học, chúng ta vẫn thấy không có lý do gì để bà cảm thấy không hài lòng hoặc không được tôn trọng (mặc dù có thể đã thất vọng). Đầu tiên, chúng ta có thể tưởng tượng rằng nữ hoàng cảm thấy thích thú với sự cố nhỏ này, cũng như cách nó đã khiến nhiều thế hệ độc giả sau này thích thú. Và thứ hai, lời buộc tội thiếu tôn trọng dường như tận dụng niềm tin rộng rãi rằng toán học là một thứ buồn tẻ, không phù hợp với những nghi thức xã giao, và do đó không thích hợp để làm một món quà chân thành.

Câu chuyện Dodgson tặng một cuốn sách toán cho nữ hoàng Victoria là một giai thoại kinh điển trong thế giới toán học. Nó bảo chúng ta rằng một tiểu thuyết gia thành công khó có thể là một nhà toán học chuyên nghiệp và các nữ hoàng có lẽ không hứng thú với những cuốn sách toán. Không cần phải xem xét nó một cách quá nghiêm túc. Nhưng thành công của nó chắc chắn phản ánh những điều cũ rích nhưng còn mãi về toán học là gì, nhà toán học là ai, và sự sáng tạo toán học bắt nguồn từ đâu.

Tài liệu tham khảo

[1] Beale, Tony (1973). C. L. Dodgson: mathematician. In Denis Crutch, ed. *Mr. Dodgson*, pp. 26 – 33. London: The Lewis Carroll Society.

[2] Bok, Edward (1920). *The Americanization of Edward Bok: The Autobiography of a Dutch Boy Fifty Years Later*. New York: Charles Scribner's sons.

[3] Cohen, Morton N. (1995). *Lewis Carroll: A Biography*. New York: Alfred A. Knopf.

[4] Cohen, Morton N., and Roger Lancelyn Green, eds. (1979). *The Letters of Lewis Carroll*. New York: Oxford University Press.

[5] Collingwood, Stuart Dodgson (1898). *The Life and Letters of Lewis Carroll (Rev. C. L. Dodgson)*. London: T. Fisher Unwin.

[6] Heath, Peter, ed. (1974). The Philosopher's Alice. London: Academy Editions.

[7] Hudson, Derek (1976). *Lewis Carroll: An Illustrated Biography*. London: Constable.

[8] Humberstone, Lloyd (1995). Names and pseudonyms. *Philosophy* 70 (274), 487 – 512.

[9] McKenna, Ethel Mackenzie (August 1895). The author of "Alice in Wonderland." *Ladies' Home Journal* 8.

[10] Wakeling, Edward, ed. (1999). *Lewis Carroll's Diaries: The Private Journals of Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll)*, vol. 5. The Lewis Carroll Society, Bedfordshire: Luton Press.

[11] Wakeling, Edward, ed. (2005). *Lewis Carroll's Diaries: The Private Journals of Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll)*. Vol. 9, The Lewis Carroll Society, Herefordshire: Clifford Press.

[12] Wakeling, Edward (2015). *Lewis Carroll: The Man and His Circle*. London: I. B. Tauris.

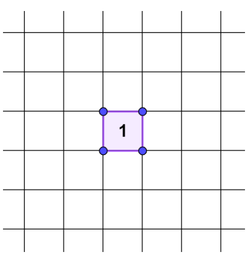
[13] Warner Charles Dudley, ed. (1897). *A Library of the Wold's Best Literature: Ancient and Modern*. Vol. 8. New York: The international Society.

DIỆN TÍCH TRÊN LƯỚI Ô VUÔNG (Phần I)

NGÔ VĂN MINH, PHAN NGỌC MINH VÀ NGUYỄN THỊ NHUNG

Tính diện tích của một hình là một chủ đề hay và có nhiều điều thú vị của các bạn nhỏ cuối cấp 1. Chủ đề này cũng được các thầy cô trong Câu lạc bộ Unicorn Math Circle (UMC) giảng dạy trong nhiều buổi với sự tham gia hào hứng của các bạn học và có nhiều cách giải độc đáo đã được đưa ra. Chúng ta cùng bắt đầu với một dạng tính diện tích trong những bài giảng của các thầy cô – Tính diện tích hình trên lưới ô vuông. Với cách tính được trình bày trong bài viết này, các bạn nhỏ chưa học đến những công thức tính diện tích vẫn có thể tính được diện tích của nhiều kiểu hình khác nhau nhé, vì chúng ta chỉ dựa vào các ô vuông trên lưới thôi. Hơn thế nữa, dựa vào lưới ô vuông các em còn được khám phá những định lý nổi tiếng như Định lý Pythagoras, Định lý Pick và những tính chất hay khác của Toán học.

1. Diện tích của những hình cơ bản



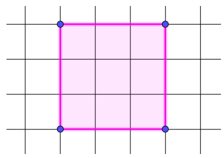
Hình 1.

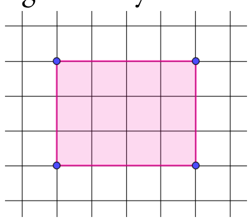
Như nhiều bạn đã biết, lưới ô vuông gồm các đường thẳng song song cách đều nhau theo cả chiều ngang cũng như chiều dọc và tạo thành những hình vuông mà ta quy ước là chiếm 1 đơn vị diện tích. Hình vuông đơn vị này là cơ sở để chúng ta tính diện tích của các hình tạo ra trên lưới trong các phần dưới đây.

Trước hết ta bắt đầu với việc tìm diện tích của những hình rất đơn giản nhưng đóng vai trò quan trọng trong việc tính toán diện tích các hình ở các ví dụ sau.

Hình cơ bản đầu tiên cần tính diện tích là hình vuông và hình chữ nhật có các cạnh nằm trên các đường thẳng của lưới.

Ví dụ 1. Tính diện tích của hai hình được tô đậm trong lưới ô vuông dưới đây.





Hình 2 *Hình* 3.

Lời giải. Bằng cách đếm trực tiếp, ta thấy

– Hình A có tổng cộng 9 ô vuông nên có diện tích là 9 đơn vị;

– Hình B có tổng cộng 12 ô vuông nên có diện tích phần hình bằng 12 đơn vị.

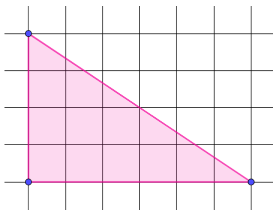
Các bạn mà học công thức tính diện tích hình vuông và hình chữ nhật rồi thì có thể nhận thấy ngay kết quả trên có thể tính được bằng cách sau.

– Cạnh của hình vuông là 3 đơn vị nên diện tích là: $3 \times 3 = 9$ đơn vị;

– Hình chữ nhật chiều dài và chiều rộng tương ứng là 4 và 3 đơn vị nên có diện tích là: $4 \times 3 = 12$ đơn vị.

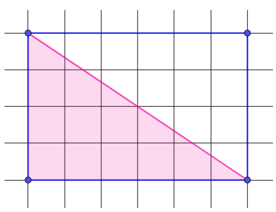
Chúng ta tiếp tục với một hình cơ bản nữa là tam giác có hai cạnh trùng với hai đường dọc và ngang của lưới ô vuông.

Ví dụ 2. Tính diện tích tam giác được tô đậm trong hình dưới đây.



Hình 4.

Lời giải. Ở ví dụ này, các bạn nhỏ quan sát một chút thì sẽ thấy ngay diện tích của tam giác đã cho bằng một nửa hình chữ nhật màu cỡ 6×4 được tô màu xanh dương dưới đây.



Hình 5.

Do diện tích hình chữ nhật được tạo bởi 24 ô vuông nên diện tích hình tam giác bằng $\frac{24}{2} = 12$ (đơn vị diện tích).

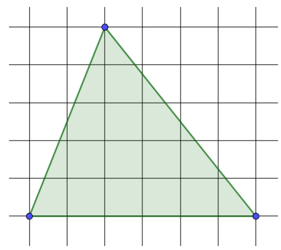
Ngoài ra, nếu bạn nhỏ nào đã biết công thức tính diện tích tam giác thì hình trong Ví dụ 2 là tam giác vuông với 2 cạnh góc vuông là 6 và 4 đơn vị. Do đó diện tích của tam giác là $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$ đơn vị.

Hai ví dụ trên cho ta một cái nhìn trực quan về bài toán tính diện tích trên lưới ô vuông, ta chỉ đơn giản dùng cách đếm đơn thuần số ô vuông trên lưới. Trong các bài toán sau, có thể có nhiều cách giải khác nhau nhưng bài viết đưa ra cách giải mà chỉ dựa vào những hình cơ bản đã biết cách tính diện tích trong Ví dụ 1 và Ví dụ 2.

2. Diện tích hình chia thành những hình cơ bản

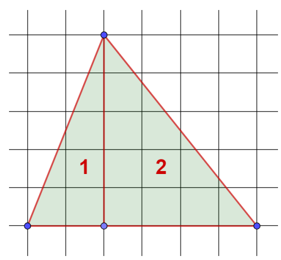
Chúng ta lại tiếp tục với tính diện tích của tam giác nhé. Lần này là tam giác chỉ có một cạnh trùng với đường dọc–ngang của lưới và nhận thấy ta không thể áp dụng luôn cách tính như trong Ví dụ 2. Tuy nhiên bằng cách chia tam giác đã cho thành các tam giác nhỏ có hai cạnh trùng với những đường thẳng của lưới, ta hoàn toàn có thể áp dụng cách tính diện tích tam giác như trong tình huống trên.

Ví dụ 3. Tính diện tích tam giác được tô đậm trong hình cho ở dưới đây.



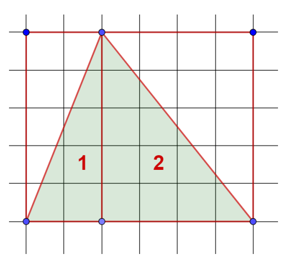
Hình 6.

Lời giải. Ta chia hình tam giác lớn thành hai hình tam giác (1) và (2).



Hình 7.

Sau đó tính diện tích từng tam giác, tương tự như trong Ví dụ 2.



Hình 8.

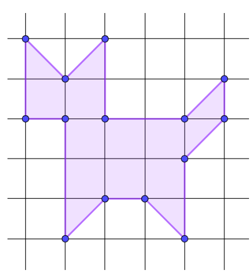
Hình tam giác (1) có diện tích bằng một nửa hình chữ nhật bên trái nên có diện tích là: $\frac{10}{2}=5$ (đơn vị diện tích).

Hình tam giác (2) có diện tích bằng một nửa hình chữ nhật bên phải và do đó có diện tích là: $\frac{20}{2}=10$ (đơn vị diện tích).

Suy ra hình cần tính có diện tích bằng $5+10=15$ (đơn vị diện tích).

Tính diện tích bằng cách chia hình thành những hình nhỏ hơn không chỉ dừng lại ở việc tính toán những dạng hình học quen thuộc như hình tam giác, hình chữ nhật, ... mà còn có thể áp dụng cho rất kiểu hình khác nhau. Chẳng hạn như hình "chú mèo" ngộ nghĩnh dưới đây.

Ví dụ 4. Tính diện tích "chú mèo" được cho bởi phần tô đậm trong hình sau.

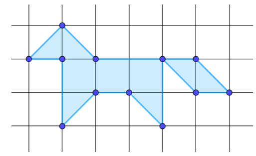


Hình 9.

Lời giải. Ở hình trên có những tam giác nửa, tức là tam giác có diện tích bằng một nửa hình vuông đơn vị và có diện tích là $\frac{1}{2}$ đơn vị diện tích. Ta đếm có tổng cộng 8 hình vuông và 6 hình tam giác nửa (2 tai, 2 chân và cái đuôi). Vì thế "chú mèo" có diện tích bằng $8+\frac{1}{2}\times 6=11$ đơn vị diện tích.

Một chú ngựa xinh xắn cần tính diện tích cho các em luyện tập thêm nhé.

Bài tập 1. Tìm diện tích "chú ngựa" trong hình sau.

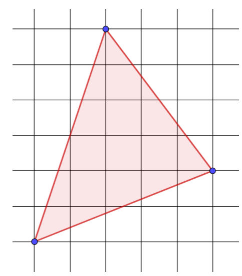


Hình 10.

3. Diện tích hình tính theo phần bù

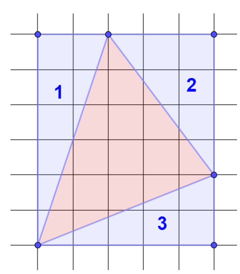
Diện tích cần tính dưới đây tiếp tục là một tam giác, nhưng lần này là một tam giác tùy ý, không có cạnh nào trùng với những đường thẳng của lưới.

Ví dụ 5. Tính diện tích của hình được tô đậm sau đây.



Hình 11.

Lời giải. Rõ ràng với tam giác này, việc tính trực tiếp phần bên trong là khó khăn. Tuy nhiên phần bù của tam giác trong hình chữ nhật bao quanh nó lại là những tam giác như trong Ví dụ 2 nên ta hoàn toàn có thể tính được ngay.



Hình 12.

Lần lượt gọi ba tam giác phần bù được tô xanh là (1), (2) và (3). Ta thấy:

– Hình (1) có diện tích bằng nửa hình chữ nhật cỡ 6×2, nên có diện tích bằng 6.

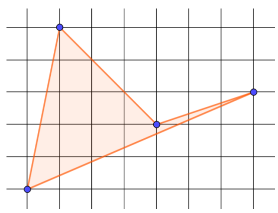
– Hình (2) có diện tích bằng nửa hình chữ nhật cỡ 4×3, nên có diện tích bằng 6.

– Hình (3) có diện tích bằng nửa hình chữ nhật cỡ 5×2, nên có diện tích bằng 5.

Vì phần bù được tạo thành bởi ba tam giác vuông (1), (2) và (3) nên diện tích của chúng bằng $6+6+5=17$. Suy ra diện tích tam giác được tô đậm bằng $30-17=13$ (đơn vị diện tích).

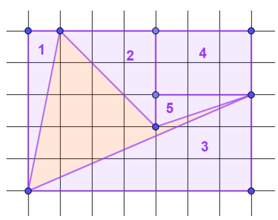
Để rèn luyện thêm cách tính diện tích dựa trên phần bù, chúng ta cùng làm tiếp ví dụ sau.

Ví dụ 6. Tính diện tích phần hình được tô đậm dưới đây.



Hình 13.

Lời giải. Trong ví dụ này, ta tiếp tục tính diện tích theo phần bù và chia phần bù của hình đã cho thành các hình quen thuộc đã biết cách tính diện tích. Mỗi bạn nhỏ có thể chọn những cách chia khác nhau, chẳng hạn ta có thể chia đơn giản như sau:



Hình 14.

Phần bù của hình đã cho được chia thành năm hình (1), (2), (3), (4) và (5). Khi đó

– Hình tam giác (1) có diện tích bằng $\frac{1}{2} \times 5 = 2{,}5$ (đơn vị diện tích)

– Hình tam giác (2) có diện tích bằng $\frac{1}{2} \times 9 = 4{,}5$ (đơn vị diện tích)

– Hình tam giác (3) có diện tích bằng $\frac{1}{2} \times 21 = 10{,}5$ (đơn vị diện tích)

– Hình chữ nhật (4) có diện tích bằng 6 (đơn vị diện tích)

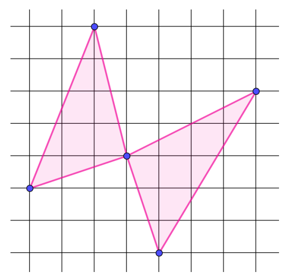
– Hình tam giác (5) có diện tích bằng $\frac{1}{2} \times 3 = 1{,}5$ (đơn vị diện tích)

Vậy tổng diện tích của chúng bằng $2{,}5 + 4{,}5 + 10{,}5 + 6 + 1{,}5 = 25$. Suy ra diện tích hình tam giác tô đậm bằng $7 \times 7 - 25 = 24$ (đơn vị diện tích).

Việc tính theo phần bù chỉ hiệu quả khi phần bù được cấu tạo bởi những hình cơ bản như hình chữ nhật, hình tam giác như trong hai ví dụ đầu tiên. Vì thế các bạn nhỏ cần chia thật khéo, sao cho mọi hình đều có dạng quen thuộc nhé!

Cô nàng "bướm" xinh đẹp dưới đây để thử tài chia hình của các bạn nhỏ.

Bài tập 2. Tính diện tích phần được tô đậm trong hình sau.



Hình 15.

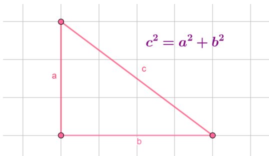
Bây giờ chúng ra sẽ vận dụng cách tính diện tích được giới thiệu ở trên để làm một điều rất thú vị, đó là chứng minh một định lý rất quen thuộc trong Toán học: Định lý Pythagoras.

4. Diện tích và định lý Pythagoras

Hẳn nhiều bạn nhỏ đã biết về định lý Pythagoras rồi đúng không. Định lý Pythagoras phát biểu rằng: "Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng bình phương của hai cạnh góc vuông", ở đây bình phương của số a, ký hiệu là a^2 là tích của a nhân với a, $a^2 = a \times a$.

Giả sử tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là a và b, cạnh huyền là c. Khi đó, định lý

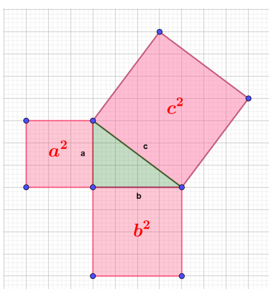
Pythagoras cho ta đẳng thức: $a^2 + b^2 = c^2$. Trong bài viết này, ta xét a, b và c là các số tự nhiên khác không, tuy nhiên những lập luận dưới đây đúng cho tam giác vuông với các cạnh không cần là số tự nhiên các em nhé.



Hình 16.

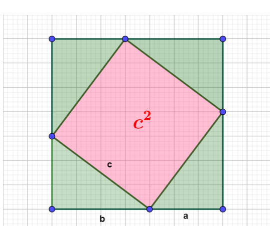
Bây giờ chúng ta cùng xem chứng minh định lý Pythagoras dựa trên việc tính diện tích các hình thế nào.

Trước hết nhận thấy rằng a^2, b^2 hay c^2 chính là diện tích của các hình vuông với cạnh tương ứng là a, b hay c. Ở đây, chúng ta sẽ dựa trên việc tính diện tích của các hình này để suy ra định lý Pythagoras.



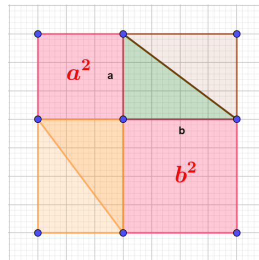
Hình 17.

Đầu tiên là ta tính diện tích của hình vuông cạnh c được tô màu hồng trong Hình 19. Diện tích của hình vuông này có thể được tính bằng cách lấy phần bù trong hình vuông bao quanh với cạnh là $a + b$. Các em có thể thấy ngay phần bù của hình vuông cần tính là 4 tam giác vuông có diện tích bằng diện tích của tam giác vuông đã cho.



