



LỊCH SỬ CỦA GIẢ THUYẾT WEIL*

J. A. DIEUDONNÉ

(Người dịch: Phạm Khoa Bằng)

Câu chuyện của “các giả thuyết Weil” là một ví dụ kỳ diệu của trí tưởng tượng toán học, và là một trong những thí dụ đáng ngạc nhiên nhất biểu lộ sự thống nhất cơ bản của toán học. Những ý tưởng cốt lõi dẫn tới chứng minh của chúng tới từ sáu người: E. Artin, F. K. Schmidt, H. Hasse, A. Weil, A. Grothendieck, và P. Deligne, trong khoảng năm mươi năm (1923 – 1973).

1. Số nghiệm của phương trình đồng dư

Một cách đủ thích hợp, câu chuyện, như mọi vấn đề trong lý thuyết số, bắt đầu từ Gauss. Trong công trình về luật thuận nghịch bình phương của mình, ông đưa ra cái ngày nay được gọi là tổng Gauss (phổ biến nhất là tổng $\sum_{x=0}^{p-1} \exp(2\pi i x^2/p)$ với p nguyên tố); để tính các tổng này, bằng một số lập luận sơ cấp, ông suy ra cần tính số nghiệm của các phương trình đồng dư có các dạng

$$\begin{aligned} ax^3 - by^3 &\equiv 1 \pmod{p}, \\ ax^4 - by^4 &\equiv 1 \pmod{p}, \\ y^2 &\equiv ax^4 - 1 \pmod{p} \end{aligned} \quad (1)$$

trong đó a, b là các số nguyên cố định không chia hết cho p , nghiệm (x, y) được xét theo đồng dư modulo p (như vậy các phương trình đồng dư (1) được xem như các phương

trình trong trường \mathbb{F}_p); và p chạy trong một tập vô hạn các số nguyên tố; chúng ta đi tìm những biểu diễn *tiệm cận* (dưới dạng những hàm đơn giản của p) của số lượng các nghiệm. Một thời gian ngắn sau, Jacobi nhận xét rằng, ngược lại, bằng cách sử dụng các tính chất cơ bản của tổng Gauss, ta có thể thu được một đánh giá tốt về số nghiệm trong các trường hợp tổng quát hơn, ở đó các phương pháp sơ cấp trở nên cồng kềnh. Sau Jacobi, gần như không có nhiều tiến triển trong chủ đề này cho tới khi Hardy và Littlewood, trong khi nghiên cứu bài toán Waring để đưa ra các tính chất của “chuỗi kỳ dị”, thấy rằng cần phải đưa ra một đánh giá tiệm cận cho số nghiệm của phương trình đồng dư

$$x_1^k + \dots + x_r^k \equiv 0 \pmod{p}, \quad (2)$$

trong đó p là một số nguyên tố chạy tới $+\infty$. Hai ông đã sử dụng phương pháp của Jacobi cho mục đích này; tổng quát hơn, năm 1949, cả Hua-Vandier và A. Weil đã độc lập chứng minh rằng phương pháp này có thể đánh giá số nghiệm N của những phương trình

$$a_0 x_0^{k_0} + \dots + a_r x_r^{k_r} = 0 \quad (a_0, \dots, a_r \neq 0) \quad (3)$$

* Xuất bản lần đầu trong: *The Mathematical Intelligencer* 10, Springer, Berlin Heidelberg New York (1975) và được trích lại trong [1]

trong mọi trường hữu hạn \mathbb{F}_q với $q = p^m$ phần tử; kết quả được đưa ra

$$N = q^r + O(q^{(r+1)/2}). \quad (4)$$

Kết quả tương tự được đưa ra bởi Davenport (1931) và Mordell (1933) cho các phương trình dạng $y^m = P_n(x)$ trên \mathbb{F}_p , trong đó P_n là một đa thức bậc n ; với một số giá trị m, n nhỏ, họ thu được các đánh giá có dạng $N = p + O(p^{\phi(m,n)})$ trong đó $1/2 < \phi(m,n) < 1$.

2. Về hàm Zêta

Hay để chúng tôi nhắc lại các tính chất cổ điển của hàm zêta Riemann: nó xác định với $\Re(s) > 1$ bởi chuỗi $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, và thỏa mãn phương trình Euler

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \quad (5)$$

trong đó tích chạy trên tập tất cả các số nguyên tố. Riemann chứng minh rằng ζ có thể thắc triển thành một hàm phân hình trên mặt phẳng phức với một cực duy nhất tại $s = 1$, và nếu đặt

$$\xi = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s),$$

thì ξ là một hàm chỉnh hình trên toàn bộ mặt phẳng phức và thỏa mãn phương trình hàm $\xi(s) = \xi(1-s)$. Hơn nữa ông đề xuất giả thuyết Riemann (vẫn chưa được chứng minh) rằng mọi nghiệm của ξ nằm trên đường thẳng $\Re(s) = 1/2$.

Một thời gian ngắn sau, Dedekind mở rộng lý thuyết của Riemann lên một trường số K (mở rộng hữu hạn của \mathbb{Q}), bằng cách định nghĩa $\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} (N\mathfrak{a})^{-s}$, trong đó \mathfrak{a} chạy trên tất cả các ideal của vành \mathfrak{o} các số đại số nguyên trong K , chuẩn $N\mathfrak{a}$ là số phần tử của vành $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$. Ông mở rộng công thức Euler thành

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - (N\mathfrak{p})^{-s})^{-1}, \quad (6)$$

trong đó tích chạy trên tất cả các ideal nguyên tố \mathfrak{p} của \mathfrak{o} ; rất nhiều năm sau Hecke chứng minh rằng ζ_K có thể thắc triển thành một hàm phân hình và thỏa mãn một phương trình hàm tương tự như phương trình hàm Riemann cho ξ .

Một cách hình thức, ta thấy rằng phương trình (6) chỉ dùng hai tính chất của vành \mathfrak{o} : 1) \mathfrak{o} là một vành Dedekind; 2) trường $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ là hữu hạn với mọi ideal nguyên tố \mathfrak{p} : thật vậy, nếu $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{v_1} \dots \mathfrak{p}_r^{v_r}$ là một phân tích thành các ideal nguyên tố của ideal \mathfrak{a} thì $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ đẳng cấu với tích trực tiếp của các $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i^{v_i}$, và với mọi ideal nguyên tố \mathfrak{p} , mỗi $(\mathfrak{o}/\mathfrak{p})$ -module $\mathfrak{p}^h/\mathfrak{p}^{h+1}$ đẳng cấu với $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$; điều đó chứng tỏ rằng chuẩn là nhân tính, từ đó suy ra (6) một cách hình thức (chứng minh tính hội tụ của tích vô hạn cần một số ước lượng đơn giản về số các ideal nguyên tố với chuẩn cho trước). Năm 1923, E. Artin nhận xét rằng các tính chất này đúng cho các vành định nghĩa theo cách sau: bắt đầu với một trường hữu hạn \mathbb{F}_q , xét trường $K_0 = \mathbb{F}_q(T)$ các phân thức hữu tỷ, và một mở rộng toàn phương $K = K_0(v)$ với $v^2 = P(T)$, trong đó P là một đa thức không có nghiệm bội. Khi đó bao đóng nguyên \mathfrak{o} của $\mathbb{F}_q[T]$ trong K thỏa mãn các tính chất 1) và 2), $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ là một mở rộng hữu hạn của \mathbb{F}_q với mỗi ideal nguyên tố \mathfrak{p} ; rất dễ để chứng minh chuỗi và tích vô hạn trong định nghĩa của ζ_K hội tụ với $\Re(s) > 1$. Hơn nữa Artin còn thấy rằng lý thuyết này đơn giản hơn của Dedekind rất nhiều, lý do là các hàm của ông có thể viết dưới dạng $Z(q^{-s})$ trong đó $Z(u)$ là một hàm hữu tỷ với hệ số trong \mathbb{Q} ; phương trình hàm biểu diễn thương $Z(1/qu)/Z(u)$ bởi một hàm hữu tỷ với không điểm và cực cho trước; ông ấy sau đó giả thuyết rằng không điểm của $Z(u)$ tất cả đều nằm trên đường tròn $|u| = q^{1/2}$ và tự kiểm chứng giả thuyết này với rất nhiều đa thức P bậc nhỏ.

Bây giờ các ideal nguyên tố \mathfrak{p} sao cho $\mathfrak{o}/\mathfrak{p} \cong \mathbb{F}_q$ ($N\mathfrak{p} = q$) tương ứng một-một với các

đồng cấu $\mathfrak{o} \rightarrow \mathbb{F}_q$; mọi đồng cấu như vậy gửi (T, v) tới $(a, b) \in \mathbb{F}_q^2$ thỏa mãn $b^2 = P(a)$. Nói cách khác số nghiệm của phương trình $y^2 = P(x)$ trong \mathbb{F}_q^2 chính là số lượng N_1 các ideal nguyên tố kiểu này; tuy nhiên từ phương trình Euler (6) suy ra luôn rằng

$$\log Z(u) = N_1 u + \dots$$

gần $u = 0$, như vậy nghiên cứu $Z(u)$ giúp ta hiểu về N_1 . “Giả thuyết Riemann” của Artin sinh ra đánh giá

$$|N_1 - q| \leq c \cdot q^{1/2}, \quad (7)$$

và như vậy làm chặt hơn những kết quả trước đó của ông về bài toán đồng dư của Gauss.

3. Bước vào hình học đại số

Cho k là một trường giao hoán bất kỳ, người ta cố gắng hình dung tập nghiệm $(x_1, \dots, x_r) \in k^r$ của một phương trình $P(x_1, \dots, x_r) = 0$, với P là một đa thức bất khả quy trong $k[T_1, \dots, T_r]$ xem như một “siêu mặt đại số affine” (“đường cong” với $r = 2$, “mặt” với $r = 3$) trong “không gian affine” k^r . Hơn nữa, với mọi mở rộng trường $K \supset k$, ta có thể xét các nghiệm của $P(y_1, \dots, y_r)$ với giá trị y_i trong trường K lớn hơn, như vậy ta có một “siêu mặt đại số” V trong “không gian affine” K^r ; việc các hệ số của P nằm trong k giờ được thay bởi việc nói V xác định trên k . Kinh nghiệm cho thấy việc chuyển đổi giữa ngôn ngữ hình học và trực giác sang những đa tạp “trừu tượng” chỉ có ích khi K là *đồng đại số* (hãy thử nghĩ về $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ khi $k = \mathbb{R}$). Ta sẽ hạn chế sự quan tâm xuống trường hợp $K = \bar{k}$, bao đóng đại số của k ; hơn nữa, ta chỉ xét các siêu mặt V không kỳ dị trong \bar{k}^r , i.e. tại các điểm mà “siêu phẳng tiếp xúc” được định nghĩa duy nhất theo nghĩa thông thường (có nghĩa là tất cả các đạo hàm riêng không đồng thời triệt tiêu trong V). Với mọi điểm $x = (x_1, \dots, x_r) \in V$, toạ độ x_i nằm trong \bar{k} , do đó có một mở rộng hữu hạn nhỏ nhất $k(x)$ của k chứa tất cả x_j và $[k(x) : k] =$

$\deg(x)$ được gọi là *bậc* của điểm x . Nếu \mathfrak{m} là hạt nhân của đồng cấu $k[T_1, \dots, T_r] \rightarrow \bar{k}$ gửi mỗi T_i tới x_i thì \mathfrak{m} là một ideal cực đại của $k[T_1, \dots, T_r]$ và $k[T_1, \dots, T_r]/\mathfrak{m}$ đồng cấu với $k(x)$; ta viết $k(\mathfrak{m}) = k(x)$ và $\deg(\mathfrak{m}) = \deg(x)$; có thể chứng minh rằng mọi ideal cực đại \mathfrak{m} của $k[T_1, \dots, T_r]$ chứa $P(T_1, \dots, T_r)$ ứng với một điểm x của V với bậc $\deg(\mathfrak{m})$.

Khi $k = \mathbb{F}_q$, đặt

$$Z_V(u) = \prod_{P \in \mathfrak{m}} (1 - u^{\deg(\mathfrak{m})})^{-1}; \quad (8)$$

hàm $Z(u)$ định nghĩa bởi E. Artin bằng với hàm $Z_C(u)$, trong đó C là “đường cong affine” $x_2^2 - P(x_1) = 0$ xác định trên \mathbb{F}_q . Một cách tổng quát ta gọi Z_V là *hàm zêta* của V . Các điểm của V trong $(\mathbb{F}_q)^r$ là các điểm mà $\deg(x)$ là ước của n ; hiển nhiên số lượng các điểm như vậy $\leq q^{nr}$, như vậy số lượng các ideal cực đại \mathfrak{m} mà $P \in \mathfrak{m}$, tương ứng với các điểm này, có ước lượng *tiên nghiệm* $\leq q^{nr}$, điều này chứng tỏ rằng (8) hội tụ với u nhỏ; hơn nữa, với u nhỏ ta có thể viết

$$\begin{aligned} uZ'_V(u)/Z_V(u) &= \sum_{P \in \mathfrak{m}} \frac{\deg(\mathfrak{m})u^{\deg(\mathfrak{m})}}{1 - u^{\deg(\mathfrak{m})}} \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{P \in \mathfrak{m}} \deg(\mathfrak{m})u^{v\deg(\mathfrak{m})} \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} N_v u^v \end{aligned} \quad (9)$$

trong đó N_v là số điểm của V trong $(\mathbb{F}_{q^v})^r$.

Cách định nghĩa này có thể mở rộng cho các dạng đa tạp không kỳ dị khác, không nhất thiết phải bị nhúng trong “không gian affine” \bar{k}^r . Nói một cách theo lịch sử, ngôn ngữ của hình học đại số trong lý thuyết của các hàm zêta được giới thiệu vào năm 1931 bởi F. K. Schmidt, người nghiên cứu các đường cong *xã ảnh* không kỳ dị trên trường hữu hạn \mathbb{F}_q . Ông chứng minh rằng lý thuyết Dedekind–Weber của đường cong đại số trên \mathbb{C} (bao gồm định nghĩa về giống và định lý

Riemann–Roch) có thể mở rộng cho đường cong xạ ảnh trên một trường đóng đại số \bar{k} bất kỳ; điều này cho phép ông chứng minh rằng với mọi đường cong xạ ảnh không kỳ dị C với giống g định nghĩa trên \mathbb{F}_q , hàm zêta có thể biểu diễn dưới dạng

$$Z_C(u) = P_{2g}(u)/(1-u)(1-qu) \quad (10)$$

trong đó tử số là một đa thức bậc $2g$ với hệ số nguyên và ta có một phương trình hàm

$$Z_C(1/qu) = (qu^2)^{1-g} Z_C(u). \quad (11)$$

“Giả thuyết Riemann” cho C do đó nói rằng các không điểm của P_{2g} nằm trên đường tròn $|u| = q^{1/2}$; dẽ thấy điều này tương đương với bất đẳng thức

$$|N_v - q^v - 1| \leq 2g \cdot q^{1/2} \text{ với mọi } v \geq 1. \quad (12)$$

4. Mơ mộng về Tôpô đại số

Quay lại trường hợp siêu mặt V trong $(\mathbb{F}_q)^r$, nhận xét rằng các phần tử của $\bar{\mathbb{F}}_q$ thuộc \mathbb{F}_{q^n} chính là những phần tử mà $t^{q^n} = t$. Xét ánh xạ

$$\Phi : (x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1^q, \dots, x_r^q)$$

từ $(\bar{\mathbb{F}}_q)^r$ vào chính nó. Do hệ số của P nằm trong \mathbb{F}_q , do đó thỏa mãn $t^q = t$, ta có

$$P(\Phi(x)) = (P(x))^q,$$

do đó Φ ánh xạ V lên chính nó; hạn chế của Φ lên V được gọi là cấu xạ Frobenius của V . Năm 1936, Hasse nhận thấy rằng với một đường cong C , số N_v chính là số điểm $x \in C$ thỏa mãn $\Phi^v(x) = x$; i.e. x là một điểm bất động của Φ^v . Bây giờ, chúng ta hãy bỏ qua chuỗi các sự kiện mang tính niêm đại mà giả vờ rằng ta đang làm việc với các đa tạp đại số không kỳ dị “cổ điển” X trong một không gian xạ ảnh phức. Từ thời của Picard và Poincaré người ta đã nhận thấy rằng hầu

hết các tính chất của các đa tạp đại số được liên hệ chặt chẽ với các tính chất đồng điều. Trong phiên bản hiện thời (chủ yếu từ các công trình của Lefschetz và Hodge), với một đa tạp xạ ảnh không kỳ dị bất khả quy X chiều d trên \mathbb{C} (do đó là một đa tạp khả vi chiều $2d$), các tính chất này xoay quanh đại số đối đồng điều $H^\bullet(X) = \bigoplus_i H^i(X)$ của X trên trường K với đặc số 0; nó là một đại số phân bậc trên K , thỏa mãn các tính chất sau:

(A) 1. Mỗi $H^i(X)$ là một K -không gian vector hữu hạn chiều, bằng 0 ngoại trừ $0 \leq i \leq 2d$;

2. Tồn tại một đẳng cấu tự nhiên $H^{2d}(X) \xrightarrow{\sim} K$, và với mỗi i , phép nhân trên $H^\bullet(X)$ cho ta một phép ghép cặp không kỳ dị $H^i(X) \times H^{2d-i}(X) \rightarrow H^{2d}(X) \xrightarrow{\sim} K$ (đối ngẫu Poincaré) cho phép ta đồng nhất $H^{2d-i}(X)$ với

$$H_i(X) = \text{Hom}_K(H^i(X), K),$$

đồng điều của K tại chiều i .

3. Với các đa tạp không kỳ dị X, Y , tồn tại một đẳng cấu tự nhiên của các đại số phân bậc

$$H^\bullet(X) \otimes H^\bullet(Y) \cong H^\bullet(X \times Y) \\ (\text{công thức Künneth}).$$

(B) Mọi cấu xạ $f : X \rightarrow X$ định nghĩa tự nhiên, với mỗi i , một đồng cấu tuyến tính $f^{(i)} : H^i(X) \rightarrow H^i(X)$, sao cho các $f^{(i)}$ với $0 \leq i \leq 2d$ cảm sinh một đồng cấu $f^\bullet : H^\bullet(X) \rightarrow H^\bullet(X)$ của các đại số phân bậc. Các điểm bất động của f là phép chiếu lên X của giao của đồ thị Γ của f và đường chéo Δ của $X \times X$; nếu Γ giao hành với Δ tại mỗi điểm (nghĩa là các không gian tiếp xúc của chúng có giao chỉ là một điểm), số lượng điểm bất động của f được tính bởi công thức vết Lefschetz

$$N = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \text{Tr}(f^{(i)}). \quad (13)$$

(C) Nếu Y là một đa tạp con không kỳ dị của X với chiều $d - 1$, các ánh xạ tuyến tính tự nhiên $H^i(X) \rightarrow H^i(Y)$ là song ánh với $i \leq d - 2$ và đơn ánh với $i = d - 1$.

(D) Lấy $h \in H^2(X)$ từ đối ngẫu Poincaré ứng với lớp đồng điều trong $H_{2d-2}(X)$ của một lát cắt siêu phẳng của X , và xét $L : a \rightarrow ha$ là phép nhân trái bởi h trong $H^\bullet(X)$; khi đó $L^{d-i} : H^i(X) \rightarrow H^{2d-i}(X)$ là một đẳng cấu với $i \leq d$.

Một lập luận đại số đơn giản cho thấy nếu một cấu xạ $f : X \rightarrow X$ thỏa mãn $f^{(2)}(h) = q \cdot h$ với $q > 0$ là một số hữu tỷ, và nếu $g_i = q^{-i/2}f^{(i)}$ (xem như một tự đồng cấu của $H^i(X) \otimes_K \bar{K}$), g_i là song ánh, và g_i^{-1} được đồng nhất với ${}^t g_{2d-i}$ bởi đối ngẫu Poincaré. Điều này suy ra rằng nếu α_{ij} là các giá trị riêng của $f^{(i)}$ trong \bar{K} , tập các phần tử $q^{i/2}\alpha_{ij}$ trùng với tập các phần tử $\alpha_{2d-i,j}/q^{d-(i/2)}$.

(E) Trong mỗi $H^i(X)$ với $i \leq d$ có một không gian con $A^i(X)$ ổn định dưới tác động của $f^{(i)}$ với mọi cấu xạ $f : X \rightarrow X$, và trên mỗi $A^i(X)$, ta có thể trang bị một cấu trúc không gian vector trên trường các số hữu tỷ cùng một tích vô hướng không kỳ dị, sao cho: với mỗi f thỏa mãn (D) thì mỗi g_i là ánh xạ *unita* với tích vô hướng này; điều này suy ra tất cả các giá trị riêng của $f^{(i)}$ (là các phần tử của $\bar{\mathbb{Q}}$) có giá trị tuyệt đối là $q^{1/2}$.

Quay lại với siêu mặt V xác định trên \mathbb{F}_q , giả sử ta có thể gán với nó một đại số phân bậc $H^\bullet(V)$ có tất cả các tính chất vừa nêu, hơn nữa $\Phi^{(2)}(h) = q \cdot h$ trong đó Φ là đồng cấu Frobenius. Để thấy đồ thị của Φ^v giao hoành với Δ ; do đó, nếu α_{ij} là các giá trị riêng của $(\Phi^v)^{(i)}$, số N_v có thể cho bởi công thức

$$N_v = \sum_i (-1)^i \sum_j \alpha_{ij}^v; \quad (14)$$

và do đó ta có (với $d = r - 1 = \dim(V)$)

$$Z_V(u) = \frac{P_1(u)P_3(u)\dots P_{2d-1}(u)}{P_0(u)P_2(u)\dots P_{2d}(u)} \quad (15)$$

trong đó $P_i(u) = \deg(1 - u \cdot \Phi^{(i)})$ là một đa thức với hệ số nguyên. Nói riêng, $Z_V(u)$ là một hàm hữu tỷ; hơn nữa $Z_V(1/q^d u)$ nên có không điểm và cực giống với $Z_V(u)$ ngoại trừ khi $u = 0$, và ta nên có $|\alpha_{ij}| = q^{1/2}$. Cuối cùng, nếu tất cả hệ số của V là các lớp đồng dư mod p của các số nguyên, hệ số của một phương trình của một đa tạp không kỳ dị V_0 trong $\bar{\mathbb{Q}}^r$, bậc của mỗi P_i sẽ bằng số Betti thứ i của V_0 .

