NGƯỜI KHÔNG CHUYÊN TÌM RA VIÊN GẠCH "EINSTEIN" BÍ ẨN*

ERICA KLARREICH

(Người dịch: Nguyễn Duy Anh và Lê Vũ Minh Trí[1])

Giữa tháng 11 năm 2022, David Smith [1], một kỹ thuật viên in ấn đã nghỉ hưu có niềm vui thú với xếp hình, hình học fractal và bản đồ đường xá, đang làm việc mình yêu thích: chơi với những hình khối. Nhờ một phần mềm gọi là "PolyForm Puzzle Solver" [2], ông đã dựng được một miếng gạch hình cái mũ trông khá khiêm tốn. Ông đã bắt đầu thử nghiệm xem có thể phủ kín được bao nhiêu phần màn hình với duy nhất viên gạch lát này, với điều kiện không để hai viên đè lên nhau hay để hở khoảng trống.

Thường thì khi ông tạo ra loại gạch mới, chúng sẽ hoặc tạo thành một họa tiết lặp, hoặc chỉ lát được một phần nhỏ màn hình. Viên gạch mũ có vẻ không thuộc cả hai loại này. Thế là Smith cắt 30 miếng giấy bìa màu hình viên gạch này và xếp chúng trên bàn. Rồi ông cắt thêm 30 cái nữa và tiếp tục xếp. "Tôi dần nhận ra rằng mỗi lần xếp là một cách lát tôi chưa thấy bao giờ," ông nói. "Đó là một viên gạch lát ranh mãnh". Ông gửi mô tả về viên gạch tới Craig Kaplan [3], một nhà khoa học máy tính ông quen tại Đại học Waterloo, Canada. Kaplan ngay lập tức bắt đầu tìm hiểu các tính chất của nó.

Ngày 20 tháng 3 vừa qua, Smith và Kaplan, cùng với 2 nhà nghiên cứu nữa, đã công bố [4] rằng đây chính là thứ mà các nhà toán học đã tìm kiếm suốt hơn năm thập kỉ: một viên gạch duy nhất mà ta có thể dùng để lát toàn mặt phẳng, nhưng chỉ theo những họa tiết không lặp lại bất kỳ khối gạch nào. Các nhà toán học gọi những viên gạch, hoặc các bộ viên gạch, có tính chất đó là "phi tuần hoàn" (aperiodic), trái với hình vuông hoặc lục giác là những hình có thể phủ cả mặt phẳng theo các họa tiết lặp lại (hay "tuần hoàn").

Viên gạch mũ ẩn chứa "đủ sự phức tạp để bẻ gãy trật tự tuần hoàn theo mọi quy mô", các nhà nghiên cứu khẳng định trong bài báo. Hơn nữa, họ nhận ra rằng viên gạch mũ là một trong vô số viên gạch khác nhau có cùng tính chất này.

"Tưởng xa tận chân trời mà gần ngay trước mắt," là những gì Doris Schattschneider, giáo sư toán danh dự tại Đại học Moravian, Pennsylvania nói về viên gạch này. Bà tả rằng bản thân đã "sửng sốt" trước phát hiện này.

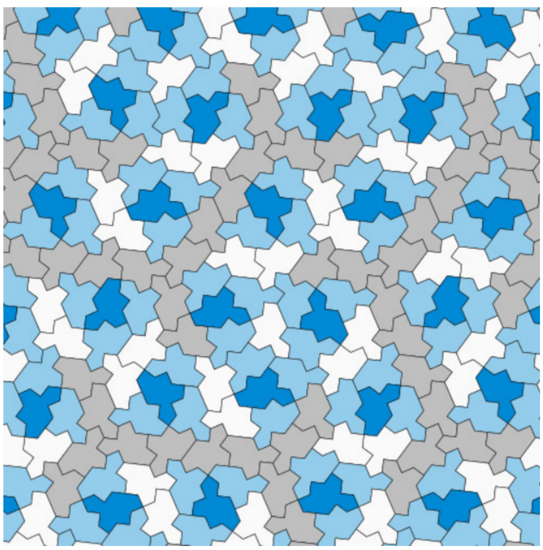
Các nhà toán học đã bắt đầu tìm kiếm một viên gạch như viên gạch mũ từ những năm

---

* *Nguồn: https://www.quantamagazine.org/hobbyist-finds-maths-elusive-einstein-tile-20230404.*

[1] *THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam.*

60 thế kỷ trước, khi Robert Berger [5] dựng ra 20426 loại gạch cùng nhau lát mặt phẳng một cách phi tuần hoàn. Công trình này là phát súng mở màn cho một cuộc đua dựng ra các bộ gạch có thể lát mặt phẳng phi tuần hoàn bằng ít loại hơn, lên đến đỉnh điểm là khám phá của Roger Penrose vào thập niên 70 với chỉ hai viên. Năm 1982, Dan Shechtman [6] đã tìm ra những dạng đối xứng tương tự như của gạch lát Penrose trong tự nhiên, dưới hình hài các cấu trúc gọi là giả tinh thể (quasicrystal), qua đó giúp ông đạt giải Nobel Hóa học năm 2011.



Viên gạch mũ chỉ là một trong một họ các viên gạch phi tuần hoàn

Từ ấy, các nhà toán học vẫn không ngừng tìm kiếm một loại gạch duy nhất có thể lát mặt phẳng 2 chiều một cách phi tuần hoàn, mà không cho phép kẽ hở hay gạch đè lên nhau. Ludwig Danzer, một nhà hình học người Đức, đã tinh nghịch đặt tên cho loại gạch như thế là một "einstein" – chơi chữ của cụm từ tiếng Đức "ein stein", nghĩa là "một miếng".

Vào những năm 1990, hai nhóm khác nhau [7] đã tìm ra cách chồng kề nhau một loại gạch 10 cạnh để phủ mặt phẳng. Trong thập kỷ sau đó, Joan Taylor [8], một nhà toán học nghiệp dư ở Tasmania, đã khám phá ra một hình với nhiều miếng không liền với nhau [9]. Cùng với Joshua Socolar [10], một nhà vật lý tại Đại học Duke, họ đã chứng minh được hình này có thể lát mặt phẳng một cách phi tuần hoàn [11]. Và mới năm ngoái, Rachel Greenfield [12] từ Viện Nghiên cứu Cao cấp Princeton và Terence Tao [13] từ Đại học California, Los Angeles đã phát hiện ra một hình trong không gian nhiều chiều [14] có thể lát không gian một cách phi tuần hoàn mà không cần quay hay lật.

Nhưng chưa ai tìm được một "einstein" đích thực – một hình 2 chiều đơn giản phủ mặt phẳng một cách phi tuần hoàn. Cuối cùng, giới toán học bắt đầu nghi ngờ sự tồn tại của chúng, theo lời Marjorie Senechal [15], một nhà nghiên cứu về lát gạch và giáo sư danh dự tại Đại học Smith. Bà cho biết thêm: việc một "einstein" đơn giản như viên gạch mũ của Smith lù lù trước mắt, chờ đợi được tìm ra là một sự thật "khó tin".

Theo bà phỏng đoán, có lẽ lý do viên gạch mũ tránh được sự tìm kiếm đến tận bây giờ là do nhiều nhà toán học đã tập trung vào các hình đối xứng kiểu "cấm kỵ" – những kiểu mà không thể có trong các loại gạch lát tuần hoàn. Chẳng hạn như gạch lát Penrose có "đối xứng gấp 5" (đối xứng qua phép quay 72 độ quanh tâm), như ở các ngũ giác đều hay hình ngôi sao. Các ngũ giác đều không thể phủ mặt phẳng, nên bắt đầu từ các "đối xứng gấp 5" là khởi điểm khá tự nhiên.

Trái lại, viên gạch mũ chẳng có đối xứng nào cả, và "đơn giản đến mức tầm thường", các tác giả bình luận. Cách lát này có quan hệ mật thiết với một cách lát tuần hoàn: lưới tổ ong hình lục giác. Ta có thể tạo ra cách lát hình mũ từ cách lát bằng lục giác như sau: trước hết nối các trung điểm các cặp cạnh đối của lục giác. Lục giác sẽ bị chia thành 6 hình "cánh diều". Mỗi viên gạch mũ được cấu thành từ 8 hình cánh diều liền nhau, kết hợp từ các lục giác kề nhau. Bất kỳ ai đầu tư chút sức lực, cùng một cái bút dạ và sàn nhà vệ sinh gạch hình lục giác cũng có thể viền được một cách phủ mặt phẳng bằng hình mũ.

Khám phá của David Smith được coi là một khám phá khó tin.

Viên gạch mũ, Senechal nói, chỉ ra rằng sự liên kết giữa gạch lát tuần hoàn và phi tuần hoàn chặt chẽ hơn ta tưởng.

Kể từ lúc thông báo phát hiện này, các nhà toán học và người yêu thích lát gạch đã đổ xô tìm tới những loại gạch mới này, cắt chúng ra từ giấy, in 3–D, và làm trang trí họa tiết cho mũ và bánh quy của họ. Phong trào ấy đem lại một cảm giác "hơi siêu thực" cho Smith, một cư dân tại thành phố ven biển Bridlington phía bắc nước Anh. "Tôi không quen với mấy việc kiểu như thế này".

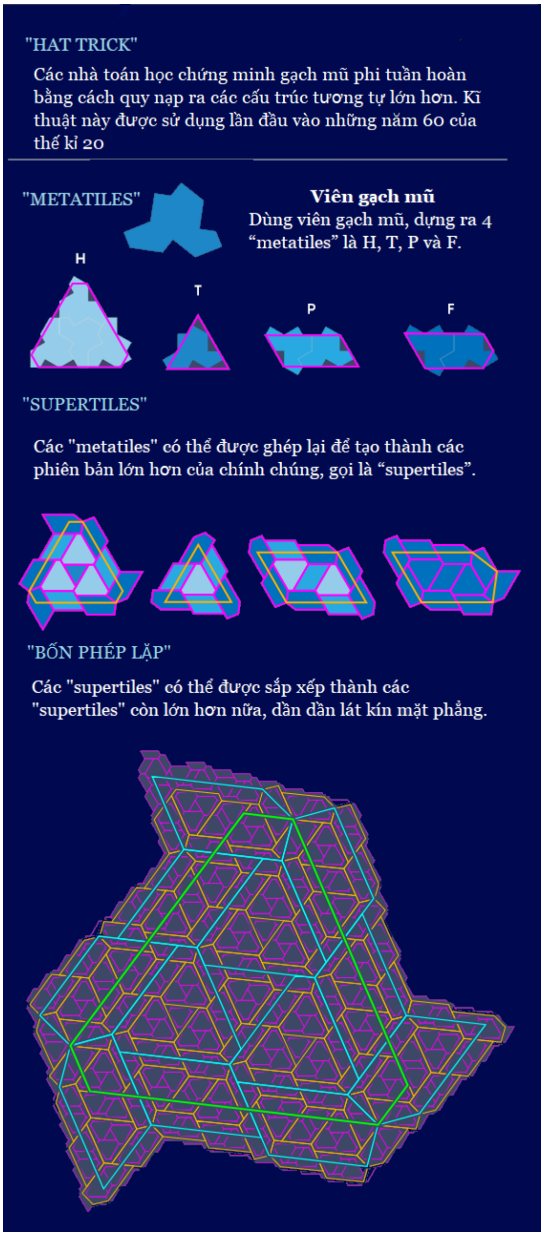
Nhưng đây không phải là lần đầu tiên một cá nhân nghiệp dư với niềm đam mê to lớn tạo đột phá trong lát gạch. Robert Ammann, một nhân viên phân loại thư, đã độc lập tìm ra một trong các bộ gạch lát Penrose [16] vào những năm 70. Marjorie Rice, một bà nội trợ ở California, tìm ra cả một họ gạch lát hình ngũ giác [17] vào năm 1975. Và ta có Joan Taylor cùng gạch lát Socolar – Taylor. Có lẽ những người như họ, khác với các nhà toán học, "không biết về độ khó của bài toán, vì thế không bị áp lực tâm lý", Senechal nói.

Với các viên gạch có thể lát mặt phẳng một cách tuần hoàn, thì dùng chúng để lát mặt phẳng một cách không tuần hoàn là tương đối đơn giản. Ví dụ như đặt ngang một vài quân domino trong khi các quân domino khác để dọc. "Nghệ thuật thực sự là tìm một viên gạch với khả năng lát mặt phẳng, nhưng không thể làm vậy một cách tuần hoàn." Socolar nói.

Ta không thể tạo ra một thuật toán xác định được liệu một tập hợp các viên gạch nào đó có thể lát mặt phẳng hay không (dù theo cách tuần hoàn hay phi tuần hoàn đi chăng nữa). Nên sau khi được Smith giới thiệu viên gạch mũ, Kaplan đã sử dụng một chương trình ông viết có khả năng đặt các viên gạch bao quanh một viên gốc và mở rộng dần dần từ đó. Ngoài các viên gạch lát mặt phẳng tuần hoàn, chưa ai từng tìm được loại gạch lát nào mà có thể lát quá 6 vòng quanh viên gạch gốc. Lần này, chương trình cứ chạy và chạy mãi, và nó lát tới tận 16 vòng gạch mũ trước khi Kaplan dừng chương trình vì đã thu thập đủ dữ liệu.

Trong khi đó, trước sự kinh ngạc của Kaplan, Smith có một khám phá mới: một viên gạch thứ hai, hình dạng giống một con rùa, cũng thuộc loại phi tuần hoàn. "Chỉ ra được 2 einstein liên tiếp thật là ngoài sức tưởng tượng," nhóm nghiên cứu viết.

Giữa tháng 1, Smith và Kaplan đã tuyển dụng được 2 nhà nghiên cứu nữa: Chaim Goodmain–Strauss [18], một nhà toán học ở Bảo tàng Toán học Quốc gia và Đại học Arkansas, và Joseph Samuel Myers [19], một kỹ sư phần mềm ở Cambridge, Anh, với bằng tiến sỹ tổ hợp. Myers dốc toàn bộ thời gian rảnh của mình cho viên gạch mũ, và chỉ trong hơn một tuần, ông đã chứng minh được nó phi tuần hoàn. "Chúng tôi khá sốc bởi tốc độ ông ấy giải bài toán này," Kaplan nói.



Chứng minh này được biến tấu từ một phương pháp của Berger vào những năm 1960. Phương pháp đó bao gồm việc ghép một số viên gạch lại với nhau, tạo thành những phiên bản lớn hơn của chính chúng, hình thành một cấu trúc phân chia đẳng cấp. Đầu tiên, Myers xác định bốn hình trung gian được tạo từ viên gạch mũ, gọi là H, T, P và F. Ví dụ, viên gạch H được tạo ra từ 4 viên gạch mũ, ghép lại thành một hình hao hao một tam giác cụt ở các góc. Myers chứng minh rằng có thể ghép 4 hình lại với nhau để tạo ra vẫn 4 hình đó với kích thước lớn hơn. Chẳng hạn, có thể tạo ra một viên gạch H lớn bằng cách xếp ba viên gạch H quanh một viên gạch T, rồi ghép các viên gạch P và F xung quanh hình vừa tạo.

