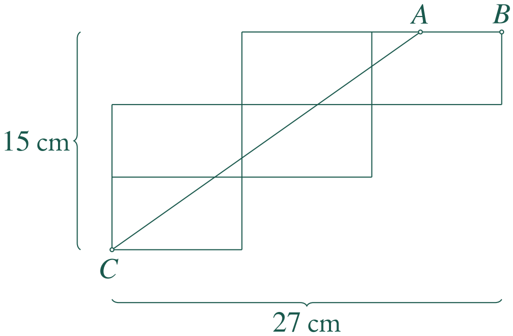
- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P751–P760: trước ngày 15/12/2023.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P751. (Mức B) Người ta ghép khít năm hình chữ nhật bằng nhau với nhau, để được một hình dài 27cm và rộng 15cm, như ở hình vẽ dưới đây. Biết rằng, đoạn thẳng AC chia hình đó thành hai phần có diện tích bằng nhau. Hãy tính độ dài đoạn thẳng AB.



Đăng Hải, Hà Nội (st)

P752. (Mức B) Cho x, y, z là các số thực thoả mãn

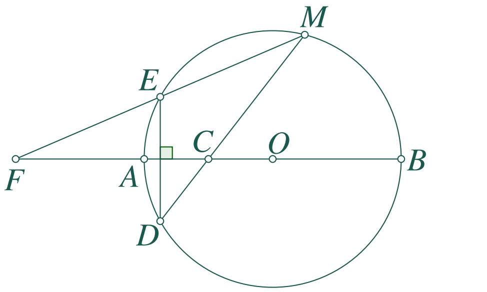
$$x^2y+y^2z+z^2x=1 \text{ và } xy^2+yz^2+zx^2=2.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$P=\left(x^2+xy+y^2\right)\left(y^2+yz+z^2\right)\left(z^2+zx+x^2\right).$$

Trần Quốc Luật, Tp. Hồ Chí Minh

P753. (Mức B) Cho đường tròn (O) với đường kính $AB=2R$. Gọi C là trung điểm của OA. M là một điểm nằm trên (O). Đường thẳng MC cắt (O) tại điểm thứ hai D. Đường thẳng qua D và vuông góc với AB cắt (O) tại điểm thứ hai E. Đường thẳng ME cắt đường thẳng AB tại điểm F. Tìm vị trí của điểm M sao cho tổng $EF+MC$ có giá trị nhỏ nhất.



Trần Thanh Hưng, Phú Yên

P754. (Mức B) Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{a(b+c)}}+\frac{c+a}{\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{b(c+a)}}+\frac{a+b}{\sqrt{c^2+ab}+\sqrt{c(a+b)}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Nguyễn Việt Hùng, Hà Nội

P755. (Mức B) Trong một hình chữ nhật có kích thước 10×5, lấy 1351 điểm đôi một phân biệt tuỳ ý. Chứng minh rằng, tồn tại một hình tròn bán kính bằng $\frac{1}{4}$ chứa ít nhất 4 điểm trong số các điểm đã lấy.

Phạm Nhật Nguyệt, Hải Phòng (st)

P756. (Mức B) Ta gọi số nguyên dương n là "số đẹp" nếu trong 22 số: $5, n+5, 2n+5, \ldots, 21n+5$, tồn tại một số có cùng số dư với tích tất cả các số đó, trong phép chia cho 23. Hãy tìm tất cả các số đẹp.

Hà Duy Hưng, Hà Nội

P757. (Mức A) Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu a_n là nghiệm thực lớn nhất của phương trình

$$x^{2023}-nx^{2022}-nx^{2021}-\cdots-nx+1=0.$$

Xác định tất cả các số thực C, để

$$a_1+\cdots+a_n > C.n^2$$

với mọi số nguyên dương n.

Tô Trung Hiếu, Nghệ An

P758. (Mức A) Tìm số thực k lớn nhất sao cho:

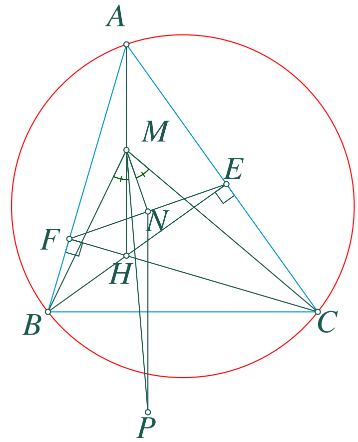
$$a+b+c-3 \geq k(a-b)(b-c)(c-a)$$

với mọi số thực không âm a,b,c thoả mãn $ab+bc+ca=3$.

Đinh Bình Dương, Hà Nội

P759. (Mức A) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AH, EF. Gọi P là điểm đối xứng với N qua BC. Chứng minh rằng

$$\angle BMP = \angle NMC.$$



Lưu Công Đông, Hà Nội

P760. (Mức A) Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1=4$ và

$$x_{n+1}=45x_n+\sqrt{2024x_n^2+16}$$

với mọi số nguyên dương n.

Tìm tất cả các số nguyên a sao cho $a^n\left(\frac{x_{2n}}{x_n}+2\right)$ là số chính phương, với mọi số nguyên dương n.

