NGƯỜI KHÔNG CHUYÊN TÌM RA VIÊN GẠCH "EINSTEIN" BÍ ẨN*

ERICA KLARREICH

(Người dịch: Nguyễn Duy Anh và Lê Vũ Minh Trí[1])

Giữa tháng 11 năm 2022, David Smith [1], một kỹ thuật viên in ấn đã nghỉ hưu có niềm vui thú với xếp hình, hình học fractal và bản đồ đường xá, đang làm việc mình yêu thích: chơi với những hình khối. Nhờ một phần mềm gọi là "PolyForm Puzzle Solver" [2], ông đã dựng được một miếng gạch hình cái mũ trông khá khiêm tốn. Ông đã bắt đầu thử nghiệm xem có thể phủ kín được bao nhiêu phần màn hình với duy nhất viên gạch lát này, với điều kiện không để hai viên đè lên nhau hay để hở khoảng trống.

Thường thì khi ông tạo ra loại gạch mới, chúng sẽ hoặc tạo thành một họa tiết lặp, hoặc chỉ lát được một phần nhỏ màn hình. Viên gạch mũ có vẻ không thuộc cả hai loại này. Thế là Smith cắt 30 miếng giấy bìa màu hình viên gạch này và xếp chúng trên bàn. Rồi ông cắt thêm 30 cái nữa và tiếp tục xếp. "Tôi dần nhận ra rằng mỗi lần xếp là một cách lát tôi chưa thấy bao giờ," ông nói. "Đó là một viên gạch lát ranh mãnh". Ông gửi mô tả về viên gạch tới Craig Kaplan [3], một nhà khoa học máy tính ông quen tại Đại học Waterloo, Canada. Kaplan ngay lập tức bắt đầu tìm hiểu các tính chất của nó.

Ngày 20 tháng 3 vừa qua, Smith và Kaplan, cùng với 2 nhà nghiên cứu nữa, đã công bố [4] rằng đây chính là thứ mà các nhà toán học đã tìm kiếm suốt hơn năm thập kỉ: một viên gạch duy nhất mà ta có thể dùng để lát toàn mặt phẳng, nhưng chỉ theo những họa tiết không lặp lại bất kỳ khối gạch nào. Các nhà toán học gọi những viên gạch, hoặc các bộ viên gạch, có tính chất đó là "phi tuần hoàn" (aperiodic), trái với hình vuông hoặc lục giác là những hình có thể phủ cả mặt phẳng theo các họa tiết lặp lại (hay "tuần hoàn").

Viên gạch mũ ẩn chứa "đủ sự phức tạp để bẻ gãy trật tự tuần hoàn theo mọi quy mô", các nhà nghiên cứu khẳng định trong bài báo. Hơn nữa, họ nhận ra rằng viên gạch mũ là một trong vô số viên gạch khác nhau có cùng tính chất này.

"Tưởng xa tận chân trời mà gần ngay trước mắt," là những gì Doris Schattschneider, giáo sư toán danh dự tại Đại học Moravian, Pennsylvania nói về viên gạch này. Bà tả rằng bản thân đã "sửng sốt" trước phát hiện này.

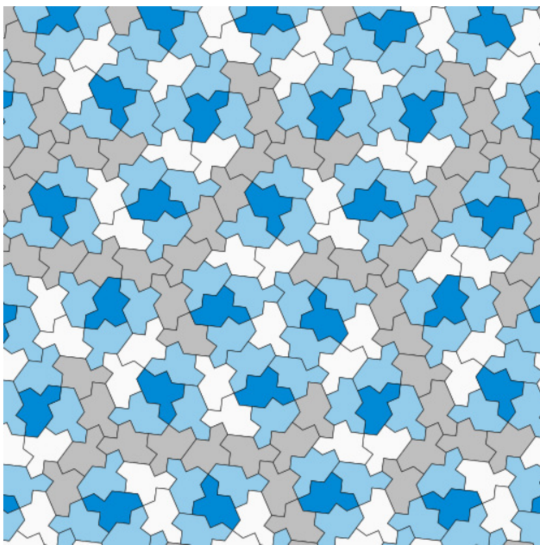
Các nhà toán học đã bắt đầu tìm kiếm một viên gạch như viên gạch mũ từ những năm

---

Nguồn: https://www.quantamagazine.org/hobbyist-finds-maths-elusive-einstein-tile-20230404.

[1] *THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam.*

60 thế kỷ trước, khi Robert Berger [5] dựng ra 20426 loại gạch cùng nhau lát mặt phẳng một cách phi tuần hoàn. Công trình này là phát súng mở màn cho một cuộc đua dựng ra các bộ gạch có thể lát mặt phẳng phi tuần hoàn bằng ít loại hơn, lên đến đỉnh điểm là khám phá của Roger Penrose vào thập niên 70 với chỉ hai viên. Năm 1982, Dan Shechtman [6] đã tìm ra những dạng đối xứng tương tự như của gạch lát Penrose trong tự nhiên, dưới hình hài các cấu trúc gọi là giả tinh thể (quasicrystal), qua đó giúp ông đạt giải Nobel Hóa học năm 2011.



Viên gạch mũ chỉ là một trong một họ các viên gạch phi tuần hoàn

Từ ấy, các nhà toán học vẫn không ngừng tìm kiếm một loại gạch duy nhất có thể lát mặt phẳng 2 chiều một cách phi tuần hoàn, mà không cho phép kẽ hở hay gạch đè lên nhau. Ludwig Danzer, một nhà hình học người Đức, đã tinh nghịch đặt tên cho loại gạch như thế là một "einstein" – chơi chữ của cụm từ tiếng Đức "ein stein", nghĩa là "một miếng".

Vào những năm 1990, hai nhóm khác nhau [7] đã tìm ra cách chồng kề nhau một loại gạch 10 cạnh để phủ mặt phẳng. Trong thập kỷ sau đó, Joan Taylor [8], một nhà toán học nghiệp dư ở Tasmania, đã khám phá ra một hình với nhiều miếng không liền với nhau [9]. Cùng với Joshua Socolar [10], một nhà vật lý tại Đại học Duke, họ đã chứng minh được hình này có thể lát mặt phẳng một cách phi tuần hoàn [11]. Và mới năm ngoái, Rachel Greenfield [12] từ Viện Nghiên cứu Cao cấp Princeton và Terence Tao [13] từ Đại học California, Los Angeles đã phát hiện ra một hình trong không gian nhiều chiều [14] có thể lát không gian một cách phi tuần hoàn mà không cần quay hay lật.

Nhưng chưa ai tìm được một "einstein" đích thực – một hình 2 chiều đơn giản phủ mặt phẳng một cách phi tuần hoàn. Cuối cùng, giới toán học bắt đầu nghi ngờ sự tồn tại của chúng, theo lời Marjorie Senechal [15], một nhà nghiên cứu về lát gạch và giáo sư danh dự tại Đại học Smith. Bà cho biết thêm: việc một "einstein" đơn giản như viên gạch mũ của Smith lù lù trước mắt, chờ đợi được tìm ra là một sự thật "khó tin".

Theo bà phỏng đoán, có lẽ lý do viên gạch mũ tránh được sự tìm kiếm đến tận bây giờ là do nhiều nhà toán học đã tập trung vào các hình đối xứng kiểu "cấm kỵ" – những kiểu mà không thể có trong các loại gạch lát tuần hoàn. Chẳng hạn như gạch lát Penrose có "đối xứng gấp 5" (đối xứng qua phép quay 72 độ quanh tâm), như ở các ngũ giác đều hay hình ngôi sao. Các ngũ giác đều không thể phủ mặt phẳng, nên bắt đầu từ các "đối xứng gấp 5" là khởi điểm khá tự nhiên.

Trái lại, viên gạch mũ chẳng có đối xứng nào cả, và "đơn giản đến mức tầm thường", các tác giả bình luận. Cách lát này có quan hệ mật thiết với một cách lát tuần hoàn: lưới tổ ong hình lục giác. Ta có thể tạo ra cách lát hình mũ từ cách lát bằng lục giác như sau: trước hết nối các trung điểm các cặp cạnh đối của lục giác. Lục giác sẽ bị chia thành 6 hình "cánh diều". Mỗi viên gạch mũ được cấu thành từ 8 hình cánh diều liền nhau, kết hợp từ các lục giác kề nhau. Bất kỳ ai đầu tư chút sức lực, cùng một cái bút dạ và sàn nhà vệ sinh gạch hình lục giác cũng có thể viền được một cách phủ mặt phẳng bằng hình mũ.

Khám phá của David Smith được coi là một khám phá khó tin.

Viên gạch mũ, Senechal nói, chỉ ra rằng sự liên kết giữa gạch lát tuần hoàn và phi tuần hoàn chặt chẽ hơn ta tưởng.

Kể từ lúc thông báo phát hiện này, các nhà toán học và người yêu thích lát gạch đã đổ xô tìm tới những loại gạch mới này, cắt chúng ra từ giấy, in 3–D, và làm trang trí họa tiết cho mũ và bánh quy của họ. Phong trào ấy đem lại một cảm giác "hơi siêu thực" cho Smith, một cư dân tại thành phố ven biển Bridlington phía bắc nước Anh. "Tôi không quen với mấy việc kiểu như thế này".

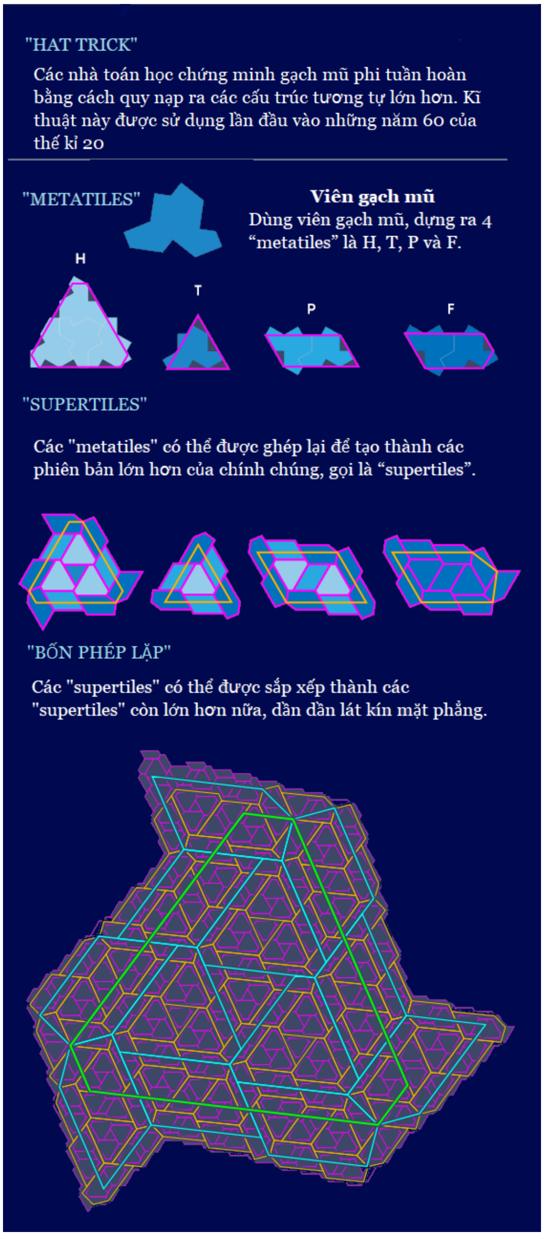
Nhưng đây không phải là lần đầu tiên một cá nhân nghiệp dư với niềm đam mê to lớn tạo đột phá trong lát gạch. Robert Ammann, một nhân viên phân loại thư, đã độc lập tìm ra một trong các bộ gạch lát Penrose [16] vào những năm 70. Marjorie Rice, một bà nội trợ ở California, tìm ra cả một họ gạch lát hình ngũ giác [17] vào năm 1975. Và ta có Joan Taylor cùng gạch lát Socolar – Taylor. Có lẽ những người như họ, khác với các nhà toán học, "không biết về độ khó của bài toán, vì thế không bị áp lực tâm lý", Senechal nói.

Với các viên gạch có thể lát mặt phẳng một cách tuần hoàn, thì dùng chúng để lát mặt phẳng một cách không tuần hoàn là tương đối đơn giản. Ví dụ như đặt ngang một vài quân domino trong khi các quân domino khác để dọc. "Nghệ thuật thực sự là tìm một viên gạch với khả năng lát mặt phẳng, nhưng không thể làm vậy một cách tuần hoàn." Socolar nói.

Ta không thể tạo ra một thuật toán xác định được liệu một tập hợp các viên gạch nào đó có thể lát mặt phẳng hay không (dù theo cách tuần hoàn hay phi tuần hoàn đi chăng nữa). Nên sau khi được Smith giới thiệu viên gạch mũ, Kaplan đã sử dụng một chương trình ông viết có khả năng đặt các viên gạch bao quanh một viên gốc và mở rộng dần dần từ đó. Ngoài các viên gạch lát mặt phẳng tuần hoàn, chưa ai từng tìm được loại gạch lát nào mà có thể lát quá 6 vòng quanh viên gạch gốc. Lần này, chương trình cứ chạy và chạy mãi, và nó lát tới tận 16 vòng gạch mũ trước khi Kaplan dừng chương trình vì đã thu thập đủ dữ liệu.

Trong khi đó, trước sự kinh ngạc của Kaplan, Smith có một khám phá mới: một viên gạch thứ hai, hình dạng giống một con rùa, cũng thuộc loại phi tuần hoàn. "Chỉ ra được 2 einstein liên tiếp thật là ngoài sức tưởng tượng," nhóm nghiên cứu viết.

Giữa tháng 1, Smith và Kaplan đã tuyển dụng được 2 nhà nghiên cứu nữa: Chaim Goodmain–Strauss [18], một nhà toán học ở Bảo tàng Toán học Quốc gia và Đại học Arkansas, và Joseph Samuel Myers [19], một kỹ sư phần mềm ở Cambridge, Anh, với bằng tiến sỹ tổ hợp. Myers dốc toàn bộ thời gian rảnh của mình cho viên gạch mũ, và chỉ trong hơn một tuần, ông đã chứng minh được nó phi tuần hoàn. "Chúng tôi khá sốc bởi tốc độ ông ấy giải bài toán này," Kaplan nói.



Chứng minh này được biến tấu từ một phương pháp của Berger vào những năm 1960. Phương pháp đó bao gồm việc ghép một số viên gạch lại với nhau, tạo thành những phiên bản lớn hơn của chính chúng, hình thành một cấu trúc phân chia đẳng cấp. Đầu tiên, Myers xác định bốn hình trung gian được tạo từ viên gạch mũ, gọi là H, T, P và F. Ví dụ, viên gạch H được tạo ra từ 4 viên gạch mũ, ghép lại thành một hình hao hao một tam giác cụt ở các góc. Myers chứng minh rằng có thể ghép 4 hình lại với nhau để tạo ra vẫn 4 hình đó với kích thước lớn hơn. Chẳng hạn, có thể tạo ra một viên gạch H lớn bằng cách xếp ba viên gạch H quanh một viên gạch T, rồi ghép các viên gạch P và F xung quanh hình vừa tạo.

Phương pháp này giúp ta dựng ra những viên gạch lớn dần. Có thể bắt đầu với bất kỳ loại gạch nào, chẳng hạn như viên gạch H, phóng to nó lên, và lấp đầy các khe hở bằng 4 hình trung gian H, T, P, F. Ta có thể lặp đi lặp lại việc này vô số lần để tạo ra một cấu trúc phân cấp từ những hình này, từ đó lát kín mặt phẳng. Đơn vị cơ bản của cấu trúc chính là những viên gạch mũ.

Họ đã chứng minh được cách lát hình thành từ các cấu trúc phân cấp này không bao giờ tuần hoàn. Đồng thời họ cũng chỉ ra rằng đó là cách duy nhất để phủ mặt phẳng bằng các hình mũ. Vì thế nên cách phủ mặt phẳng bằng các viên gạch mũ không thể tuần hoàn. "Một kết quả rất tuyệt vời", Socolar cho hay.

Vậy là còn lại loại gạch lát thứ hai Smith phát hiện: con rùa. Liệu chăng việc một người đàn ông khám phá ra tận hai loại lát gạch phi tuần hoàn cùng lúc, trong khi phần còn lại của nhân loại bó tay trong suốt 50 năm, đơn thuần là một sự trùng hợp tuyệt diệu? Viên gạch mũ và "con rùa" nhìn giống nhau đến bất ngờ, khiến các nhà nghiên cứu nghi ngờ rằng con rùa cũng là một viên gạch phi tuần hoàn. Nhưng nghi ngờ vẫn chỉ là nghi ngờ, không phải chứng minh.

Thế rồi Myers có một khám phá: hóa ra, cả cái mũ và con rùa đều thuộc về một họ gồm vô số viên gạch lát mặt phẳng theo cùng một cách.

Mỗi viên gạch mũ có 13 cạnh: 6 dài, 6 ngắn tương ứng với các cạnh hình cánh diều, cộng với một cạnh ghép từ hai cạnh cánh diều ngắn. Bằng cách thay đổi kích cỡ độ dài các cạnh của viên gạch mũ, ta có thể thu được vô hạn không đếm được các viên gạch phi tuần hoàn. Tưởng tượng một thanh trượt:

di sang trái khiến cạnh ngắn (cùng với một cạnh ghép kể trên) ngắn đi; di sang phải thì cạnh dài nhỏ lại. "Con rùa" nằm về bên phải so với viên gạch mũ, nhưng đồng thời cũng có vô số hình khác thuộc kiểu tương tự.

Nếu ta đẩy thanh trượt hết nấc về bên trái, cạnh ngắn sẽ biến mất, viên gạch lúc này có hình chữ V 6 cạnh; đẩy hết nấc sang phải thì cạnh dài biến mất và ta được một hình bảy cạnh được đặt tên là "sao chổi". Khác với viên gạch mũ, gạch hình chữ V và hình sao chổi có thể được dùng để lát mặt phẳng một cách tuần hoàn. Hình ở trung tâm thanh trượt, tức cạnh dài và cạnh ngắn bằng nhau, cũng có tính chất này.

Craig Kaplan, nhà khoa học máy tính ở đại học Waterloo, Canada.

Myers còn nhận ra rằng mình có thể sử dụng đặc tính hình học của viên gạch chữ V và sao chổi để chứng minh là tất cả các hình dọc theo thanh trượt, trừ hai đầu và trung điểm, đều là gạch loại phi tuần hoàn. Lập luận này, được Kaplan gọi là "một nước đi thiên tài của Toán học", hoàn toàn mới lạ với bộ môn lát gạch. Trước đây, lĩnh vực này chỉ có 3 cách tiếp cận chính để chứng minh tính phi tuần hoàn, theo lời Goodman-Strauss. "Giờ ta có cách thứ tư."

Các nhà toán học đang cố gắng thấm phương pháp chứng minh mới này. "Tôi phải ngồi lại và nghiêm túc dành thời gian cho thứ này," Senechal nói.

Một câu hỏi tự nhiên, Greenfield nói, là liệu rằng có thể tìm được một nguồn nào đó tạo ra các cách lát mới không. Năm 1981, Nicholaas de Brujin [20] đã chứng minh được các cách lát Penrose là hình chiếu xuống không gian 2 chiều của các viên gạch lát tuần hoàn mặt phẳng 5 chiều. "Nếu tương tác hoặc cấu trúc của những cách lát (mới) này tương ứng với một cách lát gạch tuần hoàn trên không gian nhiều chiều hơn, điều ấy sẽ thực sự thú vị để tìm hiểu." Greenfield nói.

Với tư cách một nhà vật lý, Socolar đã bắt đầu khám phá tính chất vật liệu của cách lát mới này. Ông thấy rằng: kiểu nhiễu xạ khi ánh sáng chiếu qua loại gạch lát này có những đỉnh dốc tương tự như ở giả tinh thể. Kể cả khi ấy, cách lát bằng gạch hình mũ vẫn "trông khác hẳn với tất cả những thứ tôi từng thấy trước đây", ông khẳng định.

Trong lúc ấy, Smith chưa xong việc với viên gạch ranh mãnh của ông. Ông hiện dự định khám phá tiềm năng nghệ thuật và cách phối màu để làm nổi bật họa tiết của các viên gạch này. "Dường như nó có thái độ riêng," ông nói. "Tôi nghĩ ta nên tôn trọng khi làm việc với nó."

Bình luận của các dịch giả: Có ý kiến cho rằng cái mũ chưa thể được tính là "einstein" do thực chất chúng ta cần dùng tới cả cái mũ và viên gạch đối xứng trục với nó để lát toàn mặt phẳng, và hai viên gạch có thể tính là khác nhau. Tuy nhiên, đúng như lời hứa, David Smith đã có một phát hiện mới: một trong các họ hàng đặc biệt của cái mũ, gọi là Tile$(1,1)$, có thể lát mặt phẳng một cách phi tuần hoàn nếu như ta cấm úp ngược viên gạch lại để ghép. Bằng cách điều chỉnh các cạnh của Tile$(1,1)$, ông thu được một họ các viên gạch gọi là bóng ma. Lần này, mỗi bóng ma đều tự nó lát được mặt phẳng phi tuần hoàn, kể cả khi cho phép úp ngược viên gạch này để ghép. Bài báo về phát hiện này [21] được đăng lên arXiv vào cuối tháng 5 năm 2023, tại thời điểm đăng bài hiện chúng tôi chưa rõ tính xác thực.

Các liên kết trong bài viết

[1] https://the-orangery.weebly.com/

[2] https://www.jaapsch.net/puzzles/polysolver.htm

[3] https://cs.uwaterloo.ca/ csk/

[4] https://arxiv.org/abs/2303.10798

[5] https://www.ams.org/books/memo/0066/

[6] https://www.engineering.iastate.edu/people/profile/dannys/

[7] https://link.springer.com/article/10.1007/BF00239998

[8] http://taylortiling.com/

[9] https://sfb701.math.uni-bielefeld.de/preprints/sfb10015.pdf

[10] https://scholars.duke.edu/person/socolar

[11] https://arxiv.org/abs/1003.4279v2

[12] https://www.math.ias.edu/ rgreenfeld/

[13] https://www.math.ucla.edu/ tao/

[14]https://www.quantamagazine.org/nasty-geometry-breaks-decades-old-tiling-conjecture-20221215/

[15] http://www.science.smith.edu/ senechal/

[16] https://link.springer.com/article/10.1007/BF02985414

[17] https://www.quantamagazine.org/marjorie-rices-secret-pentagons-20170711/

[18]https://fulbright.uark.edu/departments/math/directory/index/uid/strauss/name/Chaim+Goodman-strauss/

[19] https://www.polyomino.org.uk/

[20] https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/1385725881900172?via%3Dihub

[21] https://arxiv.org/abs/2305.17743

LỊCH SỬ CỦA GIẢ THUYẾT WEIL*

J. A. DIEUDONNÉ

(Người dịch: Phạm Khoa Bằng)

Câu chuyện của "các giả thuyết Weil" là một ví dụ kỳ diệu của trí tưởng tượng toán học, và là một trong những thí dụ đáng ngạc nhiên nhất biểu lộ sự thống nhất cơ bản của toán học. Những ý tưởng cốt lõi dẫn tới chứng minh của chúng tới từ sáu người: E. Artin, F. K. Schmidt, H. Hasse, A. Weil, A. Grothendieck, và P. Deligne, trong khoảng năm mươi năm (1923 – 1973).

1. Số nghiệm của phương trình đồng dư

Một cách đủ thích hợp, câu chuyện, như mọi vấn đề trong lý thuyết số, bắt đầu từ Gauss. Trong công trình về luật thuận nghịch bình phương của mình, ông đưa ra cái ngày nay được gọi là tổng Gauss (phổ biến nhất là tổng $\sum_{x=0}^{p-1}\exp(2\pi i x^2/p)$ với p nguyên tố); để tính các tổng này, bằng một số lập luận sơ cấp, ông suy ra cần tính số nghiệm của các phương trình đồng dư có các dạng

$$
\begin{aligned}
&ax^3 - by^3 \equiv 1 \pmod p,\\
&ax^4 - by^4 \equiv 1 \pmod p, \qquad (1)\\
&y^2 \equiv ax^4 - 1 \pmod p
\end{aligned}
$$

trong đó a, b là các số nguyên cố định không chia hết cho p, nghiệm (x, y) được xét theo đồng dư modulo p (như vậy các phương trình đồng dư (1) được xem như các phương trình trong trường $\mathbb{F}_p$); và p *chạy* trong một tập vô hạn các số nguyên tố; chúng ta đi tìm những biểu diễn *tiệm cận* (dưới dạng những hàm đơn giản của p) của số lượng các nghiệm. Một thời gian ngắn sau, Jacobi nhận xét rằng, ngược lại, bằng cách sử dụng các tính chất cơ bản của tổng Gauss, ta có thể thu được một đánh giá tốt về số nghiệm trong các trường hợp tổng quát hơn, ở đó các phương pháp sơ cấp trở nên cồng kềnh. Sau Jacobi, gần như không có nhiều tiến triển trong chủ đề này cho tới khi Hardy và Littlewood, trong khi nghiên cứu bài toán Waring để đưa ra các tính chất của "chuỗi kỳ dị", thấy rằng cần phải đưa ra một đánh giá tiệm cận cho số nghiệm của phương trình đồng dư

$$x_1^k + \ldots + x_r^k \equiv 0 \pmod p, \qquad (2)$$

trong đó p là một số nguyên tố chạy tới $+\infty$. Hai ông đã sử dụng phương pháp của Jacobi cho mục đích này; tổng quát hơn, năm 1949, cả Hua-Vandier và A. Weil đã độc lập chứng minh rằng phương pháp này có thể đánh giá số nghiệm N của những phương trình

$$a_0x_0^{k_0} + \ldots + a_r x_r^{k_r} = 0 \ (a_0, \ldots, a_r \neq 0) \qquad (3)$$

Xuất bản lần đầu trong: The Mathematical Intelligencer 10, Springer, Berlin Heidelberg New York (1975) và được trích lại trong [1] trong mọi *trường hữu hạn* $\mathbb{F}_q$ với $q = p^m$ phần tử; kết quả được đưa ra

$$N = q^r + O(q^{(r+1)/2}). \tag{4}$$

Kết quả tương tự được đưa ra bởi Davenport (1931) và Mordell (1933) cho các phương trình dạng $y^m = P_n(x)$ trên $\mathbb{F}_p$, trong đó P_n là một đa thức bậc n; với một số giá trị m, n nhỏ, họ thu được các đánh giá có dạng $N = p + O(p^{\phi(m,n)})$ trong đó $1/2 < \phi(m,n) < 1$.