Các phát biểu trên là *các giả thuyết Weil* cho Z_V .

5. Những “phương án thay thế” cho đối đồng điều của Hasse và Weil

Để hiểu tại sao Weil đã có thể đi tới những khái niệm táo bạo như vậy, ta phải quay lại những ý tưởng đầu tiên của Hasse trong việc chứng minh “giả thuyết Riemann” cho các đường cong *giống 1* trên \mathbb{F}_q . Trong lý thuyết cổ điển của các đường cong không kỳ dị trên trường số phức, mỗi đường cong C được gán với *jacobian* $J = J(C)$, có thể xem như đối ngẫu Pontrjagin của nhóm đồng điều $H_1(C, \mathbb{Z})$; đối ngẫu này được dẫn ra từ dạng song tuyến tính $(\gamma, \omega) \mapsto \int_\gamma \omega$ định nghĩa trên các chu trình γ và các dạng vi phân abel chính hình ω trên diện Riemann C (“chu kỳ” của ω trên γ). Nếu C có giống g thì $J(C)$ là một xuyến phức \mathbb{C}^g/Δ trong đó Δ là một nhóm con rời rạc với hạng $2g$, thỏa mãn các điều kiện song tuyến tính Riemann cổ điển. Ta có thể định nghĩa J một cách đại số, bằng cách xét các nhóm cộng G/G_i của các lớp của các ước bậc 0 trên C , modulo quan hệ tương đương tuyến tính: ta gắn mỗi ước D bậc 0, vốn có thể viết dưới dạng $\partial\gamma$ với 1-xích γ trên diện Riemann, một lớp $\phi(D)$ trong \mathbb{C}^g/Δ của vector $(\int_\gamma \omega_1, \dots, \int_\gamma \omega_g)$, trong đó các ω_j lập thành một cơ sở của không gian các dạng vi phân chính hình; định lý Abel-Jacobi nói rằng phép tương ứng này là toàn ánh và có hạt nhân G_i . Từ đó có thể trang bị cho J một cấu trúc *nhóm đại số* (một trường hợp cụ thể

của nhóm đại số trên \mathbb{C} được biết đến như *các đa tạp abel*) với sự giúp đỡ của các điều kiện (siêu việt) song tuyến tính Riemann. Cuối cùng, nếu x_0 là một điểm trên \mathbb{C} ,

$$x \mapsto \phi((x) - (x_0))$$

là một cấu xạ từ \mathbb{C} vào \mathbb{J} và là đẳng cấu nếu $g = 1$.

Phương pháp đầu tiên của Hasse để làm việc với các đường cong \mathbb{C} giống 1 xác định trên \mathbb{F}_q là “nâng” \mathbb{C} thành một đường cong \mathbb{C}_0 “cổ điển” giống 1 xác định trên trường các số hữu tỷ \mathbb{Q} : nếu E là trường các hàm hữu tỷ trên \mathbb{C} , ông chứng minh rằng ta có thể xác định \mathbb{C}_0 sao cho, nếu ω_1, ω_2 là các hàm chu kỳ của các hàm elliptic ứng với \mathbb{C}_0 (nên trường E_0 của các hàm này là trường các hàm hữu tỷ trên \mathbb{C}_0), ω_1/ω_2 phải sinh ra một trường toàn phương ảo K trên \mathbb{Q} , và E sẽ là trường thặng dư của vành các số nguyên của K modulo một ideal nguyên tố khéo chọn nào đó. Hasse từ đó đã có thể dùng các kết quả cổ điển về “các phép nhân phức” của \mathbb{C}_0 (i.e. tự đồng cấu của jacobian $\mathbb{J}(\mathbb{C}_0)$) để xác định số điểm của \mathbb{C} với bậc 1, và chứng minh “giả thuyết Riemann” cho \mathbb{C} .

Một thời gian ngắn sau, Hasse từ bỏ phương pháp trên và thay thế bằng một phương pháp có tính nội tại hơn: như đã nói ở trên, $\mathbb{J}(\mathbb{C})$ có thể định nghĩa một cách đại số như một nhóm “trừu tượng”, và cấu xạ Frobenius định nghĩa tự nhiên một tự đồng cấu của nhóm đó; Hasse chứng minh rằng tử số của hàm zêta $Z_{\mathbb{C}}$ trong (10) (trong trường hợp này là một đa thức bậc 2) được đồng nhất với đa thức đặc trưng của tự đồng cấu đó. Công cụ mà ông giới thiệu cho mục đích này là một số nguyên $v(\lambda)$ gắn với mỗi tự toàn cầu λ của $\mathbb{J}(\mathbb{C})$: nếu E là trường các hàm hữu tỷ của \mathbb{C} , λ định nghĩa một “đổi cấu xạ” (comorphism) $R(\lambda)$, một tự đẳng cấu của E và $v(\lambda)$ là bậc $[E : R(\lambda)(E)]$, hữu hạn khi λ là toàn cầu. Hasse chứng minh rằng với mọi số nguyên

a, b thì

$$v(a \cdot 1 + b \cdot \lambda) = a^2 + \sigma(\lambda)ab + v(\lambda)b^2$$

với mọi tự toàn cầu λ của $\mathbb{J}(\mathbb{C})$, tính xác định dương của dạng toàn phương này cho ông chứng minh của “giả thuyết Riemann”.

Việc mở rộng những ý tưởng này cho các đường cong \mathbb{C} giống g bất kỳ trên \mathbb{F}_q là không hề hiển nhiên: lý thuyết cổ điển chứng minh rằng $\mathbb{J}(\mathbb{C})$ nên là một nhóm đại số g chiều (thay vì đẳng cấu với \mathbb{C} như một đa tạp đại số trong trường hợp của Hasse), và cho tới tận năm 1940 không ai mở rộng lý thuyết của các nhóm đại số trên trường đặc số $p > 0$ sang hình học đại số, và nói riêng lý thuyết của các đa tạp abel. Điều này đã được thực hiện một mình bởi A. Weil, người đầu tiên phải phát triển, trong cuốn sách nổi tiếng *Foundations of algebraic geometry*, các tính chất cơ bản của các số giao một cách độc lập mà không viễn tới tôpô đại số. Sau đó ông đã có thể nghiên cứu cấu trúc vành của các tự đồng cấu của một đa tạp abel A ; với mọi tự toàn cầu λ của A , Weil định nghĩa số nguyên $v(\lambda)$ như Hasse, (bây giờ E là trường các hàm hữu tỷ trên A) và lần này chứng minh

$$\begin{aligned} & v(a \cdot 1 + b \cdot \lambda) \\ &= a^{2g} + \sigma(\lambda)a^{2g-1}b + \dots + v(\lambda)b^{2g}. \end{aligned}$$

Bất biến $\sigma(\lambda)$ được xem như một “thay thế” đóng vai trò của $\text{Tr}(f^{(1)})$ khi λ là tự đồng cấu của $\mathbb{J}(\mathbb{C})$ ứng với một cấu xạ f của \mathbb{C} . Một “thay thế” cho đổi ngẫu Poincaré được phát hiện trong một đổi ngẫu tổng quát cho các đa tạp abel mà có thể định nghĩa nghĩa hoàn toàn đại số (trong trường hợp cổ điển người ta định nghĩa nó bởi đổi ngẫu Pontrjagin); cuối cùng, nếu λ' là “chuyển vị” của một tự đồng cấu λ trong đổi ngẫu này thì ta có thể chứng minh $\sigma(\lambda\lambda') > 0$ với $\lambda \neq 0$, tính chất này (xem như một “thay thế” cho tính xác định dương của tích vô hướng Hodge) cho phép Weil đưa ra chứng minh của “giả

thuyết Riemann” cho đường cong có giống bất kỳ.

Trong tất cả các công trình này, Weil đã không ngừng giữ trong trí óc ông lý thuyết cổ điển của các “tương ứng” phát triển bởi Hurwicz: một tương ứng trên C có thể xem như một cấu xạ “đa trị”, mà cụ thể hơn như một đường cong Γ trên diện $C \times C$; tốt hơn nữa, nó được định nghĩa như một ước (tổ hợp tuyến tính của các đường cong) trên $C \times C$. Một tương ứng Γ gắn một cách tự nhiên (bắt chước phiên bản lý thuyết tập hợp) mỗi ước D trên C (tổ hợp tuyến tính của các điểm) một ước khác $\Gamma(D)$, một lần nữa điều này định nghĩa một tự đồng cấu của $J(C)$; ngược lại có thể chỉ ra rằng mọi tự đồng cấu của $J(C)$ đều thu được từ cách định nghĩa này. Trong trường hợp cổ điển, công thức Lefschetz (13) có thể được mở rộng để cho số giao của một tương ứng Γ với “tương ứng đồng nhất”, i.e. đường chéo Δ của $C \times C$, và thực tế điều này đã được chứng minh bởi Hurwicz vào năm 1866, sử dụng lý thuyết tích phân abel; sự thật là Weil đã có thể chứng minh một công thức tương tự bằng các công cụ thuần túy đại số, điều đã dẫn ông đến chỗ đề xuất các giả thuyết mang tên mình.

6. Đồi đồng điều étale và định lý của Deligne

Sử dụng kết quả của mình cho các đường cong, Weil đã chứng minh được các giả thuyết của chính ông với các siêu mặt dạng (3), cũng như cho những đa tạp khác như các đa tạp Grassman. Nhưng tại thời điểm đó không có một lý thuyết đồi đồng điều nào đủ “tốt” đã được định nghĩa. Khoảng năm 1953, Cartan và Serre đã dùng đồi đồng điều Leray với hệ số là các bó như một công cụ cực kỳ hữu hiệu để nghiên cứu các đa tạp phức, và Serre đã chỉ ra làm cách nào để chuyển các kỹ thuật này sang các đa tạp đại số trên một trường đóng đại số với đặc số p . Nhưng khi

$p > 0$, những nhóm đối đồng điều mới đó được định nghĩa hiển nhiên không thể được sử dụng bởi công thức Lefschetz (13), trong đó về trái bắt buộc phải là một số nguyên, mà không phải một phần tử của một trường có đặc số p . Chỉ sau khi Grothendieck xây dựng lý thuyết lược đồ mà, từ một lưu ý của Serre, thì cậu ấy đã có thể mở rộng ý tưởng ban đầu theo cả hai hướng “tôpô” và “bó”, gắn mỗi đa tạp (hoặc lược đồ) X một đại số đồi đồng điều $H^\bullet(X_{et}, \mathbb{Q}_l)$ trên trường l -adic \mathbb{Q}_l , trong đó l là một số nguyên tố khác với đặc số của trường ban đầu (sự can thiệp của các trường l -adic trong những câu hỏi này đã được nhận ra bởi Weil và Deuring).

Độ sâu sắc và phức tạp của các kỹ thuật liên quan trong định nghĩa của “đồi đồng điều étale” $H^\bullet(X_{et})$ như thế để loại trừ mọi khả năng trong việc đưa ra bất kỳ một chi tiết nào nữa trong định nghĩa của nó. Hãy để chúng tôi chỉ ra Grothendieck (với sự giúp đỡ của M. Artin (con trai của E. Artin) và J. L. Verdier) đã có thể chứng minh các tính chất (A), (B), (C)¹ ở trên và gần đây Deligne đã chứng minh (D) cũng đúng với mọi đa tạp trên một trường hữu hạn \mathbb{F}_q ; tuy nhiên không một tính chất nào tương tự như (E) đã được chứng minh cho đồi đồng điều étale (hoặc bất kỳ một lý thuyết đồi đồng điều nào được đưa ra gần đây). Các tính chất (A), (B), (C) là đủ để chứng minh (15), cũng như phương trình hàm

$$Z_V(1/q^d u) = \pm q^{n\chi/2} u^\chi Z_V(u)$$

trong đó

$$\chi = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \dim H^i(X_{et}, \mathbb{Q}_l).$$

Tuy nhiên, chỉ đến gần đây người ta mới biết rằng các hệ số của P_j trong (15) là độc lập với số nguyên tố l . Điều này cuối cùng cũng được chứng minh bởi Deligne năm 1973,

¹ Trước khi đồi đồng điều l -adic được định nghĩa, Dwork đã chứng minh, bằng cách khéo léo sử dụng các hàm giải tích p -adic, rằng hàm zêta $Z_V(u)$ là hữu tỷ.

cùng với phần cuối và khó nhất của các giả thuyết Weil là $|\alpha_{ij}| = q^{1/2}$.

Ở đây lần nữa, cần nhớ rằng không thể mô tả một cách chi tiết các chứng minh cực kỳ khéo léo, điều này hơi khác với chứng minh của Hasse và Weil, do nó không thể dựa trên một lập luận “tính dương”. Ta hạn chế bài toán xuống trường hợp $i = d$ (i.e. đối đồng điều “trung tâm” $H^d(X)$); việc chứng minh rằng $|\alpha_{dj}| = q^{d/2}$ thì tương đương với

$$q^{(d-1)/2} \leq |\alpha_{dj}| \leq q^{(d+1)/2} \quad (18)$$

bởi vì nếu ta áp dụng kết quả này với tích X^k , và sử dụng công thức Künneth, ta có

$$q^{(kd-1)/2} \leq |\alpha_{dj}^k| \leq q^{(kd+1)/2}$$

sau đó cho k tiến tới $+\infty$ và thu được kết quả. Thật chí trong (18) ta có thể giả sử là d chẵn và sau đó có thể chứng minh bằng quy nạp theo số chẵn d ; đây là một bước sâu sắc và khó trong chứng minh, dựa trên kỹ thuật “đơn đạo” cũ từ Picard và Lefschetz: kỹ thuật này hoàn toàn mang tính tôpô trong trường hợp cổ điển, nhưng nó cũng đã được chuyển

sang đối đồng điều étale bởi Grothendieck và những người cùng trường phái của cậu ấy.

Như thường thấy trong toán học, sự đột phá này mở ra một con đường trong việc khai phá các vấn đề mới; nhưng chừng nào bài toán ban đầu của Gauss còn được quan tâm, nó là điểm cuối của vấn đề, vì định lý của Deligne suy ra rằng, số các điểm bậc 1 của một siêu mặt xạ ảnh không kỳ dị d chiều thỏa mãn đánh giá

$$\left| N - (1 + q + \dots + q^d) \right| \leq bq^{d/2}$$

trong đó thậm chí hằng số b có thể tính cụ thể: nó là số Betti thứ d của các siêu mặt trên \mathbb{C} cùng bậc với V .

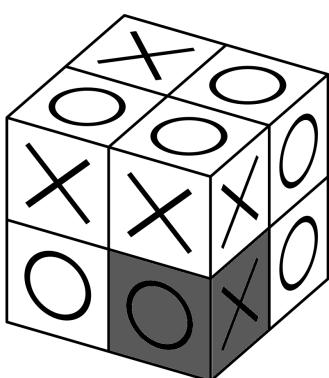
Tài liệu tham khảo

[1] Eberhard Freitag and Reinhardt Kiehl. *Étale cohomology and the Weil conjecture*, volume 13 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. Translated from the German by Betty S. Waterhouse and William C. Waterhouse, With an historical introduction by J. A. Dieudonné.

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Đố vui

Hãy hình dung khối lập phương bao gồm tám khối lập phương đơn vị.



Hãy quan sát khối lập phương đơn vị được tô màu xám như trong hình. Cho dù Bi có điền dấu gì ở mặt bên dưới của khối lập phương này thì cũng không thỏa mãn yêu cầu của thầy giáo: nếu bạn điền dấu X thì mặt chứa dấu O sẽ được bao quanh bởi 3 ô có dấu X và 1 ô có dấu O , còn nếu bạn điền dấu O thì mặt chứa dấu X sẽ được bao quanh bởi 3 ô có dấu O và 1 ô có dấu X !



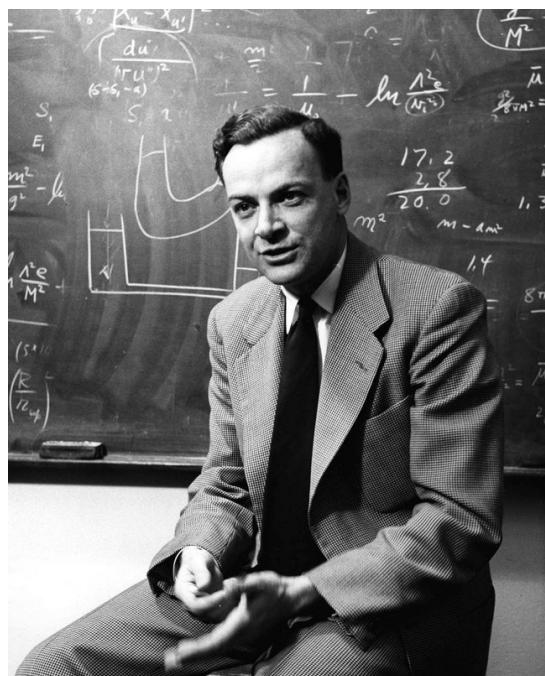
ĐAM MÊ NHƯ FEYNMAN

NGUYỄN VĂN LIỄN¹

Richard Feynman (1918 – 1988, Mỹ) nổi tiếng là người trung thực không khoan nhượng và đam mê đến tận cùng. Về tính trung thực, người ta hay nhắc đến vụ ông trình diễn trực tiếp trên TV một “thí nghiệm nhỏ”, bỏ vòng cao su vào cốc nước đá, minh chứng rằng cao su mất tính đàn hồi ở nhiệt độ thấp, qua đó chỉ ra nguyên nhân dẫn đến thảm họa tàu vũ trụ con thoi “Challenger”, vạch trần chiến dịch tung hỏa mù của NASA về nguyên nhân của thảm họa này. Để công bố với người dân Mỹ sự thật ấy, Feynman đã phải vượt qua sức ép khủng khiếp từ các cơ quan công quyền Mỹ, trong đó có CIA và NASA.

Feynman lăm đam mê. Đam mê vật lý, Feynman nhận giải Nobel Vật lý năm 1965. Đam mê chơi trống, vở ba-lê do ông đảm trống nhận giải nhất trong cuộc thi ba-lê toàn nước Mỹ và giải nhì trong cuộc thi quốc tế tại Paris. Đam mê vẽ, ông đã có triển lãm tranh riêng. Không rõ ông biết những ngôn ngữ nào, chỉ biết thăm Brazil ông dạy bằng tiếng Bồ, thăm Nhật ông giao du bằng tiếng Nhật. Rồi có lần bạn bè định “cho ông một vố”, họ nhờ một cô Hoa kiều đón tiếp ông bằng tiếng Trung, Feynman đáp lại và cô ấy kêu trời, vì ông nói tiếng Quảng Đông, còn cô chỉ nói tiếng Bắc Kinh. Rất nhiều “đam mê” kiểu như vậy được kể trong cuốn

“Feynman, chuyện thật như đùa” (NXB Trẻ) và hầu như tất cả đều có kết cục mỹ mãn, kiểu như giải Nobel. Có thể bạn nghĩ chắc ông này “con nhà nòi”, học “trường quốc tế” từ nhỏ! Xin thưa, bố của Feynman là người bán rong bán quần áo, còn mẹ thì nội trợ.



Richard Feynman (ảnh từ bộ sưu tập của Viện Công nghệ California – CalTech).

Ông chơi trống bongo cực giỏi, nhưng chưa bao giờ học nhạc lý. Ông vốn vẽ rất kém, tự nhận chẳng thể vẽ nổi cái gì ngoại trừ cái kim

¹ Viện Vật lý.

tự tháp chỉ gồm mấy đường thẳng. Để học vẽ, Feynman “đổi công” với một họa sĩ: ông dạy vật lý cho họa sĩ còn họa sĩ dạy vẽ cho ông. Hãy tưởng tượng một giáo sư nổi tiếng thế giới ngồi trong lớp vẽ cùng các cháu 8 – 9 tuổi học cách gọt bút chì. Đam mê như thế chỉ có ở Feynman. Và, với ông đam mê chính là nguồn cội của thành công, chứ chẳng phải “con nhà nòi” hay “trường quốc tế” nào cả. Tiền bạc và chứng chỉ đầy người, mà không đam mê gì, thì làm sao có thành quả!



Feynman chơi trống bên con trai (ảnh từ Internet).

Duy có đam mê cuối cùng, Feynman đã không kịp nhìn thấy những gì mình muốn, trước khi về cõi vĩnh hằng. Đó là “Cuộc phiêu lưu cuối cùng của Feynman”². Cuộc phiêu lưu khởi đầu bằng một con tem có xuất xứ từ một nơi gọi là Tannu Tuva, mà Feynman có được từ khi còn nhỏ. Cái tên “Tuva” xa lạ nằm yên trong đầu Feynman, cho đến một ngày hè 1977 nó trở thành mục tiêu cho “cuộc phiêu lưu” kéo dài hơn 10 năm cuối của cuộc đời ông. Tôi cược là nhiều bạn chưa biết Tuva là địa danh nào và ở đâu. Để đỡ tra cứu, xin “bật mí” ngay: đó là tên một quốc gia nhỏ nằm giáp phía Tây Bắc của Mông Cổ, vốn độc lập, nhưng đã sáp nhập vào Liên Xô cũ (và Nga ngày nay). Thủ đô của Tuva là Kyzyl. Tuva có gì đặc biệt mà

khiến Feynman mê mệt đến vậy?

Bạn có biết đâu là trọng tâm của châu Á (lục địa thôi chứ không tính các đảo)? Lấy tấm bìa cứng phẳng, vẽ lên đó bản đồ châu Á, cắt theo đường biên để được miếng bìa hình châu Á lục địa. Dùng một chiếc bút đầu nhọn chống phía dưới tấm bìa, di di đầu bút, để tìm vị trí mà tấm bìa nằm cân bằng trên chiếc bút thẳng đứng. Vị trí đó rơi vào Kyzyl, trọng tâm của châu Á. Tất nhiên, các nhà khoa học xác định điểm này bằng các phương pháp chính xác hơn, và ngày nay ở Kyzyl có tấm bia lớn khẳng định vị trí đặc biệt của thành phố này. Nhưng, chỉ chừng ấy thì không đủ để Feynman mất tới cả chục năm tìm cách tới thăm Tuva.