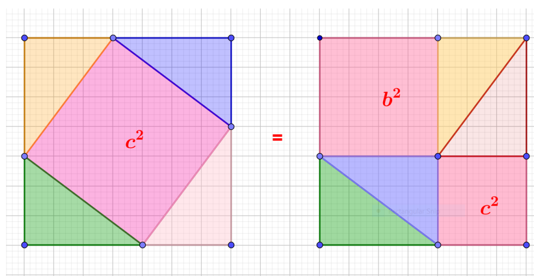
Hình 18.

Tiếp đến ta tính diện tích của hai hình vuông màu hồng có cạnh tương ứng là b và c trong Hình 20. Phần bù của tổng diện tích hai tam giác này trong hình vuông bao quanh (cạnh là $a + b$) cũng là 4 tam giác vuông có diện tích bằng tam giác đã cho.



Hình 19.

Do hai hình vuông bao quanh đều có cạnh là $a + b$ nên có cùng diện tích. Từ đó ta có ngay: $a^2 + b^2 = c^2$ và chứng minh được định lý Pythagoras!



Hình 20.

Vậy là bằng cách tính diện tích của những hình cơ bản là hình vuông và tam giác vuông mà chúng ta đã chứng minh được một định lý rất nổi tiếng. Thật là kỳ diệu phải không các em!

Trong phần đầu tiên của chủ đề này, chúng ta đã cùng nhau tìm hiểu những phương pháp thường được sử dụng khi tính diện tích của một hình trên lưới ô vuông. Những cách đưa ra dù rất đơn giản nhưng lại giúp ta làm được một điều rất hữu ích – chứng minh được định lý Pythagoras. Chủ đề diện tích trên lưới ô vuông vẫn còn nhiều thú vị nữa các bạn nhỏ nhé, các em hãy đón đọc Phần 2 của chủ đề trong số sau của Pi.

NUMBERS AND THEIR DIGITS

NGHIA DOAN[1]

A number is made up of digits.

Divisibility criteria

We start with some problems using the divisibility criteria for $3, 4,$ or 8.

Problem 1. What is the greatest multiple of 8 whose digits are all different?

Solution. The greatest multiple of 8 with different digits has at most ten digits. The *divisibility rule* for 8 states that its last three digits make a number divisible by 8. If we choose the first seven digits to be 9876543, then there are digits 0, 1 and 2 left. The greatest multiple of 8 these three digits can compose is 120. Thus the desired number is 9876543120.

Problem 2. What is the least multiple of 36 that contains only digits 4 and 5.

Solution. Divisibility rule for 9 states that the sum of digits of the number must be $9, 18, \dots$. Let's examine the sum of the digits from the least possible value 9 and then going up. If the sum is $9,$ then 45 or 54 are not divisible by $4,$ so $9 = 4 + 5$ is not a possible sum. If the sum is $18,$ the $2-$digit multiple of 4 can be made from two pairs of 4 and 5 is $44.$ Thus the number is $5544.$

Exercise 1. Find a $7-$digit number containing only digits 2 or digits 3 such that there are more of digits 2 than of digits 3 and the number is divisible by both 3 and $4.$

Remainders of perfect powers

Now we look at the remainders of a perfect power – a perfect square, a perfect cube, or a higher power of integer – when divided by an integer such as $3, 4, 8, 9$ or $10, 100$ and so on.

Problem 3. Is there a $5-$digit perfect square whose sum of digits is 29?

Solution. A perfect square is divisible by 3 or has a remainder of 1 when divided by 3 (why?). Since the remainder of a number when divided by 3 is the same as the remainder of its sum of digits when divided by $3,$ and 29 has a remainder of 2 when divided by 3 so there is no such number.

Problem 4. Find the perfect cube n such that all digits of n are 9 except the unit digit, which is $5.$

Solution. There is no such perfect cube since a perfect cube has a remainder $0, 1,$ or 8 when divided by $9.$

Problem 5. What is the last digit of $\left(\dots((7)^7)^7\dots\right)^7$ (there are 1001 numbers 7)?

Solution. Testing case by case we have: $7 \equiv 7 \pmod{10}, 7^7 = (7)(7^2)^3 \equiv -7 \pmod{10}, (7^7)^7 \equiv (-7)^7 \equiv 7 \pmod{10}, \dots$ By Induction Principle, it can be proved that the last digit of the generic expression is 7 if it has an odd amount of $7,$ otherwise it is $3.$ The given one has an odd number of $7,$ so its last digit is $7.$

Problem 6. In how many zeros can the number $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ end for n positive integer?

Solution. For $n = 1,$ and $2,$ the sum ends in one and two zeros. Now, for all $n \geq 3, 2^n, 4^n$

[1] *Canada.*

are divisible by 8, and $1^n + 3^n$ congruent to 2 or 4 modulo 8. Thus, the sum cannot end in three or more zeros.

Exercise 2. Find the last five digits of 5^{1981}.

Exercise 3. Find $n > 3$ such that the $(n+1)$–digit binary number $\overline{10\ldots01_2}$ is a perfect power of 3.

Relations between digits of a number

Problem 7. Digits a, b, and c are used to form $3-$digit numbers $\overline{abc}, \overline{bca}$, and $\overline{cab}$. The sum of these numbers is 1332, find $a+b+c$.

Solution. $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, similarly with others. Their sum is $111(a+b+c) = 1332$, $a+b+c = 12$.

Problem 8. Find all $4-$digit number n whose sum of digits is $2010 - n$.

Solution. Let $n = \overline{abcd}$. Then $1001a + 101b + 11c + 2d = 2010$. If $a = 1$, then $b = 9$, so $11c + 2d = 100$, so $c = 8, d = 2$. If $a = 2$, then $b = c = 0, d = 4$. The solutions are 1982, 2004.

Exercise 4. Find a potitive integer a such that $(1+2+\ldots+a) - 1000a$ is a $3-$digit number.

Hints to the exercises

Exercise 1. First find the last two digits based on divisibility rule for 4. Then find the number of digits 2 in the first five digits.

Exercise 2. Let $\overline{10\ldots01_2} = 2^n + 1 = 3^m$. There are two cases: m is odd or even.

Exercise 3. There are two cases, $a < 1999$ and $a \geq 2000$.

Exercise 4. Find the last 5 digits of $5^{1981} - 5^5 = 5^5(5^{1976} - 1)$.

New Words

Binary (adj): nhị phân
Criteria (n,pl): dấu hiệu
Cube (n): lập phương
Digit (n): chữ số
Divisibility (n): tính chia hết
Multiple (n): bội số
Perfect (adj): hoàn thiện
Perfect square (n): số chính phương
Power (n): lũy thừa
Relation (n): hệ thức
Remainder (n): số dư (trong phép chia)

- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P651–P660: trước ngày 15/12/2022.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P621. (Mức B) Xét ba số nguyên tố có tổng bằng 242. Hỏi, tích của chúng lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải (*dựa theo cách giải của bạn Võ Trần Tiến, lớp* 8^5, *trường THCS Long Bình Điền, tỉnh Tiền Giang*).

Ta biết rằng, tổng của ba số nguyên dương là một số chẵn khi và chỉ khi trong ba số đó, có đúng một số chẵn, hoặc cả ba số đều là số chẵn. Vì thế, do 242 là số chẵn và do chỉ có đúng một số nguyên tố chẵn, là 2, nên trong ba số nguyên tố thỏa mãn điều kiện đề bài, phải có một số là 2, và hai số còn lại là hai số lẻ. Gọi hai số lẻ này là a, b, và ký hiệu T là tích của ba số được xét; ta có

$$a+b=242-2=240, \tag{1}$$

và $T=2ab$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b$. Khi đó, $a+b \leq 2a$; kết hợp với (1), suy ra, $a \geq 120$. Mà a là số nguyên tố và 120 không là số nguyên tố, nên ta có $a > 120$. Do đó, đặt $a=120+m$, ta có m là số nguyên dương lẻ (do a là số lẻ), và

$$b=240-a=240-(120+m)=120-m.$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} T &= 2(120+m)(120-m) \\ &= 2\left(120^2-m^2\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Do đó, T lớn nhất khi m là số nguyên dương lẻ nhỏ nhất, sao cho $120+m$ và $120-m$ cùng là số nguyên tố.

Với $m=1,3,5$, ta có $120+m=121,123,125$, đều là hợp số (do $121 \vdots 11$, $123 \vdots 3$ và $125 \vdots 5$).

Với $m=7$, ta có $120+m=127$, là số nguyên tố; đồng thời, $120-m=113$, cũng là số nguyên tố.

Vì vậy, T lớn nhất khi $m=7$. Do đó, theo (2), giá trị lớn nhất của T bằng

$$2\left(120^2-7^2\right)=28702.$$

Ta có điều phải tìm theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Có thể thấy, ngoài bộ $(2,113,127)$, còn có nhiều bộ ba số nguyên tố có tổng bằng 242; chẳng hạn, các bộ $(2,7,233)$, $(2,11,229)$, $(2,13,227)$, $(2,17,223)$, $\ldots$. Vì thế, câu hỏi đặt ra ở đề bài là có nghĩa.

2. Dựa vào một số ý đã nêu ở Lời giải trên, bạn đọc có thể dễ dàng tìm ra *tất cả* các bộ ba số nguyên tố có tổng bằng 242.

3. Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc, có một lời giải sai (tuy có đáp số đúng), do người giải bài đã khẳng định tích T (theo ký hiệu ở Lời giải trên đây) lớn nhất, khi ba số nguyên tố là 2, 113, 127, mà không có bất cứ lời giải thích hợp lý nào. Bên cạnh lời giải sai này, còn có một lời giải không được coi là lời giải hoàn chỉnh, do người giải bài chưa khẳng định được 113 và 127 là các số nguyên tố thỏa mãn điều kiện đã đặt ra ở lời giải của mình, để tích T là lớn nhất.

Lê Huy

P622. (Mức B) Cho x, y, z là các số thực khác 0 thoả mãn

$$\frac{x^2+y}{y^2}=\frac{y^2+z}{z^2}=\frac{z^2+x}{x^2}=2.$$

Chứng minh rằng, $\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{z^2}+\dfrac{z}{x^2}$ là một số nguyên.

Lời giải ().

Bình luận và Nhận xét

Lê Huy

P623. (Mức B) Mỗi ô của bảng ô vuông kích thước 2023×2023. Ban đầu mỗi ô của bảng ghi số 1. Người ta thực hiện việc ghi xoá và ghi thêm số theo quy tắc sau: mỗi lần chọn ra 3 ô trong cùng một hàng hoặc một cột; mỗi ô được chọn, nếu ô đó đang ghi số N, người ta xoá đi và ghi số $N+1$ vào ô đó.

Hỏi sau một số hữu hạn lần thực hiện ghi và xoá số như vậy, người ta có thể làm cho tất cả các số được ghi trong bảng là các số chẵn được hay không?

Lời giải (*dựa theo Đáp án do BBT Tạp chí cung cấp*).

Xét một hàng tùy ý của bảng đã cho. Lần lượt, từ trái qua phải, đánh số thứ tự các ô vuông con của hàng này, bởi $1, 2, \ldots, 2023$. Ta gọi ô vuông con có số thứ tự i là ô i.

Thực hiện phép thay đổi số đối với các ô vuông con của hàng nêu trên, như sau:

– Với mỗi $k = 1, 2, \ldots, 673$, ở lần thực hiện thứ k, thay đổi số, theo quy tắc của đề bài, ở ba ô $3k-2$, $3k-1$, $3k$;

– Ở lần thực hiện thứ 674, thay đổi số ở ba ô 2019, 2020, 2021;

– Ở lần thực hiện thứ 675, thay đổi số ở ba ô 2019, 2022, 2023.

Khi đó, do ban đầu, ở mỗi ô của hàng đang xét có một số 1, nên sau 673 lần thực hiện đầu tiên, ở mỗi ô, từ ô 1 đến ô 2019, có một số 2, và ở mỗi ô 2020, 2021, 2022, 2023 có một số 1. Do đó, sau lần thực hiện thứ 674, ở ô 2019 có một số 3, ở mỗi ô 2022, 2023 có một số 1, và ở mỗi ô còn lại của hàng có một số 2. Vì vậy, sau lần thực hiện thứ 675, ở ô 2019 có một số 4, và ở mỗi ô còn lại có một số 2.

Như vậy, với quy trình thực hiện nêu trên, sau 675 lần thực hiện liên tiếp phép thay đổi số của đề bài, ta có thể làm cho tất cả các số ở tất cả các ô của một hàng tùy ý đều là số chẵn. Vì thế, nhờ việc thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép thay đổi số của đề bài đối với bảng đã cho, ta có thể nhận được bảng 2023×2023, mà số ở mỗi ô vuông con của nó đều là số chẵn.

Bình luận và Nhận xét

1. Từ lời giải trên dễ thấy, *câu trả lời* cho câu hỏi của bài đã ra *không thay đổi*, nếu thay bảng 2023×2023 bởi bảng $(3n+1) \times (3n+1)$, với n là một số nguyên dương tùy ý lớn hơn 1.

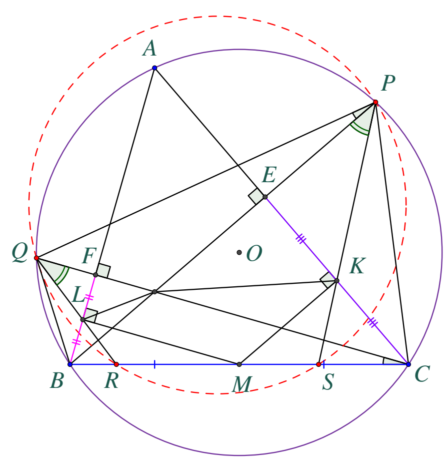
2. Từ điều vừa nêu trên, hiển nhiên xuất hiện câu hỏi: *Nếu ở bài đã ra, thay bảng 2023×2023 bởi bảng 4×4, thì câu trả lời cho câu hỏi đặt ra ở bài toán là gì?* Mời bạn đọc tìm câu trả lời cho câu hỏi vừa nêu.

3. Rất tiếc, cho tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí vẫn chưa nhận được một lời giải nào, từ bạn đọc.

Nguyễn Khắc Minh

P624. (Mức B) Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao xuất phát từ các đỉnh B, C của tam giác, tương ứng, cắt (O) tại các điểm thứ hai P, Q. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, và gọi K, L tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên AC, AB. Các đường thẳng QL, PK cắt đường thẳng BC tương ứng tại R, S. Chứng minh rằng, bốn điểm P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải (*dựa theo đa số lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).



Do tam giác ABC nhọn, nên P thuộc cung AC không chứa B, và Q thuộc cung AB không chứa C, của (O). Do đó, A, P, Q nằm cùng phía đối với đường thẳng BC. (1)

Gọi E và F tương ứng là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC.

Vì cùng vuông góc với AC nên $MK \parallel BE$, và vì cùng vuông góc với AB nên $ML \parallel BF$. Mà M là trung điểm của BC (giả thiết), nên suy ra, K, L tương ứng là trung điểm của CE, BF. (2)

Từ (1) và (2) suy ra, các điểm R, S nằm giữa B và C. (3)

Do (1) nên từ việc xét đường tròn (O), ta có:

$\angle BQF = \angle BQC = \angle BAC = \angle BPC = \angle CPE.$

Vì thế, tam giác vuông BFQ đồng dạng với tam giác vuông CEP. Kết hợp với (2), suy ra

$$\frac{FQ}{EP} = \frac{FB}{EC} = \frac{FL}{EK}.$$

Do đó, tam giác vuông LFQ đồng dạng với tam giác vuông KEP. Suy ra

$$\angle CQR = \angle FQL = \angle EPK = \angle BPS. \quad (4)$$

Do $BCPQ$ là tứ giác nội tiếp nên với lưu ý tới (3), ta có:

$$\angle RCQ = \angle BCQ = \angle BPQ. \quad (5)$$

Từ (4) và (5), với lưu ý tới (3), suy ra

$$\begin{aligned}\angle BRQ &= \angle CQR + \angle RCQ \\ &= \angle BPS + \angle BPQ = \angle SPQ.\end{aligned}$$

Do đó, $RSPQ$ là tứ giác nội tiếp, hay bốn điểm P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Hạ Vũ Anh

P625. (Mức B) Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{b}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 \geq \frac{b^2 - bc + c^2}{a^2 + bc}.$$

Lời giải (*của người chấm bài*).

Do $a, b, c > 0$ nên theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned}(a+c)^2 &= \left(a \cdot 1 + \sqrt{bc} \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}\right)^2 \\ &\leq \left(a^2 + bc\right)\left(\frac{c}{b} + 1\right) \\ &= \frac{\left(a^2+bc\right)(b+c)}{b}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{b^2}{(a+c)^2} \geq \frac{b^3}{\left(a^2+bc\right)(b+c)}. \quad (1)$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$\frac{c^2}{(a+b)^2} \geq \frac{c^3}{\left(a^2+bc\right)(b+c)}. \quad (2)$$

Cộng (1) với (2), vế theo vế, ta được:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{b}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 \\ \geq &\frac{b^3+c^3}{\left(a^2+bc\right)(b+c)} = \frac{b^2 - bc + c^2}{a^2+bc}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức của đề bài được chứng minh.

Bình luận và Nhận xét

1. Dễ thấy, dấu đẳng thức ở bất đẳng thức của đề bài xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

2. Bằng phương pháp của lời giải trên, ta có thể chứng minh được kết quả sau:

"*Với a, b, c là các số thực dương, ta có:*

$i)$ $\dfrac{1}{(a+b)^2} + \dfrac{1}{(a+c)^2} \geq \dfrac{1}{a^2+bc}$;

$ii)$ $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} \geq \dfrac{a}{a^2+bc} + \dfrac{b}{b^2+ca} + \dfrac{c}{c^2+ab}$."

3. Sử dụng bất đẳng thức $i)$ trên đây, ta có thể giải được bài toán bất đẳng thức trong Đề thi chọn đội tuyển Trung Quốc dự thi IMO năm 2004. Bài toán đó như sau:

"*Cho các số thực dương x, y, z, t thỏa mãn $xyzt = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} \geq 1."$$

4. Số lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc không nhiều. Trong số này, rất tiếc, chỉ có hai lời giải đúng; các lời giải còn lại bị sai do người giải bài đã mắc một trong các lỗi cơ bản dưới đây:

– Áp dụng phép chuẩn hóa cho bất đẳng thức không thuần nhất;

– Từ $0 < x \le y$ suy ra $\frac{1}{x} \le \frac{1}{y}$.

Võ Quốc Bá Cẩn

P626. (Mức B) Xét các tam giác vuông mà độ dài các cạnh là các số nguyên dương và một trong các cạnh góc vuông có độ dài là 2021^{22}. Hỏi có bao nhiêu tam giác như vậy?

Lời giải (*của người chấm bài*).

Trong phần trình bày dưới đây, $|X|$ ký hiệu số phần tử của tập hữu hạn X.