Phương pháp này giúp ta dựng ra những viên gạch lớn dần. Có thể bắt đầu với bất kỳ loại gạch nào, chẳng hạn như viên gạch H, phóng to nó lên, và lấp đầy các khe hở bằng 4 hình trung gian H, T, P, F. Ta có thể lặp đi lặp lại việc này vô số lần để tạo ra một cấu trúc phân cấp từ những hình này, từ đó lát kín mặt phẳng. Đơn vị cơ bản của cấu trúc chính là những viên gạch mũ.

Họ đã chứng minh được cách lát hình thành từ các cấu trúc phân cấp này không bao giờ tuần hoàn. Đồng thời họ cũng chỉ ra rằng đó là cách duy nhất để phủ mặt phẳng bằng các hình mũ. Vì thế nên cách phủ mặt phẳng bằng các viên gạch mũ không thể tuần hoàn. "Một kết quả rất tuyệt vời", Socolar cho hay.

Vậy là còn lại loại gạch lát thứ hai Smith phát hiện: con rùa. Liệu chăng việc một người đàn ông khám phá ra tận hai loại lát gạch phi tuần hoàn cùng lúc, trong khi phần còn lại của nhân loại bó tay trong suốt 50 năm, đơn thuần là một sự trùng hợp tuyệt diệu? Viên gạch mũ và "con rùa" nhìn giống nhau đến bất ngờ, khiến các nhà nghiên cứu nghi ngờ rằng con rùa cũng là một viên gạch phi tuần hoàn. Nhưng nghi ngờ vẫn chỉ là nghi ngờ, không phải chứng minh.

Thế rồi Myers có một khám phá: hóa ra, cả cái mũ và con rùa đều thuộc về một họ gồm vô số viên gạch lát mặt phẳng theo cùng một cách.

Mỗi viên gạch mũ có 13 cạnh: 6 dài, 6 ngắn tương ứng với các cạnh hình cánh diều, cộng với một cạnh ghép từ hai cạnh cánh diều ngắn. Bằng cách thay đổi kích cỡ độ dài các cạnh của viên gạch mũ, ta có thể thu được vô hạn không đếm được các viên gạch phi tuần hoàn. Tưởng tượng một thanh trượt:

di sang trái khiến cạnh ngắn (cùng với một cạnh ghép kể trên) ngắn đi; di sang phải thì cạnh dài nhỏ lại. "Con rùa" nằm về bên phải so với viên gạch mũ, nhưng đồng thời cũng có vô số hình khác thuộc kiểu tương tự.

Nếu ta đẩy thanh trượt hết nấc về bên trái, cạnh ngắn sẽ biến mất, viên gạch lúc này có hình chữ V 6 cạnh; đẩy hết nấc sang phải thì cạnh dài biến mất và ta được một hình bảy cạnh được đặt tên là "sao chổi". Khác với viên gạch mũ, gạch hình chữ V và hình sao chổi có thể được dùng để lát mặt phẳng một cách tuần hoàn. Hình ở trung tâm thanh trượt, tức cạnh dài và cạnh ngắn bằng nhau, cũng có tính chất này.

Craig Kaplan, nhà khoa học máy tính ở đại học Waterloo, Canada.

Myers còn nhận ra rằng mình có thể sử dụng đặc tính hình học của viên gạch chữ V và sao chổi để chứng minh là tất cả các hình dọc theo thanh trượt, trừ hai đầu và trung điểm, đều là gạch loại phi tuần hoàn. Lập luận này, được Kaplan gọi là "một nước đi thiên tài của Toán học", hoàn toàn mới lạ với bộ môn lát gạch. Trước đây, lĩnh vực này chỉ có 3 cách tiếp cận chính để chứng minh tính phi tuần hoàn, theo lời Goodman-Strauss. "Giờ ta có cách thứ tư."

Các nhà toán học đang cố gắng thấm phương pháp chứng minh mới này. "Tôi phải ngồi lại và nghiêm túc dành thời gian cho thứ này," Senechal nói.

Một câu hỏi tự nhiên, Greenfield nói, là liệu rằng có thể tìm được một nguồn nào đó tạo ra các cách lát mới không. Năm 1981, Nicholaas de Brujin [20] đã chứng minh được các cách lát Penrose là hình chiếu xuống không gian 2 chiều của các viên gạch lát tuần hoàn mặt phẳng 5 chiều. "Nếu tương tác hoặc cấu trúc của những cách lát (mới) này tương ứng với một cách lát gạch tuần hoàn trên không gian nhiều chiều hơn, điều ấy sẽ thực sự thú vị để tìm hiểu." Greenfield nói.

Với tư cách một nhà vật lý, Socolar đã bắt đầu khám phá tính chất vật liệu của cách lát mới này. Ông thấy rằng: kiểu nhiễu xạ khi ánh sáng chiếu qua loại gạch lát này có những đỉnh dốc tương tự như ở giả tinh thể. Kể cả khi ấy, cách lát bằng gạch hình mũ vẫn "trông khác hẳn với tất cả những thứ tôi từng thấy trước đây", ông khẳng định.

Trong lúc ấy, Smith chưa xong việc với viên gạch ranh mãnh của ông. Ông hiện dự định khám phá tiềm năng nghệ thuật và cách phối màu để làm nổi bật họa tiết của các viên gạch này. "Dường như nó có thái độ riêng," ông nói. "Tôi nghĩ ta nên tôn trọng khi làm việc với nó."

Bình luận của các dịch giả: Có ý kiến cho rằng cái mũ chưa thể được tính là "einstein" do thực chất chúng ta cần dùng tới cả cái mũ và viên gạch đối xứng trục với nó để lát toàn mặt phẳng, và hai viên gạch có thể tính là khác nhau. Tuy nhiên, đúng như lời hứa, David Smith đã có một phát hiện mới: một trong các họ hàng đặc biệt của cái mũ, gọi là Tile$(1, 1)$, có thể lát mặt phẳng một cách phi tuần hoàn nếu như ta cấm úp ngược viên gạch lại để ghép. Bằng cách điều chỉnh các cạnh của Tile$(1, 1)$, ông thu được một họ các viên gạch gọi là bóng ma. Lần này, mỗi bóng ma đều tự nó lát được mặt phẳng phi tuần hoàn, kể cả khi cho phép úp ngược viên gạch này để ghép. Bài báo về phát hiện này [21] được đăng lên arXiv vào cuối tháng 5 năm 2023, tại thời điểm đăng bài hiện chúng tôi chưa rõ tính xác thực.

Các liên kết trong bài viết

[1] https://the-orangery.weebly.com/
[2] https://www.jaapsch.net/puzzles/polysolver.htm
[3] https://cs.uwaterloo.ca/ csk/
[4] https://arxiv.org/abs/2303.10798
[5] https://www.ams.org/books/memo/0066/
[6] https://www.engineering.iastate.edu/people/profile/dannys/
[7] https://link.springer.com/article/10.1007/BF00239998
[8] http://taylortiling.com/
[9] https://sfb701.math.uni-bielefeld.de/preprints/sfb10015.pdf
[10] https://scholars.duke.edu/person/socolar
[11] https://arxiv.org/abs/1003.4279v2
[12] https://www.math.ias.edu/ rgreenfeld/
[13] https://www.math.ucla.edu/ tao/
[14]https://www.quantamagazine.org/nasty-geometry-breaks-decades-old-tiling-conjecture-20221215/
[15] http://www.science.smith.edu/ senechal/
[16] https://link.springer.com/article/10.1007/BF02985414
[17] https://www.quantamagazine.org/marjorie-rices-secret-pentagons-20170711/
[18]https://fulbright.uark.edu/departments/math/directory/index/uid/strauss/name/Chaim+Goodman-strauss/
[19] https://www.polyomino.org.uk/
[20] https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/1385725881900172?via%3Dihub
[21] https://arxiv.org/abs/2305.17743

LỊCH SỬ CỦA GIẢ THUYẾT WEIL*

J. A. DIEUDONNÉ

(Người dịch: Phạm Khoa Bằng)

Câu chuyện của "các giả thuyết Weil" là một ví dụ kỳ diệu của trí tưởng tượng toán học, và là một trong những thí dụ đáng ngạc nhiên nhất biểu lộ sự thống nhất cơ bản của toán học. Những ý tưởng cốt lõi dẫn tới chứng minh của chúng tới từ sáu người: E. Artin, F. K. Schmidt, H. Hasse, A. Weil, A. Grothendieck, và P. Deligne, trong khoảng năm mươi năm (1923 – 1973).

1. Số nghiệm của phương trình đồng dư

Một cách đủ thích hợp, câu chuyện, như mọi vấn đề trong lý thuyết số, bắt đầu từ Gauss. Trong công trình về luật thuận nghịch bình phương của mình, ông đưa ra cái ngày nay được gọi là tổng Gauss (phổ biến nhất là tổng $\sum_{x=0}^{p-1} \exp(2\pi i x^2/p)$ với p nguyên tố); để tính các tổng này, bằng một số lập luận sơ cấp, ông suy ra cần tính số nghiệm của các phương trình đồng dư có các dạng

$$\begin{aligned} ax^3 - by^3 &\equiv 1 \pmod{p}, \\ ax^4 - by^4 &\equiv 1 \pmod{p}, \\ y^2 &\equiv ax^4 - 1 \pmod{p} \end{aligned} \tag{1}$$

trong đó a, b là các số nguyên cố định không chia hết cho p, nghiệm (x, y) được xét theo đồng dư modulo p (như vậy các phương trình đồng dư (1) được xem như các phương trình trong trường $\mathbb{F}_p$); và p *chạy* trong một tập vô hạn các số nguyên tố; chúng ta đi tìm những biểu diễn *tiệm cận* (dưới dạng những hàm đơn giản của p) của số lượng các nghiệm. Một thời gian ngắn sau, Jacobi nhận xét rằng, ngược lại, bằng cách sử dụng các tính chất cơ bản của tổng Gauss, ta có thể thu được một đánh giá tốt về số nghiệm trong các trường hợp tổng quát hơn, ở đó các phương pháp sơ cấp trở nên cồng kềnh. Sau Jacobi, gần như không có nhiều tiến triển trong chủ đề này cho tới khi Hardy và Littlewood, trong khi nghiên cứu bài toán Waring để đưa ra các tính chất của "chuỗi kỳ dị", thấy rằng cần phải đưa ra một đánh giá tiệm cận cho số nghiệm của phương trình đồng dư

$$x_1^k + \ldots + x_r^k \equiv 0 \pmod{p}, \tag{2}$$

trong đó p là một số nguyên tố chạy tới $+\infty$. Hai ông đã sử dụng phương pháp của Jacobi cho mục đích này; tổng quát hơn, năm 1949, cả Hua-Vandier và A. Weil đã độc lập chứng minh rằng phương pháp này có thể đánh giá số nghiệm N của những phương trình

$$a_0x_0^{k_0} + \ldots + a_rx_r^{k_r} = 0 \ (a_0, \ldots, a_r \neq 0) \tag{3}$$

Xuất bản lần đầu trong: The Mathematical Intelligencer 10, Springer, Berlin Heidelberg New York (1975) và được trích lại trong [1] trong mọi *trường hữu hạn* $\mathbb{F}_q$ với $q = p^m$ phần tử; kết quả được đưa ra

$$N = q^r + O(q^{(r+1)/2}). \tag{4}$$

Kết quả tương tự được đưa ra bởi Davenport (1931) và Mordell (1933) cho các phương trình dạng $y^m = P_n(x)$ trên $\mathbb{F}_p$, trong đó P_n là một đa thức bậc n; với một số giá trị m,n nhỏ, họ thu được các đánh giá có dạng $N = p + O(p^{\phi(m,n)})$ trong đó $1/2 < \phi(m,n) < 1$.

2. Về hàm Zêta

Hãy để chúng tôi nhắc lại các tính chất cổ điển của hàm zêta Riemann: nó xác định với $\mathscr{R}(s) > 1$ bởi chuỗi $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, và thỏa mãn phương trình Euler

$$\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1} \tag{5}$$

trong đó tích chạy trên tập tất cả các số nguyên tố. Riemann chứng minh rằng ζ có thể thác triển thành một hàm phân hình trên mặt phẳng phức với một cực duy nhất tại $s = 1$, và nếu đặt

$$\xi = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s),$$

thì ξ là một hàm chỉnh hình trên toàn bộ mặt phẳng phức và thỏa mãn phương trình hàm $\xi(s) = \xi(1-s)$. Hơn nữa ông đề xuất *giả thuyết Riemann* (vẫn chưa được chứng minh) rằng mọi nghiệm của ξ nằm trên đường thẳng $\mathscr{R}(s) = 1/2$.

Một thời gian ngắn sau, Dedekind mở rộng lý thuyết của Riemann lên một trường số K (mở rộng hữu hạn của $\mathbb{Q}$), bằng cách định nghĩa $\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} (N\mathfrak{a})^{-s}$, trong đó $\mathfrak{a}$ chạy trên tất cả các ideal của vành $\mathfrak{o}$ các số đại số nguyên trong K, *chuẩn* $N\mathfrak{a}$ là số phần tử của vành $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$. Ông mở rộng công thức Euler thành

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} (1-(N\mathfrak{p})^{-s})^{-1}, \tag{6}$$

trong đó tích chạy trên tất cả các ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$ của $\mathfrak{o}$; rất nhiều năm sau Hecke chứng minh rằng ζ_K có thể thác triển thành một hàm phân hình và thỏa mãn một phương trình hàm tương tự như phương trình hàm Riemann cho ξ.

Một cách hình thức, ta thấy rằng phương trình (6) chỉ dùng hai tính chất của vành $\mathfrak{o}$: 1) $\mathfrak{o}$ là một vành Dedekind: 2) trường $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ là hữu hạn với mọi ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$: thật vậy, nếu $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{\nu_1}\ldots\mathfrak{p}_r^{\nu_r}$ là một phân tích thành các ideal nguyên tố của ideal $\mathfrak{a}$ thì $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ đẳng cấu với tích trực tiếp của các $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i^{\nu_i}$, và với mọi ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$, mỗi $(\mathfrak{o}/\mathfrak{p})$–module $\mathfrak{p}^h/\mathfrak{p}^{h+1}$ đẳng cấu với $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$; điều đó chứng tỏ rằng chuẩn là nhân tính, từ đó suy ra (6) một cách hình thức (chứng minh tính hội tụ của tích vô hạn cần một số ước lượng đơn giản về số các ideal nguyên tố với chuẩn cho trước). Năm 1923, E. Artin nhận xét rằng các tính chất này đúng cho các vành định nghĩa theo cách sau: bắt đầu với một trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$, xét trường $K_0 = \mathbb{F}_q(T)$ các phân thức hữu tỷ, và một mở rộng toàn phương $K = K_0(v)$ với $v^2 = P(T)$, trong đó P là một đa thức không có nghiệm bội. Khi đó bao đóng nguyên $\mathfrak{o}$ của $\mathbb{F}_q[T]$ trong K thỏa mãn các tính chất 1) và 2), $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ là một *mở rộng hữu hạn* của $\mathbb{F}_q$ với mỗi ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$; rất dễ để chứng minh chuỗi và tích vô hạn trong định nghĩa của ζ_K hội tụ với $\mathscr{R}(s) > 1$. Hơn nữa Artin còn thấy rằng lý thuyết này đơn giản hơn của Dedekind rất nhiều, lý do là các hàm của ông có thể viết dưới dạng $Z(q^{-s})$ trong đó $Z(u)$ là một *hàm hữu tỷ* với hệ số trong $\mathbb{Q}$; phương trình hàm biểu diễn thương $Z(1/qu)/Z(u)$ bởi một hàm hữu tỷ với không điểm và cực cho trước; ông ấy sau đó giả thuyết rằng không điểm của $Z(u)$ tất cả đều nằm trên đường tròn $|u| = q^{1/2}$ và tự kiểm chứng giả thuyết này với rất nhiều đa thức P bậc nhỏ.

