



LỊCH SỬ CỦA GIẢ THUYẾT WEIL*

J. A. DIEUDONNÉ

(Người dịch: Phạm Khoa Bằng)

Câu chuyện của “các giả thuyết Weil” là một ví dụ kỳ diệu của trí tưởng tượng toán học, và là một trong những thí dụ đáng ngạc nhiên nhất biểu lộ sự thống nhất cơ bản của toán học. Những ý tưởng cốt lõi dẫn tới chứng minh của chúng tới từ sáu người: E. Artin, F. K. Schmidt, H. Hasse, A. Weil, A. Grothendieck, và P. Deligne, trong khoảng năm mươi năm (1923 – 1973).

1. Số nghiệm của phương trình đồng dư

Một cách đủ thích hợp, câu chuyện, như mọi vấn đề trong lý thuyết số, bắt đầu từ Gauss. Trong công trình về luật thuận nghịch bình phương của mình, ông đưa ra cái ngày nay được gọi là tổng Gauss (phổ biến nhất là tổng $\sum_{x=0}^{p-1} \exp(2\pi i x^2/p)$ với p nguyên tố); để tính các tổng này, bằng một số lập luận sơ cấp, ông suy ra cần tính số nghiệm của các phương trình đồng dư có các dạng

$$\begin{aligned} ax^3 - by^3 &\equiv 1 \pmod{p}, \\ ax^4 - by^4 &\equiv 1 \pmod{p}, \\ y^2 &\equiv ax^4 - 1 \pmod{p} \end{aligned} \quad (1)$$

trong đó a, b là các số nguyên cố định không chia hết cho p , nghiệm (x, y) được xét theo đồng dư modulo p (như vậy các phương trình đồng dư (1) được xem như các phương

trình trong trường \mathbb{F}_p); và p chạy trong một tập vô hạn các số nguyên tố; chúng ta đi tìm những biểu diễn *tiệm cận* (dưới dạng những hàm đơn giản của p) của số lượng các nghiệm. Một thời gian ngắn sau, Jacobi nhận xét rằng, ngược lại, bằng cách sử dụng các tính chất cơ bản của tổng Gauss, ta có thể thu được một đánh giá tốt về số nghiệm trong các trường hợp tổng quát hơn, ở đó các phương pháp sơ cấp trở nên cồng kềnh. Sau Jacobi, gần như không có nhiều tiến triển trong chủ đề này cho tới khi Hardy và Littlewood, trong khi nghiên cứu bài toán Waring để đưa ra các tính chất của “chuỗi kỳ dị”, thấy rằng cần phải đưa ra một đánh giá tiệm cận cho số nghiệm của phương trình đồng dư

$$x_1^k + \dots + x_r^k \equiv 0 \pmod{p}, \quad (2)$$

trong đó p là một số nguyên tố chạy tới $+\infty$. Hai ông đã sử dụng phương pháp của Jacobi cho mục đích này; tổng quát hơn, năm 1949, cả Hua-Vandier và A. Weil đã độc lập chứng minh rằng phương pháp này có thể đánh giá số nghiệm N của những phương trình

$$a_0 x_0^{k_0} + \dots + a_r x_r^{k_r} = 0 \quad (a_0, \dots, a_r \neq 0) \quad (3)$$

* Xuất bản lần đầu trong: *The Mathematical Intelligencer* 10, Springer, Berlin Heidelberg New York (1975) và được trích lại trong [1]

trong mọi trường hữu hạn \mathbb{F}_q với $q = p^m$ phần tử; kết quả được đưa ra

$$N = q^r + O(q^{(r+1)/2}). \quad (4)$$

Kết quả tương tự được đưa ra bởi Davenport (1931) và Mordell (1933) cho các phương trình dạng $y^m = P_n(x)$ trên \mathbb{F}_p , trong đó P_n là một đa thức bậc n ; với một số giá trị m, n nhỏ, họ thu được các đánh giá có dạng $N = p + O(p^{\phi(m,n)})$ trong đó $1/2 < \phi(m,n) < 1$.

2. Về hàm Zêta

Hay để chúng tôi nhắc lại các tính chất cổ điển của hàm zêta Riemann: nó xác định với $\Re(s) > 1$ bởi chuỗi $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, và thỏa mãn phương trình Euler

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \quad (5)$$

trong đó tích chạy trên tập tất cả các số nguyên tố. Riemann chứng minh rằng ζ có thể thắc triển thành một hàm phân hình trên mặt phẳng phức với một cực duy nhất tại $s = 1$, và nếu đặt

$$\xi = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s),$$

thì ξ là một hàm chỉnh hình trên toàn bộ mặt phẳng phức và thỏa mãn phương trình hàm $\xi(s) = \xi(1-s)$. Hơn nữa ông đề xuất giả thuyết Riemann (vẫn chưa được chứng minh) rằng mọi nghiệm của ξ nằm trên đường thẳng $\Re(s) = 1/2$.

Một thời gian ngắn sau, Dedekind mở rộng lý thuyết của Riemann lên một trường số K (mở rộng hữu hạn của \mathbb{Q}), bằng cách định nghĩa $\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} (N\mathfrak{a})^{-s}$, trong đó \mathfrak{a} chạy trên tất cả các ideal của vành \mathfrak{o} các số đại số nguyên trong K , chuẩn $N\mathfrak{a}$ là số phần tử của vành $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$. Ông mở rộng công thức Euler thành

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - (N\mathfrak{p})^{-s})^{-1}, \quad (6)$$

trong đó tích chạy trên tất cả các ideal nguyên tố \mathfrak{p} của \mathfrak{o} ; rất nhiều năm sau Hecke chứng minh rằng ζ_K có thể thắc triển thành một hàm phân hình và thỏa mãn một phương trình hàm tương tự như phương trình hàm Riemann cho ξ .

Một cách hình thức, ta thấy rằng phương trình (6) chỉ dùng hai tính chất của vành \mathfrak{o} : 1) \mathfrak{o} là một vành Dedekind; 2) trường $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ là hữu hạn với mọi ideal nguyên tố \mathfrak{p} : thật vậy, nếu $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{v_1} \dots \mathfrak{p}_r^{v_r}$ là một phân tích thành các ideal nguyên tố của ideal \mathfrak{a} thì $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ đẳng cấu với tích trực tiếp của các $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i^{v_i}$, và với mọi ideal nguyên tố \mathfrak{p} , mỗi $(\mathfrak{o}/\mathfrak{p})$ -module $\mathfrak{p}^h/\mathfrak{p}^{h+1}$ đẳng cấu với $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$; điều đó chứng tỏ rằng chuẩn là nhân tính, từ đó suy ra (6) một cách hình thức (chứng minh tính hội tụ của tích vô hạn cần một số ước lượng đơn giản về số các ideal nguyên tố với chuẩn cho trước). Năm 1923, E. Artin nhận xét rằng các tính chất này đúng cho các vành định nghĩa theo cách sau: bắt đầu với một trường hữu hạn \mathbb{F}_q , xét trường $K_0 = \mathbb{F}_q(T)$ các phân thức hữu tỷ, và một mở rộng toàn phương $K = K_0(v)$ với $v^2 = P(T)$, trong đó P là một đa thức không có nghiệm bội. Khi đó bao đóng nguyên \mathfrak{o} của $\mathbb{F}_q[T]$ trong K thỏa mãn các tính chất 1) và 2), $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ là một mở rộng hữu hạn của \mathbb{F}_q với mỗi ideal nguyên tố \mathfrak{p} ; rất dễ để chứng minh chuỗi và tích vô hạn trong định nghĩa của ζ_K hội tụ với $\Re(s) > 1$. Hơn nữa Artin còn thấy rằng lý thuyết này đơn giản hơn của Dedekind rất nhiều, lý do là các hàm của ông có thể viết dưới dạng $Z(q^{-s})$ trong đó $Z(u)$ là một hàm hữu tỷ với hệ số trong \mathbb{Q} ; phương trình hàm biểu diễn thương $Z(1/qu)/Z(u)$ bởi một hàm hữu tỷ với không điểm và cực cho trước; ông ấy sau đó giả thuyết rằng không điểm của $Z(u)$ tất cả đều nằm trên đường tròn $|u| = q^{1/2}$ và tự kiểm chứng giả thuyết này với rất nhiều đa thức P bậc nhỏ.

Bây giờ các ideal nguyên tố \mathfrak{p} sao cho $\mathfrak{o}/\mathfrak{p} \cong \mathbb{F}_q$ ($N\mathfrak{p} = q$) tương ứng một-một với các

đồng cấu $\mathfrak{o} \rightarrow \mathbb{F}_q$; mọi đồng cấu như vậy gửi (T, v) tới $(a, b) \in \mathbb{F}_q^2$ thỏa mãn $b^2 = P(a)$. Nói cách khác số nghiệm của phương trình $y^2 = P(x)$ trong \mathbb{F}_q^2 chính là số lượng N_1 các ideal nguyên tố kiểu này; tuy nhiên từ phương trình Euler (6) suy ra luôn rằng

$$\log Z(u) = N_1 u + \dots$$

gần $u = 0$, như vậy nghiên cứu $Z(u)$ giúp ta hiểu về N_1 . “Giả thuyết Riemann” của Artin sinh ra đánh giá

$$|N_1 - q| \leq c \cdot q^{1/2}, \quad (7)$$

và như vậy làm chặt hơn những kết quả trước đó của ông về bài toán đồng dư của Gauss.

3. Bước vào hình học đại số

Cho k là một trường giao hoán bất kỳ, người ta cố gắng hình dung tập nghiệm $(x_1, \dots, x_r) \in k^r$ của một phương trình $P(x_1, \dots, x_r) = 0$, với P là một đa thức bất khả quy trong $k[T_1, \dots, T_r]$ xem như một “siêu mặt đại số affine” (“đường cong” với $r = 2$, “mặt” với $r = 3$) trong “không gian affine” k^r . Hơn nữa, với mọi mở rộng trường $K \supset k$, ta có thể xét các nghiệm của $P(y_1, \dots, y_r)$ với giá trị y_i trong trường K lớn hơn, như vậy ta có một “siêu mặt đại số” V trong “không gian affine” K^r ; việc các hệ số của P nằm trong k giờ được thay bởi việc nói V xác định trên k . Kinh nghiệm cho thấy việc chuyển đổi giữa ngôn ngữ hình học và trực giác sang những đa tạp “trừu tượng” chỉ có ích khi K là *đồng đại số* (hãy thử nghĩ về $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ khi $k = \mathbb{R}$). Ta sẽ hạn chế sự quan tâm xuống trường hợp $K = \bar{k}$, bao đóng đại số của k ; hơn nữa, ta chỉ xét các siêu mặt V không kỳ dị trong \bar{k}^r , i.e. tại các điểm mà “siêu phẳng tiếp xúc” được định nghĩa duy nhất theo nghĩa thông thường (có nghĩa là tất cả các đạo hàm riêng không đồng thời triệt tiêu trong V). Với mọi điểm $x = (x_1, \dots, x_r) \in V$, toạ độ x_i nằm trong \bar{k} , do đó có một mở rộng hữu hạn nhỏ nhất $k(x)$ của k chứa tất cả x_j và $[k(x) : k] =$

$\deg(x)$ được gọi là *bậc* của điểm x . Nếu \mathfrak{m} là hạt nhân của đồng cấu $k[T_1, \dots, T_r] \rightarrow \bar{k}$ gửi mỗi T_i tới x_i thì \mathfrak{m} là một ideal cực đại của $k[T_1, \dots, T_r]$ và $k[T_1, \dots, T_r]/\mathfrak{m}$ đẳng cấu với $k(x)$; ta viết $k(\mathfrak{m}) = k(x)$ và $\deg(\mathfrak{m}) = \deg(x)$; có thể chứng minh rằng mọi ideal cực đại \mathfrak{m} của $k[T_1, \dots, T_r]$ chứa $P(T_1, \dots, T_r)$ ứng với một điểm x của V với bậc $\deg(\mathfrak{m})$.

Khi $k = \mathbb{F}_q$, đặt

$$Z_V(u) = \prod_{P \in \mathfrak{m}} (1 - u^{\deg(\mathfrak{m})})^{-1}; \quad (8)$$

hàm $Z(u)$ định nghĩa bởi E. Artin bằng với hàm $Z_C(u)$, trong đó C là “đường cong affine” $x_2^2 - P(x_1) = 0$ xác định trên \mathbb{F}_q . Một cách tổng quát ta gọi Z_V là *hàm zéta* của V . Các điểm của V trong $(\mathbb{F}_q)^r$ là các điểm mà $\deg(x)$ là ước của n ; hiển nhiên số lượng các điểm như vậy $\leq q^{nr}$, như vậy số lượng các ideal cực đại \mathfrak{m} mà $P \in \mathfrak{m}$, tương ứng với các điểm này, có ước lượng *tiên nghiệm* $\leq q^{nr}$, điều này chứng tỏ rằng (8) hội tụ với u nhỏ; hơn nữa, với u nhỏ ta có thể viết

$$\begin{aligned} uZ'_V(u)/Z_V(u) &= \sum_{P \in \mathfrak{m}} \frac{\deg(\mathfrak{m})u^{\deg(\mathfrak{m})}}{1 - u^{\deg(\mathfrak{m})}} \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{P \in \mathfrak{m}} \deg(\mathfrak{m})u^{v\deg(\mathfrak{m})} \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} N_v u^v \end{aligned} \quad (9)$$

trong đó N_v là số điểm của V trong $(\mathbb{F}_{q^v})^r$. Cách định nghĩa này có thể mở rộng cho các dạng đa tạp không kỳ dị khác, không nhất thiết phải bị nhúng trong “không gian affine” \bar{k}^r . Nói một cách theo lịch sử, ngôn ngữ của hình học đại số trong lý thuyết của các hàm zéta được giới thiệu vào năm 1931 bởi F. K. Schmidt, người nghiên cứu các *đường cong xạ ảnh* không kỳ dị trên trường hữu hạn \mathbb{F}_q . Ông chứng minh rằng lý thuyết Dedekind–Weber của đường cong đại số trên \mathbb{C} (bao gồm định nghĩa về giống và định lý

Riemann–Roch) có thể mở rộng cho đường cong xạ ảnh trên một trường đóng đại số \bar{K} bất kỳ; điều này cho phép ông chứng minh rằng với mọi đường cong xạ ảnh không kỳ dị C với giống g định nghĩa trên \mathbb{F}_q , hàm zêta có thể biểu diễn dưới dạng

$$Z_C(u) = P_{2g}(u)/(1-u)(1-qu) \quad (10)$$

trong đó tử số là một đa thức bậc $2g$ với hệ số nguyên và ta có một phương trình hàm

$$Z_C(1/qu) = (qu^2)^{1-g} Z_C(u). \quad (11)$$

“Giả thuyết Riemann” cho C do đó nói rằng các không điểm của P_{2g} nằm trên đường tròn $|u| = q^{1/2}$; dẽ thấy điều này tương đương với bất đẳng thức

$$|N_v - q^v - 1| \leq 2g \cdot q^{1/2} \text{ với mọi } v \geq 1. \quad (12)$$

4. Mơ mộng về Tôpô đại số

Quay lại trường hợp siêu mặt V trong $(\mathbb{F}_q)^r$, nhận xét rằng các phần tử của \mathbb{F}_q thuộc \mathbb{F}_{q^n} chính là những phần tử mà $t^{q^n} = t$. Xét ánh xạ

$$\Phi : (x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1^q, \dots, x_r^q)$$

từ $(\mathbb{F}_q)^r$ vào chính nó. Do hệ số của P nằm trong \mathbb{F}_q , do đó thỏa mãn $t^q = t$, ta có

$$P(\Phi(x)) = (P(x))^q,$$

do đó Φ ánh xạ V lên chính nó; hạn chế của Φ lên V được gọi là cấu xạ Frobenius của V . Năm 1936, Hasse nhận thấy rằng với một đường cong C , số N_v chính là số điểm $x \in C$ thỏa mãn $\Phi^v(x) = x$; i.e. x là một điểm bất động của Φ^v . Bây giờ, chúng ta hãy bỏ qua chuỗi các sự kiện mang tính niêm đại mà giả vờ rằng ta đang làm việc với các đa tạp đại số không kỳ dị “cổ điển” X trong một không gian xạ ảnh phức. Từ thời của Picard và Poincaré người ta đã nhận thấy rằng hầu

hết các tính chất của các đa tạp đại số được liên hệ chặt chẽ với các tính chất đồng điều. Trong phiên bản hiện thời (chủ yếu từ các công trình của Lefschetz và Hodge), với một đa tạp xạ ảnh không kỳ dị bất khả quy X chiều d trên \mathbb{C} (do đó là một đa tạp khả vi chiều $2d$), các tính chất này xoay quanh đại số đối đồng điều $H^\bullet(X) = \bigoplus_i H^i(X)$ của X trên trường K với đặc số 0; nó là một đại số phân bậc trên K , thỏa mãn các tính chất sau:

(A) 1. Mỗi $H^i(X)$ là một K -không gian vector hữu hạn chiều, bằng 0 ngoại trừ $0 \leq i \leq 2d$;

2. Tồn tại một đẳng cấu tự nhiên $H^{2d}(X) \xrightarrow{\sim} K$, và với mỗi i , phép nhân trên $H^\bullet(X)$ cho ta một phép ghép cặp không kỳ dị $H^i(X) \times H^{2d-i}(X) \rightarrow H^{2d}(X) \xrightarrow{\sim} K$ (đối ngẫu Poincaré) cho phép ta đồng nhất $H^{2d-i}(X)$ với

$$H_i(X) = \text{Hom}_K(H^i(X), K),$$

đồng điều của K tại chiều i .

3. Với các đa tạp không kỳ dị X, Y , tồn tại một đẳng cấu tự nhiên của các đại số phân bậc

$$H^\bullet(X) \otimes H^\bullet(Y) \cong H^\bullet(X \times Y) \\ (\text{công thức Künneth}).$$

(B) Mọi cấu xạ $f : X \rightarrow Y$ định nghĩa tự nhiên, với mỗi i , một đồng cấu tuyến tính $f^{(i)} : H^i(X) \rightarrow H^i(Y)$, sao cho các $f^{(i)}$ với $0 \leq i \leq 2d$ cảm sinh một đồng cấu $f^\bullet : H^\bullet(X) \rightarrow H^\bullet(Y)$ của các đại số phân bậc. Các điểm bất động của f là phép chiếu lên X của giao của đồ thị Γ của f và đường chéo Δ của $X \times Y$; nếu Γ giao hành với Δ tại mỗi điểm (nghĩa là các không gian tiếp xúc của chúng có giao chỉ là một điểm), số lượng điểm bất động của f được tính bởi công thức vết Lefschetz

$$N = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \text{Tr}(f^{(i)}). \quad (13)$$

(C) Nếu Y là một đa tạp con không kỳ dị của X với chiều $d - 1$, các ánh xạ tuyến tính tự nhiên $H^i(X) \rightarrow H^i(Y)$ là song ánh với $i \leq d - 2$ và đơn ánh với $i = d - 1$.