2. Về hàm Zêta

Hãy để chúng tôi nhắc lại các tính chất cổ điển của hàm zêta Riemann: nó xác định với $\mathscr{R}(s) > 1$ bởi chuỗi $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, và thỏa mãn phương trình Euler

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \tag{5}$$

trong đó tích chạy trên tập tất cả các số nguyên tố. Riemann chứng minh rằng ζ có thể thác triển thành một hàm phân hình trên mặt phẳng phức với một cực duy nhất tại $s = 1$, và nếu đặt

$$\xi = \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s),$$

thì ξ là một hàm chỉnh hình trên toàn bộ mặt phẳng phức và thỏa mãn phương trình hàm $\xi(s) = \xi(1-s)$. Hơn nữa ông đề xuất *giả thuyết Riemann* (vẫn chưa được chứng minh) rằng mọi nghiệm của ξ nằm trên đường thẳng $\mathscr{R}(s) = 1/2$.

Một thời gian ngắn sau, Dedekind mở rộng lý thuyết của Riemann lên một trường số K (mở rộng hữu hạn của $\mathbb{Q}$), bằng cách định nghĩa $\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} (N\mathfrak{a})^{-s}$, trong đó $\mathfrak{a}$ chạy trên tất cả các ideal của vành $\mathfrak{o}$ các số đại số nguyên trong K, *chuẩn* $N\mathfrak{a}$ là số phần tử của vành $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$. Ông mở rộng công thức Euler thành

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - (N\mathfrak{p})^{-s})^{-1}, \tag{6}$$

trong đó tích chạy trên tất cả các ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$ của $\mathfrak{o}$; rất nhiều năm sau Hecke chứng minh rằng ζ_K có thể thác triển thành một hàm phân hình và thỏa mãn một phương trình hàm tương tự như phương trình hàm Riemann cho ξ.

Một cách hình thức, ta thấy rằng phương trình (6) chỉ dùng hai tính chất của vành $\mathfrak{o}$: 1) $\mathfrak{o}$ là một vành Dedekind: 2) trường $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ là hữu hạn với mọi ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$: thật vậy, nếu $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{v_1} \ldots \mathfrak{p}_r^{v_r}$ là một phân tích thành các ideal nguyên tố của ideal $\mathfrak{a}$ thì $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ đẳng cấu với tích trực tiếp của các $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i^{v_i}$, và với mọi ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$, mỗi $(\mathfrak{o}/\mathfrak{p})$–module $\mathfrak{p}^h/\mathfrak{p}^{h+1}$ đẳng cấu với $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$; điều đó chứng tỏ rằng chuẩn là nhân tính, từ đó suy ra (6) một cách hình thức (chứng minh tính hội tụ của tích vô hạn cần một số ước lượng đơn giản về số các ideal nguyên tố với chuẩn cho trước). Năm 1923, E. Artin nhận xét rằng các tính chất này đúng cho các vành định nghĩa theo cách sau: bắt đầu với một trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$, xét trường $K_0 = \mathbb{F}_q(T)$ các phân thức hữu tỷ, và một mở rộng toàn phương $K = K_0(v)$ với $v^2 = P(T)$, trong đó P là một đa thức không có nghiệm bội. Khi đó bao đóng nguyên $\mathfrak{o}$ của $\mathbb{F}_q[T]$ trong K thỏa mãn các tính chất 1) và 2), $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ là một *mở rộng hữu hạn* của $\mathbb{F}_q$ với mỗi ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$; rất dễ để chứng minh chuỗi và tích vô hạn trong định nghĩa của ζ_K hội tụ với $\mathscr{R}(s) > 1$. Hơn nữa Artin còn thấy rằng lý thuyết này đơn giản hơn của Dedekind rất nhiều, lý do là các hàm của ông có thể viết dưới dạng $Z(q^{-s})$ trong đó $Z(u)$ là một *hàm hữu tỷ* với hệ số trong $\mathbb{Q}$; phương trình hàm biểu diễn thương $Z(1/qu)/Z(u)$ bởi một hàm hữu tỷ với không điểm và cực cho trước; ông ấy sau đó giả thuyết rằng không điểm của $Z(u)$ tất cả đều nằm trên đường tròn $|u| = q^{1/2}$ và tự kiểm chứng giả thuyết này với rất nhiều đa thức P bậc nhỏ.

Bây giờ các ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$ sao cho $\mathfrak{o}/\mathfrak{p} \cong \mathbb{F}_q$ $(N\mathfrak{p} = q)$ tương ứng một-một với các đồng cấu $\mathfrak{o} \to \mathbb{F}_q$; mọi đồng cấu như vậy gửi (T,v) tới $(a,b) \in \mathbb{F}_q^2$ thỏa mãn $b^2 = P(a)$. Nói cách khác số nghiệm của phương trình $y^2 = P(x)$ trong $\mathbb{F}_q^2$ chính là số lượng N_1 các ideal nguyên tố kiểu này; tuy nhiên từ phương trình Euler (6) suy ra luôn rằng

$$\log Z(u) = N_1 u + \cdots$$

gần $u = 0$, như vậy nghiên cứu $Z(u)$ giúp ta hiểu về N_1. "Giả thuyết Riemann" của Artin sinh ra đánh giá

$$|N_1 - q| \leq c \cdot q^{1/2}, \tag{7}$$

và như vậy làm chặt hơn những kết quả trước đó của ông về bài toán đồng dư của Gauss.

3. Bước vào hình học đại số

Cho k là một trường giao hoán bất kỳ, người ta cố gắng hình dung tập nghiệm $(x_1,\dots,x_r) \in k^r$ của một phương trình $P(x_1,\dots,x_r) = 0$, với P là một đa thức bất khả quy trong $k[T_1,\dots,T_r]$ xem như một "siêu mặt đại số affine" ("đường cong" với $r = 2$, "mặt" với $r = 3$) trong "không gian affine" k^r, Hơn nữa, với mọi mở rộng trường $K \supset k$, ta có thể xét các nghiệm của $P(y_1,\dots,y_r)$ với giá trị y_i trong trường K *lớn hơn*, như vậy ta có một "siêu mặt đại số" V trong "không gian affine" K^r; việc các hệ số của P nằm trong k giờ được thay bởi việc nói V *xác định* trên k. Kinh nghiệm cho thấy việc chuyển đổi giữa ngôn ngữ hình học và trực giác sang những đa tạp "trừu tượng"chỉ có ích khi K là *đóng đại số* (hãy thử nghĩ về $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ khi $k = \mathbb{R}$). Ta sẽ hạn chế sự quan tâm xuống trường hợp $K = \overline{k}$, bao đóng đại số của k; hơn nữa, ta chỉ xét các siêu mặt V không kỳ dị trong $\overline{k}^r$, i.e. tại các điểm mà "siêu phẳng tiếp xúc" được định nghĩa duy nhất theo nghĩa thông thường (có nghĩa là tất cả các đạo hàm riêng không đồng thời triệt tiêu trong V). Với mọi điểm $x = (x_1,\dots,x_r) \in V$, toạ độ x_i nằm trong $\overline{k}$, do đó có một mở rộng hữu hạn nhỏ nhất $k(x)$ của k chứa tất cả x_j và $[k(x):k] = \deg(x)$ được gọi là *bậc* của điểm x. Nếu $\mathfrak{m}$ là hạt nhân của đồng cấu $k[T_1,\dots,T_r] \to \overline{k}$ gửi mỗi T_i tới x_i thì $\mathfrak{m}$ là một ideal cực đại của $k[T_1,\dots.,T_r]$ và $k[T_1,\dots,T_r]/\mathfrak{m}$ đẳng cấu với $k(x)$; ta viết $k(\mathfrak{m}) = k(x)$ và $\deg(\mathfrak{m}) = \deg(x)$; có thể chứng minh rằng mọi ideal cực đại $\mathfrak{m}$ của $k[T_1,\dots,T_r]$ chứa $P(T_1,\dots,T_r)$ ứng với một điểm x của V với bậc $\deg(\mathfrak{m})$.

Khi $k = \mathbb{F}_q$, đặt

$$Z_V(u) = \prod_{P \in \mathfrak{m}} (1 - u^{\deg(\mathfrak{m})})^{-1}; \tag{8}$$

hàm $Z(u)$ định nghĩa bởi E. Artin bằng với hàm $Z_C(u)$, trong đó C là "đường cong affine" $x_2^2 - P(x_1) = 0$ xác định trên $\mathbb{F}_q$. Một cách tổng quát ta gọi Z_V là *hàm zêta* của V. Các điểm của V trong $(\mathbb{F}_q)^r$ là các điểm mà $\deg(x)$ là ước của n; hiển nhiên số lượng các điểm như vậy $\leq q^{nr}$, như vậy số lượng các ideal cực đại $\mathfrak{m}$ mà $P \in \mathfrak{m}$, tương ứng với các điểm này, có ước lượng *tiên nghiệm* $\leq q^{nr}$, điều này chứng tỏ rằng (8) hội tụ với u nhỏ; hơn nữa, với u nhỏ ta có thể viết

$$\begin{aligned} uZ_V'(u)/Z_V(u) &= \sum_{P \in \mathfrak{m}} \frac{\deg(\mathfrak{m}) u^{\deg(\mathfrak{m})}}{1 - u^{\deg(\mathfrak{m})}} \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{P \in \mathfrak{m}} \deg(\mathfrak{m}) u^{v\deg(\mathfrak{m})} \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} N_v u^v \end{aligned} \tag{9}$$

trong đó N_v là số điểm của V trong $(\mathbb{F}_{q^v})^r$.

Cách định nghĩa này có thể mở rộng cho các dạng đa tạp không kỳ dị khác, không nhất thiết phải bị nhúng trong "không gian affine" $\overline{k}^r$. Nói một cách theo lịch sử, ngôn ngữ của hình học đại số trong lý thuyết của các hàm zêta được giới thiệu vào năm 1931 bởi F. K. Schmidt, người nghiên cứu các *đường cong xạ ảnh* không kỳ dị trên trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$. Ông chứng minh rằng lý thuyết Dedekind–Weber của đường cong đại số trên $\mathbb{C}$ (bao gồm định nghĩa về giống và định lý

Riemann–Roch) có thể mở rộng cho đường cong xạ ảnh trên một trường đóng đại số $\overline{k}$ bất kỳ; điều này cho phép ông chứng minh rằng với mọi đường cong xạ ảnh không kỳ dị C với giống g định nghĩa trên $\mathbb{F}_q$, hàm zêta có thể biểu diễn dưới dạng

$$Z_C(u) = P_{2g}(u)/(1-u)(1-qu) \qquad (10)$$

trong đó tử số là một đa thức bậc $2g$ với hệ số nguyên và ta có một phương trình hàm

$$Z_C(1/qu) = (qu^2)^{1-g} Z_C(u). \qquad (11)$$

"Giả thuyết Riemann" cho C do đó nói rằng các không điểm của P_{2g} nằm trên đường tròn $|u| = q^{1/2}$; dễ thấy điều này tương đương với bất đẳng thức

$$|N_\nu - q^\nu - 1| \leq 2g \cdot q^{1/2} \text{ với mọi } \nu \geq 1. \qquad (12)$$

4. Mơ mộng về Tôpô đại số

Quay lại trường hợp siêu mặt V trong $(\overline{\mathbb{F}}_q)^r$, nhận xét rằng các phần tử của $\overline{\mathbb{F}}_q$ thuộc $\mathbb{F}_{q^n}$ chính là những phần tử mà $t^{q^n} = t$. Xét ánh xạ

$$\Phi : (x_1, \ldots, x_r) \mapsto (x_1^q, \ldots, x_r^q)$$

từ $(\overline{\mathbb{F}}_q)^r$ vào chính nó. Do hệ số của P nằm trong $\mathbb{F}_q$, do đó thỏa mãn $t^q = t$, ta có

$$P(\Phi(x)) = (P(x))^q,$$

do đó Φ ánh xạ V lên chính nó; hạn chế của Φ lên V được gọi là cấu xạ Frobenius của V. Năm 1936, Hasse nhận thấy rằng với một đường cong C, số N_ν chính là số điểm $x \in C$ thỏa mãn $\Phi^\nu(x) = x$; i.e. x là một *điểm bất động* của Φ^ν. Bây giờ, chúng ta hãy bỏ qua chuỗi các sự kiện mang tính niên đại mà giả vờ rằng ta đang làm việc với các đa tạp đại số không kỳ dị "cổ điển" X trong một không gian xạ ảnh phức. Từ thời của Picard và Poincaré người ta đã nhận thấy rằng hầu hết các tính chất của các đa tạp đại số được liên hệ chặt chẽ với các tính chất *đồng điều*. Trong phiên bản hiện thời (chủ yếu từ các công trình của Lefschetz và Hodge), với một đa tạp xạ ảnh không kỳ dị bất khả quy X chiều d trên $\mathbb{C}$ (do đó là một đa tạp khả vi chiều $2d$), các tính chất này xoay quanh *đại số đối đồng điều* $H^\bullet(X) = \bigoplus_i H^i(X)$ của X trên trường K với *đặc số* 0; nó là một đại số phân bậc trên K, thỏa mãn các tính chất sau:

(A) 1. Mỗi $H^i(X)$ là một K–không gian vector hữu hạn chiều, bằng 0 ngoại trừ $0 \leq i \leq 2d$;

2. Tồn tại một đẳng cấu tự nhiên $H^{2d}(X) \xrightarrow{\sim} K$, và với mỗi i, phép nhân trên $H^\bullet(X)$ cho ta một phép ghép cặp không kỳ dị $H^i(X) \times H^{2d-i}(X) \to H^{2d}(X) \xrightarrow{\sim} K$ (đối ngẫu Poincaré) cho phép ta đồng nhất $H^{2d-i}(X)$ với

$$H_i(X) = \mathrm{Hom}_K(H^i(X), K),$$

đồng điều của K tại chiều i.

3. Với các đa tạp không kỳ dị X, Y, tồn tại một đẳng cấu tự nhiên của các đại số phân bậc

$$H^\bullet(X) \otimes H^\bullet(Y) \cong H^\bullet(X \times Y)$$
(công thức Kunneth).

(B) Mọi cấu xạ $f : X \to X$ định nghĩa tự nhiên, với mỗi i, một đồng cấu tuyến tính $f^{(i)} : H^i(X) \to H^i(X)$, sao cho các $f^{(i)}$ với $0 \leq i \leq 2d$ cảm sinh một đồng cấu $f^\bullet : H^\bullet(X) \to H^\bullet(X)$ của các đại số phân bậc. Các *điểm bất động* của f là phép chiếu lên X của giao của đồ thị Γ của f và đường chéo Δ của $X \times X$; nếu Γ giao *hoành* với Δ tại mỗi điểm (nghĩa là các không gian tiếp xúc của chúng có giao chỉ là một điểm), số lượng điểm bất động của f được tính bởi *công thức vết Lefschetz*

$$N = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \mathrm{Tr}(f^{(i)}). \qquad (13)$$

(C) Nếu Y là một đa tạp con không kỳ dị của X với chiều $d-1$, các ánh xạ tuyến tính tự nhiên $H^i(X) \to H^i(Y)$ là song ánh với $i \leq d-2$ và đơn ánh với $i = d-1$.

(D) Lấy $h \in H^2(X)$ từ đối ngẫu Poincaré ứng với lớp đồng điều trong $H_{2d-2}(X)$ của một lát cắt siêu phẳng của X, và xét $L : a \to ha$ là phép nhân trái bởi h trong $H^\bullet(X)$; khi đó $L^{d-i} : H^i(X) \to H^{2d-i}(X)$ là một đẳng cấu với $i \leq d$.

Một lập luận đại số đơn giản cho thấy nếu một cấu xạ $f : X \to X$ thỏa mãn $f^{(2)}(h) = q \cdot h$ với $q > 0$ là một số hữu tỷ, và nếu $g_i = q^{-i/2} f^{(i)}$ (xem như một tự đồng cấu của $H^i(X) \otimes_K \overline{K}$), g_i là song ánh, và g_i^{-1} được đồng nhất với ${}^t g_{2d-i}$ bởi đối ngẫu Poincaré. Điều này suy ra rằng nếu α_{ij} là các giá trị riêng của $f^{(i)}$ trong $\overline{K}$, tập các phần tử $q^{i/2}\alpha_{ij}$ trùng với tập các phần tử $\alpha_{2d-i,j}/q^{d-(i/2)}$.

(E) Trong mỗi $H^i(X)$ với $i \leq d$ có một không gian con $A^i(X)$ ổn định dưới tác động của $f^{(i)}$ với mọi cấu xạ $f : X \to X$, và trên mỗi $A^i(X)$, ta có thể trang bị một cấu trúc không gian vector trên trường các số hữu tỷ cùng một *tích vô hướng* không kỳ dị, sao cho: với mỗi f thỏa mãn (D) thì mỗi g_i là ánh xạ *unita* với tích vô hướng này; điều này suy ra tất cả các giá trị riêng của $f^{(i)}$ (là các phần tử của $\overline{\mathbb{Q}}$) có giá trị tuyệt đối là $q^{1/2}$.

Quay lại với siêu mặt V xác định trên $\mathbb{F}_q$, *giả sử* ta có thể gán với nó một đại số phân bậc $H^\bullet(V)$ có tất cả các tính chất vừa nêu, hơn nữa $\Phi^{(2)}(h) = q \cdot h$ trong đó Φ là đồng cấu Frobenius. Dễ thấy đồ thị của Φ^ν giao hoành với Δ; do đó, nếu α_{ij} là các giá trị riêng của $(\Phi^\nu)^{(i)}$, số N_ν có thể cho bởi công thức

$$N_\nu = \sum_i (-1)^i \sum_j \alpha_{ij}^\nu; \qquad (14)$$

và do đó ta có (với $d = r-1 = \dim(V)$)

$$Z_V(u) = \frac{P_1(u)P_3(u)\ldots P_{2d-1}(u)}{P_0(u)P_2(u)\ldots P_{2d}(u)} \qquad (15)$$

trong đó $P_i(u) = \deg(1 - u\cdot\Phi^{(i)})$ là một đa thức với hệ số nguyên. Nói riêng, $Z_V(u)$ là một hàm *hữu tỷ*; hơn nữa $Z_V(1/q^d u)$ nên có không điểm và cực giống với $Z_V(u)$ ngoại trừ khi $u = 0$, và ta nên có $|\alpha_{ij}| = q^{1/2}$. Cuối cùng, nếu tất cả hệ số của V là các lớp đồng dư mod p của các số nguyên, hệ số của một phương trình của một đa tạp không kỳ dị V_0 trong $\overline{\mathbb{Q}}^r$, bậc của mỗi P_i sẽ bằng số Betti thứ i của V_0.

Các phát biểu trên là *các giả thuyết Weil* cho Z_V.

5. Những "phương án thay thế" cho đối đồng điều của Hasse và Weil

Để hiểu tại sao Weil đã có thể đi tới những khái niệm táo bạo như vậy, ta phải quay lại những ý tưởng đầu tiên của Hasse trong việc chứng minh "giả thuyết Riemann" cho các đường cong *giống* 1 trên $\mathbb{F}_q$. Trong lý thuyết cổ điển của các đường cong không kỳ dị trên trường số phức, mỗi đường cong C được gán với *jacobian* $J = J(C)$, có thể xem như đối ngẫu Pontrjagin của nhóm đồng điều $H_1(C,\mathbb{Z})$; đối ngẫu này được dẫn ra từ dạng song tuyến tính $(\gamma,\omega) \mapsto \int_\gamma \omega$ định nghĩa trên các chu trình γ và các dạng vi phân abel chỉnh hình ω trên diện Riemann C ("chu kỳ" của ω trên γ). Nếu C có giống g thì $J(C)$ là một xuyến phức $\mathbb{C}^g/\Delta$ trong đó Δ là một nhóm con rời rạc với hạng $2g$, thỏa mãn các điều kiện song tuyến tính Riemann cổ điển. Ta có thể định nghĩa J một cách đại số, bằng cách xét các nhóm cộng G/G_i của các lớp của các ước bậc 0 trên C, modulo quan hệ tương đương tuyến tính: ta gắn mỗi ước D bậc 0, vốn có thể viết dưới dạng $\partial\gamma$ với 1-xích γ trên diện Riemann, một lớp $\phi(D)$ trong $\mathbb{C}^g/\Delta$ của vector $\left(\int_\gamma \omega_1, \ldots \int_\gamma \omega_g\right)$, trong đó các ω_j lập thành một cơ sở của không gian các dạng vi phân chỉnh hình; định lý Abel-Jacobi nói rằng phép tương ứng này là toàn ánh và có hạt nhân G_i. Từ đó có thể trang bị cho J một cấu trúc *nhóm đại số* (một trường hợp cụ thể của nhóm đại số trên $\mathbb{C}$ được biết đến như *các đa tạp abel*) với sự giúp đỡ của các điều kiện (siêu việt) song tuyến tính Riemann. Cuối cùng, nếu x_0 là một điểm trên C,

$$x \mapsto \phi((x)-(x_0))$$

là một cấu xạ từ C vào J và là đẳng cấu nếu $g=1$.

Phương pháp đầu tiên của Hasse để làm việc với các đường cong C giống 1 xác định trên $\mathbb{F}_q$ là "nâng" C thành một đường cong C_0 "cổ điển" giống 1 xác định trên trường các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$: nếu E là trường các hàm hữu tỷ trên C, ông chứng minh rằng ta có thể xác định C_0 sao cho, nếu ω_1, ω_2 là các hàm chu kỳ của các hàm elliptic ứng với C_0 (nên trường E_0 của các hàm này là trường các hàm hữu tỷ trên C_0), ω_1/ω_2 phải sinh ra một trường toàn phương ảo K trên $\mathbb{Q}$, và E sẽ là trường thặng dư của vành các số nguyên của K modulo một ideal nguyên tố khéo chọn nào đó. Hasse từ đó đã có thể dùng các kết quả cổ điển về "các phép nhân phức" của C_0 (i.e. tự đồng cấu của jacobian $J(C_0)$) để xác định số điểm của C với bậc 1, và chứng minh "giả thuyết Riemann" cho C.

Một thời gian ngắn sau, Hasse từ bỏ phương pháp trên và thay thế bằng một phương pháp có tính nội tại hơn: như đã nói ở trên, $J(C)$ có thể định nghĩa một cách đại số như một nhóm "trừu tượng", và cấu xạ Frobenius định nghĩa tự nhiên một tự đồng cấu của nhóm đó; Hasse chứng minh rằng tử số của hàm zêta Z_C trong (10) (trong trường hợp này là một đa thức bậc 2) được đồng nhất với đa thức đặc trưng của tự đồng cấu đó. Công cụ mà ông giới thiệu cho mục đích này là một số nguyên $\nu(\lambda)$ gắn với mỗi tự toàn cấu λ của $J(C)$: nếu E là trường các hàm hữu tỷ của C, λ định nghĩa một "đối cấu xạ" (comorphism) $R(\lambda)$, một tự đẳng cấu của E và $\nu(\lambda)$ là bậc $[E : R(\lambda)(E)]$, hữu hạn khi λ là toàn cấu. Hasse chứng minh rằng với mọi số nguyên a, b thì

$$\nu(a.1+b.\lambda) = a^2+\sigma(\lambda)ab+\nu(\lambda)b^2$$

với mọi tự toàn cấu λ của $J(C)$, tính xác định dương của dạng toàn phương này cho ông chứng minh của "giả thuyết Riemann".

Việc mở rộng những ý tưởng này cho các đường cong C giống g bất kỳ trên $\mathbb{F}_q$ là không hề hiển nhiên: lý thuyết cổ điển chứng minh rằng $J(C)$ nên là một nhóm đại số g chiều (thay vì đẳng cấu với C như một đa tạp đại số trong trường hợp của Hasse), và cho tới tận năm 1940 không ai mở rộng lý thuyết của các nhóm đại số trên trường đặc số $p>0$ sang hình học đại số, và nói riêng lý thuyết của các đa tạp abel. Điều này đã được thực hiện một mình bởi A. Weil, người đầu tiên phải phát triển, trong cuốn sách nổi tiếng *Foundations of algebraic geometry*, các tính chất cơ bản của các số giao một cách độc lập mà không viện tới tôpô đại số. Sau đó ông đã có thể nghiên cứu cấu trúc vành của các tự đồng cấu của một đa tạp abel A; với mọi tự toàn cấu λ của A, Weil định nghĩa số nguyên $\nu(\lambda)$ như Hasse, (bây giờ E là trường các hàm hữu tỷ trên A) và lần này chứng minh

$$\begin{aligned}&\nu(a\cdot 1+b\cdot\lambda)\\&=a^{2g}+\sigma(\lambda)a^{2g-1}b+\ldots+\nu(\lambda)b^{2g}.\end{aligned}$$

Bất biến $\sigma(\lambda)$ được xem như một "thay thế" đóng vai trò của $\mathrm{Tr}(f^{(1)})$ khi λ là tự đồng cấu của $J(C)$ ứng với một cấu xạ f của C. Một "thay thế" cho đối ngẫu Poincaré được phát hiện trong một đối ngẫu tổng quát cho các đa tạp abel mà có thể định nghĩa nghĩa hoàn toàn đại số (trong trường hợp cổ điển người ta định nghĩa nó bởi đối ngẫu Pontrjagin); cuối cùng, nếu λ' là "chuyển vị" của một tự đồng cấu λ trong đối ngẫu này thì ta có thể chứng minh $\sigma(\lambda\lambda')>0$ với $\lambda\neq 0$, tính chất này (xem như một "thay thế" cho tính xác định dương của tích vô hướng Hodge) cho phép Weil đưa ra chứng minh của "giả thuyết Riemann" cho đường cong có giống bất kỳ.