Bây giờ các ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$ sao cho $\mathfrak{o}/\mathfrak{p} \cong \mathbb{F}_q$ $(N\mathfrak{p} = q)$ tương ứng một-một với các đồng cấu $\mathfrak{o} \to \mathbb{F}_q$; mọi đồng cấu như vậy gửi (T, v) tới $(a, b) \in \mathbb{F}_q^2$ thỏa mãn $b^2 = P(a)$. Nói cách khác số nghiệm của phương trình $y^2 = P(x)$ trong $\mathbb{F}_q^2$ chính là số lượng N_1 các ideal nguyên tố kiểu này; tuy nhiên từ phương trình Euler (6) suy ra luôn rằng

$$\log Z(u) = N_1 u + \cdots$$

gần $u = 0$, như vậy nghiên cứu $Z(u)$ giúp ta hiểu về N_1. "Giả thuyết Riemann" của Artin sinh ra đánh giá

$$|N_1 - q| \leq c \cdot q^{1/2}, \tag{7}$$

và như vậy làm chặt hơn những kết quả trước đó của ông về bài toán đồng dư của Gauss.

3. Bước vào hình học đại số

Cho k là một trường giao hoán bất kỳ, người ta cố gắng hình dung tập nghiệm $(x_1, \ldots, x_r) \in k^r$ của một phương trình $P(x_1, \ldots, x_r) = 0$, với P là một đa thức bất khả quy trong $k[T_1, \ldots, T_r]$ xem như một "siêu mặt đại số affine" ("đường cong" với $r = 2$, "mặt" với $r = 3$) trong "không gian affine" k^r, Hơn nữa, với mọi mở rộng trường $K \supset k$, ta có thể xét các nghiệm của $P(y_1, \ldots, y_r)$ với giá trị y_i trong trường K *lớn hơn*, như vậy ta có một "siêu mặt đại số" V trong "không gian affine" K^r; việc các hệ số của P nằm trong k giờ được thay bởi việc nói V *xác định* trên k. Kinh nghiệm cho thấy việc chuyển đổi giữa ngôn ngữ hình học và trực giác sang những đa tạp "trừu tượng"chỉ có ích khi K là *đóng đại số* (hãy thử nghĩ về $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ khi $k = \mathbb{R}$). Ta sẽ hạn chế sự quan tâm xuống trường hợp $K = \overline{k}$, bao đóng đại số của k; hơn nữa, ta chỉ xét các siêu mặt V không kỳ dị trong $\overline{k}^r$, i.e. tại các điểm mà "siêu phẳng tiếp xúc" được định nghĩa duy nhất theo nghĩa thông thường (có nghĩa là tất cả các đạo hàm riêng không đồng thời triệt tiêu trong V). Với mọi điểm $x = (x_1, \ldots, x_r) \in V$, toạ độ x_i nằm trong $\overline{k}$, do đó có một mở rộng hữu hạn nhỏ nhất $k(x)$ của k chứa tất cả x_j và $[k(x) : k] = \deg(x)$ được gọi là *bậc* của điểm x. Nếu $\mathfrak{m}$ là hạt nhân của đồng cấu $k[T_1, \ldots, T_r] \to \overline{k}$ gửi mỗi T_i tới x_i thì $\mathfrak{m}$ là một ideal cực đại của $k[T_1, \ldots., T_r]$ và $k[T_1, \ldots, T_r]/\mathfrak{m}$ đẳng cấu với $k(x)$; ta viết $k(\mathfrak{m}) = k(x)$ và $\deg(\mathfrak{m}) = \deg(x)$; có thể chứng minh rằng mọi ideal cực đại $\mathfrak{m}$ của $k[T_1, \ldots, T_r]$ chứa $P(T_1, \ldots, T_r)$ ứng với một điểm x của V với bậc $\deg(\mathfrak{m})$.

Khi $k = \mathbb{F}_q$, đặt

$$Z_V(u) = \prod_{P \in \mathfrak{m}} (1 - u^{\deg(\mathfrak{m})})^{-1}; \tag{8}$$

hàm $Z(u)$ định nghĩa bởi E. Artin bằng với hàm $Z_C(u)$, trong đó C là "đường cong affine" $x_2^2 - P(x_1) = 0$ xác định trên $\mathbb{F}_q$. Một cách tổng quát ta gọi Z_V là *hàm zêta* của V. Các điểm của V trong $(\mathbb{F}_q)^r$ là các điểm mà $\deg(x)$ là ước của n; hiển nhiên số lượng các điểm như vậy $\leq q^{nr}$, như vậy số lượng các ideal cực đại $\mathfrak{m}$ mà $P \in \mathfrak{m}$, tương ứng với các điểm này, có ước lượng *tiên nghiệm* $\leq q^{nr}$, điều này chứng tỏ rằng (8) hội tụ với u nhỏ; hơn nữa, với u nhỏ ta có thể viết

$$\begin{aligned} uZ_V'(u)/Z_V(u) &= \sum_{P \in \mathfrak{m}} \frac{\deg(\mathfrak{m}) u^{\deg(\mathfrak{m})}}{1 - u^{\deg(\mathfrak{m})}} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{P \in \mathfrak{m}} \deg(\mathfrak{m}) u^{\nu \deg(\mathfrak{m})} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} N_\nu u^\nu \end{aligned} \tag{9}$$

trong đó N_ν là số điểm của V trong $(\mathbb{F}_{q^\nu})^r$.

Cách định nghĩa này có thể mở rộng cho các dạng đa tạp không kỳ dị khác, không nhất thiết phải bị nhúng trong "không gian affine" $\overline{k}^r$. Nói một cách theo lịch sử, ngôn ngữ của hình học đại số trong lý thuyết của các hàm zêta được giới thiệu vào năm 1931 bởi F. K. Schmidt, người nghiên cứu các *đường cong xạ ảnh* không kỳ dị trên trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$. Ông chứng minh rằng lý thuyết Dedekind–Weber của đường cong đại số trên $\mathbb{C}$ (bao gồm định nghĩa về giống và định lý

Riemann–Roch) có thể mở rộng cho đường cong xạ ảnh trên một trường đóng đại số $\overline{k}$ bất kỳ; điều này cho phép ông chứng minh rằng với mọi đường cong xạ ảnh không kỳ dị C với giống g định nghĩa trên $\mathbb{F}_q$, hàm zêta có thể biểu diễn dưới dạng

$$Z_C(u) = P_{2g}(u)/(1-u)(1-qu) \qquad (10)$$

trong đó tử số là một đa thức bậc $2g$ với hệ số nguyên và ta có một phương trình hàm

$$Z_C(1/qu) = (qu^2)^{1-g} Z_C(u). \qquad (11)$$

"Giả thuyết Riemann" cho C do đó nói rằng các không điểm của P_{2g} nằm trên đường tròn $|u| = q^{1/2}$; dễ thấy điều này tương đương với bất đẳng thức

$$|N_\nu - q^\nu - 1| \leq 2g \cdot q^{1/2} \text{ với mọi } \nu \geq 1. \qquad (12)$$

4. Mơ mộng về Tôpô đại số

Quay lại trường hợp siêu mặt V trong $(\overline{\mathbb{F}}_q)^r$, nhận xét rằng các phần tử của $\overline{\mathbb{F}}_q$ thuộc $\mathbb{F}_{q^n}$ chính là những phần tử mà $t^{q^n} = t$. Xét ánh xạ

$$\Phi : (x_1, \ldots, x_r) \mapsto (x_1^q, \ldots, x_r^q)$$

từ $(\overline{\mathbb{F}}_q)^r$ vào chính nó. Do hệ số của P nằm trong $\mathbb{F}_q$, do đó thỏa mãn $t^q = t$, ta có

$$P(\Phi(x)) = (P(x))^q,$$

do đó Φ ánh xạ V lên chính nó; hạn chế của Φ lên V được gọi là cấu xạ Frobenius của V. Năm 1936, Hasse nhận thấy rằng với một đường cong C, số N_ν chính là số điểm $x \in C$ thỏa mãn $\Phi^\nu(x) = x$; i.e. x là một *điểm bất động* của Φ^ν. Bây giờ, chúng ta hãy bỏ qua chuỗi các sự kiện mang tính niên đại mà giả vờ rằng ta đang làm việc với các đa tạp đại số không kỳ dị "cổ điển" X trong một không gian xạ ảnh phức. Từ thời của Picard và Poincaré người ta đã nhận thấy rằng hầu hết các tính chất của các đa tạp đại số được liên hệ chặt chẽ với các tính chất *đồng điều*. Trong phiên bản hiện thời (chủ yếu từ các công trình của Lefschetz và Hodge), với một đa tạp xạ ảnh không kỳ dị bất khả quy X chiều d trên $\mathbb{C}$ (do đó là một đa tạp khả vi chiều $2d$), các tính chất này xoay quanh *đại số đối đồng điều* $H^\bullet(X) = \bigoplus_i H^i(X)$ của X trên trường K với *đặc số* 0; nó là một đại số phân bậc trên K, thỏa mãn các tính chất sau:

(A) 1. Mỗi $H^i(X)$ là một K–không gian vector hữu hạn chiều, bằng 0 ngoại trừ $0 \leq i \leq 2d$;

2. Tồn tại một đẳng cấu tự nhiên $H^{2d}(X) \xrightarrow{\sim} K$, và với mỗi i, phép nhân trên $H^\bullet(X)$ cho ta một phép ghép cặp không kỳ dị $H^i(X) \times H^{2d-i}(X) \to H^{2d}(X) \xrightarrow{\sim} K$ (đối ngẫu Poincaré) cho phép ta đồng nhất $H^{2d-i}(X)$ với

$$H_i(X) = \mathrm{Hom}_K(H^i(X), K),$$

đồng điều của K tại chiều i.

3. Với các đa tạp không kỳ dị X, Y, tồn tại một đẳng cấu tự nhiên của các đại số phân bậc

$$H^\bullet(X) \otimes H^\bullet(Y) \cong H^\bullet(X \times Y)$$

(công thức Kunneth).

(B) Mọi cấu xạ $f : X \to X$ định nghĩa tự nhiên, với mỗi i, một đồng cấu tuyến tính $f^{(i)} : H^i(X) \to H^i(X)$, sao cho các $f^{(i)}$ với $0 \leq i \leq 2d$ cảm sinh một đồng cấu $f^\bullet : H^\bullet(X) \to H^\bullet(X)$ của các đại số phân bậc. Các *điểm bất động* của f là phép chiếu lên X của giao của đồ thị Γ của f và đường chéo Δ của $X \times X$; nếu Γ giao *hoành* với Δ tại mỗi điểm (nghĩa là các không gian tiếp xúc của chúng có giao chỉ là một điểm), số lượng điểm bất động của f được tính bởi *công thức vết Lefschetz*

$$N = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \mathrm{Tr}(f^{(i)}). \qquad (13)$$

(C) Nếu Y là một đa tạp con không kỳ dị của X với chiều $d-1$, các ánh xạ tuyến tính tự nhiên $H^i(X) \to H^i(Y)$ là song ánh với $i \leq d-2$ và đơn ánh với $i = d-1$.

(D) Lấy $h \in H^2(X)$ từ đối ngẫu Poincaré ứng với lớp đồng điều trong $H_{2d-2}(X)$ của một lát cắt siêu phẳng của X, và xét $L : a \to ha$ là phép nhân trái bởi h trong $H^\bullet(X)$; khi đó $L^{d-i} : H^i(X) \to H^{2d-i}(X)$ là một đẳng cấu với $i \leq d$.

Một lập luận đại số đơn giản cho thấy nếu một cấu xạ $f : X \to X$ thỏa mãn $f^{(2)}(h) = q \cdot h$ với $q > 0$ là một số hữu tỷ, và nếu $g_i = q^{-i/2} f^{(i)}$ (xem như một tự đồng cấu của $H^i(X) \otimes_K \overline{K}$), g_i là song ánh, và g_i^{-1} được đồng nhất với ${}^t g_{2d-i}$ bởi đối ngẫu Poincaré. Điều này suy ra rằng nếu α_{ij} là các giá trị riêng của $f^{(i)}$ trong $\overline{K}$, tập các phần tử $q^{i/2}\alpha_{ij}$ trùng với tập các phần tử $\alpha_{2d-i,j}/q^{d-(i/2)}$.

(E) Trong mỗi $H^i(X)$ với $i \leq d$ có một không gian con $A^i(X)$ ổn định dưới tác động của $f^{(i)}$ với mọi cấu xạ $f : X \to X$, và trên mỗi $A^i(X)$, ta có thể trang bị một cấu trúc không gian vector trên trường các số hữu tỷ cùng một *tích vô hướng* không kỳ dị, sao cho: với mỗi f thỏa mãn (D) thì mỗi g_i là ánh xạ *unita* với tích vô hướng này; điều này suy ra tất cả các giá trị riêng của $f^{(i)}$ (là các phần tử của $\overline{\mathbb{Q}}$) có giá trị tuyệt đối là $q^{1/2}$.

Quay lại với siêu mặt V xác định trên $\mathbb{F}_q$, *giả sử* ta có thể gán với nó một đại số phân bậc $H^\bullet(V)$ có tất cả các tính chất vừa nêu, hơn nữa $\Phi^{(2)}(h) = q \cdot h$ trong đó Φ là đồng cấu Frobenius. Dễ thấy đồ thị của Φ^v giao hoành với Δ; do đó, nếu α_{ij} là các giá trị riêng của $(\Phi^v)^{(i)}$, số N_v có thể cho bởi công thức

$$N_v = \sum_i (-1)^i \sum_j \alpha_{ij}^v; \qquad (14)$$

và do đó ta có (với $d = r - 1 = \dim(V)$)

$$Z_V(u) = \frac{P_1(u)P_3(u)\ldots P_{2d-1}(u)}{P_0(u)P_2(u)\ldots P_{2d}(u)} \qquad (15)$$

trong đó $P_i(u) = \deg(1 - u \cdot \Phi^{(i)})$ là một đa thức với hệ số nguyên. Nói riêng, $Z_V(u)$ là một hàm *hữu tỷ*; hơn nữa $Z_V(1/q^d u)$ nên có không điểm và cực giống với $Z_V(u)$ ngoại trừ khi $u = 0$, và ta nên có $|\alpha_{ij}| = q^{1/2}$. Cuối cùng, nếu tất cả hệ số của V là các lớp đồng dư mod p của các số nguyên, hệ số của một phương trình của một đa tạp không kỳ dị V_0 trong $\overline{\mathbb{Q}}^r$, bậc của mỗi P_i sẽ bằng số Betti thứ i của V_0.