Feynman vẽ Hans Bethe (giải Nobel Vật lý 1967).

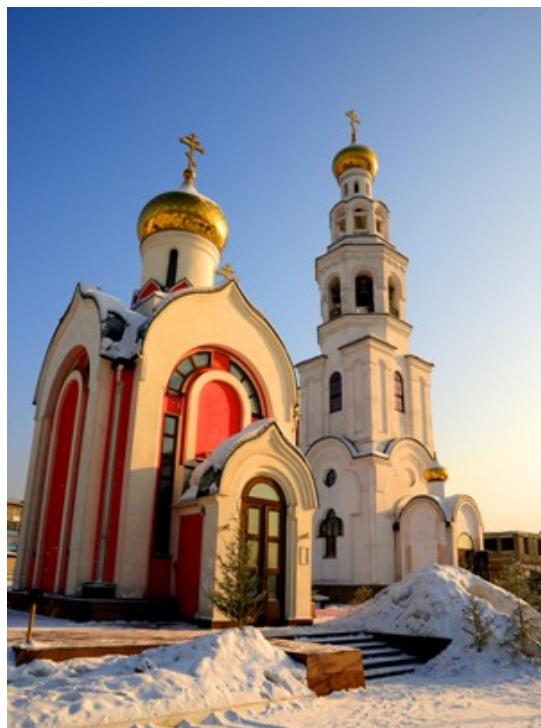
Cái chính là ở quốc gia tí xíu bao bọc bởi những dãy núi cao ấy, thời gian gần như ngừng trôi: tất cả vẫn nguyên sơ như 500 hay 1000 năm trước. Thảo nguyên hoang dại. Những đàn tuần lộc hay bò Tây Tạng cũng dường như hoang dại. Cuộc sống du mục không thể tự nhiên hơn. Một nền văn

²Xem thêm: *Cuộc phiêu lưu cuối cùng của Feynman*, in lần 2, NXB Trẻ, 2023.

hóa xa xưa và kỳ thú với kiểu hát hai giọng chỉ có ở Tuva, với thứ văn tự không thể tìm thấy trong bất cứ tự điển nào, với các tập tục rất lạ điều hành bởi các tù trưởng uy nghi và bí ẩn v.v. Tiếc là ít người biết Tuva, chứ không, người ta đã gọi quốc gia này là “Thảo nguyên Xanh” cuối cùng của hành tinh Trái Đất (như Congo là Hành tinh Xanh cuối cùng). Đam mê Tuva, Feynman tìm đọc mọi tài liệu về Tuva, tìm hiểu văn tự Tuva, học cách hát của dân du mục Tuva, ăn mặc và trang trí như tù trưởng Tuva ...Và, nhất là, ông tìm mọi cách để có thể đến thăm Tuva.

Đó là thời Chiến tranh Lạnh, lại nghe nói, gần Tuva có một cơ sở nghiên cứu bom nguyên tử, nên nơi đây là “vùng cấm” với khách du lịch, nhất là khách nước ngoài. Thực ra, Viện Hàn lâm Khoa học Liên Xô sẵn sàng mời Feynman sang Moscow đọc bài giảng rồi đi “tham quan Kyzyl” theo kiểu mặc com-lê ở khách sạn có người bảo vệ v.v. Nhưng Feynman không thích như vậy, mà muốn tự mình mang ba-lô đến thảo nguyên, ngủ lều, uống sữa tuần lộc và hát hai giọng cùng dân bản xứ. Ấy thế cho nên ông mất cả chục năm tìm kiếm một giấy mời như mình muốn. Và, đầu tháng Ba 1988, một giấy mời như thế đã gửi đến địa chỉ của Feynman, chỉ

tiếc là hai tuần trước đó, vào ngày 15 tháng Hai, ông đã ra đi mãi mãi, nên chỉ có thể trải nghiệm “Cuộc phiêu lưu cuối cùng” của mình trong tâm trí và trái tim của những người ở lại. Không rõ, ở Thế giới bên kia Feynman đang đam mê gì?



Nhà thờ Phục sinh ở Kyzyl, Tuva (ảnh từ Internet).

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Tìm ra người đặc biệt

a) Ta sẽ chỉ ra chiến thuật dẫn tới mục đích phát hiện ra nhân viên **Z** sau đúng $(n - 1)$ câu hỏi. Đầu tiên, Xuân Phong chọn hai người tuỳ ý là **A** và **B**. Xuân Phong hỏi nhân viên **A** câu hỏi: “Anh có biết **B** không?” Nếu câu trả lời là “Có” thì **B** không phải là **Z**. Còn nếu câu trả lời là “Không” thì **A** không phải là **Z**. Như vậy, với một câu hỏi được đưa ra thì một người sẽ loại ra, tiếp theo không cần phải hỏi anh ta và cũng không cần hỏi về anh ta nữa. Cứ tiếp tục kiểu như vậy, ta loại đi

$(n - 1)$ người sau khi hỏi $(n - 1)$ câu hỏi. Còn lại đúng một người. Anh ta chính là nhân viên **Z**.

b) Ta sẽ chỉ ra Xuân Phong phải hỏi không ít hơn $(n - 1)$ câu hỏi.

Giả sử tại một bước nào đó của cuộc điều tra, Xuân Phong hỏi một nhân viên **A**, anh ta có biết nhân viên **B** hay không. Trong trường hợp câu trả lời “có”, ta sẽ coi **B** là được đánh dấu, còn trong trường hợp câu trả lời là “không”, ta sẽ coi **A** là được đánh dấu.

(Xem tiếp trang 64)

MVSM NƠI ƯƠM MẦM TOÁN HỌC TRẺ

Trong bối cảnh cách mạng công nghệ phát triển như vũ bão, thị trường lao động thế giới ngày càng thêm “khát” nhân sự giỏi Toán và tiếng Anh.



Trường Toán Minh Việt - Minh Việt School of Math (MVSM) đã kết hợp với The Arts of Problem Solving (AoPS) - Chương trình giáo dục Toán học nâng cao số 1 tại Hoa Kỳ và hàng đầu thế giới, để mở ra mô hình học tập Toán ưu việt nhất.

SỨ MỆNH MVSM



CHƯƠNG TRÌNH ĐÀO TẠO

- Đối tượng:** Học sinh tiểu học từ lớp 1 tới lớp 5
- Giáo trình học:** Beast Academy của AoPS
- Phương thức:** Học sinh học Online cùng giáo viên Mỹ
- Thời gian học:**
 - Lớp Toán:** 1 buổi/ tuần, chỉ với 5 triệu đồng/năm
 - Lớp Tiếng Anh bổ trợ:** 4 buổi/tuần, 6 triệu đồng/năm.
(Phụ huynh có thể đăng ký cho con chỉ học Toán, chỉ học tiếng Anh hoặc học cả Toán và tiếng Anh.)
- Khai giảng năm học 2023-2024: 18/6/2023**

Những học sinh xuất sắc của MVSM sẽ được tặng học bổng một phần hoặc toàn phần và được giới thiệu học Câu lạc bộ Toán Kỹ Lân với những Giáo sư Toán học hàng đầu Việt Nam.

Beast ACADEMY

By Art of Problem Solving



ĐỌC THÊM





ĐỀ THI TUYỂN SINH NĂM 2023-2024

CÂU LẠC BỘ TOÁN HỌC

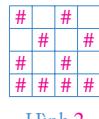
UNICORN MATH CIRCLE (Phần II)

Trong số này, tạp chí Pi tiếp tục giới thiệu đến với bạn đọc đề thi tuyển sinh năm 2023 – 2024 dành cho các bạn học sinh lớp 5. Các bạn có thể thử sức làm của mình trong khoảng thời gian 90 phút.

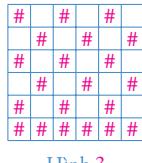
Bài 1. Dựa vào quy luật, hãy cho biết có bao nhiêu dấu thăng trong hình thứ tám của dãy hình sau.



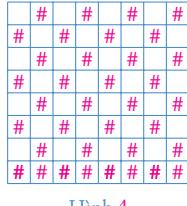
Hình 1



Hình 2



Hình 3



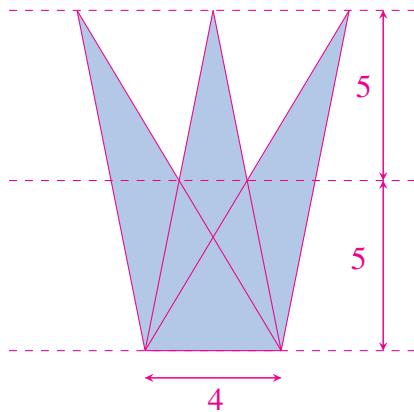
Hình 4

Bài 2. Bạn Tâm xếp các số 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3 vào các ô vuông trong hình dưới đây (mỗi ô một số) để tạo thành phép trừ của hai số có 4 chữ số. Hỏi hiệu nhận được lớn nhất có thể là bao nhiêu?

Chú ý: *một số có bốn chữ số không được bắt đầu bằng số 0.*

$$\boxed{} \quad - \quad \boxed{}$$

Bài 3. Diện tích của hình được tô đậm bên dưới bằng bao nhiêu?



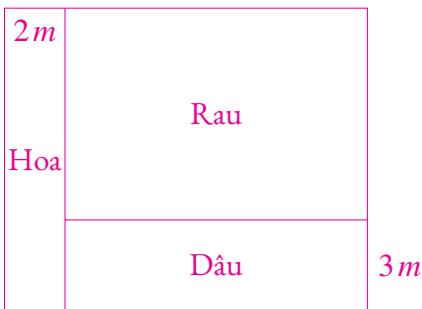
Bài 4. Trong bảng ô vuông cỡ 4×4 có điền các số khác 0 sao cho tích của 4 số trong mỗi hàng, mỗi cột đều bằng nhau. Cho biết các số trong 9 ô như hình vẽ, hỏi số ở ô có dấu * bằng bao nhiêu?

$\frac{1}{2}$	32		
	4	8	2
4	1		
32		*	16

Bài 5. Khu vườn của gia đình Tâm được minh họa bằng hình chữ nhật trong hình dưới đây. Biết rằng khu vườn có diện tích

*Nguồn: Câu lạc bộ Toán học Unicorn (UMC)

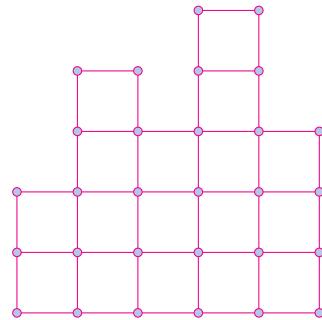
120m^2 và được chia thành ba luống hình chữ nhật. Phần tròng hoa rộng 2m , diện tích 20m^2 , phần tròng dâu rộng 3m . Hỏi diện tích phần tròng rau là bao nhiêu?



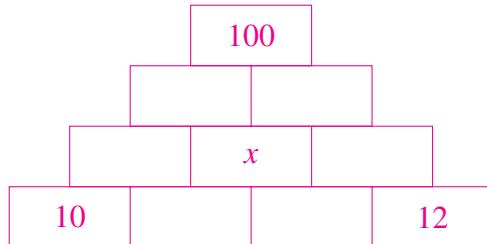
Bài 6. Ba bạn An, Bình, Chi chia đều nhau 30 chiếc kẹo. An ăn một số chiếc kẹo; Bình ăn một số kẹo bằng với số kẹo mà An còn; Chi ăn số kẹo bằng với tổng số kẹo mà An và Bình đã ăn. Hỏi còn lại bao nhiêu chiếc kẹo?

Bài 7. Một bác nông dân chở một xe ô tô quất cảnh ra chợ Tết để bán. Sau khi bán hết cây quất cuối cùng với giá 230 nghìn đồng, bác tính nhẩm lại thấy mình đã bán số cây quất với giá trung bình là 245 nghìn đồng/cây. Nhưng người mua cây quất cuối quay trở lại và chỉ cho bác thấy cành quất bị rụng quá nhiều lá, nên ông ta chỉ đồng ý mua với giá 158 nghìn đồng. Bác chấp thuận và bán cây quất đó. Khi nhẩm tính lại, bác nông dân thấy giá trung bình của xe quất bây giờ là 242 nghìn đồng. Hỏi bác đã bán được bao nhiêu cây quất?

Bài 8. Có bao nhiêu cách xếp 5 viên bi giống hệt nhau vào các ô hình vuông ở hình vẽ sau sao cho mỗi ô có không quá 1 viên bi và không có 2 viên bi nào trên cùng 1 hàng hoặc 1 cột?



Bài 9. Mỗi ô trong hình bên được điền một số sao cho: số được ghi trong mỗi ô ở 3 hàng trên cùng bằng tổng 2 số ở hai ô ngay bên dưới nó. Cho biết trước 3 số như trong hình vẽ, hỏi số nào phải được điền vào ô có chữ x ?



Bài 10. Sau khi sạc điện thoại di động, bạn Kiên nhận ra mình đã quên mã PIN (mã gồm 4 chữ số). Kiên nhớ là mã PIN bắt đầu bằng số 1 , kết thúc bằng số 3 và các chữ số trong mã đều khác nhau. Có bao nhiêu số khác nhau cho mã PIN của Kiên?

Xem lời giải/đáp án trang...

TÌM RA NGƯỜI ĐẶC BIỆT

GIA DƯƠNG

Thám tử Xuân Phong phải cải trang thành một nhà báo để tìm hiểu về một công ty nước giải khát có uy tín, tuy nhiên mới đây đã bắt ngòi bị lộ bí mật về công thức pha chế với đối thủ cạnh tranh. Trong vai trò của một nhà báo, Xuân Phong tham gia một buổi họp đặc biệt gồm n nhân viên chủ chốt của công ty. Xuân Phong được biết rằng, trong số n người này có một người, có bí danh là Z, biết toàn bộ mọi nhân viên còn lại, tuy nhiên không một ai trong số $n - 1$ người còn lại lại biết anh ta. Người có bí danh Z này có thể cho Xuân Phong đầu mối vì sao công thức pha chế bị lộ ra ngoài.

Xuân Phong có thể tới cạnh mỗi một người bất kỳ trong buổi họp, và hỏi anh ta câu hỏi sau: “Anh có biết <một người nào đó> không?” (trong ngoặc <> là một người cụ thể nào đó trong số những người còn lại). Rất may, khác với mọi lần, lần này tất cả n

người đều nói thật, và Xuân Phong có thể hỏi một người nhiều hơn một lần.

a) Hỏi Xuân Phong có thể xác định được ai là Z sau khi đưa ra ít hơn n câu hỏi được hay không?

b) Tìm số câu hỏi ít nhất đủ để Xuân Phong luôn tìm được nhân viên Z. Em hãy chứng minh rằng không thể hỏi ít hơn số câu hỏi như vậy được.



CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

1. Nàng Lọ Lem đi lạc vào trong rừng. Theo lời khuyên của bà tiên, nàng tìm thấy ba chiếc rương đựng những hạt dẻ có thể đem lại điều ước. Chiếc rương thứ nhất có ít hơn 6 hạt dẻ



so với tổng số hạt dẻ ở hai chiếc rương còn lại. Chiếc rương thứ hai có ít hơn 10 hạt dẻ so với tổng số hạt dẻ ở chiếc rương thứ nhất và thứ ba. Hỏi trong chiếc rương thứ ba có bao nhiêu hạt dẻ?

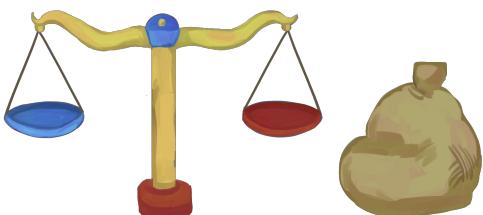
2. Bạn Vân viết 150 chữ số xung quanh một vòng tròn. Nếu đọc 150 chữ số này theo chiều kim đồng hồ bắt đầu từ một chỗ nào đó bất kì, thì Vân thấy số nhận được chia hết cho 27. Em hãy chứng minh rằng, nếu Vân bắt đầu từ bất kỳ một chỗ khác và đọc ngược chiều kim đồng hồ toàn bộ 150 chữ số đã viết, thì bạn cũng nhận được một số chia hết cho 27.



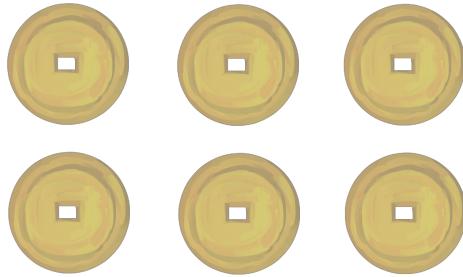
3. Có ba tên cướp ăn trộm được 10 viên kim cương trong một két sắt với tổng giá trị là 4000000 dollar. Chúng dự định sẽ phân chia những viên kim cương này cho nhau để mỗi tên có được ít nhất 1000000 dollar. Khi bị cảnh sát truy đuổi, một viên kim cương trị giá 600000 dollar bị rơi mất, và vì thế chúng không thể chia được những viên kim cương như dự định ban đầu. Hỏi ba tên cướp này có bị nhầm lẫn ở đâu không, hay là trước khi bị rơi viên kim cương, việc chia đồ ăn trộm của chúng đã không thể thực hiện được theo như dự định?



4. Bác Tâm mua một bao tải gạo nặng 9 kg. Bác muốn chia ra thành hai túi nhỏ hơn, một túi nặng 2 kg, còn túi kia nặng 7 kg. Bác chỉ có một bàn cân đĩa thăng bằng với hai quả cân, một quả nặng 50 g, còn quả kia nặng 200 g. Em hãy giúp bác Tâm thực hiện phép san gạo ra hai túi nhỏ như trên chỉ tối đa sau ba lần cân.



5. Có 6 đồng xu hình thức bên ngoài giống hệt nhau. Bốn đồng xu trong số đó là thật, mỗi đồng có khối lượng đúng 4 g, còn hai đồng xu là giả có tổng khối lượng là 8 g nhưng có một đồng nặng hơn một chút, còn một đồng nhẹ hơn một chút. Hỏi có thể sử dụng một bàn cân thăng bằng (không có quả cân) để sau tối đa bốn lần cân phát hiện được hai đồng xu giả được hay không?



6. Trong một giải vô địch đá bóng của trường, đội dành huy chương vàng có được tổng số điểm là 7, đội dành huy chương bạc có tổng số điểm là 5, còn đội dành huy chương đồng có tổng số điểm là 3. Biết rằng trong giải đấu này các đội thi đấu theo hình thức vòng tròn 1 lượt, mỗi đội thi đấu với một đội khác đúng một trận, và trong mỗi trận mỗi đội sẽ nhận được 2 điểm nếu thắng, 1 điểm nếu hòa, 0 điểm nếu thua. Nếu hai đội có cùng tổng số điểm thì vị trí thứ tự sẽ được xác định bằng hiệu số bàn thắng và bàn thua. Hỏi

- a) Đội đứng ở vị trí thấp nhất có được tổng số điểm là bao nhiêu?
b) Có bao nhiêu đội tham gia giải vô địch.



LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 9 năm 2023)

- 1.** Tại thành phố Hoa Hướng Dương, trong số các cậu bé tí hon có **5** cậu ngày nào cũng ăn bánh rán ngọt, có **7** cậu bé cứ cách một ngày lại ăn bánh rán ngọt, còn tất cả các cậu bé tí hon còn lại không bao giờ ăn bánh rán ngọt. Ngày hôm qua có **9** cậu bé tí hon đã ăn bánh rán ngọt. Hỏi trong ngày hôm nay sẽ có bao nhiêu cậu bé tí hon ăn bánh rán ngọt?

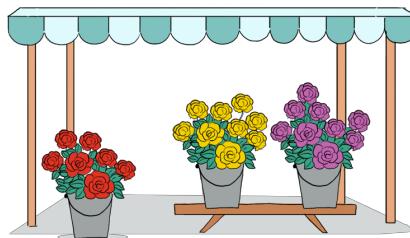


Lời giải. Trong số **9** cậu bé tí hon ăn bánh rán ngọt ngày hôm qua có **5** cậu ăn bánh rán mỗi ngày, như vậy **4** cậu còn lại ăn bánh rán cách **1** ngày. Do đó trong ngày hôm nay **4** cậu này sẽ không ăn bánh rán, còn những cậu bé còn lại (có **3** cậu) trong số các cậu ăn bánh cách **1** ngày lại sẽ ăn bánh. Vì thế **3** cậu này sẽ ăn bánh trong ngày hôm nay, cùng với cả **5** cậu ăn bánh rán mỗi ngày. Ta có đáp số là: **$3 + 5 = 8$** (cậu bé tí hon).

- 2.** Một cửa hàng bán hoa tươi có ba loại hoa hồng: hồng tím, hồng vàng và hồng đỏ. Số hoa hồng tím bằng một nửa tổng số hoa hồng vàng và hồng đỏ. Số hoa hồng đỏ lại bằng một phần ba tổng số hoa hồng vàng và số hoa hồng tím. Biết rằng số hoa hồng vàng là **45** bông. Hỏi cửa hàng có bao nhiêu hoa hồng tím và hoa hồng đỏ?

Lời giải. Số hoa hồng tím bằng một nửa tổng số hoa hồng vàng và hồng đỏ, có nghĩa là số hoa hồng tím bằng **$1/3$** tổng số hoa hồng. Tương tự, số hoa hồng đỏ chiếm **$1/4$** tổng số hoa hồng. Ta có thể vẽ sơ đồ đoạn thẳng,

có độ dài bằng **12** đoạn nhỏ (cho thuận tiện việc biểu diễn $1/3$ và $1/4$ tổng số). Số hoa hồng tím tương ứng **4** đoạn nhỏ, còn số hoa hồng đỏ tương ứng **3** đoạn. Suy ra số hoa hồng vàng tương ứng với **$12 - 3 - 4 = 5$** (đoạn). Như vậy mỗi đoạn nhỏ tương ứng với **$45/5 = 9$** (bông hoa). Do đó, số hoa hồng tím là **$4 \times 9 = 36$** (bông) và số hoa hồng đỏ là **$3 \times 9 = 27$** (bông).