Nguyễn Đức Khải, Nam Định

ĐÍNH CHÍNH

Do sơ suất trong chế bản đề bài **P727** đăng trong số $7-8$ bị thiếu điều kiện. Đề bài đúng là như sau:

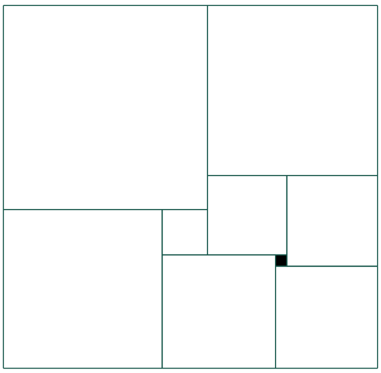
Cho số nguyên $k\geq 3$. Xét các số thực không âm x,y,z thoả mãn $x+y+z\leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^k\left(y^{k-1}+z^{k-1}\right)+y^k\left(z^{k-1}+x^{k-1}\right)+z^k\left(x^{k-1}+y^{k-1}\right).$$

Lời giải sẽ được công bố trong số sau. Thành thật cáo lỗi cùng bạn đọc và tác giả.

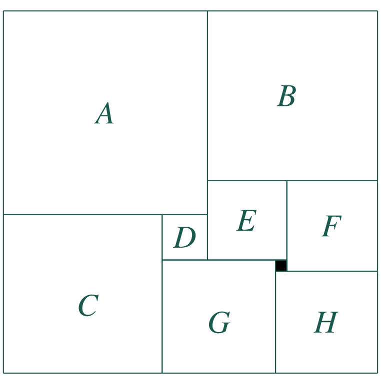
GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P731. (Mức B) Ghép chín hình vuông thành một hình chữ nhật, như ở hình dưới đây. Biết rằng, hình vuông màu đen có cạnh bằng 1. Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.



Lời giải *(dựa theo tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc)*.

Đặt tên các hình vuông như ở hình vẽ dưới đây:



Gọi a, b, c, d, e, g, h tương ứng là độ dài cạnh của các hình vuông A, B, C, D, E, G, H.

Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông F.

Khi đó, do hình vuông màu đen có cạnh bằng 1, nên

$$e = x - 1; b = e + x = 2x - 1;$$
$$h = x + 1; g = h + 1 = x + 2;$$
$$d = g - (e - 1) = (x + 2) - (x - 2) = 4;$$
$$c = g + d = (x + 2) + 4 = x + 6;$$
$$a = c + d = (x + 6) + 4 = x + 10.$$

Từ đó, do $a + c = b + x + h$, nên ta có:

$$(x + 10) + (x + 6) = (2x - 1) + x + (x + 1).$$

Suy ra, $2x + 16 = 4x$. Do đó, $x = 8$. Suy ra

$$a = 8 + 10 = 18, b = 2 \cdot 8 - 1 = 15$$
$$\text{và } c = 8 + 6 = 14.$$

Vì vậy, hình chữ nhật có chiều dài là:

$$18 + 15 = 33,$$

và chiều rộng là: $18 + 14 = 32$.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Hà Thanh

P732. (Mức B) Xét bốn số thực (không nhất thiết đôi một khác nhau), mà mỗi số có trị tuyệt đối không vượt quá $\frac{1}{2}$, và tổng của ba số bất kỳ, trong bốn số đó, là một số nguyên. Tìm tất cả các giá trị có thể của tổng bốn số đó.

Lời giải (*phỏng theo cách giải của bạn Ngô Minh Chấn, lớp 9A3, trường TH&THCS Archimedes Đông Anh, Tp. Hà Nội*).

Gọi a, b, c, d là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện đã nêu trong đề bài.

Đặt $x = a + b + c, y = a + b + d, z = a + c + d, t = b + c + d$, và $s = a + b + c + d$.

Khi đó, theo giả thiết của bài ra, ta có:

$$|a| \le \frac{1}{2}, |b| \le \frac{1}{2}, |c| \le \frac{1}{2}, |d| \le \frac{1}{2}; \quad (1)$$

và x, y, z, t là các số nguyên. (2)

Xét cặp số x, y. Do (2) nên $x - y$ là một số nguyên; hơn nữa

$$|x - y| = |c - d| \le |c| + |d|$$
$$\le 1 \quad (\text{do } (1)). \quad (3)$$

Vì thế, $|x - y| \in \{0; 1\}$. (4)

Nếu $|x - y| = 1$ thì theo (3), phải có:

$$|c - d| = |c| + |d| = 1.$$

Điều vừa nêu trên tương đương với

$$\begin{cases} cd < 0 \\ |c| = |d| = \dfrac{1}{2} \text{ (do (1))}. \end{cases} \quad (5)$$

Suy ra, $c+d=0$. Do đó, $z=a$ và $t=b$. Vì thế, $a,b \in \mathbb{Z}$ (do (2)). Từ đây và (1), suy ra $a=b=0$.

Vì vậy, $x=c$. Do đó, $c \in \mathbb{Z}$. Từ đây và (1), suy ra $c=0$, mâu thuẫn với (5).

Mâu thuẫn nhận được ở trên cho thấy

$$|x-y| \neq 1.$$

Do đó, từ (4) ta được $x=y$.

Xét các cặp số x,z và x,t, bằng cách hoàn toàn tương tự, ta sẽ được $x=z$ và $x=t$.