Ký hiệu x là độ dài cạnh huyền và y là độ dài cạnh góc vuông còn lại của tam giác vuông thỏa mãn điều kiện đề bài. Khi đó, x, y là các số nguyên dương, $x > y$, và

$$\left(2021^{22}\right)^2 + y^2 = x^2. \qquad (1)$$

Hiển nhiên, số tam giác thỏa mãn điều kiện đề bài chính bằng số cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $x > y$ và (1). (2)

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 2021^{44}. \qquad (3)$$

Do đó, số cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $x > y$ và (1) bằng số cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $x > y$ và (3). (4)

Dưới đây, ta sẽ gọi cặp số nguyên dương thỏa mãn các điều kiện vừa nêu trên là *cặp số thuận*.

Xét một cặp số thuận tùy ý. Vì $x > y > 0$ nên $0 < x - y < x + y$. Do đó

$$(x-y)(x+y) > (x-y)^2;$$

kết hợp với (3), suy ra $x - y < 2021^{22}$. Vì thế, từ (3) ta có $x - y$ là một ước dương nhỏ hơn 2021^{22} của 2021^{44}. Do đó, phép đặt ứng

"cặp số thuận $(x,y) \mapsto d = x - y$"

sẽ xác lập một ánh xạ, gọi là f, từ tập T gồm tất cả các cặp số thuận đến tập S gồm tất cả các ước dương nhỏ hơn 2021^{22} của 2021^{44}.

Với $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ tùy ý thuộc T, và $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)$, dễ thấy, ta có $x_1 - y_1 \neq x_2 - y_2$ (vì nếu ngược lại, $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$, thì theo (3), sẽ có $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$; dẫn đến $x_1 = x_2$ và $y_1 = y_2$, mâu thuẫn với giả thiết $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)$). Do đó, f là một đơn ánh từ T đến S. (5)

Với d tùy ý thuộc S, xét cặp số (x,y), xác định bởi:

$$x = \frac{1}{2}\left(d + \frac{2021^{44}}{d}\right) \text{ và } y = \frac{1}{2}\left(\frac{2021^{44}}{d} - d\right)$$

Ta có

$$(x-y)(x+y) = d \cdot \frac{2021^{44}}{d} = 2021^{44}. \qquad (6)$$

Vì $d \in S$ và 2021^{44} là một số lẻ nên $x, y \in \mathbb{N}^*$, và $x > y$. Từ đây và (6), suy ra $(x,y) \in T$.

Do $x - y = d$ nên d là ảnh của (x,y) qua f. Vì thế, f là một toàn ánh từ T đến S. (7)

Từ (6) và (7) suy ra, f là một song ánh từ T đến S. Do đó, $|T| = |S|$.

Vì ứng với mỗi ước dương nhỏ hơn 2021^{22} của 2021^{44} có đúng một ước dương lớn hơn 2021^{22} của 2021^{44}, ứng với mỗi ước dương lớn hơn 2021^{22} của 2021^{44} có đúng một ước dương nhỏ hơn 2021^{22} của 2021^{44}, và 2021^{22} là một ước dương của 2021^{44}, nên

$$|S| = \frac{N-1}{2},$$

trong đó, N là số ước dương của 2021^{44}.

Vì $2021^{44} = 43^{44} \cdot 47^{44}$ là phân tích chuẩn của 2021^{44}, nên

$$N = (44+1)(44+1) = 2025.$$

Do đó

$$|S| = \frac{2025-1}{2} = 1012.$$

Vì vậy, $|T| = 1012$. Từ đây và (4), (2), ta có số tam giác cần tìm theo yêu cầu đề bài là 1012.

Bình luận và Nhận xét

1. Lập luận "Từ $x - y$ là một ước dương nhỏ hơn 2021^{22} của 2021^{44}, và với mỗi ước dương nhỏ hơn 2021^{22} của 2021^{44} xác định được ít nhất một cặp số thuận (theo "định nghĩa" trong lời giải trên), suy ra, số cặp số thuận bằng số ước dương nhỏ hơn 2021^{22} của 2021^{44}" là một lập luận sai kiến thức cơ bản; vì lập luận đó tương đương với khẳng định "nếu tồn tại một toàn ánh từ tập X đến tập Y thì $|X| = |Y|$".

2. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải sai (do người giải bài đếm "thừa", vì quên rằng 2021622 là một ước dương của 2021^{44}) và một lời giải không hoàn chỉnh (do người giải bài lập luận thiếu chặt chẽ, thiếu chính xác).

Hà Thanh

P627. (Mức A) Xét x, y là hai số thực dương thoả mãn $xy \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{3}{4(x+y)}.$$

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Trần Minh Hoàng, lớp 10T1, trường THPT chuyên Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh*).

Đặt $a = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ và $b = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$; ta có $a, b > 0$, và P được viết lại dưới dạng:

$$P = a + b - \frac{3}{4(x+y)}. \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz cho hai bộ số thực $(x, 1)$ và $(1, y)$, ta được:

$$(x+y)^2 \leq \left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right);$$

suy ra

$$\frac{1}{x+y} \geq \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}} = ab \quad (\text{do } x, y > 0) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có

$$P \leq a + b - \frac{3}{4}ab. \qquad (3)$$

Vì $xy \geq 1$ nên

$$a^2+b^2 = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{x^2+y^2+2}{(x^2+1)(y^2+1)} = \frac{x^2+y^2+2}{(x+y)^2+(xy-1)^2} \leq \frac{(x+y)^2}{(x+y)^2+(xy-1)^2} \leq 1.$$

Do đó, $(a+b)^2 \leq 2ab+1$; suy ra

$$ab \geq \frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{1}{2}.$$

Từ (3) và (4), ta được:

$$P \leq a+b-\frac{3}{8}(a+b)^2+\frac{3}{8} = \frac{25}{24} - \left(a+b-\frac{4}{3}\right)^2 \leq \frac{25}{24}.$$

Hơn nữa, với $x = \frac{9-4\sqrt{2}}{7}$ và $y = \frac{9+4\sqrt{2}}{7}$, ta có $x, y > 0, xy = 1$, và bằng tính toán trực tiếp, dễ dàng tính được $P = \frac{25}{24}$.

Vì vậy, giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{25}{24}$.

Bình luận và Nhận xét

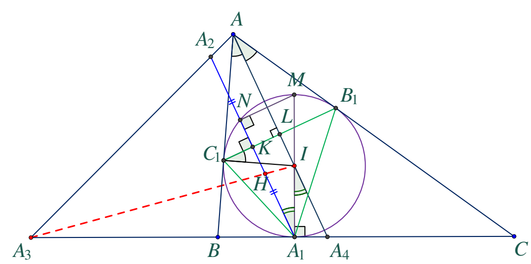
1. Các giá trị x, y ở phần cuối của Lời giải trên được tìm ra từ việc xét khả năng xảy ra dấu đẳng thức ở các bất đẳng thức trong lời giải.

2. Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc, có một lời giải sai, do người giải bài đã nhầm lẫn trong các đánh giá.

Lưu Thị Thanh Hà

P628. (Mức A) Cho tam giác không cân ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi A_1, B_1, C_1 tương ứng là tiếp điểm của BC, CA, AB với (I); A_2, B_2, C_2 lần lượt là đối xứng của A_1, B_1, C_1 tương ứng qua các đường thẳng B_1C_1, C_1A_1 và A_1B_1. Các đường thẳng AA_2, BC cắt nhau tại A_3; BB_2 và CA cắt nhau tại B_3; CC_2 và AB cắt nhau tại C_3. Chứng minh rằng, A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

Lời giải (*của người chấm bài*).



Gọi H là trực tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

Vì tam giác ABC không cân nên nó không là tam giác đều. Suy ra, $A_1B_1C_1$ là tam giác không đều; do đó, $H \not\equiv I$.

Do $A_1H \perp B_1C_1$ và $A_1A_2 \not\parallel B_1C_1$, nên H nằm trên đường thẳng A_1A_2.

Gọi L, A_4 tương ứng là giao điểm của đường thẳng AI và B_1C_1, BC.

Do tam giác ABC không cân tại A, nên I không nằm trên đường thẳng AA_1; do đó, $A_4 \not\equiv A_1$ (1)

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn, $Ai \perp B_1C_1$; suy ra:

– L là trung điểm của B_1C_1, (2)

– $A_1A_2 \parallel A_4A$ (do cùng vuông góc với B_1C_1 và (1)). (3)

Từ (2), do H, I tương ứng là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$, suy ra

$$A_1H = 2IL. \quad (4)$$

Do $IC_1 \perp AB, IA \perp B_1C_2$, và $\angle IAC_1, \angle IC_1L$ là các góc nhọn, nên $\angle IAC_1 = \angle IC_1L]$. Do đó, tam giác vuông (tại C_1) AC_1I đồng dạng với tam giác vuông (tại L) C_1LI. Suy ra

$$\frac{AI}{C_1I} = \frac{C_1I}{LI}. \quad (5)$$

Gọi M là điểm đối xứng với A_1 qua I. Từ (5) và (4), ta có:

$$\frac{AI}{C_1I} = \frac{A_1M}{A_1H} \quad (6)$$

Gọi K là giao điểm của A_1A_2 và B_1C_1; gọi N là giao điểm thứ hai (khác A_1) của A_1A_2 và đường tròn (I).

Do A_1, A_2 đối xứng với nhau qua B_1C_1 nên K là trung điểm A_1A_2; mặt khác, do H là trực tâm tam giác $A_1B_1C_1$, và $HN \perp B_1C_1$, nên K là trung điểm HN. Suy ra, $A_1H = A_2N$; do đó, $A_1N = A_2H$. (7)

Từ (3) suy ra $\angle MA_1N = \angle A_4IA_1$; do đó, tam giác vuông (tại A_1) IA_1A_4 đồng dạng với tam giác vuông (tại N) A_1NM. Suy ra

$$\frac{IA_1}{A_1N} = \frac{IA_4}{A_1M}. \quad (8)$$

Nhân (6) với (8), vế theo vế, ta được

$$\frac{AI}{A_1N} = \frac{IA_4}{A_1H};$$

suy ra, $\frac{AI}{IA_4} = \frac{A_1N}{A_1H}$. Kết hợp với (7), ta được:

$$\frac{AI}{IA_4} = \frac{A_2H}{HA_1}.$$

Từ đây và (3), theo định lý Thales, suy ra, ba điểm A_3, H, I thẳng hàng; nói một cách khác, A_3 nằm trên đường thẳng HI.

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được, các điểm B_3, C_3 nằm trên đường thẳng HI. Vì thế, ba điểm A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

Bình luận và Nhận xét

1. Với giả thiết tam giác ABC cân, chẳng hạn tại A, *nhưng không đều*, ta có $A_3 \equiv A_4$ và bốn điểm đôi một phân biệt A, H, I, A_1 thẳng hàng. Do vậy, trong trường hợp này, A_3 vẫn nằm trên đường thẳng HI. Vì thế, từ lời giải trên dễ thấy, khẳng định của bài ra vẫn đúng, khi thay giả thiết "không cân" bởi giả thiết ("nhẹ nhàng" hơn) "*không đều*".

2. Bài đã ra (với việc thay giả thiết "không cân" bởi giả thiết "không đều") là một kết quả hay, thú vị về đường thẳng Euler của một tam giác. Kết quả này đã được Lev Emelyanov công bố trong bài báo "On the Intercepts of the OI – Line", đăng trên Forum Geometricorum, Vol. 4, năm 2004 (trang 81 – 84). Forum Geometricorum là một Tạp chí về Hình học Euclid cổ điển và các lĩnh vực liên quan, được ấn hành bởi Đại học Atlantic Florida. Bạn đọc có thể tìm đọc Tạp chí này online, tại trang web http://forumgeom.fau.edu.

3. Tất cả lời giải Tạp chí nhận được, từ bạn đọc, đều là lời giải đúng.

Hạ Vũ Anh

P629. (Mức A) Cho n là một số nguyên dương có tính chất: không tồn tại các số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} +$

$\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng, tồn tại các số nguyên không âm u, v sao cho: $n = u^2 + v^2$.

Lời giải (*phỏng theo lời giải của bạn Hồ Trần Khánh Linh, lớp 12 Toán 2, trường THPT chuyên ĐHSP, ĐHSP Hà Nội*).

Trong Lời giải này, ta quy ước gọi một số nguyên dương là *số tốt*, nếu nó biểu diễn được dưới dạng tổng bình phương của hai số nguyên không âm.

Trước hết, dễ thấy $n = 1$ là một số nguyên dương có tính chất đã nêu trong đề bài, vì $\frac{4}{1} = 4$ và với mọi a, b, c nguyên dương, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$.

Do $1 = 0^2 + 1^2$, nên $n = 1$ là một số tốt. (1)

Xét $n > 1$.

Ta có hai Nhận xét sau:

Nhận xét 1 : *n không thể là số chẵn*, vì nếu ngược lại, n là số chẵn, thì chọn $a = \frac{n}{2}$, $b = c = n$, ta sẽ có $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ và

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{4}{n}.$$

Nhận xét 2 : *n không thể có ước nguyên tố dạng $4k+3$, $k \in \mathbb{N}$*, vì nếu ngược lại, n có ước nguyên tố p có dạng đó, thì chọn $a = \frac{n(p+1)}{4}$, $b = c = \frac{n(p+1)}{2p}$, ta sẽ có $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ và

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{n(p+1)} + \frac{2p}{n(p+1)} + \frac{2p}{n(p+1)} = \frac{4}{n}.$$

Từ hai Nhận xét trên suy ra, n chỉ có ước nguyên tố dạng $4k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$ (2)

Theo định lý Fermat về tổng hai số chính phương, mọi số nguyên tố có dạng $4k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$ đều là số tốt. (3)

Do

$$\left(x^2+y^2\right)\left(s^2+t^2\right) = (xs+yt)^2 + (xt-ys)^2,$$

nên tích của hai số tốt là một số tốt. (4)

Từ (2), (3) và (4) suy ra, mọi số $n > 1$ đều là số tốt. (5)

Từ (1) và (5) hiển nhiên có: mọi số n được cho ở đề bài đều là số tốt; nghĩa là, tồn tại các số nguyên không âm u, v sao cho $n = u^2 + v^2$.

Bình luận và Nhận xét

1. Lời giải trên cho thấy, bài đã ra là một khai thác nhẹ nhàng, thú vị từ định lý Fermat về tổng của hai số chính phương.

2. Để tiện cho việc theo dõi của bạn đọc, xin nhắc lại định lý vừa nêu trên.

Định lý Fermat về tổng của hai số chính phương. *Số nguyên tố lẻ p biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số chính phương khi và chỉ khi $p \equiv 1 \pmod{4}$.*

Vì một số chính phương chỉ có số dư là 0 hoặc 1 trong phép chia cho 4, nên điều kiện cần (chỉ khi) nêu trong định lý trên là hiển nhiên.

Đối với điều kiện đủ (khi), có nhiều cách để chứng minh; một trong các cách đó, là chứng minh theo lược đồ sau (được Euler đưa ra vào năm 1747):

– Quy ước gọi một số nguyên dương là *số tốt*, nếu nó biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số chính phương.

– Bằng phương pháp phản chứng, chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. *Nếu a, b là hai số nguyên dương, nguyên tố cùng nhau, thì mọi ước dương lớn hơn 1 của $a^2 + b^2$ đều là số tốt.*

– Xét số nguyên tố p tùy ý có dạng $p = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Theo định lý nhỏ Fermat, với mọi $m \in \{1, 2, \ldots, 4k\}$, $m^{4k} \equiv 1 \pmod{p}$.

Do đó, với mỗi $m \in \{2, \ldots, 4k\}$, ta có:

$$\begin{aligned} & m^{4k} - (m-1)^{4k} \\ &= \left(m^{2k} - (m-1)^{2k}\right)\left(m^{2k} + (m-1)^{2k}\right) \\ &\equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Từ đó, do p là số nguyên tố, suy ra

$$p \mid \left(m^{2k} - (m-1)^{2k}\right),$$

$$\text{hoặc } \; p \mid \left(m^{2k} + (m-1)^{2k}\right).$$

Dễ thấy, không thể xảy ra trường hợp
$$p \mid \left(m^{2k} - (m-1)^{2k}\right)$$
với mọi $m \in \{2, \ldots, 4k\}$, vì nếu như thế thì phương trình
$$x^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$
sẽ có $4k$ nghiệm (là $1, 2, \ldots, 4k$), trái với định lý Lagrange.

Vì vậy, tồn tại $m \in \{2, \ldots, 4k\}$, sao cho
$$p \mid \left(m^{2k} + (m-1)^{2k}\right).$$
Từ đó, do $(m, m-1) = 1$ nên theo Bổ đề trên, p là một số tốt; nghĩa là, p biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số chính phương.

(Về định lý Lagrange, bạn đọc có thể tham khảo trong Tạp chí Pi, số 10 năm 2022, trang ... .)

3. Một số kết quả thú vị, có liên quan gần với định lý Fermat:

Với p là một số nguyên tố, ta có:

◇ $p = x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow p \equiv 1, 3 \pmod{8}$;

◇ $p = x^2 + 3y^2 \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{3}$;

◇ $p = x^2 + 5y^2 \Leftrightarrow p \equiv 1, 9 \pmod{20}$;

◇ $2p = x^2 + 5y^2 \Leftrightarrow p \equiv 3, 7 \pmod{20}$.

(Trong các kết quả trên, x, y là các số tự nhiên.)

Các kết quả 1, 2 (theo thứ tự liệt kê) do Fermat tìm ra; các kết quả 3, 4 do Euler dự đoán, và sau đó, được Lagrange chứng minh.

4. Nếu bỏ qua các lỗi "chính tả" thì trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, chỉ có lời giải của bạn *Hồ Trần Khánh Linh* được coi là hoàn chỉnh. Tất cả các lời giải còn lại hoặc không hoàn chỉnh (do người giải bài thiếu xét trường hợp $n = 1$), hoặc sai (do người giải bài ngộ nhận rằng một số nguyên tố chỉ hoặc có dạng $4k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$, hoặc có dạng $4k + 3, k \in \mathbb{N}$).

Lưu Thị Thanh Hà

P630. (Mức A) Bạn Pi ghi lên bảng một số 1; sau đó, thực hiện việc xoá và ghi thêm số, theo quy tắc: Mỗi lần, xoá một số N tuỳ ý đang có trên bảng, rồi ghi thêm lên bảng số $N + 1$, hoặc số $3N$.

Pi thực hiện việc xoá và ghi thêm số, để trên bảng có một số chia hết cho 47, và Pi dừng việc xoá–ghi thêm số ngay sau khi ghi được một số như vậy.

Mỗi lần xoá số N và ghi số $3N$, Pi được nhận một viên kẹo xốp, còn nếu ghi số $N + 1$ thì được nhận một viên kẹo dẻo. Vì không thích kẹo dẻo, nên trong quá trình xoá-ghi thêm số, Pi luôn cố gắng để được nhận kẹo xốp. Hỏi, Pi phải nhận ít nhất bao nhiêu viên kẹo dẻo?

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Trần Minh Hoàng, lớp 10T1, trường THPT chuyên Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh*).

Gọi mỗi lần xóa số N và ghi số $3N$ là một "*bước nhân*", mỗi lần lần xóa số N và ghi số $N + 1$ là một "*bước cộng*".