- 3.** Thỏ Hồng đi đón **3** cậu bạn của mình là Ngựa Đốm, Ngựa Bạch và Gấu Nâu lặn lội đến thăm nhà mình. Vừa ra tới bìa rừng, Thỏ Hồng đã thấy lờ mờ ba bạn đứng hàng ngang ở xa xa ngoài bãi cỏ, nhưng vì sương mù dày đặc, Thỏ Hồng không thể nhận ra ai với ai. Thỏ Hồng bèn kêu các bạn tự giới thiệu để biết được từng vị khách. Cậu bạn đứng ở ngoài cùng bên trái từ vị trí quan sát của Thỏ Hồng nói rằng: “Có Gấu Nâu đứng cạnh tôi đây”. Cậu bạn đứng ở ngoài cùng bên tay phải, lại tuyên bố rằng: “Đó là Ngựa Bạch vừa nói với cậu đấy”. Cuối cùng, cậu bạn đứng ở giữa, thông báo rằng: “Bên tay trái của tôi là Ngựa Đốm đấy”. Các em hãy tìm ra bạn nào đứng ở đâu trong số **3** người bạn của Thỏ Hồng, biết rằng Ngựa Đốm thì chuyên nói dối, Ngựa Bạch thì thỉnh thoảng nói dối, còn Gấu Nâu thì không bao giờ nói dối Thỏ Hồng.

Lời giải. Nếu như Gấu Nâu đứng ở ngoài cùng bên trái (từ vị trí quan sát của Thỏ

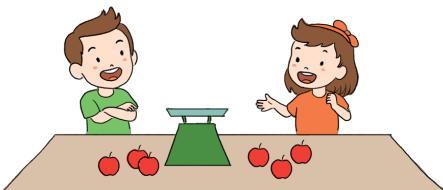
Hồng), thì cậu bạn đứng giữa cũng phải là Gấu Nâu – điều này là mâu thuẫn. Nếu như Gấu Nâu đứng ở giữa, thì bên tay phải (theo Thỏ Hồng quan sát) sẽ là Ngựa Đốm, còn bên ngoài cùng tay trái sẽ là Ngựa Bạch. Nhưng như vậy, Ngựa Đốm sẽ nói thật, ta lại suy ra mâu thuẫn.



Cuối cùng, chỉ khi Gấu Nâu đứng ngoài cùng bên phải ta mới không gặp mâu thuẫn. Khi đó ngoài cùng tay trái là Ngựa Bạch, ở giữa là Ngựa Đốm – hai cậu bạn này đều nói dối.

Đáp số: Từ chỗ quan sát của Thỏ Hồng, ngoài cùng tay trái là Ngựa Bạch, ở giữa là Ngựa Đốm, còn đứng ngoài cùng bên phải là Gấu Nâu.

4. Có 7 quả táo, khối lượng mỗi quả có thể khác nhau để ở trên bàn. Bạn Thịnh nhận thấy rằng có thể đặt 3 quả trên một đĩa cân và 4 quả còn lại trên đĩa cân bên kia sao cho hai bên cân thăng bằng. Bạn Thịnh lại thấy rằng có thể đặt 2 quả táo trên một đĩa cân, và 5 quả còn lại trên đĩa cân bên kia và hai bên cân cũng thăng bằng. Em hãy chỉ ra rằng có thể đặt trên một đĩa cân bên này 1 quả táo và đặt trên đĩa cân bên kia 3 quả táo trong số 7 quả đã cho, sao cho hai bên cân cũng vẫn thăng bằng.



Lời giải. Để dễ dàng hình dung, ta có thể giả sử rằng Thịnh đặt được 3 quả táo đỏ ở đĩa cân bên trái và 4 quả táo xanh ở đĩa cân bên phải để cân thăng bằng. Vì vậy nếu Thịnh đặt

bất kỳ hai quả táo cùng màu ở một bên và 5 quả còn lại ở đĩa bên kia thì 5 quả này sẽ luôn nặng hơn (điều này cũng tương đương với việc có những quả táo nào đó sau lần cân thăng bằng của Thịnh đã bị chuyển sang đĩa cân bên kia).

Vì vậy để cho cân thăng bằng, Thịnh chỉ có thể đặt hai quả táo khác màu trên một đĩa cân, và 5 quả còn lại sang đĩa bên kia. Nhưng điều này cũng tương đương với việc sau khi Thịnh đã cân được thăng bằng, Thịnh đã đổi chỗ 2 quả táo đỏ với 1 quả táo xanh. Nếu như bỏ 3 quả này đi, thì trên một đĩa cân có 1 quả táo đỏ và trên đĩa bên kia có 3 quả táo xanh, và hòn nữa cân hai bên vẫn thăng bằng.

Các em có thể làm bài này bằng lập luận theo dạng của biểu thức đại số, lập ra hai phương trình và tìm hiệu của chúng.

5. Có 20 chiếc túi nilon, mỗi túi đựng 26 quả mận. Biết rằng tổng khối lượng của mỗi túi không vượt quá 1 kg. Em hãy chỉ ra rằng có thể xếp số mận trên vào 26 chiếc túi nilon, mỗi túi có đúng 20 quả mận, sao cho tổng khối lượng của mỗi túi nhỏ hơn 1 kg.



Lời giải. Ta nhặt ra từ mỗi túi ban đầu quả mận nhẹ nhất và xếp chúng vào chiếc túi thứ 21. Do mỗi quả nhẹ nhất này có khối lượng không quá $\frac{1}{26}$ kg, nên tổng khối lượng của

20 quả được nhặt ra này không quá $\frac{20}{26} < 1$ (kg). Hơn nữa khối lượng của mỗi túi ban đầu giờ đều nhẹ hơn 1 kg, và trong mỗi túi có đúng 25 quả. Ta lại lặp lại quá trình trên: nhặt ra trong mỗi túi trong số 20 túi ban đầu quả mận nhẹ nhất (tức là quả mận nhẹ thứ

nhì, sau khi đã nhặt ra lần đầu tiên), và đưa **20** quả này vào chiếc túi thứ **22**, khi đó tổng khối lượng mận ở chiếc túi thứ **22** này sẽ nhỏ hơn $\frac{20}{25}$ (kg). Ta cứ làm như vậy, cho đến khi đạt đến chiếc túi thứ **26** (sau **6** lần nhặt ra).

6. Có **100** số **1, 2, 3, …, 100** được viết ra thành hàng ngang từ trái qua phải theo thứ tự tăng dần. Bạn Long và bạn Lâm chơi một trò chơi như sau. Hai bạn lần lượt đến lượt chơi của mình sẽ đặt duy nhất một trong các dấu **+**, **-** hoặc **×** vào vị trí bất kỳ xen kẽ giữa hai số trong **100** số nói trên. Bạn đi lượt cuối cùng sẽ thắng nếu số nhận được bằng cách



thực hiện phép tính bởi **100** số và các phép tính đã diễn giữa chúng là một số lẻ. Em hãy chỉ ra rằng nếu Long là người đi đầu tiên (và cũng sẽ là người đi cuối cùng) thì Long luôn có cách chơi để thắng.

Lời giải. Trước tiên, trong lượt đi đầu tiên, Long sẽ đặt dấu **+** vào bên tay phải số **1**. Sau đó cứ mỗi lượt chơi của mình, Long sẽ đặt dấu **×** (vào bên trái hoặc bên phải) bên cạnh mỗi số lẻ trong số các số lẻ từ **3** đến **99**. Để ý rằng Long sẽ luôn làm được như vậy, do mỗi số lẻ có hai vị trí bên cạnh có thể diễn dấu. Bằng cách đặt dấu **×** giữa một số lẻ và một số chẵn đứng cạnh nó, Long làm cho biểu thức đứng bên phải số **1** là một biểu thức chỉ chứa phép cộng, trừ, hoặc nhân các số chẵn với nhau, tức là biểu thức đó là một số chẵn. Vì thế kết quả nhận được ở lượt đi cuối cùng của Long sẽ luôn là một số lẻ sau khi cộng thêm **1**.

Đáp án

Bài 1. Nhận thấy Hình thứ **n** trong dây là một hình vuông có các đặc điểm sau:

- Cạnh hình vuông có kích thước là: $2 \times n$;
- Hàng cuối có $2 \times n$ dấu **#** và các hàng còn lại có **n** dấu **#**.

Như vậy số dấu **#** trong Hình thứ **8** là:

$$15 \times 8 + 16 = 136.$$

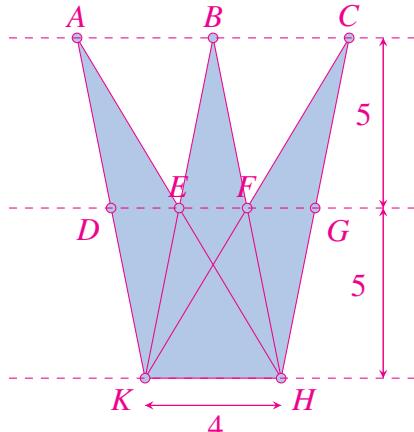
Bài 2. Để hiệu nhận được là lớn nhất thì số bị trừ là số lớn nhất có **4** chữ số và số trừ sẽ nhỏ nhất có **4** chữ số tạo từ các số đã cho.

Do đó số bị trừ là **3222** và số trừ là **1001** và ta có hiệu lớn nhất có thể là:

$$3222 - 1001 = 2221.$$

Bài 3. Ta viết tên các điểm như trong hình vẽ dưới đây.

Nhận thấy phần tô đậm có diện tích bằng tổng diện tích của các tam giác sau. **BKH**, **ADE**, **DEK**, **CFG** và **FGH**.



Tam giác **BKH** có đáy $BK = 4$ và chiều cao bằng **10**, do đó có diện tích là:

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 10 = 20.$$

Các tam giác **ADE**, **DEK**, **CFG** và **FGH** có các đáy $DE = EF = FG = 2$ và chiều cao bằng **5**, do đó có cùng diện tích là:

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 5.$$

Vậy diện tích của phần tô đậm là:

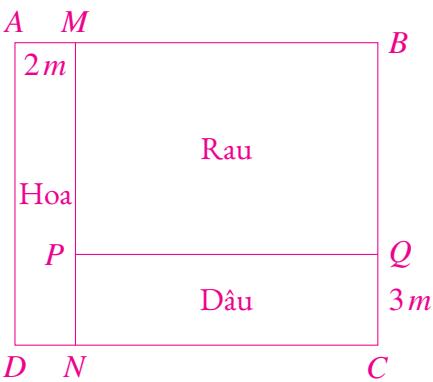
$$20 + 4 \times 5 = 40 \text{ (đơn vị diện tích)}$$

Bài 4. Do tích của mỗi hàng và mỗi cột đều bằng nhau nên tích các số của cột thứ 2 và hàng thứ 4 bằng nhau. Vì cột 2 và hàng 4 chung nhau một ô nên tích của 3 số còn lại bằng nhau. Từ đó, ta có

$$32 \times 4 \times 1 = 32 \times * \times 16.$$

Giải ra ta được số ở ô có dấu * là $\frac{1}{4}$.

Bài 5. Điền tên các đỉnh trong hình như sau.



Phần tròn hoa là hình chữ nhật $AMND$ có diện tích là $20 m^2$. Hình chữ nhật $AMND$ có cạnh $AM = 2m$ nên cạnh còn lại $AD = 10m$.

Khu vườn là hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $120 m^2$. Hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AD = 10m$ nên cạnh $DC = 12m$.

Ta có $DC = 12 = DN + NC = 2 + NC$. Do đó $NC = 10$.

Từ đó, phần tròn dâu là hình chữ nhật $PQCN$ có hai cạnh $NC = 10$ và $QC = 3$. Do đó diện tích của phần tròn dâu là: $30 m^2$.

Vậy diện tích của phần tròn rau là: $120 - 20 - 30 = 70 m^2$.

Bài 6. Mỗi bạn được chia $30 : 3 = 10$ chiếc kẹo.

Do Bình ăn một số kẹo bằng với số kẹo mà An còn nên tổng số kẹo mà An và Bình ăn là 10 chiếc. Vì thế tổng số kẹo mà An, Bình và Chi ăn là $10 + 10 = 20$ chiếc. Do vậy, còn lại $30 - 20 = 10$ chiếc kẹo.

Bài 7. Gọi số cây quất là n . Khi đó tổng tiền bán được của lần bán đầu khi cây cuối có giá 230 nghìn là $245 \times n$ và tổng tiền thu được khi bán cây cuối với giá 158 nghìn là $242 \times n$. Ta thấy chênh lệch giữa giá bán cây cuối ở 2 lần bằng $3 \times n$. Do số tiền chênh lệch giữa hai lần bán là:

$$230 - 158 = 72 \text{ nghìn}$$

nên bắc nông dân đã bán được

$$72 : 3 = 24 \text{ cây quất.}$$

Bài 8. Ta thấy Cột 1 có 2 cách xếp bi;

Cột 3 có 2 cách xếp bi;

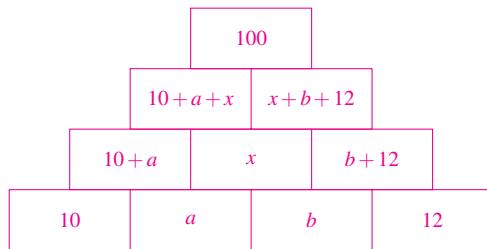
Cột 5 có 1 cách xếp bi;

Cột 2 có 1 cách xếp bi;

Cột 4 có 1 cách xếp bi.

Do đó, số cách xếp bi là: $2 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 4$ (cách)

Bài 9. Gọi hai số còn khuyết ở hàng cuối là a và b . Do mỗi ô ở hàng trên bằng tổng hai ô ngay bên dưới nên ta điền được các số như sau.



Vậy $100 = a + 10 + x + b + 12 + x = a + b + 2x + 22$.

Do $x = a + b$ nên $100 = 3 \times x + 22$.

Giải ra ta được $x = 26$.

Bài 10. Mã PIN của bạn Kiên có dạng: $1ab3$, với a, b là hai chữ số khác nhau và khác hai chữ số 1, 3.

Ta thấy có 8 cách chọn chữ số a và 7 cách chọn chữ số b .

Do đó có $8 \times 7 = 56$ cách chọn 2 chữ số a và b hay có 56 số khác nhau cho mã PIN của bạn Kiên.



A PICTURE IS WORTH A THOUSAND WORDS (Part I)

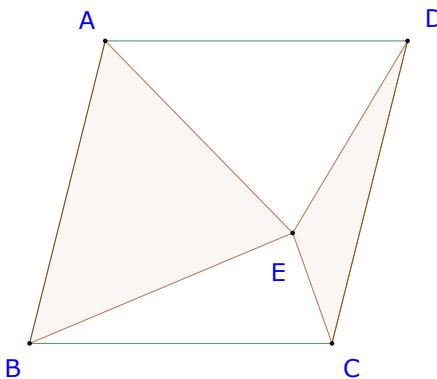
NGHIA DOAN¹

In this article, we will investigate a number of ways to *prove area equality without writing lengthy proofs*. While it sounds simple, easy, and exciting, it is important that you need to improve your creative thinking in order to first understand the examples, and then use them as tools, guidelines, or ideas to solve the problems.

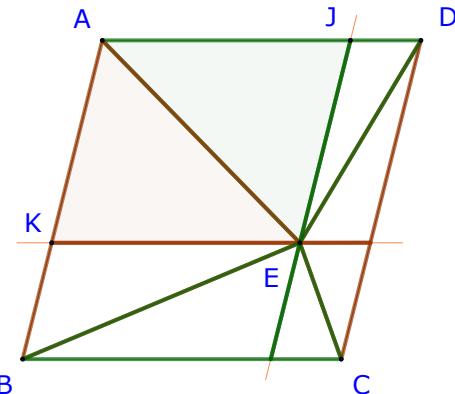
Example 1. Let E be a point inside the parallelogram $ABCD$. Prove that

$$[AEB] + [CED] = \frac{1}{2}[ABCD].$$

Here, we denote the area of a region \mathcal{R} by $[\mathcal{R}]$.



Solution. Draw lines through E , parallel with sides of $ABCD$, dividing the parallelogram into four smaller parallelograms. Any of the smaller parallelogram, say $AKEJ$, consists of a brown triangle from the shaded triangle and a green triangle with the same area. Thus, the area of the shaded triangles is the sum of the area of all smaller brown triangles, which is half of the sum of the area of all smaller parallelograms, or half of the $ABCD$ parallelogram.

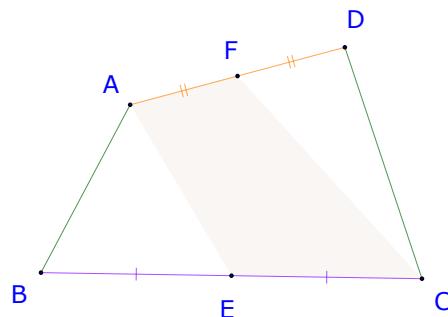


Remark. Here's how we use the techniques:

1. First, divide the given figure into smaller figures.
3. Deal with each of them, if they have the same shape, then work in the same way.
3. Use all partial results to arrive at the overall result.

Example 2. Let E and F be the midpoints of BC and DA in the convex quadrilateral $ABCD$. Prove that

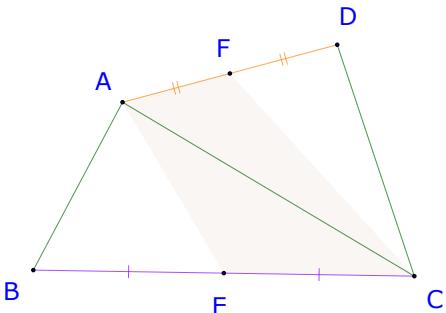
$$[AECF] = \frac{1}{2}[ABCD].$$



Solution. Connect AC . Since E is the midpoint of BC , the triangles ABE and AEC

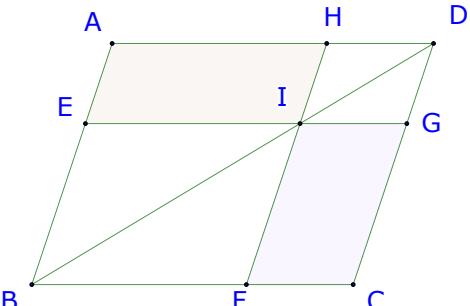
¹Ottawa, Canada.

have the same area. The triangles ABE and AEC have the same area. Similarly triangles CDF and CFA have the same area. Thus the area of $AECF$ is half of $ABCD$.



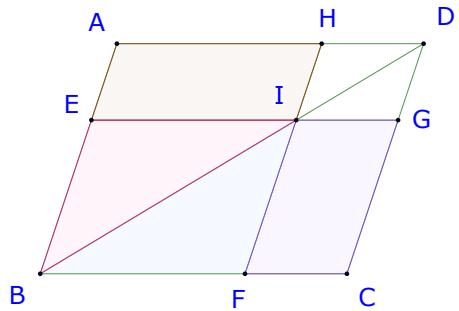
Example 3. Let I be an arbitrary point on the diagonal BD in the parallelogram $ABCD$. Lines through I parallel with the sides of $ABCD$ intersect AB , BC , CD , and DA at E, F, G , and H , respectively. Prove that

$$[AEIH] = [FCGI].$$



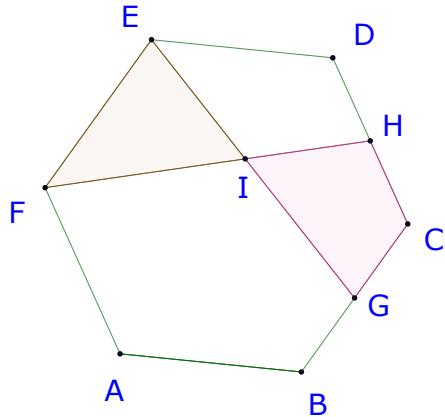
Solution. First, since BD is the diagonal in parallelogram $ABCD$, $[ABD] = [BCD]$. Now, $BEIF$ is also a parallelogram, thus $[BEI] = [BFI]$, similarly $[HID] = [IGD]$. Therefore

$$\begin{aligned} [AEIH] &= [ABD] - [BEI] - [HID] \\ &= [BCD] - [BFI] - [IGD] \\ &= [FCGI]. \end{aligned}$$



Example 4. Let G and H be the midpoints of BC and CD in the regular hexagon $ABCDEF$. The lines EG and FG intersect at I . Prove that

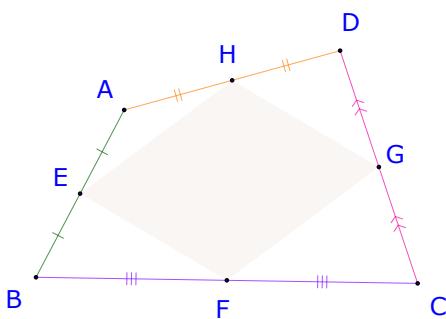
$$[GCHI] = [EFIG].$$



Solution. It is easy to see that the quadrilaterals $GCDE$ and $HDEF$ are congruent, thus have the same area, or $[GCDE] = [HDEF]$. Taking $HDEI$ away, we have $[GCHI] = [EFIG]$.

Example 5. Let E, F, G and H are the midpoints of the sides AB, BC, CD and DA in the convex quadrilateral $ABCD$. Prove that

$$[EFGH] = \frac{1}{2}[ABCD].$$



Solution. Note that EH is the midsegment (the segment joining two midpoints) in the triangle ABD , therefore $[AEH] = \frac{1}{4}[ABD]$. Similarly $[BEF] = \frac{1}{4}[ABC]$, $[CFG] = \frac{1}{4}[BCD]$, and $[GDH] = \frac{1}{4}[CDA]$, therefore:

$$\begin{aligned} & [AEH] + [BEF] + [CFG] + [GDH] \\ &= \frac{1}{2}[ABCD] \\ \Rightarrow & [EFGH] = \frac{1}{2}[ABCD]. \end{aligned}$$

Vocabulary

Arbitrary: (tt) bất kỳ, tùy ý.

Area: (dt) diện tích.

Congruent: (tt) bằng nhau.

Connect: (đt) nối.

Convex: (tt) lồi.

Diagonal: (dt) đường chéo

Divide: (đt) chia.

Draw: (đt) kẻ, vẽ.

Figure: (dt) hình.

Hexagon: (dt) lục giác,

regular hexagon: lục giác đều.

Intersect: (đt) cắt nhau, giao nhau.

Line: (dt) đường thẳng.

Midpoint: (dt) trung điểm.

Midsegment: (dt) đường trung bình.