Các phát biểu trên là *các giả thuyết Weil* cho Z_V.

5. Những "phương án thay thế" cho đối đồng điều của Hasse và Weil

Để hiểu tại sao Weil đã có thể đi tới những khái niệm táo bạo như vậy, ta phải quay lại những ý tưởng đầu tiên của Hasse trong việc chứng minh "giả thuyết Riemann" cho các đường cong *giống* 1 trên $\mathbb{F}_q$. Trong lý thuyết cổ điển của các đường cong không kỳ dị trên trường số phức, mỗi đường cong C được gán với *jacobian* $J = J(C)$, có thể xem như đối ngẫu Pontrjagin của nhóm đồng điều $H_1(C, \mathbb{Z})$; đối ngẫu này được dẫn ra từ dạng song tuyến tính $(\gamma, \omega) \mapsto \int_\gamma \omega$ định nghĩa trên các chu trình γ và các dạng vi phân abel chỉnh hình ω trên diện Riemann C ("chu kỳ" của ω trên γ). Nếu C có giống g thì $J(C)$ là một xuyến phức $\mathbb{C}^g/\Delta$ trong đó Δ là một nhóm con rời rạc với hạng $2g$, thỏa mãn các điều kiện song tuyến tính Riemann cổ điển. Ta có thể định nghĩa J một cách đại số, bằng cách xét các nhóm cộng G/G_i của các lớp của các ước bậc 0 trên C, modulo quan hệ tương đương tuyến tính: ta gắn mỗi ước D bậc 0, vốn có thể viết dưới dạng $\partial\gamma$ với 1-xích γ trên diện Riemann, một lớp $\phi(D)$ trong $\mathbb{C}^g/\Delta$ của vector $\left(\int_\gamma \omega_1, \ldots \int_\gamma \omega_g\right)$, trong đó các ω_j lập thành một cơ sở của không gian các dạng vi phân chỉnh hình; định lý Abel-Jacobi nói rằng phép tương ứng này là toàn ánh và có hạt nhân G_i. Từ đó có thể trang bị cho J một cấu trúc *nhóm đại số* (một trường hợp cụ thể của nhóm đại số trên $\mathbb{C}$ được biết đến như *các đa tạp abel*) với sự giúp đỡ của các điều kiện (siêu việt) song tuyến tính Riemann. Cuối cùng, nếu x_0 là một điểm trên C,

$$x \mapsto \phi((x) - (x_0))$$

là một cấu xạ từ C vào J và là đẳng cấu nếu $g = 1$.

Phương pháp đầu tiên của Hasse để làm việc với các đường cong C giống 1 xác định trên $\mathbb{F}_q$ là "nâng" C thành một đường cong C_0 "cổ điển" giống 1 xác định trên trường các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$: nếu E là trường các hàm hữu tỷ trên C, ông chứng minh rằng ta có thể xác định C_0 sao cho, nếu ω_1, ω_2 là các hàm chu kỳ của các hàm elliptic ứng với C_0 (nên trường E_0 của các hàm này là trường các hàm hữu tỷ trên C_0), ω_1/ω_2 phải sinh ra một trường toàn phương ảo K trên $\mathbb{Q}$, và E sẽ là trường thặng dư của vành các số nguyên của K modulo một ideal nguyên tố khéo chọn nào đó. Hasse từ đó đã có thể dùng các kết quả cổ điển về "các phép nhân phức" của C_0 (i.e. tự đồng cấu của jacobian $J(C_0)$) để xác định số điểm của C với bậc 1, và chứng minh "giả thuyết Riemann" cho C.

Một thời gian ngắn sau, Hasse từ bỏ phương pháp trên và thay thế bằng một phương pháp có tính nội tại hơn: như đã nói ở trên, $J(C)$ có thể định nghĩa một cách đại số như một nhóm "trừu tượng", và cấu xạ Frobenius định nghĩa tự nhiên một tự đồng cấu của nhóm đó; Hasse chứng minh rằng tử số của hàm zêta Z_C trong (10) (trong trường hợp này là một đa thức bậc 2) được đồng nhất với đa thức đặc trưng của tự đồng cấu đó. Công cụ mà ông giới thiệu cho mục đích này là một số nguyên $v(\lambda)$ gắn với mỗi tự toàn cấu λ của $J(C)$: nếu E là trường các hàm hữu tỷ của C, λ định nghĩa một "đối cấu xạ" (comorphism) $R(\lambda)$, một tự đẳng cấu của E và $v(\lambda)$ là bậc $[E : R(\lambda)(E)]$, hữu hạn khi λ là toàn cấu. Hasse chứng minh rằng với mọi số nguyên a, b thì

$$v(a.1 + b.\lambda) = a^2 + \sigma(\lambda)ab + v(\lambda)b^2$$

với mọi tự toàn cấu λ của $J(C)$, tính xác định dương của dạng toàn phương này cho ông chứng minh của "giả thuyết Riemann".

Việc mở rộng những ý tưởng này cho các đường cong C giống g bất kỳ trên $\mathbb{F}_q$ là không hề hiển nhiên: lý thuyết cổ điển chứng minh rằng $J(C)$ nên là một nhóm đại số g chiều (thay vì đẳng cấu với C như một đa tạp đại số trong trường hợp của Hasse), và cho tới tận năm 1940 không ai mở rộng lý thuyết của các nhóm đại số trên trường đặc số $p > 0$ sang hình học đại số, và nói riêng lý thuyết của các đa tạp abel. Điều này đã được thực hiện một mình bởi A. Weil, người đầu tiên phải phát triển, trong cuốn sách nổi tiếng *Foundations of algebraic geometry*, các tính chất cơ bản của các số giao một cách độc lập mà không viện tới tôpô đại số. Sau đó ông đã có thể nghiên cứu cấu trúc vành của các tự đồng cấu của một đa tạp abel A; với mọi tự toàn cấu λ của A, Weil định nghĩa số nguyên $v(\lambda)$ như Hasse, (bây giờ E là trường các hàm hữu tỷ trên A) và lần này chứng minh

$$\begin{aligned} &v(a \cdot 1 + b \cdot \lambda) \\ &= a^{2g} + \sigma(\lambda)a^{2g-1}b + \ldots + v(\lambda)b^{2g}. \end{aligned}$$

Bất biến $\sigma(\lambda)$ được xem như một "thay thế" đóng vai trò của $\mathrm{Tr}(f^{(1)})$ khi λ là tự đồng cấu của $J(C)$ ứng với một cấu xạ f của C. Một "thay thế" cho đối ngẫu Poincaré được phát hiện trong một đối ngẫu tổng quát cho các đa tạp abel mà có thể định nghĩa nghĩa hoàn toàn đại số (trong trường hợp cổ điển người ta định nghĩa nó bởi đối ngẫu Pontrjagin); cuối cùng, nếu λ' là "chuyển vị" của một tự đồng cấu λ trong đối ngẫu này thì ta có thể chứng minh $\sigma(\lambda\lambda') > 0$ với $\lambda \neq 0$, tính chất này (xem như một "thay thế" cho tính xác định dương của tích vô hướng Hodge) cho phép Weil đưa ra chứng minh của "giả thuyết Riemann" cho đường cong có giống bất kỳ.

Trong tất cả các công trình này, Weil đã không ngừng giữ trong trí óc ông lý thuyết cổ điển của các "tương ứng" phát triển bởi Hurwicz: một tương ứng trên C có thể xem như một cấu xạ "đa trị", mà cụ thể hơn như một đường cong Γ trên diện $C \times C$; tốt hơn nữa, nó được định nghĩa như một ước (tổ hợp tuyến tính của các đường cong) trên $C \times C$. Một tương ứng Γ gắn một cách tự nhiên (bắt chước phiên bản lý thuyết tập hợp) mỗi ước D trên C (tổ hợp tuyến tính của các điểm) một ước khác $\Gamma(D)$, một lần nữa điều này định nghĩa một tự đồng cấu của $J(C)$; ngược lại có thể chỉ ra rằng mọi tự đồng cấu của $J(C)$ đều thu được từ cách định nghĩa này. Trong trường hợp cổ điển, công thức Lefschetz (13) có thể được mở rộng để cho số giao của một tương ứng Γ với "tương ứng đồng nhất", i.e. đường chéo Δ của $C \times C$, và thực tế điều này đã được chứng minh bởi Hurwicz vào năm 1866, sử dụng lý thuyết tích phân abel; sự thật là Weil đã có thể chứng minh một công thức tương tự bằng các công cụ thuần túy đại số, điều đã dẫn ông đến chỗ đề xuất các giả thuyết mang tên mình.

6. Đối đồng điều étale và định lý của Deligne

Sử dụng kết quả của mình cho các đường cong, Weil đã chứng minh được các giả thuyết của chính ông với các siêu mặt dạng (3), cũng như cho những đa tạp khác như các đa tạp Grassman. Nhưng tại thời điểm đó không có một lý thuyết đối đồng điều nào đủ "tốt" đã được định nghĩa. Khoảng năm 1953, Cartan và Serre đã dùng đối đồng điều Leray với hệ số là các bó như một công cụ cực kỳ hữu hiệu để nghiên cứu các đa tạp phức, và Serre đã chỉ ra làm cách nào để chuyển các kỹ thuật này sang các đa tạp đại số trên một trường đóng đại số với đặc số p. Nhưng khi $p > 0$, những nhóm đối đồng điều mới đó được định nghĩa hiển nhiên không thể được sử dụng bởi công thức Lefschetz (13), trong đó vế trái bắt buộc phải là một số nguyên, mà không phải một phần tử của một trường có đặc số p. Chỉ sau khi Grothendieck xây dựng lý thuyết lược đồ mà, từ một lưu ý của Serre, thì cậu ấy đã có thể mở rộng ý tưởng ban đầu theo cả hai hướng "tôpô" và "bó", gắn mỗi đa tạp (hoặc lược đồ) X một đại số đối đồng điều $H^\bullet(X_{et}, \mathbb{Q}_l)$ trên trường l–adic $\mathbb{Q}_l$, trong đó l là một số nguyên tố khác với đặc số của trường ban đầu (sự can thiệp của các trường l–adic trong những câu hỏi này đã được nhận ra bởi Weil và Deuring).

Độ sâu sắc và phức tạp của các kỹ thuật liên quan trong định nghĩa của "đối đồng điều étale" $H^\bullet(X_{et})$ như thể để loại trừ mọi khả năng trong việc đưa ra bất kỳ một chi tiết nào nữa trong định nghĩa của nó. Hãy để chúng tôi chỉ ra Grothendieck (với sự giúp đỡ của M. Artin (con trai của E. Artin) và J. L. Verdier) đã có thể chứng minh các tính chất (A), (B), (C) [1] ở trên và gần đây Deligne đã chứng minh (D) cũng đúng với mọi đa tạp trên một trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$; tuy nhiên không một tính chất nào tương tự như (E) đã được chứng minh cho đối đồng điều étale (hoặc bất kỳ một lý thuyết đối đồng điều nào được đưa ra gần đây). Các tính chất (A), (B), (C) là đủ để chứng minh (15), cũng như phương trình hàm

$$Z_V(1/q^d u) = \pm q^{n\chi/2} u^\chi Z_V(u)$$

trong đó

$$\chi = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \dim H^i(X_{et}, \mathbb{Q}_l).$$

Tuy nhiên, chỉ đến gần đây người ta mới biết rằng các hệ số của P_j trong (15) là độc lập với số nguyên tố l. Điều này cuối cùng cũng được chứng minh bởi Deligne năm 1973,

[1] *Trước khi đối đồng điều l–adic được định nghĩa, Dwork đã chứng minh, bằng cách khéo léo sử dụng các hàm giải tích p–adic, rằng hàm zêta $Z_V(u)$ là hữu tỷ.*

cùng với phần cuối và khó nhất của các giả thuyết Weil là $|\alpha_{ij}| = q^{1/2}$.

Ở đây lần nữa, cần nhớ rằng không thể mô tả một cách chi tiết các chứng minh cực kỳ khéo léo, điều này hơi khác với chứng minh của Hasse và Weil, do nó không thể dựa trên một lập luận "tính dương". Ta hạn chế bài toán xuống trường hợp $i = d$ (i.e. đối đồng điều "trung tâm" $H^d(X)$); việc chứng minh rằng $|\alpha_{dj}| = q^{d/2}$ thì tương đương với

$$q^{(d-1)/2} \le |\alpha_{dj}| \le q^{(d+1)/2} \tag{18}$$

bởi vì nếu ta áp dụng kết quả này với tích X^k, và sử dụng công thức Kunneth, ta có

$$q^{(kd-1)/2} \le |\alpha_{dj}^k| \le q^{(kd+1)/2}$$

sau đó cho k tiến tới $+\infty$ và thu được kết quả. Thậm chí trong (18) ta có thể giả sử là d chẵn và sau đó có thể chứng minh bằng quy nạp theo số chẵn d; đây là một bước sâu sắc và khó trong chứng minh, dựa trên kỹ thuật "đơn đạo" cũ từ Picard và Lefschetz: kỹ thuật này hoàn toàn mang tính tôpô trong trường hợp cổ điển, nhưng nó cũng đã được chuyển sang đối đồng điều étale bởi Grothendieck và những người cùng trường phái của cậu ấy.

Như thường thấy trong toán học, sự đột phá này mở ra một con đường trong việc khai phá các vấn đề mới; nhưng chừng nào bài toán ban đầu của Gauss còn được quan tâm, nó là điểm cuối của vấn đề, vì định lý của Deligne suy ra rằng, số các điểm bậc 1 của một siêu mặt xạ ảnh không kỳ dị d chiều thỏa mãn đánh giá

$$\left|N - (1 + q + \ldots + q^d)\right| \le bq^{d/2}$$

trong đó thậm chí hằng số b có thể tính cụ thể: nó là số Betti thứ d của các siêu mặt trên $\mathbb{C}$ có cùng bậc với V.

Tài liệu tham khảo

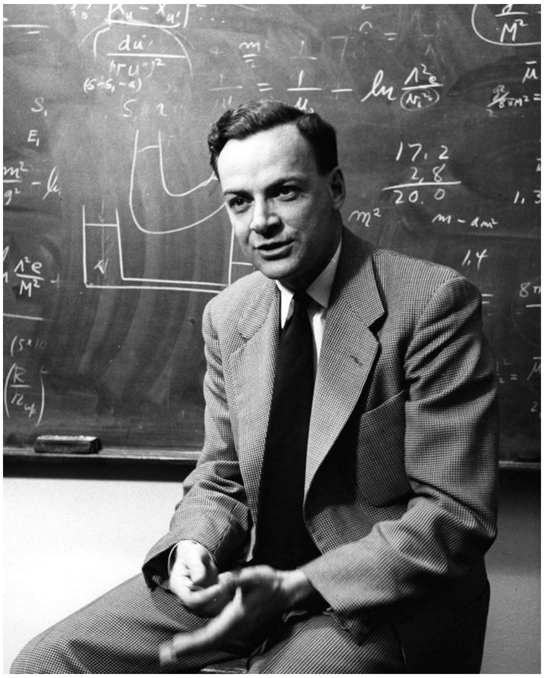
[1] Eberhard Freitag and Reinhardt Kiehl. *Étale cohomology and the Weil conjecture*, volume 13 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer–Verlag, Berlin, 1988. Translated from the German by Betty S. Waterhouse and William C. Waterhouse, With an historical introduction by J. A. Dieudonné.