Mỗi quá trình thực hiện việc xóa và ghi thêm số, kể từ lúc bắt đầu thực hiện đến khi dừng lại, được gọi tắt là một *quá trình*.

Do ban đầu, ở trên bảng chỉ có một số, nên từ quy tắc xóa và ghi số suy ra, tại mọi thời điểm, ở trên bảng chỉ có đúng một số. (1)

Tiếp theo, nhận thấy, $47 \mid 3N$ khi và chỉ khi $47 \mid N$ (do $(3, 47) = 1$). Do đó, bước cuối cùng của mọi quá trình đều phải là một bước cộng. (2)

Vì vậy, gọi k là số bước cộng của một quá trình tùy ý, ta có $k \geq 1$. (3)

Giả sử tồn tại một quá trình có $k = 1$, và giả sử quá trình này gồm $m + 1$ bước ($m \in \mathbb{N}^*$). Khi đó, theo (1) và (2), số được ghi lên bảng ở bước cuối cùng của quá trình là $3^m + 1$. Vì thế
$$47 \mid 3^m + 1; \tag{4}$$
suy ra, $47 \mid 3^{2m} - 1$. Do đó, ký hiệu h là cấp của 3 modulo 7, ta có $h \mid 2m$. (5)

Vì
$$\begin{aligned} 3^{23} = \left(3^5\right)^4 \cdot 3^3 &\equiv 8^4 \cdot 27 \equiv 17^2 \cdot 27 \\ &\equiv 7 \cdot 27 \equiv 1 \pmod{47}, \end{aligned}$$
nên $h \mid 23$. Mà 23 là số nguyên tố, và $3^1 \not\equiv$

$1 \pmod{47}$, nên $h = 23$. Vì thế, theo (5), $23|2m$; do đó, $23|m$ (vì $(2, 23) = 1$). Suy ra, $47|3^m - 1$; kết hợp với (4), ta được

$$2 = (3^m + 1) - (3^m - 1) \equiv 0 \pmod{47},$$

là điều vô lý.

Vì vậy, không tồn tại quá trình nào có $k = 1$. Do đó, từ (3) suy ra, $k \geq 2$. (6)

Xét việc thực hiện phép xóa và ghi thêm số, như sau:

– Bảy lần đầu tiên: thực hiện bước nhân;

– Lần thứ 8: thực hiện bước cộng;

– Hai lần tiếp theo: thực hiện bước nhân;

– Lần thứ 11: thực hiện bước cộng.

Do $1 \not\equiv 0 \pmod{47}$ và $(3, 47) = 1$, nên tất cả các số được ghi lên bảng ở bảy lần đầu tiên đều không chia hết cho 47.

Số được ghi ở lần thứ 8 là $3^7 + 1 \not\equiv 0 \pmod{47}$, nên các số được ghi ở hai lần tiếp theo cũng không chia hết cho 47.

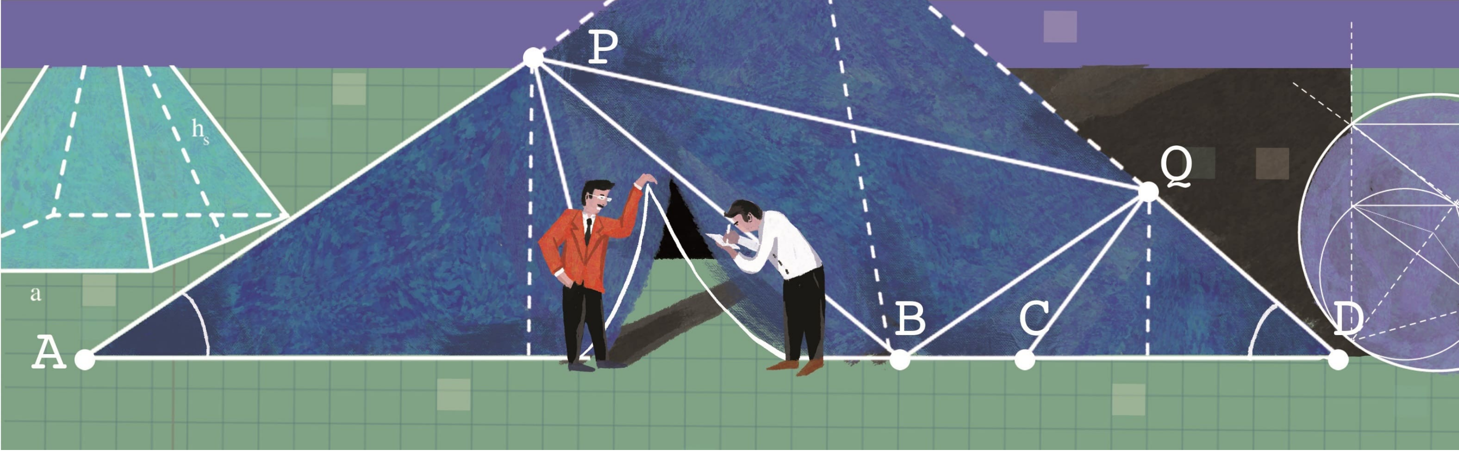
Số được ghi ở lần thứ 11 là $\left(3^7 + 1\right) \cdot 3^2 + 1 \equiv 26 \cdot 9 + 1 \equiv 0 \pmod{47}$.

Vì vậy, việc thực hiện phép xóa và ghi thêm số như trên cho ta một quá trình, với số bước cộng bằng 2. Điều này và (6) cho thấy, giá trị nhỏ nhất của k bằng 2. Nói một cách khác, Pi phải nhận ít nhất 2 viên kẹo dẻo.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được, từ bạn đọc, đều là lời giải đúng.

Nguyễn Khắc Minh



TIẾP NỐI BÀI VIẾT VỀ BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

NGUYỄN TUẤN ANH[1]

Giới thiệu

Trong tạp chí Pi tháng 10 năm 2021, tác giả Trần Nam Dũng giới thiệu đến bất đẳng thức Bernoulli, ở đó tác giả có đề cập đến việc bất đẳng thức Cauchy (hay còn gọi là bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân) tương đương với bất đẳng thức Bernoulli. Bài viết này sẽ tổng hợp nhiều hơn các bất đẳng thức tương đương như vậy cũng như một số chứng minh đặc sắc có liên quan. Bài viết kết thúc với một số bài toán xuất hiện trong các kỳ thi Olympic mà ở đó bất đẳng thức Bernoulli có vai trò then chốt trong lời giải.

1. Một số bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức Bernoulli

Nhắc lại rằng bất đẳng thức Bernoulli cho số mũ thực được phát biểu như sau (xem [1, Định lý 2]: Cho số thực $x > -1$ và số thực α. Khi đó,

(1) Với $0 < \alpha < 1$, ta có $(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x$.

(2) Với $\alpha > 1$ hoặc $\alpha < 0$, ta có $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Chúng ta sẽ bắt đầu với kết quả sau đây.

Định lý 1. *Các mệnh đề sau là tương đương:*

(a) *Với $x > -1$ và $\alpha \in (0;1)$ thì $(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x$.*

(b) *Với mọi số thực dương α, x, y, trong đó $\alpha \in (0;1)$, ta có $x^{\alpha}y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha)y$.*

(c) *Hàm số $y = \ln x$ là hàm lõm trên $(0;+\infty)$. (Ở đây, ta nói một hàm số f trên khoảng I là lõm nếu với mọi $x, y \in I$ và $\alpha \in (0,1)$ thì $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$.[2])*

(d) *(Bất đẳng thức Young.) Với x, y, p, q là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ thì*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Chứng minh.

• $(a) \Rightarrow (b)$. Thay $x+1$ bằng x vào bất đẳng thức (a) ta có $x^{\alpha} \leq 1+\alpha(x-1)$, hay

$$x^{\alpha} \leq (1-\alpha)+\alpha x$$

với mọi $x > 0, \alpha \in (0;1)$. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức vừa nhận được với số thực dương y ta được:

$$x^{\alpha}y \leq (1-\alpha)y + \alpha xy.$$

(Bất đẳng thức này đúng với mọi $x > 0, y > 0, \alpha \in (0;1)$.) Thay x bằng $\frac{x}{y}$ vào bất đẳng

---

[1] *THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp.*

[2] *Lưu ý rằng định nghĩa này khác với một số tài liệu, trong đó hàm số như vậy được gọi là lồi!*

thức này, ta thu được:

$$x^{\alpha}y^{1-\alpha} \leq (1-\alpha)y + \alpha x,$$

nghĩa là bất đẳng thức (b) là đúng.

• $(b) \Rightarrow (c)$ Sử dụng định nghĩa của hàm lõm.

• $(c) \Rightarrow (d)$. Vì $y = \ln x$ là hàm lõm nên:

$$\ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln x^p + \frac{1}{q}\ln x^q,$$

do đó

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy,$$

hay nói cách khác, (d) đúng.

• $(d) \Rightarrow (a)$. Xét $\alpha \in (0;1)$. Khi đó tồn tại số thực $p > 1$ sao cho $\frac{1}{p} = \alpha$. Đặt $1 - \alpha = \frac{1}{q}$ (như vậy $q > 1$). Thay x, y tương ứng bởi x^p, y^q vào bất đẳng thức Young ta nhận được

$$x^{\alpha}y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha)y.$$

Bất đẳng thức này đúng với mọi số thực $x, y > 0, \alpha \in (0;1)$. Đặc biệt, với $y = 1$ ta được:

$$x^{\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha),$$

với mọi $x, \alpha \in (0;1)$, hay nói cách khác:

$$x^{\alpha} \leq 1 + \alpha(x-1).$$

Thay x bằng $x+1$, ta thu được:

$$(x+1)^{\alpha} \leq 1 + \alpha x$$

với mọi $x > -1, \alpha \in (0;1)$. Vậy (a) đúng.

Tóm lại $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$.

Tiếp theo, tác giả xin trình bày một mạch tương đương dài hơn giữa nhiều bất đẳng thức quen thuộc với bất đẳng thức Bernoulli.

Định lý 2. *Các mệnh đề sau là tương đương:*

(T_1): *Với* $x > -1, \alpha \geq 1$ *thì* $(1+x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x$.

(T_2): *Với* $x > -1, \alpha \leq 0$ *thì* $(1+x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x$.

(T_3): *Với* $x > -1, 0 \leq \alpha \leq 1$ *thì* $(1+x)^{\alpha} \leq 1 + \alpha x$.

(T_4): *Với mọi số nguyên dương* n *và các số thực* $a_i, q_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$, $\alpha \geq 1$ *thỏa mãn* $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ *thì*

$$\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^{\alpha} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i\right)^{\alpha}.$$

(T_5): *Với mọi số nguyên dương* n *và các số thực*$a_i, q_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$, $\alpha \geq 1$ *thỏa mãn* $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ *thì*

$$\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^{\alpha} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i\right)^{\alpha}.$$

(T_6): *Với mọi số nguyên dương* n *và các số thực dương* a_i, p_i $(1 \leq i \leq n)$, *định nghĩa* M_r $(r > 0)$ *như sau:*

$$M_r = \begin{cases} \left(\dfrac{p_1a_1^r + p_2a_2^r + \ldots + p_na_n^r}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right)^{\frac{1}{r}}, r \neq 0 \\ \left(a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}}, r = 0 \end{cases}$$

Khi đó, với mọi $r < s$ *thì*

$$M_r \leq M_s.$$

(T_7): *(Bất đẳng thức Holder.) Với mọi số nguyên dương* n *và các số thực dương* a_i, b_i $(1 \leq i \leq n)$, p, q *thỏa mãn* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Khi đó:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(T_8): *(Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz.) Với mọi số nguyên dương* n *và các số thực dương* a_i, b_i $(1 \leq i \leq n)$ *thì*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

(T_9): *Với mọi số thực dương* a, b,

$$\frac{1}{2}\ln a + \frac{1}{2}\ln b \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

(T_{10}): *Với mọi số nguyên dương* n *và các số* *thực dương* a_i, p_i *(*$1 \le i \le n$*) thì*

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_i \ln a_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \le \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\right).$$

(T_{11})*: Với mọi số nguyên dương* n *và các số thực dương* a_i, p_i *(*$1 \le i \le n$*) thì*

$$\prod_{i=1}^n a_i^{\frac{p_i}{\sum_{k=1}^n p_k}} \le \frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i}{\sum_{k=1}^n p_k}.$$

(T_{12})*: Với mọi số nguyên dương* m, n *và các số thực dương* α_j, β_i $(1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$ *thỏa mãn* $\sum_{j=1}^n \alpha_j = \sum_{i=1}^m \beta_i = 1$*, định nghĩa*

$$G_i = a_{i,1}^{\alpha_1} a_{i,2}^{\alpha_2} \cdots a_{i,n}^{\alpha_n}$$

và $A_j = \beta_1 a_{1,j} + \beta_2 a_{2,j} + \cdots + \beta_m a_{m,j}$,

(với $i = 1, 2, \ldots, m$*;* $j = 1, 2, \ldots, n$ *và* $a_{k,l} > 0$*). Khi đó:*

$$\sum_{i=1}^m \beta_i G_i \le \prod_{j=1}^n A_j^{\alpha_j}.$$

(T_{13})*: Với mọi số nguyên dương* m, n *và* $a_{i,j}$*, (*$1 \le i \le m, 1 \le j \le n$*),* α_k*, (*$1 \le k \le n$*) là các số thực dương thỏa mãn* $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$*, ta có*

$$\sum_{i=1}^m a_{i,1}^{\alpha_1} a_{i,2}^{\alpha_2} \cdots a_{i,n}^{\alpha_n} \le \prod_{j=1}^n \left(a_{1,j} + a_{2,j} + \cdots + a_{m,j}\right)^{\alpha_j}.$$

(T_{14})*: Với mọi số nguyên* $m, n \ge 2$ *và các số thực dương* $a_{i,j}$ *(*$1 \le i \le m, 1 \le j \le n$*), đặt*

$$A_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_{i,j}, G_i = \left(\prod_{j=1}^n a_{i,j}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$(1 \le j \le n, 1 \le i \le m).$$

Khi đó,

$$\sqrt[n]{A_1 A_2 \cdots A_n} \ge \frac{G_1 + G_2 + \cdots + G_m}{m}.$$

(T_{15})*: (Bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân.) Với mọi số nguyên dương* n *và các số thực dương* a_i *(*$1 \le i \le n$*), ta có:*

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = G_n.$$

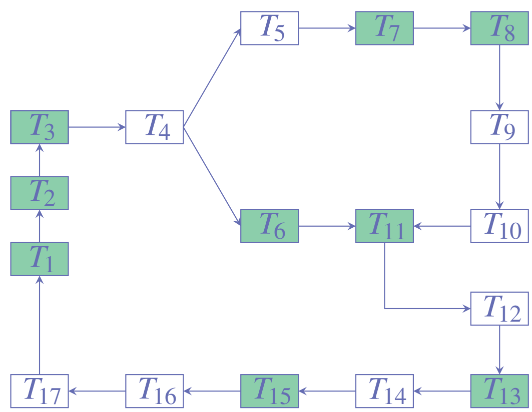
(T_{16})*: Với mọi số thực dương* a, b *là các số thực và số hữu tỷ* $r \in (0; 1)$*, ta có:*

$$a^r b^{1-r} \le ra + (1-r)b.$$

(T_{17})*: Với mọi số thực* $x \ge 0$ *và số nguyên dương* n*,*

$$x - 1 \ge n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Chứng minh. Sơ đồ chứng minh:



(Các mệnh đề T_i *được tô màu xanh là các bất đẳng thức cổ điển, thường được sử dụng.)*

Bạn đọc có thể thử sức mình bằng cách tự chứng minh các mũi tên $(T_i) \Rightarrow (T_j)$ trong sơ đồ trên hoặc tham khảo bài viết [2]. (Bạn đọc sẽ tìm thấy trong tài liệu đã dẫn một mạch dài hơn của các bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức Bernoulli). Dưới đây, để minh họa, người viết chỉ điểm qua chứng minh mũi tên $(T_{17}) \Rightarrow (T_1)$. Xét số nguyên dương n và số thực $x > 0$. Ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{x^n - 1}{n} \\
=&\frac{x-1}{n(n+1)}\left(nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - 1\right) \\
=&\frac{(x-1)^2}{n(n+1)}\left[x^{n-1} + \left(x^{n-1} + x^{n-2}\right) + \ldots \right. \\
&\left. + \left(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1\right)\right].
\end{aligned}$$

Hệ thức trên đây, kết hợp với lập luận bằng quy nạp, dẫn đến

$$\frac{x^m-1}{m} \geq \frac{x^n-1}{n},$$

với mọi số nguyên dương $m \geq n$. Thay x^n bằng x và $r = \frac{n}{m}$ vào bất đẳng thức vừa thu được, ta có

$$x^r - 1 \geq r(x-1).$$

Bất đẳng thức này đúng với mọi số hữu tỷ $r \geq 1$ và số thực $x > 0$. Lại vì tập các số hữu tỷ lớn hơn hoặc bằng 1 trù mật trong tập các số thực lớn hơn hoặc bằng 1 nên ta có thể kết luận rằng

$$x^\alpha - 1 \geq \alpha(x-1)$$

với mọi số thực $\alpha \geq 1, x > 0$. Thay x bởi $x+1$ ta có bất đẳng thức (T_1).

2. Nét đẹp qua phép chứng minh

Một lời giải hay, đáng học hỏi chưa hẳn là một lời giải ngắn gọn. Bởi vì điểm hay có thể đến từ ý tưởng hoặc từ kỹ thuật xử lý bài toán (kéo theo là lời giải có thể tương đối dài hoặc không đơn giản). Trong mục này, mời bạn đọc đến với những lời giải như vậy.

Ví dụ 1. *Ta nhắc lại hai bất đẳng thức sau:*

• *(AM – GM) Với mọi số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ta có*

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

• *(Bất đẳng thức Bernoulli cơ bản) Với mọi số tự nhiên n và số thực dương x, ta có*

$$x^n \geq 1 + n(x-1).$$

a) Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, hãy chứng minh bất đẳng thức Bernoulli cơ bản.

b) Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli cơ bản, hãy chứng minh bất đẳng thức AM – GM.

Lời giải. a) Với $n = 0, 1$ thì bất đẳng thức Bernoulli cơ bản là hiển nhiên vì nó trở thành đẳng thức. Giả sử $n \geq 2$. Ta xét hai trường hợp

• Với $0 < x \leq 1 - \frac{1}{n}$ thì bất đẳng thức là hiển nhiên do vế trái dương trong khi vế phải không dương.