Point: (dt) điểm.

Parallelogram: (dt) hình bình hành.

Quadrilateral: (dt) tứ giác.

Segment: (dt) đoạn thẳng.

Shape: (dt) hình dáng.

Side: (dt) cạnh.

Triangle: (dt) tam giác.

Technique: (dt) kỹ thuật.

π Tri Ân



GS. TSKH Nguyễn Tiến Dũng
Giám đốc công ty Torus AI, Pháp



GS. TSKH Ngô Việt Trung
Viện Toán học, Hà Nội



Phạm Tuấn Anh
Giám đốc Minh Việt Academy,
Hoa Kỳ



TS Nguyễn Văn Lượng
Titan Education, TP.HCM



GS. TS Lê Tự Quốc Thắng
Georgia Institute of Technology,
Hoa Kỳ



TS Vương Mạnh Sơn
Cty Công nghệ truyền thông DTS



GS. TSKH Tạ Thị Hoài An
Viện Toán học, Hà Nội



PGS. TSKH Phan Thị Hà Dương
Viện Toán học, Hà Nội



Nhà báo Lê Quý Hiên
Báo Thanh Niên



PGS. TS Tạ Duy Phượng
Viện Toán học, Hà Nội



TS Dương Tú
Đại học Purdue, Hoa Kỳ



Thầy Ngô Văn Minh
Giáo viên Trường liên cấp
Newton, Hà Nội



TS Nguyễn Thị Nhưng
Giảng viên Trường Đại học
Thăng Long, Hà Nội

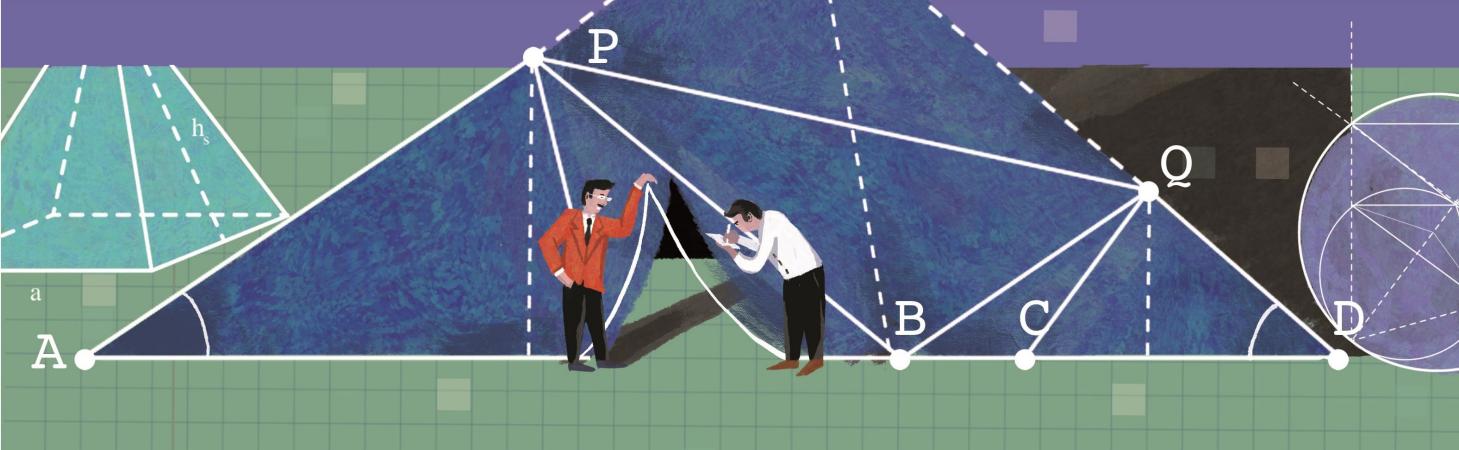


Ths Nguyễn Thị Vân Nga
Giám đốc Trung tâm Thông tin Tư
liệu, Viện Hàn lâm Khoa học và
Công nghệ Việt Nam



TS Nguyễn Sơn Hà
Giáo viên Trường THPT chuyên
ĐHSP, Hà Nội

**Tạp chí Pi trân trọng cảm ơn những người bạn của
Pi đã tài trợ và giúp đỡ để Pi được đưa đến tay
nhiều bạn học sinh nhỏ tuổi.**



ĐỊNH LÝ FERMAT CHO ĐA THỨC

TRẦN MINH ĐỨC¹ VÀ LƯU BÁ THẮNG²

1. Giới thiệu

Định lý Fermat lớn nói về sự không tồn tại bộ ba số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $a^n + b^n = c^n$ với $n \geq 3$ là số nguyên dương, đã được Andrew Wiles [5] chứng minh vào năm 1995, nhưng ít ai biết rằng có một định lý “Fermat” tương tự cho đa thức đã được chứng minh trước đó hàng chục năm trước, tức không tồn tại ba đa thức $f(x), g(x), h(x)$ với hệ số thực, ít nhất một đa thức khác đa thức hằng, đôi một không có nghiệm chung sao cho $f(x)^n + g(x)^n = h(x)^n$, với $n \geq 3$ là một số nguyên dương cho trước.

Định lý Fermat cho đa thức là hệ quả của Định lý Mason – Stothers, đầu tiên được Stothers [4] chứng minh vào năm 1981, và Mason [3] độc lập phát hiện ra sau đó ít lâu. Các chứng minh đó nhìn chung là phức tạp, không sơ cấp. Năm 2000, Snyder [2] đã đưa ra một chứng minh mới, chỉ với các kiến thức toán phổ thông cho định lý này. Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu chứng minh của Snyder và sau đó áp dụng Định lý Mason–Stothers để chứng minh Định lý Fermat cho đa thức và một số kết quả liên quan khác.

2. Định lý Mason – Stothers

Định lý 1 (Mason – Stothers). Cho $a(x)$, $b(x)$ và $c(x)$ là các đa thức khác đa thức hằng,

với hệ số thực, đôi một không có nghiệm chung và thỏa mãn: $a(x) + b(x) = c(x)$. Khi đó

$$\deg(c) \leq n_0(abc) - 1,$$

trong đó ta ký hiệu $n_0(f)$ là số nghiệm phức phân biệt của đa thức $f(x)$ và $\deg(f)$ là bậc của đa thức $f(x)$.

Để chứng minh Định lý này, ta cần Bổ đề sau:

Bổ đề 1. Cho $f(x)$ là một đa thức với hệ số thực, khác đa thức 0. Khi đó,

$$\deg(f) \leq \deg(f, f') + n_0(f),$$

trong đó ta ký hiệu (f, f') là ước chung lớn nhất của hai đa thức $f(x)$ và $f'(x)$ ($f'(x)$ là đa thức đạo hàm của đa thức $f(x)$).

Chứng minh. Gọi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ là các nghiệm phức phân biệt của $f(x)$ với các bội a_1, a_2, \dots, a_m tương ứng. Khi đó, ta có phân tích

$$f(x) = a(x - \alpha_1)^{a_1}(x - \alpha_2)^{a_2} \dots (x - \alpha_m)^{a_m},$$

với $a \in \mathbb{R}$ và $a_1 + a_2 + \dots + a_m = \deg f(x)$. Ta có, theo công thức Leibniz, đạo hàm của $f(x)$ được cho bởi:

$$\begin{aligned} & f'(x) \\ &= aa_1(x - \alpha_1)^{a_1-1}(x - \alpha_2)^{a_2} \dots (x - \alpha_m)^{a_m} \\ &\quad + a(x - \alpha_1)^{a_1}[(x - \alpha_2)^{a_2} \dots (x - \alpha_m)^{a_m}]'. \end{aligned}$$

¹Lớp 12 Toán 1, Trường THPT Amsterdam, Hà Nội.

²Khoa Toán – Tin, Đại học Sư Phạm Hà Nội.

Suy ra, với mỗi $i = 1, 2, \dots, m$, đa thức $(x - \alpha_i)^{a_i-1}$ cùng là ước của $f(x)$ và $f'(x)$. Do đó

$$(x - \alpha_1)^{a_1-1}(x - \alpha_2)^{a_2-1} \dots \\ (x - \alpha_m)^{a_m-1} | (f, f').$$

Vì $f(x)$ là đa thức khác đa thức hằng nên $f'(x)$ khác đa thức 0 và do đó (f, f') cũng khác đa thức 0. Suy ra

$$\deg((x - \alpha_1)^{a_1-1}(x - \alpha_2)^{a_2-1} \dots \\ (x - \alpha_m)^{a_m-1}) \leq \deg(f, f'),$$

hay

$$(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \dots + (a_m - 1) \\ \leq \deg(f, f').$$

Suy ra

$$\deg(f) - n_0(f) \leq \deg(f, f').$$

Vậy bối đê được chứng minh

Chứng minh Định lý 1. Từ giả thiết

$$a + b = c, \quad (1)$$

bằng cách lấy đạo hàm hai vế, ta được

$$a' + b' = c'. \quad (2)$$

Nhân (1) với a' và nhân (2) với a và trừ vế với vế, ta được

$$a'b - ab' = a'c - ac'.$$

Suy ra (a, a') , (b, b') và (c, c') đều là ước của $a'b - ab'$.

Do các đa thức a, b, c đôi một không có nghiệm phức chung nên các đa thức (a, a') , (b, b') và (c, c') cũng đôi một không có nghiệm phức chung. Suy ra

$$(a, a')(b, b')(c, c') | a'b - ab'.$$

Hơn nữa, ta có $a'b - ab' \neq 0$. Thật vậy, nếu $a'b - ab' = 0$ thì $\left(\frac{a}{b}\right)' = 0$ hay $\frac{a}{b}$ là hằng số.

Do đó a và b có nghiệm chung (mâu thuẫn với giả thiết). Vì vậy,

$$\deg((a, a')(b, b')(c, c')) \leq \deg(a'b - ab').$$

Mặt khác, hiển nhiên ta có

$$\begin{aligned} \deg(a'b - ab') &\leq \max\{\deg(a'b), \deg(ab')\} \\ &= \deg(a) + \deg(b) - 1. \end{aligned}$$

Vì thế,

$$\begin{aligned} \deg(a, a') + \deg(b, b') + \deg(c, c') \\ \leq \deg(a) + \deg(b) - 1. \end{aligned}$$

Chuyển về bất đẳng thức này và cộng với $\deg(c)$ vào hai vế, ta được

$$\begin{aligned} \deg(c) &\leq \deg(a) - \deg(a, a') + \deg(b) \\ &\quad - \deg(b, b') + \deg(c) - \deg(c, c') - 1. \end{aligned}$$

Cuối cùng, áp dụng Bối đê 1, ta có:

$$\begin{aligned} \deg(a) - \deg(a, a') &\leq n_0(a), \\ \deg(b) - \deg(b, b') &\leq n_0(b), \\ \deg(c) - \deg(c, c') &\leq n_0(c), \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \deg(c) &\leq n_0(a) + n_0(b) + n_0(c) - 1 \\ &= n_0(abc) - 1. \end{aligned}$$

3. Định lý Fermat cho đa thức

Áp dụng Định lý Mason – Stothers, chúng ta có một số kết quả đáng lưu ý. Trước hết, ta có kết quả sau đây:

Định lý 2 (Davenport [1]). Cho $f(x), g(x)$ là các đa thức với hệ số thực, khác đa thức hằng, đôi một không có nghiệm phức chung. Đặt $h(x) = (f(x))^3 - (g(x))^2$ và giả sử $h(x)$ khác là đa thức 0. Khi đó, $\deg(f) \leq 2\deg(h) - 2$. *Chứng minh.* Do $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức không có nghiệm chung và $h = f^3 - g^2$ nên h, f^3 và g^2 đôi một không có nghiệm chung. Áp dụng Định lý Mason – Stothers cho ba đa thức g^2, h và f^3 , ta có:

$$\deg(f^3) \leq n_0(g^2 h f^3) - 1,$$

hay

$$3\deg(f) \leq n_0(ghf) - 1 \leq \deg(ghf) - 1.$$

Mà $\deg(ghf) = \deg(g) + \deg(h) + \deg(f)$, nên

$$\begin{aligned} & 3\deg(f) \\ & \leq \deg(g) + \deg(h) + \deg(f) - 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$\begin{aligned} & 2\deg(g) \\ & \leq \deg(g) + \deg(h) + \deg(f) - 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Kết hợp (3) và (4), ta được

$$\begin{aligned} & 3\deg(f) + 2\deg(g) \\ & \leq 2(\deg(g) + \deg(h) + \deg(f) - 1) \end{aligned}$$

hay $\deg(f) \leq 2\deg(h) - 2$. Ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả 1. Không tồn tại hai đa thức với hệ số thực $f(x)$ và $g(x)$, khác đa thức bằng sao cho $f^3 - g^2$ là đa thức bằng khác đa thức 0.

Như đã đề cập đến trong phần đầu của bài viết, định lý Mason–Stothers có thể được sử dụng để chứng minh phiên bản đa thức của định lý Fermat lớn.

Định lý 3 (Định lý Fermat cho đa thức). *Với mọi nguyên $n \geq 3$, không tồn tại ba đa thức $f(x), g(x), h(x)$, với hệ số thực, đối một không có nghiệm chung chung, trong đó ít nhất một đa thức khác đa thức bằng, sao cho $f^n + g^n = h^n$.*
Chứng minh. Giả sử ngược lại, $f^n + g^n = h^n$. Áp dụng định lý Mason–Stothers cho 3 đa thức f^n, g^n và h^n , ta có:

$$\begin{aligned} & \max\{\deg(f^n), \deg(g^n), \deg(h^n)\} \\ & \leq n_0(f^n g^n h^n) - 1 = n_0(fgh) - 1 \\ & \leq \deg(f) + \deg(g) + \deg(h) - 1. \end{aligned}$$

Để ý rằng

$$\begin{aligned} & \frac{n}{3}(\deg(f) + \deg(g) + \deg(h)) \\ & = \frac{1}{3}(\deg(f^n) + \deg(g^n) + \deg(h^n)) \\ & \leq \max\{\deg(f^n), \deg(g^n), \deg(h^n)\}. \end{aligned}$$

Do đó, nếu ta đặt $d = \deg(f) + \deg(g) + \deg(h)$ thì bằng cách kết hợp với bất đẳng thức thu được ở trên, ta có:

$$\frac{nd}{3} \leq d - 1.$$

Suy ra, $3 < d(3 - n)$. Do ít nhất một trong các đa thức f, g, h khác hằng nên $d > 0$; điều này, kết hợp với giả thiết $n \geq 3$, dẫn đến $3 \leq 0$, mâu thuẫn.

Với chứng minh tương tự, ta có thể chỉ ra được hệ quả sau đây, mà nội dung của nó là một bài toán trong tuyển tập Các kỳ thi Toán Rumani (RMC) năm 2019.

Hệ quả 2. Cho các số nguyên $m, n \geq 3$ và f, g là các đa thức khác hằng với hệ số thực, trong đó ít nhất một đa thức có bậc lớn hơn hoặc bằng 2. Giả sử $\deg(f^m - g^n) < \min\{m, n\}$. Khi đó $f^m = g^n$.

Nhận xét. Định lý Mason – Stothers cũng đúng khi ta xét các đa thức với hệ số phức. Từ đó ta suy ra Định lý Davenport và Định lý Fermat cho đa thức cũng đúng với đa thức với hệ số phức.

Để kết thúc, chúng ta trình bày một mở rộng của Định lý 3.

Định lý 4. Cho các số nguyên dương m, n, p thỏa mãn $m \leq n \leq p$. Khi đó phương trình đa thức $f(x)^m + g(x)^n = h(x)^p$ có nghiệm f, g, h là các đa thức với hệ số phức, đối một không có nghiệm chung, ít nhất một trong ba đa thức khác đa thức bằng nếu và chỉ nếu (m, n, p) có một trong dạng sau: $(1, a, b), a, b \geq 1$; $(2, 2, a), a \geq 2$; $(2, 3, 3); (2, 3, 4); (2, 3, 5)$.

Chứng minh. Trước hết, dễ thấy rằng nếu trong m, n, p có một số bằng 1 thì phương trình rõ ràng có nghiệm, chẳng hạn nếu $m = 1$, với $g(x), h(x)$ là hai đa thức khác đa thức bằng tùy ý, không có nghiệm chung thì bằng cách đặt $f(x) = h(x)^p - g(x)^m$, ta có $f(x), g(x), h(x)$ thỏa mãn phương trình.

Vì vậy, ta chỉ cần xét trường hợp $2 \leq m \leq n \leq p$. Gọi a, b, c lần lượt là bậc của các đa thức f, g và h . Khi đó, theo Định lý Mason – Stothers, ta có

$$ma \leq a + b + c - 1, \quad (5)$$

$$nb \leq a + b + c - 1, \quad (6)$$

$$pc \leq a + b + c - 1. \quad (7)$$

Cộng vế với vế của (5), (6) và (7) ta được

$$\begin{aligned} m(a+b+c) &\leq ma+nb+pc \\ &\leq 3(a+b+c)-3. \end{aligned}$$

Suy ra, $m < 3$. Mặt khác, $2 \leq m$ nên $m = 2$. Khi này, bất đẳng thức (5) trở thành:

$$a \leq b + c - 1. \quad (8)$$

Cộng các bất phương trình (6), (7) và (8) theo vế, ta có:

$$nb + pc \leq 3(b+c) + a - 3. \quad (9)$$

Mặt khác, vì $n \leq p$ nên từ bất đẳng thức (8) và (9), ta có:

$$\begin{aligned} n(b+c) &\leq nb + pc \leq 3(b+c) + a - 3 \\ &\leq 4(b+c) - 4. \end{aligned} \quad (10)$$

Từ đó, $n < 4$. Kết hợp với $n \geq 2$, ta suy ra $n = 2$ hoặc $n = 3$.

Với $n = 2$, ta thấy rằng với mọi giá trị của $p \geq 2$ thì tồn tại ba đa thức f, g, h thỏa mãn phương trình của định lý. Chẳng hạn, với

$$f(x) = \frac{x^p + 1}{2},$$

$$g(x) = -i \left(\frac{x^p - 1}{2} \right),$$

$$h(x) = x^2,$$

thì $f^2 + g^2 = h^p$.

Với $n = 3$ thì bất đẳng thức (6) trở thành

$$2b \leq a + c - 1. \quad (11)$$

Kết hợp (8) và (11), ta được $b \leq 2c - 2$. Từ đó, (8) dẫn đến $a \leq 3c - 3$. Từ đó, (7) dẫn đến

$$\begin{aligned} pc &\leq a + b + c - 1 \\ &\leq 3c - 3 + 2c - 2 + c - 1 = 6c - 6. \end{aligned}$$

Suy ra $p \leq 5$. Mà $p \geq n$ nên $p \in \{3; 4; 5\}$.

Với $p = 3$, ta có thể chọn

$$f(x) = \sqrt[4]{432} e^{\frac{i\pi}{4}} (x^5 - x),$$

$$g(x) = x^4 - 2i\sqrt{3}x^2 + 1,$$

$$h(x) = x^4 + 2i\sqrt{3}x^2 + 1$$

để có $f^2 + g^3 = h^3$.

Với $p = 4$, ta có thể chọn

$$f(x) = x^{12} - 33x^8 - 33x^4 + 1,$$

$$g(x) = -(x^8 + 14x^3 + 1),$$

$$h(x) = \sqrt[4]{108} e^{\frac{i\pi}{4}} (x^5 - x)$$

để có $f^2 + g^3 = h^4$.

Với $p = 5$, ta có thể chọn

$$f(x) = \frac{x^{30} + 1 + 522(x^{25} - x^5) - 10005(x^{20} + x^{10})}{24\sqrt{3}},$$

$$g(x) = \frac{-(x^{20} + 1) + 228(x^{15} - x^5) - 494x^{10}}{12},$$

$$h(x) = x(x^{10} + 11x^5 - 1).$$

Khi đó $f^2 + g^3 = h^5$. Vậy định lý đã được chứng minh.

Tài liệu tham khảo

[1] V. V. Prasolov, *Essay on Numbers and Figures*, Mathematical World, American Mathematical Society, 2000.

[2] N. Snyder, *An alternate proof of Mason's theorem*, Elemente der Mathematik, 55 (3): 93 – 94, 2000.

[3] R. C. Mason, *Diophantine Equations over Function Fields*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 96, Cambridge, England: Cambridge University Press, 1984.

[4] W.W. Stothers, *Polynomial identities and hauptmoduln*, Quarterly J. Math. Oxford, 2, 32: 349 – 370, 1981.

[5] A. Willes, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. Math., 141, pp. 443 – 551, 1995.



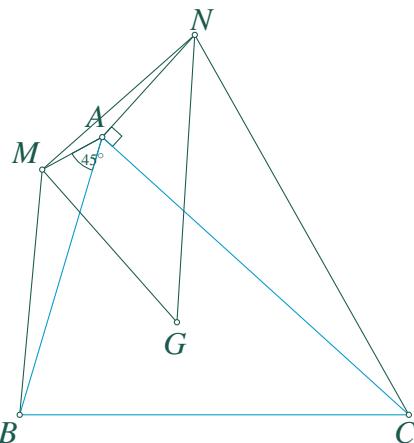
- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục “Thách thức kỳ này” cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ **B**, **A**, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ **B** không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ **A** không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P761–P770: trước ngày **15/1/2024**.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P761. (Mức **B**) Mỗi bạn An, Bình, Huệ, Nga đều có một khoản tiền tiết kiệm. Biết rằng, tiền tiết kiệm của tất cả các nhóm hai bạn, có thể lập được từ bốn bạn đó, là 1,9 triệu đồng, 2,07 triệu đồng, 2,11 triệu đồng, 2,33 triệu đồng, 2,5 triệu đồng và x triệu đồng. Hãy tìm x .

(Tiền tiết kiệm của một nhóm hai bạn là tổng tiền tiết kiệm của hai bạn đó.)

Hoàng Việt Vương, Hà Nội



Trần Việt Anh, Nam Định

P762. (Mức **B**) Cho tam giác ABC với trọng tâm G . Dựng ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABM và ACN sao cho $\angle BAM = 45^\circ$, $AB = 3\sqrt{2}AM$, $\angle NAC = 90^\circ$ và $AC = 3AN$. Chứng minh rằng $\angle GMN = 90^\circ$.