Như vậy, $x=y=z=t$. Suy ra

$$3s = x+y+z+t = 4x;$$

do đó, $s = \dfrac{4}{3}x$. (6)

Tiếp theo, ta có:

$$|x| \leq |a|+|b|+|c| \leq \frac{3}{2} \quad \text{(do (1))};$$

mà $|x| \in \mathbb{Z}$ (theo (2)), nên $|x| \in \{0;1\}$. (7)

Từ (6) và (7), suy ra $s \in \{-\dfrac{4}{3}; 0; \dfrac{4}{3}\}$.

Ngược lại, dễ thấy:

• $a=b=c=d=-\dfrac{1}{3}$ là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài, và có tổng bằng $-\dfrac{4}{3}$;

• $a=b=c=d=0$ là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài, và có tổng bằng 0;

• $a=b=c=d=\dfrac{1}{3}$ là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài, và có tổng bằng $\dfrac{4}{3}$;

Vậy, tất cả các giá trị có thể của tổng bốn số thỏa mãn các điều kiện của đề bài là: $-\dfrac{4}{3}, 0, \dfrac{4}{3}$.

Bình luận và Nhận xét

1. Lời giải trên cho thấy, các bộ bốn số thực được liệt kê ở phần cuối của Lời giải là *tất cả* các bộ bốn số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

2. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có hai lời giải sai, do người giải bài hoặc mới chỉ ra điều kiện cần (nhưng không đủ) cho giá trị của tổng bốn số đã vội kết luận đó là các giá trị có thể của tổng đó, hoặc đã chỉ ra sai các bộ bốn số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài. Bên cạnh đó, còn có một lời giải chưa đầy đủ, do người giải bài chưa xét hết các trường hợp có thể xảy ra.

Hà Thanh

P733. (Mức B) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \left\lfloor \frac{b+c}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c+a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+b}{c} \right\rfloor,$$

trong đó, a,b,c là các biến nguyên dương. ($\lfloor x \rfloor$ ký hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x.)

Lời giải (*dựa theo lời giải của các bạn: Ngô Minh Chấn, lớp 9A3, trường TH&THCS Archimedes Đông Anh, Tp. Hà Nội; Lê Nguyễn Hoàng Nhật Đình, lớp 9C, trường THCS Nguyễn Thái Bình, tỉnh Cà Mau; Trương Anh Dũng, lớp 10A1 chuyên Toán, trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc*).

Từ định nghĩa phần nguyên của một số thực dễ thấy, với mọi số thực x, ta đều có

$$\lfloor x \rfloor > x-1.$$

Vì vậy, với lưu ý a,b,c là các số dương, ta có:

$$\begin{aligned} S &> \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} - 3 \\ &= \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right) - 3 \\ &\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}} + 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}} - 3 = 3. \end{aligned}$$

Từ đó, do S là số nguyên, suy ra $S \geq 4$.

Hơn nữa, dễ thấy, với $a=3, b=c=4$, ta có $S=4$.

Vì vậy, giá trị nhỏ nhất của S bằng 4.

Bình luận và Nhận xét

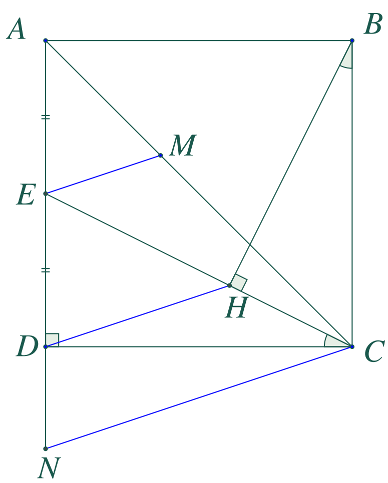
1. Lời giải trên cho thấy, kết quả của bài ra không thay đổi, khi thay giả thiết "a,b,c là các biến nguyên dương" bởi giả thiết "a,b,c là các biến thực dương".

2. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải sai, do người giải bài đã mắc sai sót về kiến thức cơ bản, khi khẳng định "$\lfloor x \rfloor \geq x$ với mọi số thực x".

Lưu Thị Thanh Hà

P734. (Mức B) Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là trung điểm của AD; H là hình chiếu vuông góc của B trên CE. Trên đường chéo AC, lấy điểm M sao cho $AM = \frac{3}{8}AC$. Chứng minh rằng, ME song song với DH.

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Nguyên Chinh, lớp 9D, trường THCS Nguyễn Chí Thanh, tỉnh Phú Yên*).



Qua C, kẻ đường thẳng song song với ME, cắt đường thẳng AD tại N.