• Với $x > 1 - \frac{1}{n}$, áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\begin{aligned} x^n &= \left\{ \frac{[1+n(x-1)] + \overbrace{1+\ldots+1}^{n-1}}{n} \right\}^n \\ &\geq [1+n(x-1)]\cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1+n(x-1). \end{aligned}$$

Ta chứng minh xong bất đẳng thức Bernoulli cơ bản.

b) Đặt

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

trong đó $a_1, a_2, \ldots$ là các số thực dương. Trước hết, với $n = 1$ thì bất đẳng thức cần chứng minh là tầm thường Xét trường hợp $n \geq 2$. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n &\geq 1 + n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right) \\ &= \frac{A_{n-1} + nA_n - nA_{n-1}}{A_{n-1}} \\ &= \frac{nA_n - (n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{a_n}{A_{n-1}}. \end{aligned}$$

Hay nói cách khác,

$$A_n^n \geq a_n \cdot A_{n-1}^{n-1}.$$

Áp dụng liên tục các bất đẳng thức như vậy, ta thu được

$$\begin{aligned} A_n^n &\geq a_n \cdot A_{n-1}^{n-1} \geq a_n \cdot a_{n-1} \cdot A_{n-2}^{n-2} \\ &\geq \cdots \geq a_n \cdot a_{n-1} \cdots a_3 \cdot A_2^2 \\ &\geq a_n \cdot a_{n-1} \cdots a_3 \cdot a_2 \cdot a_1. \end{aligned}$$

Thế nhưng bất đẳng thức $A_n^n \geq a_1a_2\cdots a_n$ tương đương với $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ nên bất đẳng thức AM – GM được chứng minh.

Ví dụ 2. *Cho số thực $x > -1$ và số nguyên k. Chứng minh rằng $(1+x)^k \geq 1+kx$.*

Lưu ý: trong ví dụ trên, số nguyên k có thể âm.

Với mỗi $x > -1$ cố định, ta xét hàm $\mathscr{B}$ sau đây:

$$\begin{aligned}\mathscr{B} &: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\\ &k \mapsto (1+x)^{-k}(1+kx).\end{aligned}$$

Có thể thấy rằng $\mathscr{B}(0) = \mathscr{B}(1) = 1$. Ta sẽ chứng minh 1 cũng chính là giá trị lớn nhất của $\mathscr{B}$, từ đó ta thu được kết luận của bài toán. Ta có

$$\begin{aligned}&\mathscr{B}(k) - \mathscr{B}(k-1)\\ &= \frac{1+kx}{(1+x)^k} - \frac{1+(k-1)x}{(1+x)^{k-1}}\\ &= \frac{1+kx-[1+(k-1)x](1+x)}{(1+x)^k} = \frac{(1-k)x^2}{(1+x)^k}.\end{aligned}$$

Vì thế $\mathscr{B}(k) - \mathscr{B}(k-1) \geq 0$ nếu $k \leq 0$ và $\mathscr{B}(k) - \mathscr{B}(k-1) \leq 0$ nếu $k \geq 2$. Ta suy ra giá trị lớn nhất của $\mathscr{B}$ là 1 và do đó chứng minh hoàn tất.

Ví dụ 3. (Bất đẳng thức Bernoulli cho số mũ nằm trong khoảng $(0;1)$). *Cho các số thực $x > -1$ và $0 < \alpha < 1$. Chứng minh rằng $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$.*

Lời giải. Ta xét tập hợp T sau đây:

$$\begin{aligned}T = \{&\alpha \in (0;1) : \forall\, y > -1\\ &\text{thì } (1+y)^\alpha \leq 1+\alpha y\}.\end{aligned}$$

Trước tiên, ta sẽ chứng minh T có ba tính chất sau:

(1) $\frac{1}{2} \in T$.

(2) Nếu $\alpha \in T$ thì $1-\alpha \in T$.

(3) Nếu $\alpha, \beta \in T$ thì $\alpha\beta \in T$. Hơn nữa, nếu $\alpha+\beta < 1$ thì $\alpha+\beta \in T$.

Thật vậy,

(1) Trước hết ta thấy rằng $\left(1+\frac{y}{2}\right)^2 = 1+y+\frac{y^2}{4} \geq 1+y$, cho nên $1+\frac{y}{2} \geq (1+y)^{\frac{1}{2}}$.

Hay nói cách khác $\frac{1}{2} \in T$.

(2) Giả sử $\alpha \in T$. Với mọi $y > -1$ ta có

$$\frac{-y}{1+y} = -1 + \frac{1}{1+y} > -1.$$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned}(1+y)^{1-\alpha} &= (1+y)\left(1+\frac{-y}{1+y}\right)^\alpha\\ &\leq (1+y)\left(1+\frac{-\alpha y}{1+y}\right)\\ &= 1+(1-\alpha)y.\end{aligned}$$

Như vậy $1-\alpha \in T$.

(3) Giả sử $\alpha, \beta \in T$ với $0 < \alpha < \beta < 1$. Khi đó:

$$(1+y)^{\alpha\beta} = [(1+y)^\alpha]^\beta \leq (1+\alpha y)^\beta \leq 1+\alpha\beta y.$$

Tức là $\alpha\beta \in T$. Hơn nữa,

$$\begin{aligned}&(1+y)^{\alpha+\beta}\\ &= (1+y)^\alpha(1+y)^\beta \leq (1+\alpha y)(1+\beta y)\\ &= 1+(\alpha+\beta)y+(\alpha\beta)y^2\\ &= \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}y\right)^2 + \left[\alpha\beta - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right]y^2\\ &\leq \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}y\right)^2.\end{aligned}$$

Tức là

$$(1+y)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \leq 1+\frac{\alpha+\beta}{2}y.$$

Như vậy ta được $\frac{\alpha+\beta}{2} \in T$.

Tiếp theo, bằng phương pháp quy nạp theo n, và sử dụng các tính chất (1) và (3), ta chứng minh được rằng:

$$A = \left\{\frac{m}{2^n} : m, n \in \mathbb{N}^*, m < 2^n\right\} \subseteq T.$$

Cuối cùng, vì A trù mật trong $(0;1)$ nên T cũng trù mật trong $(0;1)$. Từ đây, bằng cách lập luận dựa vào tính chất liên tục, ta thấy rằng $T = (0,1)$. (Cụ thể, với một dãy số $\alpha_i \in T$ mà $\lim \alpha_i = \alpha$ thì $\alpha \in T$). Suy ra với mọi số thực $0<\alpha<1$ và mọi số thực $x>-1$ thì

$$(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x.$$

Chứng minh hoàn tất.

3. Bất đẳng thức Bernoulli qua một số bài toán Olympic

Bất đẳng thức Bernoulli khi áp dụng cũng đòi hỏi một số kỹ thuật nhất định. Mời bạn đọc khám phá chúng qua các bài toán sau.

Bài tập 1 (Olympic New Zealand năm 2019). *Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:*

$$a^a+b^b+c^c \geq 3.$$

Bài tập 2. (Olympic Nhật Bản năm 2005). *Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:*

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1.$$

Bài tập 3. (Dự tuyển kỳ thi IMO năm 2004). *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a} \leq \frac{1}{abc}.$$

Bài tập 4. (Olympic Bắc Trung Quốc năm 2009). *Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{x^{2009}-2008(x-1)}{y+z}+\frac{y^{2009}-2008(y-1)}{x+z} +\frac{z^{2009}-2008(z-1)}{x+y} \geq \frac{1}{2}(x+y+z).$$

Bài tập 5. (Kỳ thi tuyển chọn đội tuyển Đài Loan năm 2016).

Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=(a+b+c)^{2016}\left(\frac{1}{a^{2016}+b^{2016}} +\frac{1}{b^{2016}+c^{2016}}+\frac{1}{c^{2016}+a^{2016}}.\right)$$

Bài tập 6. (IMO Shortlist năm 2001). *Cho $\{a_n\}$ là một dãy các số thực dương. Chứng minh rằng có vô số n sao cho:*

$$1+a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2}.$$

Bài tập 7. (IMO Shortlist năm 2017). *Cho $a_1,a_2,\cdots,a_n,k,M$ là các số nguyên dương sao cho:*

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=k \text{ và } a_1a_2\cdots a_n=M.$$

Chứng minh rằng nếu $M>1$ thì $M(x+1)^k<(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$ với mọi $x>0$.

Lời kết

Việc nhìn lại các bất đẳng thức và tìm ra sợi dây liên kết giữa chúng cũng là một cách học bất đẳng thức thú vị. Chắc hẳn những sợi dây như vậy sẽ còn rất nhiều, chúng đang chờ bạn đọc khám phá. Cuối cùng, người viết gửi lời cảm ơn đến tác giả Trần Nam Dũng đã có bài viết gợi mở cho bài viết này, và đến người phản biện vì những góp ý bổ ích cho bài viết.

Tài liệu tham khảo.

[1] Trần Nam Dũng, *Bất đẳng thức Bernoulli*. Tạp chí Pi, số 10 năm 2021.

[2] Yuan–Chuan Li, Cheh–Chih Yeh. *Some Equivalent Forms of Bernoulli's Inequality: A Survey*. Applied Mathematics, 2013.

[3] Maligranda, L. *The AM–GM Inequality is Equivalent to the Bernoulli Inequality*. Math Intelligencer 34, 1 – 2 (2012).

OLYMPIC TOÁN HỌC "CHINH PHỤC ĐỒI CHIM SẺ" 2020-2021

HOÀNG NGỤY HUẤN[1]

Xin được giới thiệu với bạn đọc về kỳ thi "chinh phục đồi chim sẻ". Đây là kỳ thi do Trường đại học tổng hợp Moscow và nhà xuất bản thanh niên Moscow cùng phối hợp tổ chức từ năm 2005 nhằm tuyển chọn sinh viên cho trường Đại học tổng hợp Moscow. Xin được nói thêm Trường Đại học tổng hợp Moscow là trường đại học lâu đời nhất và cũng là trường đại học nổi tiếng nhất nước Nga. Nơi đây đã đào tạo ra rất nhiều nhà khoa học danh tiếng. Thi đỗ vào trường là niềm mơ ước của rất nhiều học sinh Nga. Tham gia kỳ thi này là học sinh các lớp từ 9 tới 11. Trong đó có kỳ thi riêng dành cho lớp 11 và cho các bạn lớp 9 và 10. Năm 2009 có 500 bạn học sinh đã được giải thưởng kỳ thi này và khoảng 400 bạn đã trở thành sinh viên của trường. Sau đây là bài kiểm tra của năm 2021.

Kỳ thi "Chinh phục đồi chim sẻ" năm học 2020/2021 gồm hai vòng và đều tiến hành thi online. Vòng tuyển loại (diễn ra vào tháng $11-12$ năm 2020) kéo dài 24h gồm hai vòng nhỏ hơn: vòng loại có 6 bài toán và kéo dài 3 giờ, phần sáng tạo gồm 3 bài toán và cần phải gửi lời giải trong khoảng thời gian còn lại. Vượt qua vòng tuyển loại, các bạn trẻ sẽ được tham gia vào vòng chung kết diễn ra vào tháng 4 năm 2021.

Vòng loại

Mỗi học sinh sẽ nhận được danh sách các bài toán riêng khác biệt. Sau đây là một ví dụ về sáu bài toán của vòng loại.

1. Giải bất phương trình

$$\frac{\sqrt{x+5}-x-3}{x^2-15x+54} \geq 0$$

Trong đó hãy tìm số lượng nghiệm nguyên của bất phương trình trên.

2. Giải phương trình $\cos 2x + \cos 6x + 2\sin^2 x = 1$.

Trong đó hãy chỉ ra tổng các nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$, làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy.

3. Từ điểm M nằm trong tam giác ABC hạ các đường vuông góc xuống các cạnh BC, AC, AB. Các đường vuông góc này có độ dài tương ứng là k, l và m. Tìm diện tích của tam giác ABC, biết rằng $\angle CAB = \alpha$ và $\angle ABC = \beta$. Nếu kết quả thu được không là số nguyên, hãy làm tròn nó tới số nguyên gần nhất.

Cho biết các giá trị số là: $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{4}, k = 3, l = 2, m = 4$.

[1] *Trường Đại học Mỏ–Địa chất.*

4. Giải hệ sau

$$\begin{cases} x^3+3y^2=11, \\ x^2y+xy^2=6. \end{cases}$$

Với mỗi nghiệm (x,y) của hệ, hãy tính giá trị của biểu thức $\frac{x}{y}$; sau đó tìm giá trị nhỏ nhất trong các giá trị thu được – lấy xấp xỉ tới hai chữ số sau dấu phẩy.

5. Có hai hợp kim. Hợp kim thứ nhất chứa $p\%$ tạp chất, hợp kim thứ hai chứa $q\%$ hợp chất. Hỏi rằng cần phải nung chảy hai hợp kim theo một tỷ lệ nào để thu được một hợp kim mới chứa $r\%$ tạp chất. Trong đáp án khi tính xấp xỉ tỷ lệ khối lượng của hợp kim thứ nhất với khối lượng của hợp kim thứ hai thì làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy.

Các dữ liệu số: $p=70, q=5, r=40$.

6. Hãy tìm tất cả các số nguyên a có giá trị tuyệt đối không vượt quá 15 sao cho bất đẳng thức

$$\frac{4x-a-4}{6x+a-12} \leq 0$$

thỏa mãn với mọi x thuộc khoảng $[2,3]$. Sau đó hãy tính tổng tất cả các giá trị a vừa tìm được.

Vòng tuyển chọn (phần sáng tạo)

7. Tìm tất cả các số tự nhiên n không vượt quá 100 sao cho tổng $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ chia hết cho 50.

Với những giá trị n vừa tìm được, hãy sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần: $n_1<n_2<\ldots<n_k$. Từ đó hãy cho biết n_{k-2} là số nào?

8. Cho trước một đường tròn, trong tất cả các tam giác nội tiếp đường tròn có tổng bình phương của các góc là $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2=\frac{\pi^2}{2}$ (các góc α, β, γ được tính bằng radian) hãy tìm tất cả các tam giác có diện tích lớn nhất.

Với mỗi tam giác tìm được, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tích các cặp góc. Giá trị nhỏ nhất được làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy.

9. Hãy tìm tất cả các cặp số dương x, y thỏa mãn đẳng thức

$$\frac{4x^2y+6x^2+2xy-4x}{3x-y-2} + \sin\left(\frac{3x^2+xy+x-y-2}{3x-y-2}\right)$$
$$=2xy+y^2+\frac{x^2}{y^2}+\frac{2x}{y}+\frac{2xy(x^2+y^2)}{(3x-y-2)^2}+$$
$$+\frac{1}{(x+y)^2}\left(x^2\sin\frac{(x+y)^2}{x} + y^2\sin\frac{(x+y)^2}{y^2}+2xy\sin\frac{(x+y)^2}{3x-y-2}\right).$$

Trong đáp án hãy viết tổng x^2+y^2 của tất cả các nghiệm (x,y). Kết quả được làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy.

Vòng chung kết

Đề 1

10. Viết các số tự nhiên bắt đầu từ 20 thành một dòng: $20212223\ldots$ Hỏi rằng trong dãy kỳ tự thu được, chữ số nào đứng ở vị trí 2021?

11. Hãy tìm tất cả các giá trị của a sao cho phương trình

$$|x|-\arcsin x+b\cdot(\arccos x+|x|-1)+a=0$$

có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của b.

12. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm

$$2^{\lg(x^2-3)}=\lg 2^{x^2-2}?$$

13. Giải hệ sau

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6, \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2, \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3. \end{cases}$$

14. Gấp một tờ giấy hình vuông có diện tích là 17 theo đường thẳng đi qua tâm. Sau đó dính các mảnh lại với nhau. Hãy tìm diện tích lớn nhất trong các hình có thể tạo được.

Trong khuôn khổ có hạn của bài báo, chúng tôi chỉ trình bày lời giải chi tiết đối với một số bài chọn lọc.

Đáp án và lời giải

Vòng loại

1. Đáp án: 7.

2. Đáp án: $2{,}88$ (giá trị chính xác: $\frac{11\pi}{12}$).

3. Đáp án: 67.

4. Đáp án: $-1{,}31$ (giá trị chính xác: $-\frac{1+\sqrt{217}}{12}$).

5. Đáp án: $1{,}17$ (giá trị chính xác: $\frac{7}{6}$).

6. Đáp án: -7.

Vòng tuyển chọn (phần sáng tạo)

7. Đáp án: 87.

8. Đáp án: $0{,}27$ (giá trị chính xác: $\frac{\pi^2}{36}$).

9. Đáp án: $4{,}33$ ($x = \frac{9+\sqrt{17}}{8}$, $y = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ và $x^2+y^2 = \frac{85+13\sqrt{17}}{32} \approx 4{,}33$).

Vòng chung kết

Đề 1

10. Đáp án: 7.

11. Đáp án: $\frac{\pi}{2}-1$.

Lời giải. Khi $b=-1$, phương trình có dạng $|x| - \arcsin x - \arccos x - |x| + 1 + a = 0$. Với $x \in [-1;1]$ phương trình tương đương với $1 + a - \frac{\pi}{2} = 0$. Như vậy, khi $b=-1$ nghiệm chỉ tồn tại khi $a = \frac{\pi}{2}-1$.

Mặt khác, khi $a = \frac{\pi}{2}-1$ phương trình $|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$ có nghiệm $x=1$ với bất kỳ giá trị nào của b.

Chú thích. Các bạn thí sinh có nhiều lời giải không đúng vì dựa trên suy luận sau: câu văn từ điều kiện của bài toán "với mọi giá trị của b có ít nhất một nghiệm" thì bị hiểu nhầm là "có cùng một nghiệm với mọi trí trị của b" (Đây là một bài toán khác, đơn giản hơn mặc dù đáp áp của nó trùng với đáp án của bài toán đã cho).

12. Đáp án: 4.

Lời giải. Phương trình được biến đổi về dạng

$$t^\alpha = \alpha(t+1),$$

với $\alpha = \lg 2 \in (0,1)$, $t = x^2-3 > 0$.

Vì vế trái của phương trình $f(t) = t^\alpha$ là hàm lũy thừa với miền xác định $t \geq 0$; và với $\alpha \in (0,1)$ thì đây là hàm lõm. Trong khi đó vế phải của phương trình $g(t) = \alpha(t+1)$ là hàm tuyến tính với hệ số góc dương nên đồ thị của hai hàm số $f(t)$ và $g(t)$ sẽ cắt nhau tại không quá hai điểm.

Vì $f(0) = 0 < \alpha = g(0)$ và $f(1) = 1 = \lg 10 > \lg 4 = 2\alpha = g(1)$, nên trong khoảng $(0;1)$ tồn tại ít nhất một điểm.

Vì $f(1) > g(1)$, $f(10) = 10^{\lg 2} = 2 = \lg 100 < \lg 2^{11} = 11\alpha = g(10)$, nên trong khoảng $(1;10)$ cũng tồn tại ít nhất một nghiệm.

Điều đó có nghĩa là đồ thị hai hàm số cắt nhau tại đúng hai điểm (một điểm nằm giữa 0 và 1, một điểm khác nằm giữa 1 và 10).

Mỗi nghiệm dương t lại sinh ra hai nghiệm của phương trình đầu. Vì vậy, có cả thảy là 4 nghiệm.

13. Đáp án: $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = 1$ và $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}, z = -1$.