(D) Lấy $h \in H^2(X)$ từ đối ngẫu Poincaré ứng với lớp đồng điều trong $H_{2d-2}(X)$ của một lát cắt siêu phẳng của X , và xét $L : a \rightarrow ha$ là phép nhân trái bởi h trong $H^\bullet(X)$; khi đó $L^{d-i} : H^i(X) \rightarrow H^{2d-i}(X)$ là một đẳng cấu với $i \leq d$.

Một lập luận đại số đơn giản cho thấy nếu một cấu xạ $f : X \rightarrow X$ thỏa mãn $f^{(2)}(h) = q \cdot h$ với $q > 0$ là một số hữu tỷ, và nếu $g_i = q^{-i/2}f^{(i)}$ (xem như một tự đồng cấu của $H^i(X) \otimes_K \bar{K}$), g_i là song ánh, và g_i^{-1} được đồng nhất với ${}^t g_{2d-i}$ bởi đối ngẫu Poincaré. Điều này suy ra rằng nếu α_{ij} là các giá trị riêng của $f^{(i)}$ trong \bar{K} , tập các phần tử $q^{i/2}\alpha_{ij}$ trùng với tập các phần tử $\alpha_{2d-i,j}/q^{d-(i/2)}$.

(E) Trong mỗi $H^i(X)$ với $i \leq d$ có một không gian con $A^i(X)$ ổn định dưới tác động của $f^{(i)}$ với mọi cấu xạ $f : X \rightarrow X$, và trên mỗi $A^i(X)$, ta có thể trang bị một cấu trúc không gian vector trên trường các số hữu tỷ cùng một tích vô hướng không kỳ dị, sao cho: với mỗi f thỏa mãn (D) thì mỗi g_i là ánh xạ *unita* với tích vô hướng này; điều này suy ra tất cả các giá trị riêng của $f^{(i)}$ (là các phần tử của $\bar{\mathbb{Q}}$) có giá trị tuyệt đối là $q^{1/2}$.

Quay lại với siêu mặt V xác định trên \mathbb{F}_q , giả sử ta có thể gán với nó một đại số phân bậc $H^\bullet(V)$ có tất cả các tính chất vừa nêu, hơn nữa $\Phi^{(2)}(h) = q \cdot h$ trong đó Φ là đồng cấu Frobenius. Để thấy đồ thị của Φ^v giao hoành với Δ ; do đó, nếu α_{ij} là các giá trị riêng của $(\Phi^v)^{(i)}$, số N_v có thể cho bởi công thức

$$N_v = \sum_i (-1)^i \sum_j \alpha_{ij}^v; \quad (14)$$

và do đó ta có (với $d = r - 1 = \dim(V)$)

$$Z_V(u) = \frac{P_1(u)P_3(u)\dots P_{2d-1}(u)}{P_0(u)P_2(u)\dots P_{2d}(u)} \quad (15)$$

trong đó $P_i(u) = \deg(1 - u \cdot \Phi^{(i)})$ là một đa thức với hệ số nguyên. Nói riêng, $Z_V(u)$ là một hàm hữu tỷ; hơn nữa $Z_V(1/q^d u)$ nên có không điểm và cực giống với $Z_V(u)$ ngoại trừ khi $u = 0$, và ta nên có $|\alpha_{ij}| = q^{1/2}$. Cuối cùng, nếu tất cả hệ số của V là các lớp đồng dư mod p của các số nguyên, hệ số của một phương trình của một đa tạp không kỳ dị V_0 trong $\bar{\mathbb{Q}}^r$, bậc của mỗi P_i sẽ bằng số Betti thứ i của V_0 .

Các phát biểu trên là *các giả thuyết Weil* cho Z_V .

5. Những “phương án thay thế” cho đối đồng điều của Hasse và Weil

Để hiểu tại sao Weil đã có thể đi tới những khái niệm táo bạo như vậy, ta phải quay lại những ý tưởng đầu tiên của Hasse trong việc chứng minh “giả thuyết Riemann” cho các đường cong *giống 1* trên \mathbb{F}_q . Trong lý thuyết cổ điển của các đường cong không kỳ dị trên trường số phức, mỗi đường cong C được gán với *jacobian* $J = J(C)$, có thể xem như đối ngẫu Pontrjagin của nhóm đồng điều $H_1(C, \mathbb{Z})$; đối ngẫu này được dẫn ra từ dạng song tuyến tính $(\gamma, \omega) \mapsto \int_\gamma \omega$ định nghĩa trên các chu trình γ và các dạng vi phân abel chính hình ω trên diện Riemann C (“chu kỳ” của ω trên γ). Nếu C có giống g thì $J(C)$ là một xuyến phức \mathbb{C}^g/Δ trong đó Δ là một nhóm con rời rạc với hạng $2g$, thỏa mãn các điều kiện song tuyến tính Riemann cổ điển. Ta có thể định nghĩa J một cách đại số, bằng cách xét các nhóm cộng G/G_i của các lớp của các ước bậc 0 trên C , modulo quan hệ tương đương tuyến tính: ta gắn mỗi ước D bậc 0, vốn có thể viết dưới dạng $\partial\gamma$ với 1-xích γ trên diện Riemann, một lớp $\phi(D)$ trong \mathbb{C}^g/Δ của vector $(\int_\gamma \omega_1, \dots, \int_\gamma \omega_g)$, trong đó các ω_j lập thành một cơ sở của không gian các dạng vi phân chính hình; định lý Abel-Jacobi nói rằng phép tương ứng này là toàn ánh và có hạt nhân G_i . Từ đó có thể trang bị cho J một cấu trúc *nhóm đại số* (một trường hợp cụ thể

của nhóm đại số trên \mathbb{C} được biết đến như *các đa tạp abel*) với sự giúp đỡ của các điều kiện (siêu việt) song tuyến tính Riemann. Cuối cùng, nếu x_0 là một điểm trên C ,

$$x \mapsto \phi((x) - (x_0))$$

là một cấu xạ từ C vào J và là đẳng cấu nếu $g = 1$.

Phương pháp đầu tiên của Hasse để làm việc với các đường cong C giống 1 xác định trên \mathbb{F}_q là “nâng” C thành một đường cong C_0 “cổ điển” giống 1 xác định trên trường các số hữu tỷ \mathbb{Q} : nếu E là trường các hàm hữu tỷ trên C , ông chứng minh rằng ta có thể xác định C_0 sao cho, nếu ω_1, ω_2 là các hàm chu kỳ của các hàm elliptic ứng với C_0 (nên trường E_0 của các hàm này là trường các hàm hữu tỷ trên C_0), ω_1/ω_2 phải sinh ra một trường toàn phương ảo K trên \mathbb{Q} , và E sẽ là trường thặng dư của vành các số nguyên của K modulo một ideal nguyên tố khéo chọn nào đó. Hasse từ đó đã có thể dùng các kết quả cổ điển về “các phép nhân phức” của C_0 (i.e. tự đồng cấu của jacobian $J(C_0)$) để xác định số điểm của C với bậc 1, và chứng minh “giả thuyết Riemann” cho C .

Một thời gian ngắn sau, Hasse từ bỏ phương pháp trên và thay thế bằng một phương pháp có tính nội tại hơn: như đã nói ở trên, $J(C)$ có thể định nghĩa một cách đại số như một nhóm “trừu tượng”, và cấu xạ Frobenius định nghĩa tự nhiên một tự đồng cấu của nhóm đó; Hasse chứng minh rằng tử số của hàm zêta Z_C trong (10) (trong trường hợp này là một đa thức bậc 2) được đồng nhất với đa thức đặc trưng của tự đồng cấu đó. Công cụ mà ông giới thiệu cho mục đích này là một số nguyên $v(\lambda)$ gắn với mỗi tự toàn cầu λ của $J(C)$: nếu E là trường các hàm hữu tỷ của C , λ định nghĩa một “đổi cấu xạ” (comorphism) $R(\lambda)$, một tự đẳng cấu của E và $v(\lambda)$ là bậc $[E : R(\lambda)(E)]$, hữu hạn khi λ là toàn cầu. Hasse chứng minh rằng với mọi số nguyên

a, b thì

$$v(a \cdot 1 + b \cdot \lambda) = a^2 + \sigma(\lambda)ab + v(\lambda)b^2$$

với mọi tự toàn cầu λ của $J(C)$, tính xác định dương của dạng toàn phương này cho ông chứng minh của “giả thuyết Riemann”.

Việc mở rộng những ý tưởng này cho các đường cong C giống g bất kỳ trên \mathbb{F}_q là không hề hiển nhiên: lý thuyết cổ điển chứng minh rằng $J(C)$ nên là một nhóm đại số g chiều (thay vì đẳng cấu với C như một đa tạp đại số trong trường hợp của Hasse), và cho tới tận năm 1940 không ai mở rộng lý thuyết của các nhóm đại số trên trường đặc số $p > 0$ sang hình học đại số, và nói riêng lý thuyết của các đa tạp abel. Điều này đã được thực hiện một mình bởi A. Weil, người đầu tiên phải phát triển, trong cuốn sách nổi tiếng *Foundations of algebraic geometry*, các tính chất cơ bản của các số giao một cách độc lập mà không viễn tới tôpô đại số. Sau đó ông đã có thể nghiên cứu cấu trúc vành của các tự đồng cấu của một đa tạp abel A ; với mọi tự toàn cầu λ của A , Weil định nghĩa số nguyên $v(\lambda)$ như Hasse, (bây giờ E là trường các hàm hữu tỷ trên A) và lần này chứng minh

$$\begin{aligned} & v(a \cdot 1 + b \cdot \lambda) \\ &= a^{2g} + \sigma(\lambda)a^{2g-1}b + \dots + v(\lambda)b^{2g}. \end{aligned}$$

Bất biến $\sigma(\lambda)$ được xem như một “thay thế” đóng vai trò của $\text{Tr}(f^{(1)})$ khi λ là tự đồng cấu của $J(C)$ ứng với một cấu xạ f của C . Một “thay thế” cho đổi ngẫu Poincaré được phát hiện trong một đổi ngẫu tổng quát cho các đa tạp abel mà có thể định nghĩa nghĩa hoàn toàn đại số (trong trường hợp cổ điển người ta định nghĩa nó bởi đổi ngẫu Pontrjagin); cuối cùng, nếu λ' là “chuyển vị” của một tự đồng cấu λ trong đổi ngẫu này thì ta có thể chứng minh $\sigma(\lambda\lambda') > 0$ với $\lambda \neq 0$, tính chất này (xem như một “thay thế” cho tính xác định dương của tích vô hướng Hodge) cho phép Weil đưa ra chứng minh của “giả

“thuyết Riemann” cho đường cong có giống bất kỳ.

Trong tất cả các công trình này, Weil đã không ngừng giữ trong trí óc ông lý thuyết cổ điển của các “tương ứng” phát triển bởi Hurwicz: một tương ứng trên C có thể xem như một cấu xạ “đa trị”, mà cụ thể hơn như một đường cong Γ trên diện $C \times C$; tốt hơn nữa, nó được định nghĩa như một ước (tổ hợp tuyến tính của các đường cong) trên $C \times C$. Một tương ứng Γ gắn một cách tự nhiên (bắt chước phiên bản lý thuyết tập hợp) mỗi ước D trên C (tổ hợp tuyến tính của các điểm) một ước khác $\Gamma(D)$, một lần nữa điều này định nghĩa một tự đồng cấu của $J(C)$; ngược lại có thể chỉ ra rằng mọi tự đồng cấu của $J(C)$ đều thu được từ cách định nghĩa này. Trong trường hợp cổ điển, công thức Lefschetz (13) có thể được mở rộng để cho số giao của một tương ứng Γ với “tương ứng đồng nhất”, i.e. đường chéo Δ của $C \times C$, và thực tế điều này đã được chứng minh bởi Hurwicz vào năm 1866, sử dụng lý thuyết tích phân abel; sự thật là Weil đã có thể chứng minh một công thức tương tự bằng các công cụ thuần túy đại số, điều đã dẫn ông đến chỗ đề xuất các giả thuyết mang tên mình.

6. Đồi đồng điều étale và định lý của Deligne

Sử dụng kết quả của mình cho các đường cong, Weil đã chứng minh được các giả thuyết của chính ông với các siêu mặt dạng (3), cũng như cho những đa tạp khác như các đa tạp Grassman. Nhưng tại thời điểm đó không có một lý thuyết đồi đồng điều nào đủ “tốt” đã được định nghĩa. Khoảng năm 1953, Cartan và Serre đã dùng đồi đồng điều Leray với hệ số là các bó như một công cụ cực kỳ hữu hiệu để nghiên cứu các đa tạp phức, và Serre đã chỉ ra làm cách nào để chuyển các kỹ thuật này sang các đa tạp đại số trên một trường đóng đại số với đặc số p . Nhưng khi

$p > 0$, những nhóm đối đồng mới đó được định nghĩa hiển nhiên không thể được sử dụng bởi công thức Lefschetz (13), trong đó về trái bắt buộc phải là một số nguyên, mà không phải một phần tử của một trường có đặc số p . Chỉ sau khi Grothendieck xây dựng lý thuyết lược đồ mà, từ một lưu ý của Serre, thì cậu ấy đã có thể mở rộng ý tưởng ban đầu theo cả hai hướng “tôpô” và “bó”, gắn mỗi đa tạp (hoặc lược đồ) X một đại số đối đồng điều $H^\bullet(X_{et}, \mathbb{Q}_l)$ trên trường l -adic \mathbb{Q}_l , trong đó l là một số nguyên tố khác với đặc số của trường ban đầu (sự can thiệp của các trường l -adic trong những câu hỏi này đã được nhận ra bởi Weil và Deuring).

Độ sâu sắc và phức tạp của các kỹ thuật liên quan trong định nghĩa của “đồi đồng điều étale” $H^\bullet(X_{et})$ như thế để loại trừ mọi khả năng trong việc đưa ra bất kỳ một chi tiết nào nữa trong định nghĩa của nó. Hãy để chúng tôi chỉ ra Grothendieck (với sự giúp đỡ của M. Artin (con trai của E. Artin) và J. L. Verdier) đã có thể chứng minh các tính chất (A), (B), (C)¹ ở trên và gần đây Deligne đã chứng minh (D) cũng đúng với mọi đa tạp trên một trường hữu hạn \mathbb{F}_q ; tuy nhiên không một tính chất nào tương tự như (E) đã được chứng minh cho đồi đồng điều étale (hoặc bất kỳ một lý thuyết đồi đồng điều nào được đưa ra gần đây). Các tính chất (A), (B), (C) là đủ để chứng minh (15), cũng như phương trình hàm

$$Z_V(1/q^d u) = \pm q^{n\chi/2} u^\chi Z_V(u)$$

trong đó

$$\chi = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \dim H^i(X_{et}, \mathbb{Q}_l).$$

Tuy nhiên, chỉ đến gần đây người ta mới biết rằng các hệ số của P_j trong (15) là độc lập với số nguyên tố l . Điều này cuối cùng cũng được chứng minh bởi Deligne năm 1973,

¹ Trước kia đồi đồng điều l -adic được định nghĩa, Dwork đã chứng minh, bằng cách khéo léo sử dụng các hàm giải tích p -adic, rằng hàm zêta $Z_V(u)$ là hữu tỷ.

cùng với phần cuối và khó nhất của các giả thuyết Weil là $|\alpha_{ij}| = q^{1/2}$.

Ở đây lần nữa, cần nhớ rằng không thể mô tả một cách chi tiết các chứng minh cực kỳ khéo léo, điều này hơi khác với chứng minh của Hasse và Weil, do nó không thể dựa trên một lập luận “tính dương”. Ta hạn chế bài toán xuống trường hợp $i = d$ (i.e. đối đồng điều “trung tâm” $H^d(X)$); việc chứng minh rằng $|\alpha_{dj}| = q^{d/2}$ thì tương đương với

$$q^{(d-1)/2} \leq |\alpha_{dj}| \leq q^{(d+1)/2} \quad (18)$$

bởi vì nếu ta áp dụng kết quả này với tích X^k , và sử dụng công thức Künneth, ta có

$$q^{(kd-1)/2} \leq |\alpha_{dj}^k| \leq q^{(kd+1)/2}$$

sau đó cho k tiến tới $+\infty$ và thu được kết quả. Thật chí trong (18) ta có thể giả sử là d chẵn và sau đó có thể chứng minh bằng quy nạp theo số chẵn d ; đây là một bước sâu sắc và khó trong chứng minh, dựa trên kỹ thuật “đơn đạo” cũ từ Picard và Lefschetz; kỹ thuật này hoàn toàn mang tính tôpô trong trường hợp cổ điển, nhưng nó cũng đã được chuyển

sang đối đồng điều étale bởi Grothendieck và những người cùng trường phái của cậu ấy.

Như thường thấy trong toán học, sự đột phá này mở ra một con đường trong việc khai phá các vấn đề mới; nhưng chừng nào bài toán ban đầu của Gauss còn được quan tâm, nó là điểm cuối của vấn đề, vì định lý của Deligne suy ra rằng, số các điểm bậc 1 của một siêu mặt xạ ảnh không kỳ dị d chiều thỏa mãn đánh giá

$$\left| N - (1 + q + \dots + q^d) \right| \leq bq^{d/2}$$

trong đó thậm chí hằng số b có thể tính cụ thể: nó là số Betti thứ d của các siêu mặt trên \mathbb{C} cùng bậc với V .

Tài liệu tham khảo

[1] Eberhard Freitag and Reinhardt Kiehl. *Étale cohomology and the Weil conjecture*, volume 13 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. Translated from the German by Betty S. Waterhouse and William C. Waterhouse, With an historical introduction by J. A. Dieudonné.