P763. (Mức **B**) Cho đa giác đều có 2024 đỉnh, tại mỗi đỉnh ta viết một số nguyên dương không vượt quá 1011 (mỗi đỉnh viết

một số). Chứng minh rằng tồn tại 4 đỉnh A, B, C, D của đa giác sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật, và $a+b=c+d$, trong đó a, b, c, d tương ứng là các số được viết tại các đỉnh A, B, C, D .

Nguyễn Đức Tấn, Tp. Hồ Chí Minh (st)

P764. (Mức B) Tìm tất cả các bộ ba số thực (x, y, z) thoả mãn: $x, y, z \in (0, \frac{1}{2})$ và

$$\begin{cases} (3x^2 + y^2)\sqrt{1 - 4z^2} \geq z \\ (3y^2 + z^2)\sqrt{1 - 4x^2} \geq x \\ (3z^2 + x^2)\sqrt{1 - 4y^2} \geq y. \end{cases}$$

Ngô Văn Trang, Bắc Ninh

P765. (Mức B) Cho số nguyên dương n . Gọi A là tích tất cả các số nguyên dương không vượt quá $2n+1$, B là tích tất cả các số nguyên dương lẻ không vượt quá $2n+1$ và C là tích tất cả các số nguyên dương chẵn không vượt quá $2n$. Chứng minh rằng $4A + (B - C - 1)^2$ không là số chính phương.

Hà Duy Hưng, Hà Nội

P766. (Mức B) Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{a^2 + 3ab + 2b^2} + \frac{b^2}{b^2 + 3bc + 2c^2} \\ & + \frac{c^2}{c^2 + 3ca + 2a^2} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ngô Văn Thái, Thái Bình

P767. (Mức A) Cho x, y, z là các số thực không âm thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$3(x+y+x+xyz) \geq 4\sqrt{(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy)}.$$

Hoàng Ngọc Minh, Hà Nội

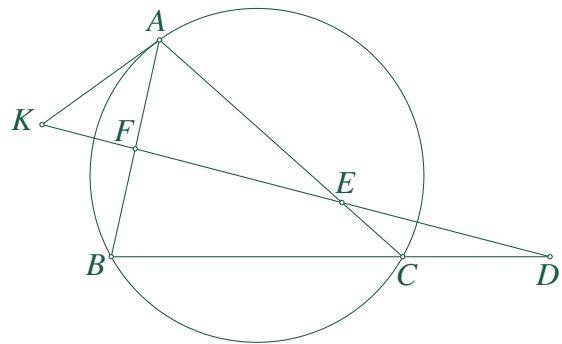
P768. (Mức A) Cho a là một số nguyên dương lẻ và không là số chính phương. Chứng minh rằng

$$[m(a + \sqrt{a})] \neq [n(a - \sqrt{a})]$$

với mọi số nguyên dương m, n .

Nguyễn Hoàng Duy, Thái Bình (st)

P769. (Mức A) Cho tam giác không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) . Trên tiếp tuyến tại A của (O) , lấy điểm K tùy ý, khác A . Một đường thẳng Δ , đi qua K , cắt các đường thẳng BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F . Chứng minh rằng, tâm đẳng phuơng của đường tròn đường kính EF , đường tròn đường kính DK và đường tròn (O) nằm trên đường thẳng Δ .



Lưu Công Đông, Hà Nội

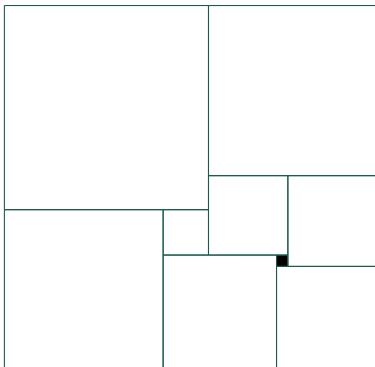
P770. (Mức A) Cho phép thực hiện việc đổi chỗ các số hạng trong một hoán vị, theo qui tắc: Mỗi lần, lấy ra khỏi hoán vị tám số hạng tùy ý của nó, rồi lại xếp tám số hạng đó vào tám vị trí mà chúng đã nằm, nhưng theo thứ tự ngược lại.

Hỏi, nhờ việc thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép đổi chỗ nói trên đổi với hoán vị $(1, 2, \dots, 2023)$ của 2023 số nguyên dương đầu tiên, ta có thể nhận được hoán vị $(2023, 2022, \dots, 1)$ hay không?

Nguyễn Khắc Minh, Hà Nội

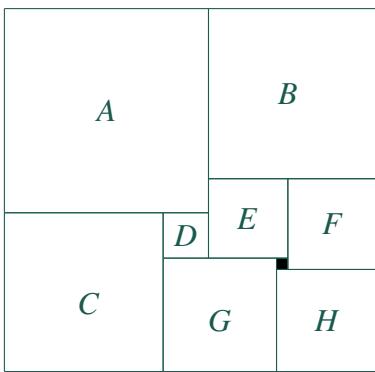
GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P731. (Mức *B*) Ghép chín hình vuông thành một hình chữ nhật, như ở hình dưới đây. Biết rằng, hình vuông màu đen có cạnh bằng 1. Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.



Lời giải (dựa theo tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc).

Đặt tên các hình vuông như ở hình vẽ dưới đây:



Gọi a, b, c, d, e, g, h tương ứng là độ dài cạnh của các hình vuông A, B, C, D, E, G, H .

Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông F .

Khi đó, do hình vuông màu đen có cạnh bằng 1, nên

$$e = x - 1; b = e + x = 2x - 1;$$

$$h = x + 1; g = h + 1 = x + 2;$$

$$d = g - (e - 1) = (x + 2) - (x - 2) = 4;$$

$$c = g + d = (x + 2) + 4 = x + 6;$$

$$a = c + d = (x + 6) + 4 = x + 10.$$

Từ đó, do $a + c = b + x + h$, nên ta có:

$$(x + 10) + (x + 6) = (2x - 1) + x + (x + 1).$$

Suy ra, $2x + 16 = 4x$. Do đó, $x = 8$. Suy ra

$$a = 8 + 10 = 18, b = 2 \cdot 8 - 1 = 15$$

$$\text{và } c = 8 + 6 = 14.$$

Vì vậy, hình chữ nhật có chiều dài là:

$$18 + 15 = 33,$$

và chiều rộng là: $18 + 14 = 32$.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Hà Thanh

P732. (Mức *B*) Xét bốn số thực (không nhất thiết đôi một khác nhau), mà mỗi số có trị tuyệt đối không vượt quá $\frac{1}{2}$, và tổng của ba số bất kỳ, trong bốn số đó, là một số nguyên. Tìm tất cả các giá trị có thể của tổng bốn số đó.

Lời giải (phỏng theo cách giải của bạn Ngô Minh Chấn, lớp 9A3, trường TH&THCS Archimedes Đông Anh, Tp. Hà Nội).

Gọi a, b, c, d là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện đã nêu trong đề bài.

Đặt $x = a+b+c$, $y = a+b+d$, $z = a+c+d$, $t = b+c+d$, và $s = a+b+c+d$.

Khi đó, theo giả thiết của bài ra, ta có:

$$|a| \leq \frac{1}{2}, |b| \leq \frac{1}{2}, |c| \leq \frac{1}{2}, |d| \leq \frac{1}{2}; \quad (1)$$

và x, y, z, t là các số nguyên. (2)

Xét cặp số x, y . Do (2) nên $x - y$ là một số nguyên; hơn nữa

$$\begin{aligned} |x - y| &= |c - d| \leq |c| + |d| \\ &\leq 1 \quad (\text{do (1)}). \end{aligned} \quad (3)$$

Vì thế, $|x - y| \in \{0; 1\}$. (4)

Nếu $|x - y| = 1$ thì theo (3) , phải có:

$$|c - d| = |c| + |d| = 1.$$

Điều vừa nêu trên tương đương với

$$\begin{cases} cd \leq 0 \\ |c| = |d| = \frac{1}{2} \text{ (do (1))}. \end{cases} \quad (5)$$

Suy ra, $c + d = 0$. Do đó, $z = a$ và $t = b$. Vì thế, $a, b \in \mathbb{Z}$ (do (2)). Từ đây và (1), suy ra $a = b = 0$.

Vì vậy, $x = c$. Do đó, $c \in \mathbb{Z}$. Từ đây và (1), suy ra $c = 0$, mâu thuẫn với (5).

Mâu thuẫn nhận được ở trên cho thấy

$$|x - y| \neq 1.$$

Do đó, từ (4) ta được $x = y$.

Xét các cặp số x, z và x, t , bằng cách hoàn toàn tương tự, ta sẽ được $x = z$ và $x = t$.

Vì vậy, $x = y = z = t$. Suy ra

$$3s = x + y + z + t = 4x;$$

$$\text{do đó, } s = \frac{4}{3}x. \quad (6)$$

Tiếp theo, ta có:

$$|x| \leq |a| + |b| + |c| \leq \frac{3}{2} \quad (\text{do (1)});$$

mà $|x| \in \mathbb{Z}$ (theo (2)), nên $|x| \in \{0; 1\}$. (7)

Từ (6) và (7), suy ra $s \in \{-\frac{4}{3}; 0; \frac{4}{3}\}$.

Ngược lại, dễ thấy:

- $a = b = c = d = -\frac{1}{3}$ là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài, và có tổng bằng $-\frac{4}{3}$;

- $a = b = c = d = 0$ là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài, và có tổng bằng 0;

- $a = b = c = d = \frac{1}{3}$ là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài, và có tổng bằng $\frac{4}{3}$;

Vậy, tất cả các giá trị có thể của tổng bốn số thỏa mãn các điều kiện của đề bài là: $-\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}$.

Bình luận và Nhận xét

1. Lời giải trên cho thấy, các bộ bốn số thực

được liệt kê ở phần cuối của Lời giải là *tất cả* các bộ bốn số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

2. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có hai lời giải sai, do người giải bài hoặc mới chỉ ra điều kiện cần (nhưng không đủ) cho giá trị của tổng bốn số đã vội kết luận đó là các giá trị có thể của tổng đó, hoặc đã chỉ ra sai các bộ bốn số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài. Bên cạnh đó, còn có một lời giải chưa đầy đủ, do người giải bài chưa xét hết các trường hợp có thể xảy ra.

Hà Thành

P733. (Mức B) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \left\lfloor \frac{b+c}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c+a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+b}{c} \right\rfloor,$$

trong đó, a, b, c là các biến nguyên dương. ($\lfloor x \rfloor$ ký hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x .)

Lời giải (dựa theo lời giải của các bạn: Ngô Minh Chấn, lớp 9A3, trường TH&THCS Archimedes Đồng Anh, Tp. Hà Nội; Lê Nguyễn Hoàng Nhật Đinh, lớp 9C, trường THCS Nguyễn Thái Bình, tỉnh Cà Mau; Trường Anh Dũng, lớp 10A1 chuyên Toán, trường THPT chuyên VĨnh Phúc, tỉnh VĨnh Phúc).

Từ định nghĩa phần nguyên của một số thực dễ thấy, với mọi số thực x , ta đều có

$$\lfloor x \rfloor > x - 1.$$

Vì vậy, với lưu ý a, b, c là các số dương, ta có:

$$\begin{aligned} S &> \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} - 3 \\ &= \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c} \right) - 3 \\ &\geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} + 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} - 3 = 3. \end{aligned}$$

Từ đó, do S là số nguyên, suy ra $S \geq 4$.

Hơn nữa, dễ thấy, với $a = 3, b = c = 4$, ta có $S = 4$.

Vì vậy, giá trị nhỏ nhất của S bằng 4.

Bình luận và Nhận xét

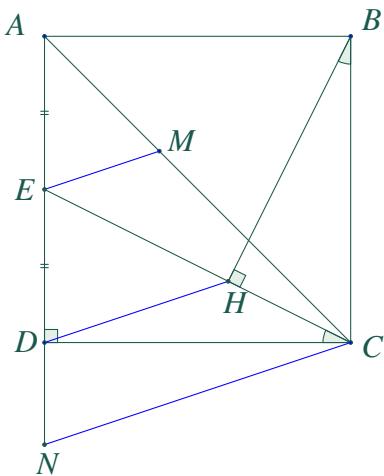
1. Lời giải trên cho thấy, kết quả của bài ra không thay đổi, khi thay giả thiết “ a, b, c là các biến nguyên dương” bởi giả thiết “ a, b, c là các biến thực dương”.

2. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải sai, do người giải bài đã mắc sai sót về kiến thức cơ bản, khi khẳng định “[x] ≥ x với mọi số thực x ”.

Lưu Thị Thanh Hà

P734. (Mức B) Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là trung điểm của AD ; H là hình chiếu vuông góc của B trên CE . Trên đường chéo AC , lấy điểm M sao cho $AM = \frac{3}{8}AC$. Chứng minh rằng, ME song song với DH .

Lời giải (dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Nguyên Chính, lớp 9D, trường THCS Nguyễn Chí Thanh, tỉnh Phú Yên).



Qua C , kẻ đường thẳng song song với ME , cắt đường thẳng AD tại N .

Khi đó, theo định lý Thales, ta có:

$$\frac{AN}{AE} = \frac{AC}{AM} = \frac{8}{3} \quad (\text{theo giả thiết}).$$

Từ đó, với lưu ý E là trung điểm của AD (giả thiết), suy ra

$$\frac{DN}{DE} = \frac{DN}{AE} = \frac{AN}{AE} - \frac{AD}{AE} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{NE}{ND} &= \frac{ND + DE}{ND} = 1 + \frac{DE}{ND} \\ &= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Đặt $AD = a$. Từ giả thiết của bài ra, ta có $CD = a$ và

$$AE = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2}.$$

Vì vậy, áp dụng định lý Pithagoras cho tam giác vuông CDE , ta được:

$$\begin{aligned} CE^2 &= CD^2 + DE^2 \\ &= a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Tiếp theo, do

$$\angle CBH = 90^\circ - \angle BCH = \angle DCE,$$

nên tam giác vuông BHC đồng dạng với tam giác vuông CDE . Do đó

$$\frac{CH}{CB} = \frac{ED}{EC};$$

suy ra

$$\frac{CH}{CE} = \frac{ED \cdot CB}{CE^2} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{\frac{5}{4}a^2} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{\frac{5}{4}a^2} \quad (\text{theo(2)})$$

$$= \frac{2}{5} = \frac{ND}{NE} \quad (\text{theo(1)}).$$

Do đó, $DH \parallel NC$ (theo định lý Thales); mà $NC \parallel ME$, nên $DH \parallel ME$.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có một lời giải bằng phương pháp tọa độ. Rất tiếc, lời giải này được diễn đạt rất sai bằng ngôn ngữ Toán học; và vì thế, không thể coi là lời giải đúng.

Hạ Vũ Anh

P735. (Mức B) Tìm tất cả các số nguyên dương n , để $n! + n$ là một lũy thừa với số mũ nguyên dương của một số nguyên tố.

Lời giải (dựa theo đà số lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc).

- Giả sử n là số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Khi đó, tồn tại số nguyên tố p và số nguyên dương α , sao cho

$$n! + n = p^\alpha,$$

hay

$$n((n-1)! + 1) = p^\alpha. \quad (1)$$

Do $(n-1)! + 1 > 1$ nên từ (1) suy ra, tồn tại số tự nhiên $\beta < \alpha$, sao cho $n = p^\beta$ và

$$(n-1)! + 1 = p^{\alpha-\beta}. \quad (2)$$

Vì $\beta \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$ và $\beta < \alpha$, nên $\alpha - \beta$ là một số nguyên dương. Do đó, từ (2) suy ra

$$(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $\beta \in \{0; 1\}$, vì nếu ngược lại, $\beta \geq 2$, thì

$$n-1 \geq p^2 - 1 > p \text{ (do } n = p^\beta \text{ và } p \geq 2\text{);}$$

dẫn tới $(n-1)! \not\equiv p$, và do đó, $1 \not\equiv p$ (theo (3)), là điều vô lý.

Với $\beta = 0$, ta có $n = p^0 = 1$. (4)

Với $\beta = 1$, ta có $n = p$; do đó

$$(p-1)! + 1 = p^{\alpha-1} \text{ (theo (2))}. \quad (5)$$

Xét $p > 5$. Khi đó

$$(p-1)! > (p-1)(p-2) > p.$$

Vì thế, từ (5) suy ra $\alpha - 1 \geq 2$, hay $\alpha \geq 3$. Do vậy, từ (5) ta có:

$$(p-1)! = p^{\alpha-1} - 1$$

$$= (p-1) \left(p^{\alpha-2} + p^{\alpha-3} + \dots + p + 1 \right).$$

Suy ra

$$(p-2)! = p^{\alpha-2} + p^{\alpha-3} + \dots + p + 1. \quad (6)$$

Tiếp theo, do p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên $p-1$ là một hợp số lớn hơn 4. Vì thế, tồn tại các số nguyên dương a, b , với $1 < a \leq b$, sao cho $p-1 = ab$.

Nếu $a = b$ thì

$$4 < p-1 = a^2. \quad (7)$$

Do đó, $a > 2$; suy ra $p-1 > 2a$. Vì thế, $p-2 > 2a-1$; mà $p-2$ là số nguyên, nên $p-2 \geq 2a$. Vì vậy

$$\begin{aligned} (p-2)! &= 1 \cdot 2 \cdots \cdots a \cdots \cdots 2a \cdots \cdots (p-2) \\ &\equiv 0 \pmod{p-1} \text{ (do (7)).} \end{aligned}$$

Nếu $a < b$ thì do $a, b < p-2$ nên

$$\begin{aligned} (p-2)! &= 1 \cdot 2 \cdots \cdots a \cdots \cdots b \cdots \cdots (p-2) \\ &\equiv 0 \pmod{p-1} \text{ (do } p-1 = ab\text{).} \end{aligned}$$

Vì vậy, ta có

$$(p-2)! \equiv 0 \pmod{p-1}. \quad (8)$$

Do $p \equiv 1 \pmod{p-1}$ nên từ (6) suy ra

$$(p-2)! \equiv \alpha - 1 \pmod{p-1}. \quad (9)$$

Từ (8) và (9), ta được:

$$\alpha - 1 \equiv 0 \pmod{p-1};$$

mà $\alpha - 1$ là số nguyên dương, nên $\alpha - 1 \geq p-1$, hay $\alpha \geq p$. Vì thế, theo (5), ta có

$$(p-1)! + 1 \geq p^{p-1},$$

là điều vô lý.

Điều vô lý vừa nhận được ở trên cho thấy, $p \leq 5$; mà p là số nguyên tố, nên $p \in \{2; 3; 5\}$. (10)

Do $n = p$ nên từ (4) và (10), ta được: $n \in \{1; 2; 3; 5\}$. (11)

• Ngược lại, với n thỏa mãn (11), ta có

$$n! + n \in S = \{2; 4; 9; 125\}.$$

Dễ thấy, mỗi số thuộc S đều là một lũy thừa với số mũ nguyên dương của một số nguyên tố.

• Vậy, tất cả các số nguyên dương cần tìm theo yêu cầu đề bài là: 1, 2, 3 và 5.

Bình luận và Nhận xét

1. Dễ thấy, trong Lời giải trên ẩn chứa chứng minh của kết quả sau:

“Nếu n là một hợp số lớn hơn 4 thì

$$(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}.”$$

2. Trong số các lời giải Tập chí nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải sai (do người giải bài mắc một số sai sót trong các lập luận) và một lời giải chưa đầy đủ (do người giải bài chưa xét trường hợp $n = 1$).

Lưu Thị Thanh Hà

P736. (Mức B) Bạn An có 8 quả cân có tổng trọng lượng bằng 16 kg, và trọng lượng mỗi quả, tính theo đơn vị kg, là một số nguyên dương không vượt quá 8. Chứng minh rằng, có thể chia 8 quả cân này thành hai nhóm, sao cho các tổng trọng lượng của các quả cân cùng nhóm bằng nhau.

Lời giải (dựa theo cách giải của bạn Phạm Đức Minh, lớp 10 Toán 2, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định).

Dễ thấy, nếu cả 8 quả cân có trọng lượng như nhau thì điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài là hiển nhiên.

Xét trường hợp trong 8 quả cân, tồn tại hai quả cân có trọng lượng khác nhau. Gọi m_1, m_2 ($m_1 \neq m_2$) là trọng lượng của hai quả cân này; và gọi $m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8$ là trọng lượng của sáu quả cân còn lại.

Hiển nhiên, kết luận của bài ra tương đương với khẳng định “tồn tại một nhóm gồm tối đa 7 quả cân và tổng trọng lượng của các quả cân thuộc nhóm bằng 8”.

Vì vậy, để chứng minh kết luận của bài ra, ta sẽ chỉ ra một nhóm gồm tối đa 7 quả cân và tổng trọng lượng của các quả cân thuộc nhóm bằng 8. Để tránh dài dòng trong diễn đạt, ta gọi nhóm quả cân có tính chất vừa nêu là nhóm “tốt”.

Đặt

$$\begin{aligned} S_1 &= m_1, S_2 = m_2, S_3 = m_1 + m_2, \\ S_4 &= m_1 + m_2 + m_3, S_5 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4, \\ S_6 &= m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5, \\ S_7 &= m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6, \\ S_8 &= m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7. \end{aligned}$$

Từ giả thiết của đề bài suy ra S_1, S_2 là các số nguyên dương không vượt quá 8, và

$S_i, i = 3, 8$, là các số nguyên dương không vượt quá 15.

Xảy ra hai trường hợp sau:

- **Trường hợp 1:** Tồn tại $i \in \{1; 2; \dots; 8\}$ sao cho $S_i \equiv 0 \pmod{8}$.

Khi đó, do $S_i \in \mathbb{N}^*$ và $1 \leq S_i \leq 15$, nên $S_i = 8$. Vì thế, nhóm gồm các quả cân có trọng lượng là các số hạng của tổng S_i là một nhóm tốt.

- **Trường hợp 2:** Với mọi $i \in \{1; 2; \dots; 8\}$, $S_i \not\equiv 0 \pmod{8}$.