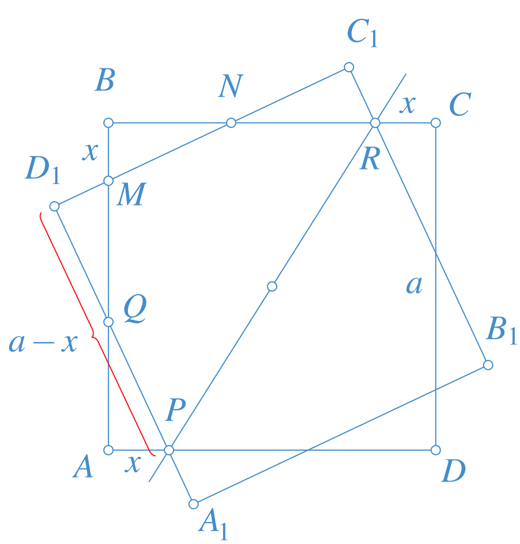
Lời giải. Nhân phương trình đầu với $(2x-3y)$, phương trình hai với $(3z-6x)$, phương trình thứ ba với $(6y-2z)$. Sau đó cộng chúng lại và thu được phương trình hệ quả:

$$\begin{aligned}&(2x-3y)^2+(3z-6x)^2+(6y-2z)^2\\&+\frac{2x-3y}{xy}+\frac{3z-6x}{xz}+\frac{6y-2z}{yz}\\&=6(2x-3y)+2(3z-6x)+3(6y-2z)\\\Leftrightarrow\ &(2x-3y)^2+(3z-6x)^2+(6y-2z)^2=0\\\Leftrightarrow\ &2x=3y=z\end{aligned}$$

Thế $2x=3y=z$ vào hệ, ta được: $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=1$ hoặc $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=-1$.
Chú thích. Dễ dàng nhận thấy là nếu $2x=3y=z$, thì tất cả các nhân tử nhân thêm vào phương trình đều bằng 0. Thế nhưng nó không làm xuất hiện nghiệm ngoại lai vì phương trình tổng vẫn là phương trình hệ quả của hệ đã cho.

14. Đáp án: $17\left(2-\sqrt{2}\right)$.

Lời giải. Gọi cạnh của hình vuông là a. Giả sử đường thẳng cắt và tạo trên cạnh hình vuông AD một đoạn $AP=x<\frac{a}{2}$ (Hình 2).



Hình 2

Hình vẽ thu được đối xứng qua đường thẳng PR. Mặt khác, hình vuông $A_1B_1C-1D_1$ là ảnh của hình vuông $ABCD$ qua phép quay quanh tâm của hình vuông. Khi đó $x=AP=PA_1=C_1R=RC=BM=MD_1$. Vì vậy các tam giác vuông AQP, MBN, NC_1R, QD_1M là bằng nhau.

Như vậy diện tích của hình thu được bằng tổng diện tích của hình thang vuông PD_1C_1R và diện tích của hai tam giác vuông bằng nhau AQP, MBN. Diện tích hình thang vuông bằng $\frac{a^2}{2}$. Vì vậy ta cần tìm diện tích lớn nhất của tam giác vuông AQP. Chu vi của nó là $AP+AQ+QP=BM+AQ+QM=AB=a$. Trong số các tam giác vuông có chu vi không đổi, thì tam giác vuông cân có diện tích lớn nhất.

Ta sẽ chứng minh khẳng định trên. Gọi a, b là các cạnh của tam giác vuông còn c là độ dài của cạnh huyền. Chu vi tam giác là $P=a+b+c$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy có $P=a+b+\sqrt{a^2+b^2}\geq 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}=\sqrt{ab}\left(2+\sqrt{2}\right)$. Từ đó suy ra $S=\frac{ab}{2}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{P}{2+\sqrt{2}}\right)^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Ta cũng có thể chứng minh khẳng định trên thuần túy bằng hình học: nếu trong góc vuông ABC dựng một đường tròn nội tiếp có bán kính là $\frac{P}{2}$, thì đường tròn này sẽ là đường tròn bàng tiếp của tất cả các tam giác vuông có chu vi là P và các cạnh góc vuông BX, BY nằm trên hai cạnh của góc. Vì chu vi cho trước, cho nên tam giác có diện tích lớn nhất là tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. Bán kính này đạt giá trị lớn nhất khi đường tròn nội tiếp tiếp xúc với đường tròn bang tiếp (nếu bán kính lớn hơn nữa thì hai đường tròn này sẽ cắt nhau, đó là điều không thể), tức là khi tam giác cân. Như vậy $\angle QPA=45^\circ$, $\angle RPD=\angle QPR=\frac{180^\circ-45^\circ}{2}=67,5^\circ$. Khi đó $a=AB=2x+x\sqrt{2}$. Từ đây rút ra được $x=\frac{a}{2+\sqrt{2}}=$

$\frac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$, diện tích tam giác ΔQPA bằng $\frac{x^2}{2} = \frac{a^2\left(4+2-4\sqrt{2}\right)}{8} = \frac{a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4}$.

Điều đó có nghĩa là diện tích cần tìm là $\frac{a^2}{2} + 2\cdot\frac{a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4} = \frac{a^2\left(1+3-2\sqrt{2}\right)}{2} = a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$.

Vẫn tồn tại một lời giải khác hoàn toàn bằng đại số. Giả sử cạnh của hình vuông bằng a, đường thẳng cắt cạnh AD của hình vuông một đoạn $AP = x < \frac{a}{2}$. Ta sẽ đi tìm AQ. Ký hiệu các góc $\angle RPS = \angle RPQ = \alpha$, $\angle QPA = \beta$. Từ tam giác PRS (với S là hình chiếu của điểm R lên cạnh AD), ta tìm được $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{a-2x}$. Do đó $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{a(a-2x)}{2x(x-a)}$, $AQ = x\cdot\operatorname{tg}\beta = x\operatorname{tg}(-2\alpha) = \frac{a(a-2x)}{2(a-x)}$.

Từ đó suy ra, các cạnh của tam giác vuông bằng x và $\frac{a(a-2x)}{2(a-x)}$. Khi đó diện tích cần tìm bằng $\frac{a^2}{2} + \frac{ax(a-2x)}{2(a-x)}$. Bằng cách tính đạo hàm, ta có thể suy ra rằng hàm số $f(x) = \frac{x(a-2x)}{(a-x)}$ đạt cực đại tại $x = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$. Nó tương ứng với các góc $\beta = \frac{\pi}{4}, 2\alpha = \frac{3\pi}{4}, \alpha = \frac{3\pi}{8}$.

Tài liệu tham khảo

[1] Олимпиада по математике «Покори Воробьевы горы!» – 2019 – 2020 / *Б. А. Будак и др.* // Математика в школе. – 2021. – № 1. С. 28 – 39.

[2] Олимпиада по математике «Покори Воробьевы горы!» – 2018 – 2019 / *Б. А. Будак и др.* // Математика в школе. – 2020. – № 4. С. 11 – 23.

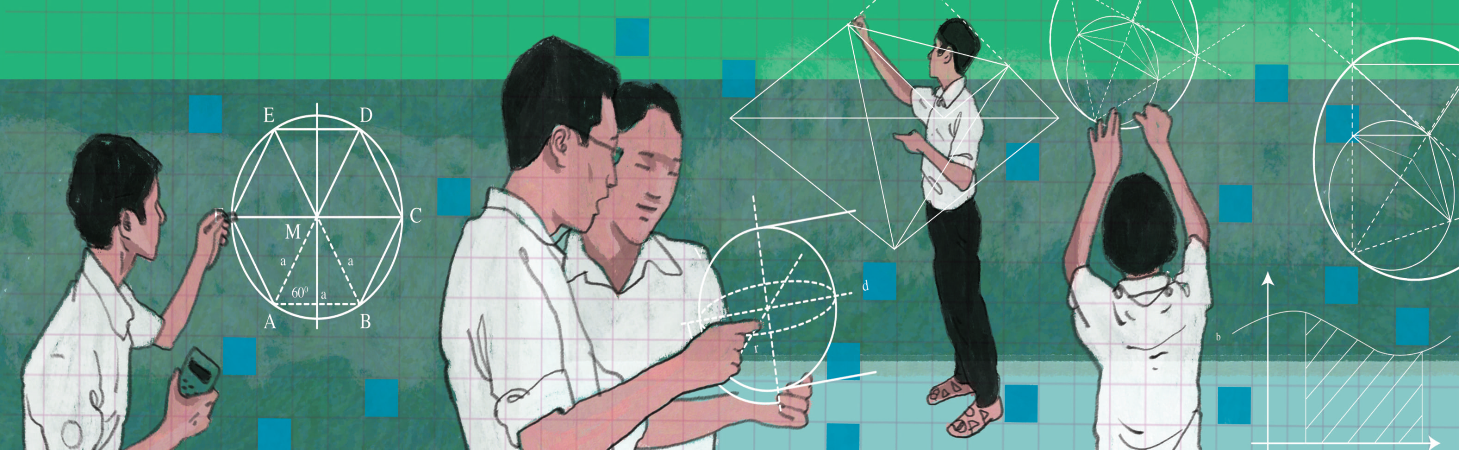
[3] Олимпиада по математике «Покори Воробьевы горы!» – 2017 – 2018 / *Б. А. Будак и др.* // Математика в школе. – 2018. – № 5. С. 20 – 32.

[4] Олимпиада по математике «Покори Воробьёвы горы!» – 2016 – 2017 / *Д. В. Горяшин и др.* // Математика в школе. – 2017. – № 8. . 31 – 40.

[5] Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» / *В. В. Галатенко и др.* // Математика в школе. – 2017. – № 2. С. 12 – 23.

[6] Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» / *А. С. Зеленский и др.* // Математика в школе. – 2016. – № 4. С. 10 – 25.

[7] Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике (2013 – 2018) / *А. С. Зеленский и др.* – М.: МЦНМО, 2019. – 192 С.



PHAN THÀNH NAM: NHÀ TOÁN HỌC YÊU VẬT LÝ VÀ GIỎI VĂN

THƯ HIÊN[1]

LTS. Phan Thành Nam dành giải thưởng của Hội toán học châu Âu năm 2020. Giải thưởng này được trao bốn năm một lần trong Đại hội Toán học Châu Âu (ECM) cho các nhà khoa học trẻ (không quá 35 tuổi) nhằm ghi nhận những đóng góp xuất sắc trong lĩnh vực toán học. Nhân dịp Phan Thành Nam về công tác tại Việt Nam, anh đã có những chia sẻ với Pi về con đường học tập của mình.

Dù ẵm giải nhì học sinh giỏi văn cấp tỉnh dành cho học sinh THCS nhưng cậu học trò Phan Thành Nam lại ước mơ trở thành nhà vật lý. Vậy là anh quyết tâm thi chuyên toán vì nghe nói muốn hiểu vật lý thì phải giỏi toán. Giấc mơ thuở thiếu thời đó đã dẫn dắt anh đến với giải thưởng chính của Hội toán học châu Âu EMS, bởi những thành tựu dùng toán để giải quyết các vấn đề vật lý lượng tử ...

GS. Phan Thành Nam tại Viện nghiên cứu cao cấp về Toán. Ảnh: Quang Huy.

Ước mơ khởi đầu: trở thành nhà vật lý

Xin chào Phan Thành Nam, anh có thể chia sẻ với Pi về hành trình dẫn anh đến với toán học? Hẳn là anh đã từng là học sinh chuyên toán từ nhỏ, vào ĐH cũng học toán?

Đúng là hồi lớp 6 thì tôi học chuyên toán trường Lương Văn Chánh ở Phú Yên. Gọi là lớp chuyên toán nhưng cũng chỉ khác lớp thường là mỗi tuần chúng tôi được bồi dưỡng thêm vài buổi với nội dung học vượt ra ngoài sách giáo khoa, còn giờ học chính khóa thì cũng học như các bạn lớp thường. Nhưng sau đó mô hình chuyên cấp THCS không còn, lên lớp 7 tôi trở về học lớp thường. Tôi học đều và thích nhiều môn, năm lớp 9 còn được giải nhì học sinh giỏi cấp tỉnh môn văn.

Ơ, sao tự nhiên anh lại đi thi học sinh giỏi môn văn?

Ban đầu tôi thi học sinh giỏi toán, nhưng bị trượt, không được chọn vào đội tuyển của trường để đi thi tiếp. Vì thế mà cô giáo dạy

[1] ...

văn khích lệ tôi thi học sinh giỏi môn văn. Tôi thấy đây là một gợi ý hay, môn văn là môn "truyền thống" của gia đình tôi, mẹ tôi là giáo viên văn, ba tôi vốn học cử nhân văn ở Trường ĐH Tổng hợp Huế và sau này làm nhà báo. Trong nhà tôi có rất nhiều sách văn học, lúc rảnh rỗi tôi đọc hết nên cũng rất thích môn văn.

Giải nhì văn cấp tỉnh là một thành tựu ngọt ngào, sao anh không tiếp tục đầu tư cho môn văn mà lại trở thành nhà toán học?

Thật ra khi đó tôi lại ôm ấp một giấc mơ khác, đó là trở thành nhà vật lý. Ấy là do ảnh hưởng của cuốn sách ***"Các nhà vật lý đi tiên phong"***, mà hồi đó tôi vừa đọc xong. Tuy nhiên trong sách đó viết rằng để hiểu vật lý thì phải giỏi toán, nên khi vào cấp 3, tôi chọn thi vào lớp chuyên toán ở Trường THPT chuyên Lương Văn Chánh.

Thi vào đội tuyển toán của trường THCS mà còn bị trượt, vậy mà lại tiếp tục mơ mộng thi vào chuyên toán trường chuyên của tỉnh. Xem ra anh cũng "liều"?

Đúng là có một chút liều. Nhưng vì nhờ việc trượt đội tuyển toán ở lớp 9 mà tôi nhận ra mình còn thiếu kiến thức nào để bổ sung trong quá trình ôn thi vào lớp 10 chuyên toán sau này. Trước đó tôi gần như không học nội dung gì ngoài SGK. Khi ôn thi chuyên toán, tôi mới bắt đầu đào sâu một số nội dung ngoài SGK.

Thật may là tôi đã đỗ chuyên toán, tuy với mức điểm trung bình nhưng đó là một sự khởi đầu tuyệt vời bởi từ đó tôi được học các thầy dạy toán rất giỏi, họ gieo vào tôi tình yêu, niềm đam mê với toán.

Học để thỏa mãn đam mê chứ không vì thi thố

Đỗ chuyên toán với mức điểm trung bình, vậy việc học sau đó của anh có chật vật để theo kịp các bạn trong lớp không?

Tôi thấy việc học cũng nhẹ nhàng. Cuối năm lớp 10 tôi còn được chọn đi dự kỳ thi Olympic 30.4, nhờ đó mà tôi được giao lưu với các bạn học sinh giỏi toán các địa phương khác. Chúng ta vẫn nói về tầm quan trọng của việc được học với các thầy giỏi, nhưng từ trải nghiệm của chính mình, tôi thấy việc được học chung với các bạn giỏi cũng quan trọng không kém.

Hồi đó lớp tôi có một bạn rất giỏi, tên là Phùng Trọng Thực (hiện là GV Trường ĐH Bách khoa TP.HCM). Có lần Thực đưa cho tôi một bài toán rất hay và lạ, hỏi có giải được không? Thực cho biết bài toán đó có trong tờ tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, đây là lần đầu tôi biết tới tạp chí này. Từ đó, 2 đứa cùng có thêm một niềm vui chung là ngóng chờ tạp chí ***Toán học và Tuổi trẻ*** về hàng tháng để ngồi giải bài. Chúng tôi áng chừng thời gian tạp chí về đến Phú Yên (thường chậm hơn thời điểm phát hành ở Hà Nội vài ngày), những ngày đó lảng vảng quanh bưu điện liên tục để hễ tạp chí về đến nơi là mua được ngay.

Thời gian đầu, gần như chúng tôi chẳng giải được bài toán nào đăng trong tạp chí đó. Lúc đó chúng tôi mới vào lớp 10, nhưng có nhiều bài thuộc chương trình lớp 11 – 12, nên chúng tôi tự học các kiến thức liên quan trong SGK các lớp trên để có đủ nền tảng cần thiết. Nhờ sự "máu mê" đó mà chúng tôi bắt đầu giải được bài đầu tiên, rồi bài thứ hai, thứ ba ...

Lên lớp 11 thì tôi đạt giải nhì HSG quốc gia, được ra Hà Nội thi chọn đội tuyển quốc tế. Có khoảng 40 bạn dự thi, để chọn ra 6 bạn. Đề thi rất khó, có những dạng toán tôi chưa gặp bao giờ. Tôi nhớ một kỷ niệm vui là nhờ được mang đồ ăn vào phòng thi, mà tôi có việc để làm lúc thi, tức là tôi chủ yếu ngồi ăn chứ toán thì không làm được bao nhiêu.

Lớp 12 tôi cũng được đi thi quốc gia, nhưng chỉ đạt giải khuyến khích. Lúc đó tôi cảm thấy rất tự tin, vì đã học thêm được rất nhiều kiến thức so với năm lớp 11, nhưng khi vào phòng thi lại làm bài không tốt.

Không được "hái quả ngọt" vào năm học lớp 12 mà anh không nản lòng à, để lại vẫn tiếp tục học toán khi lên ĐH?

Lúc đó tình yêu toán đã bén rễ sâu đậm trong tôi, tôi học là để thỏa mãn đam mê chứ không phải để thi thố.

Nhờ đạt giải học sinh giỏi quốc gia, tôi được tuyển thẳng vào ĐH. Lúc đó tôi có nhiều lựa chọn. Ngành CNTT của Trường ĐH Bách khoa TP.HCM là ngành thời thượng. Các trường y dược cũng là mục tiêu phấn đấu của nhiều bạn học sinh giỏi. Còn khoa toán tin Trường ĐH Khoa học tự nhiên, ĐH Quốc gia TP.HCM có điểm chuẩn rất thấp, khoảng 15 điểm/3 môn là đỗ. Tuy nhiên tôi chẳng bận tâm, vì thích toán quá rồi, cứ được học toán tiếp là tôi học.

Lúc đó tôi rất thích cuốn sách ***"Tìm tòi để học giỏi toán"*** của anh Lê Quang Nẫm. Biết anh Nẫm là sinh viên Trường ĐH Khoa học tự nhiên, ĐH Quốc gia TP.HCM, tôi muốn vào đó học, với hy vọng có cơ hội được gặp anh, hoặc được học với các thầy của anh.

Anh Lê Quang Nẫm hơn tôi khoảng 5 tuổi, lúc là học sinh đã rất nổi tiếng. Anh là con nhà nghèo, khi anh trúng tuyển vào lớp 10 Trường Phổ thông Năng khiếu của ĐH Quốc gia TP.HCM thì ba của anh phải từ Quảng Ngãi vào TP.HCM để đạp xích lô nuôi anh ăn học. Học xong cấp 3 anh vào khoa Toán tin Trường ĐH Khoa học tự nhiên, và tốt nghiệp thủ khoa. Nhưng đó là những thông tin về sau tôi mới biết. Còn khi đọc cuốn sách của anh Nẫm tôi cảm thấy ngưỡng mộ vì anh viết hấp dẫn quá.

Ba mẹ anh có ý kiến thế nào khi anh chọn học toán?