Khi đó, theo định lý Thales, ta có:

$$\frac{AN}{AE} = \frac{AC}{AM} = \frac{8}{3}(\text{theo giả thiết}).$$

Từ đó, với lưu ý E là trung điểm của AD (giả thiết), suy ra

$$\frac{DN}{DE} = \frac{DN}{AE} = \frac{AN}{AE} - \frac{AD}{AE} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}.$$

Do đó

$$\frac{NE}{ND} = \frac{ND+DE}{ND} = 1 + \frac{DE}{ND}$$
$$= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}. \qquad (1)$$

Đặt $AD = a$. Từ giả thiết của bài ra, ta có $CD = a$ và

$$AE = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2}.$$

Vì vậy, áp dụng định lý Pithagoras cho tam giác vuông CDE, ta được:

$$CE^2 = CD^2 + DE^2$$
$$= a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2. \qquad (2)$$

Tiếp theo, do

$$\angle CBH = 90^{\circ} - \angle BCH = \angle DCE,$$

nên tam giác vuông BHC đồng dạng với tam giác vuông CDE. Do đó

$$\frac{CH}{CB} = \frac{ED}{EC};$$

suy ra

$$\frac{CH}{CE} = \frac{ED \cdot CB}{CE^2} = \frac{\frac{a}{2}\cdot a}{\frac{5}{4}a^2} \quad (\text{theo}(2))$$
$$= \frac{2}{5} = \frac{ND}{NE} \quad (\text{theo}(1)).$$

Do đó, $DH \parallel NC$ (theo định lý Thales); mà $NC \parallel ME$, nên $DH \parallel ME$.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có một lời giải bằng phương pháp tọa độ. Rất tiếc, lời giải này được diễn đạt rất sai bằng ngôn ngữ Toán học; và vì thế, không thể coi là lời giải đúng.

Hạ Vũ Anh

P735. (Mức B) Tìm tất cả các số nguyên dương n, để $n! + n$ là một lũy thừa với số mũ nguyên dương của một số nguyên tố.

Lời giải (*dựa theo đa số lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).

• Giả sử n là số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Khi đó, tồn tại số nguyên tố p và số nguyên dương α, sao cho

$$n!+n=p^{\alpha},$$

hay

$$n\left((n-1)!+1\right)=p^{\alpha}. \qquad (1)$$

Do $(n-1)!+1>1$ nên từ (1) suy ra, tồn tại số tự nhiên $\beta<\alpha$, sao cho $n=p^{\beta}$ và

$$(n-1)!+1=p^{\alpha-\beta}. \qquad (2)$$

Vì $\beta\in\mathbb{N},\alpha\in\mathbb{N}^*$ và $\beta<\alpha$, nên $\alpha-\beta$ là một số nguyên dương. Do đó, từ (2) suy ra

$$(n-1)!+1\equiv 0\,(\bmod\, p). \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $\beta\in\{0;1\}$, vì nếu ngược lại, $\beta\geq 2$, thì

$$n-1\geq p^2-1>p\ (\text{do } n=p^{\beta} \text{ và } p\geq 2);$$

dẫn tới $(n-1)!\,\vdots\,p$, và do đó, $1\,\vdots\,p$ (theo (3)), là điều vô lý.

Với $\beta=0$, ta có $n=p^0=1$. $\qquad (4)$

Với $\beta=1$, ta có $n=p$; do đó

$$(p-1)!+1=p^{\alpha-1}(\text{theo } (2)). \qquad (5)$$

Xét $p>5$. Khi đó

$$(p-1)!>(p-1)(p-2)>p.$$

Vì thế, từ (5) suy ra $\alpha-1\geq 2$, hay $\alpha\geq 3$. Do vậy, từ (5) ta có:

$$\begin{aligned}(p-1)! &= p^{\alpha-1}-1\\ &=(p-1)\left(p^{\alpha-2}+p^{\alpha-3}+\cdots+p+1\right).\end{aligned}$$

Suy ra

$$(p-2)!=p^{\alpha-2}+p^{\alpha-3}+\cdots+p+1. \qquad (6)$$

Tiếp theo, do p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên $p-1$ là một hợp số lớn hơn 4. Vì thế, tồn tại các số nguyên dương a,b, với $1<a\leq b$, sao cho $p-1=ab$.

– Nếu $a=b$ thì

$$4<p-1=a^2. \qquad (7)$$

Do đó, $a>2$; suy ra $p-1>2a$. Vì thế, $p-2>2a-1$; mà $p-2$ là số nguyên, nên $p-2\geq 2a$. Vì vậy

$$\begin{aligned}(p-2)! &= 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot a\cdot\cdots\cdot 2a\cdot\cdots\cdot(p-2)\\ &\equiv 0\,(\bmod\, p-1)\ \ (\text{do } (7)).\end{aligned}$$

– Nếu $a<b$ thì do $a,b<p-2$ nên

$$\begin{aligned}(p-2)! &= 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot a\cdot\cdots\cdot b\cdot\cdots\cdot(p-2)\\ &\equiv 0\,(\bmod\, p-1)\ \ (\text{do } p-1=ab).\end{aligned}$$

Vì vậy, ta có

$$(p-2)!\equiv 0\,(\bmod\, p-1). \qquad (8)$$

Do $p\equiv 1\,(\bmod\, p-1)$ nên từ (6) suy ra

$$(p-2)!\equiv \alpha-1\,(\bmod\, p-1). \qquad (9)$$

Từ (8) và (9), ta được:

$$\alpha-1\equiv 0\,(\bmod\, p-1);$$

mà $\alpha-1$ là số nguyên dương, nên $\alpha-1\geq p-1$, hay $\alpha\geq p$. Vì thế, theo (5), ta có

$$(p-1)!+1\geq p^{p-1},$$

là điều vô lý.