Trong tất cả các công trình này, Weil đã không ngừng giữ trong trí óc ông lý thuyết cổ điển của các "tương ứng" phát triển bởi Hurwicz: một tương ứng trên C có thể xem như một cấu xạ "đa trị", mà cụ thể hơn như một đường cong Γ trên diện $C \times C$; tốt hơn nữa, nó được định nghĩa như một ước (tổ hợp tuyến tính của các đường cong) trên $C \times C$. Một tương ứng Γ gắn một cách tự nhiên (bắt chước phiên bản lý thuyết tập hợp) mỗi ước D trên C (tổ hợp tuyến tính của các điểm) một ước khác $\Gamma(D)$, một lần nữa điều này định nghĩa một tự đồng cấu của $J(C)$; ngược lại có thể chỉ ra rằng mọi tự đồng cấu của $J(C)$ đều thu được từ cách định nghĩa này. Trong trường hợp cổ điển, công thức Lefschetz (13) có thể được mở rộng để cho số giao của một tương ứng Γ với "tương ứng đồng nhất", i.e. đường chéo Δ của $C \times C$, và thực tế điều này đã được chứng minh bởi Hurwicz vào năm 1866, sử dụng lý thuyết tích phân abel; sự thật là Weil đã có thể chứng minh một công thức tương tự bằng các công cụ thuần túy đại số, điều đã dẫn ông đến chỗ đề xuất các giả thuyết mang tên mình.

6. Đối đồng điều étale và định lý của Deligne

Sử dụng kết quả của mình cho các đường cong, Weil đã chứng minh được các giả thuyết của chính ông với các siêu mặt dạng (3), cũng như cho những đa tạp khác như các đa tạp Grassman. Nhưng tại thời điểm đó không có một lý thuyết đối đồng điều nào đủ "tốt" đã được định nghĩa. Khoảng năm 1953, Cartan và Serre đã dùng đối đồng điều Leray với hệ số là các bó như một công cụ cực kỳ hữu hiệu để nghiên cứu các đa tạp phức, và Serre đã chỉ ra làm cách nào để chuyển các kỹ thuật này sang các đa tạp đại số trên một trường đóng đại số với đặc số p. Nhưng khi $p > 0$, những nhóm đối đồng điều mới đó được định nghĩa hiển nhiên không thể được sử dụng bởi công thức Lefschetz (13), trong đó vế trái bắt buộc phải là một số nguyên, mà không phải một phần tử của một trường có đặc số p. Chỉ sau khi Grothendieck xây dựng lý thuyết lược đồ mà, từ một lưu ý của Serre, thì cậu ấy đã có thể mở rộng ý tưởng ban đầu theo cả hai hướng "tôpô" và "bó", gắn mỗi đa tạp (hoặc lược đồ) X một đại số đối đồng điều $H^\bullet(X_{et}, \mathbb{Q}_l)$ trên trường l–adic $\mathbb{Q}_l$, trong đó l là một số nguyên tố khác với đặc số của trường ban đầu (sự can thiệp của các trường l–adic trong những câu hỏi này đã được nhận ra bởi Weil và Deuring).

Độ sâu sắc và phức tạp của các kỹ thuật liên quan trong định nghĩa của "đối đồng điều étale" $H^\bullet(X_{et})$ như thể để loại trừ mọi khả năng trong việc đưa ra bất kỳ một chi tiết nào nữa trong định nghĩa của nó. Hãy để chúng tôi chỉ ra Grothendieck (với sự giúp đỡ của M. Artin (con trai của E. Artin) và J. L. Verdier) đã có thể chứng minh các tính chất (A), (B), (C) [1] ở trên và gần đây Deligne đã chứng minh (D) cũng đúng với mọi đa tạp trên một trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$; tuy nhiên không một tính chất nào tương tự như (E) đã được chứng minh cho đối đồng điều étale (hoặc bất kỳ một lý thuyết đối đồng điều nào được đưa ra gần đây). Các tính chất (A), (B), (C) là đủ để chứng minh (15), cũng như phương trình hàm

$$Z_V(1/q^d u) = \pm q^{n\chi/2} u^\chi Z_V(u)$$

trong đó

$$\chi = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \dim H^i(X_{et}, \mathbb{Q}_l).$$

Tuy nhiên, chỉ đến gần đây người ta mới biết rằng các hệ số của P_j trong (15) là độc lập với số nguyên tố l. Điều này cuối cùng cũng được chứng minh bởi Deligne năm 1973,

[1] *Trước khi đối đồng điều l–adic được định nghĩa, Dwork đã chứng minh, bằng cách khéo léo sử dụng các hàm giải tích p–adic, rằng hàm zêta $Z_V(u)$ là hữu tỷ.*

cùng với phần cuối và khó nhất của các giả thuyết Weil là $|\alpha_{ij}| = q^{1/2}$.

Ở đây lần nữa, cần nhớ rằng không thể mô tả một cách chi tiết các chứng minh cực kỳ khéo léo, điều này hơi khác với chứng minh của Hasse và Weil, do nó không thể dựa trên một lập luận "tính dương". Ta hạn chế bài toán xuống trường hợp $i = d$ (i.e. đối đồng điều "trung tâm" $H^d(X)$); việc chứng minh rằng $|\alpha_{dj}| = q^{d/2}$ thì tương đương với

$$q^{(d-1)/2} \leq |\alpha_{dj}| \leq q^{(d+1)/2} \tag{18}$$

bởi vì nếu ta áp dụng kết quả này với tích X^k, và sử dụng công thức Kunneth, ta có

$$q^{(kd-1)/2} \leq |\alpha_{dj}^k| \leq q^{(kd+1)/2}$$

sau đó cho k tiến tới $+\infty$ và thu được kết quả. Thậm chí trong (18) ta có thể giả sử là d chẵn và sau đó có thể chứng minh bằng quy nạp theo số chẵn d; đây là một bước sâu sắc và khó trong chứng minh, dựa trên kỹ thuật "đơn đạo" cũ từ Picard và Lefschetz: kỹ thuật này hoàn toàn mang tính tôpô trong trường hợp cổ điển, nhưng nó cũng đã được chuyển sang đối đồng điều étale bởi Grothendieck và những người cùng trường phái của cậu ấy.

Như thường thấy trong toán học, sự đột phá này mở ra một con đường trong việc khai phá các vấn đề mới; nhưng chừng nào bài toán ban đầu của Gauss còn được quan tâm, nó là điểm cuối của vấn đề, vì định lý của Deligne suy ra rằng, số các điểm bậc 1 của một siêu mặt xạ ảnh không kỳ dị d chiều thỏa mãn đánh giá

$$\left| N - (1 + q + \ldots + q^d) \right| \leq b q^{d/2}$$

trong đó thậm chí hằng số b có thể tính cụ thể: nó là số Betti thứ d của các siêu mặt trên $\mathbb{C}$ có cùng bậc với V.

Tài liệu tham khảo

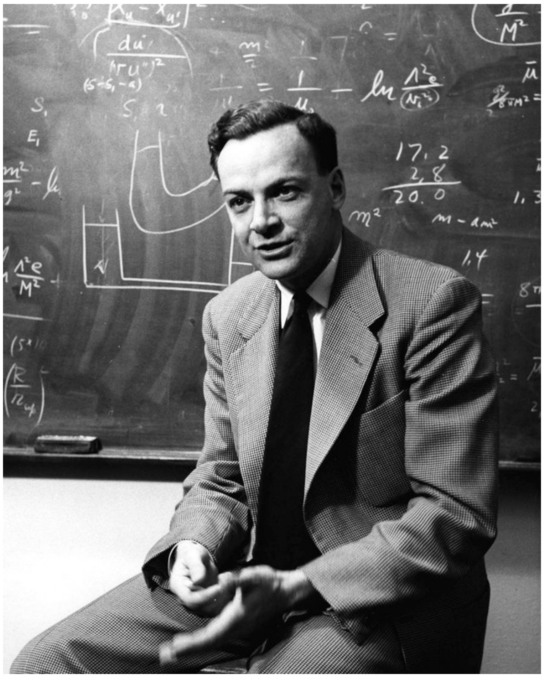
[1] Eberhard Freitag and Reinhardt Kiehl. *Étale cohomology and the Weil conjecture*, volume 13 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer–Verlag, Berlin, 1988. Translated from the German by Betty S. Waterhouse and William C. Waterhouse, With an historical introduction by J. A. Dieudonné.

ĐAM MÊ NHƯ FEYNMAN

NGUYỄN VĂN LIỄN[1]

Richard Feynman (1918 – 1988, Mỹ) nổi tiếng là người trung thực không khoan nhượng và đam mê đến tận cùng. Về tính trung thực, người ta hay nhắc đến vụ ông trình diễn trực tiếp trên TV một "thí nghiệm nhỏ", bỏ vòng cao su vào cốc nước đá, minh chứng rằng cao su mất tính đàn hồi ở nhiệt độ thấp, qua đó chỉ ra nguyên nhân dẫn đến thảm họa tàu vũ trụ con thoi "Challenger", vạch trần chiến dịch tung hỏa mù của NASA về nguyên nhân của thảm họa này. Để công bố với người dân Mỹ sự thật ấy, Feynman đã phải vượt qua sức ép khủng khiếp từ các cơ quan công quyền Mỹ, trong đó có CIA và NASA.

Feynman lắm đam mê. Đam mê vật lý, Feynman nhận giải Nobel Vật lý năm 1965. Đam mê chơi trống, vở ba–lê do ông đệm trống nhận giải nhất trong cuộc thi ba–lê toàn nước Mỹ và giải nhì trong cuộc thi quốc tế tại Paris. Đam mê vẽ, ông đã có triển lãm tranh riêng. Không rõ ông biết những ngôn ngữ nào, chỉ biết thăm Brazil ông dạy bằng tiếng Bồ, thăm Nhật ông giao du bằng tiếng Nhật. Rồi có lần bạn bè định "cho ông một vố", họ nhờ một cô Hoa kiều đón tiếp ông bằng tiếng Trung, Feynman đáp lại và cô ấy kêu trời, vì ông nói tiếng Quảng Đông, còn cô chỉ nói tiếng Bắc Kinh. Rất nhiều "đam mê" kiểu như vậy được kể trong cuốn "Feynman, chuyện thật như đùa" (NXB Trẻ) và hầu như tất cả đều có kết cục mỹ mãn, kiểu như giải Nobel. Có thể bạn nghĩ chắc ông này "con nhà nòi", học "trường quốc tế" từ nhỏ! Xin thưa, bố của Feynman là người bán rong bán quần áo, còn mẹ thì nội trợ.



Richard Feynman (ảnh từ bộ sưu tập của Viện Công nghệ California – CalTech).

Ông chơi trống bongo cực giỏi, nhưng chưa bao giờ học nhạc lý. Ông vốn vẽ rất kém, tự nhận chẳng thể vẽ nổi cái gì ngoại trừ cái kim

[1] *Viện Vật lý.*

tự tháp chỉ gồm mấy đường thẳng. Để học vẽ, Feynman "đổi công" với một họa sỹ: ông dạy vật lý cho họa sỹ còn họa sỹ dạy vẽ cho ông. Hãy tưởng tượng một giáo sư nổi tiếng thế giới ngồi trong lớp vẽ cùng các cháu 8 – 9 tuổi học cách gọt bút chì. Đam mê như thế chỉ có ở Feynman. Và, với ông đam mê chính là nguồn cội của thành công, chứ chẳng phải "con nhà nòi" hay "trường quốc tế" nào cả. Tiền bạc và chứng chỉ đầy người, mà không đam mê gì, thì làm sao có thành quả!

Feynman chơi trống bên con trai (ảnh từ Internet).

Duy có đam mê cuối cùng, Feynman đã không kịp nhìn thấy những gì mình muốn, trước khi về cõi vĩnh hằng. Đó là "Cuộc phiêu lưu cuối cùng của Feynman"[2]. Cuộc phiêu lưu khởi đầu bằng một con tem có xuất xứ từ một nơi gọi là Tannu Tuva, mà Feynman có được từ khi còn nhỏ. Cái tên "Tuva" xa lạ nằm yên trong đầu Feynman, cho đến một ngày hè 1977 nó trở thành mục tiêu cho "cuộc phiêu lưu" kéo dài hơn 10 năm cuối của cuộc đời ông. Tôi cược là nhiều bạn chưa biết Tuva là địa danh nào và ở đâu. Để đỡ tra cứu, xin "bật mí" ngay: đó là tên một quốc gia nhỏ nằm giáp phía Tây Bắc của Mông Cổ, vốn độc lập, nhưng đã sáp nhập vào Liên Xô cũ (và Nga ngày nay). Thủ đô của Tuva là Kyzyl. Tuva có gì đặc biệt mà khiến Feynman mê mệt đến vậy?

Bạn có biết đâu là trọng tâm của châu Á (lục địa thôi chứ không tính các đảo)? Lấy tấm bìa cứng phẳng, vẽ lên đó bản đồ châu Á, cắt theo đường biên để được miếng bìa hình châu Á lục địa. Dùng một chiếc bút đầu nhọn chống phía dưới tấm bìa, di di đầu bút, để tìm vị trí mà tấm bìa nằm cân bằng trên chiếc bút thẳng đứng. Vị trí đó rơi vào Kyzyl, trọng tâm của châu Á. Tất nhiên, các nhà khoa học xác định điểm này bằng các phương pháp chính xác hơn, và ngày nay ở Kyzyl có tấm bia lớn khẳng định vị trí đặc biệt của thành phố này. Nhưng, chỉ chừng ấy thì không đủ để Feynman mất tới cả chục năm tìm cách tới thăm Tuva.

Feyman vẽ Hans Bethe (giải Nobel Vật lý 1967).

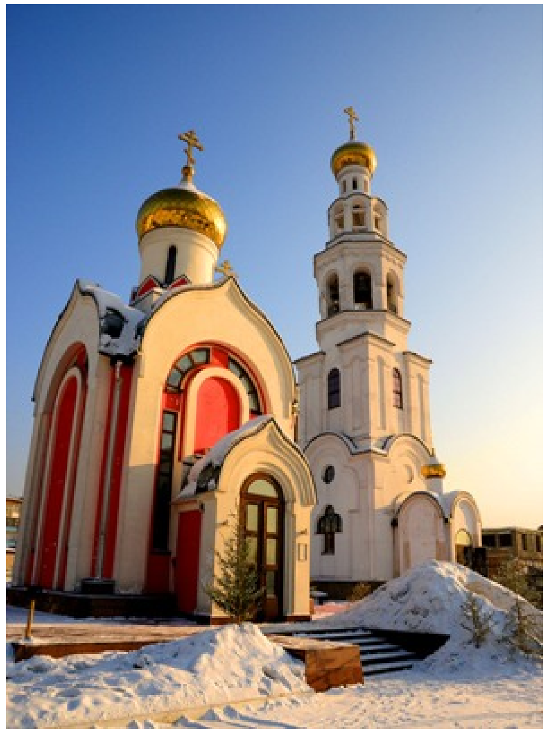
Cái chính là ở quốc gia tí xíu bao bọc bởi những dãy núi cao ấy, thời gian gần như ngừng trôi: tất cả vẫn nguyên sơ như 500 hay 1000 năm trước. Thảo nguyên hoang dại. Những đàn tuần lộc hay bò Tây Tạng cũng dường như hoang dại. Cuộc sống du mục không thể tự nhiên hơn. Một nền văn

---

[2] *Xem thêm: Cuộc phiêu lưu cuối cùng của Feynman, in lần 2, NXB Trẻ, 2023.*

hóa xa xưa và kỳ thú với kiểu hát hai giọng chỉ có ở Tuva, với thứ văn tự không thể tìm thấy trong bất cứ tự điển nào, với các tập tục rất lạ điều hành bởi các tù trưởng uy nghi và bí ẩn v.v. Tiếc là ít người biết Tuva, chứ không, người ta đã gọi quốc gia này là "Thảo nguyên Xanh" cuối cùng của hành tinh Trái Đất (như Congo là Hành tinh Xanh cuối cùng). Đam mê Tuva, Feynman tìm đọc mọi tài liệu về Tuva, tìm hiểu văn tự Tuva, học cách hát của dân du mục Tuva, ăn mặc và trang trí như tù trưởng Tuva ...Và, nhất là, ông tìm mọi cách để có thể đến thăm Tuva.

Đó là thời Chiến tranh Lạnh, lại nghe nói, gần Tuva có một cơ sở nghiên cứu bom nguyên tử, nên nơi đây là "vùng cấm" với khách du lịch, nhất là khách nước ngoài. Thực ra, Viện Hàn lâm Khoa học Liên Xô sẵn sàng mời Feynman sang Moscow đọc bài giảng rồi đi "tham quan Kyzyl" theo kiểu mặc com–lê ở khách sạn có người bảo vệ v.v. Nhưng Feynman không thích như vậy, mà muốn tự mình mang ba–lô đến thảo nguyên, ngủ lều, uống sữa tuần lộc và hát hai giọng cùng dân bản xứ. Ấy thế cho nên ông mất cả chục năm tìm kiếm một giấy mời như mình muốn. Và, đầu tháng Ba 1988, một giấy mời như thế đã gửi đến địa chỉ của Feynman, chỉ tiếc là hai tuần trước đó, vào ngày 15 tháng Hai, ông đã ra đi mãi mãi, nên chỉ có thể trải nghiệm "Cuộc phiêu lưu cuối cùng" của mình trong tâm trí và trái tim của những người ở lại. Không rõ, ở Thế giới bên kia Feynman đang đam mê gì?

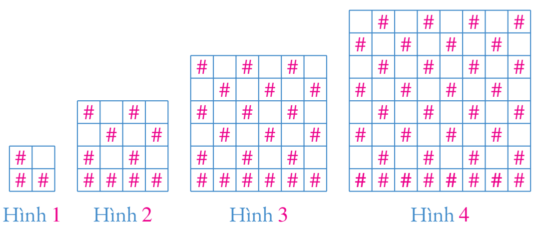


Nhà thờ Phục sinh ở Kyzyl, Tuva (ảnh từ Internet).

ĐỀ THI TUYỂN SINH NĂM 2023-2024 CÂU LẠC BỘ TOÁN HỌC UNICORN MATCH CIRCLE (Phần II)

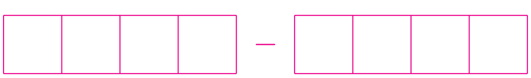
Trong số này, tạp chí Pi tiếp tục giới thiệu đến với bạn đọc đề thi tuyển sinh năm $2023-2024$ dành cho các bạn học sinh lớp 5. Các bạn có thể thử sức làm của mình trong khoảng thời gian 90 phút.

Bài 1. Dựa vào quy luật, hãy cho biết có bao nhiêu dấu thăng trong hình thứ tám của dãy hình sau.

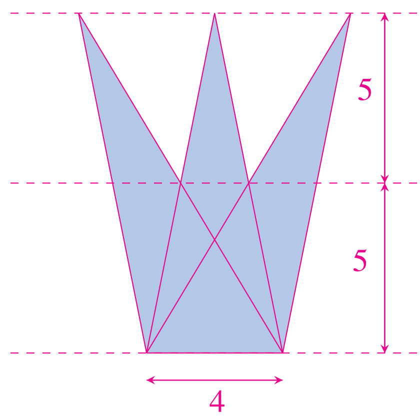


Bài 2. Bạn Tâm xếp các số $0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3$ vào các ô vuông trong hình dưới đây (mỗi ô một số) để tạo thành phép trừ của hai số có 4 chữ số. Hỏi hiệu nhận được lớn nhất có thể là bao nhiêu?

Chú ý: *một số có bốn chữ số không được bắt đầu bằng số* 0.



Bài 3. Diện tích của hình được tô đậm bên dưới bằng bao nhiêu?



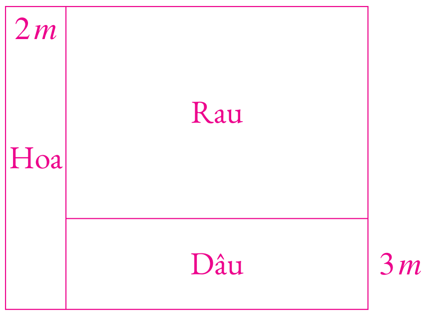
Bài 4. Trong bảng ô vuông cỡ 4×4 có điền các số khác 0 sao cho tích của 4 số trong mỗi hàng, mỗi cột đều bằng nhau. Cho biết các số trong 9 ô như hình vẽ, hỏi số ở ô có dấu $*$ bằng bao nhiêu?

$\frac{1}{2}$	32		
	4	8	2
4	1		
32		$*$	16

Bài 5. Khu vườn của gia đình Tâm được minh họa bằng hình chữ nhật trong hình dưới đây. Biết rằng khu vườn có diện tích

[*] Nguồn: Câu lạc bộ Toán học Unicorn (UMC)

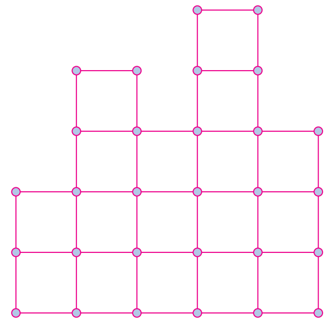
$120\,m^2$ và được chia thành ba luống hình chữ nhật. Phần trồng hoa rộng $2\,m$, diện tích $20\,m^2$, phần trồng dâu rộng $3\,m$. Hỏi diện tích phần trồng rau là bao nhiêu?



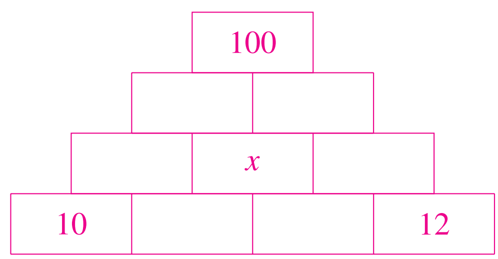
Bài 6. Ba bạn An, Bình, Chi chia đều nhau 30 chiếc kẹo. An ăn một số chiếc kẹo; Bình ăn một số kẹo bằng với số kẹo mà An còn; Chi ăn số kẹo bằng với tổng số kẹo mà An và Bình đã ăn. Hỏi còn lại bao nhiêu chiếc kẹo?

Bài 7. Một bác nông dân chở một xe ô tô quất cảnh ra chợ Tết để bán. Sau khi bán hết cây quất cuối cùng với giá 230 nghìn đồng, bác tính nhẩm lại thấy mình đã bán số cây quất với giá trung bình là 245 nghìn đồng/cây. Nhưng người mua cây quất cuối quay trở lại và chỉ cho bác thấy cành quất bị rụng quá nhiều lá, nên ông ta chỉ đồng ý mua với giá 158 nghìn đồng. Bác chấp thuận và bán cây quất đó. Khi nhẩm tính lại, bác nông dân thấy giá trung bình của xe quất bây giờ là 242 nghìn đồng. Hỏi bác đã bán được bao nhiêu cây quất?

Bài 8. Có bao nhiêu cách xếp 5 viên bi giống hệt nhau vào các ô hình vuông ở hình vẽ sau sao cho mỗi ô có không quá 1 viên bi và không có 2 viên bi nào trên cùng 1 hàng hoặc 1 cột?



Bài 9. Mỗi ô trong hình bên được điền một số sao cho: số được ghi trong mỗi ô ở 3 hàng trên cùng bằng tổng 2 số ở hai ô ngay bên dưới nó. Cho biết trước 3 số như trong hình vẽ, hỏi số nào phải được điền vào ô có chữ x?



Bài 10. Sau khi sạc điện thoại di động, bạn Kiên nhận ra mình đã quên mã PIN (mã gồm 4 chữ số). Kiên nhớ là mã PIN bắt đầu bằng số 1, kết thúc bằng số 3 và các chữ số trong mã đều khác nhau. Có bao nhiêu số khác nhau cho mã PIN của Kiên?

Đáp án

Bài 1. Nhận thấy Hình thứ n trong dãy là một hình vuông có các đặc điểm sau:

– Cạnh hình vuông có kích thước là: $2 \times n$;

– Hàng cuối có $2 \times n$ dấu # và các hàng còn lại có n dấu #.

Như vậy số dấu # trong Hình thứ 8 là:

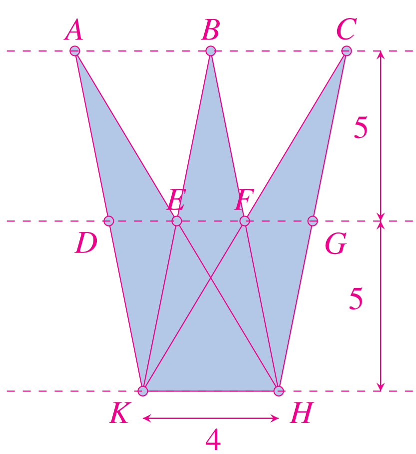
$$15 \times 8 + 16 = 136.$$

Bài 2. Để hiệu nhận được là lớn nhất thì số bị trừ là số lớn nhất có 4 chữ số và số trừ sẽ nhỏ nhất có 4 chữ số tạo từ các số đã cho.

Do đó số bị trừ là 3222 và số trừ là 1001 và ta có hiệu lớn nhất có thể là:

$$3222 - 1001 = 2221.$$

Bài 3. Ta viết tên các điểm như trong hình vẽ dưới đây.



Nhận thấy phần tô đậm có diện tích bằng tổng diện tích của các tam giác sau. BKH, ADE, DEK, CFG và FGH.

Tam giác BKH có đáy $KH = 4$ và chiều cao bằng 10, do đó có diện tích là:

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 10 = 20.$$

Các tam giác ADE, DEK, CFG và FGH có các đáy $DE = EF = FG = 2$ và chiều cao bằng 5, do đó có cùng diện tích là:

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 5.$$

Vậy diện tích của phần tô đậm là:

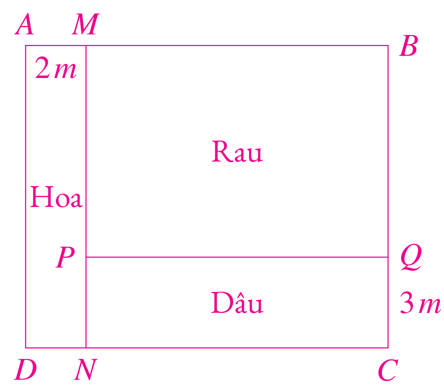
$$20 + 4 \times 5 = 40 \text{ (đơn vị diện tích)}$$

Bài 4. Do tích của mỗi hàng và mỗi cột đều bằng nhau nên tích các số của cột thứ 2 và hàng thứ 4 bằng nhau. Vì cột 2 và hàng 4 chung nhau một ô nên tích của 3 số còn lại bằng nhau. Từ đó, ta có

$$32 \times 4 \times 1 = 32 \times * \times 16.$$

Giải ra ta được số ở ô có dấu $*$ là $\frac{1}{4}$.