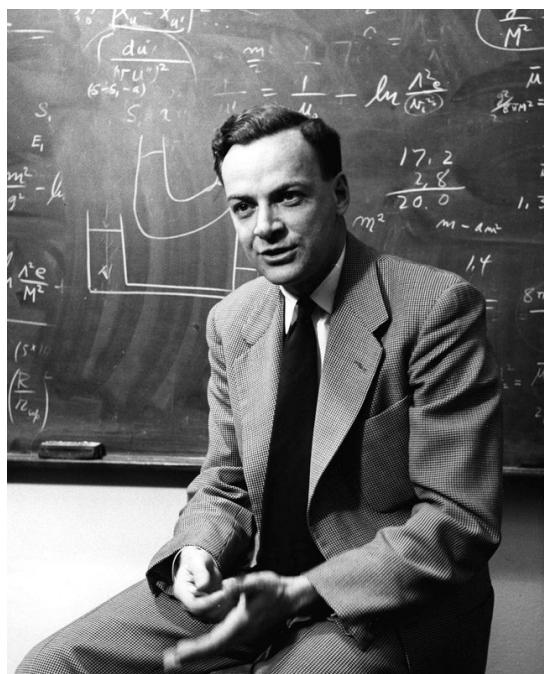
ĐAM MÊ NHƯ FEYNMAN

NGUYỄN VĂN LIÊN¹

Richard Feynman (1918 – 1988, Mỹ) nổi tiếng là người trung thực không khoan nhượng và đam mê đến tận cùng. Về tính trung thực, người ta hay nhắc đến vụ ông trình diễn trực tiếp trên TV một “thí nghiệm nhỏ”, bỏ vòng cao su vào cốc nước đá, minh chứng rằng cao su mất tính đàn hồi ở nhiệt độ thấp, qua đó chỉ ra nguyên nhân dẫn đến thảm họa tàu vũ trụ con thoi “Challenger”, vạch trần chiến dịch tung hỏa mù của NASA về nguyên nhân của thảm họa này. Để công bố với người dân Mỹ sự thật ấy, Feynman đã phải vượt qua sức ép khủng khiếp từ các cơ quan công quyền Mỹ, trong đó có CIA và NASA.

Feynman lăm đam mê. Đam mê vật lý, Feynman nhận giải Nobel Vật lý năm 1965. Đam mê chơi trống, vở ba-lê do ông đảm trống nhận giải nhất trong cuộc thi ba-lê toàn nước Mỹ và giải nhì trong cuộc thi quốc tế tại Paris. Đam mê vẽ, ông đã có triển lãm tranh riêng. Không rõ ông biết những ngôn ngữ nào, chỉ biết thăm Brazil ông dạy bằng tiếng Bồ, thăm Nhật ông giao du bằng tiếng Nhật. Rồi có lần bạn bè định “cho ông một vố”, họ nhờ một cô Hoa kiều đón tiếp ông bằng tiếng Trung, Feynman đáp lại và cô ấy kêu trời, vì ông nói tiếng Quảng Đông, còn cô chỉ nói tiếng Bắc Kinh. Rất nhiều “đam mê” kiểu như vậy được kể trong cuốn

“Feynman, chuyện thật như đùa” (NXB Trẻ) và hầu như tất cả đều có kết cục mỹ mãn, kiểu như giải Nobel. Có thể bạn nghĩ chắc ông này “con nhà nòi”, học “trường quốc tế” từ nhỏ! Xin thưa, bố của Feynman là người bán rong bán quần áo, còn mẹ thì nội trợ.



Richard Feynman (ảnh từ bộ sưu tập của Viện Công nghệ California – CalTech).

Ông chơi trống bongo cực giỏi, nhưng chưa bao giờ học nhạc lý. Ông vốn vẽ rất kém, tự nhận chẳng thể vẽ nổi cái gì ngoại trừ cái kim

¹ Viện Vật lý.

tự tháp chỉ gồm mấy đường thẳng. Để học vẽ, Feynman “đổi công” với một họa sĩ: ông dạy vật lý cho họa sĩ còn họa sĩ dạy vẽ cho ông. Hãy tưởng tượng một giáo sư nổi tiếng thế giới ngồi trong lớp vẽ cùng các cháu 8 – 9 tuổi học cách gọt bút chì. Đam mê như thế chỉ có ở Feynman. Và, với ông đam mê chính là nguồn cội của thành công, chứ chẳng phải “con nhà nòi” hay “trường quốc tế” nào cả. Tiền bạc và chứng chỉ đầy người, mà không đam mê gì, thì làm sao có thành quả!



Feynman chơi trống bên con trai (ảnh từ Internet).

Duy có đam mê cuối cùng, Feynman đã không kịp nhìn thấy những gì mình muốn, trước khi về cõi vĩnh hằng. Đó là “Cuộc phiêu lưu cuối cùng của Feynman”². Cuộc phiêu lưu khởi đầu bằng một con tem có xuất xứ từ một nơi gọi là Tannu Tuva, mà Feynman có được từ khi còn nhỏ. Cái tên “Tuva” xa lạ nằm yên trong đầu Feynman, cho đến một ngày hè 1977 nó trở thành mục tiêu cho “cuộc phiêu lưu” kéo dài hơn 10 năm cuối của cuộc đời ông. Tôi cược là nhiều bạn chưa biết Tuva là địa danh nào và ở đâu. Để đỡ tra cứu, xin “bật mí” ngay: đó là tên một quốc gia nhỏ nằm giáp phía Tây Bắc của Mông Cổ, vốn độc lập, nhưng đã sáp nhập vào Liên Xô cũ (và Nga ngày nay). Thủ đô của Tuva là Kyzyl. Tuva có gì đặc biệt mà

khiến Feynman mê mệt đến vậy?

Bạn có biết đâu là trọng tâm của châu Á (lục địa thôi chứ không tính các đảo)? Lấy tấm bìa cứng phẳng, vẽ lên đó bản đồ châu Á, cắt theo đường biên để được miếng bìa hình châu Á lục địa. Dùng một chiếc bút đầu nhọn chống phía dưới tấm bìa, di di đầu bút, để tìm vị trí mà tấm bìa nằm cân bằng trên chiếc bút thẳng đứng. Vị trí đó rơi vào Kyzyl, trọng tâm của châu Á. Tất nhiên, các nhà khoa học xác định điểm này bằng các phương pháp chính xác hơn, và ngày nay ở Kyzyl có tấm bia lớn khẳng định vị trí đặc biệt của thành phố này. Nhưng, chỉ chừng ấy thì không đủ để Feynman mất tới cả chục năm tìm cách tới thăm Tuva.



Feynman vẽ Hans Bethe (giải Nobel Vật lý 1967).

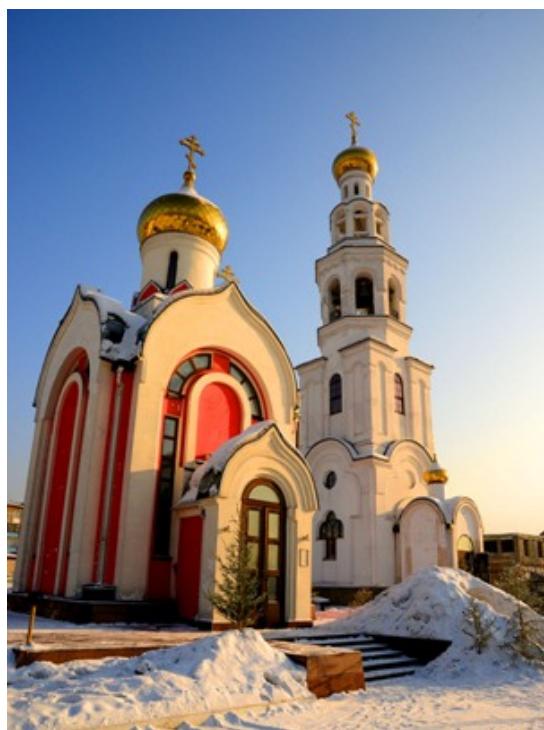
Cái chính là ở quốc gia tí xíu bao bọc bởi những dãy núi cao ấy, thời gian gần như ngừng trôi: tất cả vẫn nguyên sơ như 500 hay 1000 năm trước. Thảo nguyên hoang dại. Những đàn tuần lộc hay bò Tây Tạng cũng dường như hoang dại. Cuộc sống du mục không thể tự nhiên hơn. Một nền văn

²Xem thêm: *Cuộc phiêu lưu cuối cùng của Feynman*, in lần 2, NXB Trẻ, 2023.

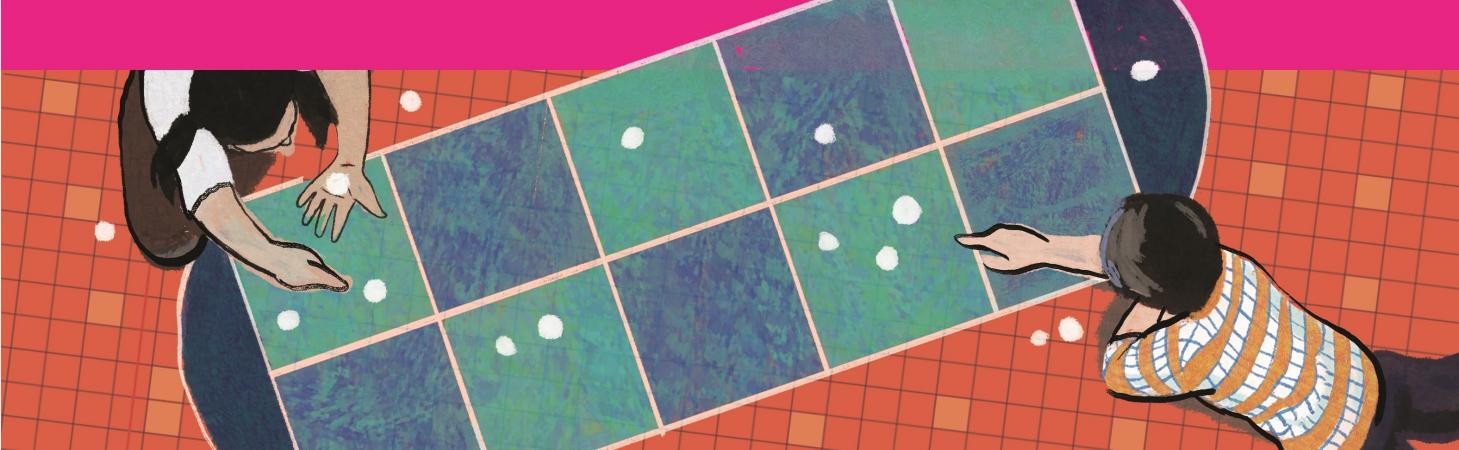
hóa xa xưa và kỳ thú với kiểu hát hai giọng chỉ có ở Tuva, với thứ văn tự không thể tìm thấy trong bất cứ tự điển nào, với các tập tục rất lạ điều hành bởi các tù trưởng uy nghi và bí ẩn v.v. Tiếc là ít người biết Tuva, chứ không, người ta đã gọi quốc gia này là “Thảo nguyên Xanh” cuối cùng của hành tinh Trái Đất (như Congo là Hành tinh Xanh cuối cùng). Đam mê Tuva, Feynman tìm đọc mọi tài liệu về Tuva, tìm hiểu văn tự Tuva, học cách hát của dân du mục Tuva, ăn mặc và trang trí như tù trưởng Tuva ...Và, nhất là, ông tìm mọi cách để có thể đến thăm Tuva.

Đó là thời Chiến tranh Lạnh, lại nghe nói, gần Tuva có một cơ sở nghiên cứu bom nguyên tử, nên nơi đây là “vùng cấm” với khách du lịch, nhất là khách nước ngoài. Thực ra, Viện Hàn lâm Khoa học Liên Xô sẵn sàng mời Feynman sang Moscow đọc bài giảng rồi đi “tham quan Kyzyl” theo kiểu mặc com-lê ở khách sạn có người bảo vệ v.v. Nhưng Feynman không thích như vậy, mà muốn tự mình mang ba-lô đến thảo nguyên, ngủ lều, uống sữa tuần lộc và hát hai giọng cùng dân bản xứ. Ấy thế cho nên ông mất cả chục năm tìm kiếm một giấy mời như mình muốn. Và, đầu tháng Ba 1988, một giấy mời như thế đã gửi đến địa chỉ của Feynman, chỉ

tiếc là hai tuần trước đó, vào ngày 15 tháng Hai, ông đã ra đi mãi mãi, nên chỉ có thể trải nghiệm “Cuộc phiêu lưu cuối cùng” của mình trong tâm trí và trái tim của những người ở lại. Không rõ, ở Thế giới bên kia Feynman đang đam mê gì?



Nhà thờ Phục sinh ở Kyzyl, Tuva (ảnh từ Internet).



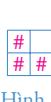
ĐỀ THI TUYỂN SINH NĂM 2023-2024

CÂU LẠC BỘ TOÁN HỌC

UNICORN MATCH CIRCLE (Phân II)

Trong số này, tạp chí Pi tiếp tục giới thiệu đến với bạn đọc đề thi tuyển sinh năm 2023 – 2024 dành cho các bạn học sinh lớp 5. Các bạn có thể thử sức làm của mình trong khoảng thời gian 90 phút.

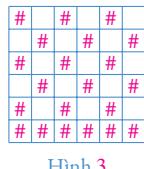
Bài 1. Dựa vào quy luật, hãy cho biết có bao nhiêu dấu thăng trong hình thứ tám của dãy hình sau.



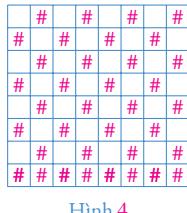
Hình 1



Hình 2



Hình 3



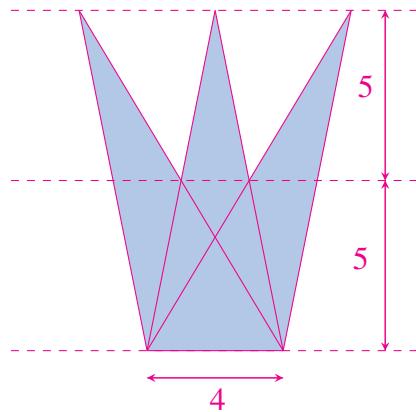
Hình 4

Bài 2. Bạn Tâm xếp các số 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3 vào các ô vuông trong hình dưới đây (mỗi ô một số) để tạo thành phép trừ của hai số có 4 chữ số. Hỏi hiệu nhận được lớn nhất có thể là bao nhiêu?

Chú ý: *một số có bốn chữ số không được bắt đầu bằng số 0.*

$$\boxed{\quad \quad \quad \quad} - \boxed{\quad \quad \quad \quad}$$

Bài 3. Diện tích của hình được tô đậm bên dưới bằng bao nhiêu?



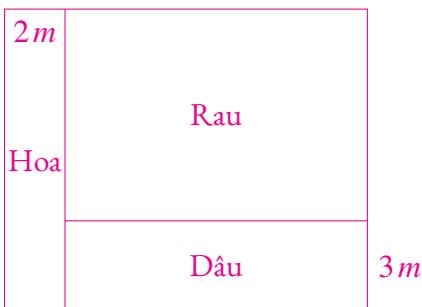
Bài 4. Trong bảng ô vuông cỡ 4×4 có điền các số khác 0 sao cho tích của 4 số trong mỗi hàng, mỗi cột đều bằng nhau. Cho biết các số trong 9 ô như hình vẽ, hỏi số ở ô có dấu * bằng bao nhiêu?

$\frac{1}{2}$	32		
	4	8	2
4	1		
32		*	16

Bài 5. Khu vườn của gia đình Tâm được minh họa bằng hình chữ nhật trong hình dưới đây. Biết rằng khu vườn có diện tích

*Nguồn: Câu lạc bộ Toán học Unicorn (UMC)

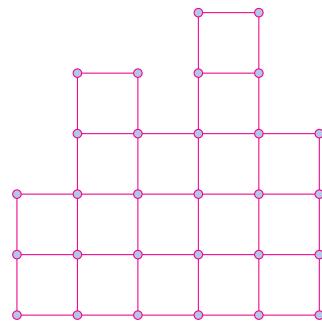
120m² và được chia thành ba luống hình chữ nhật. Phần tròng hoa rộng **2m**, diện tích **20m²**, phần tròng dâu rộng **3m**. Hỏi diện tích phần tròng rau là bao nhiêu?



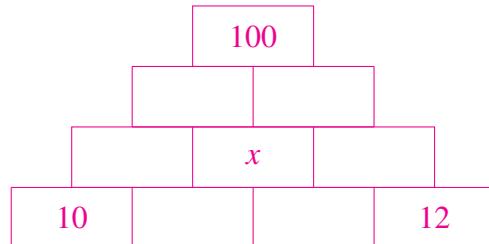
Bài 6. Ba bạn An, Bình, Chi chia đều nhau **30** chiếc kẹo. An ăn một số chiếc kẹo; Bình ăn một số kẹo bằng với số kẹo mà An còn; Chi ăn số kẹo bằng với tổng số kẹo mà An và Bình đã ăn. Hỏi còn lại bao nhiêu chiếc kẹo?

Bài 7. Một bác nông dân chở một xe ô tô quất cảnh ra chợ Tết để bán. Sau khi bán hết cây quất cuối cùng với giá **230** nghìn đồng, bác tính nhẩm lại thấy mình đã bán số cây quất với giá trung bình là **245** nghìn đồng/cây. Nhưng người mua cây quất cuối quay trở lại và chỉ cho bác thấy cảnh quất bị rụng quá nhiều lá, nên ông ta chỉ đồng ý mua với giá **158** nghìn đồng. Bác chấp thuận và bán cây quất đó. Khi nhẩm tính lại, bác nông dân thấy giá trung bình của xe quất bây giờ là **242** nghìn đồng. Hỏi bác đã bán được bao nhiêu cây quất?

Bài 8. Có bao nhiêu cách xếp **5** viên bi giống hệt nhau vào các ô hình vuông ở hình vẽ sau sao cho mỗi ô có không quá **1** viên bi và không có **2** viên bi nào trên cùng **1** hàng hoặc **1** cột?



Bài 9. Mỗi ô trong hình bên được điền một số sao cho: số được ghi trong mỗi ô ở **3** hàng trên cùng bằng tổng **2** số ở hai ô ngay bên dưới nó. Cho biết trước **3** số như trong hình vẽ, hỏi số nào phải được điền vào ô có chữ **x**?



Bài 10. Sau khi sạc điện thoại di động, bạn Kiên nhận ra mình đã quên mã PIN (mã gồm **4** chữ số). Kiên nhớ là mã PIN bắt đầu bằng số **1**, kết thúc bằng số **3** và các chữ số trong mã đều khác nhau. Có bao nhiêu số khác nhau cho mã PIN của Kiên?

Đáp án

Bài 1. Nhận thấy Hình thứ n trong dãy là một hình vuông có các đặc điểm sau:

- Cạnh hình vuông có kích thước là: $2 \times n$;
- Hàng cuối có $2 \times n$ dấu # và các hàng còn lại có n dấu #.

Như vậy số dấu # trong Hình thứ 8 là:

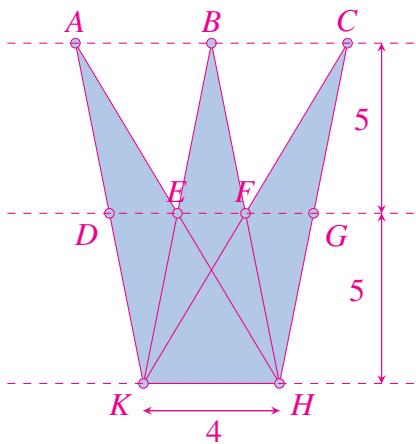
$$15 \times 8 + 16 = 136.$$

Bài 2. Để hiệu nhận được là lớn nhất thì số bị trừ là số lớn nhất có 4 chữ số và số trừ sẽ nhỏ nhất có 4 chữ số tạo từ các số đã cho.