Điều vô lý vừa nhận được ở trên cho thấy, $p\leq 5$; mà p là số nguyên tố, nên $p\in\{2;3;5\}$. $\qquad (10)$

Do $n=p$ nên từ (4) và (10), ta được: $n\in\{1;2;3;5\}$. $\qquad (11)$

• Ngược lại, với n thỏa mãn (11), ta có

$$n!+n\in S=\{2;4;9;125\}.$$

Dễ thấy, mỗi số thuộc S đều là một lũy thừa với số mũ nguyên dương của một số nguyên tố.

• Vậy, tất cả các số nguyên dương cần tìm theo yêu cầu đề bài là: $1,2,3$ và 5.

Bình luận và Nhận xét

1. Dễ thấy, trong Lời giải trên ẩn chứa chứng minh của kết quả sau:

"*Nếu n là một hợp số lớn hơn 4 thì* $(n-1)!\equiv 0\,(\bmod\, n)$."

2. Trong số các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải sai (do người giải bài mắc một số sai sót trong các lập luận) và một lời giải chưa đầy đủ (do người giải bài chưa xét trường hợp $n = 1$).

Lưu Thị Thanh Hà

P736. (Mức B) Bạn An có 8 quả cân có tổng trọng lượng bằng 16 kg, và trọng lượng mỗi quả, tính theo đơn vị kg, là một số nguyên dương không vượt quá 8. Chứng minh rằng, có thể chia 8 quả cân này thành hai nhóm, sao cho các tổng trọng lượng của các quả cân cùng nhóm bằng nhau.

Lời giải (*dựa theo cách giải của bạn Phạm Đức Minh, lớp* 10 *Toán* 2*, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định*).

Dễ thấy, nếu cả 8 quả cân có trọng lượng như nhau thì điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài là hiển nhiên.

Xét trường hợp trong 8 quả cân, tồn tại hai quả cân có trọng lượng khác nhau. Gọi m_1, m_2 ($m_1 \neq m_2$) là trọng lượng của hai quả cân này; và gọi $m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8$ là trọng lượng của sáu quả cân còn lại.

Hiển nhiên, kết luận của bài ra tương đương với khẳng định "tồn tại một nhóm gồm tối đa 7 quả cân và tổng trọng lượng của các quả cân thuộc nhóm bằng 8".

Vì vậy, để chứng minh kết luận của bài ra, ta sẽ chỉ ra một nhóm gồm tối đa 7 quả cân và tổng trọng lượng của các quả cân thuộc nhóm bằng 8. Để tránh dài dòng trong diễn đạt, ta gọi nhóm quả cân có tính chất vừa nêu là nhóm "*tốt*".

Đặt

$$S_1 = m_1, S_2 = m_2, S_3 = m_1 + m_2,$$
$$S_4 = m_1 + m_2 + m_3, S_5 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4,$$
$$S_6 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5,$$
$$S_7 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6,$$
$$S_8 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7.$$

Từ giả thiết của đề bài suy ra S_1, S_2 là các số nguyên dương không vượt quá 8, và $S_i, i = \overline{3,8}$, là các số nguyên dương không vượt quá 15.

Xảy ra hai trường hợp sau:

• *Trường hợp* 1: Tồn tại $i \in \{1; 2; \ldots; 8\}$ sao cho $S_i \equiv 0 \pmod{8}$.

Khi đó, do $S_i \in \mathbb{N}^*$ và $1 \leq S_i \leq 15$, nên $S_i = 8$. Vì thế, nhóm gồm các quả cân có trọng lượng là các số hạng của tổng S_i là một nhóm tốt.

• *Trường hợp* 2: Với mọi $i \in \{1; 2; \ldots; 8\}$, $S_i \not\equiv 0 \pmod{8}$.

Trong trường hợp này, do phép chia cho 8 chỉ có 7 số dư khác o, nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại các chỉ số p, q, với $1 \leq p < q \leq 8$, sao cho

$$S_p \equiv S_q \pmod{8}. \qquad (1)$$

Do $S_1, S_2 \in \{1; 2; \ldots; 8\}$ (giả thiết) và $S_1, S_2 \not\equiv 0 \pmod{8}$, nên $S_1, S_2 \in \{1; 2; \ldots; 7\}$. Mà $S_1 \neq S_2$ (do $m_1 \neq m_2$), nên $S_1 \not\equiv S_2 \pmod{8}$. Vì thế, không thể có đồng thời $p = 1$ và $q = 2$. (2)

Đặt $T = S_q - S_p$.

Do (2) và do $1 \leq S_p, S_q \leq 15$ nên $T \in \mathbb{N}^*, 1 \leq T \leq 14$, và

$$\begin{cases} m_2 + m_3 + \cdots + m_{q-1} \text{ nếu } p = 1 \\ m_1 + m_3 + \cdots + m_{q-1} \text{ nếu } p = 2 \\ m_p + m_{p+1} + \cdots + m_{q-1} \text{ nếu } 3 \leq p \leq 7. \end{cases}$$

Do (1) nên $T \equiv 0 \pmod{8}$; mà $1 \leq T \leq 14$ (theo trên), nên $T = 8$. Vì thế, nhóm gồm các quả cân có trọng lượng là các số hạng của tổng T là một nhóm tốt.