Bài 5. Điền tên các đỉnh trong hình như sau.



Phần trồng hoa là hình chữ nhật $AMND$ có diện tích là $20\,m^2$. Hình chữ nhật AMND có cạnh $AM = 2\,m$ nên cạnh còn lại $AD = 10\,m$.

Khu vườn là hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $120\,m^2$. Hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AD = 10\,m$ nên cạnh $DC = 12\,m$.

Ta có $DC = 12 = DN + NC = 2 + NC$. Do đó $NC = 10$.

Từ đó, phần trồng dâu là hình chữ nhật $PQCN$ có hai cạnh $NC = 10$ và $QC = 3$. Do đó diện tích của phần trồng dâu là: $30\,m^2$.

Vậy diện tích của phần trồng rau là: $120 - 20 - 30 = 70\,m^2$.

Bài 6. Mỗi bạn được chia $30 : 3 = 10$ chiếc kẹo.

Do Bình ăn một số kẹo bằng với số kẹo mà An còn nên tổng số kẹo mà An và Bình ăn là

10 chiếc. Vì thế tổng số kẹo mà An, Bình và Chi ăn là $10 + 10 = 20$ chiếc. Do vậy, còn lại $30 - 20 = 10$ chiếc kẹo.

Bài 7. Gọi số cây quất là n. Khi đó tổng tiền bán được của lần bán đầu khi cây cuối có giá 230 nghìn là $245 \times n$ và tổng tiền thu được khi bán cây cuối với giá 158 nghìn là $242 \times n$. Ta thấy chênh lệch giữa giá bán cây cuối ở 2 lần bằng $3 \times n$. Do số tiền chênh lệch giữa hai lần bán là:

$$230 - 158 = 72 \text{ nghìn}$$

nên bác nông dân đã bán được

$$72 : 3 = 24 \text{ cây quất.}$$

Bài 8. Ta thấy Cột 1 có 2 cách xếp bi;

Cột 3 có 2 cách xếp bi;

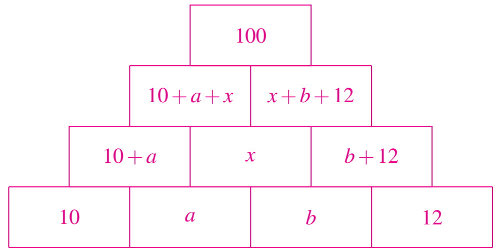
Cột 5 có 1 cách xếp bi;

Cột 2 có 1 cách xếp bi;

Cột 4 có 1 cách xếp bi.

Do đó, số cách xếp bi là: $2 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 4$ (cách)

Bài 9. Gọi hai số còn khuyết ở hàng cuối là a và b. Do mỗi ô ở hàng trên bằng tổng hai ô ngay bên dưới nên ta điền được các số như sau.



Vậy $100 = a + 10 + x + b + 12 + x = a + b + 2x + 22$.

Do $x = a + b$ nên $100 = 3 \times x + 22$.

Giải ra ta được $x = 26$.

Bài 10. Mã PIN của bạn Kiên có dạng: $1ab3$, với a, b là hai chữ số khác nhau và khác hai chữ số 1, 3.

Ta thấy có 8 cách chọn chữ số a và 7 cách chọn chữ số b.

Do đó có $8 \times 7 = 56$ cách chọn 2 chữ số a và b hay có 56 số khác nhau cho mã PIN của bạn Kiên.

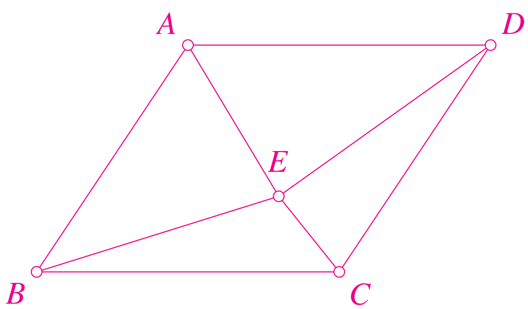
A THOUSAND WORDS (Path I)

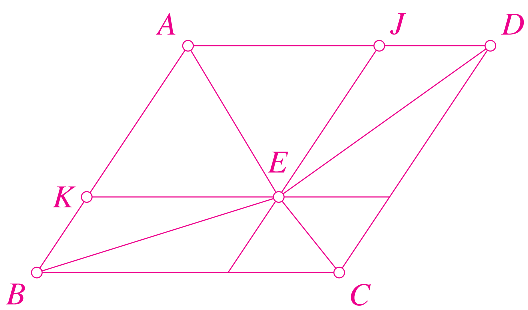
NGHIA DOAN[1]

In this article, we will investigate a number of ways to *prove area equality without writing lengthy proof.* While it sounds simple, easy, and exciting, it is important that you need to improve your creating thinking in order to first understand the examples, and then use them as tools, guidelines, or ideas to solve the problems.

Example 1. E is an arbitrary point inside the parallelogram $ABCD$, prove that

$$[AEB]+[CED]=\frac{1}{2}[ABCD].$$





Solution. Draw lines through E, parallel with sides of $ABCD$, dividing the parallelogram into four smaller parallelograms. Any of the smaller parallelogram, say $AKEJ$, consists of a brown triangle from the shaded triangle and a green triangles with the same area. Thus, the area of the shaded triangles is the sum of the area of all smaller brown triangles, which is half of the sum of the area of all smaller parallelograms, of half of the $ABCD$ parallelogram.

Remark. Here's how we use the techniques:

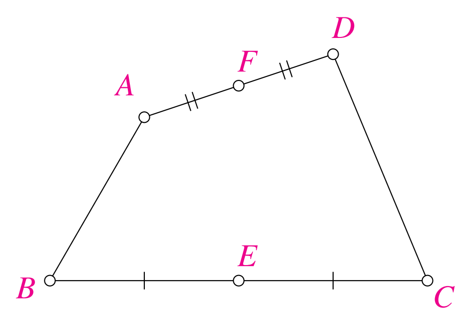
1. First, divide the given figure into smaller figures.

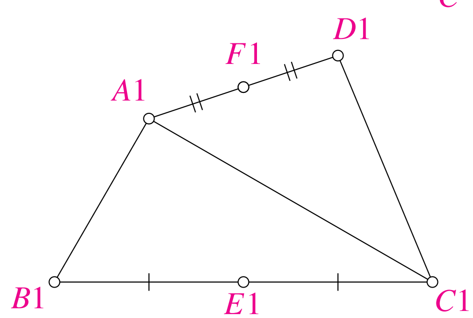
3. Deal with each of them, iif they have the same shape, then work in the same way.

3. Use all partial results to arrive at the overall result.

Example 2. E and F are midpoints of BC and DA in the convex quadrilateral $ABCD$, prove that

$$[AECF]=\frac{1}{2}[ABCD].$$





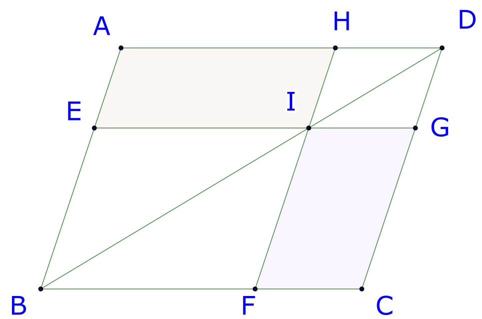
Solution. Connect AC. Since E is midpoint of BC, thus the triangles ABE and AEC have the same area. Similarly triangles CDF and CFA have the same area. Thus the area of

[1] *Ottawa, Canada.*

$AECF$ is half of $ABCD$.

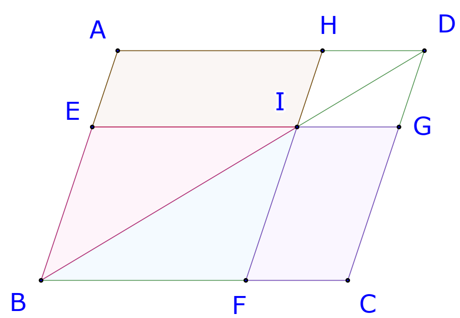
Example 3. I is an arbitrary point on the diagonal BD in parallelogram $ABCD$. Lines through I parallel with the sides of $ABCD$ intersect AB, BC, CD, and DA at E, F, G, and H, respectively.

$$[AEIH] = [FCGI].$$



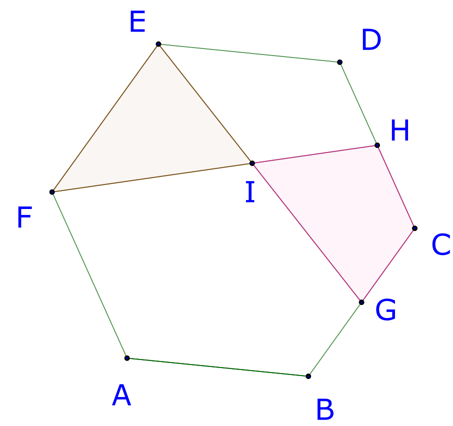
Solution. First, since BD is the diagonal in parallelogram $ABCD$, $[ABD] = [BCD]$. Now, $BEIF$ is also a parallelogram, thus $[BEI] = [BFI]$, similarly $[HID] = [IGD]$. Therefore

$$\begin{aligned}[AEIH] &= [ABD] - [BEI] - [HID] \\ &= [BCD] - [BFI] - [IGD] \\ &= [FCGI].\end{aligned}$$



Example 4. G, H are midpoints of BC, CD in th regular hexagon $ABCDEF$. EG and FH intersect at I. Prove that

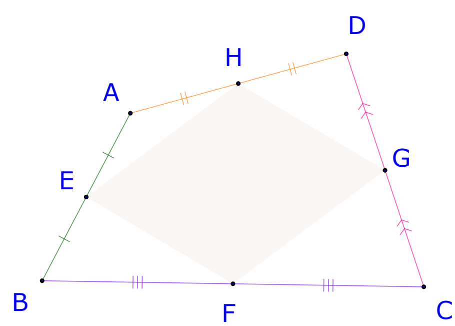
$$[GCHI] = [EFI].$$



Solution. It is easy to see that the quadrilaterals $GCDE$ and $HDEF$ are congruent, thus have the same area, or $[GCDE] = [HDEF]$. Taking $HDEI$ away, we have $[GCHI] = [EFI]$.

Example 5. E, F, G, and H are midpoints the sides in the convex quadrilateral $ABCD$. Prove that

$$[EFGH] = \frac{1}{2}[ABCD].$$



Solution. EH is the mid-segment (the segment connecting two midpoints) in $\triangle ABD$, therefore $[AEH] = \frac{1}{4}[ABD]$. Similarly $[BEF] = \frac{1}{4}[ABC]$, $[CFG] = \frac{1}{4}[BCD]$, and $[GDH] = \frac{1}{4}[CDA]$, therefore:

$$\begin{aligned}&[AEH] + [BEF] + [CFG] + [GDH] \\ &= \frac{1}{2}[ABCD]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [EFGH] = \frac{1}{2}[ABCD].$$

PHƯƠNG PHÁP Ô ĂN QUAN

NGÔ QUỐC CHUNG, NGUYỄN THỊ HIỀN[1]

LTS. *Trong số này, tạp chí Pi giới thiệu đến bạn đọc một bài viết đạt giải trong kỳ thi Bài giảng và bài viết Toán học, mang tên Hoàng Tụy, năm 2022. Bài viết về chủ đề giảng dạy Toán theo chương trình Toán học 2018 – Chương trình Giáo dục Phổ thông mới.*

I. Đặt vấn đề

Trong quá trình tìm các Bài toán thực tế, và xem trò chơi dân gian "Ô ăn quan" chúng tôi phát hiện ra có sự tương đồng rất lớn giữa bài toán tập hợp hữu hạn với tập hợp các viên sỏi trong trò chơi "Ô ăn quan". Từ đó chúng tôi nghĩ đến câu hỏi có thể sử dụng phương pháp ô ăn quan để giải các bài Toán tập hợp đếm được, hữu hạn hay không? Áp dụng cho một số Bài toán ban đầu chúng tôi thấy cách giải là rất đẹp và dễ hiểu. Chúng tôi đặt tên cho cách giải đó là "phương pháp ô ăn quan"

Với ý muốn là sẽ tạo một cách giải hết sức trực quan chúng tôi quyết định nghiên cứu sâu hơn về các Bài toán tập hợp được phát biểu dưới dạng các bài Toán cổ, ngoài ra chúng ta có thể giải quyết được một số bài ở mức độ phức tạp hơn, khi chứa nhiều biến trong một bài toán.

Môn toán trong chương trình phổ thông ở cấp Tiểu học giúp học sinh có những kiến thức cơ bản và sơ giản ban đầu về số học, hình học, các yếu tố đại lượng và hình thành các kĩ năng toán học góp phần xây dựng phương pháp học tập, làm việc có kế hoạch, chủ động, sáng tạo giúp các em học tập tốt các môn học khác trong nhà trường và chuẩn bị cho các bậc học tiếp theo. Trong bài viết này, chúng tôi sẽ giải một lớp các Bài toán đó bằng phương pháp "Ô ăn quan",các ví dụ đưa ra là những bài toán rất quen thuộc ở Tiểu học và cả một số bài tập đề cập ở trên chương trình Toán THPT.

Với ý tưởng như trên, bài viết sẽ trình bày những kết quả đạt được đạt được trong quá trình chuyển tải phương pháp "Ô ăn quan" vào giải các bài Toán tập hợp của chương trình Toán Phổ thông mới.

II. Giải các Bài toán tập hợp bằng phương pháp "Ô ăn quan"

Các bài toán cổ dưới đây thường có nhiều phương pháp giải mà mỗi bậc học có thể được trang bị một cách khác nhau. Tuy nhiên đây là các bài toán có tính logic cao nên học sinh phải có năng lực Toán học khá mới dùng được các phương pháp như vẽ biểu đồ, đặt ẩn giải hệ phương trình, hoặc dùng biểu đồ Venn. Trong phương pháp ô ăn quan, chúng tôi sử dụng những mô tả rất thực tế qua việc dùng những viên sỏi; ô trống và rải sỏi dẫn đến học sinh không cần đòi hỏi quá nhiều kiến thức về Toán vẫn có thể lĩnh hội được.

---

[1] *Trường PT Hermann Gmeiner Vinh, Nghệ An.*

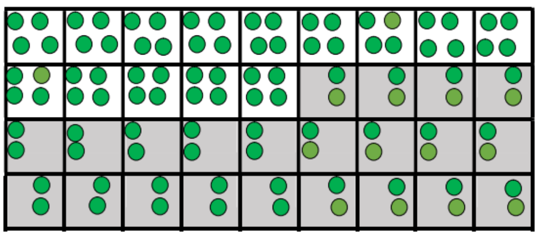
Bài toán 1: Gà và chó

"Vừa gà vừa chó,
Bó lại cho tròn,
36 con, 100 chân chẵn."

Hỏi có bao nhiêu con gà, bao nhiêu con chó?

Lời giải. Theo bài ta có: tổng số con gà và con chó có tất cả 36 con và 100 chân.

Bây giờ ta vẽ 36 ô và dùng 100 viên sỏi. Trong 36 ô, mỗi ô ta rải vào 2 viên sỏi hết 72 viên sỏi, còn lại 28 viên sỏi. Rải tiếp 28 viên sỏi còn lại vào các ô, mỗi ô thêm 2 viên sỏi. Khi đó, có 14 ô chứa 4 viên sỏi và 22 ô chứa 2 viên sỏi. Vậy ta có 14 con chó và 22 con gà.



Bài toán 2: Thuyền to – Thuyền nhỏ

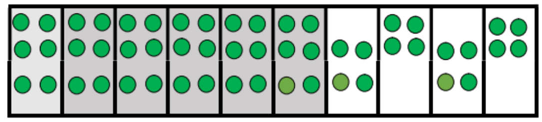
"Thuyền to chở được 6 người,
Thuyền nhỏ chở được 4 người là đông.
Một đoàn trai gái sang sông,
10 thuyền to nhỏ giữa dòng đang trôi.
Toàn đoàn có cả 100 người, Trên bờ còn 48
người đợi sang"

Hỏi có bao nhiêu thuyền to, bao nhiêu thuyền nhỏ

Lời giải. Toàn đoàn có 100 người, trên bờ còn 48 người đợi sang, như vậy có 52 người đang ngồi trên 10 thuyền.

Theo bài ta có: Tổng số thuyền nhỏ và to là 10 thuyền, 52 người.

Bây giờ ta vẽ 10 ô và dùng 52 viên sỏi. Trong 10 ô mỗi ô ta rải vào 4 viên sỏi hết 40 viên sỏi, còn lại 12 viên sỏi. Bỏ tiếp 12 viên sỏi còn lại vào các ô, mỗi ô thêm 2 viên. Khi đó, có 6 ô chứa 6 viên sỏi và 4 ô chứa 4 viên sỏi. Hay có 6 thuyền to và 4 thuyền nhỏ.



Nhận xét. Thông qua những ví dụ trên ta thấy phương pháp ô ăn quan sử dụng những trực quan cụ thể, giúp học sinh dễ dàng thực hiện và ghi nhớ cách làm đồng thời tìm ra kết quả chính xác.

Ví dụ trên đã yêu cầu học sinh vận dụng được sự mềm dẻo, linh hoạt trong suy nghĩ để giải quyết bài toán. Đó là một yếu tố rất cần thiết, tránh sự cứng nhắc rập khuôn theo những phương pháp đã dẫn đến những cách giải cồng kềnh hoặc bế tắc.

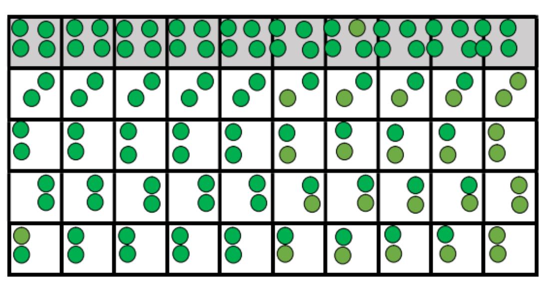
Bài toán 3: Bài toán lợn và gà

Tối qua đếm đàn lợn gà
Thấy được trăm mắt còn đầu năm mươi
Một trăm hai chục chân tròn
Đố bạn biết có bao nhiêu gà và lợn?

Lời giải. Có 50 cái đầu nên tổng số lợn và gà là 50 con và tổng số là 120 chân. Bây giờ ta vẽ 50 ô tượng trưng cho 50 con, và lấy 120 viên sỏi tượng trưng cho 120 cái chân.

Bây giờ ta sẽ rải đầy kín tất cả các ô, với mỗi ô hoặc hai viên sỏi, hoặc 4 viên sỏi. Khi đó số ô có 4 viên tức là có 4 chân chính là lợn, số ô có 2 viên tức là có 2 chân chính là gà.

Rõ ràng khi rải đầy các ô có hai viên mỗi ô, thì hết 100 viên, nên thừa 20 viên, 20 viên còn lại rải đủ cho 10 ô, và do đó để thêm mỗi ô 2 viên. Vậy số ô có 4 viên là 10 nên số lợn là 10 con, còn lại số ô có 2 viên là 40 ô vậy có 40 gà.

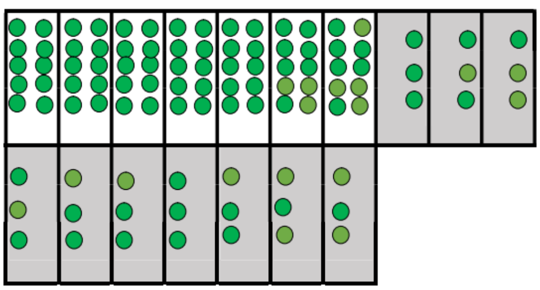


Bài toán 4: Bài toán "Thương nhau cau sáu bổ ba"

'Thương nhau cau sáu bổ ba
Ghét nhau cau sáu bổ ra làm mười.
Mỗi người một miếng trăm người,
Có mười bảy quả hỏi người ghét yêu"?

Hỏi có bao nhiêu quả cau ghét và bao nhiêu quả cau yêu.

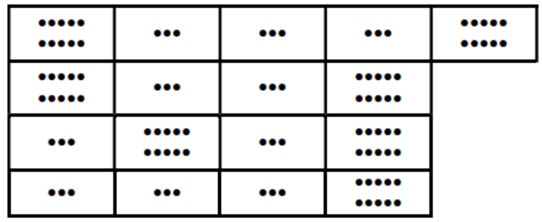
Lời giải. Ta coi 17 quả cau là 17 ô vuông và 100 miếng cau chia cho 100 người là 100 viên sỏi. Trong 17 ô vuông, mỗi ô vuông rải 3 viên sỏi hết 51 viên sỏi, còn lại 49 viên sỏi. Rải tiếp 49 viên còn lại vào các ô, mỗi ô thêm 7 viên. Khi đó, có 7 ô chứa 10 viên sỏi và 10 ô chứa 3 viên sỏi. Hay có 30 người tương ứng với 10 quả cau bổ 3 và 70 người ghét ứng với 7 quả cau bổ 10.



Bài toán 6: (Buôn cà phê)

Người nọ mua một số cafe tốt và một số cafe xấu trộn lại cân nặng 50 kg, trả tất cả 7.800$. Biết rằng giá 1 kg cafe tốt 180$, giá 1 kg cafe xấu 120$. Hỏi người ấy mua mỗi hạng cafe mấy kg?

Lời giải. Ta coi mỗi ô là 1 kg cà phê, có 50 kg cà phê nên sẽ có 50 ô, bây giờ ta sẽ xem mỗi viên sỏi là 60$, tổng cộng là 7800$ nên sẽ ứng với 130 viên sỏi. Sau đó ta sẽ rải sỏi vào các ô, mà mỗi ô chỉ nhận 2 viên = 120$ hoặc 3viên = 180$, số ô có 3 viên chính là cà phê tốt, số ô chỉ có 2 viên chính là cà phê xấu. Đầu tiên ta rải đủ 50 ô, mỗi ô 2 viên thì còn lại 30 viên, ta tiếp tục rải 30 viên còn lại mỗi ô thêm 1 viên cho đến khi hết sỏi. Ta có hình vẽ sau.



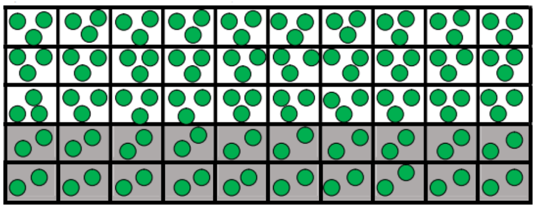
Nhìn vào bảng ta thấy có 30 ô chứa 3 viên sỏi, vậy có 30 kg cà phê tốt, có 20 ô chứa hai viên sỏi nên có 20 kg cà phê xấu.

Bây giờ ta sẽ giải các bài Toán tập hợp có độ phức tạp cao hơn, đó là những bài toán và có từ 3 biến trở lên. Những bài toán này nếu giải bằng các cách thông thường sẽ hết sức phức tạp và đòi hỏi rất nhiều kỹ thuật. Nhưng với phương pháp "Ô ăn quan" ta sẽ có một lời giải rất dễ hiểu, đẹp đẽ và học sinh Tiểu học cũng có thể hiểu được.

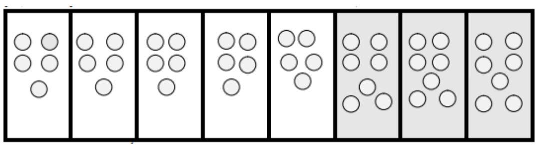
Bài toán 7:

Lớp 5*A* có 35 học sinh (HS) làm bài kiểm tra toán cuối Kỳ II. Đề bài gồm có 3 bài toán. Giáo viên chủ nhiệm lớp báo cáo với Nhà trường rằng: Cả lớp mỗi em đều làm được ít nhất một bài, trong đó 20 em giải được bài toán thứ nhất, 14 HS giải được bài toán thứ hai, 10 HS giải được bài toán thứ ba, 5 HS giải được bài toán thứ hai và thứ ba, 2 HS giải được bài toán thứ nhất và thứ hai, chỉ có một HS được 10 điểm vì đã giải được cả ba bài. Học sinh nào giải được bài 3 thì làm ít nhất thêm được một bài khác. Hỏi lớp học đó có bao nhiêu HS không dự kiểm tra?

Lời giải. Trước hết ta vẽ bảng gồm có 35 ô ứng với 35 em học sinh lớp 5*A*. Ta lấy 20 tấm thẻ ký hiệu là số $B1$ ứng với số lần giải được bài toán 1, lấy 14 thẻ ký hiệu là $B2$ ứng với 14 lần giải được bài toán 2, 10 tấm thẻ đánh dấu là $B3$ ứng với 10 lượt giải được bài toán 3. Bây giờ ta sẽ rải thẻ vào các ô theo quy tắc đã cho. Đầu tiên ta rải 20 tấm thẻ $B1$ vào 20 ô, sau đó ta rải đến tấm thẻ $B2$ vào 2 ô có thẻ $B1$ và thêm 12 ô trống, hết thẻ $B2$ bây giờ ta rải thẻ $B3$, 1 tấm thẻ vào ô đã có 2 thẻ $B1$ và $B2$, tiếp tục rải 5 thẻ vào các ô chỉ có thẻ $B2$, do làm được bài 3 thì sẽ làm được hơn một bài do đó sẽ rải 4 thẻ còn lại vào các ô chỉ có $B1$. Sau khi rải hết thẻ mà ô nào còn trống có nghĩa là học sinh đó không đi thi.