Do đó số bị trừ là 3222 và số trừ là 1001 và ta có hiệu lớn nhất có thể là:

$$3222 - 1001 = 2221.$$

Bài 3. Ta viết tên các điểm như trong hình vẽ dưới đây.



Nhận thấy phần tô đậm có diện tích bằng tổng diện tích của các tam giác sau. BKH , ADE , DEK , CFG và FGH .

Tam giác BKH có đáy $KH = 4$ và chiều cao bằng 10, do đó có diện tích là:

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 10 = 20.$$

Các tam giác ADE , DEK , CFG và FGH có các đáy $DE = EF = FG = 2$ và chiều cao

bằng 5, do đó có cùng diện tích là:

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 5.$$

Vậy diện tích của phần tô đậm là:

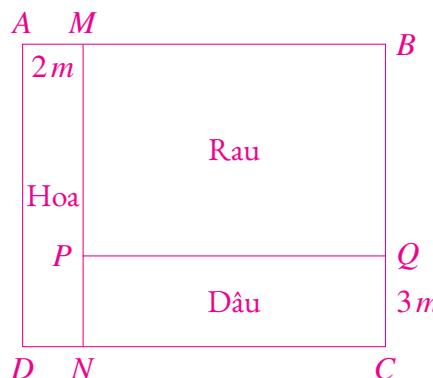
$$20 + 4 \times 5 = 40 \text{ (đơn vị diện tích)}$$

Bài 4. Do tích của mỗi hàng và mỗi cột đều bằng nhau nên tích các số của cột thứ 2 và hàng thứ 4 bằng nhau. Vì cột 2 và hàng 4 chung nhau một ô nên tích của 3 số còn lại bằng nhau. Từ đó, ta có

$$32 \times 4 \times 1 = 32 \times * \times 16.$$

Giải ra ta được số ở ô có dấu * là $\frac{1}{4}$.

Bài 5. Điền tên các đỉnh trong hình như sau.



Phần trồng hoa là hình chữ nhật $AMND$ có diện tích là $20 m^2$. Hình chữ nhật $AMND$ có cạnh $AM = 2m$ nên cạnh còn lại $AD = 10m$. Khu vườn là hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $120 m^2$. Hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AD = 10m$ nên cạnh $DC = 12m$.

Ta có $DC = 12 = DN + NC = 2 + NC$. Do đó $NC = 10$.

Từ đó, phần trồng dâu là hình chữ nhật $PQCN$ có hai cạnh $NC = 10$ và $QC = 3$. Do đó diện tích của phần trồng dâu là: $30 m^2$.

Vậy diện tích của phần trồng rau là: $120 - 20 - 30 = 70 m^2$.

Bài 6. Mỗi bạn được chia $30 : 3 = 10$ chiếc kẹo.

Do Bình ăn một số kẹo bằng với số kẹo mà An còn nên tổng số kẹo mà An và Bình ăn là

10 chiếc. Vì thế tổng số kẹo mà An, Bình và Chi ăn là $10 + 10 = 20$ chiếc. Do vậy, còn lại $30 - 20 = 10$ chiếc kẹo.

Bài 7. Gọi số cây quất là n . Khi đó tổng tiền bán được của lần bán đầu khi cây cuối có giá 230 nghìn là $245 \times n$ và tổng tiền thu được khi bán cây cuối với giá 158 nghìn là $242 \times n$. Ta thấy chênh lệch giữa giá bán cây cuối ở 2 lần bằng $3 \times n$. Do số tiền chênh lệch giữa hai lần bán là:

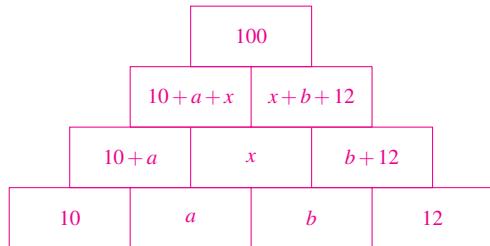
$$230 - 158 = 72 \text{ nghìn}$$

nên bác nông dân đã bán được

$$72 : 3 = 24 \text{ cây quất.}$$

Bài 8. Ta thấy Cột 1 có 2 cách xếp bi; Cột 3 có 2 cách xếp bi; Cột 5 có 1 cách xếp bi; Cột 2 có 1 cách xếp bi; Cột 4 có 1 cách xếp bi. Do đó, số cách xếp bi là: $2 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 4$ (cách)

Bài 9. Gọi hai số còn khuyết ở hàng cuối là a và b . Do mỗi ô ở hàng trên bằng tổng hai ô ngay bên dưới nên ta điền được các số như sau.



Vậy $100 = a + 10 + x + b + 12 + x = a + b + 2x + 22$.

Do $x = a + b$ nên $100 = 3 \times x + 22$.

Giai ra ta được $x = 26$.

Bài 10. Mã PIN của bạn Kiên có dạng: $1ab3$, với a, b là hai chữ số khác nhau và khác hai chữ số 1, 3.

Ta thấy có 8 cách chọn chữ số a và 7 cách chọn chữ số b .

Do đó có $8 \times 7 = 56$ cách chọn 2 chữ số a và b hay có 56 số khác nhau cho mã PIN của bạn Kiên.



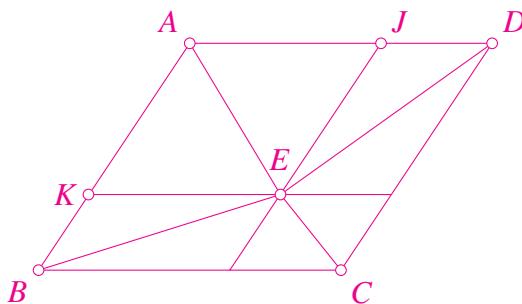
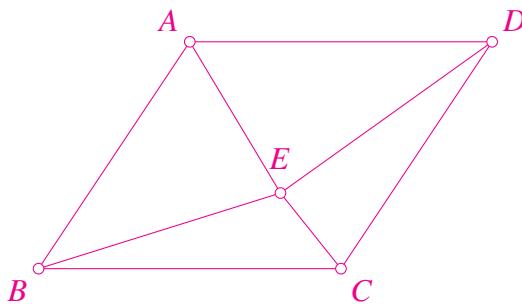
A THOUSAND WORDS (Path I)

NGHIA DOAN¹

In this article, we will investigate a number of ways to *prove area equality without writing lengthy proof*. While it sounds simple, easy, and exciting, it is important that you need to improve your creating thinking in order to first understand the examples, and then use them as tools, guidelines, or ideas to solve the problems.

Example 1. E is an arbitrary point inside the parallelogram $ABCD$, prove that

$$[AEB] + [CED] = \frac{1}{2} [ABCD].$$



Solution. Draw lines through E , parallel with sides of $ABCD$, dividing the parallelogram into four smaller parallelograms. Any of the smaller parallelogram, say $AKEJ$, consists of a brown triangle from the shaded triangle and a green triangles with the same area. Thus, the area of the shaded triangles is the

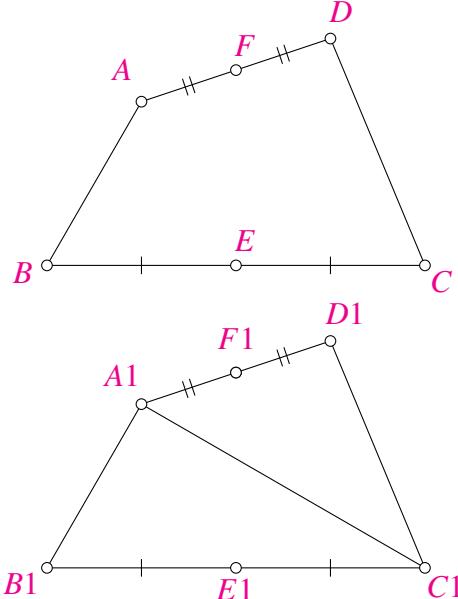
sum of the area of all smaller brown triangles, which is half of the sum of the area of all smaller parallelograms, of half of the $ABCD$ parallelogram.

Remark. Here's how we use the techniques:

1. First, divide the given figure into smaller figures.
3. Deal with each of them, if they have the same shape, then work in the same way.
3. Use all partial results to arrive at the overall result.

Example 2. E and F are midpoints of BC and DA in the convex quadrilateral $ABCD$, prove that

$$[AECF] = \frac{1}{2} [ABCD].$$



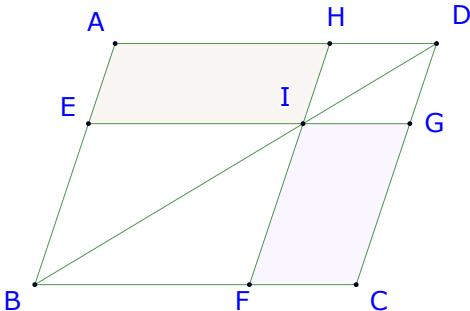
Solution. Connect AC . Since E is midpoint of BC , thus the triangles ABE and AEC have the same area. Similarly triangles CDF and CFA have the same area. Thus the area of

¹Ottawa, Canada.

$AECF$ is half of $ABCD$.

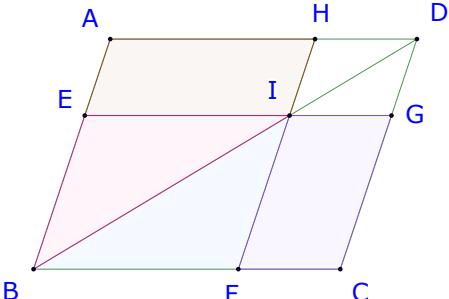
Example 3. I is an arbitrary point on the diagonal BD in parallelogram $ABCD$. Lines through I parallel with the sides of $ABCD$ intersect AB , BC , CD , and DA at E, F, G , and H , respectively.

$$[AEIH] = [FCGI].$$



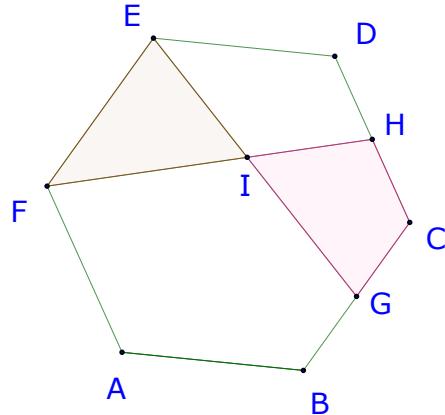
Solution. First, since BD is the diagonal in parallelogram $ABCD$, $[ABD] = [BCD]$. Now, $BEIF$ is also a parallelogram, thus $[BEI] = [BFI]$, similarly $[HID] = [IGD]$. Therefore

$$\begin{aligned} [AEIH] &= [ABD] - [BEI] - [HID] \\ &= [BCD] - [BFI] - [IGD] \\ &= [FCGI]. \end{aligned}$$



Example 4. G, H are midpoints of BC, CD in the regular hexagon $ABCDEF$. EG and FH intersect at I . Prove that

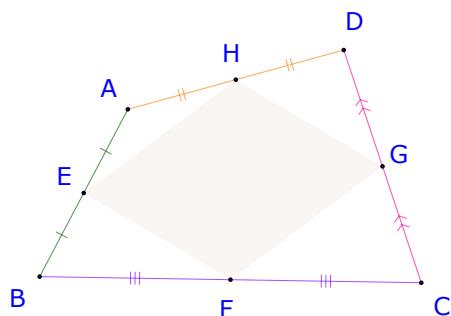
$$[GCHI] = [EFI].$$



Solution. It is easy to see that the quadrilaterals $GCDE$ and $HDEF$ are congruent, thus have the same area, or $[GCDE] = [HDEF]$. Taking $HDEI$ away, we have $[GCHI] = [EFI]$.

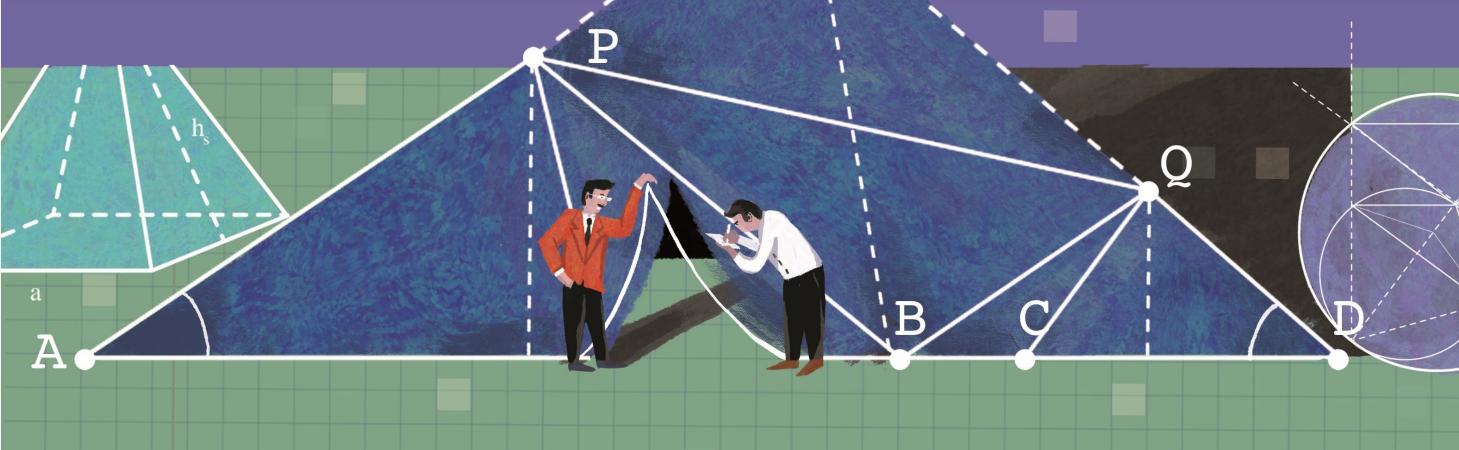
Example 5. E, F, G , and H are midpoints the sides in the convex quadrilateral $ABCD$. Prove that

$$[EFGH] = \frac{1}{2}[ABCD].$$



Solution. EH is the mid-segment (the segment connecting two midpoints) in $\triangle ABD$, therefore $[AEH] = \frac{1}{4}[ABD]$. Similarly $[BEF] = \frac{1}{4}[ABC]$, $[CFG] = \frac{1}{4}[BCD]$, and $[GDH] = \frac{1}{4}[CDA]$, therefore:

$$\begin{aligned} &[AEH] + [BEF] + [CFG] + [GDH] \\ &= \frac{1}{2}[ABCD] \\ \Rightarrow &[EFGH] = \frac{1}{2}[ABCD]. \end{aligned}$$



ĐỊNH LÝ FERMAT CHO ĐA THỨC

TRẦN MINH ĐỨC¹ VÀ LUU BÁ THẮNG²

1. Giới thiệu

Định lý Fermat lớn nói về sự không tồn tại bộ ba số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $a^n + b^n = c^n$ với $n \geq 3$ là số nguyên dương, đã được Andrew Wiles [5] chứng minh vào năm 1995, nhưng ít ai biết rằng có một định lý “Fermat” tương tự cho đa thức đã được chứng minh trước đó hàng chục năm trước, tức không tồn tại ba đa thức $f(x), g(x), h(x)$ với hệ số thực, ít nhất một đa thức khác đa thức hằng, đôi một không có nghiệm chung sao cho $f(x)^n + g(x)^n = h(x)^n$, với $n \geq 3$ là một số nguyên dương cho trước.

Định lý Fermat cho đa thức là hệ quả của Định lý Mason – Stothers, đầu tiên được Stothers [4] chứng minh vào năm 1981, và Mason [3] độc lập phát hiện ra sau đó ít lâu. Các chứng minh đó nhìn chung là phức tạp, không sơ cấp. Năm 2000, Snyder [2] đã đưa ra một chứng minh mới, chỉ với các kiến thức toán phổ thông cho định lý này. Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu chứng minh của Snyder và sau đó áp dụng Định lý Mason–Stothers để chứng minh Định lý Fermat cho đa thức và một số kết quả liên quan khác.

2. Định lý Mason – Stothers

Định lý 1 (Mason – Stothers). Cho $a(x)$, $b(x)$ và $c(x)$ là các đa thức khác đa thức hằng,

với hệ số thực, đôi một không có nghiệm chung và thỏa mãn: $a(x) + b(x) = c(x)$. Khi đó

$$\deg(c) \leq n_0(abc) - 1,$$

trong đó ta ký hiệu $n_0(f)$ là số nghiệm phức phân biệt của đa thức $f(x)$ và $\deg(f)$ là bậc của đa thức $f(x)$.

Để chứng minh Định lý này, ta cần Bổ đề sau:

Bổ đề 1. Cho $f(x)$ là một đa thức với hệ số thực, khác đa thức 0. Khi đó,

$$\deg(f) \leq \deg(f, f') + n_0(f),$$

trong đó ta ký hiệu (f, f') là ước chung lớn nhất của hai đa thức $f(x)$ và $f'(x)$ ($f'(x)$ là đa thức đạo hàm của đa thức $f(x)$).

Chứng minh. Gọi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ là các nghiệm phức phân biệt của $f(x)$ với các bội a_1, a_2, \dots, a_m tương ứng. Khi đó, ta có phân tích

$$f(x) = a(x - \alpha_1)^{a_1}(x - \alpha_2)^{a_2} \dots (x - \alpha_m)^{a_m},$$

với $a \in \mathbb{R}$ và $a_1 + a_2 + \dots + a_m = \deg f(x)$. Ta có, theo công thức Leibniz, đạo hàm của $f(x)$ được cho bởi:

$$\begin{aligned} & f'(x) \\ &= aa_1(x - \alpha_1)^{a_1-1}(x - \alpha_2)^{a_2} \dots (x - \alpha_m)^{a_m} \\ &\quad + a(x - \alpha_1)^{a_1}[(x - \alpha_2)^{a_2} \dots (x - \alpha_m)^{a_m}]'. \end{aligned}$$

¹Lớp 12 Toán 1, Trường THPT Amsterdam, Hà Nội.

²Khoa Toán – Tin, Đại học Sư Phạm Hà Nội.