Kết quả xét hai trường hợp trên đây cho ta điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Bài đã ra có thể được phát biểu dưới dạng tương đương sau:

"*Cho tám số nguyên dương (không nhất thiết đôi một khác nhau) không vượt quá* 8 *và có tổng bằng* 16*. Chứng minh rằng, tồn tại một nhóm gồm tối đa bảy số, trong tám số đó, mà tổng các số thuộc nhóm bằng* 8*.*"

Với các bài toán "kiểu" trên, ý tưởng "từ các số đã cho, thiết lập các tổng "con", rồi xét các tổng đó theo một modulo thích hợp", là một ý tưởng tự nhiên và thông dụng.

2. Tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều có ý tưởng giải là ý tưởng vừa nêu trên.

Nguyễn Khắc Minh

P737. (Mức A) Xét các số thực dương a, b, c, thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=2\left(a^3+b^3+c^3\right)-(a+b+c).$$

Lời giải (*của người chấm bài*). Do $a, b, c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$, nên theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có:

$$(a+b+c)^2 \leq (1+1+1)\left(a^2+b^2+c^2\right)=3; \quad (1)$$

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)(a+b+c) \geq \left(a^2+b^2+c^2\right)^2=1. \quad (2)$$

Do $a, b, c>0$ nên từ (1) suy ra

$$a+b+c \leq \sqrt{3}. \quad (3)$$

Lại do $a, b, c>0$ nên từ (2) và (3), suy ra

$$a^3+b^3+c^3 \geq \frac{1}{a+b+c} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta được:

$$S \geq 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hơn nữa, dễ thấy, với $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$, ta có $a^2+b^2+c^2=1$ và $S=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vì vậy, giá trị nhỏ nhất của S bằng $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bình luận và Nhận xét

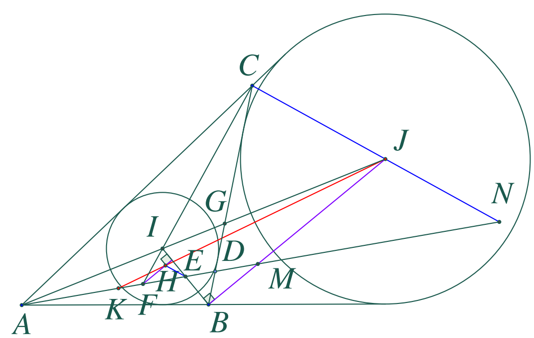
1. Bài đã ra là một bài toán cơ bản, một ví dụ đơn giản minh họa việc sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz trong chứng minh bất đẳng thức.

2. Dù đã được nhắc rất nhiều lần trên Tạp chí, vẫn có quá nửa số lời giải, mà Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, mắc lỗi kiến thức cơ bản. Đó là, khẳng định giá trị nhỏ nhất của S bằng $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, *ngay sau khi mới chỉ chứng minh được* $S \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Võ Quốc Bá Cẩn

P738. (Mức A) Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác đó. Trên cạnh BC, lấy điểm D tùy ý, sao cho ba điểm A, I, D không thẳng hàng. Đường thẳng AD cắt các đường thẳng IB, IC, tương ứng, tại E, F. Gọi H là trực tâm của tam giác IEF, và gọi K là trung điểm của AD. Chứng minh ba điểm K, H, J thẳng hàng.

Lời giải (*dựa theo Đáp án của BBT Tạp chí*). Gọi G là giao điểm của AJ và BC; và gọi M, N tương ứng là giao điểm của AD với các đường thẳng BJ, CJ.



Do I là tâm đường tròn nội tiếp và J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC, nên BI, BJ tương ứng là phân giác trong, phân giác ngoài của góc ABG. Do đó, $IB \perp BJ$, và $(AGIJ)=-1$. Từ đây, do phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỷ số kép, nên
Vì thế, do K là trung điểm của AD, nên theo hệ thức Newton, ta có:

$$KD^2=\overline{KE} \cdot \overline{KM}. \quad (1)$$

Bằng cách tương tự, ta cũng chứng minh được

$$KD^2 = \overline{KF} \cdot \overline{KN}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$\overline{KE} \cdot \overline{KM} = \overline{KF} \cdot \overline{KN};$$

do đó, $\dfrac{\overline{KE}}{\overline{KN}} = \dfrac{\overline{KF}}{\overline{KM}}$. (3)

Đặt $\dfrac{\overline{KE}}{\overline{KN}} = k$; và ký hiệu f là phép vị tự tâm K, tỷ số k.

Từ (3) suy ra, f biến điểm N thành điểm E, và biến điểm M thành điểm F. (4)

Tiếp theo, do H là trực tâm tam giác IEF (giả thiết) nên $FH \perp IE$, hay $FH \perp IB$ (do I, E, B thẳng hàng). Mà $BJ \perp IB$ (chứng minh trên), hay $MJ \perp IB$ (do M, B, J thẳng hàng), nên $FH \parallel MJ$. (5)

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được $EH \parallel NJ$. (6)

Từ (4), (5) và (6) suy ra, f biến đường thẳng MJ thành đường thẳng FH, và biến đường thẳng NJ thành đường thẳng EH. Do đó, f biến điểm J thành điểm H. Mà K là tâm của f, nên K, J, H thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Lời giải trên cho thấy, kết luận của bài ra vẫn đúng, khi thay giả thiết "D thuộc cạnh BC, sao cho A, I, D không thẳng hàng" bởi giả thiết "D thuộc đường thẳng BC, sao cho A, I, D không thẳng hàng".

2. Tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc là lời giải đúng.

Hạ Vũ Anh

P739. (Mức A) Cho dãy số (a_n) xác định bởi

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{3}} \right\rfloor, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng, trong dãy (a_n) có vô hạn số chẵn và vô hạn số lẻ.

($\lfloor x \rfloor$ ký hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x.)

Lời giải (*dựa trên ý tưởng của bạn Huỳnh Nguyễn Khánh Duy, lớp 12 Toán, trường THPT chuyên Tiền Giang, tỉnh Tiền Giang*).

Ta có Nhận xét sau:

Nhận xét. Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, do $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x$ và $y - 1 < \lfloor y \rfloor \le y$, nên

$$x - y - 1 < \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor < x - y + 1.$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ đặt

$$u_n = \left\lfloor \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor$$
$$\text{và } v_n = \left\lfloor \frac{n+1}{\sqrt{3}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{3}} \right\rfloor.$$

Theo Nhận xét, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có:

$$-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{n+1}{\sqrt{2}} - \frac{n}{\sqrt{2}} - 1$$
$$< u_n < \frac{n+1}{\sqrt{2}} - \frac{n}{\sqrt{2}} + 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}};$$

mà $u+n \in \mathbb{Z}$ nên $u_n \in \{0; 1\}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ (1)

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được: $v_n \in \{0; 1\}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ (2)

Xét số nguyên dương k tùy ý.

Theo Nhận xét, ta có:

$$\sum_{i=k}^{k+100} u_i = \sum_{i=k}^{k+100} \left(\left\lfloor \frac{i+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{i}{\sqrt{2}} \right\rfloor \right)$$
$$= \left\lfloor \frac{k+101}{\sqrt{2}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{\sqrt{2}} \right\rfloor$$
$$> \frac{k+101}{\sqrt{2}} - \frac{k}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{101}{\sqrt{2}} - 1$$
$$> 70, \qquad (3)$$

$$\sum_{i=k}^{k+100} v_i = \sum_{i=k}^{k+100} \left(\left\lfloor \frac{i+1}{\sqrt{3}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{i}{\sqrt{3}} \right\rfloor \right)$$
$$= \left\lfloor \frac{k+101}{\sqrt{3}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{\sqrt{3}} \right\rfloor$$
$$< \frac{k+101}{\sqrt{3}} - \frac{k}{\sqrt{3}} + 1 = \frac{101}{\sqrt{3}} + 1$$
$$< 60. \qquad (4)$$

Từ (1) và (3) suy ra, trong 101 số

$u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{k+100}$ có ít nhất 71 số bằng 1.

Từ (2) và (4) suy ra, trong 101 số $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+100}$ có tối đa 59 số bằng 1.

Vì vậy, tồn tại $m \in \{k; k+1; \ldots; k+100\}$ sao cho $u_m = 1$ và $v_m = 0$.

Ta có:

$$\begin{aligned} & a_{m+1} - a_m \\ &= \left\lfloor \frac{m+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m+1}{\sqrt{3}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{\sqrt{2}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{\sqrt{3}} \right\rfloor \\ &= u_m + v_m = 1. \end{aligned}$$

Suy ra, $a_m \not\equiv a_{m+1} \pmod 2$. Từ đây, do tính tùy ý của số nguyên dương k, suy ra, trong 101 số hạng liên tiếp tùy ý của dãy (a_n) luôn có đồng thời cả số chẵn và số lẻ. Mà (a_n) là dãy vô hạn, nên trong dãy đó có vô hạn số chẵn và vô hạn số lẻ. Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Lời giải của bạn *Huỳnh Nguyễn Khánh Duy* là lời giải duy nhất Tạp chí nhận được từ bạn đọc, và là một lời giải đúng.

Lưu Thị Thanh Hà

P740. (Mức A) Cho bảng ô vuông kích thước 2023×2023. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất, sao cho có thể đặt n viên bi vào các ô vuông con của bảng, đảm bảo các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

$i/$ Ở mỗi ô vuông con chỉ có tối đa một viên bi;

$ii/$ Với mỗi ô vuông con không có bi, tổng số viên bi ở hàng và cột chứa ô đó không nhỏ hơn 2023.

Lời giải (*dựa theo cách giải của bạn Nguyễn Gia Khánh, lớp* 12 *Toán* 1*, trường THPT chuyên Hưng Yên, tỉnh Hưng Yên*).

Đánh số thứ tự các hàng của bảng đã cho, từ trên xuống dưới, lần lượt bởi $1, 2, \ldots, 2023$; và đánh số thứ tự các cột của bảng đó, từ trái qua phải, lần lượt bởi $1, 2, \ldots, 2023$.

Với mỗi $i \in \{1; 2; \ldots; 2023\}$, ta gọi hàng được đánh số thứ tự i là hàng i, và gọi cột được đánh số thứ tự i là cột i.

Với $i, j \in \{1; 2; \ldots; 2023\}$, ký hiệu ô vuông con nằm ở giao của hàng thứ i và cột thứ j bởi (i, j).