Nhìn vào bảng sau khi rải hết các thẻ theo quy tắc trên ta thấy còn lại chỉ có 3 ô trống nên có 3 em học sinh không tham gia thi cuối kỳ II.



Bài toán 8:

Trong một hội nghị có 100 đại biểu tham dự, mỗi đại biểu nói được một hoặc hai trong ba thứ tiếng: Nga, Anh hoặc Pháp. Có 39 đại biểu chỉ nói được tiếng Anh, 35 đại biểu nói được tiếng Pháp, có 12 đại biểu biết 2 thứ tiếng trong đó 8 đại biểu nói được cả tiếng Anh và tiếng Nga. Hỏi có bao nhiêu đại biểu chỉ nói được tiếng Nga, bao nhiêu đại biểu chỉ nói được tiếng Pháp?

Lời giải.

B1-B3	B1-B3	B1-B3	B1-B3	B1	B1	B1
B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1
B1	B1	B1	B1	B1-B2	B1-B2-B3	B2-B3
B2-B3	B2-B3	B2-B3	B2-B3	B2	B2	B2
B2	B2	B2	B2			

Ta vẽ 100 ô tương ứng với 100 đại biểu. Ta sẽ làm 39 thẻ chữ A ứng với 35 người nói được tiếng Anh, 35 thẻ chữ P ứng với 35 người biết nói tiếng Pháp và 8 thẻ chữ NA ứng với số lượng biết nói tiếng Nga, gọi thẻ chữ N là ký hiệu biết nói tiếng Nga.

Đầu tiên, ta sẽ rải 39 thẻ A vào 39 ô. Ta rải tiếp 35 thẻ chữ P vào các ô trống tiếp theo, tiếp tục rải tiếp 8 thẻ NA vào các ô trống còn lại. Bây giờ ta sẽ rải thẻ chữ N, vì mỗi đại biểu nói được ít nhất một thứ tiếng, nên những ô trống còn lại ta sẽ rải chữ N vào. Do có 12 đại biểu biết nói hai thứ tiếng mà lại có 8 người nói Anh và Nga do đó chắc chắn có 4 người nói tiếng Pháp thì nói được tiếng Nga (vì không thể cùng biết cả Anh và Pháp) do đó ta sẽ rải 4 thẻ chữ N vào 4 ô có chữ P. Khi đó ô nào mà chỉ có một mình chữ N là chỉ nói được tiếng Nga, những ô chỉ có chữ P là chỉ nói được tiếng Pháp. Nhìn vào bảng ta thấy: có 18 ô chữ N vậy có 18 đại biểu chỉ nói được tiếng Nga. Có 31 ô chỉ có chữ P nên có 31 đại biểu chỉ nói được tiếng Pháp

Bài toán 9.

50 bạn học sinh lớp $12A$ đều đội 1 trong hai loại mũ: Mũ cứng hoặc mũ mềm, đi 1 trong 2 loại giày đen hoặc nâu, mặc 1 trong 2 loại áo: trắng hoặc xanh. Có 18 bạn đội mũ mềm, 19 bạn đi giày đen, 11 bạn có áo trắng. Hỏi có thể chắc chắn có ít nhất bao nhiêu bạn vừa đi giày nâu, vừa đội mũ cứng và mặc áo xanh?

Lời giải. Ta sẽ vẽ bảng gồm 50 ô, ta kí hiệu thẻ chữ M, C lần lượt ứng với đội mũ mềm và mũ cứng, thẻ , N lần lượt cho giày đen và giày nâu, thẻ T, X cho mặc áo trắng và áo xanh.

A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
A	A	A	A	A	A	A	A	A	P
P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
PN	PN	PN	P	NA	NA	NA	NA	NA	NA
NA	NA	N	N	N	N	N	N	N	N
N	N	N	N	N	N	N	N	N	N

Vì có 18 bạn đội mũ mềm ta rải 18 thẻ M vào 18 ô, các ô trống còn lại ta rải chữ C cho các bạn đội mũ cứng, ta rải tiếp 19 thẻ D vào hết các bạn có thẻ chữ C, hết chữ C ta sẽ rải sang chữ M, nhiều ô chữ C nhất có thể. Sau đó ta rải 11 thẻ chữ T vào ô chữ CN, hết các ô đó ta sẽ rải sang các ô còn lại, khi hết 11 thẻ chữ T ta tiếp tục rải chữ X vào tất cả các ô không chứa chữ T. Khi đó ô nào mà chứa

3 chữ CNX thì đó chính là học sinh đi giày Nâu, đội mũ Cứng và mặc áo Xanh.

Nhìn vào bảng ta thấy chỉ có hai ô có 3 chữ CNX nên có ít nhất 2 học sinh đội mũ cứng, đi giày nâu và mặc áo xanh.

Nhận xét: Đây là bài Toán logic khá hóc búa vì nó chứa đến 6 yếu tố để tác động lên một học sinh, nếu dùng phương pháp suy luận thông thường chúng ta sẽ vấp phải các lý luận khá phức tạp và dễ bị nhầm lẫn. Phương pháp "Ô ăn quan" cho ta một lời giải rất đẹp đẽ và khá ngắn gọn.

IV. Bài tập đề xuất

Bài 1: Trong một Hội nghị có 100 người tham dự, trong đó có 10 người không biết tiếng Nga và tiếng Anh, có 75 người biết tiếng Nga và 83 người biết Tiếng Anh. Hỏi trong hội nghị có bao nhiêu người biết cả 2 thứ tiếng Nga và Anh?

Bài 2: Một lớp học có 16 học sinh học giỏi môn Toán; 12 học sinh học giỏi môn Văn; 8 học sinh vừa học giỏi môn Toán và Văn; 19 học sinh không học giỏi cả hai môn Toán và Văn. Hỏi lớp học có bao nhiêu học sinh?

Bài 3: Một lớp có 45 học sinh. Mỗi em đều đăng ký chơi ít nhất một trong hai môn: bóng đá và bóng chuyền. Có 35 em đăng ký môn bóng đá, 15 em đăng ký môn bóng chuyền. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký chơi cả 2 môn?

Bài 4: Lớp $12A$ có 20 học sinh thích bóng đá, 17 học sinh thích bơi, 36 học sinh thích bóng chuyền, 14 học sinh thích bơi và bóng đá, 13 học sinh thích bơi và bóng chuyền, 15 học sinh thích bóng đá và bóng chuyền, 10 học sinh thích cả 3, 12 học sinh không thích môn nào cả . Tính số học sinh của lớp $12A$?

Bài 5: Lớp $10A$ có 40 học sinh trong đó có 10 bạn học sinh giỏi Toán, 15 bạn học sinh giỏi Lý, và 22 bạn không giỏi môn học nào trong hai môn Toán, Lý. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn học sinh vừa giỏi Toán vừa giỏi Lý?

Bài 6: (Thi giữa kỳ 1 – Trường PTTH Lý Nhân Tông, Hà Nội) Lớp $10A$ có 45 học sinh trong đó có 15 học sinh thích chơi đá bóng, 12 học sinh thích chơi bóng rổ, 6 học sinh thích chơi cả 2 môn. Số học sinh không thích chơi cả 2 môn thể thao trên là:

Bài 7: Lớp $10A$ có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả 3 môn Toán, Lý, Hóa. Số học sinh giỏi đúng hai môn học của lớp 10A là bao nhiêu.

Bài 8: (*Câu 3.48, trang 66, Sách BT Đại số 10 Nâng cao*)Có ba lớp học sinh $10A$, $10B$, $10C$ gồm 128 em cùng tham gia lạo động trồng cây. Mỗi em lớp $10A$ trồng được 3 cây bạch đàn và 4 cây bàng. Mỗi em lớp 10B trồng được 2 cây bạch đàn và 5 cây bàng. Mỗi em lớp $10C$ trồng được 6 cây bạch đàn. Cả ba lớp trồng được là 476 cây bạch đàn và 375 cây bàng. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh?

Bài 9: (*Câu 8, trang 18, Toán 10 tập 1 Sách Cánh Diều*) Một nhóm có 12 học sinh chuẩn bị hội diễn văn nghệ. Trong danh sách đăng ký tham gia tiết mục múa và tiết mục hát của nhóm đó, có 5 học sinh tham gia tiết mục múa và 3 học sinh tham gia cả hai tiết mục. Hỏi có bao nhiêu học sinh trong nhóm tham gia tiết mục hát? Biết có 4 học sinh của nhóm không tham gia tiết mục nào.

Bài toán 10: (Câu 5, trang 25 sách Toán 10 – Chân trời sáng tạo) Trong số 35 học sinh của lớp $10H$, có 20 học sinh thích môn Toán, 16 học sinh thích môn Tiếng Anh và 12 học sinh thích cả hai môn này. Hỏi lớp $10H$:

a) Có bao nhiêu học sinh thích ít nhất một trong hai môn Toán và Tiếng Anh?

b) Có bao nhiêu học sinh không thích cả hai môn này.

Tài liệu tham khảo

[1] L. V. An, N. T. Sơn, N. T. Thiêm, N. T. H. Anh, N. Q. Chung (2023), Nhìn bài toán cổ theo quan điểm Tổ hợp, Kỷ yếu HTKH cấp Trường: "Nâng cao chất lượng đào tạo

ngành Sư phạm trong bối cảnh hiện nay", Trường Đại học Hà Tĩnh, (Hà Tĩnh, ngày 24/3/2023), 179 – 186.

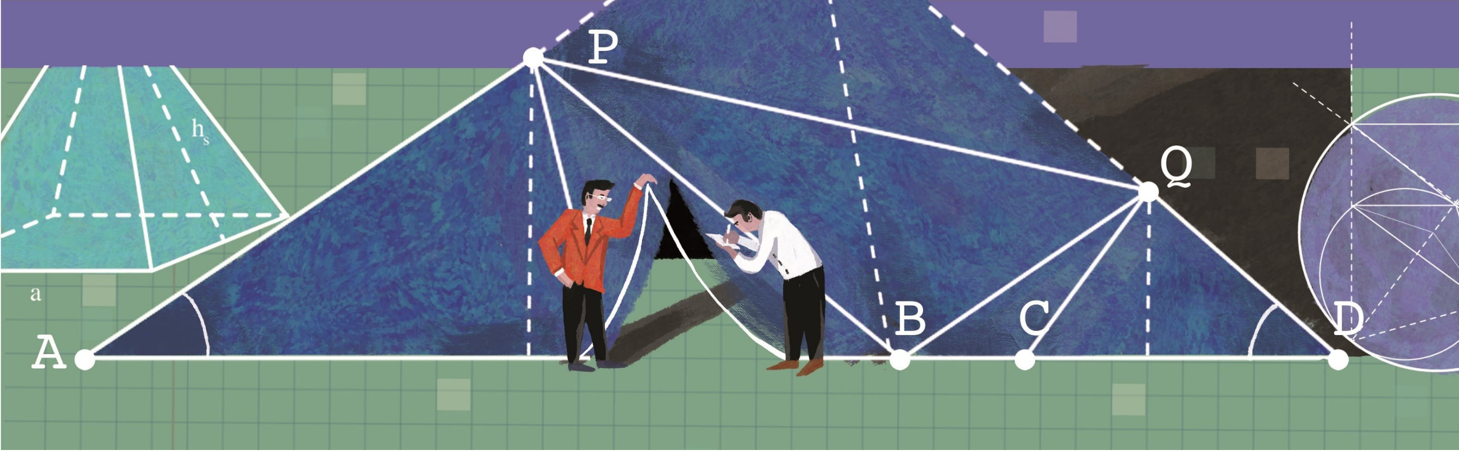
[2] Naum Yakolevich Vilenkin – Dịch giả: Nguyễn Tiến Dũng, Trần Thanh Nam, Nguyễn Chí Thức, Hồ Thị Thảo Trang, *Toán học qua các câu chuyện về Tập hợp*, Tủ sách SPUTNIK, NXB Thế giới, năm 2017.

[3] Trịnh Hồng Long, 670 *bài toán đố*, NXB Sống Mới, năm 1970.

[4] Người dịch: Trần Lưu Cường, Trần Lưu Thịnh, *Những bài toán cổ*, NXB giáo dục, năm 1995.

[4] Trần Nam Dũng (Tổng chủ biên), Trần Đức Huyên (Chủ biên), Nguyễn Thành Anh – Vũ Như Thư Hương – Ngô Hoàng Long – Phạm Hoàng Quân – Phạm Thị Thu Thủy, *Sách chân trời sáng tạo – Toán* 10 – *Tập* 1, NXB giáo dục Việt Nam, năm 2022.

[5] Đỗ Đức Thái (Tổng chủ biên), Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, Phạm Minh Phương, Phạm Hoàng Quân, *Sách Cánh diều – Toán* 10 – *Tập* 1, NXB Giáo dục, năm 2021



ĐỊNH LÝ FERMAT CHO ĐA THỨC

TRẦN MINH ĐỨC[1] VÀ LƯU BÁ THẮNG[2]

1. Giới thiệu

Định lý Fermat lớn nói về sự không tồn tại bộ ba số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $a^n + b^n = c^n$ với $n \geq 3$ là số nguyên dương, đã được Andrew Wiles [5] chứng minh vào năm 1995, nhưng ít ai biết rằng có một định lý "Fermat" tương tự cho đa thức đã được chứng minh trước đó hàng chục năm trước, tức không tồn tại ba đa thức $f(x), g(x), h(x)$ với hệ số thực, ít nhất một đa thức khác đa thức hằng, đôi một không có nghiệm chung sao cho $f(x)^n + g(x)^n = h(x)^n$, với $n \geq 3$ là một số nguyên dương cho trước.

Định lý Fermat cho đa thức là hệ quả của Định lý Mason – Stothers, đầu tiên được Stothers [4] chứng minh vào năm 1981, và Mason [3] độc lập phát hiện ra sau đó ít lâu. Các chứng minh đó nhìn chung là phức tạp, không sơ cấp. Năm 2000, Snyder [2] đã đưa ra một chứng minh mới, chỉ với các kiến thức toán phổ thông cho định lý này. Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu chứng minh của Snyder và sau đó áp dụng Định lý Mason–Stothers để chứng minh Định lý Fermat cho đa thức và một số kết quả liên quan khác.

2. Định lý Mason – Stothers

Định lý 1 (Mason – Stothers). *Cho $a(x)$, $b(x)$ và $c(x)$ là các đa thức khác đa thức hằng, với hệ số thực, đôi một không có nghiệm phức chung và thỏa mãn: $a(x) + b(x) = c(x)$. Khi đó*

$$\deg(c) \leq n_0(abc) - 1,$$

trong đó ta ký hiệu $n_0(f)$ là số nghiệm phức phân biệt của đa thức $f(x)$ và $\deg(f)$ là bậc của đa thức $f(x)$.

Để chứng minh Định lý này, ta cần Bổ đề sau:

Bổ đề 1. *Cho $f(x)$ là một đa thức với hệ số thực, khác đa thức 0. Khi đó,*

$$\deg(f) \leq \deg(f, f') + n_0(f),$$

trong đó ta ký hiệu (f, f') là ước chung lớn nhất của hai đa thức $f(x)$ và $f'(x)$ ($f'(x)$ là đa thức đạo hàm của đa thức $f(x)$).

Chứng minh. Gọi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ là các nghiệm phức phân biệt của $f(x)$ với các bội $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tương ứng. Khi đó, ta có phân tích

$$f(x) = a(x-\alpha_1)^{a_1}(x-\alpha_2)^{a_2}\ldots(x-\alpha_m)^{a_m},$$

với $a \in \mathbb{R}$ và $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = \deg f(x)$. Ta có, theo công thức Leibniz, đạo hàm của $f(x)$ được cho bởi:

$$\begin{aligned} &f'(x) \\ &= aa_1(x-\alpha_1)^{a_1-1}(x-\alpha_2)^{a_2}\ldots(x-\alpha_m)^{a_m} \\ &\quad + a(x-\alpha_1)^{a_1}[(x-\alpha_2)^{a_2}\ldots(x-\alpha_m)^{a_m}]'. \end{aligned}$$

---

[1] *Lớp 12 Toán 1, Trường THPT Amsterdam, Hà Nội.*
[2] *Khoa Toán – Tin, Đại học Sư Phạm Hà Nội.*

Suy ra, với mỗi $i = 1, 2, \ldots, m$, đa thức $(x - \alpha_i)^{a_i - 1}$ cùng là ước của $f(x)$ và $f'(x)$. Do đó

$$(x-\alpha_1)^{a_1-1}(x-\alpha_2)^{a_2-1}\ldots (x-\alpha_m)^{a_m-1} \mid (f, f').$$

Vì $f(x)$ là đa thức khác đa thức hằng nên $f'(x)$ khác đa thức 0 và do đó (f, f') cũng khác đa thức 0. Suy ra

$$\deg((x-\alpha_1)^{a_1-1}(x-\alpha_2)^{a_2-1}\ldots (x-\alpha_m)^{a_m-1}) \leq \deg(f, f'),$$

hay

$$(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \cdots + (a_m - 1) \leq \deg(f, f').$$

Suy ra

$$\deg(f) - n_0(f) \leq \deg(f, f').$$

Vậy bổ đề được chứng minh

Chứng minh Định lý 1. Từ giả thiết

$$a + b = c, \tag{1}$$

bằng cách lấy đạo hàm hai vế, ta được

$$a' + b' = c'. \tag{2}$$

Nhân (1) với a' và nhân (2) với a và trừ vế với vế, ta được

$$a'b - ab' = a'c - ac'.$$

Suy ra $(a, a'), (b, b')$ và (c, c') đều là ước của $a'b - ab'$.

Do các đa thức a, b, c đôi một không có nghiệm phức chung nên các đa thức $(a, a'), (b, b')$ và (c, c') cũng đôi một không có nghiệm phức chung. Suy ra

$$(a, a')(b, b')(c, c') \mid a'b - ab'.$$

Hơn nữa, ta có $a'b - ab' \neq 0$. Thật vậy, nếu $a'b - ab' = 0$ thì $\left(\frac{a}{b}\right)' = 0$ hay $\frac{a}{b}$ là hằng số. Do đó a và b có nghiệm chung (mâu thuẫn với giả thiết). Vì vậy,

$$\deg((a, a')(b, b')(c, c')) \leq \deg(a'b - ab').$$

Mặt khác, hiển nhiên ta có

$$\begin{aligned}\deg(a'b - ab') &\leq \max\{\deg(a'b), \deg(ab')\} \\ &= \deg(a) + \deg(b) - 1.\end{aligned}$$

Vì thế,

$$\deg(a, a') + \deg(b, b') + \deg(c, c') \leq \deg(a) + \deg(b) - 1.$$

Chuyển vế bất đẳng thức này và cộng với $\deg(c)$ vào hai vế, ta được

$$\begin{aligned}\deg(c) \leq{}& \deg(a) - \deg(a, a') + \deg(b) \\ &- \deg(b, b') + \deg(c) - \deg(c, c') - 1.\end{aligned}$$

Cuối cùng, áp dụng Bổ đề 1, ta có:

$$\begin{aligned}\deg(a) - \deg(a, a') &\leq n_0(a), \\ \deg(b) - \deg(b, b') &\leq n_0(b), \\ \deg(c) - \deg(c, c') &\leq n_0(c),\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\deg(c) &\leq n_0(a) + n_0(b) + n_0(c) - 1 \\ &= n_0(abc) - 1.\end{aligned}$$

3. Định lý Fermat cho đa thức

Áp dụng Định lý Mason – Stothers, chúng ta có một số kết quả đáng lưu ý. Trước hết, ta có kết quả sau đây:

Định lý 2 (Davenport [1]). *Cho $f(x), g(x)$ là các đa thức với hệ số thực, khác đa thức hằng, đôi một không có nghiệm phức chung. Đặt $h(x) = (f(x))^3 - (g(x))^2$ và giả sử $h(x)$ khác là đa thức 0. Khi đó, $\deg(f) \leq 2\deg(h) - 2$.*

Chứng minh. Do $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức không có nghiệm chung và $h = f^3 - g^2$ nên h, f^3 và g^2 đôi một không có nghiệm chung. Áp dụng Định lý Mason – Stothers cho ba đa thức g^2, h và f^3, ta có:

$$\deg(f^3) \leq n_0(g^2 h f^3) - 1,$$

hay

$$3\deg(f) \leq n_0(ghf) - 1 \leq \deg(ghf) - 1.$$

Mà $\deg(ghf) = \deg(g) + \deg(h) + \deg(f)$, nên

$$3\deg(f) \leq \deg(g) + \deg(h) + \deg(f) - 1. \quad (3)$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$2\deg(g) \leq \deg(g) + \deg(h) + \deg(f) - 1. \quad (4)$$

Kết hợp (3) và (4), ta được

$$3\deg(f) + 2\deg(g) \leq 2(\deg(g) + \deg(h) + \deg(f) - 1)$$

hay $\deg(f) \leq 2\deg(h) - 2$. Ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả 1. *Không tồn tại hai đa thức với hệ số thực $f(x)$ và $g(x)$, khác đa thức hằng sao cho $f^3 - g^2$ là đa thức hằng khác đa thức 0.*

Như đã đề cập đến trong phần đầu của bài viết, định lý Mason–Stothers có thể được sử dụng để chứng minh phiên bản đa thức của định lý Fermat lớn.

Định lý 3 (Định lý Fermat cho đa thức). *Với mọi nguyên $n \geq 3$, không tồn tại ba đa thức $f(x), g(x), h(x)$, với hệ số thực, đôi một không có nghiệm phức chung, trong đó ít nhất một đa thức khác đa thức hằng, sao cho $f^n + g^n = h^n$.*

Chứng minh. Giả sử ngược lại, $f^n + g^n = h^n$. Áp dụng định lý Mason–Stothers cho 3 đa thức f^n, g^n và h^n, ta có:

$$\begin{aligned} &\max\{\deg(f^n), \deg(g^n), \deg(h^n)\} \\ \leq\, &n_0(f^n g^n h^n) - 1 = n_0(fgh) - 1 \\ \leq\, &\deg(f) + \deg(g) + \deg(h) - 1. \end{aligned}$$

Để ý rằng

$$\begin{aligned} &\frac{n}{3}(\deg(f) + \deg(g) + \deg(h)) \\ =\, &\frac{1}{3}(\deg(f^n) + \deg(g^n) + \deg(h^n)) \\ \leq\, &\max\{\deg(f^n), \deg(g^n), \deg(h^n)\}. \end{aligned}$$

Do đó, nếu ta đặt $d = \deg(f) + \deg(g) + \deg(h)$ thì bằng cách kết hợp với bất đẳng thức thu được ở trên, ta có:

$$\frac{nd}{3} \leq d - 1.$$

Suy ra, $3 < d(3 - n)$. Do ít nhất một trong các đa thức f, g, h khác hằng nên $d > 0$; điều này, kết hợp với giả thiết $n \geq 3$, dẫn đến $3 \leq 0$, mâu thuẫn.

Với chứng minh tương tự, ta có thể chỉ ra được hệ quả sau đây, mà nội dung của nó là một bài toán trong tuyển tập Các kỳ thi Toán Rumani (RMC) năm 2019.

Hệ quả 2. *Cho các số nguyên $m, n \geq 3$ và f, g là các đa thức khác hằng với hệ số thực, trong đó ít nhất một đa thức có bậc lớn hơn hoặc bằng 2. Giả sử $\deg(f^m - g^n) < \min\{m, n\}$. Khi đó $f^m = g^n$.*

Nhận xét. Định lý Mason – Stothers cũng đúng khi ta xét các đa thức với hệ số phức. Từ đó ta suy ra Định lý Davenport và Định lý Fermat cho đa thức cũng đúng với đa thức với hệ số phức.

Để kết thúc, chúng ta trình bày một mở rộng của Định lý 3.

Định lý 4. *Cho các số nguyên dương m, n, p thỏa mãn $m \leq n \leq p$. Khi đó phương trình đa thức $f(x)^m + g(x)^n = h(x)^p$ có nghiệm f, g, h là các đa thức với hệ số phức, đôi một không có nghiệm chung, ít nhất một trong ba đa thức khác đa thức hằng nếu và chỉ nếu (m, n, p) có một trong dạng sau: $(1, a, b), a, b \geq 1$; $(2, 2, a), a \geq 2$; $(2, 3, 3)$; $(2, 3, 4)$; $(2, 3, 5)$.*

Chứng minh. Trước hết, dễ thấy rằng nếu trong m, n, p có một số bằng 1 thì phương trình rõ ràng có nghiệm, chẳng hạn nếu $m = 1$, với $g(x), h(x)$ là hai đa thức khác đa thức hằng tùy ý, không có nghiệm chung thì bằng cách đặt $f(x) = h(x)^p - g(x)^m$, ta có $f(x), g(x), h(x)$ thỏa mãn phương trình.

Vì vậy, ta chỉ cần xét trường hợp $2 \leq m \leq n \leq p$. Gọi a, b, c lần lượt là bậc của các đa thức f, g và h. Khi đó, theo Định lý Mason – Stothers, ta có

$$ma \leq a+b+c-1, \tag{5}$$
$$nb \leq a+b+c-1, \tag{6}$$
$$pc \leq a+b+c-1. \tag{7}$$

Cộng vế với vế của (5), (6) và (7) ta được

$$\begin{aligned} m(a+b+c) &\leq ma+nb+pc \\ &\leq 3(a+b+c)-3. \end{aligned}$$

Suy ra, $m < 3$. Mặt khác, $2 \leq m$ nên $m = 2$. Khi này, bất đẳng thức (5) trở thành:

$$a \leq b+c-1. \tag{8}$$

Cộng các bất phương trình (6), (7) và (8) theo vế, ta có:

$$nb+pc \leq 3(b+c)+a-3. \tag{9}$$

Mặt khác, vì $n \leq p$ nên từ bất đẳng thức (8) và (9), ta có:

$$\begin{aligned} n(b+c) &\leq nb+pc \leq 3(b+c)+a-3 \\ &\leq 4(b+c)-4. \end{aligned} \tag{10}$$

Từ đó, $n < 4$. Kết hợp với $n \geq 2$, ta suy ra $n = 2$ hoặc $n = 3$.