Trong trường hợp này, do phép chia cho 8 chỉ có 7 số dư khác 0, nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại các chỉ số p, q , với $1 \leq p < q \leq 8$, sao cho

$$S_p \equiv S_q \pmod{8}. \quad (1)$$

Do $S_1, S_2 \in \{1; 2; \dots; 8\}$ (giả thiết) và $S_1, S_2 \not\equiv 0 \pmod{8}$, nên $S_1, S_2 \in \{1; 2; \dots; 7\}$. Mà $S_1 \neq S_2$ (do $m_1 \neq m_2$), nên $S_1 \not\equiv S_2 \pmod{8}$. Vì thế, không thể có đồng thời $p = 1$ và $q = 2$. (2)

Đặt $T = S_q - S_p$.

Do (2) và do $1 \leq S_p, S_q \leq 15$ nên $T \in \mathbb{N}^*, 1 \leq T \leq 14$, và

$$T = \begin{cases} m_2 + m_3 + \dots + m_{q-1} & \text{nếu } p = 1 \\ m_1 + m_3 + \dots + m_{q-1} & \text{nếu } p = 2 \\ m_p + m_{p+1} + \dots + m_{q-1} & \text{nếu } 3 \leq p \leq 7. \end{cases}$$

Do (1) nên $T \equiv 0 \pmod{8}$; mà $1 \leq T \leq 14$ (theo trên), nên $T = 8$. Vì thế, nhóm gồm các quả cân có trọng lượng là các số hạng của tổng T là một nhóm tốt.

Kết quả xét hai trường hợp trên đây cho ta điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Bài đã ra có thể được phát biểu dưới dạng tương đương sau:

“Cho tám số nguyên dương (không nhất thiết đối với nhau) không vượt quá 8 và có tổng bằng 16. Chứng minh rằng, tồn tại một nhóm gồm tối đa bảy số, trong tám số đó, mà tổng các số thuộc nhóm bằng 8.”

Với các bài toán “kiểu” trên, ý tưởng “từ các số đã cho, thiết lập các tổng “con”, rồi xét các tổng đó theo một modulo thích hợp”, là một ý tưởng tự nhiên và thông dụng.

2. Tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều có ý tưởng giải là ý tưởng vừa nêu trên.

Nguyễn Khắc Minh

P737. (Mức A) Xét các số thực dương a, b, c , thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = 2(a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c).$$

Lời giải (*của người chấm bài*).

Do $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, nên theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned} & (a+b+c)^2 \\ & \leq (1+1+1)(a^2+b^2+c^2) = 3; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & (a^3 + b^3 + c^3)(a+b+c) \\ & \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Do $a, b, c > 0$ nên từ (1) suy ra

$$a+b+c \leq \sqrt{3}. \quad (3)$$

Lại do $a, b, c > 0$ nên từ (2) và (3), suy ra

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{a+b+c} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta được:

$$S \geq 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hơn nữa, dễ thấy, với $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ và $S = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vì vậy, giá trị nhỏ nhất của S bằng $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bình luận và Nhận xét

1. Bài đã ra là một bài toán cơ bản, một ví dụ đơn giản minh họa việc sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz trong chứng minh bất đẳng thức.

2. Dù đã được nhắc rất nhiều lần trên Tạp

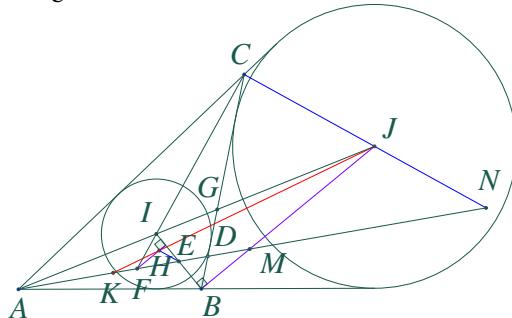
chí, vẫn có quá nửa số lời giải, mà Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, mắc lỗi kiến thức cơ bản. Đó là, khẳng định giá trị nhỏ nhất của S bằng $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, *ngay sau khi mới chỉ chứng minh* được $S \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Võ Quốc Bá Cẩn

P738. (Mức A) Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác đó. Trên cạnh BC , lấy điểm D tùy ý, sao cho ba điểm A, I, D không thẳng hàng. Đường thẳng AD cắt các đường thẳng IB, IC , tương ứng, tại E, F . Gọi H là trực tâm của tam giác IEF , và gọi K là trung điểm của AD . Chứng minh ba điểm K, H, J thẳng hàng.

Lời giải (*dựa theo Đáp án của BBT Tạp chí*).

Gọi G là giao điểm của AJ và BC ; và gọi M, N tương ứng là giao điểm của AD với các đường thẳng BJ, CJ .



Do I là tâm đường tròn nội tiếp và J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC , nên BI, BJ tương ứng là phân giác trong, phân giác ngoài của góc ABG . Do đó, $IB \perp BJ$, và $(AGIJ) = -1$. Từ đây, do phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỷ số kép, nên

$$(ADEM) = B(ADEM) = B(AGIJ) = -1.$$

Vì thế, do K là trung điểm của AD , nên theo hệ thức Newton, ta có:

$$KD^2 = \overline{KE} \cdot \overline{KM}. \quad (1)$$

Bằng cách tương tự, ta cũng chứng minh được

$$KD^2 = \overline{KF} \cdot \overline{KN}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$\begin{aligned} \overline{KE} \cdot \overline{KM} &= \overline{KF} \cdot \overline{KN}; \\ \text{do đó, } \frac{\overline{KE}}{\overline{KN}} &= \frac{\overline{KF}}{\overline{KM}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Đặt $\frac{\overline{KE}}{\overline{KN}} = k$; và ký hiệu f là phép vị tự tâm K , tỷ số k .

Từ (3) suy ra, f biến điểm N thành điểm E , và biến điểm M thành điểm F . (4)

Tiếp theo, do H là trực tâm tam giác IEF (giả thiết) nên $FH \perp IE$, hay $FH \perp IB$ (do I, E, B thẳng hàng). Mà $BJ \perp IB$ (chứng minh trên), hay $MJ \perp IB$ (do M, B, J thẳng hàng), nên $FH \parallel MJ$. (5)

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được $EH \parallel NJ$. (6)

Từ (4), (5) và (6) suy ra, f biến đường thẳng MJ thành đường thẳng FH , và biến đường thẳng NJ thành đường thẳng EH . Do đó, f biến điểm J thành điểm H . Mà K là tâm của f , nên K, J, H thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Lời giải trên cho thấy, kết luận của bài ra vẫn đúng, khi thay giả thiết “ D thuộc cạnh BC , sao cho A, I, D không thẳng hàng” bởi giả thiết “ D thuộc đường thẳng BC , sao cho A, I, D không thẳng hàng”.

2. Tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc là lời giải đúng.

Hạ Vũ Anh

P739. (Mức A) Cho dãy số (a_n) xác định bởi

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{3}} \right\rfloor, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng, trong dãy (a_n) có vô hạn số chẵn và vô hạn số lẻ.

($\lfloor x \rfloor$ ký hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x .)

Lời giải (dựa trên ý tưởng của bạn Huỳnh Nguyễn Khánh Duy, lớp 12 Toán, trường THPT chuyên Tiền Giang, tỉnh Tiền Giang).

Ta có Nhận xét sau:

Nhận xét. Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, do

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \text{ và } y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y,$$

nên

$$x - y - 1 < \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor < x - y + 1.$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt

$$\begin{aligned} u_n &= \left\lfloor \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor \\ \text{và } v_n &= \left\lfloor \frac{n+1}{\sqrt{3}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{3}} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Theo Nhận xét, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\begin{aligned} -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{n+1}{\sqrt{2}} - \frac{n}{\sqrt{2}} - 1 \\ &< u_n < \frac{n+1}{\sqrt{2}} - \frac{n}{\sqrt{2}} + 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{aligned}$$

mà $u_n \in \mathbb{Z}$ nên

$$u_n \in \{0; 1\} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$v_n \in \{0; 1\}, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

Xét số nguyên dương k tùy ý.

Theo Nhận xét, ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{k+100} u_i &= \sum_{i=k}^{k+100} \left(\left\lfloor \frac{i+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{i}{\sqrt{2}} \right\rfloor \right) \\ &= \left\lfloor \frac{k+101}{\sqrt{2}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{\sqrt{2}} \right\rfloor \\ &> \frac{k+101}{\sqrt{2}} - \frac{k}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{101}{\sqrt{2}} - 1 \\ &> 70, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{k+100} v_i &= \sum_{i=k}^{k+100} \left(\left\lfloor \frac{i+1}{\sqrt{3}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{i}{\sqrt{3}} \right\rfloor \right) \\ &= \left\lfloor \frac{k+101}{\sqrt{3}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{\sqrt{3}} \right\rfloor \\ &< \frac{k+101}{\sqrt{3}} - \frac{k}{\sqrt{3}} + 1 = \frac{101}{\sqrt{3}} + 1 \\ &< 60. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (1) và (3) suy ra, trong 101 số $u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+100}$ có ít nhất 71 số bằng 1.

Từ (2) và (4) suy ra, trong 101 số $v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+100}$ có tối đa 59 số bằng 1.

Vì vậy, tồn tại $m \in \{k; k+1; \dots; k+100\}$ sao cho $u_m = 1$ và $v_m = 0$.

Ta có:

$$\begin{aligned} & a_{m+1} - a_m \\ &= \left\lfloor \frac{m+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m+1}{\sqrt{3}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{\sqrt{2}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{\sqrt{3}} \right\rfloor \\ &= u_m + v_m = 1. \end{aligned}$$

Suy ra, $a_m \not\equiv a_{m+1} \pmod{2}$. Từ đây, do tính tùy ý của số nguyên dương k , suy ra, trong 101 số hạng liên tiếp tùy ý của dãy (a_n) luôn có đồng thời cả số chẵn và số lẻ. Mà (a_n) là dãy vô hạn, nên trong dãy đó có vô hạn số chẵn và vô hạn số lẻ. Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Lời giải của bạn *Huỳnh Nguyễn Khánh Duy* là lời giải duy nhất Tạp chí nhận được từ bạn đọc, và là một lời giải đúng.

Lưu Thị Thanh Hà

P740. (Mức A) Cho bảng ô vuông kích thước 2023×2023 . Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất, sao cho có thể đặt n viên bi vào các ô vuông con của bảng, đảm bảo các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

i/ Ở mỗi ô vuông con chỉ có tối đa một viên bi;

ii/ Với mỗi ô vuông con không có bi, tổng số viên bi ở hàng và cột chứa ô đó không nhỏ hơn 2023.

Lời giải (dựa theo cách giải của bạn *Nguyễn Gia Khánh*, lớp 12 Toán 1, trường THPT chuyên Hưng Yên, tỉnh Hưng Yên).

Đánh số thứ tự các hàng của bảng đã cho, từ trên xuống dưới, lần lượt bởi $1, 2, \dots, 2023$; và đánh số thứ tự các cột của bảng đó, từ trái qua phải, lần lượt bởi $1, 2, \dots, 2023$.

Với mỗi $i \in \{1; 2; \dots; 2023\}$, ta gọi hàng được đánh số thứ tự i là hàng i , và gọi cột được đánh số thứ tự i là cột i .

Với $i, j \in \{1; 2; \dots; 2023\}$, ký hiệu ô vuông con nằm ở giao của hàng thứ i và cột thứ j bởi (i, j) .

Giả sử n là số nguyên dương sao cho có thể đặt n viên bi vào các ô vuông con của bảng, đảm bảo các điều kiện i/ và ii/ được đồng thời thỏa mãn.

Xét một cách đặt bi tùy ý, thỏa mãn các yêu cầu của đề bài.

Với mỗi $i \in \{1; 2; \dots; 2023\}$, gọi a_i là số viên bi được đặt vào hàng i , và b_i là số viên bi được đặt vào cột i .

Do tổng số viên bi được đặt vào bảng bằng n , nên

$$\sum_{i=1}^{2023} a_i = \sum_{i=1}^{2023} b_i = n. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } m = 2023^2 - n. \quad (2)$$

Do số bi ở mỗi ô tối đa là 1 và trong bảng có n viên bi, nên trong bảng có đúng n ô có bi. Vì thế, trong bảng có đúng m ô không có bi. Giả sử các ô này là $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_m, q_m)$.

Theo giả thiết của bài ra, với mọi $i \in \{1; 2; \dots; m\}$, đều có

$$a_{p_i} + b_{q_i} \geq 2023. \quad (3)$$

Với mỗi $k \in \{1; 2; \dots; 2023\}$, do trong hàng k có đúng $2023 - a_k$ ô không có bi, và trong cột k có đúng $2023 - b_k$ ô không có bi, nên số k xuất hiện đúng $2023 - a_k$ lần trong dãy p_1, p_2, \dots, p_m và xuất hiện đúng $2023 - b_k$ lần trong dãy q_1, q_2, \dots, q_m .

Vì vậy

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m a_{p_i} &= \sum_{k=1}^{2023} (2023 - a_k) a_k \\
 &= 2023 \cdot \sum_{k=1}^{2023} a_k - \sum_{k=1}^{2023} a_k^2 \\
 &= 2023 \cdot n - \sum_{k=1}^{2023} a_k^2 \quad (\text{do (1)}); \quad (4) \\
 \sum_{i=1}^m b_{q_i} &= \sum_{k=1}^{2023} (2023 - b_k) b_k \\
 &= 2023 \cdot \sum_{k=1}^{2023} b_k - \sum_{k=1}^{2023} b_k^2 \\
 &= 2023 \cdot n - \sum_{k=1}^{2023} b_k^2 \quad (\text{do (1)}). \quad (5)
 \end{aligned}$$

Từ (3), (4) và (5), với lưu ý tới (2), suy ra

$$\begin{aligned}
 2023(2023^2 - n) &\leq \sum_{i=1}^m (a_{p_i} + b_{q_i}) \\
 &= 2 \cdot 2023n - \sum_{k=1}^{2023} (a_k^2 + b_k^2).
 \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
 3 \cdot 2023n &\geq 2023^3 + \sum_{k=1}^{2023} (a_k^2 + b_k^2) \\
 &\geq 2023^3 + \sum_{k=1}^{2023} \frac{(a_k + b_k)^2}{2} \\
 &\geq 2023^3 + \frac{\left(\sum_{k=1}^{2023} (a_k + b_k)\right)^2}{2 \cdot 2023} \\
 &= 2023^3 + \frac{(2n)^2}{2 \cdot 2023} \quad (\text{do (1)}).
 \end{aligned}$$

Suy ra

$$2n^2 - 3 \cdot 2023^2 \cdot n + 2023^4 \leq 0.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}
 n &\geq \frac{2023^2}{2} = \frac{2(1011^2 + 1012^2) - 1}{2} \\
 &= 1011^2 + 1012^2 - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Từ đó, do $n \in \mathbb{N}^*$, suy ra $n \geq 1011^2 + 1012^2$. Xét cách đặt $1011^2 + 1012^2$ viên bi vào bảng, như sau:

Đặt vào mỗi ô vuông con của bảng con 1011×1011 , tạo bởi các hàng $1, 2, \dots, 1011$ và các cột $1, 2, \dots, 1011$, một viên bi; và đặt vào mỗi ô vuông con của bảng con 1012×1012 , tạo bởi các hàng $1012, 1013, \dots, 2023$ và các cột $1012, 1013, \dots, 2023$, một viên bi.

Dễ thấy, ở cách đặt trên, với mỗi ô vuông con không có bi, tổng số viên bi ở hàng và cột chứa ô đó đúng bằng 2023 . Vì thế, cách đặt đó thỏa mãn tất cả các điều kiện của đề bài.

Vì vậy, $n = 1011^2 + 1012^2$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Có thể phát biểu bài đã ra một cách đơn giản hơn, như sau:

“Cho bảng ô vuông kích thước 2023×2023 . Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất, để có thể đánh dấu n ô vuông con của bảng, sao cho với mỗi ô vuông con không được đánh dấu, tổng số ô được đánh dấu ở hàng và cột chứa ô đó không nhỏ hơn 2023 .”

2. Trong số các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc, lời giải của bạn *Nguyễn Gia Khánh* là lời giải đúng duy nhất; các lời giải còn lại đều mắc lỗi thiếu kiểm tra cách đặt $1011^2 + 1012^2$ viên bi, đã chỉ ra ở lời giải, có thỏa mãn các điều kiện của đề bài hay không.

Nguyễn Khắc Minh

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI ĐÚNG

Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải đúng.

KHỐI THCS

- Trường **THCS Nguyễn Thái Bình**, tỉnh Cà Mau: Lê Nguyễn Hoàng Nhật Đình (lớp 9C; P731, P732, P733, P734, P736, P737).
- Trường **TH&THCS Archimedes Đông Anh**, Tp. Hà Nội: Ngô Minh Chấn (lớp 9A3; P732, P733, P735).
- Trường **THCS Thanh Xuân**, Quận Thanh Xuân, Tp. Hà Nội: Doãn Hải Dương (lớp 7A6; P735).
- Trường **THCS Nguyễn Tri Phương**, Tp. Huế, tỉnh Thừa Thiên – Huế: Lê Trung Tân Huy (lớp 9/6; P733, P734, P735, P737).
- Trường **THCS Nguyễn Chí Thanh**, tỉnh Phú Yên: Nguyễn Nguyên Chính (lớp 9D; P734).

KHỐI THPT

- Trường **THPT chuyên Lê Quý Đôn**, tỉnh Điện Biên: Nguyễn Ngọc Diệp (lớp 10A1; P731).
- Trường **THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu**, tỉnh Đồng Tháp: Đỗ Duy Quang (lớp 12T1; P731, P734, P737), Lâm Nhật Tiến (lớp 12T1; P734).
- Trường **THPT Hà Đông**, tỉnh Hải

Dương: Phạm Văn Đăng (lớp 11A; P735).

- Trường **THPT chuyên Hưng Yên**, tỉnh Hưng Yên: Phạm Thị Minh Ánh (lớp 12 Toán 1; P737), Nguyễn Gia Khánh (lớp 12 Toán 1; P738, P740).
- Trường **THPT chuyên Lê Hồng Phong**, tỉnh Nam Định: Phạm Đức Minh (lớp 10 Toán 2; P731, P736, P737).
- Trường **THPT chuyên Lương Văn Chánh**, tỉnh Phú Yên: Đặng Kỳ Nam (lớp 10 Toán 1; P731, P734).
- Trường **THPT chuyên Võ Nguyên Giáp**, tỉnh Quảng Bình: Trần Đức Phát (lớp 10T1; P735).
- Trường **THPT chuyên Tiền Giang**, tỉnh Tiền Giang: Huỳnh Nguyễn Khánh Duy (lớp 12 Toán; P739), Nguyễn Huy Hoàng (lớp 11 chuyên Toán; P731), Trương Phúc Vinh (lớp 12 Lý; P731).
- Trường **THPT chuyên Thái Nguyên**, tỉnh Thái Nguyên: Nguyễn Tiến Dũng (lớp 11 Toán; P735).
- Trường **THPT chuyên Vĩnh Phúc**, tỉnh Vĩnh Phúc: Trương Anh Dũng (lớp 10A1; P731, P733, P737).



GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày với các bạn lời giải của các bài toán trong Kỳ thi toán Durer lần thứ XVI được tổ chức tại Hungary, đăng trong số báo 9/2023.



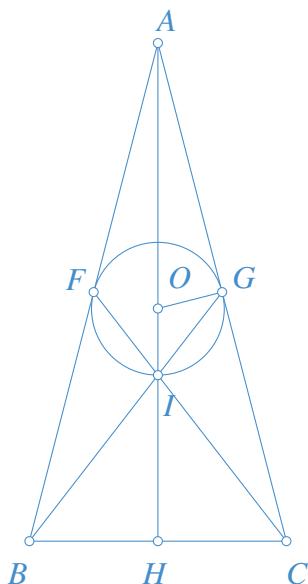
OC49. Cho ABC là tam giác cân. Cạnh đáy BC dài 1 cm, cạnh AB và AC dài 2 cm. Gọi F là trung điểm của AB và G là trung điểm của AC . Gọi (k) là đường tròn tiếp xúc với AB và AC , tương ứng tại F và G . Chứng minh rằng giao điểm của CF và BG thuộc đường tròn (k) .

Lời giải. Gọi I là giao điểm của CF và BG và H là trung điểm của BC . Như vậy I là trọng tâm tam giác cân ABC và A, I, H thẳng hàng. Gọi O là tâm của đường tròn (k) thì do AF, AG là tiếp tuyến với (k) nên O phải nằm trên đường phân giác của $\angle FAG$. Như vậy O nằm trên AH .

Do tam giác BCG cân tại C , ta đặt $\angle CGB = \angle CBG = \alpha$. Vì (k) tiếp xúc với AC tại G nên $OG \perp CG$ do đó $\angle OGI = 90^\circ - \alpha$. Mặt khác ta có

$$\angle OIG = \angle BIH = 90^\circ - \angle CBG = 90^\circ - \alpha.$$

Như vậy $\angle OGI = \angle OIG$, ta suy ra $OG = OI$, tức là I nằm trên đường tròn (k) .



OC50. Khi Andris bước vào phòng, có các số 3 và 24 trên bảng. Trong một bước, nếu đã có các số (không nhất thiết phải khác nhau) k và n trên bảng, thì Andris có thể viết thêm số $kn + k + n$ lên bảng.

(a) Liệu Andris có thể viết số 99999999 lên bảng sau một số bước?

(b) Cùng câu hỏi như phần (a) cho số 99999999?

(c) Cùng câu hỏi như phần (a) cho số 48999999?

Lời giải. Ta thấy cả hai số ban đầu trên bảng đều có dạng $n^2 - 1$. Hơn nữa nếu hai số có dạng này thì số được viết thêm cũng có dạng

này, thay vậy

$$\begin{aligned} & (n^2 - 1)(m^2 - 1) + n^2 - 1 + m^2 - 1 \\ & = (mn)^2 - 1. \end{aligned}$$

a) Vì $9999999 + 1 = 10000000$ không phải số chính phương nên Andris không thể viết được số này.

b) Có thể viết được bằng các bước như sau: Trước tiên viết $3 \times 24 + 3 + 24 = 99$. Sau đó viết tiếp $99 \times 99 + 99 + 99 = 9999$. Và cuối cùng viết

$$9999 \times 9999 + 9999 + 9999 = 99999999.$$

c) Nhận xét rằng với mọi số k xuất hiện trên bảng thì $k+1$ chỉ có ước là 2 hoặc 5. Điều này đúng với hai số ban đầu là 3 và 24. Do $kn+k+n+1 = (k+1)(n+1)$ nên khẳng định đúng với mọi số được viết thêm sau đó. Tuy nhiên do $48999999 + 1 = 49000000$ có ước là 7 nên số 48999999 không thể được viết lên bảng.