Giả sử n là số nguyên dương sao cho có thể đặt n viên bi vào các ô vuông con của bảng, đảm bảo các điều kiện $i/$ và $ii/$ được đồng thời thỏa mãn.

Xét một cách đặt bi tùy ý, thỏa mãn các yêu cầu của đề bài.

Với mỗi $i \in \{1; 2; \ldots; 2023\}$, gọi a_i là số viên bi được đặt vào hàng i, và b_i là số viên bi được đặt vào cột i.

Do tổng số viên bi được đặt vào bảng bằng n, nên

$$\sum_{i=1}^{2023} a_i = \sum_{i=1}^{2023} b_i = n. \qquad (1)$$

Đặt $m = 2023^2 - n$ $\qquad (2)$

Do số bi ở mỗi ô tối đa là 1 và trong bảng có n viên bi, nên trong bảng có đúng n ô có bi. Vì thế, trong bảng có đúng m ô không có bi. Giả sử các ô này là $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \ldots, (p_m, q_m)$.

Theo giả thiết của bài ra, với mọi $i \in \{1; 2; \ldots; m\}$, đều có

$$a_{p_i} + b_{q_i} \geq 2023. \qquad (3)$$

Với mỗi $k \in \{1; 2; \ldots; 2023\}$, do trong hàng k có đúng $2023 - a_k$ ô không có bi, và trong cột k có đúng $2023 - b_k$ ô không có bi, nên số k xuất hiện đúng $2023 - a_k$ lần trong dãy $p_1, p_2, \ldots, p_m$ và xuất hiện đúng $2023 - b_k$ lần trong dãy $q_1, q_2, \ldots, q_m$.

Vì vậy

$$\sum_{i=1}^{m} a_{p_i} = \sum_{k=1}^{2023} (2023 - a_k)\, a_k$$
$$= 2023 \cdot \sum_{k=1}^{2023} a_k - \sum_{k=1}^{2023} a_k^2$$
$$= 2023 \cdot n - \sum_{k=1}^{2023} a_k^2 \quad (\text{do } (1)); \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{q_i} = \sum_{k=1}^{2023} (2023 - b_k)\, b_k$$
$$= 2023 \cdot \sum_{k=1}^{2023} b_k - \sum_{k=1}^{2023} b_k^2$$
$$= 2023 \cdot n - \sum_{k=1}^{2023} b_k^2 \quad (\text{do } (1)). \quad (5)$$

Từ (3), (4) và (5), với lưu ý tới (2), suy ra

$$2023\left(2023^2 - n\right) \le \sum_{i=1}^{m} \left(a_{p_i} + b_{q_i}\right)$$
$$= 2 \cdot 2023n - \sum_{k=1}^{2023} \left(a_k^2 + b_k^2\right).$$

Do đó

$$3 \cdot 2023n \ge 2023^3 + \sum_{k=1}^{2023} \left(a_k^2 + b_k^2\right)$$
$$\ge 2023^3 + \sum_{k=1}^{2023} \frac{(a_k + b_k)^2}{2}$$
$$\ge 2023^3 + \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{2023} (a_k + b_k)\right)^2}{2 \cdot 2023}$$
$$= 2023^3 + \frac{(2n)^2}{2 \cdot 2023} \quad (\text{do}(1)).$$

Suy ra

$$2n^2 - 3 \cdot 2023^2 \cdot n + 2023^4 \le 0.$$

Vì vậy

$$n \ge \frac{2023^2}{2} = \frac{2\left(1011^2 + 1012^2\right) - 1}{2}$$
$$= 1011^2 + 1012^2 - \frac{1}{2}.$$

Từ đó, do $n \in \mathbb{N}^*$, suy ra $n \ge 1011^2 + 1012^2$. Xét cách đặt $1011^2 + 1012^2$ viên bi vào bảng, như sau:

Đặt vào mỗi ô vuông con của bảng con 1011×1011, tạo bởi các hàng $1, 2, \ldots, 1011$ và các cột $1, 2, \ldots, 1011$, một viên bi; và đặt vào mỗi ô vuông con của bảng con 1012×1012, tạo bởi các hàng $1012, 1013, \ldots, 2023$ và các cột $1012, 1013, \ldots, 2023$, một viên bi.

Dễ thấy, ở cách đặt trên, với mỗi ô vuông con không có bi, tổng số viên bi ở hàng và cột chứa ô đó đúng bằng 2023. Vì thế, cách đặt đó thỏa mãn tất cả các điều kiện của đề bài.

Vậy, $n = 1011^2 + 1012^2$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Có thể phát biểu bài đã ra một cách đơn giản hơn, như sau:

"Cho bảng ô vuông kích thước 2023×2023. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất, để có thể đánh dấu n ô vuông con của bảng, sao cho với mỗi ô vuông con không được đánh dấu, tổng số ô được đánh dấu ở hàng và cột chứa ô đó không nhỏ hơn 2023."

2. Trong số các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc, lời giải của bạn *Nguyễn Gia Khánh* là lời giải đúng duy nhất; các lời giải còn lại đều mắc lỗi thiếu kiểm tra cách đặt $1011^2 + 1012^2$ viên bi, đã chỉ ra ở lời giải, thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Nguyễn Khắc Minh