Với $n = 2$, ta thấy rằng với mọi giá trị của $p \geq 2$ thì tồn tại ba đa thức f, g, h thỏa mãn phương trình của định lý. Chẳng hạn, với

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^p+1}{2}, \\ g(x) &= -i\left(\frac{x^p-1}{2}\right), \\ h(x) &= x^2, \end{aligned}$$

thì $f^2 + g^2 = h^p$.

Với $n = 3$ thì bất đẳng thức (6) trở thành

$$2b \leq a+c-1. \tag{11}$$

Kết hợp (8) và (11), ta được $b \leq 2c-2$. Từ đó, (8) dẫn đến $a \leq 3c-3$. Từ đó, (7) dẫn đến

$$\begin{aligned} pc &\leq a+b+c-1 \\ &\leq 3c-3+2c-2+c-1 = 6c-6. \end{aligned}$$

Suy ra $p \leq 5$. Mà $p \geq n$ nên $p \in \{3;4;5\}$.

Với $p = 3$, ta có thể chọn

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[4]{432}e^{\frac{i\pi}{4}}(x^5-x), \\ g(x) &= x^4 - 2i\sqrt{3}x^2 + 1, \\ h(x) &= x^4 + 2i\sqrt{3}x^2 + 1 \end{aligned}$$

để có $f^2 + g^3 = h^3$.

Với $p = 4$, ta có thể chọn

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{12} - 33x^8 - 33x^4 + 1, \\ g(x) &= -(x^8 + 14x^3 + 1), \\ h(x) &= \sqrt[4]{108}e^{\frac{i\pi}{4}}(x^5 - x) \end{aligned}$$

để có $f^2 + g^3 = h^4$.

Với $p = 5$, ta có thể chọn

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^{30}+1+522(x^{25}-x^5)-10005(x^{20}+x^{10})}{24\sqrt{3}}, \\ g(x) &= \frac{-(x^{20}+1)+228(x^{15}-x^5)-494x^{10}}{12}, \\ h(x) &= x(x^{10}+11x^5-1). \end{aligned}$$

Khi đó $f^2 + g^3 = h^5$. Vậy định lý đã được chứng minh.

Tài liệu tham khảo

[1] V. V. Prasolov, *Essay on Numbers and Figures*, Mathematical World, American Mathematical Society, 2000.

[2] N. Snyder, *An alternate proof of Mason's theorem*, Elemente der Mathematik, 55 (3): 93 – 94, 2000.

[3] R. C. Mason, *Diophantine Equations over Function Fields*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 96, Cambridge, England: Cambridge University Press, 1984.

[4] W.W. Stothers, *Polynomial identities and hauptmoduln*, Quarterly J. Math. Oxford, 2, 32: 349 – 370, 1981.

[5] A. Willes, *Modular elliptic curves and Fermat' s Last Theorem*, Ann. Math., 141, pp. 443 – 551, 1995.

MÁY TÍNH VÀ TRÍ TUỆ NHÂN TẠO

NGUYỄN MẠNH TOÀN*

Bất chấp lịch sử ngắn ngủi của mình, máy tính và trí tuệ nhân tạo (AI) đã thay đổi một cách cơ bản những gì chúng ta thấy, những gì chúng ta biết và những gì chúng ta làm. Chỉ trong một thời gian ngắn, các hệ thống AI đã xâm nhập vào mọi lĩnh vực của cuộc sống, từ khái quát như học tập, lý luận, nhận thức, v.v., cho đến cụ thể như chơi cờ, chứng minh các định lý toán học, vẽ tranh, sáng tác nhạc, viết tiểu luận, làm thơ, lái xe ô tô hay chẩn đoán bệnh. Thế giới thay đổi nhanh chóng đến nỗi ngay cả những công nghệ khá gần đây cũng khiến chúng ta cảm thấy lạc hậu như thế nào. Điện thoại di động vào những năm 90 là những viên gạch lớn với màn hình nhỏ màu xanh lá cây. Hai thập kỷ trước đó, bộ lưu trữ chính của máy tính là thẻ đục lỗ.

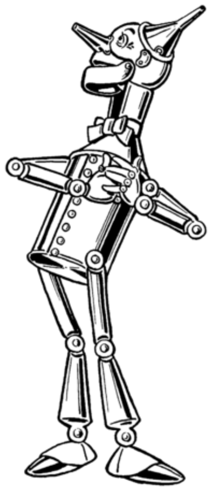
Máy tính cùng các ứng dụng thông minh phát triển một cách nhanh chóng và trở thành một phần không thể thiếu trong cuộc sống hàng ngày của chúng ta khiến con người dễ dàng quên mất các công nghệ này mới ra đời như thế nào. Để biết tương lai sẽ ra sao, việc nghiên cứu lịch sử thường rất hữu ích. Trong bài viết này, chúng ta hãy cùng nhìn lại một số cột mốc quan trọng trong lịch sử phát triển của máy tính và lĩnh vực AI, để xem chúng ta có thể mong đợi điều gì từ chúng trong tương lai, để xem liệu AI sẽ đi đến đâu, và quan trọng hơn, nó sẽ dẫn chúng ta đến đâu.

Những hạt giống đầu tiên

Chúng ta tự gọi mình là *Homo sapiens* – con người thông thái – bởi vì trí thông minh rất quan trọng đối với chúng ta. Trong hàng nghìn năm, chúng ta đã cố gắng hiểu cách chúng ta suy nghĩ và hành động – nghĩa là làm thế nào bộ não của chúng ta, chỉ là một số ít vật chất, lại có thể nhận thức, hiểu, dự đoán và điều khiển một thế giới rộng lớn và phức tạp hơn chính nó rất nhiều. Từ thời cổ đại, những huyền thoại và truyền thuyết về những sinh vật nhân tạo được ban cho ý thức hoặc trí thông minh bởi những người thợ bậc thầy đã xuất hiện và được lưu truyền. Đến thế kỷ 19 và nửa đầu thế kỷ 20, ý tưởng về con người nhân tạo và những cỗ máy biết suy nghĩ cũng được phát triển trong các tác phẩm văn học, điển hình như quái vật Monster có sức mạnh phi thường nhưng ý thức được sự cô đơn của mình trong Frankenstein của Mary Shelley, hay

*Khoa Toán Đại học Osnabrueck, CHLB Đức.

anh chàng người thiếc Woodman luôn khao khát có một trái tim trong Phù thủy xứ Oz của Frank Baum.



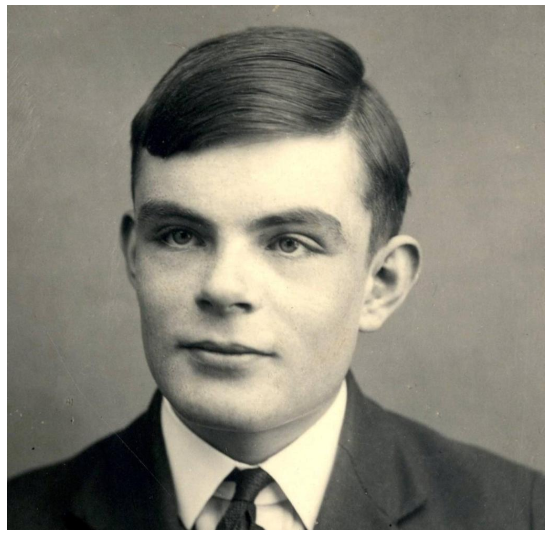
Hình 1: Phác họa của Tin Woodman. Nguồn: Wiki.

Ở khía cạnh khác, các nhà triết học qua hàng thế kỷ đã cố gắng mô tả quá trình suy nghĩ của con người như sự thao tác của các biểu tượng (ký tự). Công trình này đạt đến đỉnh cao với việc phát minh ra máy tính kỹ thuật số có thể lập trình vào những năm 1940, một cỗ máy dựa trên bản chất trừu tượng của suy luận toán học.

Máy tính điện tử và những ý tưởng đằng sau nó đã truyền cảm hứng cho một số nhà khoa học đến từ nhiều lĩnh vực khác nhau (toán học, tâm lý học, kỹ thuật, kinh tế và khoa học chính trị), và họ bắt đầu thảo luận nghiêm túc về khả năng xây dựng bộ não điện tử – một bộ não nhân tạo có khả năng suy nghĩ và suy luận giống như bộ não của con người.

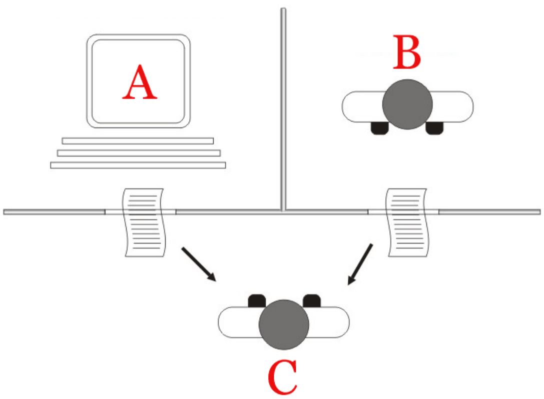
Bài kiểm tra Turing

Năm 1950, nhà toán học kiệt xuất người Anh Alan Turing – một trong những cha đẻ của máy tính hiện đại – đã thảo luận về cách chế tạo những cỗ máy thông minh và đề xuất một phương pháp để kiểm tra trí thông minh của chúng. Trong công trình nổi tiếng "Computing machinery and intelligence"(Máy tính và trí thông minh), ông xem xét câu hỏi *"Máy móc có thể suy nghĩ được không?"*. Turing cho rằng vì các từ "suy nghĩ" và "máy móc" không thể được định nghĩa rõ ràng nên chúng ta có thể thay thế câu hỏi trên bằng một câu hỏi khác, có liên quan chặt chẽ với nó, được diễn đạt bằng những từ tương đối rõ ràng và có thể kiểm chứng, chẳng hạn *"Liệu **máy tính điện tử** có thể **làm** những điều mà chúng ta (những thực thể có trí tuệ) có thể làm?"*.



Hình 2: Alan Turing. Nguồn: AFP/Getty Images.

Để trả lời cho câu hỏi trên, Turing đề xuất một phương pháp gọi là "Trò chơi bắt chước" (Imitation game), sau này được biết đến rộng rãi với tên gọi *Bài kiểm tra Turing*. Bài kiểm tra có sự tham gia của ba thành viên được xếp vào ba căn phòng tách biệt: Một người thẩm vấn (C), một máy tính(A) và một người phản biện (B) (HìnH 3). Người thẩm vấn cố gắng xác định đâu là máy tính bằng cách đặt câu hỏi cho hai thành viên còn lại. Mọi giao tiếp đều thông qua bàn phím và màn hình hiển thị. Người thẩm vấn có thể đặt những câu hỏi sâu sắc và có phạm vi rộng tùy thích, và máy tính được phép làm mọi thứ có thể để đánh lừa người thẩm vấn. Người phản biện đóng vai trò giúp người thẩm vấn nhận dạng chính xác. Trò chơi diễn ra nhiều lần, với những người khác nhau đóng vai trò thẩm vấn và phản biện, và nếu có đủ tỷ lệ người thẩm vấn không thể phân biệt được máy tính với con người, thì máy tính được coi là thông minh.



Hình 3: Bài kiểm tra Turing.

Bài kiểm tra Turing được coi là đề xuất nghiêm túc đầu tiên trong triết lý trí tuệ nhân tạo. Dù bản thân sự mô tả khá đơn giản, việc chế tạo một cỗ máy có khả năng vượt qua bài kiểm tra lại có ý nghĩa sâu rộng. Cỗ máy đó sẽ phải xử lý ngôn ngữ tự nhiên, có thể học hỏi từ cuộc trò chuyện, ghi nhớ những gì đã được nói và truyền đạt ý tưởng trở lại con người, hiểu các khái niệm chung và hiển thị những gì chúng ta gọi là lẽ thường.

Ý tưởng về một vấn đề khó khăn, lâu dài như vậy là chìa khóa để định hình lĩnh vực AI vì nó đi thẳng vào trọng tâm của vấn đề – thay vì giải quyết một vấn đề nhỏ, nó xác định mục tiêu cuối cùng có thể kéo nghiên cứu theo nhiều con đường. Nếu không có tầm nhìn về những gì AI có thể đạt được, bản thân lĩnh vực này có thể sẽ không bao giờ hình thành hoặc đơn giản vẫn chỉ là một nhánh của toán học hay triết học.

Sự ra đời của AI

Năm 1952, nhà khoa học máy tính Arthur Samuel tại IBM đã viết chương trình học chơi cờ đam trên máy tính IBM 701, đánh dấu sự ra đời của lĩnh vực học máy. Máy tính IBM càng chơi càng tiến bộ, có thể nghiên cứu những nước đi nào tạo nên chiến lược chiến thắng và kết hợp những nước đi đó vào chương trình của mình. Sự thành công này đã bác bỏ quan niệm trước đây rằng máy tính không thể "học" mà chỉ làm được những điều được lập trình sẵn.

Hình 4: Samuel chơi cờ với máy tính trên truyền hình. Nguồn: IBM.

Năm 1955, hai nhà khoa học Allen Newell và Herbert Simon tại Đại học Carnegie Mellon cùng lập trình viên Cliff Shaw tại Tập đoàn Nghiên cứu và Phát triển (RAND) đã cho ra đời *Logic Theorist*, một chương trình được thiết kế để mô phỏng kỹ năng giải quyết vấn đề của các nhà toán học. Chương trình khám phá cây tìm kiếm với gốc là giả thuyết ban đầu, mỗi nhánh là một suy luận dựa trên các quy tắc logic. Đâu đó trên cây là mệnh đề mà chương trình dự định chứng minh. Con đường dọc theo các nhánh dẫn từ giả thuyết đến mệnh đề cần phải chứng minh là một chứng minh. Logic Theorist đã chứng minh được 38 trong số 52 định lý đầu tiên trong chương hai bộ sách nổi tiếng *Principia Mathematica* của Whitehead và Russell, trong đó có những chứng minh mới và ngắn hơn. Logic Theorist đã giới thiệu Lý luận thông qua tìm kiếm và Phương pháp

---

[1] *Phương pháp giải quyết vấn đề hoặc tự khám phá bằng cách sử dụng những biện pháp nhanh chóng để tạo ra các giải pháp đủ tốt trong một khoảng thời gian giới hạn.*

suy nghiệm (Heuristic)[1], những khái niệm trọng tâm trong nghiên cứu AI sau này.

Mùa hè năm 1956, Hội thảo về trí tuệ nhân tạo đầu tiên do Marvin Minsky, Nathaniel Rochester, Claude Shannon và John McCarthy tổ chức đã diễn ra ở Đại học Dartmouth. Trong số những người tham dự có Arthur Samuel, Herbert A. Simon và Allen Newell. Dưới sự thuyết phục của McCarthy, "Trí tuệ nhân tạo" (Artificial Intelligence) đã được mọi người công nhận để chỉ lĩnh vực nghiên cứu mới, được Minsky định nghĩa như *"lĩnh vực khoa học chế tạo máy móc làm được những việc đòi hỏi trí thông minh của con người"*. Hội thảo Dartmouth đã đánh dấu sự ra đời của trí tuệ nhân tạo như một lĩnh vực học thuật. Mặc dù không thu được những kết quả như kỳ vọng nhưng hội thảo đã là chất xúc tác cho hai mươi năm nghiên cứu AI sau đó.

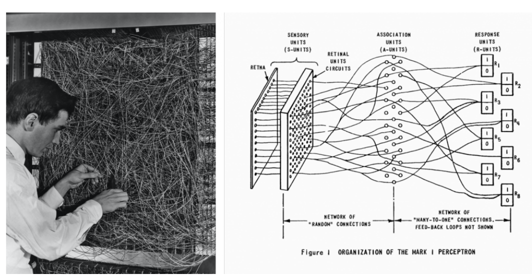
Hình 5: Herbert Simon (trái) và Allen Newell (phải). Nguồn: Đại học Carnegie Mellon.

Đợt bùng nổ đầu tiên

Từ năm 1957 đến năm 1974, lĩnh vực AI phát triển mạnh mẽ. Sự ra đời của bóng bán dẫn thay thế đèn chân không giúp máy tính lưu trữ nhiều thông tin hơn, trở nên nhanh hơn, rẻ hơn và dễ tiếp cận hơn. Các thuật toán học máy cũng được cải thiện và mọi người hiểu rõ hơn rằng thuật toán nào sẽ áp dụng cho vấn đề của họ.

Hình 6: Hội thảo Dartmouth năm 1956. Nguồn: IEEE Spectrum.

Năm 1957, Herbert Simon, Cliff Shaw và Allen Newell phát triển *General Problem Solver*, hay GPS, một chương trình có mục đích giải quyết các vấn đề chung. GPS có thể giải được nhiều câu đố ấn tượng trong logic, hình học, đố chữ hay cờ vua thông qua phương pháp thử và sai (trial and error). GPS (cùng với Logic Theorist) đặt nền móng cho AI biểu tượng (Symbolic AI), một nhánh của AI xem việc biểu diễn tri thức và lý luận dựa trên các quy tắc logic như là chìa khóa của trí thông minh. Với những đóng góp to lớn này, Newell và Simon được trao Giải thưởng Turing năm 1975, giải thưởng danh giá được xem như Nobel của khoa học máy tính.[2]



Hình 7: Frank Rosenblatt và Perceptron. Nguồn: Researchgate.

Cùng năm 1957, Frank Rosenblatt tại

[2]*Herbert Simon cũng được trao Nobel kinh tế năm 1978 cho những nghiên cứu tiên phong về quá trình ra quyết định trong các tổ chức kinh tế.*

Phòng thí nghiệm hàng không Cornell đã xây dựng *Perceptron*, mạng thần kinh nhân tạo (một lớp) đầu tiên lấy cảm hứng từ mô hình toán học của não bộ phát triển bởi Warren S. McCulloch và Walter Pitts những năm 1940. Perceptron được viết trên IBM 704, một máy tính 5 tấn có kích thước của một căn phòng. Sau 50 lần thử, máy tự học cách phân biệt các thẻ được đánh dấu bên trái với các thẻ được đánh dấu bên phải. Perceptron đánh dấu sự ra đời của chủ nghĩa kết nối, nền tảng của Mạng lưới thần kinh và Học sâu được phát triển sau này.

Năm 1960, John McCarthy [3] tại Viện Công nghệ Massachusetts (MIT) đã phát triển *LISP*, một ngôn ngữ lập trình bậc cao dựa trên giải tích lambda. LISP trở nên rất quan trọng cho sự phát triển ban đầu của AI nhờ khả năng xử lý biểu tượng và tính linh hoạt trong việc quản lý các tác vụ phức tạp. Tuy vậy, phải đến đầu những năm 1970, với sự ra đời của máy tính mạnh mẽ hơn sử dụng mạch tích hợp (chip silicon chứa nhiều bóng bán dẫn), các lập trình viên mới có thể triển khai các ứng dụng tri thức sâu rộng.

Hình 8: Tương tác với ELIZA.

Năm 1965, Joseph Weizenbaum – nhà khoa học máy tính và giáo sư tại MIT – đã phát triển *ELIZA*, một hệ thống xử lý ngôn ngữ tự nhiên mô phỏng bác sĩ. ELIZA trả lời các câu hỏi trong bối cảnh một buổi trị liệu tâm lý. ELIZA xác định các từ khóa từ dữ liệu đầu vào của người dùng và khớp chúng với các câu trả lời được lập trình sẵn. Một số người dùng tin rằng họ đang tương tác với một người khác cho đến khi chương trình đạt đến giới hạn và cuộc trò chuyện trở nên vô nghĩa. ELIZA là tiền thân của những chatbot ngày nay.

Bị thu hút bởi những kỳ vọng cùng sự lạc quan của các nhà khoa học hàng đầu, chính phủ Mỹ đã tài trợ ồ ạt cho nghiên cứu AI. Chính phủ đặc biệt quan tâm đến một cỗ máy có thể phiên âm và dịch ngôn ngữ nói cũng như xỷ lý dữ liệu thông lượng cao. Cơ quan Nghiên cứu Quốc phòng Tiên tiến (DARPA) đã đầu tư hàng triệu USD để hỗ trợ nghiên cứu AI tại một số cơ sở nghiên cứu như MIT, Đại học Stanford, Đại học Carnegie Mellon cũng như một số phòng thí nghiệm nghiên cứu thương mại khác. Năm 1970, Marvin Minsky (giáo sư tại MIT, giải thưởng Turing 1969) nói với Tạp chí Life: *"Từ ba đến tám năm nữa chúng ta sẽ có một cỗ máy có trí thông minh chung của một con người bình thường"*.

Mùa đông AI[4]

Những kỳ vọng cao và những tuyên bố đầy tham vọng thường là con đường trực tiếp dẫn đến sự thất vọng. Các nhà nghiên cứu AI đã quá lạc quan trong việc thiết lập các mục tiêu của họ và đã đưa ra những giả định ngây thơ về những khó khăn mà họ sẽ gặp phải. Việc phá vỡ lớp sương mù ban đầu của AI đã bộc lộ một núi chướng ngại vật.

Trước hết, AI gặp phải những rào cản công nghệ không thể vượt qua, chủ yếu là hạn chế về sức mạnh tính toán, bộ nhớ và tốc độ xử lý. Vào giữa những năm 1960, các nhà nghiên cứu đã phát hiện ra sự khác biệt giữa sự tăng trưởng đa thức và tăng trưởng cấp số nhân

[3] *Giải thưởng Turing* 1971.

[4] *Được mượn từ cụm từ "Mùa đông hạt nhân", một lý thuyết thời chiến tranh lạnh cho rằng việc sử dụng vũ khí hạt nhân hàng loạt sẽ che khuất mặt trời bằng khói và bụi, khiến nhiệt độ toàn cầu giảm mạnh, Trái đất đóng băng và nhân loại tuyệt chủng.*

trong độ phức tạp của bài toán. Độ phức tạp tăng trưởng theo cấp số nhân ngăn cản việc giải quyết các vấn đề mẫu lớn vừa phải trong một khoảng thời gian hợp lý. Điều này dẫn đến khái niệm quan trọng nhất trong lý thuyết độ phức tạp, tính đầy đủ NP (NP–completeness) và câu hỏi cơ bản nhất của nó, liệu $P = NP$, trong đó "P" là một lớp các câu hỏi mà một số thuật toán có thể *giải* trong thời gian đa thức và "NP" là lớp các câu hỏi mà câu trả lời (cho trước) có thể được *xác minh* trong thời gian đa thức.[5] Nhiều bài toán tổ hợp và logic là NP–đầy đủ đòi hỏi thời gian giải theo cấp số nhân và các hệ thống không có khả năng giải quyết một cách hiệu quả.

Thêm vào đó, các nhà nghiên cứu đã tập trung nhiều vào khía cạnh lý thuyết và đánh giá thấp sự phức tạp đến từ các vấn đề thực tiễn. Sau khi giải mã thành công mật mã của Đức trong thế chiến thứ hai, các nhà khoa học đã lầm tưởng rằng việc dịch văn bản giữa các ngôn ngữ sẽ không khó hơn việc giải mã mật mã. Trên thực tế, việc xử lý ngôn ngữ tự nhiên trong dịch máy đòi hỏi những hiểu biết sâu sắc về ngôn ngữ học. Người ta cần biết nghĩa của nhiều từ và hiểu chúng theo nhiều cách kết hợp. Nỗ lực tự động tra cứu từ điển và áp dụng các quy tắc ngữ pháp đã không đem lại kết quả.

Năm 1969, trong cuốn sách *Perceptrons*, Marvin Minsky và Seymour Papert đã công kích công trình Perceptron của Rosenblatt và chỉ những hạn chế của mạng lưới thần kinh nhân tạo. Cuốn sách có ảnh hưởng lớn và được xem là nguyên nhân chính dẫn đến sự đình trệ trong việc nghiên cứu mạng thần kinh những năm 1970.

Sau hai thập kỷ với hàng chục triệu đô la đầu tư mà không nhận được những giải pháp như kỳ vọng, cộng với những khó khăn về tài chính, chính phủ Mỹ và Anh lần lượt cắt giảm các nguồn tài trợ cho AI, dẫn đến sự sụt giảm đáng kể các hoạt động AI trong cả ngành công nghiệp và các viện nghiên cứu. Mùa đông AI đầu tiên kéo dài từ 1974 đến 1980.

Hệ thống chuyên gia

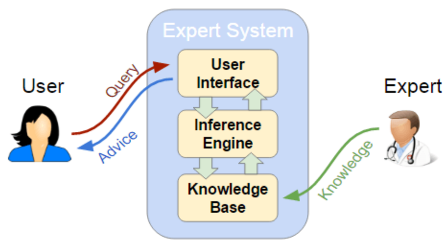
Vào những năm 1970, nghiên cứu AI tập trung vào AI biểu tượng với trọng tâm là các lĩnh vực chuyên môn được đánh giá cao và phức tạp. Với ý tưởng *"các hệ thống thông minh có được sức mạnh từ kiến thức mà chúng sở hữu chứ không phải từ các hình thức và sơ đồ suy luận cụ thể mà chúng sử dụng"*, Edward Feigenbaum [6] tại đại học Stanford cùng các đồng nghiệp đã phát triển các hệ thống chuyên gia – hay hệ thống dựa trên tri thức – chương trình máy tính mô phỏng quá trình ra quyết định của các chuyên gia.

Hình 9: Edward Feigenbaum. Nguồn: Britannica.

Một hệ thống chuyên gia bao gồm hai thành phần cơ bản: cơ sở tri thức và công cụ suy luận. Cơ sở tri thức lưu trữ thông tin, được thu thập bằng cách phỏng vấn những người là chuyên gia trong lĩnh vực được đề cập và được sắp xếp thành một tập hợp các quy tắc, thường có cấu trúc "NẾU–THÌ" (if–then). Chẳng hạn: "NẾU bệnh nhân bị sốt VÀ bệnh

[5] *Một trong bảy bài toán thiên niên kỷ của viện toán Clay.*
[6] *Giải thưởng Turing* 1994.

nhân ho VÀ bệnh nhân khó thở THÌ bệnh nhân có thể bị viêm phổi". Công cụ suy luận cho phép hệ thống chuyên gia rút ra các suy luận từ các quy tắc trong cơ sở tri thức. Ví dụ: nếu cơ sở tri thức chứa quy tắc "NẾU x THÌ y" và "NẾU y THÌ z", công cụ suy luận có thể suy ra "NẾU x THÌ z". Sau đó, hệ thống chuyên gia có thể truy vấn người dùng (có thể không phải chuyên gia) "x có đúng trong tình huống mà chúng ta đang xem xét không?" Nếu câu trả lời là khẳng định, hệ thống sẽ tiến hành suy ra z.