Ba mẹ tôi dân chủ lắm, chỉ cung cấp thông tin về một số trường/ngành mà ba mẹ nghĩ là tốt, còn quyết định là do tôi. Thật sự lúc đó tôi cũng không mường tượng con đường học Toán ở ĐHKHTN TPHCM là như thế nào. Tôi chỉ nghĩ là có thể nó sẽ giúp mình trở thành giáo viên dạy toán, mà như thế cũng tốt. Thời đó sinh viên tốt nghiệp các ngành khoa học cơ bản mà có chứng chỉ sư phạm là cũng được dạy phổ thông.

Đó là một quyết định sáng suốt. Vì khi vào học đại học thì tôi rất may mắn gặp được các thầy giỏi, tâm huyết. Thầy này giúp tôi đến với thầy khác, nhờ thế mà hành trình giúp tôi đến với toán học khá suôn sẻ.

Dùng toán để hiểu vật lý và khám phá thế giới

Anh được Hội toán học châu Âu trao giải thưởng chính là bởi thành tựu nào trong nghiên cứu toán học của anh?

Họ xét giải trên cơ sở một cụm công trình, cụ thể là ghi nhận đóng góp của tôi cho lĩnh vực vật lý lượng tử đa hạt. Thông thường trong vật lý lượng tử, để biết tính chất của một hệ thì mình phải giải một phương trình Schrödinger (phương trình đươc đặt theo tên nhà vật lý học người Áo, người đầu tiên thiết lập phương trình này và được giải Nobel vật lý năm 1933). Nếu hệ chỉ có một hạt, thì phương trình Schrödinger chỉ có một biến trong không gian ba chiều. Nếu hệ có N hạt thì phương trình có N biến, và trong nhiều ứng dụng số lượng biến số rất lớn tới mức mình không thể giải được, kể cả giải chính xác hoặc giải số bằng máy tính.

GS. Phan Thành Nam và một sinh viên. Ảnh: Quang Huy.

Vì đó là một bài toán rất phức tạp, mình cần sẽ tiếp cận bằng các phương pháp xấp xỉ, thường là thay phương trình tuyến tính nhiều biến bằng phương trình phi tuyến một biến. Đây là phương pháp mà các nhà vật lý học đã phát triển trong một thời gian dài. Câu hỏi đặt ra là làm sao chứng minh được phương pháp xấp xỉ đó là đúng, nghĩa là khi số hạt N tiến về vô cùng thì mô hình xấp xỉ trở thành chính xác. Bằng cách sử dụng và phát triển các công cụ trong toán giải tích, tôi chứng minh được rằng trong những điều kiện cụ thể thì một số mô hình xấp xỉ sẽ đúng với những nguyên lý căn bản trong cơ học lượng tử.

Ở trên anh kể chuyện hồi lớp 9 anh từng mơ ước trở thành nhà vật lý nên nên mới cố gắng học giỏi toán. Vậy việc sau này anh chọn nghiên cứu sâu về toán trong vật lý lượng tử, việc này có liên quan gì tới ước mơ hồi đó?

Đúng là có liên quan. Sau khi làm thạc sĩ, tôi xin được một số học bổng tiến sĩ khác nhau, có cả toán lý thuyết và toán ứng dụng. Tình cờ trong thời gian này, tôi đọc một cuốn sách rất thú vị là ***"Lưới trời ai dệt"*** của tác giả Nguyễn Tường Bách. Trong cuốn đó, tác giả trình bày về vật lý lượng tử một cách rất cuốn hút, với nhiều mối liên quan tới triết học Phật giáo. Điều này làm sống lại ước mơ hồi năm lớp 9, vốn vẫn quanh quẩn trong tâm trí tôi, đó là học về Vật lý Toán.

Vì thế mà tôi chọn GS Jan Philip Solovej ở ĐH Copenhaghen để xin học lên tiến sĩ. Khi đó, tôi vào trang khoa toán tìm các giáo sư, và cảm thấy các công trình nghiên cứu của GS Solovej về vật lý lượng tử là vô cùng hấp dẫn. Mặc dù tôi không hiểu rõ các công trình đó, nhưng cảm thấy các kiến thức toán này nếu cố gắng mình sẽ học được, nên quyết định xin theo thầy. Tôi rất may mắn là được thầy đồng ý.

Tôi nghĩ môn vật lý ở chương trình phổ thông là một môn học thú vị, nó giúp cho những đứa trẻ thỏa mãn sự tò mò khi tìm hiểu các hiện tượng tự nhiên. Sau này, nhờ sử dụng các công cụ bên toán mà tôi hiểu được chính xác các khái niệm vật lý, điều này kiến tôi thấy rất sung sướng. Mặc dù có thể đó là những điều nhân loại hiểu ra từ cách đây hàng trăm năm, nhưng khi được đi lại trên con đường khám phá thế giới mà nhân loại đã từng đi, tôi vẫn thấy thật hạnh phúc.

Sẽ cùng các đồng nghiệp người Việt ở nước ngoài giúp VN lấp khoảng trống vật lý toán...

Anh có biết, ở Việt Nam, có những ai làm việc trong lĩnh vực nghiên cứu của anh không?

Tôi gần như không biết có ai làm về lĩnh vực này ở VN! Có một số nhóm vật lý lý thuyết làm việc trực tiếp với những mô hình xấp xỉ phi tuyến, và một số nhóm vật lý thực nghiệm kiểm tra các mô hình xấp xỉ đó có đúng hay không. Nhưng có vẻ như không có nhà toán học nào nghiên cứu những phương trình nhiều hạt từ các nguyên lý cơ bản nhất.

Có nghĩa là lĩnh vực này đang có một khoảng trống lớn ở VN?

Vâng, đúng rồi. Nhưng tôi nghĩ tôi có thời gian để giúp cải thiện việc này.

GS. Phan Thành Nam báo cáo tại Viện Toán học. Ảnh: Viện Toán học.

Đầu tháng 8 vừa rồi, tôi cùng anh Nguyễn Trọng Toán (GS ở ĐH bang Pennsylvania, Mỹ) tổ chức một trường hè về vật lý toán bên Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán (nơi GS Ngô Bảo Châu là Giám đốc khoa học – PV). Chúng tôi bất ngờ trước sự say mê học hỏi của các bạn trẻ. Trong cả buổi sáng họ nghe chúng tôi giảng bài, tới buổi chiều vẫn kiên trì ngồi lại lớp học làm bài tập. Sau đó tôi dự hội thảo về phương trình đạo hàm riêng kỷ niệm GS Đinh Nho Hào ở Viện toán học VN. Tôi thấy nhiều báo cáo đạt chất lượng rất cao, ngang tầm chất lượng các hội thảo đẳng cấp quốc tế. Điều đặc biệt là có nhiều báo cáo của các bạn trẻ. Do đó, tôi thấy rất lạc quan với sự phát triển của ngành này ở trong nước, và trước mắt tôi có thể dùng các công cụ của ngành phương trình đạo hàm riêng để tương tác với các nhà toán học trong nước.

Để xây dựng ngành của mình ở VN, tôi cần phải tiếp tục tổ chức một số trường hè, tổ chức dạy học một số môn học trong các khoa toán của các trường ĐH. Tôi đã trao đổi với một số nhà toán học trong nước và được các anh ủng hộ. Trước hết các thầy trong nước sẽ dạy trước cho sinh viên một số kiến thức tổng quát, sau đó tôi sẽ dạy phần tiếp theo, đi sâu hơn vào lĩnh vực nghiên cứu hiện đại. Bằng các giải pháp đồng thời như trên, tôi hy vọng sẽ có một số bạn trẻ sẽ nảy sinh đam mê về vật lý toán.

Một thuận lợi là với riêng ngành giải tích – phương trình đạo hàm riêng, tôi có nhiều "đồng minh" là các anh chị người Việt xuất thân từ trường ĐH Khoa học tự nhiên, ĐH Quốc gia TP.HCM và đã đạt được vị trí vững vàng trong các trường đại học hàng đầu trên thế giới. Ở Châu Âu có anh Nguyễn Hoài Minh (GS ĐH Paris Sorbonne ở Pháp); anh Nguyễn Lê Lực (GS ĐH ở Anh); anh Trương Trung Tuyến (GS ĐH Oslo, Na Uy). Ở Mỹ có anh Nguyễn Trọng Toán (GS ĐH bang Pennsylvania), anh Lê Quang Nẫm (GS ĐH Indiana), anh Trần Vĩnh Hưng (GS ĐH Wisconsin–Madison), anh Phan Văn Tuộc (GS ĐH Tennessee), anh Trần Minh Bình (GS ĐH Texas A&M) ... và rất nhiều anh chị khác. Đó là những người trẻ trên dưới 40 tuổi, đang làm việc rất tích cực, và mọi người đều đồng lòng hướng về VN với mong muốn tham gia vào sự phát triển toán học trong nước.

Xin cảm ơn GS Phan Thành Nam!

CÁC NHÀ TOÁN HỌC HY LẠP TỪ PYTHAGORAS TỚI EUCLID (Thế kỷ V đến thế kỷ III trước Công nguyên) Phần III: Học viện Plato

TẠ DUY PHƯỢNG[1]

Học viện Plato

Thế kỷ thứ tư TCN đã mở đầu bằng cái chết của Socrates (khoảng $470-399$ TCN), một học giả đã áp dụng phương pháp biện chứng của Zeno và bác bỏ thuyết Pythagoras của Archytas (khoảng $420-347$ TCN). Socrates thừa nhận rằng khi còn trẻ, ông đã bị thu hút bởi những câu hỏi như tại sao tổng $2+2$ lại bằng tích 2×2 nhưng khi nhận ra rằng cả toán học và khoa học đều không thể thỏa mãn mong muốn của ông để hiểu bản chất của sự vật, ông đã tự nghiên cứu để hiểu những điều bản chất.

Trong *Phaedo* của Plato, cuộc đối thoại trong đó những giờ cuối cùng của Socrates được mô tả rất đẹp, chúng ta thấy những nghi ngờ siêu hình sâu sắc như thế nào loại trừ mối quan tâm của Socrate về toán học hoặc khoa học tự nhiên:

Tôi không thể tự thỏa mãn bản thân rằng, khi một cái được thêm vào một cái, mà phép cộng được thực hiện trở thành hai.

Tôi không thể hiểu làm thế nào khi tách khỏi nhau, mỗi trong số chúng là một chứ không phải hai, và bây giờ, khi chúng được kết hợp lại với nhau, chỉ là sự đặt cạnh nhau, là nguyên nhân khiến chúng trở thành hai.

Do đó, ảnh hưởng của Socrates trong sự phát triển của toán học là không đáng kể, nếu không nói là tiêu cực. Điều đáng ngạc nhiên là chính học trò và người ngưỡng mộ ông là Plato đã trở thành cảm hứng toán học của thế kỷ thứ tư TCN.

Mặc dù bản thân Plato không có đóng góp kết quả toán học nổi bật cụ thể nào, nhưng ông đã là trung tâm của hoạt động toán học thời gian đó, hướng dẫn và truyền cảm hứng cho sự phát triển của toán học. Tại cửa trường học của ông, Học viện (The Academy) ở Athens, được khắc khẩu hiệu "Ai không biết hình học không vào đây".

ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ.

Sự nhiệt tình của Plato đối với toán học khiến ông được biết đến không phải với tư cách là một nhà toán học, mà là "người tạo ra các nhà toán học".

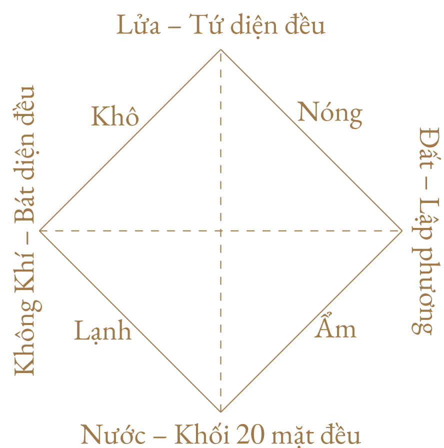
[1] *Cộng tác viên Viện Toán học.*

Hình 6: The School of Athens của Rafael tại Vaticant.

Sáu nhà toán học (ngoài Plato và Aristotle) sống giữa năm mất của Socrates (399 TCN) và năm mất của Aristotle (322 TCN) – gồm Theodorus xứ Cyrene (thế kỷ V TCN), Theaetetus (khoảng 414 – 369 TCN), Eudoxus xứ Cnidus (khoảng 410 – 347 TCN), hai anh em Menaechmus (380 – 320 TCN) và Dinostratus (390 – 320 TCN), và Autolycus xứ Pitane (360 – 320 TCN) – là những nhà toán học đã có liên kết ít nhiều chặt chẽ với Học viện Plato.

Rõ ràng là việc Plato rất coi trọng toán học không đến từ Socrates. Trên thực tế, các bài giảng trong thời kỳ đầu và tác phẩm Đối thoại (Dialogues) của Plato hiếm khi đề cập đến toán học. Archytas, một người bạn của Plato, là người đã khiến Plato quan tâm đến toán học, khi Ông đến thăm bạn ở Sicily vào năm 388 TCN. Có lẽ chính khi đó, Plato mới biết đến năm hình đa diện đều, được liên kết với bốn nguyên tố (nước, lửa, không khí và đất) của Empedocles (490 – 430 TCN) trong một sơ đồ vũ trụ đã mê hoặc các nhà nghiên cứu trong nhiều thế kỷ (Hình 7).

Có thể, sự coi trọng của Pythagoras đối với khối 12 mặt đều đã khiến Plato xem xét nó, khối đa diện đều thứ năm và cuối cùng, như một biểu tượng của vũ trụ. Plato đặt ý tưởng của ông về đa diện đều thành một cuộc đối thoại có tiêu đề *Timaeus*, được đặt tên cho một người đóng vai trò là người đối thoại chính thuộc trường phái Pythagoras. Không biết Timaeus xứ Locri có thực sự tồn tại không, hay Plato đã phát minh ra Timaeus như một nhân vật để thể hiện quan điểm của Pythagoras, khi ấy vẫn còn mạnh mẽ ở khu vực mà ngày nay là nước Ý.



Hình 7: Sơ đồ vũ trụ ứng với khối đa diện.

Các khối đa diện đều thường được gọi là "vật thể vũ trụ" hoặc "khối đa diện Plato" bởi vì cách mà Plato trong *Timaeus* đã áp dụng chúng vào giải thích các hiện tượng khoa học.

Mặc dù đối thoại này, có lẽ được viết khi Plato đã gần bảy mươi tuổi, cung cấp bằng chứng xác thực sớm nhất cho sự liên kết của bốn nguyên tố với khối đa diện đều, phần lớn sự tưởng tượng này có thể là do trường phái Pythagoras.

Proclus (khoảng 410 – 485) quy việc xây dựng hình học vũ trụ cho Pythagoras, nhưng có thể bạn của Plato là Theaetetus (khoảng 414 – 369 TCN) đã viết về liên kết giữa vũ trụ và khối đa diện đều.

Quyển XIII của *Cơ sở* của Euclid nói rằng chỉ có ba trong số năm khối đa diện là do Pythagoras, và nhờ Theaetetus mà khối bát diện và hai mươi mặt đều đã được biết đến.

Có vẻ như Theaetetus đã thực hiện một trong những nghiên cứu quy mô nhất về năm khối đa diện, và định lý nói rằng có và chỉ có năm khối đa diện đều là thuộc về Theaetetus. Có lẽ ông cũng là tác giả của các tính toán về tỷ lệ các cạnh của khối đa diện đều và bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

Theaetetus là một thanh niên Athens chết vì bệnh kiết lỵ kết hợp với vết thương trong trận chiến, và cuộc đối thoại của Plato mang tên ông là một sự tưởng nhớ của Plato đối với người bạn của mình.

Trong cuộc đối thoại, có bối cảnh trước đó khoảng ba mươi năm, Theaetetus thảo luận với Socrates và Theodorus về bản chất của các đại lượng vô ước với nhau (hay các đại lượng không thông ước với nhau). Người ta đã giả định rằng cuộc thảo luận này phần nào có dạng mà chúng ta tìm thấy trong phần mở đầu của Quyển X của *Cơ sở*.

Ở đây, sự phân biệt không chỉ được thực hiện giữa các đại lượng thông ước và vô ước, mà còn giữa các đại lượng khi độ dài là vô ước với nhau, nhưng có diện tích thông ước với nhau. Như $\sqrt{3}$ và $\sqrt{5}$ không thông ước về độ dài, nhưng thông ước về diện tích, vì các hình vuông của chúng có tỷ lệ là $3/5$.

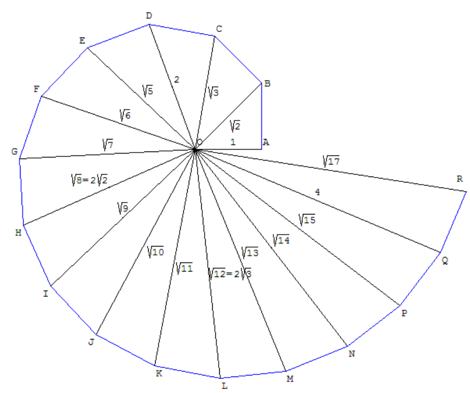
Mặt khác, các đại lượng $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ và $\sqrt{1+\sqrt{5}}$ là không thông ước cả về độ dài và diện tích.

Cuộc đối thoại mà Plato sáng tác để tưởng nhớ người bạn Theaeteus của mình chứa thông tin về một nhà toán học khác, Theodorus xứ Cyrene, thầy của Plato và Theaetetus, người mà Plato ngưỡng mộ và là người đã đóng góp vào sự phát triển của lý thuyết về các đại lượng vô ước.

Không biết bằng cách nào mà Theodorus đã làm điều này và tại sao ông lại dừng lại ở $\sqrt{17}$

Theodorus là người đầu tiên chứng minh tính vô tỷ của căn bậc hai của các số nguyên không chính phương từ 3 đến 17.

Chứng minh, trong mọi trường hợp, được đưa ra bởi Aristotle khi ông xây dựng trục xoắn ốc dọc theo đoạn $\sqrt{2}$. Các tác phẩm lịch sử cổ đại chỉ ra rằng Theodorus đã khám phá ra điều này và sau này nó được đưa vào *Cơ sở*, nhưng các tác phẩm của Theodorus đã bị mất.



Hình 8: Xoắn ốc Theodorus.

Plato có vai trò quan trọng trong lịch sử toán học phần lớn vì ông là người truyền cảm hứng và là người sáng lập Học viện đào tạo ra nhiều nhà toán học, cũng như do sự nhạy bén của ông về sự phân biệt ở Hy Lạp cổ đại giữa số học (theo nghĩa của lý thuyết về các con số) và kỹ thuật tính toán.

Plato cho rằng toán học là cần thiết cho doanh nhân và quân sự, "phải học nghệ thuật của những con số, nếu không anh ta sẽ không biết cách dàn quân".

Mặt khác, nhà triết học phải là một nhà số học "bởi vì anh ta phải nhảy ra khỏi biển của những thay đổi và nắm giữ bản thể đích thực." Hơn nữa, Plato nói trong tác phẩm *Cộng hòa (The Republic)*: "Số học có tác dụng rất lớn và nâng cao, buộc tâm trí nghĩ về số trừu tượng."