Suy ra, với mỗi $i = 1, 2, \dots, m$, đa thức $(x - \alpha_i)^{a_i-1}$ cùng là ước của $f(x)$ và $f'(x)$. Do đó

$$(x - \alpha_1)^{a_1-1}(x - \alpha_2)^{a_2-1} \dots \\ (x - \alpha_m)^{a_m-1} | (f, f').$$

Vì $f(x)$ là đa thức khác đa thức hằng nên $f'(x)$ khác đa thức 0 và do đó (f, f') cũng khác đa thức 0. Suy ra

$$\deg((x - \alpha_1)^{a_1-1}(x - \alpha_2)^{a_2-1} \dots \\ (x - \alpha_m)^{a_m-1}) \leq \deg(f, f'),$$

hay

$$(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \dots + (a_m - 1) \\ \leq \deg(f, f').$$

Suy ra

$$\deg(f) - n_0(f) \leq \deg(f, f').$$

Vậy bổ đề được chứng minh

Chứng minh Định lý 1. Từ giả thiết

$$a + b = c, \quad (1)$$

bằng cách lấy đạo hàm hai vế, ta được

$$a' + b' = c'. \quad (2)$$

Nhân (1) với a' và nhân (2) với a và trừ vế với vế, ta được

$$a'b - ab' = a'c - ac'.$$

Suy ra (a, a') , (b, b') và (c, c') đều là ước của $a'b - ab'$.

Do các đa thức a, b, c đôi một không có nghiệm phức chung nên các đa thức (a, a') , (b, b') và (c, c') cũng đôi một không có nghiệm phức chung. Suy ra

$$(a, a')(b, b')(c, c') | a'b - ab'.$$

Hơn nữa, ta có $a'b - ab' \neq 0$. Thật vậy, nếu $a'b - ab' = 0$ thì $\left(\frac{a}{b}\right)' = 0$ hay $\frac{a}{b}$ là hằng số.

Do đó a và b có nghiệm chung (mâu thuẫn với giả thiết). Vì vậy,

$$\deg((a, a')(b, b')(c, c')) \leq \deg(a'b - ab').$$

Mặt khác, hiển nhiên ta có

$$\begin{aligned} \deg(a'b - ab') &\leq \max\{\deg(a'b), \deg(ab')\} \\ &= \deg(a) + \deg(b) - 1. \end{aligned}$$

Vì thế,

$$\begin{aligned} \deg(a, a') + \deg(b, b') + \deg(c, c') \\ \leq \deg(a) + \deg(b) - 1. \end{aligned}$$

Chuyển về bất đẳng thức này và cộng với $\deg(c)$ vào hai vế, ta được

$$\begin{aligned} \deg(c) &\leq \deg(a) - \deg(a, a') + \deg(b) \\ &\quad - \deg(b, b') + \deg(c) - \deg(c, c') - 1. \end{aligned}$$

Cuối cùng, áp dụng Bổ đề 1, ta có:

$$\begin{aligned} \deg(a) - \deg(a, a') &\leq n_0(a), \\ \deg(b) - \deg(b, b') &\leq n_0(b), \\ \deg(c) - \deg(c, c') &\leq n_0(c), \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \deg(c) &\leq n_0(a) + n_0(b) + n_0(c) - 1 \\ &= n_0(abc) - 1. \end{aligned}$$

3. Định lý Fermat cho đa thức

Áp dụng Định lý Mason – Stothers, chúng ta có một số kết quả đáng lưu ý. Trước hết, ta có kết quả sau đây:

Định lý 2 (Davenport [1]). *Cho $f(x), g(x)$ là các đa thức với hệ số thực, khác đa thức hằng, đôi một không có nghiệm phức chung. Đặt $h(x) = (f(x))^3 - (g(x))^2$ và giả sử $h(x)$ khác là đa thức 0. Khi đó, $\deg(f) \leq 2\deg(h) - 2$. Chứng minh. Do $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức không có nghiệm chung và $h = f^3 - g^2$ nên h, f^3 và g^2 đôi một không có nghiệm chung. Áp dụng Định lý Mason – Stothers cho ba đa thức g^2, h và f^3 , ta có:*

$$\deg(f^3) \leq n_0(g^2 h f^3) - 1,$$

hay

$$3\deg(f) \leq n_0(ghf) - 1 \leq \deg(ghf) - 1.$$

Mà $\deg(ghf) = \deg(g) + \deg(h) + \deg(f)$, nên

$$\begin{aligned} & 3\deg(f) \\ & \leq \deg(g) + \deg(h) + \deg(f) - 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$\begin{aligned} & 2\deg(g) \\ & \leq \deg(g) + \deg(h) + \deg(f) - 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Kết hợp (3) và (4), ta được

$$\begin{aligned} & 3\deg(f) + 2\deg(g) \\ & \leq 2(\deg(g) + \deg(h) + \deg(f) - 1) \end{aligned}$$

hay $\deg(f) \leq 2\deg(h) - 2$. Ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả 1. Không tồn tại hai đa thức với hệ số thực $f(x)$ và $g(x)$, khác đa thức bằng sao cho $f^3 - g^2$ là đa thức bằng khác đa thức 0.

Như đã đề cập đến trong phần đầu của bài viết, định lý Mason–Stothers có thể được sử dụng để chứng minh phiên bản đa thức của định lý Fermat lớn.

Định lý 3 (Định lý Fermat cho đa thức). *Với mọi nguyên $n \geq 3$, không tồn tại ba đa thức $f(x), g(x), h(x)$, với hệ số thực, đối một không có nghiệm chung, trong đó ít nhất một đa thức khác đa thức bằng, sao cho $f^n + g^n = h^n$.*
Chứng minh. Giả sử ngược lại, $f^n + g^n = h^n$. Áp dụng định lý Mason–Stothers cho 3 đa thức f^n, g^n và h^n , ta có:

$$\begin{aligned} & \max\{\deg(f^n), \deg(g^n), \deg(h^n)\} \\ & \leq n_0(f^n g^n h^n) - 1 = n_0(fgh) - 1 \\ & \leq \deg(f) + \deg(g) + \deg(h) - 1. \end{aligned}$$

Để ý rằng

$$\begin{aligned} & \frac{n}{3}(\deg(f) + \deg(g) + \deg(h)) \\ & = \frac{1}{3}(\deg(f^n) + \deg(g^n) + \deg(h^n)) \\ & \leq \max\{\deg(f^n), \deg(g^n), \deg(h^n)\}. \end{aligned}$$

Do đó, nếu ta đặt $d = \deg(f) + \deg(g) + \deg(h)$ thì bằng cách kết hợp với bất đẳng thức thu được ở trên, ta có:

$$\frac{nd}{3} \leq d - 1.$$

Suy ra, $3 < d(3 - n)$. Do ít nhất một trong các đa thức f, g, h khác hằng nên $d > 0$; điều này, kết hợp với giả thiết $n \geq 3$, dẫn đến $3 \leq 0$, mâu thuẫn.

Với chứng minh tương tự, ta có thể chỉ ra được hệ quả sau đây, mà nội dung của nó là một bài toán trong tuyển tập Các kỳ thi Toán Rumani (RMC) năm 2019.

Hệ quả 2. Cho các số nguyên $m, n \geq 3$ và f, g là các đa thức khác hằng với hệ số thực, trong đó ít nhất một đa thức có bậc lớn hơn hoặc bằng 2. Giả sử $\deg(f^m - g^n) < \min\{m, n\}$. Khi đó $f^m = g^n$.

Nhận xét. Định lý Mason – Stothers cũng đúng khi ta xét các đa thức với hệ số phức. Từ đó ta suy ra Định lý Davenport và Định lý Fermat cho đa thức cũng đúng với đa thức với hệ số phức.

Để kết thúc, chúng ta trình bày một mở rộng của Định lý 3.

Định lý 4. Cho các số nguyên dương m, n, p thỏa mãn $m \leq n \leq p$. Khi đó phương trình đa thức $f(x)^m + g(x)^n = h(x)^p$ có nghiệm f, g, h là các đa thức với hệ số phức, đối một không có nghiệm chung, ít nhất một trong ba đa thức khác đa thức bằng nếu và chỉ nếu (m, n, p) có một trong dạng sau: $(1, a, b), a, b \geq 1$; $(2, 2, a), a \geq 2$; $(2, 3, 3); (2, 3, 4); (2, 3, 5)$.

Chứng minh. Trước hết, dễ thấy rằng nếu trong m, n, p có một số bằng 1 thì phương trình rõ ràng có nghiệm, chẳng hạn nếu $m = 1$, với $g(x), h(x)$ là hai đa thức khác đa thức bằng tùy ý, không có nghiệm chung thì bằng cách đặt $f(x) = h(x)^p - g(x)^m$, ta có $f(x), g(x), h(x)$ thỏa mãn phương trình.

Vì vậy, ta chỉ cần xét trường hợp $2 \leq m \leq n \leq p$. Gọi a, b, c lần lượt là bậc của các đa thức f, g và h . Khi đó, theo Định lý Mason – Stothers, ta có

$$ma \leq a + b + c - 1, \quad (5)$$

$$nb \leq a + b + c - 1, \quad (6)$$

$$pc \leq a + b + c - 1. \quad (7)$$

Cộng vế với vế của (5), (6) và (7) ta được

$$\begin{aligned} m(a+b+c) &\leq ma+nb+pc \\ &\leq 3(a+b+c)-3. \end{aligned}$$

Suy ra, $m < 3$. Mặt khác, $2 \leq m$ nên $m = 2$. Khi này, bất đẳng thức (5) trở thành:

$$a \leq b + c - 1. \quad (8)$$

Cộng các bất phương trình (6), (7) và (8) theo vế, ta có:

$$nb + pc \leq 3(b+c) + a - 3. \quad (9)$$

Mặt khác, vì $n \leq p$ nên từ bất đẳng thức (8) và (9), ta có:

$$\begin{aligned} n(b+c) &\leq nb + pc \leq 3(b+c) + a - 3 \\ &\leq 4(b+c) - 4. \end{aligned} \quad (10)$$

Từ đó, $n < 4$. Kết hợp với $n \geq 2$, ta suy ra $n = 2$ hoặc $n = 3$.

Với $n = 2$, ta thấy rằng với mọi giá trị của $p \geq 2$ thì tồn tại ba đa thức f, g, h thỏa mãn phương trình của định lý. Chẳng hạn, với

$$f(x) = \frac{x^p + 1}{2},$$

$$g(x) = -i \left(\frac{x^p - 1}{2} \right),$$

$$h(x) = x^2,$$

thì $f^2 + g^2 = h^p$.

Với $n = 3$ thì bất đẳng thức (6) trở thành

$$2b \leq a + c - 1. \quad (11)$$

Kết hợp (8) và (11), ta được $b \leq 2c - 2$. Từ đó, (8) dẫn đến $a \leq 3c - 3$. Từ đó, (7) dẫn đến

$$\begin{aligned} pc &\leq a + b + c - 1 \\ &\leq 3c - 3 + 2c - 2 + c - 1 = 6c - 6. \end{aligned}$$

Suy ra $p \leq 5$. Mà $p \geq n$ nên $p \in \{3; 4; 5\}$.

Với $p = 3$, ta có thể chọn

$$f(x) = \sqrt[4]{432} e^{\frac{i\pi}{4}} (x^5 - x),$$

$$g(x) = x^4 - 2i\sqrt{3}x^2 + 1,$$

$$h(x) = x^4 + 2i\sqrt{3}x^2 + 1$$

để có $f^2 + g^3 = h^3$.

Với $p = 4$, ta có thể chọn

$$f(x) = x^{12} - 33x^8 - 33x^4 + 1,$$

$$g(x) = -(x^8 + 14x^3 + 1),$$

$$h(x) = \sqrt[4]{108} e^{\frac{i\pi}{4}} (x^5 - x)$$

để có $f^2 + g^3 = h^4$.

Với $p = 5$, ta có thể chọn

$$f(x) = \frac{x^{30} + 1 + 522(x^{25} - x^5) - 10005(x^{20} + x^{10})}{24\sqrt{3}},$$

$$g(x) = \frac{-(x^{20} + 1) + 228(x^{15} - x^5) - 494x^{10}}{12},$$

$$h(x) = x(x^{10} + 11x^5 - 1).$$

Khi đó $f^2 + g^3 = h^5$. Vậy định lý đã được chứng minh.

Tài liệu tham khảo

[1] V. V. Prasolov, *Essay on Numbers and Figures*, Mathematical World, American Mathematical Society, 2000.

[2] N. Snyder, *An alternate proof of Mason's theorem*, Elemente der Mathematik, 55 (3): 93 – 94, 2000.

[3] R. C. Mason, *Diophantine Equations over Function Fields*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 96, Cambridge, England: Cambridge University Press, 1984.

[4] W.W. Stothers, *Polynomial identities and hauptmoduln*, Quarterly J. Math. Oxford, 2, 32: 349 – 370, 1981.

[5] A. Willes, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. Math., 141, pp. 443 – 551, 1995.



GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày với các bạn lời giải của các bài toán trong Kỳ thi toán Durer lần thứ XVI được tổ chức tại Hungary, đăng trong số báo 9/2023.



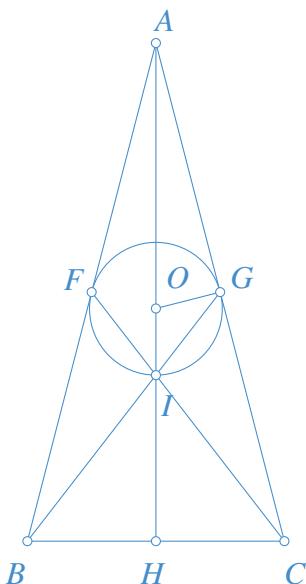
OC49. Cho ABC là tam giác cân. Cạnh đáy BC dài 1 cm, cạnh AB và AC dài 2 cm. Gọi F là trung điểm của AB và G là trung điểm của AC . Gọi (k) là đường tròn tiếp xúc với AB và AC , tương ứng tại F và G . Chứng minh rằng giao điểm của CF và BG thuộc đường tròn (k) .

Lời giải. Gọi I là giao điểm của CF và BG và H là trung điểm của BC . Như vậy I là trọng tâm tam giác cân ABC và A, I, H thẳng hàng. Gọi O là tâm của đường tròn (k) thì do AF, AG là tiếp tuyến với (k) nên O phải nằm trên đường phân giác của $\angle FAG$. Như vậy O nằm trên AH .

Do tam giác BCG cân tại C , ta đặt $\angle CGB = \angle CBG = \alpha$. Vì (k) tiếp xúc với AC tại G nên $OG \perp CG$ do đó $\angle OGI = 90^\circ - \alpha$. Mặt khác ta có

$$\angle OIG = \angle BIH = 90^\circ - \angle CBG = 90^\circ - \alpha.$$

Như vậy $\angle OGI = \angle OIG$, ta suy ra $OG = OI$, tức là I nằm trên đường tròn (k) .



OC50. Khi Andris bước vào phòng, có các số 3 và 24 trên bảng. Trong một bước, nếu đã có các số (không nhất thiết phải khác nhau) k và n trên bảng, thì Andris có thể viết thêm số $kn + k + n$ lên bảng.

(a) Liệu Andris có thể viết số 9999999 lên bảng sau một số bước?

(b) Cùng câu hỏi như phần (a) cho số 99999999?

(c) Cùng câu hỏi như phần (a) cho số 48999999?

Lời giải. Ta thấy cả hai số ban đầu trên bảng đều có dạng $n^2 - 1$. Hơn nữa nếu hai số có dạng này thì số được viết thêm cũng có dạng

này, thay vậy

$$\begin{aligned} & (n^2 - 1)(m^2 - 1) + n^2 - 1 + m^2 - 1 \\ & = (mn)^2 - 1. \end{aligned}$$

a) Vì $9999999 + 1 = 10000000$ không phải số chính phương nên Andris không thể viết được số này.

b) Có thể viết được bằng các bước như sau: Trước tiên viết $3 \times 24 + 3 + 24 = 99$. Sau đó viết tiếp $99 \times 99 + 99 + 99 = 9999$. Và cuối cùng viết

$$9999 \times 9999 + 9999 + 9999 = 99999999.$$

c) Nhận xét rằng với mọi số k xuất hiện trên bảng thì $k+1$ chỉ có ước là 2 hoặc 5. Điều này đúng với hai số ban đầu là 3 và 24. Do $kn+k+n+1 = (k+1)(n+1)$ nên khẳng định đúng với mọi số được viết thêm sau đó. Tuy nhiên do $48999999 + 1 = 49000000$ có ước là 7 nên số 48999999 không thể được viết lên bảng.

OC51. Có một trò chơi với một bảng ô vuông cỡ 3×3 . Trong mỗi bước, người chơi lần lượt điền một trong các số 1, 2 hoặc 3 vào một ô trống sao cho không có hai số giống nhau trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột. Nếu tất cả 9 ô của bảng đều được điền số, người chơi đầu tiên thắng nhưng nếu trước đó có một thời điểm không thể điền số được nữa thì người chơi thứ hai thắng.

Hỏi có cách nào để luôn chiến thắng nếu bạn được phép tùy chọn đi trước hoặc đi sau?

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng người đi trước sẽ luôn có cách để chiến thắng. Nhận xét rằng nếu có một bộ 3 ô, đôi một ở các hàng và cột phân biệt, đã được điền 3 số phân biệt thì các ô còn trống đều có duy nhất một cách điền thỏa mãn bài toán. Như vậy tất cả 9 ô sẽ được điền và người chơi đi trước sẽ thắng. Một bộ ba như vậy được gọi là *bộ ba chiến thắng*. Ta sẽ chứng minh rằng người đi trước luôn có thể tạo ra một bộ ba chiến thắng.

1		
		3
	2	

Trước tiên người đi trước điền số 1 vào ô trung tâm của bảng. Nếu người đi sau điền số 2 hoặc 3 vào một ô ở góc thì ở lần đi tiếp theo người đi trước sẽ tạo ra được một bộ ba chiến thắng. Còn nếu người đi sau điền số 1 vào một ô ở góc thì ở bước tiếp theo người đi trước sẽ tạo được một đường chéo gồm toàn số 1. Tiếp theo dù người đi sau điền như thế nào thì người đi trước cũng tạo được một bộ ba chiến thắng.

Trường hợp người đi sau không điền vào ô ở góc thì người đi trước sau đó sẽ tạo được một hàng hoặc cột gồm 3 số phân biệt. Ở bước tiếp theo dù người đi sau điền thế nào thì người đi trước cũng luôn tạo được một bộ ba chiến thắng. Như vậy người đi trước luôn thắng.

Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc ba bài toán trong Kỳ thi Olympic Toán học Quốc gia Israel năm 2023.