Hình 10: Hệ thống chuyên gia.

Sau thành công của hệ thống DENDRAL trong việc xác định các phân tử hữu cơ chưa biết và MYCIN trong việc chẩn đoán các bệnh truyền nhiễm vào thập niên 1970, hệ thống chuyên gia thương mại được sử dụng rộng rãi trong chẩn đoán y tế, phân tích hóa học, tín dụng ủy quyền, quản lý tài chính, thăm dò dầu và khoáng sản, kỹ thuật di truyền, thiết kế và sản xuất ô tô, thiết kế lắp đặt máy tính, lập kế hoạch hàng không, sắp xếp hàng hóa và các dịch vụ v.v... Các hệ thống chuyên gia cho thấy những lợi thế khác biệt so với các chương trình máy tính truyền thống. Chúng có thể cung cấp các lựa chọn và các vấn đề cho người ra quyết định cũng như hỗ trợ việc ra quyết định trong trường hợp quyết định đó vượt quá trình độ kiến thức và kinh nghiệm của họ. Ngược lại với con người, hệ thống chuyên gia có thể lưu trữ vĩnh viễn kiến thức chuyên môn, đưa ra mức độ tham vấn nhất quán sau khi được lập trình. Với kiến thức có được từ nhiều chuyên gia, các hệ thống này có thể cung cấp, hỗ trợ việc ra quyết định một cách toàn diện. Theo khảo sát những năm 1980, khoảng 2/3 trong số 500 tập đoàn lớn nhất của Mỹ lúc bấy giờ sử dụng hệ thống chuyên gia trong hoạt động kinh doanh thường nhật.

Đứng trước những triển vọng to lớn, chính phủ nhiều nước đã đầu tư mạnh mẽ cho nghiên cứu và phát triển các hệ thống AI. Năm 1981, Bộ Kinh tế, Thương mại và Công nghiệp Nhật Bản phân bổ ngân sách 850 triệu USD cho dự án máy tính thế hệ thứ năm với tham vọng dẫn đầu thế giới về công nghệ máy tính. Mục tiêu của Nhật Bản là tạo ra những cỗ máy có thể nói chuyện với con người, dịch ngôn ngữ, diễn giải hình ảnh và suy luận như con người. Đáp lại, các chính phủ Mỹ, Anh và Châu Âu cũng đẩy mạnh tài trợ cho nghiên cứu AI. Đến năm 1985, khoản đầu tư của Mỹ vào hệ thống chuyên gia AI đã đạt hơn 1 tỷ USD. Vương quốc Anh cũng bắt đầu dự án Alvey trị giá 350 triệu bảng Anh.

Một lần nữa, kỳ vọng đã cao hơn nhiều so với mức thực tế có thể thực hiện được. Đến cuối những năm 1980, các hệ thống chuyên gia dần bộc lộ nhiều vấn đề và hạn chế về công nghệ khó giải quyết. Trước tiên, việc thu thập dữ liệu và thiết kế các quy tắc đòi hỏi rất nhiều công sức. Trên thực tế, các chuyên gia chỉ có thể diễn đạt bằng lời một phần nhỏ kiến thức của họ. Thêm vào đó, những hệ thống nhiều hơn 200 quy tắc có thể xuất hiện hiệu ứng "hộp đen" – chúng ta không rõ máy suy luận như thế nào.[7] Các hệ thống chuyên gia cũng tỏ ra rất tốn kém để bảo trì. Chúng khó cập nhập, không có khả năng học và có thể mắc những sai lầm ngớ ngẩn khi được cung cấp thông tin đầu vào bất thường.

Từ cuối những năm 1980, chính phủ Mỹ và Nhật Bản lần lượt chấm dứt các nguồn tài trợ cho AI để tập trung vào các dự án nhanh

[7] *Những hệ thống chuyên gia lớn thường có trên 1000 quy tắc.*

đem lại kết quả. Như một hệ quả AI trải qua mùa đông thứ hai, kéo dài đến năm 2000.

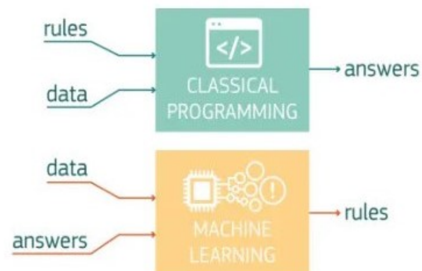
Học máy và học sâu

Năm 1997, đương kim vô địch cờ vua thế giới Gary Kasparov đã bị đánh bại bởi Deep Blue, một hệ thống chuyên gia chơi cờ vua của IBM. Trận đấu được công bố rộng rãi và trở thành biểu tượng trong lịch sử. Tuy vậy, thành công này không còn hỗ trợ cho sự phát triển của AI biểu tượng. Trên thực tế, Deep Blue và những hệ thống chuyên gia khác chỉ xử lý được một phạm vi rất hạn chế (như là là quy tắc của ván cờ), rất xa so sự phức tạp của thế giới thực.

Hình 11: Kasparov đối đầu Deep Blue. Nguồn: Sportshistoryweekly.

Từ những năm 1990, trọng tâm của nghiên cứu về AI đã chuyển từ cách tiếp cận dựa trên tri thức sang cách tiếp cận dựa trên dữ liệu (học máy). Thay vì mã hóa quy tắc cho các hệ thống AI như trước kia, các nhà khoa học tạo ra các chương trình máy tính để phân tích lượng lớn dữ liệu và rút ra kết luận – hay "học" – từ kết quả (Hình 12). Sự chuyển dịch này là kết quả của sự phát triển của Internet. Học máy được hưởng lợi từ sự sẵn có ngày càng tăng của dữ liệu số và khả năng chia sẻ các dịch vụ của mình qua Internet.

Nhằm giải quyết các vấn đề phức tạp cũng như cung cấp các giải pháp hữu ích trong các lĩnh vực ứng dụng khác nhau, các nhà nghiên cứu AI bắt đầu sử dụng và phát triển các công cụ toán học phức tạp hơn. Họ nhận ra rằng nhiều vấn đề về AI đã được các nhà nghiên cứu trong các lĩnh vực như toán học, kinh tế hoặc vận trù học giải quyết. Chẳng hạn, các mạng lưới thần kinh nhân tạo không gì khác hơn là các mô hình hồi quy phi tuyến tính và mô hình khác biệt (Discriminant models) và có thể được phân tích bằng phần mềm thống kê tiêu chuẩn, giống như nhiều mô hình thống kê khác". Sử dụng ngôn ngữ toán học cho phép sự cộng tác ở mức độ cao hơn giữa các lĩnh vực khác nhau và khiến AI trở thành một ngành khoa học chặt chẽ hơn.



Hình 12: Sự khác nhau giữa các chương trình truyền thống và học máy. Trong học máy, dữ liệu đầu vào (data) và đầu ra (answers) được đưa vào thuật toán để tạo ra chương trình (rules). Chương trình này có thể được sử dụng để dự đoán kết quả trong tương lai. Nguồn: [3].

Năm 2004, Geoffrey Hinton (Đại học Toronto), Yoshua Bengio (Đại học Montreal) và Yann LeCun (Đại học New York) dưới sự tài trợ của chính phủ Canada đã bắt đầu một chương trình nghiên cứu để cập nhật mạng lưới thần kinh nhân tạo. Các thí nghiệm được tiến hành đồng thời tại Microsoft, Google và IBM với sự trợ giúp của phòng thí nghiệm của Hilton ở Toronto cho thấy kiểu học này đã thành công trong việc giảm một nửa tỷ lệ lỗi trong nhận dạng giọng nói. Nhóm nhận dạng hình ảnh của Hinton cũng đạt được kết quả tương tự. Thuật ngữ "học sâu" được Geoffrey Hinton đặt cho các thuật toán mới này. Trong một thời gian ngắn, phần lớn các nhóm nghiên cứu đã chuyển

[8] *Bengio, Hilton và LeCun được trao Giải thưởng Turing năm 2018 cho việc cách mạng hóa lĩnh vực học sâu.*

sang sử dụng công nghệ này với những lợi ích không thể chối cãi.[8]

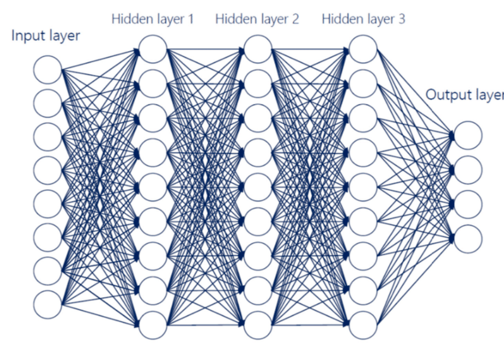
Hình 13: Giải thưởng Turing 2018. Nguồn: AMC.

Kể từ năm 2010, lĩnh vực học sâu phát triển chóng mặt.

Năm 2011, IBM Watson, một hệ thống máy tính có khả năng trả lời các câu hỏi được đặt ra bằng ngôn ngữ tự nhiên đã thắng trò chơi Jeopardy![9] trước Ken Jennings và Brad Rutter, hai trong số những thí sinh thành công nhất trong chương trình này, và giành được 1 triệu USD. Máy tính của IBM áp dụng các công nghệ xử lý ngôn ngữ tự nhiên tiên tiến, truy xuất thông tin, biểu diễn tri thức, lý luận tự động và học máy vào lĩnh vực trả lời câu hỏi trong miền mở. Cùng năm, Apple cho ra mắt Siri, trợ lý ảo đầu tiên được sử dụng rộng rãi.

Năm 2016, AlphaGo, phát triển bởi DeepMind, đã đánh bại Lee Sedol, một trong số những kỳ thủ cờ vây xuất sắc thế giới. Vì tính phức tạp của nó, cờ vây (Go) lúc đó được coi là nằm ngoài tầm với của AI trong ít nhất một thập kỷ nữa. AlphaGo sử dụng mạng lưới thần kinh nhân tạo sâu, được đào tạo thông qua học tăng cường. Một năm sau, AlphaGo được nâng cấp thành AlphaZero, chương trình mạnh mẽ hơn có thể chơi được cả cờ vua, cờ vây và cờ tướng Nhật Bản (Shogi).

Vào tháng 11 năm 2020, mô hình AlphaFold của DeepMind, một hệ thống học sâu được thiết kế để xác định cấu trúc ba chiều của protein, đã mang lại kết quả cực kỳ chính xác, tạo ra một bước tiến vượt bậc trong cái mà các nhà khoa học gọi là "vấn đề gấp protein". Vào tháng 7 năm 2022, DeepMind thông báo rằng AlphaFold có thể xác định cấu trúc của gần 200 triệu protein từ 1 triệu loài, bao gồm hầu hết mọi loại protein mà con người biết đến. Khả năng của AlphaFold đã mở ra cánh cửa cho các nhà nghiên cứu y tế phát triển rất nhiều các loại thuốc và vắc xin phục vụ nhân loại.



Hình 14: Một ví dụ về mạng thần kinh nhân tạo sâu đơn giản gồm lớp đầu vào, lớp đầu ra và 3 lớp ẩn. Mỗi nơron trong một lớp được kết nối với tất cả các nơron ở lớp trước (và sau).

Những thành công và triển vọng to lớn được mở ra bởi lĩnh vực học máy, đặc biệt là học sâu đã thúc đẩy các tập đoàn công nghệ tư nhân như Google, Microsoft, Facebook, Tesla, Alibaba v.v... đầu tư mạnh mẽ vào AI, được theo sau bởi các chính phủ. Năm 2022, tổng vốn đầu tư tư nhân cho AI toàn cầu đạt 92 tỷ USD, trong đó Mỹ dẫn đầu với 47,4 tỷ USD, theo sau là Trung Quốc với 13,4 tỷ USD. Năm 2018, Chính phủ Trung Quốc đưa ra quy trình gồm ba giai đoạn đầy tham vọng với mục tiêu đưa Trung Quốc trở thành trung tâm AI "chính" của thế giới vào năm

[9] *Chương trình đố vui ngược với hình thức hỏi đáp truyền thống trên truyền hình của Mỹ. Thí sinh được cung cấp những manh mối kiến thức chung dưới dạng câu trả lời và họ phải diễn đạt từng câu trả lời dưới dạng một câu hỏi.*

2030. Cùng năm, Ủy ban châu Âu dự định phân bổ 1 tỷ Euro để đầu tư cho AI mỗi năm. Con số này dự định sẽ tăng lên 20 tỷ Euro mỗi năm vào thập kỷ tới. Các quốc gia Ấn Độ, Hàn Quốc, Canada, Nhật Bản, Israel, Nga và Singapore cũng đầu tư mạnh mẽ cho AI.

Định luật Moore

Những tiến bộ mà AI đạt được có sự đóng góp to lớn của những tiến bộ trong công nghệ máy tính.

Năm 1965, Gordon E. Moore – một trong những người tiên phong về mạch tích hợp, nhà đồng sáng lập và giám đốc điều hành của Intel sau này – đưa ra dự đoán rằng số lượng bóng bán dẫn có thể được tích hợp trên một đơn vị không gian của mạch tích hợp sẽ tăng gấp đôi mỗi năm. Năm 1975, ông sửa lại ước tính của mình thành tăng gấp đôi sau mỗi hai năm. Dự đoán này được gọi là *Định luật Moore*. Các phép đo quan trọng khác cũng cho thấy hành vi nhân đôi tương tự, chẳng hạn như tốc độ bộ xử lý và dung lượng bộ nhớ phù hợp với máy tính.

Hình 15: Gordon E. Moore. Nguồn: Intel.

Trong suốt sáu thập kỷ qua, Định luật Moore được sử dụng như kim chỉ nam trong ngành công nghiệp bán dẫn. Tầm quan trọng của Định luật không chỉ ở việc dung lượng bộ nhớ ngày càng lớn và tốc độ máy tính ngày càng nhanh theo thời gian mà các kỹ sư có thể dự đoán quy mô lớn hơn và nhanh hơn bao nhiêu. Điều này giúp họ lập kế hoạch dài hạn cho các dự án phát triển phần mềm và phần cứng.

Định luật Moore có tác động lâu dài đến sự phát triển của AI. Việc tăng gấp đôi tốc độ phần cứng hoặc gấp đôi bộ nhớ sẽ cải thiện quy mô của vấn đề mà ta có thể xử lý hiệu quả. Cách Deep Blue được mã hóa không khác nhiều so với các chương trình chơi cờ vua 30 năm trước đó. Điều khác biệt ở đây là Deep Blue có khả năng tìm kiếm 200 triệu thế cờ mỗi giây kế hợp với thông tin trong kho dữ liệu khổng lồ để chọn nước đi. Nó đưa ra một chút lời giải thích cho quá trình nghiên cứu AI: các nhà khoa học tạo ra các chương trình vượt quá sức mạnh tính toán hiện tại, sau đó chờ Định luật Moore bắt kịp.

Hình 16: Ổ cứng dung lượng 5 MB năm 1956 có giá trên 50.000 USD so với thẻ nhớ 1 TB (1000.000 MB) năm 2020 có giá 100 USD.

Từ năm 2010, đã có những dấu hiệu cho thấy định luật Moore đang chậm lại. Tuy vậy, sự gia tăng dữ liệu cũng như sức mạnh tính toán mới đã đem đến động lực mới to lớn, dẫn đến sự bùng nổ của học sâu. Các nhà khoa học phát hiện ra hiệu quả rất cao của bộ xử lý card đồ họa máy tính (GPU) trong việc đẩy nhanh quá trình tính toán các thuật toán học máy. Từ năm 2010, tốc độ tính toán tăng theo cấp số nhân trước kia thậm chí còn nhanh hơn nữa, đạt gấp đôi chỉ trong vòng 6 tháng. PaLM, một mô hình ngôn ngữ tự nhiên của Google, lớn hơn 5 triệu lần so với AlexNet, hệ thống AI có tính toán đào tạo lớn nhất 10 năm trước. Những đột phá trong công nghệ lượng tử, khoa học máy tính, toán học, vật lý hay học máy đều đóng vai trò là những bước đột phá tiềm năng vượt qua giới hạn của Định luật Moore.

Tương lai

Bây giờ chúng ta quay trở lại hiện tại. Rất nhiều các ứng dụng thông minh đã hiện hữu trong cuộc sống hàng ngày, nhiều công nghệ mới chỉ gần đây còn là khoa học viễn tưởng giờ đã trở thành hiện thực. Vậy điều gì đang chờ đợi chúng ta phía trước?

Theo Rodney Brooks, giáo sư Robotics tại MIT, thì việc dự đoán tương lai của AI là rất khó khăn. Ông dẫn ra luật Amara nổi tiếng: *"Chúng ta có xu hướng đánh giá quá cao tác động của một công nghệ trong thời gian ngắn và đánh giá thấp tác động về lâu dài."* Luật Amara trình bày một mô hình được tìm thấy trong nhiều công nghệ mới nổi. Một lời hứa lớn trước mắt, sự thất vọng, và rồi sự tự tin dần dần tăng lên vượt xa những gì mong đợi ban đầu hướng tới. Nhiều công nghệ được đánh giá quá cao trong ngắn hạn, trong khi lợi ích lại được tích lũy về lâu dài.

Trước mắt, các mô hình ngôn ngữ lớn (Large Language Models) và AI tạo sinh (Generative AI) đang tạo ra những bước đột phá lớn tiếp theo. Người ta có thể tưởng tượng việc tương tác với một hệ thống chuyên gia trong một cuộc trò chuyện trôi chảy hoặc có một cuộc trò chuyện bằng hai ngôn ngữ khác nhau được dịch theo thời gian thực. Chúng ta cũng có thể kỳ vọng sẽ thấy những chiếc ô tô không người lái trên đường trong nhiều năm tới.

Cũng giống nhiều mô hình trí tuệ nhân tạo khác, học sâu còn nhiều vấn đề cần được giải quyết, bao gồm các cuộc tấn công đối nghịch, tạo ra nội dung giả (deepfake), sự công bằng, trách nhiệm giải trình, tính minh bạch và các cân nhắc về đạo đức khác.

Mặc dù không thể phủ nhận rằng những tiến bộ gần đây đã đẩy nhanh sự phát triển của trí tuệ nhân tạo nhưng hiện nay chúng vẫn còn một khoảng cách rất xa so với trí tuệ thực sự. Có rất nhiều điều mà các mô hình học sâu chưa thể làm được. Mạng lưới thần kinh được lấy cảm hứng từ não bộ con người nhưng chưa thực sự giống. Trí thông minh mà học sâu mang lại cho máy tính có thể rất xuất sắc trong các nhiệm vụ được xác định trong phạm vi hẹp – chơi trò chơi cụ thể, nhận ra những âm thanh hay hình ảnh cụ thể – nhưng chúng chưa có khả năng thích ứng và linh hoạt như trí thông minh của con người. Về lâu dài, mục tiêu của trí tuệ nhân tạo là trí thông minh tổng quát, tức là một cỗ máy vượt qua khả năng nhận thức của con người trong mọi nhiệm vụ. Điều này giống với hình dáng của robot có tri giác mà chúng ta thường thấy trong những bộ phim khoa học viễn tưởng. Để làm được điều đó, cần có những đột phát trong rất nhiều lĩnh vực như khoa học máy tính, khoa học thần kinh, sinh học hay toán học.

Nhìn chung, chúng ta chưa thể xác định một cách chắc chắn rồi AI sẽ phát triển đến đâu, liệu sắp tới có xảy ra một mùa đông tiếp theo hay không? Nhưng chúng ta hoàn toàn có thể tiếp tục chờ đợi và hy vọng vào những bước tiến mới, những sự đột phá tiếp theo của ngành này trong tương lai.

Tài liệu

[1] European Commission, Joint Research Centre, Delipetrev, B., Tsinaraki, C., Kostić, U., *AI watch, historical evolution of artificial intelligence – Analysis of the three main paradigm shifts in AI*, Publications Office, 2020

[2] Council of Europe, *History of Artificial Intelligence.*

[3] Craglia M., (Ed.), *Artificial Intelligence – A European Perspective.*, EUR 29425 EN,

Publications Office, Luxembourg, 2018

[4] Các bài viết về cùng chủ đề trên Wikipedia và Encyclopaedia Britannica.

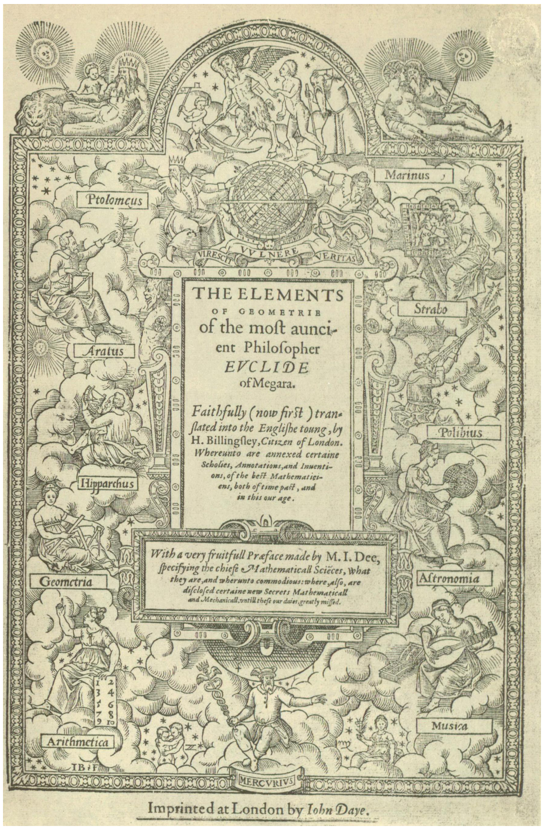
HÌNH HỌC PHI EUCLID (Phần I)

VŨ LÊ MINH TRÍ VÀ NGUYỄN DUY ANH[1]

Một ý tưởng tưởng chừng như mâu thuẫn với những cảm quan thường thức, thế nhưng lại trở thành một vũ trụ hình học mới lạ và chặt chẽ, và có thể nắm giữ bản chất của không gian chúng ta đang sống. Thế nhưng quá trình khám phá và phát triển ý tưởng ấy phải trải qua hàng thập kỷ với nhiều trắc trở và gian nan.

Hy Lạp và Saccheri

Một trong những thứ mà người Hy Lạp cổ đại có thể tự hào với toàn thế giới chắc chắn là Toán học của họ, đặc biệt là Hình học phát triển bậc nhất nhân loại đương thời. Không chỉ những tính toán và đo đạc của họ có độ chính xác cao, hệ thống lý thuyết Hình học của họ cũng được thiết lập hết sức chặt chẽ, một điều hiếm thấy ở các nền văn minh đương thời. Minh chứng rõ ràng nhất chính là bộ "Elements of Geometry" hay "Elements" (Cơ sở) của Euclid thành Alexandria. Tác phẩm là một bản tổng hợp các kiến thức tự cổ chí kim của nền Hình học Hy Lạp đồ sộ, được sắp xếp theo trình tự khoa học, và quan trọng nhất: có sự xuất hiện của tiên đề, một số ít các mệnh đề được thừa nhận, để các kết quả sau đó được phát triển chỉ dựa trên những tiên đề ấy. Dù lý luận chưa kín kẽ hoàn toàn, một số chứng minh vẫn còn những điều được ngầm thừa nhận và một số vẫn phụ thuộc vào hình vẽ, và các tiên đề vẫn chưa đầy đủ (về sau ta sẽ chỉ ra những lỗi này) "Elements" vẫn là một tác phẩm để đời của nhà sư phạm lỗi lạc.



THE ELEMENTS OF GEOMETRIE of the most auncient Philosopher EVCLIDE of Megara.

Faithfully (now first) translated into the Englishe toung, by H. Billingsley, Citizen of London. Whereunto are annexed certaine Scholies, Annotations, and Inuentions, of the best Mathematiciens, both of time past, and in this our age.

With a very fruitfull Praeface made by M. I. Dee, specifying the chiefe Mathematicall Sciēces, what they are, and wherunto commodious: where, also, are disclosed certaine new Secrets Mathematicall and Mechanicall, untill these our daies, greatly missed.

Imprinted at London by Iohn Daye.

Ngoài việc Hình học được đặt trên nền móng logic như trên, đã có hẳn một phái nghiên cứu những ý nghĩa huyền bí của nó, đứng đầu bởi không ai khác ngoài Pythagoras xứ Samos. Trong số những giáo lý của triết

[1] *THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam.*

gia bí ẩn này tới các môn đồ, Toán học giữ một vai trò cực kỳ quan trọng trong mục đích hàng đầu của họ – hiểu thêm về thực tại và triết lý. Những con số (với phái này "số" là các số nguyên dương khác 1) được cho là ẩn chứa những lời giải thích về bản chất của vũ trụ, từ đó dẫn đến cách mô tả đậm chất Thần số học của họ. Hình học Euclid lại được coi là mô tả chính xác cho không gian thực. Quan điểm này sẽ trở thành niềm tin chủ đạo của giới học thuật châu Âu, do sự tiếp thu tri thức từ Hy Lạp cổ đại.

Quay lại với Euclid, các tiên đề ông đưa ra sẽ là trọng tâm của chúng ta trong phần tới, đặc biệt là tiên đề cuối. Chúng lần lượt là:

1. Qua hai điểm bất kì, luôn luôn vẽ được một đường thẳng.
2. Có thể kéo dài một đoạn thẳng một đoạn dài hữu hạn theo hai hướng.
3. Với một điểm và một đoạn bất kỳ, luôn luôn vẽ được một đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là điểm và có độ dài bằng đoạn đã nêu.
4. Mọi góc vuông đều bằng nhau. Góc vuông được định nghĩa là góc bằng với góc bù của nó.
5. Nếu 2 đường thẳng tạo với 1 đường thẳng thứ 3 hai góc trong cùng phía mà có tổng nhỏ hơn hai góc vuông thì chúng sẽ cắt nhau về phía đó, khi cả hai được kéo dài vô hạn.

và 5 định đề (common notion):

1. Hai cái cùng bằng cái thứ ba thì bằng nhau.
2. Thêm những cái bằng nhau vào những cái bằng nhau thì được những cái bằng nhau.
3. Bớt đi những cái bằng nhau từ những cái bằng nhau thì được những cái bằng nhau.
4. Trùng nhau thì bằng nhau.
5. Toàn thể lớn hơn một phần.