Trong số học, Plato đã nhìn thấy một hố ngăn cách lý thuyết và các khía cạnh tính toán, cũng như trong hình học, ông cũng tán thành toán học thuần túy chống lại quan điểm duy vật.

Bất kỳ một trong số vô số đường kính của đường tròn là trục đối xứng của hình. Bất cứ điểm nào trên một đường thẳng kéo dài vô hạn có thể được coi là tâm của đối xứng, giống như bất kỳ đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng đã cho là trục đối xứng của đường thẳng đã cho. Triết học Plato, với sự áp dụng các ý tưởng của nó, tự nhiên sẽ tìm thấy vai trò của đường thẳng và đường tròn giữa các hình hình học. Tương tự, Plato tôn vinh tam giác.

Sự liên kết của bốn khối đa diện đầu tiên với bốn yếu tố phổ quát truyền thống của vũ trụ đã cung cấp cho Plato trong *Timaeus* một lý thuyết thống nhất tuyệt đẹp về vật chất, theo đó mọi thứ đều được xây dựng bằng các tam giác vuông lý tưởng. Toàn bộ sinh lý học, cũng như khoa học về chất trơ, dựa trên các hình tam giác.

Pythagoras nổi tiếng là người đã thiết lập toán học như một chủ đề tự do, nhưng Plato đã có ảnh hưởng trong việc làm cho toán học trở thành một phần thiết yếu của chương trình đào tạo.

Có lẽ bị ảnh hưởng bởi Archytas, Plato đã thêm vào các chủ đề ban đầu trong bộ bốn (quadrivium: Số học, Hình học, Âm nhạc, Thiên văn) một môn học mới: Hình học không gian, vì ông tin rằng hình học không gian đã không được nhấn mạnh đầy đủ. Plato cũng thảo luận về nền tảng của toán học, làm rõ một số định nghĩa và xây dựng lại các giả thiết. Ông nhấn mạnh rằng lý luận được sử dụng trong hình học không đề cập đến những con số hữu hình mô tả chúng, mà là những ý tưởng tuyệt đối mà chúng đại diện.

Những người theo thuyết Pythagoras đã định nghĩa điểm là "sự thống nhất có vị trí," nhưng Plato lại nghĩ về nó như là sự khởi đầu của một đường thẳng.

Định nghĩa của một đường là "chiều dài không có chiều rộng" dường như bắt nguồn từ trường phái Plato.

Trong số học, Plato không chỉ nhấn mạnh sự phân biệt giữa số lẻ và số chẵn, mà còn là các loại "chẵn nhân chẵn", "chẵn nhân lẻ" và "lẻ nhân lẻ". Mặc dù ta biết rằng Plato đã thêm vào các tiên đề của toán học, chúng ta không có một cơ sở nào để khẳng định điều này.

Rất ít đóng góp toán học cụ thể được quy cho Plato. Một công thức cho bộ ba Pythagoras – $(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$, trong đó n là số tự nhiên bất kỳ – mang tên Plato, nhưng đây chỉ là một phiên bản sửa đổi của kết quả được người Babylon và người Pythagoras đã biết.

Có lẽ thực sự có ý nghĩa quan trọng hơn cả trong những thứ được gán cho Plato là cái gọi là phương pháp phân tích (analytic method).

Trong chứng minh toán học, ta bắt đầu với những gì đã cho, và từ các tiên đề và các định đề. Tiến hành từng bước một, sau đó đến khẳng định cần được chứng minh.

Plato dường như đã chỉ ra rằng về mặt sư phạm, khi không tìm được một chuỗi lý luận hiển nhiên từ giả thiết đến kết luận, thường là thuận tiện hơn nếu ta bắt đầu bằng mệnh đề cần được chứng minh và từ đó suy ra một kết luận được biết là đúng. Nếu, sau đó, có thể đảo ngược các bước trong chuỗi lý luận này, kết quả sẽ là mệnh đề đã được chứng minh.

Plato không hẳn là người đầu tiên nêu lên quan điểm phân tích. Nhưng những gì Plato có thể đã làm là chính thức hóa quá trình này, hoặc có thể ông đã đặt tên cho nó.

Vai trò của Plato trong lịch sử toán học vẫn còn bị tranh cãi gay gắt. Một số người coi ông là một nhà tư tưởng đặc biệt sâu sắc và nhạy bén. Những người khác hình dung ông như một người đã thu hút các nhà toán học theo con đường lý luận trừu tượng, đi xa những vấn đề thực tiễn.

Trong mọi trường hợp, ít ai có thể phủ nhận rằng Plato đã có tác động to lớn đối với sự phát triển của toán học. Học viện Plato ở Athens trở thành trung tâm toán học của thế giới, và từ ngôi trường này, xuất hiện các giáo viên và nghiên cứu viên hàng đầu đến vào giữa thế kỷ thứ tư TCN. Trong số này, nổi tiếng nhất là Eudoxus xứ Cnidus (khoảng 408 – 335 TCN), một học trò của Plato và người đã trở thành nhà toán học và nhà thiên văn học nổi tiếng nhất trong thời đại của mình.

Tài liệu chính dùng để soạn

[1] David M. Burton, *The History of Mathematics, An Introduction*, Seventh Edition, McGraw–Hill, 2011. Chapter 3: The Beginnings of Greek Mathematics, pp. 116 – 139.

[2] Euclid's *Elements of Geometry*, edited and provided with a modern English translation by Richard Fitzpatrick, Independently published, 2008, 544 p.

[3] David Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy*, Second Edition, Clarendon Press, Oxford, 1999, 441 p.

[4] Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1921, Volume 1: From Thales to Euclid, pp. 170 – 315.

[5] Victor J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, Third Edition, Addison–Wesley, 2009. Chapter 2: *The Beginnings of Mathematics in Greek*, pp. 40 – 49.

[6] Uta C. Merzbach and Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, Third Edition, John Wiley & Sons, 2011, pp. 65 – 80.

[7] George Johston Allman, *Greek Geometry, From Thales to Euclid*, Dublin Universty Press, 1885, 432 p.

[8] R. Lloyd, *Early Greek Science: Thales to Aristotle*, 1970, Chatto & Windus, London, 156 p.

[9] Arpad Szabo, *The beginnings of Greek Mathematics*, Springer, 1978, 363 p.

TÀN CUỘC KHÔNG XE

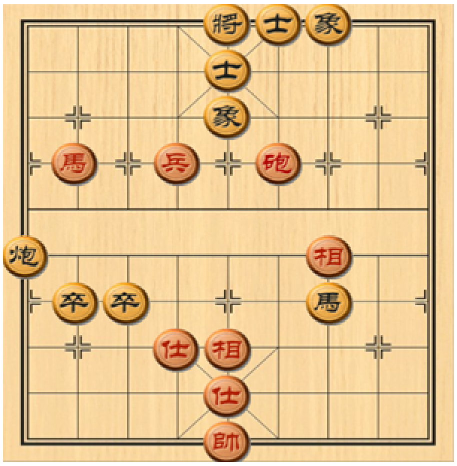
TRẦN VĂN DŨNG[1]

Tàn cuộc Pháo–Mã–Chốt, thường được gọi với những cái tên khác như: Cờ tàn không Xe hay cờ tàn đi bộ ... Đó là loại hình tàn cuộc rất thường hay gặp trong thực chiến. Lúc này ván đấu đã đi đến giai đoạn cuối cùng, đôi bên đã đổi hết 2 quân Xe chủ lực, và đây chính là thời điểm các kỳ thủ cần phải vận dụng hết nội lực cờ tàn, đặc biệt là kỹ năng sử dụng những quân "nhẹ" nhằm giành lấy kết quả có lợi nhất.

Tuy nhiên, đối với các kỳ thủ nghiệp dư, chưa có nhiều kinh nghiệm và kiến thức về cờ Tàn thường cảm thấy rằng Pháo Mã Chốt rất khó sử dụng nếu thiếu đi quân Xe trợ chiến. Vì lẽ đó, khi đối diện với những hình cờ không Xe thường gặp không ít lúng túng, điều quân thiếu kế hoạch làm cục diện trở nên rối ren và phức tạp hơn, đi những nước đi tự làm khó, bỏ qua những cơ hội chiến thắng, thậm chí còn có thể để thua trong những tình huống hòa cơ bản.

Ngày nay, trình độ chung của các kỳ thủ ngày càng được cải thiện, những cuộc chiến đỉnh cao xuất hiện càng nhiều, tàn cuộc không xe lại càng đóng vai trò quan trọng hơn bao giờ hết. Để xử lý tốt loại hình này, đòi hỏi các kỳ thủ phải có nền móng kiến thức cờ tàn thật sự vững chắc, đồng thời cũng cần sở hữu kỹ năng điều động các quân khéo léo và uyển chuyển, nhạy bén trong nghệ thuật chuyển đổi hình trận.

Trong bài viết kỳ này, tác giả sẽ gửi đến bạn đọc Pi những ván cờ tàn sử dụng những nước đi Pháo Mã Chốt đặc sắc. Mong rằng sau những ví dụ này, bạn đọc sẽ rút ra được những kinh nghiệm bổ ích khi xử lý những hình cờ tàn không Xe, một trong những vẻ đẹp của nghệ thuật Tượng Kỳ.



Hình 1.

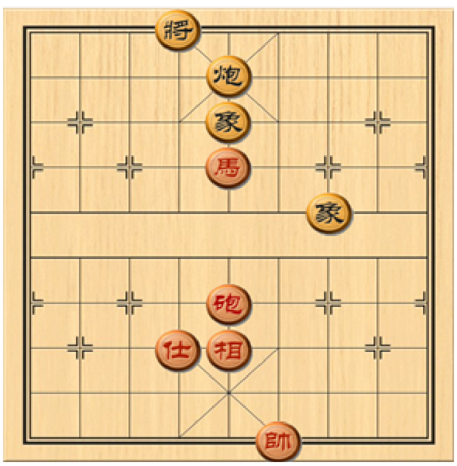
1. Hình 1, nhìn qua có vẻ như hình cờ đang cân bằng, Đôi bên đều còn Pháo Mã Chốt và đầy đủ Sỹ Tượng. Thậm chí Đen có lợi thế hơn vì hơn 1 Chốt qua sông và hệ thống Sỹ Tượng của Đỏ ở vị trí không ổn định. Nhưng Đỏ được quyền đi trước và tung ra những đòn đánh để kết thúc ván cờ như sau:

[1] *Trung tâm Quy hoạch và Điều tra tài nguyên – môi trường biển khu vực phía Nam.*

1) M8.7 Tg−4 **2)** P4/1 Tg.1(∗) **3)** P4 − 6 S5.4 **4)** C6.1 Tg−5 **5)** P6 − 8 Tg−6(∗∗) **6)** C6 − 5 S6.5 **7)** M7/6 S5.4 **8)** P8 − 4 (1 − 0)

(∗): *Nhận thấy các quân đang ở vị trí thuận lợi Đỏ ngay lập tức có 2 nước liên tục điều quân đến vị trí thuận lợi, trước tấn Mã chiếu ngọa tào, sau thoái Pháo dọa sát. Do đó, bắt buộc Đen phải di chuyển Tướng đến vị trí kém an toàn.*

(∗∗): *Liên tục là những nước quấy rối và dọa sát của Đỏ, tạo điều kiện cho quân Chốt ngang nhiên áp sát trận địa, bẻ bớt Sỹ Tượng nhưng Đen chỉ biết chống trả một cách bị động. Thắng lợi giành cho Đỏ chỉ còn là vấn đề thời gian.*



Hình 2.

2. Hình 2, đây là một trong những dạng căn bản của cờ tàn Pháo, Mã. Đỏ đang có lợi thế khi hơn 1 quân chủ lực. Tuy nhiên. Bên Đen còn Pháo và song Tượng phòng thủ cũng rất dẻo dai, nếu bên cầm Đỏ thiếu kinh nghiệm sẽ không dễ gì giành chiến thắng. Đỏ cần phải chơi như sau:

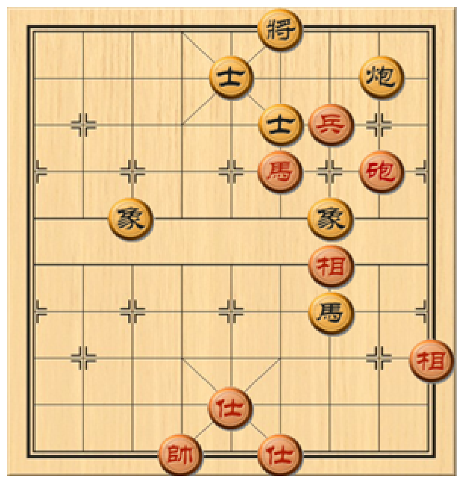
1) M5.7 P5 − 3(∗) **2)** P5.3 Tg.1 **3)** T5.3 T5.3 **4)** P5 − 4 T3/5 **5)** Tg4 − 5(∗∗) T7/9 **6)** P4/5 Tg/1 **7)**P4 − 7 T5.7 **8)** P7 − 6(∗∗∗) (1 − 0)

(∗): *Tấn Mã vừa chiếu Tướng, vừa dùng Pháo bắt Mã một nước đi cần thiết để khóa quân đối phương, để tránh mất quân, Đen phải bình Pháo cản Mã Đỏ.*

(∗∗) *Liên tiếp là những nước đi rất có ý đồ của Đỏ, nhằm dùng mặt Tướng chiếm lấy trung lộ, chuẩn bị thoái Pháo phối hợp với Sỹ để lấy mạng tướng đối phương.*

(∗∗∗): *Đỏ thoái pháo về cung Tướng, vừa dọa P4 − 6 sát cục lại vừa có thể đi P4 − 7 khi cần thiết.*

Nhìn chung, với dạng cờ tàn này, Mã tấn công tầm gần còn Pháo uy hiếp tầm xa; 2 quân này sẽ luân phiên đổi vai trò cho nhau, Mã khống chế thì Pháo sẽ là quân tìm cách chiếu hết và ngược lại.



Hình 3.

3. Hình 3, đôi bên đang có quân lực khá đồng đều, nhưng chỉ cần ưu thế 1 Chốt và 3 quân tấn công đang tập trung bên cánh phải, Đỏ đã kết thúc ván đấu như sau:

1) C3.1(∗) M7/9 **2)** P2.1 P8 − 9 **3)** P2.2 Tg−5(∗∗) **4)** M4.2 P9.2 **5)** C3 − 4 P9 − 8 **6)** M2.3(∗∗∗) S5/6 **7)** P2 − 1 P8/3 **8)** M3/4 T3/1 **9)** P1/1(∗∗∗∗) (1 − 0)

(∗): *Nhận thấy Pháo Đen đang ở vị trí khá xấu, Đỏ ngay lập tức tấn Chốt chiếm tiên thủ, cũng vừa để áp sát cung Tướng đối phương.*

(∗∗): *Ý muốn đổi quân cầu hòa của Đen được bộc lộ rất rõ ở nước M7/9, tất nhiên Đỏ không dễ gì chấp nhận điều đó. Sau khi tấn Pháo ép buộc Pháo Đen phải né tránh, Đỏ ngay lập* *tức tấn Pháo xuống tuyến đáy, đe dọa sát cuộc ngay lập tức.*

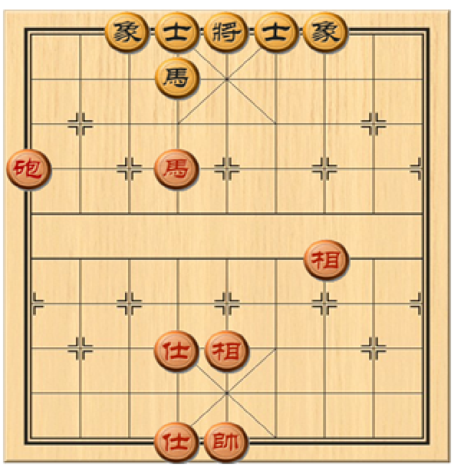
(∗∗∗)*: Sau một loạt nước điều quân, hệ thống Pháo Mã Chốt của Đỏ đã tập trung tại vị trí đắc địa, sẵn sàng lấy mạng Tướng địch bất cứ lúc nào.*

(∗∗∗∗)*: Mặc dù Đen rất tích cực trong việc phòng thủ, hết thoái Sỹ rồi lùi Pháo về làm dày tuyến đáy nhưng đều vô ích. Sau khi Đỏ đi P1/1, Đen nhìn thấy trước nước bình Chốt sát cục nhưng không có cách nào phòng thủ, Đen chấp nhận đầu hàng.*

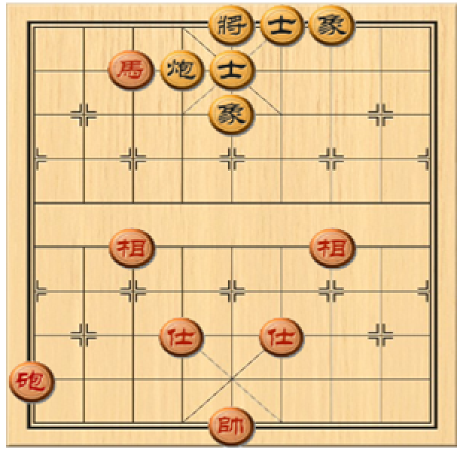
Chú thích: C: Chốt, X: Xe, M: Mã, P: Pháo, Tg: Tướng, S: Sỹ, T: Tượng, s: Sau.

Câu đố kỳ này

Cả 2 hình cờ dưới đây đều có đặc điểm là Đỏ đều hơn 1 quân chủ lực, đôi bên đều còn đầy đủ Sỹ Tượng, điểm khác biệt duy nhất là tại hình 4 Đen còn Pháo và hình 5 còn Mã. Chính sự khác biệt này tạo ra kết quả khác biệt. Câu hỏi đặt ra là, nếu đôi bên đi những nước đi chính xác, hình nào bên Đỏ giành chiến thắng và hình nào có kết quả hòa ?



Hình 4.



Hình 5.

Đáp án: Đối với những ai có một chút kiến thức về cờ tàn căn bản thì sẽ không mấy khó khăn để tìm ra đáp án trong 2 hình cờ trên. Nếu đôi bên đi chính xác thì Hình 4 sẽ có kết quả thắng và Hình 5 có kết quả hòa, cụ thể như sau:

Hình 4: **1)** M6.7 S4.5 2) P9/5 S5.4 3) P9 – 3 T7.9 4) P3 – 6 S6.5 5) T5/3 Tg–4 **6)** P6 – 7 T3.1 **7)** M7/9. Đen mất Tượng chắc chắn thua cuộc (1 – 0).

Hình 5: **1)** M7/8 S5.6 **2)** T7/5 S*s*.5 **3)** S6/5 P4.5 **4)** P9.4 P4 – 8 **5)** M8.7 Tg–4 **6)** P9 – 5 P8/3 **7)** M7/6 P8/2 **8)** T5/7 T5/3 **9)** T3/5 P8 – 6 **10)** M6/8 T3.5 **11)** M8.6 P6 – 7 **12)** P5 – 6 Tg–5 **13)** P6 – 4 T5/3. Mặc dù Đỏ hơn quân nhưng Đen phòng thủ vô cùng chắc chắn, hòa cuộc (1/2).