ĐAM MÊ NHƯ FEYNMAN

NGUYỄN VĂN LIỄN[1]

Richard Feynman (1918 – 1988, Mỹ) nổi tiếng là người trung thực không khoan nhượng và đam mê đến tận cùng. Về tính trung thực, người ta hay nhắc đến vụ ông trình diễn trực tiếp trên TV một "thí nghiệm nhỏ", bỏ vòng cao su vào cốc nước đá, minh chứng rằng cao su mất tính đàn hồi ở nhiệt độ thấp, qua đó chỉ ra nguyên nhân dẫn đến thảm họa tàu vũ trụ con thoi "Challenger", vạch trần chiến dịch tung hỏa mù của NASA về nguyên nhân của thảm họa này. Để công bố với người dân Mỹ sự thật ấy, Feynman đã phải vượt qua sức ép khủng khiếp từ các cơ quan công quyền Mỹ, trong đó có CIA và NASA.

Feynman lắm đam mê. Đam mê vật lý, Feynman nhận giải Nobel Vật lý năm 1965. Đam mê chơi trống, vở ba–lê do ông đệm trống nhận giải nhất trong cuộc thi ba–lê toàn nước Mỹ và giải nhì trong cuộc thi quốc tế tại Paris. Đam mê vẽ, ông đã có triển lãm tranh riêng. Không rõ ông biết những ngôn ngữ nào, chỉ biết thăm Brazil ông dạy bằng tiếng Bồ, thăm Nhật ông giao du bằng tiếng Nhật. Rồi có lần bạn bè định "cho ông một vố", họ nhờ một cô Hoa kiều đón tiếp ông bằng tiếng Trung, Feynman đáp lại và cô ấy kêu trời, vì ông nói tiếng Quảng Đông, còn cô chỉ nói tiếng Bắc Kinh. Rất nhiều "đam mê" kiểu như vậy được kể trong cuốn "Feynman, chuyện thật như đùa" (NXB Trẻ) và hầu như tất cả đều có kết cục mỹ mãn, kiểu như giải Nobel. Có thể bạn nghĩ chắc ông này "con nhà nòi", học "trường quốc tế" từ nhỏ! Xin thưa, bố của Feynman là người bán rong bán quần áo, còn mẹ thì nội trợ.



Richard Feynman (ảnh từ bộ sưu tập của Viện Công nghệ California – CalTech).

Ông chơi trống bongo cực giỏi, nhưng chưa bao giờ học nhạc lý. Ông vốn vẽ rất kém, tự nhận chẳng thể vẽ nổi cái gì ngoại trừ cái kim

[1] *Viện Vật lý.*

tự tháp chỉ gồm mấy đường thẳng. Để học vẽ, Feynman “đổi công” với một họa sỹ: ông dạy vật lý cho họa sỹ còn họa sỹ dạy vẽ cho ông. Hãy tưởng tượng một giáo sư nổi tiếng thế giới ngồi trong lớp vẽ cùng các cháu 8 – 9 tuổi học cách gọt bút chì. Đam mê như thế chỉ có ở Feynman. Và, với ông đam mê chính là nguồn cội của thành công, chứ chẳng phải “con nhà nòi” hay “trường quốc tế” nào cả. Tiền bạc và chứng chỉ đầy người, mà không đam mê gì, thì làm sao có thành quả!

Feynman chơi trống bên con trai (ảnh từ Internet).

Duy có đam mê cuối cùng, Feynman đã không kịp nhìn thấy những gì mình muốn, trước khi về cõi vĩnh hằng. Đó là “Cuộc phiêu lưu cuối cùng của Feynman”[2]. Cuộc phiêu lưu khởi đầu bằng một con tem có xuất xứ từ một nơi gọi là Tannu Tuva, mà Feynman có được từ khi còn nhỏ. Cái tên “Tuva” xa lạ nằm yên trong đầu Feynman, cho đến một ngày hè 1977 nó trở thành mục tiêu cho “cuộc phiêu lưu” kéo dài hơn 10 năm cuối của cuộc đời ông. Tôi cược là nhiều bạn chưa biết Tuva là địa danh nào và ở đâu. Để đỡ tra cứu, xin “bật mí” ngay: đó là tên một quốc gia nhỏ nằm giáp phía Tây Bắc của Mông Cổ, vốn độc lập, nhưng đã sáp nhập vào Liên Xô cũ (và Nga ngày nay). Thủ đô của Tuva là Kyzyl. Tuva có gì đặc biệt mà khiến Feynman mê mệt đến vậy?

Bạn có biết đâu là trọng tâm của châu Á (lục địa thôi chứ không tính các đảo)? Lấy tấm bìa cứng phẳng, vẽ lên đó bản đồ châu Á, cắt theo đường biên để được miếng bìa hình châu Á lục địa. Dùng một chiếc bút đầu nhọn chống phía dưới tấm bìa, di di đầu bút, để tìm vị trí mà tấm bìa nằm cân bằng trên chiếc bút thẳng đứng. Vị trí đó rơi vào Kyzyl, trọng tâm của châu Á. Tất nhiên, các nhà khoa học xác định điểm này bằng các phương pháp chính xác hơn, và ngày nay ở Kyzyl có tấm bia lớn khẳng định vị trí đặc biệt của thành phố này. Nhưng, chỉ chừng ấy thì không đủ để Feynman mất tới cả chục năm tìm cách tới thăm Tuva.

Feyman vẽ Hans Bethe (giải Nobel Vật lý 1967).

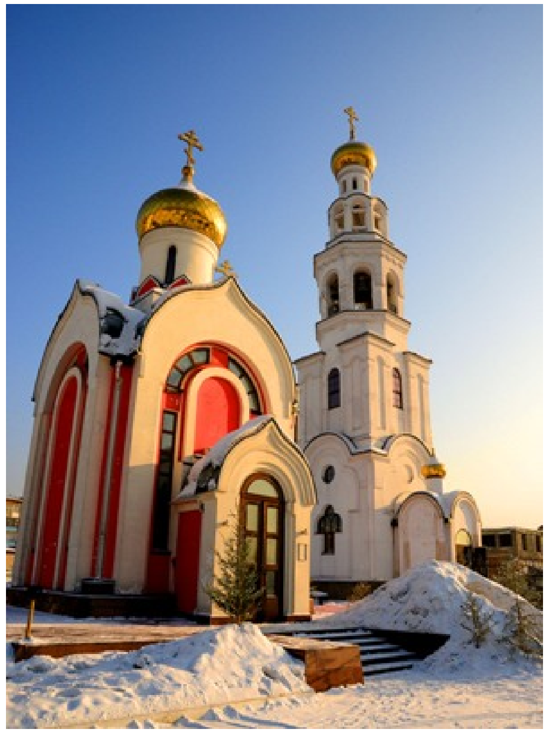
Cái chính là ở quốc gia tí xíu bao bọc bởi những dãy núi cao ấy, thời gian gần như ngừng trôi: tất cả vẫn nguyên sơ như 500 hay 1000 năm trước. Thảo nguyên hoang dại. Những đàn tuần lộc hay bò Tây Tạng cũng dường như hoang dại. Cuộc sống du mục không thể tự nhiên hơn. Một nền văn

---

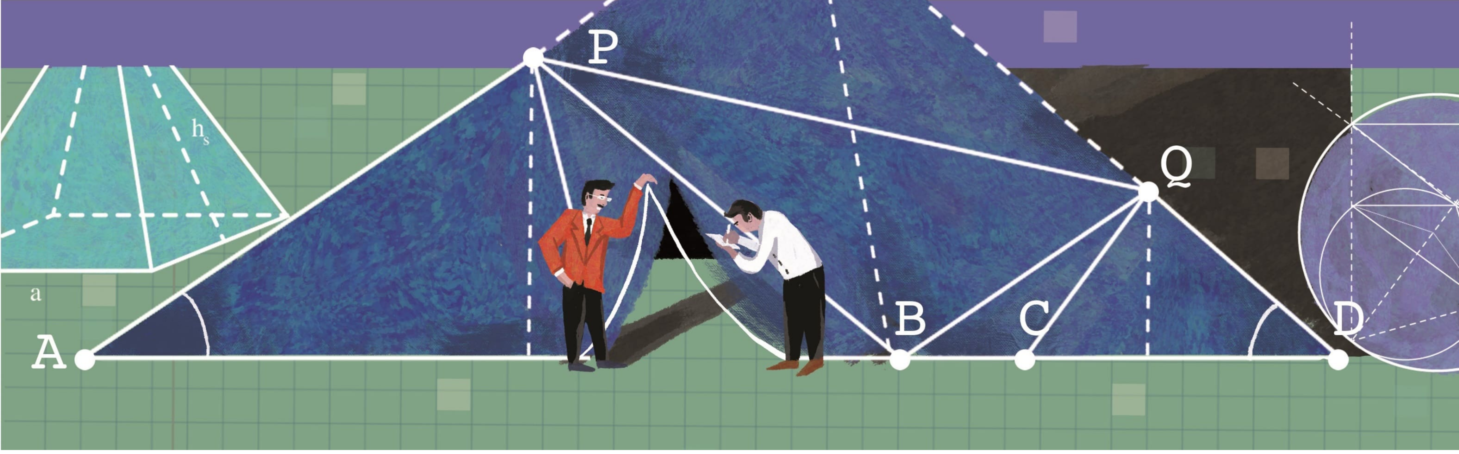
[2] *Xem thêm: Cuộc phiêu lưu cuối cùng của Feynman, in lần 2, NXB Trẻ, 2023.*

hóa xa xưa và kỳ thú với kiểu hát hai giọng chỉ có ở Tuva, với thứ văn tự không thể tìm thấy trong bất cứ tự điển nào, với các tập tục rất lạ điều hành bởi các tù trưởng uy nghi và bí ẩn v.v. Tiếc là ít người biết Tuva, chứ không, người ta đã gọi quốc gia này là "Thảo nguyên Xanh" cuối cùng của hành tinh Trái Đất (như Congo là Hành tinh Xanh cuối cùng). Đam mê Tuva, Feynman tìm đọc mọi tài liệu về Tuva, tìm hiểu văn tự Tuva, học cách hát của dân du mục Tuva, ăn mặc và trang trí như tù trưởng Tuva ...Và, nhất là, ông tìm mọi cách để có thể đến thăm Tuva.

Đó là thời Chiến tranh Lạnh, lại nghe nói, gần Tuva có một cơ sở nghiên cứu bom nguyên tử, nên nơi đây là "vùng cấm" với khách du lịch, nhất là khách nước ngoài. Thực ra, Viện Hàn lâm Khoa học Liên Xô sẵn sàng mời Feynman sang Moscow đọc bài giảng rồi đi "tham quan Kyzyl" theo kiểu mặc com–lê ở khách sạn có người bảo vệ v.v. Nhưng Feynman không thích như vậy, mà muốn tự mình mang ba–lô đến thảo nguyên, ngủ lều, uống sữa tuần lộc và hát hai giọng cùng dân bản xứ. Ấy thế cho nên ông mất cả chục năm tìm kiếm một giấy mời như mình muốn. Và, đầu tháng Ba 1988, một giấy mời như thế đã gửi đến địa chỉ của Feynman, chỉ tiếc là hai tuần trước đó, vào ngày 15 tháng Hai, ông đã ra đi mãi mãi, nên chỉ có thể trải nghiệm "Cuộc phiêu lưu cuối cùng" của mình trong tâm trí và trái tim của những người ở lại. Không rõ, ở Thế giới bên kia Feynman đang đam mê gì?



Nhà thờ Phục sinh ở Kyzyl, Tuva (ảnh từ Internet).



ĐỊNH LÝ FERMAT CHO ĐA THỨC

TRẦN MINH ĐỨC[1] VÀ LƯU BÁ THẮNG[2]

1. Giới thiệu

Định lý Fermat lớn nói về sự không tồn tại bộ ba số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $a^n + b^n = c^n$ với $n \geq 3$ là số nguyên dương, đã được Andrew Wiles [5] chứng minh vào năm 1995, nhưng ít ai biết rằng có một định lý "Fermat" tương tự cho đa thức đã được chứng minh trước đó hàng chục năm trước, tức không tồn tại ba đa thức $f(x), g(x), h(x)$ với hệ số thực, ít nhất một đa thức khác đa thức hằng, đôi một không có nghiệm chung sao cho $f(x)^n + g(x)^n = h(x)^n$, với $n \geq 3$ là một số nguyên dương cho trước.

Định lý Fermat cho đa thức là hệ quả của Định lý Mason – Stothers, đầu tiên được Stothers [4] chứng minh vào năm 1981, và Mason [3] độc lập phát hiện ra sau đó ít lâu. Các chứng minh đó nhìn chung là phức tạp, không sơ cấp. Năm 2000, Snyder [2] đã đưa ra một chứng minh mới, chỉ với các kiến thức toán phổ thông cho định lý này. Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu chứng minh của Snyder và sau đó áp dụng Định lý Mason–Stothers để chứng minh Định lý Fermat cho đa thức và một số kết quả liên quan khác.

2. Định lý Mason – Stothers

Định lý 1 (Mason – Stothers). *Cho $a(x)$, $b(x)$ và $c(x)$ là các đa thức khác đa thức hằng, với hệ số thực, đôi một không có nghiệm phức chung và thỏa mãn: $a(x) + b(x) = c(x)$. Khi đó*

$$\deg(c) \leq n_0(abc) - 1,$$

trong đó ta ký hiệu $n_0(f)$ là số nghiệm phức phân biệt của đa thức $f(x)$ và $\deg(f)$ là bậc của đa thức $f(x)$.

Để chứng minh Định lý này, ta cần Bổ đề sau:

Bổ đề 1. *Cho $f(x)$ là một đa thức với hệ số thực, khác đa thức 0. Khi đó,*

$$\deg(f) \leq \deg(f, f') + n_0(f),$$

trong đó ta ký hiệu (f, f') là ước chung lớn nhất của hai đa thức $f(x)$ và $f'(x)$ ($f'(x)$ là đa thức đạo hàm của đa thức $f(x)$).