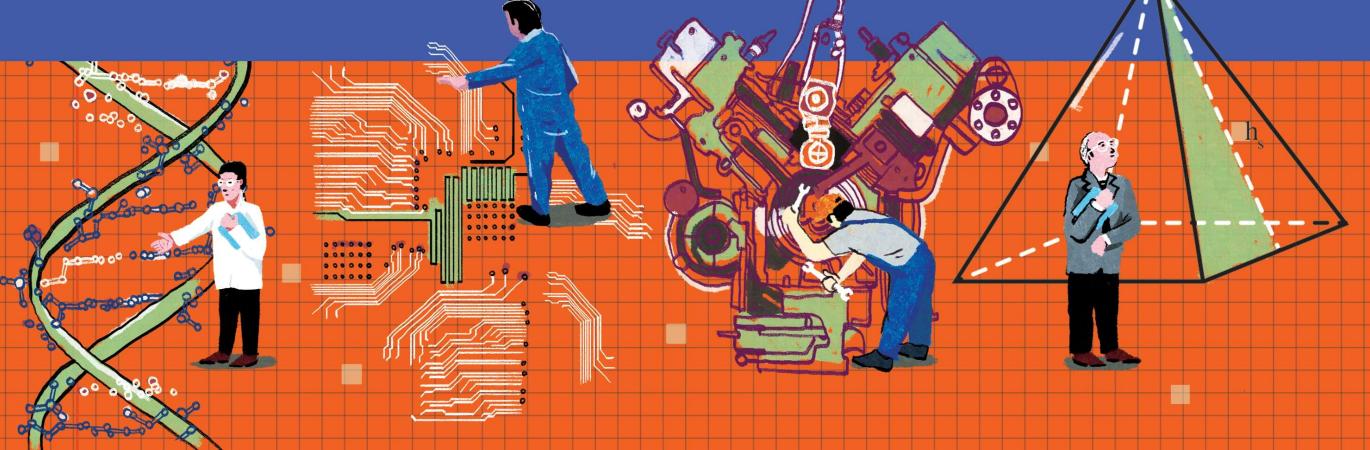
OC58. Có 2000 người ngồi quanh một chiếc bàn tròn. Mỗi người trong số họ là người thật thà (người luôn nói thật) hoặc kẻ dối trá (người luôn nói dối). Biết rằng mỗi người đều nói: “Ít nhất hai trong số ba người ngồi ngay sát bên phải của tôi là những kẻ dối trá”. Hỏi có bao nhiêu người thật thà ngồi trong bàn?

OC59. Biết rằng các số nguyên không âm x, y thỏa mãn

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+60} = \sqrt{y}.$$

Tìm giá trị lớn nhất có thể của x .

OC60. Liệu có tồn tại một tập hợp S gồm 5783 số thực phân biệt thỏa mãn điều kiện sau hay không: Với mọi $a, b \in S$ (không nhất thiết phải phân biệt) đều tồn tại hai số $c \neq d$ thuộc S sao cho $a \times b = c + d$?



MÁY TÍNH VÀ TRÍ TUỆ NHÂN TẠO

NGUYỄN MẠNH TOÀN*

Bất chấp lịch sử ngắn ngủi của mình, máy tính và trí tuệ nhân tạo (AI) đã thay đổi một cách cơ bản những gì chúng ta thấy, những gì chúng ta biết và những gì chúng ta làm. Chỉ trong một thời gian ngắn, các hệ thống AI đã xâm nhập vào mọi lĩnh vực của cuộc sống, từ khái quát như học tập, lý luận, nhận thức, v.v., cho đến cụ thể như chơi cờ, chứng minh các định lý toán học, vẽ tranh, sáng tác nhạc, viết tiểu luận, làm thơ, lái xe ô tô hay chẩn đoán bệnh. Thế giới thay đổi nhanh chóng đến nỗi ngay cả những công nghệ khá gần đây cũng khiến chúng ta cảm thấy lạc hậu như thế nào. Điện thoại di động vào những năm 90 là những viên gạch lớn với màn hình nhỏ màu xanh lá cây. Hai thập kỷ trước đó, bộ lưu trữ chính của máy tính là thẻ đục lỗ.



Máy tính cùng các ứng dụng thông minh phát triển một cách nhanh chóng và trở thành một phần không thể thiếu trong cuộc sống hàng ngày của chúng ta khiến con người dễ dàng quên mất các công nghệ này mới ra

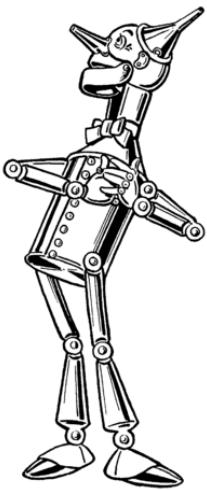
đời như thế nào. Để biết tương lai sẽ ra sao, việc nghiên cứu lịch sử thường rất hữu ích. Trong bài viết này, chúng ta hãy cùng nhìn lại một số cột mốc quan trọng trong lịch sử phát triển của máy tính và lĩnh vực AI, để xem chúng ta có thể mong đợi điều gì từ chúng trong tương lai, để xem liệu AI sẽ đi đến đâu, và quan trọng hơn, nó sẽ dẫn chúng ta đến đâu.

Những hạt giống đầu tiên

Chúng ta tự gọi mình là *Homo sapiens* – con người thông thái – bởi vì trí thông minh rất quan trọng đối với chúng ta. Trong hàng nghìn năm, chúng ta đã cố gắng hiểu cách chúng ta suy nghĩ và hành động – nghĩa là làm thế nào bộ não của chúng ta, chỉ là một số ít vật chất, lại có thể nhận thức, hiểu, dự đoán và điều khiển một thế giới rộng lớn và phức tạp hơn chính nó rất nhiều. Từ thời cổ đại, những huyền thoại và truyền thuyết về những sinh vật nhân tạo được ban cho ý thức hoặc trí thông minh bởi những người thợ bậc thầy đã xuất hiện và được lưu truyền. Đến thế kỷ 19 và nửa đầu thế kỷ 20, ý tưởng về con người nhân tạo và những cỗ máy biết suy nghĩ cũng được phát triển trong các tác phẩm văn học, điển hình như quái vật Monster có sức mạnh phi thường nhưng ý thức được sự cô đơn của mình trong *Frankenstein* của Mary Shelley, hay

*Đại học Osnabrueck, CHLB Đức.

anh chàng người thiếc Woodman luôn khao khát có một trái tim trong *Phù thủy xứ Oz* của Frank Baum.



Hình 1: Phác họa của Tin Woodman. Nguồn: Wiki.

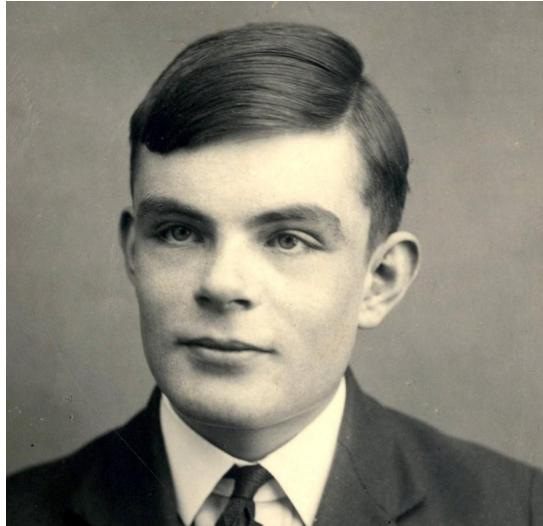
Ở khía cạnh khác, các nhà triết học qua hàng thế kỷ đã cố gắng mô tả quá trình suy nghĩ của con người như sự thao tác của các biểu tượng (ký tự). Công trình này đạt đến đỉnh cao với việc phát minh ra máy tính kỹ thuật số có thể lập trình vào những năm 1940, một cỗ máy dựa trên bản chất trừu tượng của suy luận toán học.

Máy tính điện tử và những ý tưởng đằng sau nó đã truyền cảm hứng cho một số nhà khoa học đến từ nhiều lĩnh vực khác nhau (toán học, tâm lý học, kỹ thuật, kinh tế và khoa học chính trị), và họ bắt đầu thảo luận nghiêm túc về khả năng xây dựng bộ não điện tử – một bộ não nhân tạo có khả năng suy nghĩ và suy luận giống như bộ não của con người.

Bài kiểm tra Turing

Năm 1950, nhà toán học kiệt xuất người Anh Alan Turing – một trong những cha đẻ của máy tính hiện đại – đã thảo luận về cách chế tạo những cỗ máy thông minh và để xuất một phương pháp để kiểm tra trí thông minh của chúng. Trong công trình nổi tiếng *Computing machinery and intelligence* (Máy tính và trí thông minh), ông xem xét câu

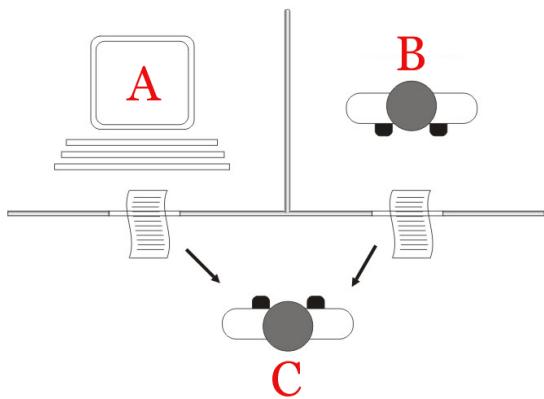
hỏi “*Máy móc có thể suy nghĩ được không?*”. Turing cho rằng vì các từ “suy nghĩ” và “máy móc” không thể được định nghĩa rõ ràng nên chúng ta có thể thay thế câu hỏi trên bằng một câu hỏi khác, có liên quan chặt chẽ với nó, được diễn đạt bằng những từ tương đối rõ ràng và có thể kiểm chứng, chẳng hạn “*Liệu máy tính điện tử có thể làm những điều mà chúng ta (những thực thể có trí tuệ) có thể làm?*”.



Hình 2: Alan Turing. Nguồn: AFP/Getty Images.

Để trả lời cho câu hỏi trên, Turing đề xuất một phương pháp gọi là “Trò chơi bắt chước” (Imitation game), sau này được biết đến rộng rãi với tên gọi *Bài kiểm tra Turing*. Bài kiểm tra có sự tham gia của ba thành viên được xếp vào ba căn phòng tách biệt: Một người thẩm vấn (C), một máy tính (A) và một người phản biện (B) (Hình 3). Người thẩm vấn cố gắng xác định đâu là máy tính bằng cách đặt câu hỏi cho hai thành viên còn lại. Mọi giao tiếp đều thông qua bàn phím và màn hình hiển thị. Người thẩm vấn có thể đặt những câu hỏi sâu sắc và có phạm vi rộng tùy thích, và máy tính được phép làm mọi thứ có thể để đánh lừa người thẩm vấn. Người phản biện đóng vai trò giúp người thẩm vấn nhận dạng chính xác. Trò chơi diễn ra nhiều lần, với những người khác nhau đóng vai trò thẩm vấn và phản biện, và nếu có

đủ tỷ lệ người thẩm vấn không thể phân biệt được máy tính với con người, thì máy tính được coi là thông minh.



Hình 3: Bài kiểm tra Turing.

Bài kiểm tra Turing được coi là đề xuất nghiêm túc đầu tiên trong triết lý trí tuệ nhân tạo. Dù bản thân sự mô tả khá đơn giản, việc chế tạo một cỗ máy có khả năng vượt qua bài kiểm tra lại có ý nghĩa sâu rộng. Cỗ máy đó sẽ phải xử lý ngôn ngữ tự nhiên, có thể học hỏi từ cuộc trò chuyện, ghi nhớ những gì đã được nói và truyền đạt ý tưởng trở lại con người, hiểu các khái niệm chung và hiển thị những gì chúng ta gọi là lẽ thường.

Ý tưởng về một vấn đề khó khăn, lâu dài như vậy là chìa khóa để định hình lĩnh vực AI vì nó đi thẳng vào trọng tâm của vấn đề – thay vì giải quyết một vấn đề nhỏ, nó xác định mục tiêu cuối cùng có thể kéo nghiên cứu theo nhiều con đường. Nếu không có tầm nhìn về những gì AI có thể đạt được, bản thân lĩnh vực này có thể sẽ không bao giờ hình thành hoặc đơn giản vẫn chỉ là một nhánh của toán học hay triết học.

Sự ra đời của AI

Năm 1952, nhà khoa học máy tính Arthur Samuel tại IBM đã viết chương trình học chơi cờ đam trên máy tính IBM 701, đánh dấu sự ra đời của lĩnh vực học máy. Máy tính IBM càng chơi càng tiến bộ, có thể nghiên

cứu những nước đi nào tạo nên chiến lược chiến thắng và kết hợp những nước đi đó vào chương trình của mình. Sự thành công này đã bác bỏ quan niệm trước đây rằng máy tính không thể “học” mà chỉ làm được những điều được lập trình sẵn.



Hình 4: Samuel chơi cờ với máy tính trên truyền hình. Nguồn: IBM.

Năm 1955, hai nhà khoa học Allen Newell và Herbert Simon tại Đại học Carnegie Mellon cùng lập trình viên Cliff Shaw tại Tập đoàn Nghiên cứu và Phát triển (RAND) đã cho ra đời *Logic Theorist*, một chương trình được thiết kế để mô phỏng kỹ năng giải quyết vấn đề của các nhà toán học. Chương trình khám phá cây tìm kiếm với gốc là giả thuyết ban đầu, mỗi nhánh là một suy luận dựa trên các quy tắc logic. Đầu đó trên cây là mệnh đề mà chương trình dự định chứng minh. Con đường dọc theo các nhánh dẫn từ giả thuyết đến mệnh đề cần phải chứng minh là một chứng minh. Logic Theorist đã chứng minh được 38 trong số 52 định lý đầu tiên trong chương hai bộ sách nổi tiếng *Principia Mathematica* của Whitehead và Russell, trong đó có những chứng minh mới và ngắn hơn. Logic Theorist đã giới thiệu *Lý luận thông qua tìm kiếm* và *Phương pháp suy nghiệm* (Heuristic)¹, những khái niệm trọng tâm trong nghiên cứu AI sau này.

¹ Phương pháp giải quyết vấn đề hoặc tự khám phá bằng cách sử dụng những biện pháp nhanh chóng để tạo ra các giải pháp đủ tốt trong một khoảng thời gian giới hạn.

Mùa hè năm 1956, hội thảo về trí tuệ nhân tạo đầu tiên do Marvin Minsky, Nathaniel Rochester, Claude Shannon và John McCarthy tổ chức đã diễn ra ở Đại học Dartmouth. Trong số những người tham dự có Arthur Samuel, Herbert A. Simon và Allen Newell. Dưới sự thuyết phục của McCarthy, “Trí tuệ nhân tạo” (Artificial Intelligence) đã được mọi người công nhận để chỉ lĩnh vực nghiên cứu mới, được Minsky định nghĩa như “*lĩnh vực khoa học chế tạo máy móc làm được những việc đòi hỏi trí thông minh của con người*”. Hội thảo Dartmouth đã đánh dấu sự ra đời của trí tuệ nhân tạo như một lĩnh vực học thuật. Mặc dù không thu được những kết quả như kỳ vọng nhưng hội thảo đã là chất xúc tác cho hai mươi năm nghiên cứu AI sau đó.



Hình 5: Herbert Simon (trái) và Allen Newell (phải). Nguồn: Đại học Carnegie Mellon.

Đợt bùng nổ đầu tiên

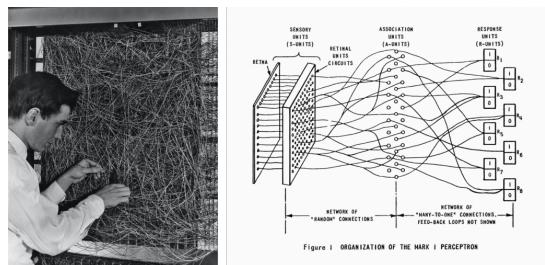
Từ năm 1957 đến năm 1974, lĩnh vực AI phát triển mạnh mẽ. Sự ra đời của bóng bán dẫn thay thế đèn chân không giúp máy tính lưu trữ nhiều thông tin hơn, trở nên nhanh hơn, rẻ hơn và dễ tiếp cận hơn. Các thuật toán học máy cũng được cải thiện và mọi người hiểu rõ hơn rằng thuật toán nào sẽ áp dụng cho vấn đề của họ.



Hình 6: Hội thảo Dartmouth năm 1956.

Nguồn: IEEE Spectrum.

Năm 1957, Herbert Simon, Cliff Shaw và Allen Newell phát triển *General Problem Solver*, hay GPS, một chương trình có mục đích giải quyết các vấn đề chung. GPS có thể giải được nhiều câu đố ẩn tượng trong logic, hình học, đồ chữ hay cờ vua thông qua phương pháp thử và sai (trial and error). GPS (cùng với Logic Theorist) đặt nền móng cho *AI biểu tượng* (Symbolic AI), một nhánh của AI xem việc biểu diễn tri thức và lý luận dựa trên các quy tắc logic như là chìa khóa của trí thông minh. Với những đóng góp to lớn này, Newell và Simon được trao Giải thưởng Turing năm 1975, giải thưởng danh giá được xem như Nobel của khoa học máy tính.²



Hình 7: Frank Rosenblatt và Perceptron.

Nguồn: Researchgate.

Cùng năm 1957, Frank Rosenblatt tại Phòng thí nghiệm Hàng không Cornell đã xây dựng *Perceptron*, mạng thần kinh nhân

²Herbert Simon cũng được trao Nobel kinh tế năm 1978 cho những nghiên cứu tiên phong về quá trình ra quyết định trong các tổ chức kinh tế.

tạo (một lớp) đầu tiên lấy cảm hứng từ mô hình toán học của não bộ phát triển bởi Warren S. McCulloch và Walter Pitts những năm 1940. Perceptron được viết trên IBM 704, một máy tính 5 tần có kích thước của một căn phòng. Sau 50 lần thử, máy tự học cách phân biệt các thẻ được đánh dấu bên trái với các thẻ được đánh dấu bên phải. Perceptron đánh dấu sự ra đời của chủ nghĩa kết nối, nền tảng của *Mạng thần kinh* và *Học sâu* được phát triển sau này.

Năm 1960, John McCarthy³ tại Viện Công nghệ Massachusetts (MIT) đã phát triển LISP, một ngôn ngữ lập trình bậc cao dựa trên giải tích lambda. LISP trở nên rất quan trọng cho sự phát triển ban đầu của AI nhờ khả năng xử lý biểu tượng và tính linh hoạt trong việc quản lý các tác vụ phức tạp. Tuy vậy, phải đến đầu những năm 1970, với sự ra đời của máy tính mạnh mẽ hơn sử dụng mạch tích hợp (chip silicon chứa nhiều bóng bán dẫn), các lập trình viên mới có thể triển khai các ứng dụng tri thức sâu rộng.



Hình 8: Tương tác với ELIZA.