Trước khi đi tiếp, chúng ta cần hai kết quả đáng lưu tâm trong Elements ở đây:

Định lý 16 của "Elements" Quyển I, tên khác là định lý góc ngoài, một dạng yếu hơn của định lý góc ngoài ta quen biết nhưng không cần tới tiên đề song song, khẳng định:

Trong một tam giác bất kỳ, góc ngoài của một đỉnh nào đó thì lớn hơn hai góc ở hai đỉnh còn lại.

Khi thừa nhận thêm tiên đề 5 thì góc ngoài sẽ bằng tổng hai góc ở hai đỉnh ấy luôn.

Định lý 27, định lý về góc so le trong:

Hai đường thẳng có một đường thứ ba cắt qua mà tạo với đường thứ ba hai góc so le trong bằng nhau thì là hai đường song song.

Hai định lý này (cùng một số mệnh đề ngầm được thừa nhận) đã chỉ ra sự tồn tại của hai đường thẳng song song, và có thể được chứng minh mà không sử dụng tiên đề số 5. Ba định đề đầu tiên còn đúng cả trong số học, trong khi định đề thứ 5 có một câu chuyện riêng, ta để dành lúc khác. Nên nhớ rằng, theo cách hiểu được duy trì trong thời gian dài, một tiên đề là một sự thật tự nó hiển nhiên.

Không khó để thấy tiên đề cuối cùng trông phức tạp hơn nhiều so với những tiên đề còn lại. Nó được trình bày dưới dạng giả thiết – kết luận, rồi còn chứa trong đó một giả sử hơi khó hình dung – hai đường được kéo dài vô hạn, dù hành động này trên thực tế là không thể kiểm chứng. Vì thế không ít người đã nghi ngờ rằng đây thực chất là một định lý, và không ít trong số họ đã đổ thời gian và tâm sức vào nhằm đưa ra một chứng minh thỏa đáng. Hẳn rồi, nếu một trong các nỗ lực đó chính xác thì đã chẳng có bài viết này, tất cả đều không tránh được lỗi ngầm thừa nhận một khẳng định nào đó hóa ra lại tương đương với tiên đề 5. Vậy là, kể từ khi thời Euclid, cho đến giai đoạn thất thoát sách vở Hy Lạp cổ đại, để rồi được những người Ả Rập tìm thấy và dựa vào đó đến phát triển, tới khi những lái buôn nơi đây đem Toán của mình tới châu Âu trong những cuộc giao thương, góp phần đánh thức nền Toán học chìm trong đêm dài Trung Cổ, cho tới mấy trăm năm "Elements" làm cuốn sách hình học mẫu mực trên lục địa, sau bao nhiêu thế hệ trí thức chung tay giải quyết, thứ hậu thế thu được từ các chứng minh sai lầm hầu như chỉ là các phát biểu lại của tiên đề cuối cùng.

Điều này không có nghĩa là công sức của họ là vô ích hoàn toàn, ngược lại, đây là một sự chuẩn bị cần thiết cho những diễn biến tới. Hãy cùng điểm qua một vài phát biểu như vậy:

– Playfair: Với một điểm M không nằm trên một đường thẳng d cho trước, qua M có đúng 1 đường thẳng song song với d.

– Định lý 30 trong "Elements": Nếu 3 đường thẳng a, b, c phân biệt và thỏa mãn: $a \parallel c$, $b \parallel c$, thì $a \parallel b$. Nói cách khác, quan hệ song song có tính bắc cầu.

– Farkas Bolyai: Luôn vẽ được một đường tròn đi qua cả 3 đỉnh của một tam giác nào đó.

– Wallis: Tồn tại hai tam giác đồng dạng nhưng không bằng nhau.

– Tồn tại tam giác nào đó mà tổng ba góc của nó là hai góc vuông.

– Định lý Pytago: tổng diện tích hai hình vuông có cạnh là hai cạnh góc vuông của tam giác vuông bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh huyền.

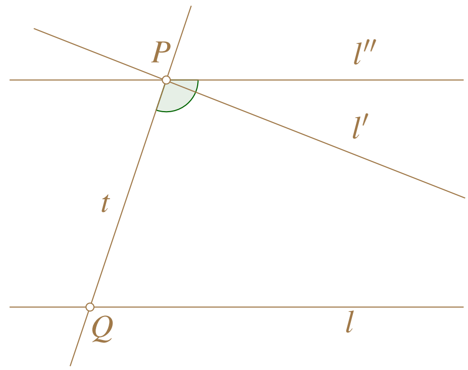
– Diện tích của tam giác không bị chặn.

– Góc nội tiếp chắn đường kính của đường tròn là góc vuông.

– Cho tứ giác $ABCD$ có các góc đỉnh A, B, C là 3 góc vuông, đây được gọi là một tứ giác Lambert. Khi ấy góc ở đỉnh D cũng vuông.

– Cho tứ giác $ABCD : AB = CD$ và các góc đỉnh B, C vuông. Ta gọi đây là một tứ giác Saccheri. Khi ấy góc đỉnh A và đỉnh D cũng vuông. Một phát biểu tương tự: hình chữ nhật có tồn tại.

Cách phát biểu đầu tiên là dạng được trình bày trong sách giáo khoa, được đặt tên theo Playfair ($1748 - 1819$), một giáo sư Toán tại Đại học Edinburgh, dù nó được nghiên cứu bởi Proclus từ tận những năm 400 TCN. Ta trình bày một chứng minh ngắn ở đây:



Chứng minh: (Playfair $\rightarrow$ Euclid) Gọi t là đường thẳng cắt cả hai đường thẳng l và l' cho trước. t cắt l tại Q, cắt l' tại P, hình thành hai góc trong cùng phía g_1 và g_2. Không mất tính tổng quát, giả sử $g_1 + g_2$ nhỏ hơn tổng độ lớn hai góc vuông.

Nếu ta đặt g_3 là góc bù của g_2, khác phía với g_1 và g_2, thì $g_3 + g_2 = 180 > g_1 + g_2$, dẫn đến $g_1 < g_3$. Qua P, kẻ đường thẳng l'' tạo với t một góc bằng và so le trong với g_3. Do $g_3 > g_1$, hai đường thẳng l' và l'' là hai đường thẳng phân biệt. Theo tiên đề Playfair, l' không thể song song với l, và phải cắt l tại một điểm hữu hạn R nào đó. Nếu R nằm khác phía với g_1 và g_2, thì g_1 là một góc ngoài của tam giác PQR. Theo định lý góc ngoài, g_1 sẽ lớn hơn g_3, điều này vô lý. Do đó R nằm cùng phía với g_1 và g_2, chứng minh được rằng tiên đề Playfair suy ra tiên đề song song.

Trong những cuộc tấn công không ngớt vào bài toán chứng minh tiên đề thứ 5, lịch sử đã đáng tiếc bỏ quên một công trình kỳ thú: Euclides ab omni naevo vindicatus ("Bào chữa cho mọi lỗi lầm của Euclid") của Girolamo Saccheri ($1667 - 1733$), một linh mục dòng Tên kiêm giáo sư tại đại học Pavia, Ý.

Saccheri được sinh vào ngày 5 tháng 9 năm 1667, ở San Remo, Ý, thuộc quyền kiểm soát của Genoa vào thời ấy. Năm 1865, khi lên 18 tuổi, ông tham gia Hội Tu sĩ Dòng Tên, và năm năm sau ông đến Milan để theo học triết học và thần học ở Brera, một đại học Dòng Tên. Tomasso Ceva, em trai của Giovanni Ceva (người có định lý nổi tiếng mang tên ông), đang là một giáo sư toán học ở đó, và khuyến khích Saccheri theo đuổi ngành học này.

Saccheri nhắm tới việc chứng tỏ rằng tiên đề thứ 5 thực chất là định lý, từ đó dập tắt chỉ trích của Ngài Henry Savile rằng tiên đề này là một "sai lầm" của hình học. Phương pháp ông sử dụng cũng là một kỹ thuật nổi bật Euclid áp dụng – reductio ad absurdum, cụm từ tiếng Latinh mang nghĩa "phản chứng". Ông tiếp cận nó theo cách nhìn của phát biểu tương đương cuối cùng trong danh sách trên: Cho tứ giác ABCD với $AD = BC$ và các góc đỉnh A, B vuông. Khi ấy góc đỉnh C cũng vuông. Người ta gọi nó là giả thiết góc vuông. Tứ giác Saccheri đã được nghiên cứu từ tận thế kỷ 12 bởi nhà thơ kiêm nhà toán học người Iran Omar Khayyam, vào thế kỷ 13 bởi nhà thiên văn học kiêm nhà toán học Nassir Adin trong một công trình có mục đích như của Saccheri, và về sau bởi một số học giả châu Âu như Clavius và Giordano Vitale. Tất nhiên tâm điểm nằm ở vị mục sư do ông đã phát triển xa hơn các tiền nhân nhiều. Không sử dụng tiên đề song song, ta chứng minh được hai góc đỉnh C và D bằng nhau (Saccheri 1) như sau:

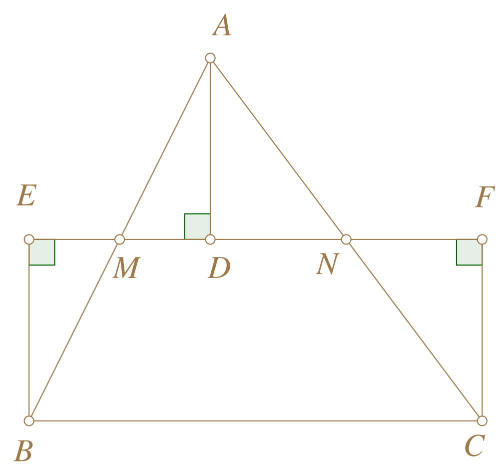
$\Delta BAD = \Delta ABC$ (c.g.c) vì $AD = BC$, $BAD = ABC = 90°$, và chung AB. Khi đó ta có $BD = AC$. Từ đây ta suy ra $\Delta ADC = \Delta BCD$ (c–c–c). Từ đây ta có 2 góc đỉnh C và D bằng nhau.

Saccheri quyết định giả sử phản chứng rằng hai góc C và D không phải góc vuông, từ đó cho ra hai trường hợp:

– C và D là hai góc tù (giả thuyết góc tù).

– C và D là hai góc nhọn (giả thuyết góc nhọn).

Đầu tiên ông chứng minh: nếu một trong hai giả thuyết này đúng với một tứ giác Saccheri nào đó, thì nó đúng với mọi tứ giác Saccheri. Sau đó ông chứng minh rằng giả thuyết góc tù sẽ dẫn đến tổng ba góc trong một tam giác bất kỳ là lớn hơn hai góc vuông, và ngược lại, giả thuyết góc nhọn sẽ dẫn đến tổng ba góc trong một tam giác bất kỳ nhỏ hơn hai góc vuông.



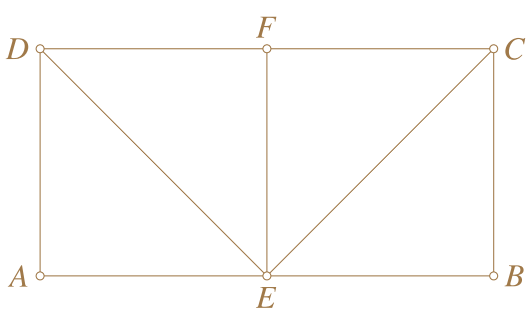
Thật vậy, với tam giác ABC bất kỳ, lấy M, N là trung điểm AB, AC, và gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của A, B, C lên MN. Lúc ấy $\Delta BEM = \Delta ADM$, và $\Delta ADN = \Delta CFN$. Khi đó ta có $BE = AD = CF$, và $\angle BEF = \angle CFE = 90$. Khi đó $EFCB$ là một tứ giác Saccheri vuông tại E và F. Qua cộng góc đơn giản ta chứng minh được tổng ba góc của tam giác chính là tổng hai góc B và C của tứ giác Saccheri $EFCB$.

Từ bước chuẩn bị này, Saccheri đã bác bỏ giả thuyết góc tù bằng một chuỗi 13 mệnh đề, rồi đến với kết luận sau cùng chính là tiên đề song song, một điều rõ ràng mâu thuẫn với giả sử giả thuyết góc tù đúng. Trích lời văn hoa mỹ của chính ông: “Giả thuyết góc tù hoàn toàn sai bởi nó tự thủ tiêu chính nó”.

Giả thuyết góc nhọn lại là một câu chuyện khác hẳn. Saccheri đã chứng minh hết định lý này đến định lý khác, nhưng chẳng mâu thuẫn nào lộ diện. Các kết quả được chứng minh cứ thế chất chồng, dần dần hình thành một hệ thống phức tạp không hề thua kém so với hình học phẳng thông thường. Nhưng Saccheri, quá tin tưởng vào sứ mệnh của bản thân, đã để niềm tin sẵn có vào hình học Euclid gây rối mạch tư duy logic. Ông coi một điểm ở vô cùng như một điểm bình thường trên mặt phẳng, rồi ngộ nhận một cách đáng tiếc.

Gần với thời điểm xuất bản tác phẩm của Saccheri, chúng ta có những nghiên cứu của Lambert về loại tứ giác mang tên ông như nói ở trên. Tương tự như Saccheri, Lambert dễ dàng loại bỏ giả thuyết góc tù, và cũng chứng minh nhiều định lý với giả thuyết góc nhọn. Khác với Saccheri, Lambert nhận ra rõ ràng rằng mình không tiến đến một sự phi mâu thuẫn nào. Lambert không cho xuất bản những công trình về sau.

Tứ giác Saccheri có một tính chất không cần tới tiên đề 5 như sau: đường nối trung điểm của AB và CD thì vuông góc với cả AB và CD (Saccheri 2). Khi ấy ta thấy một tứ giác Saccheri đã được chia ra thành hai tứ giác Lambert. Do đó ta có thể chủ yếu nghiên cứu tính chất của tứ giác Saccheri ở đây.



Gọi E, F lần lượt là trung điểm AB và CD. Khi ấy $\Delta ADE = \Delta BCE$ (c.g.c), góc bằng nhau ở đỉnh A và B. Từ đây có: $\angle AED = \angle BEC, \angle ADE = \angle BCE, DE = CE$. Theo Saccheri 1, $\angle ADC = \angle BCD$, kết hợp lại ta được:

$$\begin{aligned}\angle EDF = \angle EDC &= \angle ADC - \angle ADE \\ &= \angle BCD - \angle BCE \\ &= \angle ECD = \angle ECF.\end{aligned}$$

Do đó $\Delta DFE = \Delta CFE$ (c.g.c), suy ra $\angle DFE = \angle CFE$. Hai góc này bù nhau nên chúng là góc vuông. Cũng có $\angle DEF = \angle CEF$, cộng với $\angle DEA = \angle CEB$ có $\angle FEA = \angle FEB$, $\angle FEA$ bằng với góc bù với nó nên là góc vuông nốt.

Có thể thấy Saccheri đã hé mở cánh cửa tới một loại hình học nơi mà tiên đề song song bị bác bỏ, và dù ông đã hấp tấp đóng nó lại vì niềm tin vốn có, ý tưởng sử dụng phản chứng ông đưa ra là một bước tiến lớn. Trong số tiếp theo, chúng ta sẽ tìm hiểu quá trình khám phá của những người mở đường vào thế giới sau khe cửa hẹp đó.

Tài liệu tham khảo

– Wikipedia tiếng Anh.

– Euclidean and Non–Euclidean Geometries – Development and History (Marvin Jay Greenberg).

– Men of Mathematics The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré (Eric Temple Bell).

– The History of Mathematics An Introduction (David M. Burton).

– https: //www.youtube.com/playlist?list=PLjLK2cYtt-VBSBtvfhxx-DW3Zw3nOQHVZ

– https: //rosetta.vn/lequanganh/wp-content/ uploads/sites/7/2018/07/Riemann.pdf

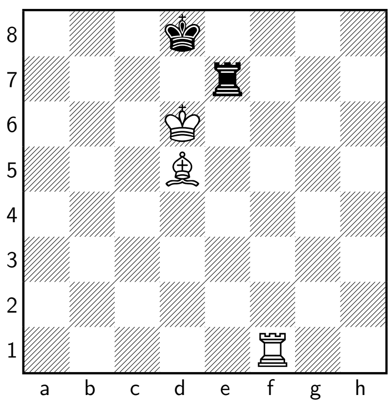
– https: //www.cut-the-knot.org/triangle/pythpar/Drama.shtml

XE VÀ TƯỢNG CHỐNG XE ĐƠN ĐỘC (Phần I)

BÙI VINH[1]

Lý thuyết cờ tàn cơ bản đều cho rằng xe và tượng chống xe không có tốt đều được coi là hòa cờ cơ bản. Tuy nhiên thực tế thi đấu cho thấy khả năng hòa cờ cho bên yếu không nhiều. Bên yếu cần phải chơi rất chính xác nếu muốn gỡ hòa. Trong bài học hôm nay, chúng tôi xin trình bày một số tình huống cơ bản

A. Philidor



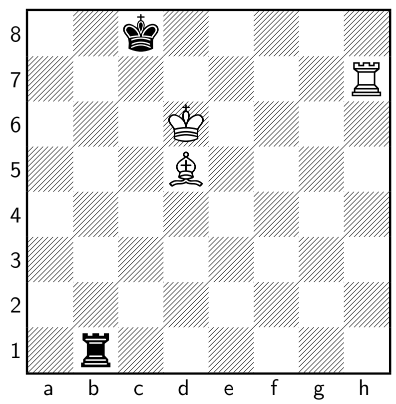
Hình 1. Trắng đi trước thắng, 1749.

1.Xf8+ Xe8 2.Xf7 Xe2 3.Xh7 (Hình 2) [Một nước đi chờ đợi]

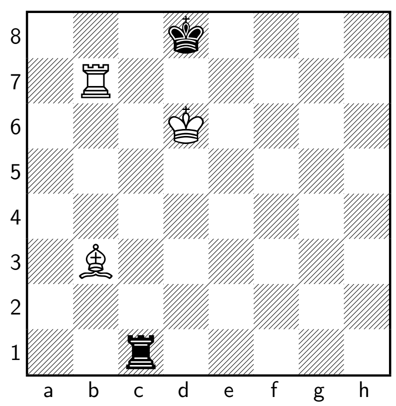
3...Xe1 4.Xb7! Xc1 [4...Vc8 5.Xa7 Xb1 6.Xh7!

6...Vb8 7.Xh8+ Va7 8.Xa8+ Vb6 9.Xb8+ Va5 10.Xxb1]

5.Tb3!!



Hình 2.



Hình 3.

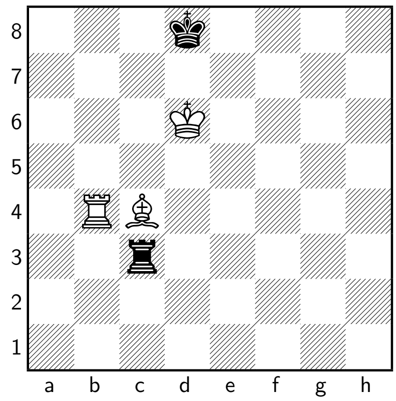
Kỹ thuật giành chiến thắng cơ bản của bên có tượng là tìm cách ép vua đối phương xuống hàng ngang số 8, 1 hoặc cột a,h. Sau đó phối hợp giữa xe và tượng thực hiện vừa che chắn

[1] *Đại kiện tướng quốc tế.*

cho vua khỏi các nước chiếu của xe đối bằng tượng trong khi đó dùng xe đe dọa chiếu hết.

5...Xc3 6.Te6! Xd3+ 7.Xd5 [Tượng trắng che chắn cho vua]

7...Xc3 8.Xd7+ Vc8 9.Xh7 Vb8 10.Xb7+ Vc8 11.Xb4 Vd8 12.Tc4!! (Hình 4). Trắng dùng Tượng ngăn cản xe đối phương phòng thủ ở ô c8.



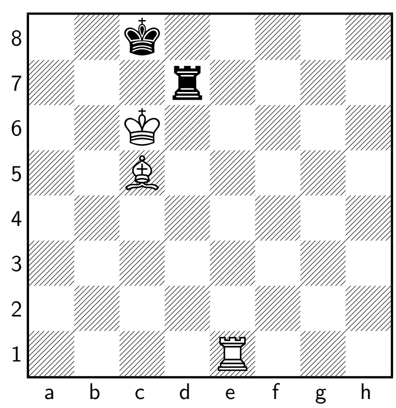
Hình 4.

Trắng đe dọa chiếu hết ở nước tiếp theo

12...Vc8 [12...Ve8 13.Xb8#]

13.Te6+ Vd8 14.Xb8+

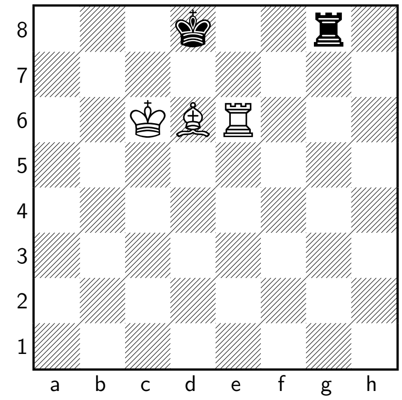
Lolli



Hình 5. *Trắng đi trước thắng*, 1763.

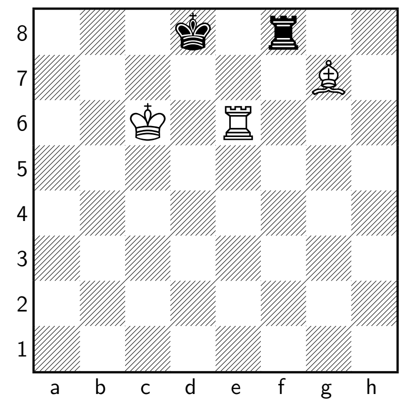
Trong rất nhiều trường hợp mặc dù xe đen cũng phòng thủ từ phía sau hoặc bên sườn, tuy nhiên bên mạnh cũng vẫn thắng.

1.Xe8+ Xd8 2.Xe7 Xd2 [Nếu 2...Xh8 3.Td6 Vd8 4.Xa7 Ve8 5.Xa8+; Nếu 2...Xg8 3.Td6 Vd8 4.Xe6! (Hình 6)



Hình 6.

4...Vc8 (4...Xh8 5.Te5 Xf8 6.Tg7! Trắng giam xe đen ở hàng ngang số 8

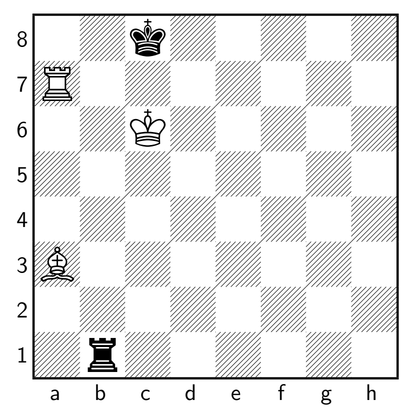


Hình 7.

6...Xg8 7.Tf6+ Vc8 8.Xe4 Xf8 9.Tg7 Xg8 10.Xa4 Vb8 (10...*Vd*8 11.*Xa*8+) 11.Te5+ Vc8 12.Xa8#) 5.Xe5 Vd8 6.Tc7+ Vc8 7.Xa5 Xg6+ 8.Td6+−]

3.Xf7! Xd1 [3...Xd8 4.Te7 Xg8 5.Xf5 Vb8 6.Td6+ Vc8 7.Xa5]

4.Xa7 Xb1 [4...Vb8 5.Xa4 Xc1 6.Xe4!]



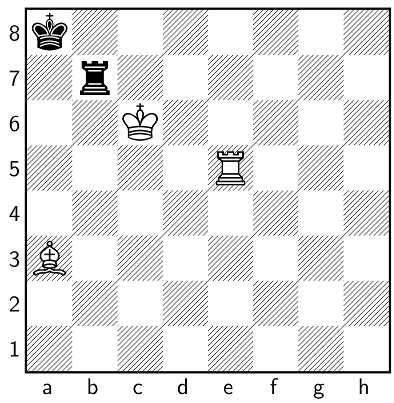
Hình 8.

5.Ta3!!

Nước cờ chìa khóa. Đen bị “xung xoang” vì không có nước đi cho xe.

5...Xb3 [Phương án khác cũng không tốt hơn cho đen 5...Vb8 6.Xe7 Va8 7.Xe4!! Xb7! 8.Xe5

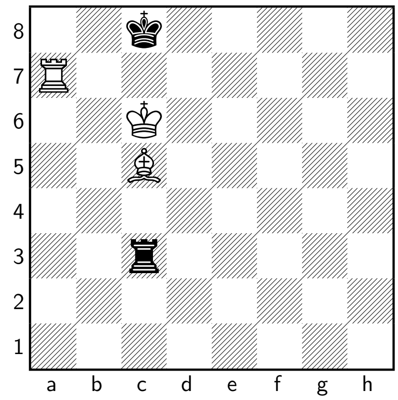
Đen bị “xung xoang” 8...Xf7 (8...Xb1 9.Xa5+ Vb8 10.Td6+ Vc8 11.Xa8+) 9.Xe8+ Va7 10.Tc5+ Va6 11.Xa8+ Trắng thắng]



Hình 9.

6.Td6! Xc3+ 7.Tc5

Tượng trắng phối hợp với vua và xe. Tượng vừa thực hiện việc che chắn cho vua và tấn công vua đối phương.



Hình 10.

7...Xb3 8.Xc7+ Vb8 [8...Vd8 9.Xf7]

9.Xe7 Va8 10.Xe4! [10.Xe8+ Xb8 11.Xe1]

10...Xb7 11.Xa4+ Vb8 12.Td6+ Vc8 13.Xa8+ Trắng thắng