Chứng minh. Gọi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ là các nghiệm phức phân biệt của $f(x)$ với các bội $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tương ứng. Khi đó, ta có phân tích

$$f(x) = a(x-\alpha_1)^{a_1}(x-\alpha_2)^{a_2}\ldots(x-\alpha_m)^{a_m},$$

với $a \in \mathbb{R}$ và $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = \deg f(x)$. Ta có, theo công thức Leibniz, đạo hàm của $f(x)$ được cho bởi:

$$\begin{aligned} &f'(x) \\ &= aa_1(x-\alpha_1)^{a_1-1}(x-\alpha_2)^{a_2}\ldots(x-\alpha_m)^{a_m} \\ &\quad + a(x-\alpha_1)^{a_1}[(x-\alpha_2)^{a_2}\ldots(x-\alpha_m)^{a_m}]'. \end{aligned}$$

---

[1] *Lớp 12 Toán 1, Trường THPT Amsterdam, Hà Nội.*
[2] *Khoa Toán – Tin, Đại học Sư Phạm Hà Nội.*

Suy ra, với mỗi $i = 1, 2, \ldots, m$, đa thức $(x - \alpha_i)^{a_i - 1}$ cùng là ước của $f(x)$ và $f'(x)$. Do đó

$$(x-\alpha_1)^{a_1-1}(x-\alpha_2)^{a_2-1}\ldots (x-\alpha_m)^{a_m-1} \mid (f, f').$$

Vì $f(x)$ là đa thức khác đa thức hằng nên $f'(x)$ khác đa thức 0 và do đó (f, f') cũng khác đa thức 0. Suy ra

$$\deg((x-\alpha_1)^{a_1-1}(x-\alpha_2)^{a_2-1}\ldots (x-\alpha_m)^{a_m-1}) \le \deg(f, f'),$$

hay

$$(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_m-1) \le \deg(f, f').$$

Suy ra

$$\deg(f) - n_0(f) \le \deg(f, f').$$

Vậy bổ đề được chứng minh

Chứng minh Định lý 1. Từ giả thiết

$$a + b = c, \qquad (1)$$

bằng cách lấy đạo hàm hai vế, ta được

$$a' + b' = c'. \qquad (2)$$

Nhân (1) với a' và nhân (2) với a và trừ vế với vế, ta được

$$a'b - ab' = a'c - ac'.$$

Suy ra $(a, a'), (b, b')$ và (c, c') đều là ước của $a'b - ab'$.

Do các đa thức a, b, c đôi một không có nghiệm phức chung nên các đa thức $(a, a'), (b, b')$ và (c, c') cũng đôi một không có nghiệm phức chung. Suy ra

$$(a, a')(b, b')(c, c') \mid a'b - ab'.$$

Hơn nữa, ta có $a'b - ab' \neq 0$. Thật vậy, nếu $a'b - ab' = 0$ thì $\left(\frac{a}{b}\right)' = 0$ hay $\frac{a}{b}$ là hằng số. Do đó a và b có nghiệm chung (mâu thuẫn với giả thiết). Vì vậy,

$$\deg((a, a')(b, b')(c, c')) \le \deg(a'b - ab').$$

Mặt khác, hiển nhiên ta có

$$\begin{aligned}\deg(a'b - ab') &\le \max\{\deg(a'b), \deg(ab')\}\\ &= \deg(a) + \deg(b) - 1.\end{aligned}$$

Vì thế,

$$\deg(a, a') + \deg(b, b') + \deg(c, c') \le \deg(a) + \deg(b) - 1.$$

Chuyển vế bất đẳng thức này và cộng với $\deg(c)$ vào hai vế, ta được

$$\deg(c) \le \deg(a) - \deg(a, a') + \deg(b) - \deg(b, b') + \deg(c) - \deg(c, c') - 1.$$

Cuối cùng, áp dụng Bổ đề 1, ta có:

$$\begin{aligned}\deg(a) - \deg(a, a') &\le n_0(a),\\ \deg(b) - \deg(b, b') &\le n_0(b),\\ \deg(c) - \deg(c, c') &\le n_0(c),\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\deg(c) &\le n_0(a) + n_0(b) + n_0(c) - 1\\ &= n_0(abc) - 1.\end{aligned}$$

3. Định lý Fermat cho đa thức

Áp dụng Định lý Mason – Stothers, chúng ta có một số kết quả đáng lưu ý. Trước hết, ta có kết quả sau đây:

Định lý 2 (Davenport [1]). *Cho $f(x), g(x)$ là các đa thức với hệ số thực, khác đa thức hằng, đôi một không có nghiệm phức chung. Đặt $h(x) = (f(x))^3 - (g(x))^2$ và giả sử $h(x)$ khác là đa thức 0. Khi đó, $\deg(f) \le 2\deg(h) - 2$.*

Chứng minh. Do $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức không có nghiệm chung và $h = f^3 - g^2$ nên h, f^3 và g^2 đôi một không có nghiệm chung. Áp dụng Định lý Mason – Stothers cho ba đa thức g^2, h và f^3, ta có:

$$\deg(f^3) \le n_0(g^2hf^3) - 1,$$

hay

$$3\deg(f) \leq n_0(ghf) - 1 \leq \deg(ghf) - 1.$$

Mà $\deg(ghf) = \deg(g) + \deg(h) + \deg(f)$, nên

$$\begin{aligned} &3\deg(f) \\ &\leq \deg(g) + \deg(h) + \deg(f) - 1. \quad (3) \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$\begin{aligned} &2\deg(g) \\ &\leq \deg(g) + \deg(h) + \deg(f) - 1. \quad (4) \end{aligned}$$

Kết hợp (3) và (4), ta được

$$\begin{aligned} &3\deg(f) + 2\deg(g) \\ &\leq 2(\deg(g) + \deg(h) + \deg(f) - 1) \end{aligned}$$

hay $\deg(f) \leq 2\deg(h) - 2$. Ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả 1. *Không tồn tại hai đa thức với hệ số thực $f(x)$ và $g(x)$, khác đa thức hằng sao cho $f^3 - g^2$ là đa thức hằng khác đa thức 0.*

Như đã đề cập đến trong phần đầu của bài viết, định lý Mason–Stothers có thể được sử dụng để chứng minh phiên bản đa thức của định lý Fermat lớn.

Định lý 3 (Định lý Fermat cho đa thức). *Với mọi nguyên $n \geq 3$, không tồn tại ba đa thức $f(x), g(x), h(x)$, với hệ số thực, đôi một không có nghiệm phức chung, trong đó ít nhất một đa thức khác đa thức hằng, sao cho $f^n + g^n = h^n$.*

Chứng minh. Giả sử ngược lại, $f^n + g^n = h^n$. Áp dụng định lý Mason–Stothers cho 3 đa thức f^n, g^n và h^n, ta có:

$$\begin{aligned} &\max\{\deg(f^n), \deg(g^n), \deg(h^n)\} \\ &\leq n_0(f^n g^n h^n) - 1 = n_0(fgh) - 1 \\ &\leq \deg(f) + \deg(g) + \deg(h) - 1. \end{aligned}$$

Để ý rằng

$$\begin{aligned} &\frac{n}{3}(\deg(f) + \deg(g) + \deg(h)) \\ &= \frac{1}{3}(\deg(f^n) + \deg(g^n) + \deg(h^n)) \\ &\leq \max\{\deg(f^n), \deg(g^n), \deg(h^n)\}. \end{aligned}$$

Do đó, nếu ta đặt $d = \deg(f) + \deg(g) + \deg(h)$ thì bằng cách kết hợp với bất đẳng thức thu được ở trên, ta có:

$$\frac{nd}{3} \leq d - 1.$$

Suy ra, $3 < d(3 - n)$. Do ít nhất một trong các đa thức f, g, h khác hằng nên $d > 0$; điều này, kết hợp với giả thiết $n \geq 3$, dẫn đến $3 \leq 0$, mâu thuẫn.

Với chứng minh tương tự, ta có thể chỉ ra được hệ quả sau đây, mà nội dung của nó là một bài toán trong tuyển tập Các kỳ thi Toán Rumani (RMC) năm 2019.

Hệ quả 2. *Cho các số nguyên $m, n \geq 3$ và f, g là các đa thức khác hằng với hệ số thực, trong đó ít nhất một đa thức có bậc lớn hơn hoặc bằng 2. Giả sử $\deg(f^m - g^n) < \min\{m, n\}$. Khi đó $f^m = g^n$.*

Nhận xét. Định lý Mason – Stothers cũng đúng khi ta xét các đa thức với hệ số phức. Từ đó ta suy ra Định lý Davenport và Định lý Fermat cho đa thức cũng đúng với đa thức với hệ số phức.

Để kết thúc, chúng ta trình bày một mở rộng của Định lý 3.

Định lý 4. *Cho các số nguyên dương m, n, p thỏa mãn $m \leq n \leq p$. Khi đó phương trình đa thức $f(x)^m + g(x)^n = h(x)^p$ có nghiệm f, g, h là các đa thức với hệ số phức, đôi một không có nghiệm chung, ít nhất một trong ba đa thức khác đa thức hằng nếu và chỉ nếu (m, n, p) có một trong dạng sau: $(1, a, b), a, b \geq 1$; $(2, 2, a), a \geq 2$; $(2, 3, 3)$; $(2, 3, 4)$; $(2, 3, 5)$.*

Chứng minh. Trước hết, dễ thấy rằng nếu trong m, n, p có một số bằng 1 thì phương trình rõ ràng có nghiệm, chẳng hạn nếu $m = 1$, với $g(x), h(x)$ là hai đa thức khác đa thức hằng tùy ý, không có nghiệm chung thì bằng cách đặt $f(x) = h(x)^p - g(x)^m$, ta có $f(x), g(x), h(x)$ thỏa mãn phương trình.

Vì vậy, ta chỉ cần xét trường hợp $2 \le m \le n \le p$. Gọi a, b, c lần lượt là bậc của các đa thức f, g và h. Khi đó, theo Định lý Mason – Stothers, ta có

$$ma \le a+b+c-1, \quad (5)$$
$$nb \le a+b+c-1, \quad (6)$$
$$pc \le a+b+c-1. \quad (7)$$

Cộng vế với vế của (5), (6) và (7) ta được

$$\begin{aligned} m(a+b+c) &\le ma+nb+pc \\ &\le 3(a+b+c)-3. \end{aligned}$$

Suy ra, $m < 3$. Mặt khác, $2 \le m$ nên $m = 2$. Khi này, bất đẳng thức (5) trở thành:

$$a \le b+c-1. \quad (8)$$

Cộng các bất phương trình (6), (7) và (8) theo vế, ta có:

$$nb+pc \le 3(b+c)+a-3. \quad (9)$$

Mặt khác, vì $n \le p$ nên từ bất đẳng thức (8) và (9), ta có:

$$\begin{aligned} n(b+c) &\le nb+pc \le 3(b+c)+a-3 \\ &\le 4(b+c)-4. \end{aligned} \quad (10)$$

Từ đó, $n < 4$. Kết hợp với $n \ge 2$, ta suy ra $n = 2$ hoặc $n = 3$.

Với $n = 2$, ta thấy rằng với mọi giá trị của $p \ge 2$ thì tồn tại ba đa thức f, g, h thỏa mãn phương trình của định lý. Chẳng hạn, với

$$f(x) = \frac{x^p+1}{2},$$
$$g(x) = -i\left(\frac{x^p-1}{2}\right),$$
$$h(x) = x^2,$$

thì $f^2 + g^2 = h^p$.

Với $n = 3$ thì bất đẳng thức (6) trở thành

$$2b \le a+c-1. \quad (11)$$

Kết hợp (8) và (11), ta được $b \le 2c-2$. Từ đó, (8) dẫn đến $a \le 3c-3$. Từ đó, (7) dẫn đến

$$\begin{aligned} pc &\le a+b+c-1 \\ &\le 3c-3+2c-2+c-1 = 6c-6. \end{aligned}$$

Suy ra $p \le 5$. Mà $p \ge n$ nên $p \in \{3;4;5\}$.

Với $p = 3$, ta có thể chọn

$$f(x) = \sqrt[4]{432}e^{\frac{i\pi}{4}}(x^5-x),$$
$$g(x) = x^4 - 2i\sqrt{3}x^2 + 1,$$
$$h(x) = x^4 + 2i\sqrt{3}x^2 + 1$$

để có $f^2 + g^3 = h^3$.

Với $p = 4$, ta có thể chọn

$$f(x) = x^{12} - 33x^8 - 33x^4 + 1,$$
$$g(x) = -(x^8 + 14x^3 + 1),$$
$$h(x) = \sqrt[4]{108}e^{\frac{i\pi}{4}}(x^5 - x)$$

để có $f^2 + g^3 = h^4$.

Với $p = 5$, ta có thể chọn

$$f(x) = \frac{x^{30}+1+522(x^{25}-x^5)-10005(x^{20}+x^{10})}{24\sqrt{3}},$$
$$g(x) = \frac{-(x^{20}+1)+228(x^{15}-x^5)-494x^{10}}{12},$$
$$h(x) = x(x^{10} + 11x^5 - 1).$$

Khi đó $f^2 + g^3 = h^5$. Vậy định lý đã được chứng minh.

Tài liệu tham khảo

[1] V. V. Prasolov, *Essay on Numbers and Figures*, Mathematical World, American Mathematical Society, 2000.

[2] N. Snyder, *An alternate proof of Mason's theorem*, Elemente der Mathematik, 55 (3): 93 – 94, 2000.

[3] R. C. Mason, *Diophantine Equations over Function Fields*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 96, Cambridge, England: Cambridge University Press, 1984.

[4] W.W. Stothers, *Polynomial identities and hauptmoduln*, Quarterly J. Math. Oxford, 2, 32: 349 – 370, 1981.

[5] A. Willes, *Modular elliptic curves and Fermat' s Last Theorem*, Ann. Math., 141, pp. 443 – 551, 1995.

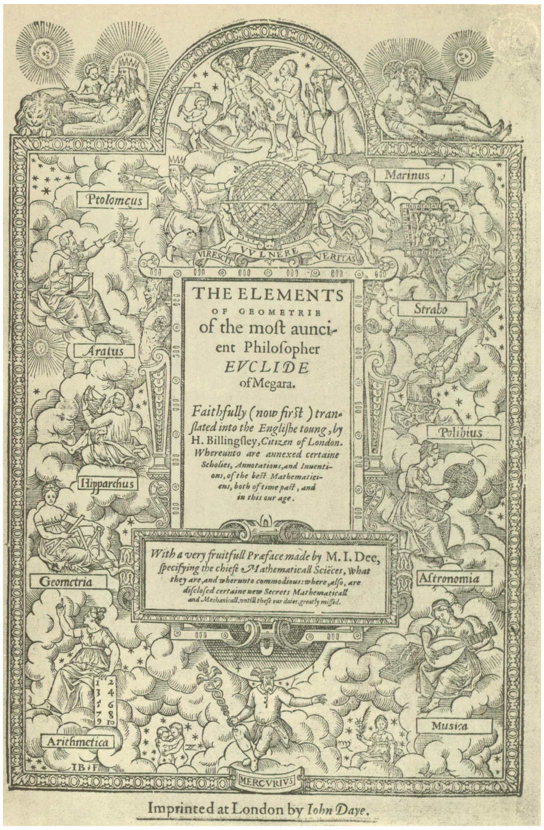
HÌNH HỌC PHI EUCLID (Phần I)

VŨ LÊ MINH TRÍ VÀ NGUYỄN DUY ANH[1]

Một ý tưởng tưởng chừng như mâu thuẫn với những cảm quan thường thức, thế nhưng lại trở thành một vũ trụ hình học mới lạ và chặt chẽ, và có thể nắm giữ bản chất của không gian chúng ta đang sống. Thế nhưng quá trình khám phá và phát triển ý tưởng ấy phải trải qua hàng thập kỷ với nhiều trắc trở và gian nan.