Năm 1965, Joseph Weizenbaum – nhà khoa học máy tính và giáo sư tại MIT – đã phát triển ELIZA, một hệ thống xử lý ngôn ngữ tự nhiên mô phỏng bác sĩ. ELIZA trả lời các câu hỏi trong bối cảnh một buổi trị liệu tâm lý. ELIZA xác định các từ khóa từ dữ liệu đầu vào của người dùng và khớp chúng với các

câu trả lời được lập trình sẵn. Một số người dùng tin rằng họ đang tương tác với một người khác cho đến khi chương trình đạt đến giới hạn và cuộc trò chuyện trở nên vô nghĩa. ELIZA là tiền thân của những chatbot ngày nay.

Bị thu hút bởi những kỳ vọng cùng sự lạc quan của các nhà khoa học hàng đầu, chính phủ Mỹ đã tài trợ ô ạt cho nghiên cứu AI. Chính phủ đặc biệt quan tâm đến một cỗ máy có thể phiên âm và dịch ngôn ngữ nói cũng như xý lý dữ liệu thông lượng cao. Cơ quan Nghiên cứu Quốc phòng Tiên tiến (DARPA) đã đầu tư hàng triệu USD để hỗ trợ nghiên cứu AI tại một số cơ sở nghiên cứu như MIT, Đại học Stanford, Đại học Carnegie Mellon cũng như một số phòng thí nghiệm nghiên cứu thương mại khác. Năm 1970, Marvin Minsky (giáo sư tại MIT, giải thưởng Turing 1969) nói với Tạp chí Life: “Từ ba đến tám năm nữa chúng ta sẽ có một cỗ máy có trí thông minh chung của một con người bình thường”.

Mùa đông AI⁴

Những kỳ vọng cao và những tuyên bố đầy tham vọng thường là con đường trực tiếp dẫn đến sự thất vọng. Các nhà nghiên cứu AI đã quá lạc quan trong việc thiết lập các mục tiêu của họ và đã đưa ra những giả định ngây thơ về những khó khăn mà họ sẽ gặp phải. Việc phá vỡ lớp sương mù ban đầu của AI đã bộc lộ một núi chướng ngại vật.

Trước hết, AI gặp phải những rào cản công nghệ không thể vượt qua, chủ yếu là hạn chế về sức mạnh tính toán, bộ nhớ và tốc độ xử lý. Vào giữa những năm 1960, các nhà nghiên cứu đã phát hiện ra sự khác biệt giữa sự tăng trưởng đa thức và tăng trưởng cấp số nhân trong độ phức tạp của bài toán. Độ phức tạp tăng trưởng theo cấp số nhân ngắn cản

³Giải thưởng Turing 1971.

⁴Được mượn từ cụm từ “Mùa đông hạt nhân”, một lý thuyết thời Chiến tranh Lạnh cho rằng việc sử dụng vũ khí hạt nhân hàng loạt sẽ che khuất Mặt Trời bằng khói và bụi, khiến nhiệt độ toàn cầu giảm mạnh, Trái Đất đóng băng và nhân loại tuyệt chủng.

việc giải quyết các vấn đề cỡ lớn vừa phải trong một khoảng thời gian hợp lý. Điều này dẫn đến khái niệm quan trọng nhất trong lý thuyết độ phức tạp, *tính NP–đầy đủ* (*NP-completeness*) và câu hỏi cơ bản nhất của nó, liệu $P = NP$, trong đó P là lớp các câu hỏi mà tồn tại thuật toán có thể *giải* trong thời gian đa thức và NP là lớp các câu hỏi mà câu trả lời (cho trước) có thể được *xác minh* trong thời gian đa thức.⁵ Nhiều bài toán tổ hợp và logic là *NP*–đầy đủ, đòi hỏi thời gian giải theo cấp số nhân và các hệ thống không có khả năng giải quyết một cách hiệu quả.

Thêm vào đó, các nhà nghiên cứu đã tập trung nhiều vào khía cạnh lý thuyết và đánh giá thấp sự phức tạp đến từ các vấn đề thực tiễn. Sau khi giải mã thành công mật mã của Đức trong Thế chiến thứ hai, các nhà khoa học đã làm tưởng rằng việc dịch văn bản giữa các ngôn ngữ sẽ không khó hơn việc giải mã mật mã. Trên thực tế, việc xử lý ngôn ngữ tự nhiên trong dịch máy đòi hỏi những hiểu biết sâu sắc về ngôn ngữ học. Người ta cần biết nghĩa của nhiều từ và hiểu chúng theo nhiều cách kết hợp. Nỗ lực tự động tra cứu từ điển và áp dụng các quy tắc ngữ pháp đã không đem lại kết quả.

Năm 1969, trong cuốn sách *Perceptrons*, Marvin Minsky và Seymour Papert đã công kích công trình Perceptron của Rosenblatt và chỉ những hạn chế của mạng thần kinh nhân tạo. Cuốn sách có ảnh hưởng lớn và được xem là nguyên nhân chính dẫn đến sự đình trệ trong việc nghiên cứu mạng thần kinh những năm 1970.

Sau hai thập kỷ với hàng chục triệu đô la đầu tư mà không nhận được những giải pháp như kỳ vọng, cộng với những khó khăn về tài chính, chính phủ Mỹ và Anh lần lượt cắt giảm các nguồn tài trợ cho AI, dẫn đến sự sụt giảm đáng kể các hoạt động AI trong cả công nghiệp và các viện nghiên cứu. Mùa đông AI

đầu tiên kéo dài từ 1974 đến 1980.

Hệ thống chuyên gia

Vào những năm 1970, nghiên cứu AI tập trung vào AI biểu tượng với trọng tâm là các lĩnh vực chuyên môn được đánh giá cao và phức tạp. Với ý tưởng “các hệ thống thông minh có được sức mạnh từ kiến thức mà chúng sở hữu chứ không phải từ các hình thức và sơ đồ suy luận cụ thể mà chúng sử dụng”, Edward Feigenbaum⁶ tại Đại học Stanford cùng các đồng nghiệp đã phát triển các hệ thống chuyên gia – hay hệ thống dựa trên tri thức – chương trình máy tính mô phỏng quá trình ra quyết định của các chuyên gia.



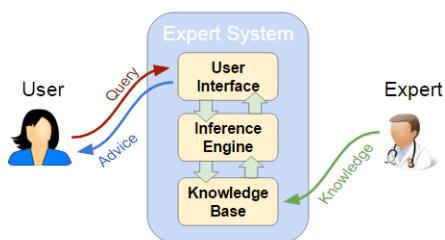
Hình 9: Edward Feigenbaum. Nguồn: Britannica.

Một hệ thống chuyên gia bao gồm hai thành phần cơ bản: cơ sở tri thức và công cụ suy luận. Cơ sở tri thức lưu trữ thông tin, được thu thập bằng cách phỏng vấn những người là chuyên gia trong lĩnh vực được đề cập và được sắp xếp thành một tập hợp các quy tắc, thường có cấu trúc “NẾU–THÌ” (if–then). Chẳng hạn: “NẾU bệnh nhân bị sốt VÀ bệnh nhân ho VÀ bệnh nhân khó thở THÌ bệnh nhân có thể bị viêm phổi”. Công cụ suy luận cho phép hệ thống chuyên gia rút ra các suy luận từ các quy tắc trong cơ sở tri thức. Ví dụ:

⁵Một trong bảy bài toán thiên niên kỷ của viện toán Clay.

⁶Giải thưởng Turing 1994.

nếu cơ sở tri thức chứa quy tắc “NẾU x THÌ y ” và “NẾU y THÌ z ”, công cụ suy luận có thể suy ra “NẾU x THÌ z ”. Sau đó, hệ thống chuyên gia có thể truy vấn người dùng (có thể không phải chuyên gia) “ x có đúng trong tình huống mà chúng ta đang xem xét không?” Nếu câu trả lời là khẳng định, hệ thống sẽ tiến hành suy ra z .



Hình 10: Hệ thống chuyên gia.

Sau thành công của hệ thống DENDRAL trong việc xác định các phân tử hữu cơ chưa biết và MYCIN trong việc chẩn đoán các bệnh truyền nhiễm vào thập niên 1970, hệ thống chuyên gia thương mại được sử dụng rộng rãi trong chẩn đoán y tế, phân tích hóa học, tín dụng ủy quyền, quản lý tài chính, thăm dò dầu và khoáng sản, kỹ thuật di truyền, thiết kế và sản xuất ô tô, thiết kế lắp đặt máy tính, lập kế hoạch hàng không, sắp xếp hàng hóa và các dịch vụ, v.v. Các hệ thống chuyên gia cho thấy những lợi thế khác biệt so với các chương trình máy tính truyền thống. Chúng có thể cung cấp các lựa chọn và các vấn đề cho người ra quyết định cũng như hỗ trợ việc ra quyết định trong trường hợp quyết định đó vượt quá trình độ kiến thức và kinh nghiệm của họ. Ngược lại với con người, hệ thống chuyên gia có thể lưu trữ vĩnh viễn kiến thức chuyên môn, đưa ra mức độ tham vấn nhất quán sau khi được lập trình. Với kiến thức có được từ nhiều chuyên gia, các hệ thống này có thể cung cấp, hỗ trợ việc ra quyết định một cách toàn diện. Theo khảo sát những năm 1980, khoảng 2/3 trong số 500 tập đoàn lớn nhất của Mỹ lúc bấy giờ

sử dụng hệ thống chuyên gia trong hoạt động kinh doanh thường nhật.

Đứng trước những triển vọng to lớn, chính phủ nhiều nước đã đầu tư mạnh mẽ cho nghiên cứu và phát triển các hệ thống AI. Năm 1981, Bộ Kinh tế, Thương mại và Công nghiệp Nhật Bản phân bổ ngân sách 850 triệu USD cho dự án máy tính thế hệ thứ năm với tham vọng dẫn đầu thế giới về công nghệ máy tính. Mục tiêu của Nhật Bản là tạo ra những cỗ máy có thể nói chuyện với con người, dịch ngôn ngữ, diễn giải hình ảnh và suy luận như con người. Đáp lại, các chính phủ Mỹ, Anh và Châu Âu cũng đẩy mạnh tài trợ cho nghiên cứu AI. Đến năm 1985, khoản đầu tư của Mỹ vào hệ thống chuyên gia AI đã đạt hơn 1 tỷ USD. Vương quốc Anh cũng bắt đầu dự án Alvey trị giá 350 triệu bảng Anh.

Một lần nữa, kỳ vọng đã cao hơn nhiều so với mức thực tế có thể thực hiện được. Đến cuối những năm 1980, các hệ thống chuyên gia dần bộc lộ nhiều vấn đề và hạn chế về công nghệ khó giải quyết. Trước tiên, việc thu thập dữ liệu và thiết kế các quy tắc đòi hỏi rất nhiều công sức. Trên thực tế, các chuyên gia chỉ có thể diễn đạt bằng lời một phần nhỏ kiến thức của họ.Thêm vào đó, những hệ thống nhiều hơn 200 quy tắc có thể xuất hiện hiệu ứng “hộp đen” – chúng ta không rõ máy suy luận như thế nào.⁷ Các hệ thống chuyên gia cũng tỏ ra rất tốn kém để bảo trì. Chúng khó cập nhập, không có khả năng học và có thể mắc những sai lầm ngớ ngẩn khi được cung cấp thông tin đầu vào bất thường.

Từ cuối những năm 1980, chính phủ Mỹ và Nhật Bản lần lượt chấm dứt các nguồn tài trợ cho AI để tập trung vào các dự án nhanh đem lại kết quả. Như một hệ quả, AI trải qua mùa đông thứ hai, kéo dài đến năm 2000.

Học máy và học sâu

Năm 1997, đương kim vô địch cờ vua thế

⁷ Những hệ thống chuyên gia lớn thường có trên 1000 quy tắc.

giới Gary Kasparov đã bị đánh bại bởi Deep Blue, một hệ thống chuyên gia chơi cờ vua của IBM. Trận đấu được công bố rộng rãi và trở thành biểu tượng trong lịch sử. Tuy vậy, thành công này không còn hỗ trợ cho sự phát triển của AI biểu tượng. Trên thực tế, Deep Blue và những hệ thống chuyên gia khác chỉ xử lý được một phạm vi rất hạn chế (như là quy tắc của ván cờ), rất xa so với sự phức tạp của thế giới thực.

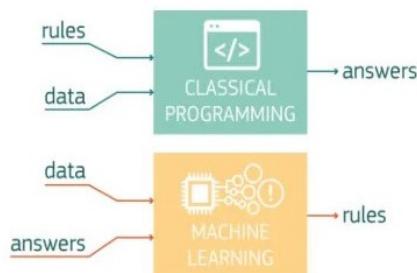


Hình 11: Kasparov đối đầu Deep Blue. Nguồn: Sportshistoryweekly.

Từ những năm 1990, trọng tâm của nghiên cứu về AI đã chuyển từ cách tiếp cận dựa trên tri thức sang cách tiếp cận dựa trên dữ liệu (học máy). Thay vì mã hóa quy tắc cho các hệ thống AI như trước kia, các nhà khoa học tạo ra các chương trình máy tính để phân tích lượng lớn dữ liệu và rút ra kết luận – hay “học” – từ kết quả (Hình 12). Sự chuyển dịch này là kết quả của sự phát triển của Internet. Học máy được hưởng lợi từ sự sẵn có ngày càng tăng của dữ liệu số và khả năng chia sẻ các dịch vụ của mình qua Internet.

Nhằm giải quyết các vấn đề phức tạp cũng như cung cấp các giải pháp hữu ích trong các lĩnh vực ứng dụng khác nhau, các nhà nghiên cứu AI bắt đầu sử dụng và phát triển các công cụ toán học phức tạp hơn. Họ nhận ra rằng nhiều vấn đề về AI đã được các nhà nghiên cứu trong các lĩnh vực như toán học, kinh tế hoặc vận trù học giải quyết. Chẳng hạn,

các mạng thần kinh nhân tạo không gì khác hơn là các mô hình hồi quy phi tuyến tính và mô hình khác biệt (Discriminant models) và có thể được phân tích bằng phần mềm thống kê tiêu chuẩn, giống như nhiều mô hình thống kê khác. Sử dụng ngôn ngữ toán học cho phép sự cộng tác ở mức độ cao hơn giữa các lĩnh vực khác nhau và khiến AI trở thành một ngành khoa học chặt chẽ hơn.



Hình 12: Sự khác nhau giữa các chương trình truyền thống và học máy. Trong học máy, dữ liệu đầu vào (data) và đầu ra (answers) được đưa vào thuật toán để tạo ra chương trình (rules). Chương trình này có thể được sử dụng để dự đoán kết quả trong tương lai. Nguồn: [3].

Năm 2004, Geoffrey Hinton (Đại học Toronto), Yoshua Bengio (Đại học Montreal) và Yann LeCun (Đại học New York) dưới sự tài trợ của chính phủ Canada đã bắt đầu một chương trình nghiên cứu để cập nhật mạng thần kinh nhân tạo. Các thí nghiệm được tiến hành đồng thời tại Microsoft, Google và IBM với sự trợ giúp của phòng thí nghiệm của Hinton ở Toronto cho thấy kiểu học này đã thành công trong việc giảm một nửa tỷ lệ lỗi trong nhận dạng giọng nói. Nhóm nhận dạng hình ảnh của Hinton cũng đạt được kết quả tương tự. Thuật ngữ “học sâu” được Geoffrey Hinton đặt cho các thuật toán mới này. Trong một thời gian ngắn, phần lớn các nhóm nghiên cứu đã chuyển sang sử dụng công nghệ này với những lợi ích không thể chối cãi.⁸

⁸Bengio, Hilton và LeCun được trao Giải thưởng Turing năm 2018 cho việc cách mạng hóa lĩnh vực học sâu.



Hình 13: Giải thưởng Turing 2018. Nguồn: AMC.

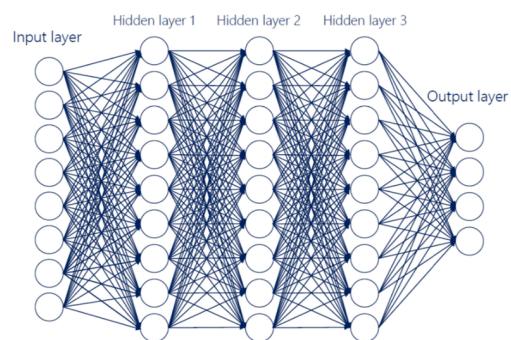
Kể từ năm 2010, lĩnh vực học sâu phát triển chóng mặt.

Năm 2011, IBM Watson, một hệ thống máy tính có khả năng trả lời các câu hỏi được đặt ra bằng ngôn ngữ tự nhiên đã thắng trò chơi Jeopardy!⁹ trước Ken Jennings và Brad Rutter, hai trong số những thí sinh thành công nhất trong chương trình này, và giành được 1 triệu USD. Máy tính của IBM áp dụng các công nghệ xử lý ngôn ngữ tự nhiên tiên tiến, truy xuất thông tin, biểu diễn tri thức, lý luận tự động và học máy vào lĩnh vực trả lời câu hỏi trong miền mở. Cùng năm, Apple cho ra mắt Siri, trợ lý ảo đầu tiên được sử dụng rộng rãi.

Năm 2016, AlphaGo, phát triển bởi DeepMind, đã đánh bại Lee Sedol, một trong số những kỳ thủ cờ vây xuất sắc nhất thế giới. Vì tính phức tạp của nó, cờ vây (Go) lúc đó được coi là nằm ngoài tầm với của AI trong ít nhất một thập kỷ nữa. AlphaGo sử dụng mạng thần kinh nhân tạo sâu, được đào tạo thông qua *học tăng cường*. Một năm sau, AlphaGo được nâng cấp thành AlphaZero, chương trình mạnh mẽ hơn có thể chơi được cả cờ vua, cờ vây và cờ tướng Nhật Bản (Shogi).

Vào tháng 11 năm 2020, mô hình AlphaFold của DeepMind, một hệ thống học sâu được thiết kế để xác định cấu trúc ba chiều của

protein, đã mang lại kết quả cực kỳ chính xác, tạo ra một bước tiến vượt bậc trong cái mà các nhà khoa học gọi là “ván đề gấp protein”. Vào tháng 7 năm 2022, DeepMind thông báo rằng AlphaFold có thể xác định cấu trúc của gần 200 triệu protein từ 1 triệu loài, bao gồm hầu hết mọi loại protein mà con người biết đến. Khả năng của AlphaFold đã mở ra cánh cửa cho các nhà nghiên cứu y tế phát triển rất nhiều các loại thuốc và vắc xin phục vụ nhân loại.