Hy Lạp và Saccheri

Một trong những thứ mà người Hy Lạp cổ đại có thể tự hào với toàn thế giới chắc chắn là Toán học của họ, đặc biệt là Hình học phát triển bậc nhất nhân loại đương thời. Không chỉ những tính toán và đo đạc của họ có độ chính xác cao, hệ thống lý thuyết Hình học của họ cũng được thiết lập hết sức chặt chẽ, một điều hiếm thấy ở các nền văn minh đương thời. Minh chứng rõ ràng nhất chính là bộ "Elements of Geometry" hay "Elements" (Cơ sở) của Euclid thành Alexandria. Tác phẩm là một bản tổng hợp các kiến thức tự cổ chí kim của nền Hình học Hy Lạp đồ sộ, được sắp xếp theo trình tự khoa học, và quan trọng nhất: có sự xuất hiện của tiên đề, một số ít các mệnh đề được thừa nhận, để các kết quả sau đó được phát triển chỉ dựa trên những tiên đề ấy. Dù lý luận chưa kín kẽ hoàn toàn, một số chứng minh vẫn còn những điều được ngầm thừa nhận và một số vẫn phụ thuộc vào hình vẽ, và các tiên đề vẫn chưa đầy đủ (về sau ta sẽ chỉ ra những lỗi này) "Elements" vẫn là một tác phẩm để đời của nhà sư phạm lỗi lạc.


VIRESCIT VVLNERE VERITAS

THE ELEMENTS OF GEOMETRIE of the most aunci-ent Philosopher EVCLIDE of Megara.

Faithfully (now first) translated into the Englishe toung, by H. Billingsley, Citizen of London. Whereunto are annexed certaine Scholies, Annotations, and Inuentions, of the best Mathematiciens, both of time past, and in this our age.

With a very fruitfull Præface made by M. I. Dee, specifying the chiefe Mathematicall Scieces, what they are, and wherunto commodious: where, also, are disclosed certaine new Secrets Mathematicall and Mechanicall, vntill these our daies, greatly missed.

Imprinted at London by Iohn Daye.

Ngoài việc Hình học được đặt trên nền móng logic như trên, đã có hẳn một phái nghiên cứu những ý nghĩa huyền bí của nó, đứng đầu bởi không ai khác ngoài Pythagoras xứ Samos. Trong số những giáo lý của triết

[1] *THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam.*

gia bí ẩn này tới các môn đồ, Toán học giữ một vai trò cực kỳ quan trọng trong mục đích hàng đầu của họ – hiểu thêm về thực tại và triết lý. Những con số (với phái này "số" là các số nguyên dương khác 1) được cho là ẩn chứa những lời giải thích về bản chất của vũ trụ, từ đó dẫn đến cách mô tả đậm chất Thần số học của họ. Hình học Euclid lại được coi là mô tả chính xác cho không gian thực. Quan điểm này sẽ trở thành niềm tin chủ đạo của giới học thuật châu Âu, do sự tiếp thu tri thức từ Hy Lạp cổ đại.

Quay lại với Euclid, các tiên đề ông đưa ra sẽ là trọng tâm của chúng ta trong phần tới, đặc biệt là tiên đề cuối. Chúng lần lượt là:

1. Qua hai điểm bất kì, luôn luôn vẽ được một đường thẳng.
2. Có thể kéo dài một đoạn thẳng một đoạn dài hữu hạn theo hai hướng.
3. Với một điểm và một đoạn bất kỳ, luôn luôn vẽ được một đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là điểm và có độ dài bằng đoạn đã nêu.
4. Mọi góc vuông đều bằng nhau. Góc vuông được định nghĩa là góc bằng với góc bù của nó.
5. Nếu 2 đường thẳng tạo với 1 đường thẳng thứ 3 hai góc trong cùng phía mà có tổng nhỏ hơn hai góc vuông thì chúng sẽ cắt nhau về phía đó, khi cả hai được kéo dài vô hạn.

và 5 định đề (common notion):

1. Hai cái cùng bằng cái thứ ba thì bằng nhau.
2. Thêm những cái bằng nhau vào những cái bằng nhau thì được những cái bằng nhau.
3. Bớt đi những cái bằng nhau từ những cái bằng nhau thì được những cái bằng nhau.
4. Trùng nhau thì bằng nhau.
5. Toàn thể lớn hơn một phần.

Trước khi đi tiếp, chúng ta cần hai kết quả đáng lưu tâm trong Elements ở đây:

Định lý 16 của "Elements" Quyển I, tên khác là định lý góc ngoài, một dạng yếu hơn của định lý góc ngoài ta quen biết nhưng không cần tới tiên đề song song, khẳng định:

Trong một tam giác bất kỳ, góc ngoài của một đỉnh nào đó thì lớn hơn hai góc ở hai đỉnh còn lại.

Khi thừa nhận thêm tiên đề 5 thì góc ngoài sẽ bằng tổng hai góc ở hai đỉnh ấy luôn.

Định lý 27, định lý về góc so le trong:

Hai đường thẳng có một đường thứ ba cắt qua mà tạo với đường thứ ba hai góc so le trong bằng nhau thì là hai đường song song.

Hai định lý này (cùng một số mệnh đề ngầm được thừa nhận) đã chỉ ra sự tồn tại của hai đường thẳng song song, và có thể được chứng minh mà không sử dụng tiên đề số 5. Ba định đề đầu tiên còn đúng cả trong số học, trong khi định đề thứ 5 có một câu chuyện riêng, ta để dành lúc khác. Nên nhớ rằng, theo cách hiểu được duy trì trong thời gian dài, một tiên đề là một sự thật tự nó hiển nhiên.

Không khó để thấy tiên đề cuối cùng trông phức tạp hơn nhiều so với những tiên đề còn lại. Nó được trình bày dưới dạng giả thiết – kết luận, rồi còn chứa trong đó một giả sử hơi khó hình dung – hai đường được kéo dài vô hạn, dù hành động này trên thực tế là không thể kiểm chứng. Vì thế không ít người đã nghi ngờ rằng đây thực chất là một định lý, và không ít trong số họ đã đổ thời gian và tâm sức vào nhằm đưa ra một chứng minh thỏa đáng. Hẳn rồi, nếu một trong các nỗ lực đó chính xác thì đã chẳng có bài viết này, tất cả đều không tránh được lỗi ngầm thừa nhận một khẳng định nào đó hóa ra lại tương đương với tiên đề 5. Vậy là, kể từ khi thời Euclid, cho đến giai đoạn thất thoát sách vở Hy Lạp cổ đại, để rồi được những người Ả Rập tìm thấy và dựa vào đó đến phát triển, tới khi những lái buôn nơi đây đem Toán của mình tới châu Âu trong những cuộc giao thương, góp phần đánh thức nền Toán học chìm trong đêm dài Trung Cổ, cho tới mấy trăm năm "Elements" làm cuốn sách hình học mẫu mực trên lục địa, sau bao nhiêu thế hệ trí thức chung tay giải quyết, thứ hậu thế thu được từ các chứng minh sai lầm hầu như chỉ là các phát biểu lại của tiên đề cuối cùng.

Điều này không có nghĩa là công sức của họ là vô ích hoàn toàn, ngược lại, đây là một sự chuẩn bị cần thiết cho những diễn biến tới. Hãy cùng điểm qua một vài phát biểu như vậy:

– Playfair: Với một điểm M không nằm trên một đường thẳng d cho trước, qua M có đúng 1 đường thẳng song song với d.

– Định lý 30 trong "Elements": Nếu 3 đường thẳng a, b, c phân biệt và thỏa mãn: $a \parallel c$, $b \parallel c$, thì $a \parallel b$. Nói cách khác, quan hệ song song có tính bắc cầu.

– Farkas Bolyai: Luôn vẽ được một đường tròn đi qua cả 3 đỉnh của một tam giác nào đó.

– Wallis: Tồn tại hai tam giác đồng dạng nhưng không bằng nhau.

– Tồn tại tam giác nào đó mà tổng ba góc của nó là hai góc vuông.

– Định lý Pytago: tổng diện tích hai hình vuông có cạnh là hai cạnh góc vuông của tam giác vuông bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh huyền.

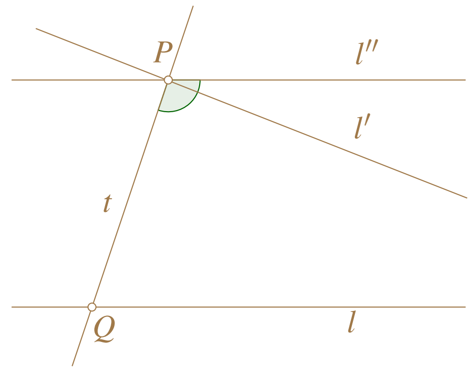
– Diện tích của tam giác không bị chặn.

– Góc nội tiếp chắn đường kính của đường tròn là góc vuông.

– Cho tứ giác $ABCD$ có các góc đỉnh A, B, C là 3 góc vuông, đây được gọi là một tứ giác Lambert. Khi ấy góc ở đỉnh D cũng vuông.

– Cho tứ giác $ABCD : AB = CD$ và các góc đỉnh B, C vuông. Ta gọi đây là một tứ giác Saccheri. Khi ấy góc đỉnh A và đỉnh D cũng vuông. Một phát biểu tương tự: hình chữ nhật có tồn tại.

Cách phát biểu đầu tiên là dạng được trình bày trong sách giáo khoa, được đặt tên theo Playfair ($1748 - 1819$), một giáo sư Toán tại Đại học Edinburgh, dù nó được nghiên cứu bởi Proclus từ tận những năm 400 TCN. Ta trình bày một chứng minh ngắn ở đây:



Chứng minh: (Playfair $\to$ Euclid) Gọi t là đường thẳng cắt cả hai đường thẳng l và l' cho trước. t cắt l tại Q, cắt l' tại P, hình thành hai góc trong cùng phía g_1 và g_2. Không mất tính tổng quát, giả sử $g_1 + g_2$ nhỏ hơn tổng độ lớn hai góc vuông.

Nếu ta đặt g_3 là góc bù của g_2, khác phía với g_1 và g_2, thì $g_3 + g_2 = 180 > g_1 + g_2$, dẫn đến $g_1 < g_3$. Qua P, kẻ đường thẳng l'' tạo với t một góc bằng và so le trong với g_3. Do $g_3 > g_1$, hai đường thẳng l' và l'' là hai đường thẳng phân biệt. Theo tiên đề Playfair, l' không thể song song với l, và phải cắt l tại một điểm hữu hạn R nào đó. Nếu R nằm khác phía với g_1 và g_2, thì g_1 là một góc ngoài của tam giác PQR. Theo định lý góc ngoài, g_1 sẽ lớn hơn g_3, điều này vô lý. Do đó R nằm cùng phía với g_1 và g_2, chứng minh được rằng tiên đề Playfair suy ra tiên đề song song.

Trong những cuộc tấn công không ngớt vào bài toán chứng minh tiên đề thứ 5, lịch sử đã đáng tiếc bỏ quên một công trình kỳ thú: Euclides ab omni naevo vindicatus ("Bào chữa cho mọi lỗi lầm của Euclid") của Girolamo Saccheri ($1667 - 1733$), một linh mục dòng Tên kiêm giáo sư tại đại học Pavia, Ý.

Saccheri được sinh vào ngày 5 tháng 9 năm 1667, ở San Remo, Ý, thuộc quyền kiểm soát của Genoa vào thời ấy. Năm 1865, khi lên 18 tuổi, ông tham gia Hội Tu sĩ Dòng Tên, và năm năm sau ông đến Milan để theo học triết học và thần học ở Brera, một đại học Dòng Tên. Tomasso Ceva, em trai của Giovanni Ceva (người có định lý nổi tiếng mang tên ông), đang là một giáo sư toán học ở đó, và khuyến khích Saccheri theo đuổi ngành học này.

Saccheri nhắm tới việc chứng tỏ rằng tiên đề thứ 5 thực chất là định lý, từ đó dập tắt chỉ trích của Ngài Henry Savile rằng tiên đề này là một "sai lầm" của hình học. Phương pháp ông sử dụng cũng là một kỹ thuật nổi bật Euclid áp dụng – reductio ad absurdum, cụm từ tiếng Latinh mang nghĩa "phản chứng". Ông tiếp cận nó theo cách nhìn của phát biểu tương đương cuối cùng trong danh sách trên: Cho tứ giác ABCD với $AD = BC$ và các góc đỉnh A, B vuông. Khi ấy góc đỉnh C cũng vuông. Người ta gọi nó là giả thiết góc vuông. Tứ giác Saccheri đã được nghiên cứu từ tận thế kỷ 12 bởi nhà thơ kiêm nhà toán học người Iran Omar Khayyam, vào thế kỷ 13 bởi nhà thiên văn học kiêm nhà toán học Nassir Adin trong một công trình có mục đích như của Saccheri, và về sau bởi một số học giả châu Âu như Clavius và Giordano Vitale. Tất nhiên tâm điểm nằm ở vị mục sư do ông đã phát triển xa hơn các tiền nhân nhiều. Không sử dụng tiên đề song song, ta chứng minh được hai góc đỉnh C và D bằng nhau (Saccheri 1) như sau:

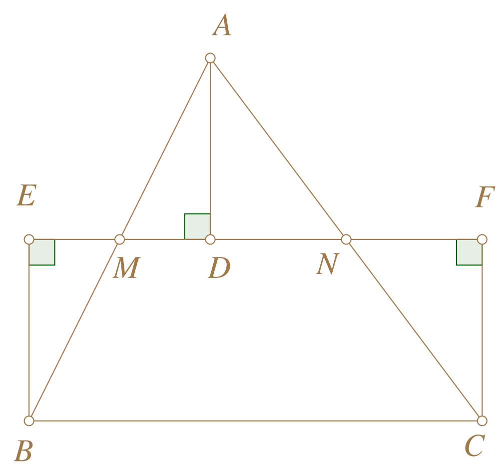
$\Delta BAD = \Delta ABC$ (c.g.c) vì $AD = BC$, $BAD = ABC = 90°$, và chung AB. Khi đó ta có $BD = AC$. Từ đây ta suy ra $\Delta ADC = \Delta BCD$ (c–c–c). Từ đây ta có 2 góc đỉnh C và D bằng nhau.

Saccheri quyết định giả sử phản chứng rằng hai góc C và D không phải góc vuông, từ đó cho ra hai trường hợp:

– C và D là hai góc tù (giả thuyết góc tù).

– C và D là hai góc nhọn (giả thuyết góc nhọn).

Đầu tiên ông chứng minh: nếu một trong hai giả thuyết này đúng với một tứ giác Saccheri nào đó, thì nó đúng với mọi tứ giác Saccheri. Sau đó ông chứng minh rằng giả thuyết góc tù sẽ dẫn đến tổng ba góc trong một tam giác bất kỳ là lớn hơn hai góc vuông, và ngược lại, giả thuyết góc nhọn sẽ dẫn đến tổng ba góc trong một tam giác bất kỳ nhỏ hơn hai góc vuông.



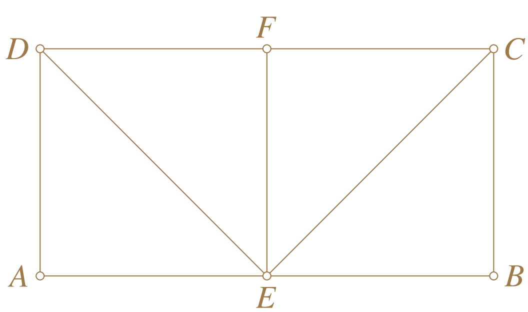
Thật vậy, với tam giác ABC bất kỳ, lấy M, N là trung điểm AB, AC, và gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của A, B, C lên MN. Lúc ấy $\Delta BEM = \Delta ADM$, và $\Delta ADN = \Delta CFN$. Khi đó ta có $BE = AD = CF$, và $\angle BEF = \angle CFE = 90$. Khi đó $EFCB$ là một tứ giác Saccheri vuông tại E và F. Qua cộng góc đơn giản ta chứng minh được tổng ba góc của tam giác chính là tổng hai góc B và C của tứ giác Saccheri $EFCB$.

Từ bước chuẩn bị này, Saccheri đã bác bỏ giả thuyết góc tù bằng một chuỗi 13 mệnh đề, rồi đến với kết luận sau cùng chính là tiên đề song song, một điều rõ ràng mâu thuẫn với giả sử giả thuyết góc tù đúng. Trích lời văn hoa mỹ của chính ông: “Giả thuyết góc tù hoàn toàn sai bởi nó tự thủ tiêu chính nó”.

Giả thuyết góc nhọn lại là một câu chuyện khác hẳn. Saccheri đã chứng minh hết định lý này đến định lý khác, nhưng chẳng mâu thuẫn nào lộ diện. Các kết quả được chứng minh cứ thế chất chồng, dần dần hình thành một hệ thống phức tạp không hề thua kém so với hình học phẳng thông thường. Nhưng Saccheri, quá tin tưởng vào sứ mệnh của bản thân, đã để niềm tin sẵn có vào hình học Euclid gây rối mạch tư duy logic. Ông coi một điểm ở vô cùng như một điểm bình thường trên mặt phẳng, rồi ngộ nhận một cách đáng tiếc.

Gần với thời điểm xuất bản tác phẩm của Saccheri, chúng ta có những nghiên cứu của Lambert về loại tứ giác mang tên ông như nói ở trên. Tương tự như Saccheri, Lambert dễ dàng loại bỏ giả thuyết góc tù, và cũng chứng minh nhiều định lý với giả thuyết góc nhọn. Khác với Saccheri, Lambert nhận ra rõ ràng rằng mình không tiến đến một sự phi mâu thuẫn nào. Lambert không cho xuất bản những công trình về sau.

Tứ giác Saccheri có một tính chất không cần tới tiên đề 5 như sau: đường nối trung điểm của AB và CD thì vuông góc với cả AB và CD (Saccheri 2). Khi ấy ta thấy một tứ giác Saccheri đã được chia ra thành hai tứ giác Lambert. Do đó ta có thể chủ yếu nghiên cứu tính chất của tứ giác Saccheri ở đây.



Gọi E, F lần lượt là trung điểm AB và CD. Khi ấy $\Delta ADE = \Delta BCE$ (c.g.c), góc bằng nhau ở đỉnh A và B. Từ đây có: $\angle AED = \angle BEC, \angle ADE = \angle BCE, DE = CE$. Theo Saccheri 1, $\angle ADC = \angle BCD$, kết hợp lại ta được:

$$\begin{aligned}\angle EDF = \angle EDC &= \angle ADC - \angle ADE \\ &= \angle BCD - \angle BCE \\ &= \angle ECD = \angle ECF.\end{aligned}$$

Do đó $\Delta DFE = \Delta CFE$ (c.g.c), suy ra $\angle DFE = \angle CFE$. Hai góc này bù nhau nên chúng là góc vuông. Cũng có $\angle DEF = \angle CEF$, cộng với $\angle DEA = \angle CEB$ có $\angle FEA = \angle FEB$, $\angle FEA$ bằng với góc bù với nó nên là góc vuông nốt.

Có thể thấy Saccheri đã hé mở cánh cửa tới một loại hình học nơi mà tiên đề song song bị bác bỏ, và dù ông đã hấp tấp đóng nó lại vì niềm tin vốn có, ý tưởng sử dụng phản chứng ông đưa ra là một bước tiến lớn. Trong số tiếp theo, chúng ta sẽ tìm hiểu quá trình khám phá của những người mở đường vào thế giới sau khe cửa hẹp đó.

Tài liệu tham khảo

– Wikipedia tiếng Anh.

– Euclidean and Non–Euclidean Geometries – Development and History (Marvin Jay Greenberg).

– Men of Mathematics The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré (Eric Temple Bell).

– The History of Mathematics An Introduction (David M. Burton).

– https: //www.youtube.com/playlist?list=PLjLK2cYtt-VBSBtvfhxx-DW3Zw3nOQHVZ

– https: //rosetta.vn/lequanganh/wp-content/ uploads/sites/7/2018/07/Riemann.pdf

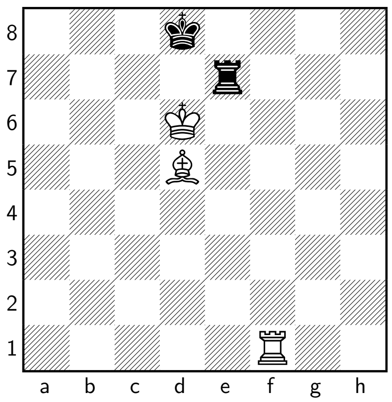
– https: //www.cut-the-knot.org/triangle/pythpar/Drama.shtml

XE VÀ TƯỢNG CHỐNG XE ĐƠN ĐỘC (Phần I)

BÙI VINH[1]

Lý thuyết cờ tàn cơ bản đều cho rằng xe và tượng chống xe không có tốt đều được coi là hòa cờ cơ bản. Tuy nhiên thực tế thi đấu cho thấy khả năng hòa cờ cho bên yếu không nhiều. Bên yếu cần phải chơi rất chính xác nếu muốn gỡ hòa. Trong bài học hôm nay, chúng tôi xin trình bày một số tình huống cơ bản

A. Philidor



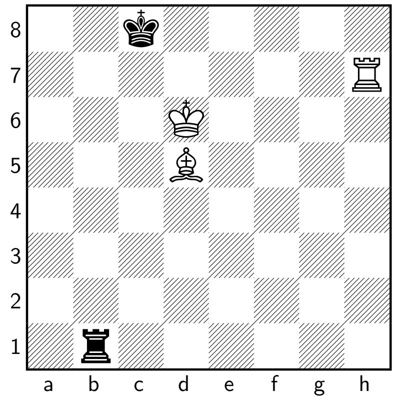
Hình 1. Trắng đi trước thắng, 1749.

1.Xf8+ Xe8 2.Xf7 Xe2 3.Xh7 (Hình 2) [Một nước đi chờ đợi]

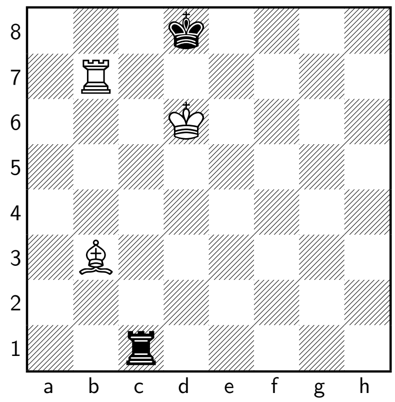
3...Xe1 4.Xb7! Xc1 [4...Vc8 5.Xa7 Xb1 6.Xh7!

6...Vb8 7.Xh8+ Va7 8.Xa8+ Vb6 9.Xb8+ Va5 10.Xxb1]

5.Tb3!!



Hình 2.



Hình 3.

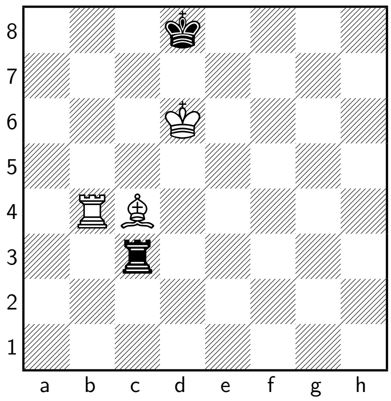
Kỹ thuật giành chiến thắng cơ bản của bên có tượng là tìm cách ép vua đối phương xuống hàng ngang số 8, 1 hoặc cột a,h. Sau đó phối hợp giữa xe và tượng thực hiện vừa che chắn

[1] *Đại kiện tướng quốc tế.*

cho vua khỏi các nước chiếu của xe đối bằng tượng trong khi đó dùng xe đe dọa chiếu hết.

5...Xc3 6.Te6! Xd3+ 7.Xd5 [Tượng trắng che chắn cho vua]

7...Xc3 8.Xd7+ Vc8 9.Xh7 Vb8 10.Xb7+ Vc8 11.Xb4 Vd8 12.Tc4!! (Hình 4). Trắng dùng Tượng ngăn cản xe đối phương phòng thủ ở ô c8.



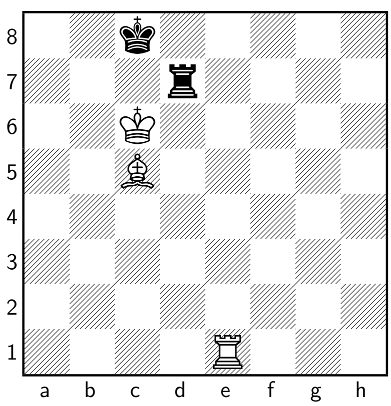
Hình 4.

Trắng đe dọa chiếu hết ở nước tiếp theo

12...Vc8 [12...Ve8 13.Xb8#]

13.Te6+ Vd8 14.Xb8+

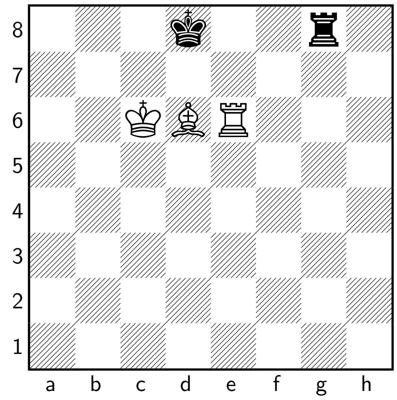
Lolli



Hình 5. *Trắng đi trước thắng*, 1763.

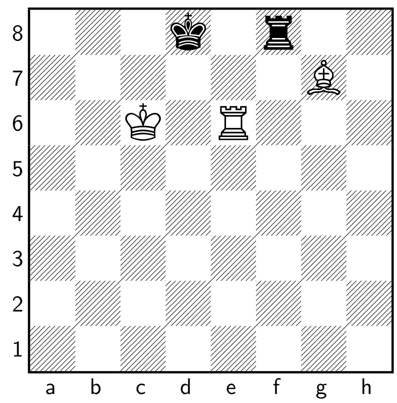
Trong rất nhiều trường hợp mặc dù xe đen cũng phòng thủ từ phía sau hoặc bên sườn, tuy nhiên bên mạnh cũng vẫn thắng.

1.Xe8+ Xd8 2.Xe7 Xd2 [Nếu 2...Xh8 3.Td6 Vd8 4.Xa7 Ve8 5.Xa8+; Nếu 2...Xg8 3.Td6 Vd8 4.Xe6! (Hình 6)



Hình 6.

4...Vc8 (4...Xh8 5.Te5 Xf8 6.Tg7! Trắng giam xe đen ở hàng ngang số 8

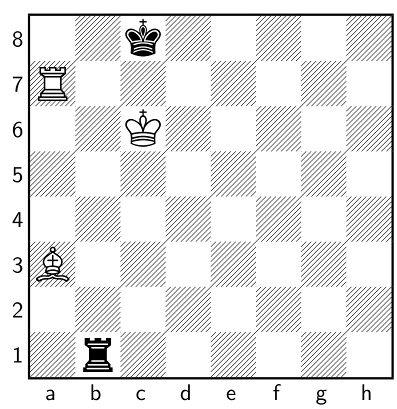


Hình 7.

6...Xg8 7.Tf6+ Vc8 8.Xe4 Xf8 9.Tg7 Xg8 10.Xa4 Vb8 (10...*Vd8* 11.*Xa8*+) 11.Te5+ Vc8 12.Xa8#) 5.Xe5 Vd8 6.Tc7+ Vc8 7.Xa5 Xg6+ 8.Td6+−]

3.Xf7! Xd1 [3...Xd8 4.Te7 Xg8 5.Xf5 Vb8 6.Td6+ Vc8 7.Xa5]

4.Xa7 Xb1 [4...Vb8 5.Xa4 Xc1 6.Xe4!]



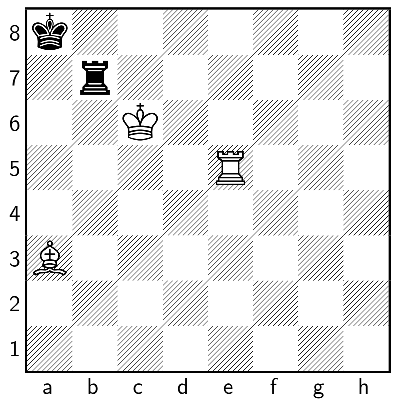
Hình 8.

5.Ta3!!

Nước cờ chìa khóa. Đen bị “xung xoang” vì không có nước đi cho xe.

5...Xb3 [Phương án khác cũng không tốt hơn cho đen 5...Vb8 6.Xe7 Va8 7.Xe4!! Xb7! 8.Xe5

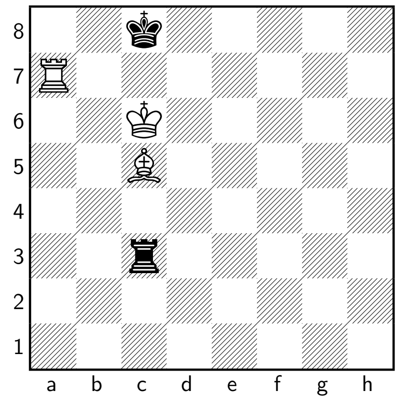
Đen bị “xung xoang” 8...Xf7 (8...Xb1 9.Xa5+ Vb8 10.Td6+ Vc8 11.Xa8+) 9.Xe8+ Va7 10.Tc5+ Va6 11.Xa8+ Trắng thắng]



Hình 9.

6.Td6! Xc3+ 7.Tc5

Tượng trắng phối hợp với vua và xe. Tượng vừa thực hiện việc che chắn cho vua và tấn công vua đối phương.



Hình 10.

7...Xb3 8.Xc7+ Vb8 [8...Vd8 9.Xf7]

9.Xe7 Va8 10.Xe4! [10.Xe8+ Xb8 11.Xe1]

10...Xb7 11.Xa4+ Vb8 12.Td6+ Vc8 13.Xa8+ Trắng thắng