Hình 14: Một ví dụ về mạng thần kinh nhân tạo sâu đơn giản gồm lớp đầu vào, lớp đầu ra và 3 lớp ẩn. Mỗi nơron trong một lớp được kết nối với tất cả các nơron ở lớp trước (và sau).

Những thành công và triển vọng to lớn được mở ra bởi lĩnh vực học máy, đặc biệt là học sâu đã thúc đẩy các tập đoàn công nghệ tư nhân như Google, Microsoft, Facebook, Tesla, Alibaba v.v. đầu tư mạnh mẽ vào AI, được sau bởi các chính phủ. Năm 2022, tổng vốn đầu tư tư nhân cho AI toàn cầu đạt 92 tỷ USD, trong đó Mỹ dẫn đầu với 47,4 tỷ USD, sau là Trung Quốc với 13,4 tỷ USD. Năm 2018, chính phủ Trung Quốc đưa ra quy trình gồm ba giai đoạn đầy tham vọng với mục tiêu đưa Trung Quốc trở thành trung tâm AI “chính” của thế giới vào năm 2030. Cùng năm, Ủy ban châu Âu dự định phân bổ 1 tỷ euro để đầu tư cho AI mỗi năm. Con số này dự định sẽ tăng lên 20 tỷ euro mỗi

⁹Chương trình đó vui ngược với hình thức hỏi đáp truyền thống trên truyền hình của Mỹ. Thí sinh được cung cấp những manh mối kiến thức chung dưới dạng câu trả lời và họ phải diễn đạt từng câu trả lời dưới dạng một câu hỏi.

năm vào thập kỷ tới. Các quốc gia Ấn Độ, Hàn Quốc, Canada, Nhật Bản, Israel, Nga và Singapore cũng đầu tư mạnh mẽ cho AI.

Định luật Moore

Những tiến bộ mà AI đạt được có sự đóng góp to lớn của những tiến bộ trong công nghệ máy tính.

Năm 1965, Gordon E. Moore – một trong những người tiên phong về mạch tích hợp, nhà đồng sáng lập và giám đốc điều hành của Intel sau này – đưa ra dự đoán rằng số lượng bóng bán dẫn có thể được tích hợp trên một đơn vị không gian của mạch tích hợp sẽ tăng gấp đôi mỗi năm. Năm 1975, ông sửa lại ước tính của mình thành tăng gấp đôi sau mỗi hai năm. Dự đoán này được gọi là *Định luật Moore*. Các phép đo quan trọng khác cũng cho thấy hành vi nhân đôi tương tự, chẳng hạn như tốc độ bộ xử lý và dung lượng bộ nhớ phù hợp với máy tính.



Hình 15: Gordon E. Moore. Nguồn: Intel.

Trong suốt sáu thập kỷ qua, định luật Moore được sử dụng như kim chỉ nam trong ngành công nghiệp bán dẫn. Tâm quan trọng của định luật này không chỉ ở việc dung lượng bộ nhớ ngày càng lớn và tốc độ máy tính ngày càng nhanh theo thời gian mà các kỹ sư có thể dự đoán quy mô lớn hơn và nhanh hơn bao nhiêu. Điều này giúp họ lập kế hoạch dài hạn

cho các dự án phát triển phần mềm và phần cứng.

Định luật Moore có tác động lâu dài đến sự phát triển của AI. Việc tăng gấp đôi tốc độ phần cứng hoặc gấp đôi bộ nhớ sẽ cải thiện quy mô của vấn đề mà ta có thể xử lý hiệu quả. Cách Deep Blue được mã hóa không khác nhiều so với các chương trình chơi cờ vua 30 năm trước đó. Điều khác biệt ở đây là Deep Blue có khả năng tìm kiếm 200 triệu thế cờ mỗi giây kết hợp với thông tin trong kho dữ liệu khổng lồ để chọn nước đi. Nó đưa ra một chút lời giải thích cho quá trình nghiên cứu AI: các nhà khoa học tạo ra các chương trình vượt quá sức mạnh tính toán hiện tại, sau đó chờ định luật Moore bắt kịp.



Hình 16: Ổ cứng dung lượng 5 MB năm 1956 có giá trên 50.000 USD so với thẻ nhớ 1 TB (1000.000 MB) năm 2020 có giá 100 USD.

Từ năm 2010, đã có những dấu hiệu cho thấy định luật Moore đang chậm lại. Tuy vậy, sự gia tăng dữ liệu cũng như sức mạnh tính toán mới đã đem đến động lực mới to lớn, dẫn đến sự bùng nổ của học sâu. Các nhà khoa học phát hiện ra hiệu quả rất cao của bộ xử lý đồ họa máy tính (GPU) trong việc đẩy nhanh quá trình tính toán các thuật toán học máy. Từ năm 2010, tốc độ tính toán tăng theo cấp số nhân trước kia thậm chí còn nhanh hơn nữa, đạt gấp đôi chỉ trong vòng 6 tháng. PaLM, một mô hình ngôn ngữ tự nhiên của Google, lớn hơn 5 triệu lần so với AlexNet, hệ thống AI có tính toán đào tạo lớn nhất 10 năm trước. Những đột phá trong công nghệ lượng tử, khoa học máy tính, toán

học, vật lý hay học máy đều đóng vai trò là những bước đột phá tiềm năng vượt qua giới hạn của định luật Moore.

Tương lai

Bây giờ chúng ta quay trở lại hiện tại. Rất nhiều các ứng dụng thông minh đã hiện hữu trong cuộc sống hàng ngày, nhiều công nghệ mới chỉ gần đây còn là khoa học viễn tưởng giờ đã trở thành hiện thực. Vậy điều gì đang chờ đợi chúng ta phía trước?

Theo Rodney Brooks, giáo sư Robotics tại MIT, thì việc dự đoán tương lai của AI là rất khó khăn. Ông dẫn ra luật Amara nổi tiếng: “*Chúng ta có xu hướng đánh giá quá cao tác động của một công nghệ trong thời gian ngắn và đánh giá thấp tác động về lâu dài.*” Luật Amara trình bày một mô hình được tìm thấy trong nhiều công nghệ mới nổi. Một lời hứa lớn trước mắt, sự thất vọng, và rồi sự tự tin dần dần tăng lên vượt xa những gì mong đợi ban đầu hướng tới. Nhiều công nghệ được đánh giá quá cao trong ngắn hạn, trong khi lợi ích lại được tích lũy về lâu dài.

Trước mắt, các *mô hình ngôn ngữ lớn* (Large Language Models) và *AI tạo sinh* (Generative AI) đang tạo ra những bước đột phá lớn tiếp theo. Người ta có thể tưởng tượng việc tương tác với một hệ thống chuyên gia trong một cuộc trò chuyện trôi chảy hoặc có một cuộc trò chuyện bằng hai ngôn ngữ khác nhau được dịch theo thời gian thực. Chúng ta cũng có thể kỳ vọng sẽ thấy những chiếc ô tô không người lái trên đường trong nhiều năm tới.

Cũng giống nhiều mô hình trí tuệ nhân tạo khác, học sâu còn nhiều vấn đề cần được giải quyết, bao gồm các cuộc tấn công đối nghịch, tạo ra nội dung giả (deepfake), sự công bằng, trách nhiệm giải trình, tính minh bạch và các cân nhắc về đạo đức khác.

Mặc dù không thể phủ nhận rằng những tiến bộ gần đây đã đẩy nhanh sự phát triển của trí tuệ nhân tạo nhưng hiện nay chúng

vẫn còn một khoảng cách rất xa so với trí tuệ thực sự. Có rất nhiều điều mà các mô hình học sâu chưa thể làm được. Mạng thần kinh được lấy cảm hứng từ não bộ con người nhưng chưa thực sự giống. Trí thông minh mà học sâu mang lại cho máy tính có thể rất xuất sắc trong các nhiệm vụ được xác định trong phạm vi hẹp – chơi trò chơi cụ thể, nhận ra những âm thanh hay hình ảnh cụ thể – nhưng chúng chưa có khả năng thích ứng và linh hoạt như trí thông minh của con người. Về lâu dài, mục tiêu của trí tuệ nhân tạo là trí thông minh tổng quát, tức là một cỗ máy vượt qua khả năng nhận thức của con người trong mọi nhiệm vụ. Điều này giống với hình dáng của robot có tri giác mà chúng ta thường thấy trong những bộ phim khoa học viễn tưởng. Để làm được điều đó, cần có những đột phá trong rất nhiều lĩnh vực như khoa học máy tính, khoa học thần kinh, sinh học hay toán học.

Nhìn chung, chúng ta chưa thể xác định một cách chắc chắn rằng AI sẽ phát triển đến đâu, liệu sắp tới có xảy ra một mùa đông tiếp theo hay không? Nhưng chúng ta hoàn toàn có thể tiếp tục chờ đợi và hy vọng vào những bước tiến mới, những sự đột phá tiếp theo của ngành này trong tương lai.

Tài liệu

[1] European Commission, Joint Research Centre, Delipetrev, B., Tsinaraki, C., Kostić, U., *AI watch, historical evolution of artificial intelligence – Analysis of the three main paradigm shifts in AI*, Publications Office, 2020

[2] Council of Europe, *History of Artificial Intelligence*.

[3] Craglia M., (Ed.), *Artificial Intelligence – A European Perspective.*, EUR 29425 EN, Publications Office, Luxembourg, 2018

[4] Các bài viết về cùng chủ đề trên Wikipedia và Encyclopaedia Britannica.

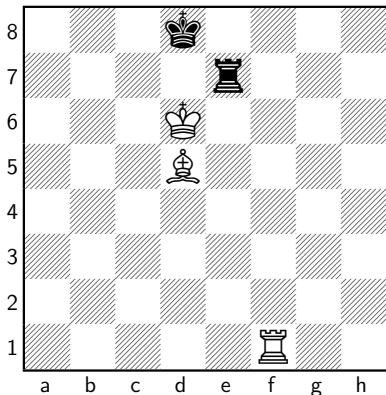


XE VÀ TƯỢNG CHỐNG XE ĐƠN ĐỘC (Phần I)

BÙI VINH¹

Lý thuyết cờ tàn cơ bản đều cho rằng xe và tướng chống xe không có tốt đều được coi là hòa cờ cơ bản. Tuy nhiên thực tế thi đấu cho thấy khả năng hòa cờ cho bên yếu không nhiều. Bên yếu cần phải chơi rất chính xác nếu muốn gỡ hòa. Trong bài học hôm nay, chúng tôi xin trình bày một số tình huống cơ bản

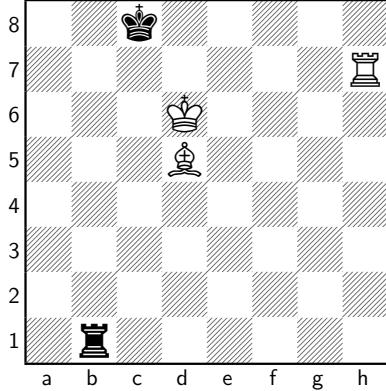
A. Philidor



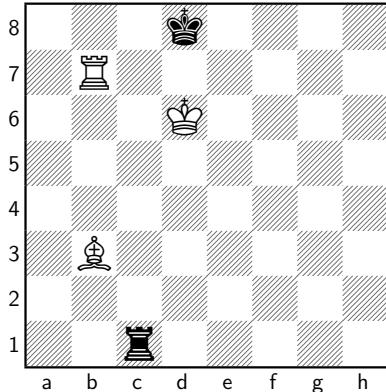
Hình 1. Trắng đi trước thắng, 1749.

1.Xf8+ Xe8 2.Xf7 Xe2 3.Xh7 (Hình 2)
[Một nước đi chờ đợi]

**3...Xe1 4.Xb7! Xc1 [4...Vc8 5.Xa7 Xb1 6.Xh7!
6...Vb8 7.Xh8+ Va7 8.Xa8+ Vb6 9.Xb8+ Va5 10.Xxb1]
5.Tb3!!**



Hình 2.



Hình 3.

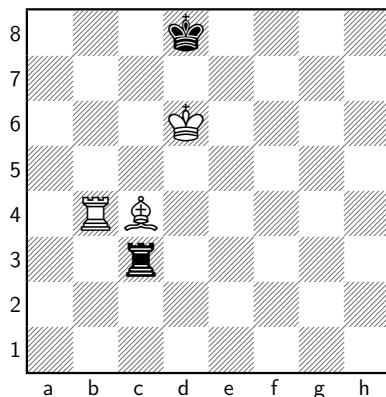
Kỹ thuật giành chiến thắng cơ bản của bên có tướng là tìm cách ép vua đối phương xuống hàng ngang số 8, 1 hoặc cột a, h. Sau đó phối hợp giữa xe và tướng thực hiện vừa che chắn

¹Đại kiện tướng quốc tế.

cho vua khỏi các nước chiếu của xe đối bằng tượng trong khi đó dùng xe đe dọa chiếu hết.

5...Xc3 6.Te6! Xd3+ 7.Xd5 [Tượng trắng che chắn cho vua]

7...Xc3 8.Xd7+ Vc8 9.Xh7 Vb8 10.Xb7+ Vc8 11.Xb4 Vd8 12.Tc4!! (Hình 4). Trắng dùng Tượng ngăn cản xe đối phương phòng thủ ở ô c8.



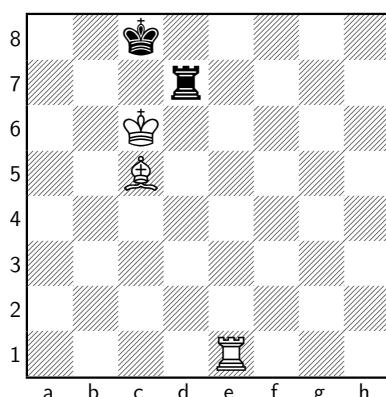
Hình 4.

Trắng đe dọa chiếu hết ở nước tiếp theo

12...Vc8 [**12...Ve8 13.Xb8#**]

13.Te6+ Vd8 14.Xb8+

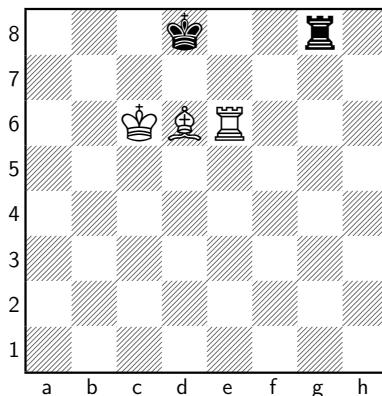
Lolli



Hình 5. Trắng đi trước thắng, 1763.

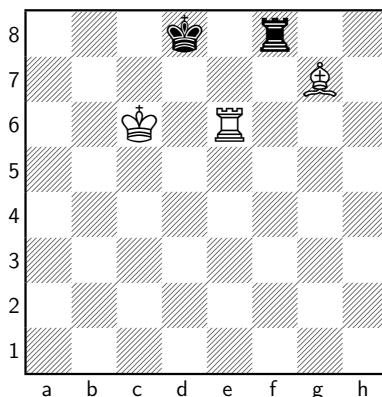
Trong rất nhiều trường hợp mặc dù xe đen cũng phòng thủ từ phía sau hoặc bên sườn, tuy nhiên bên mạnh cũng vẫn thắng.

1.Xe8+ Xd8 2.Xe7 Xd2 [Nếu **2...Xh8 3.Td6 Vd8 4.Xa7 Ve8 5.Xa8+**; Nếu **2...Xg8 3.Td6 Vd8 4.Xe6!**] (Hình 6)



Hình 6.

4...Vc8 (**4...Xh8 5.Te5 Xf8 6.Tg7!**) Trắng giam xe đen ở hàng ngang số 8

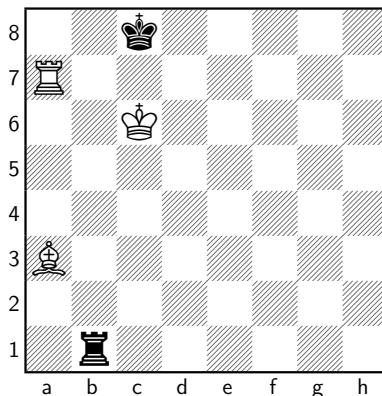


Hình 7.

6...Xg8 7.Tf6+ Vc8 8.Xe4 Xf8 9.Tg7 Xg8 10.Xa4 Vb8 (**10...Vd8 11.Xa8+**) **11.Te5+ Vc8 12.Xa8#** **5.Xe5 Vd8 6.Tc7+ Vc8 7.Xa5 Xg6+ 8.Td6+-]**

3.Xf7! Xd1 [**3...Xd8 4.Te7 Xg8 5.Xf5 Vb8 6.Td6+ Vc8 7.Xa5**]

4.Xa7 Xb1 [**4...Vb8 5.Xa4 Xc1 6.Xe4!**]



Hình 8.

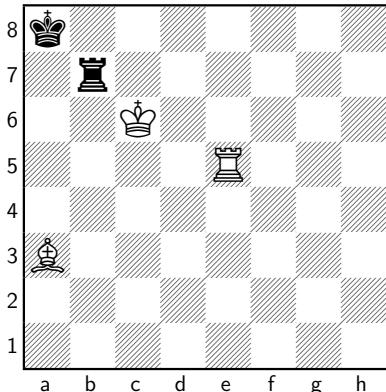
5.Ta3!!

Nước cờ chia khóa. Đen bị “xung xoang” vì không có nước đi cho xe.

5...Xb3 [Phương án khác cũng không tốt hơn cho đen 5...Vb8 6.Xe7 Va8 7.Xe4!! Xb7!]

8.Xe5

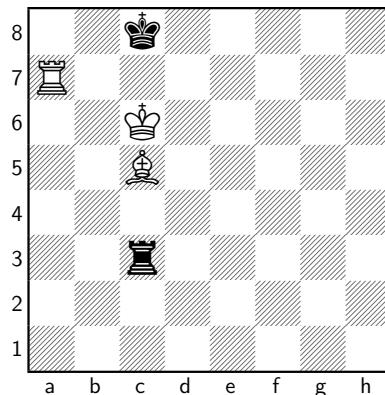
Đen bị “xung xoang” 8...Xf7 (8...Xb1 9.Xa5+ Vb8 10.Td6+ Vc8 11.Xa8+) 9.Xe8+ Va7 10.Tc5+ Va6 11.Xa8+ Trắng thắng]



Hình 9.

6.Td6! Xc3+ 7.Tc5

Tượng trắng phối hợp với vua và xe. Tượng vừa thực hiện việc che chắn cho vua và tấn công vua đối phương.



Hình 10.

7...Xb3 8.Xc7+ Vb8 [8...Vd8 9.Xf7]

9.Xe7 Va8 10.Xe4! [10.Xe8+ Xb8 11.Xe1]

10...Xb7 11.Xa4+ Vb8 12.Td6+ Vc8

13.Xa8+ Trắng thắng