OC51. Có một trò chơi với một bảng ô vuông cỡ 3×3 . Trong mỗi bước, người chơi lần lượt điền một trong các số 1, 2 hoặc 3 vào một ô trống sao cho không có hai số giống nhau trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột. Nếu tất cả 9 ô của bảng đều được điền số, người chơi đầu tiên thắng nhưng nếu trước đó có một thời điểm không thể điền số được nữa thì người chơi thứ hai thắng.

Hỏi có cách nào để luôn chiến thắng nếu bạn được phép tùy chọn đi trước hoặc đi sau?

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng người đi trước sẽ luôn có cách để chiến thắng. Nhận xét rằng nếu có một bộ 3 ô, đôi một ở các hàng và cột phân biệt, đã được điền 3 số phân biệt thì các ô còn trống đều có duy nhất một cách điền thỏa mãn bài toán. Như vậy tất cả 9 ô sẽ được điền và người chơi đi trước sẽ thắng. Một bộ ba như vậy được gọi là *bộ ba chiến thắng*. Ta sẽ chứng minh rằng người đi trước luôn có thể tạo ra một bộ ba chiến thắng.

1		
		3
	2	

Trước tiên người đi trước điền số 1 vào ô trung tâm của bảng. Nếu người đi sau điền số 2 hoặc 3 vào một ô ở góc thì ở lần đi tiếp theo người đi trước sẽ tạo ra được một bộ ba chiến thắng. Còn nếu người đi sau điền số 1 vào một ô ở góc thì ở bước tiếp theo người đi trước sẽ tạo được một đường chéo gồm toàn số 1. Tiếp theo dù người đi sau điền như thế nào thì người đi trước cũng tạo được một bộ ba chiến thắng.

Trường hợp người đi sau không điền vào ô ở góc thì người đi trước sau đó sẽ tạo được một hàng hoặc cột gồm 3 số phân biệt. Ở bước tiếp theo dù người đi sau điền thế nào thì người đi trước cũng luôn tạo được một bộ ba chiến thắng. Như vậy người đi trước luôn thắng.

Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc ba bài toán trong Kỳ thi Olympic Toán học Quốc gia Israel năm 2023.

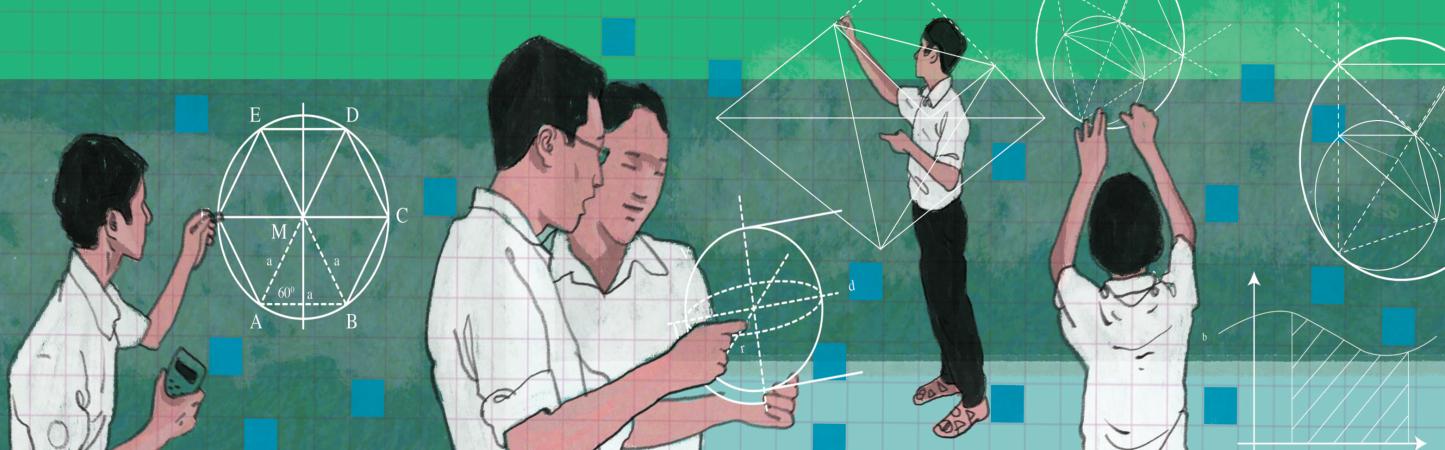
OC58. Có 2000 người ngồi quanh một chiếc bàn tròn. Mỗi người trong số họ là người thật thà (người luôn nói thật) hoặc kẻ dối trá (người luôn nói dối). Biết rằng mỗi người đều nói: “Ít nhất hai trong số ba người ngồi ngay sát bên phải của tôi là những kẻ dối trá”. Hỏi có bao nhiêu người thật thà ngồi trong bàn?

OC59. Biết rằng các số nguyên không âm x, y thỏa mãn

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+60} = \sqrt{y}.$$

Tìm giá trị lớn nhất có thể của x .

OC60. Liệu có tồn tại một tập hợp S gồm 5783 số thực phân biệt thỏa mãn điều kiện sau hay không: Với mọi $a, b \in S$ (không nhất thiết phải phân biệt) đều tồn tại hai số $c \neq d$ thuộc S sao cho $a \times b = c + d$?



PHƯƠNG PHÁP Ô ĂN QUAN

NGÔ QUỐC CHUNG, NGUYỄN THỊ HIỀN¹

LTS. Trong số này, tạp chí Pi giới thiệu đến bạn đọc một bài viết đạt giải trong kỳ thi Bài giảng và bài viết Toán học, mang tên Hoàng Tuy, năm 2022. Bài viết về chủ đề giảng dạy Toán theo chương trình Toán học 2018 – Chương trình Giáo dục Phổ thông mới.

I. Đặt vấn đề

Trong quá trình tìm các Bài toán thực tế, và xem trò chơi dân gian “Ô ăn quan” chúng tôi phát hiện ra có sự tương đồng rất lớn giữa bài toán tập hợp hữu hạn với tập hợp các viên sỏi trong trò chơi “Ô ăn quan”. Từ đó chúng tôi nghĩ đến câu hỏi có thể sử dụng phương pháp ô ăn quan để giải các bài Toán tập hợp đếm được, hữu hạn hay không? Áp dụng cho một số Bài toán ban đầu chúng tôi thấy cách giải là rất đẹp và dễ hiểu. Chúng tôi đặt tên cho cách giải đó là “phương pháp ô ăn quan”

Với ý muốn là sẽ tạo một cách giải hết sức trực quan chúng tôi quyết định nghiên cứu sâu hơn về các Bài toán tập hợp được phát biểu dưới dạng các bài Toán cổ, ngoài ra chúng ta có thể giải quyết được một số bài ở mức độ phức tạp hơn, khi chứa nhiều biến trong một bài toán.

Môn toán trong chương trình phổ thông ở cấp Tiểu học giúp học sinh có những kiến thức cơ bản và sơ giản ban đầu về số học, hình học, các yếu tố đại lượng và hình thành các kỹ năng toán học góp phần xây dựng phương pháp học tập, làm việc có kế hoạch, chủ động, sáng tạo giúp các em học tập tốt các môn học khác trong nhà trường và chuẩn bị cho

các bậc học tiếp theo. Trong bài viết này, chúng tôi sẽ giải một lớp các Bài toán đó bằng phương pháp “Ô ăn quan”, các ví dụ đưa ra là những bài toán rất quen thuộc ở Tiểu học và cả một số bài tập đề cập ở trên chương trình Toán THPT.

Với ý tưởng như trên, bài viết sẽ trình bày những kết quả đạt được đạt được trong quá trình chuyển tải phương pháp “Ô ăn quan” vào giải các bài Toán tập hợp của chương trình Toán Phổ thông mới.

II. Giải các Bài toán tập hợp bằng phương pháp “Ô ăn quan”

Các bài toán cổ dưới đây thường có nhiều phương pháp giải mà mỗi bậc học có thể được trang bị một cách khác nhau. Tuy nhiên đây là các bài toán có tính logic cao nên học sinh phải có năng lực Toán học khá mới dùng được các phương pháp như vẽ biểu đồ, đặt ẩn giải hệ phương trình, hoặc dùng biểu đồ Venn. Trong phương pháp ô ăn quan, chúng tôi sử dụng những mô tả rất thực tế qua việc dùng những viên sỏi; ô trống và rải sỏi dẫn đến học sinh không cần đòi hỏi quá nhiều kiến thức về Toán vẫn có thể linh hôi được.

¹ Trường PT Hermann Gmeiner Vinh, Nghệ An.

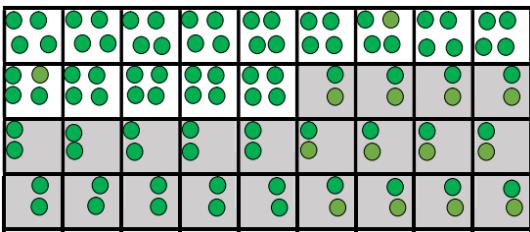
Bài toán 1: Gà và chó

“Vừa gà vừa chó,
Bó lại cho tròn,
36 con, **100** chân chẵn.”

Hỏi có bao nhiêu con gà, bao nhiêu con chó?

Lời giải. Theo bài ta có: tổng số con gà và con chó có tất cả **36** con và **100** chân.

Bây giờ ta vẽ **36** ô và dùng **100** viên sỏi. Trong **36** ô, mỗi ô ta rải vào **2** viên sỏi hết **72** viên sỏi, còn lại **28** viên sỏi. Rải tiếp **28** viên sỏi còn lại vào các ô, mỗi ô thêm **2** viên sỏi. Khi đó, có **14** ô chứa **4** viên sỏi và **22** ô chứa **2** viên sỏi. Vậy ta có **14** con chó và **22** con gà.

**Bài toán 2: Thuyền to – Thuyền nhỏ**

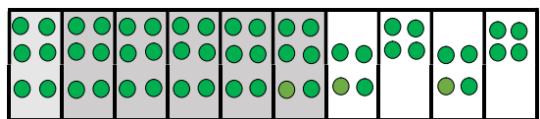
“Thuyền to chở được **6** người,
Thuyền nhỏ chở được **4** người là đông.
Một đoàn trai gái sang sông,
10 thuyền to nhỏ giữa dòng đang trôi.
Toàn đoàn có cả **100** người, Trên bờ còn **48**
người đợi sang”

Hỏi có bao nhiêu thuyền to, bao nhiêu thuyền nhỏ

Lời giải. Toàn đoàn có **100** người, trên bờ còn **48** người đợi sang, như vậy có **52** người đang ngồi trên **10** thuyền.

Theo bài ta có: Tổng số thuyền nhỏ và to là **10** thuyền, **52** người.

Bây giờ ta vẽ **10** ô và dùng **52** viên sỏi. Trong **10** ô mỗi ô ta rải vào **4** viên sỏi hết **40** viên sỏi, còn lại **12** viên sỏi. Bỏ tiếp **12** viên sỏi còn lại vào các ô, mỗi ô thêm **2** viên. Khi đó, có **6** ô chứa **6** viên sỏi và **4** ô chứa **4** viên sỏi. Hay có **6** thuyền to và **4** thuyền nhỏ.



Nhận xét. Thông qua những ví dụ trên ta thấy phương pháp ô ăn quan sử dụng những trực quan cụ thể, giúp học sinh dễ dàng thực hiện và ghi nhớ cách làm đồng thời tìm ra kết quả chính xác.

Ví dụ trên đã yêu cầu học sinh vận dụng được sự mềm dẻo, linh hoạt trong suy nghĩ để giải quyết bài toán. Đó là một yếu tố rất cần thiết, tránh sự cứng nhắc rập khuôn theo những phương pháp đã dẫn đến những cách giải cồng kềnh hoặc bế tắc.

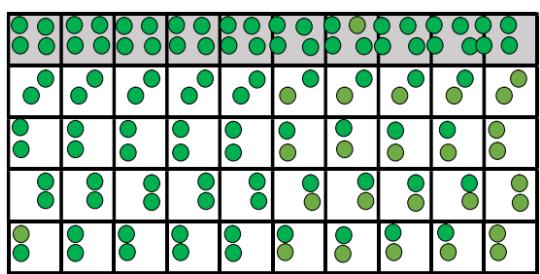
Bài toán 3: Bài toán lợn và gà

Tối qua đếm đàn lợn gà
Thấy được trăm mắt cõi đầu năm mươi
Một trăm hai chục chân tròn
Đố bạn biết có bao nhiêu gà và lợn?

Lời giải. Có **50** cái đầu nên tổng số lợn và gà là **50** con và tổng số là **120** chân. Bây giờ ta vẽ **50** ô tương trưng cho **50** con, và lấy **120** viên sỏi tương trưng cho **120** cái chân.

Bây giờ ta sẽ rải đầy kín tất cả các ô, với mỗi ô hoặc hai viên sỏi, hoặc **4** viên sỏi. Khi đó số ô có **4** viên tức là có **4** chân chính là lợn, số ô có **2** viên tức là có **2** chân chính là gà.

Rõ ràng khi rải đầy các ô có hai viên mỗi ô, thì hết **100** viên, nên thừa **20** viên, **20** viên còn lại rải đủ cho **10** ô, và do đó để thêm mỗi ô **2** viên. Vậy số ô có **4** viên là **10** nên số lợn là **10** con, còn lại số ô có **2** viên là **40** ô vậy có **40** gà.



Bài toán 4: Bài toán “Thương nhau cau sáu bồ ba”

“Thương nhau cau sáu bồ ba
 Ghét nhau cau sáu bồ ra làm mười.
 Mỗi người một miếng trăm người,
 Có mươi bảy quả hỏi người ghét yêu”?

Hỏi có bao nhiêu quả cau ghét và bao nhiêu quả cau yêu.

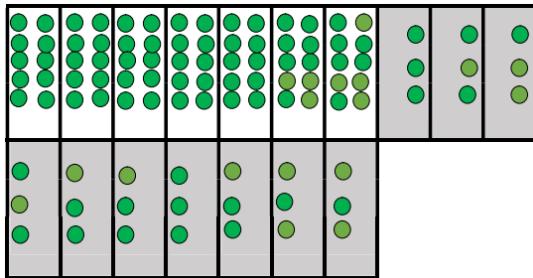
Lời giải: Ta coi 17 quả cau là 17 ô vuông và 100 miếng cau chia cho 100 người là 100 viên sỏi. Trong 17 ô vuông, mỗi ô vuông rải 3 viên sỏi hết 51 viên sỏi, còn lại 49 viên sỏi. Rải tiếp 49 viên còn lại vào các ô, mỗi ô thêm 7 viên. Khi đó, có 7 ô chứa 10 viên sỏi và 10 ô chứa 3 viên sỏi. Hay có 30 người tương ứng với 10 quả cau bồ 3 và 70 người ghét ứng với 7 quả cau bồ 10.

:::::	:::::
:::::	:::::	:::::
...	:::::	...	:::::	:::::
...	:::::	:::::

Nhìn vào bảng ta thấy có 30 ô chứa 3 viên sỏi, vậy có 30 kg cà phê tốt, có 20 ô chứa hai viên sỏi nên có 20 kg cà phê xấu.

Bây giờ ta sẽ giải các bài Toán tập hợp có độ phức tạp cao hơn, đó là những bài toán và có từ 3 biến trở lên. Những bài toán này nếu giải bằng các cách thông thường sẽ hết sức phức tạp và đòi hỏi rất nhiều kỹ thuật. Nhưng với phương pháp “Ô ăn quan” ta sẽ có một lời giải rất dễ hiểu, đẹp đẽ và học sinh Tiểu học cũng có thể hiểu được.

Bài toán 7:



Bài toán 6: (Buôn cà phê)

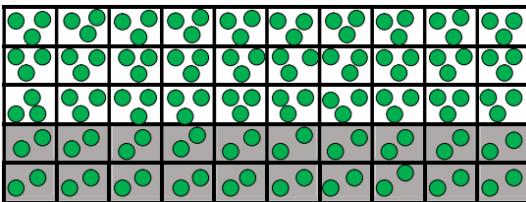
Người nọ mua một số cafe tốt và một số cafe xấu trộn lại cân nặng 50 kg, trả tất cả 7.800\$. Biết rằng giá 1 kg cafe tốt 180\$, giá 1 kg cafe xấu 120\$. Hỏi người ấy mua mỗi hạng cafe mấy kg?

Lời giải: Ta coi mỗi ô là 1 kg cà phê, có 50 kg cà phê nên sẽ có 50 ô, bây giờ ta sẽ xem mỗi viên sỏi là 60\$, tổng cộng là 7800\$ nên sẽ ứng với 130 viên sỏi. Sau đó ta sẽ rải sỏi vào các ô, mà mỗi ô chỉ nhận 2 viên = 120\$ hoặc 3 viên = 180\$, số ô có 3 viên chính là cà phê tốt, số ô chỉ có 2 viên chính là cà phê xấu. Đầu tiên ta rải đủ 50 ô, mỗi ô 2 viên thì còn lại 30 viên, ta tiếp tục rải 30 viên còn lại mỗi ô thêm 1 viên cho đến khi hết sỏi. Ta có hình vẽ sau.

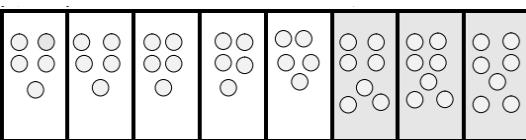
Lớp 5A có 35 học sinh (HS) làm bài kiểm tra toán cuối Kỳ II. Đề bài gồm có 3 bài toán. Giáo viên chủ nhiệm lớp báo cáo với Nhà trường rằng: Cả lớp mỗi em đều làm được ít nhất một bài, trong đó 20 em giải được bài toán thứ nhất, 14 HS giải được bài toán thứ hai, 10 HS giải được bài toán thứ ba, 5 HS giải được bài toán thứ hai và thứ ba, 2 HS giải được bài toán thứ nhất và thứ hai, chỉ có một HS được 10 điểm vì đã giải được cả ba bài. Học sinh nào giải được bài 3 thì làm ít nhất thêm được một bài khác. Hỏi lớp học đó có bao nhiêu HS không dự kiểm tra?

Lời giải: Trước hết ta vẽ bảng gồm có 35 ô ứng với 35 em học sinh lớp 5A. Ta lấy 20 tấm thẻ ký hiệu là số B1 ứng với số lần giải được bài toán 1, lấy 14 thẻ ký hiệu là B2 ứng với 14 lần giải được bài toán 2, 10 tấm thẻ đánh dấu là B3 ứng với 10 lượt giải được bài toán 3. Bây giờ ta sẽ rải thẻ vào các ô theo quy tắc đã cho. Đầu tiên ta rải 20 tấm thẻ B1 vào 20 ô, sau đó ta rải đến tấm thẻ B2 vào 2 ô có thẻ B1 và thêm 12 ô trống, hết thẻ B2 bây giờ ta rải thẻ B3, 1 tấm thẻ vào ô đã có 2 thẻ B1 và B2, tiếp tục rải 5 thẻ vào các ô chỉ có thẻ B2,

do làm được bài 3 thì sẽ làm được hơn một bài do đó sẽ rải 4 thẻ còn lại vào các ô chỉ có B1. Sau khi rải hết thẻ mà ô nào còn trống có nghĩa là học sinh đó không thi.



Nhìn vào bảng sau khi rải hết các thẻ theo quy tắc trên ta thấy còn lại chỉ có 3 ô trống nên có 3 em học sinh không tham gia thi cuối kỳ II.



Bài toán 8:

Trong một hội nghị có 100 đại biểu tham dự, mỗi đại biểu nói được một hoặc hai trong ba thứ tiếng: Nga, Anh hoặc Pháp. Có 39 đại biểu chỉ nói được tiếng Anh, 35 đại biểu nói được tiếng Pháp, có 12 đại biểu biết 2 thứ tiếng trong đó 8 đại biểu nói được cả tiếng Anh và tiếng Nga. Hỏi có bao nhiêu đại biểu chỉ nói được tiếng Nga, bao nhiêu đại biểu chỉ nói được tiếng Pháp?

Lời giải.

B1-B3	B1-B3	B1-B3	B1-B3	B1	B1	B1
B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1
B1	B1	B1	B1	B1-B2	B1-B2-B3	B2-B3
B2-B3	B2-B3	B2-B3	B2-B3	B2	B2	B2
B2	B2	B2	B2			

Ta vẽ 100 ô tương ứng với 100 đại biểu. Ta sẽ làm 39 thẻ chữ A ứng với 35 người nói được tiếng Anh, 35 thẻ chữ P ứng với 35 người biết nói tiếng Pháp và 8 thẻ chữ NA ứng với số lượng biết nói tiếng Nga, gọi thẻ chữ N là ký hiệu biết nói tiếng Nga.

Đầu tiên, ta sẽ rải 39 thẻ A vào 39 ô. Ta rải tiếp 35 thẻ chữ P vào các ô trống tiếp theo,

tiếp tục rải tiếp 8 thẻ NA vào các ô trống còn lại. Böyle giờ ta sẽ rải thẻ chữ N, vì mỗi đại biểu nói được ít nhất một thứ tiếng, nên những ô trống còn lại ta sẽ rải chữ N vào. Do có 12 đại biểu biết nói hai thứ tiếng mà lại có 8 người nói Anh và Nga do đó chắc chắn có 4 người nói tiếng Pháp thì nói được tiếng Nga (vì không thể cùng biết cả Anh và Pháp) do đó ta sẽ rải 4 thẻ chữ N vào 4 ô có chữ P. Khi đó ô nào mà chỉ có một mình chữ N là chỉ nói được tiếng Nga, những ô chỉ có chữ P là chỉ nói được tiếng Pháp. Nhìn vào bảng ta thấy: có 18 ô chữ N vậy có 18 đại biểu chỉ nói được tiếng Nga. Có 31 ô chỉ có chữ P nên có 31 đại biểu chỉ nói được tiếng Pháp

Bài toán 9.

50 bạn học sinh lớp 12A đều đội 1 trong hai loại mũ: mũ cứng hoặc mũ mềm, đi 1 trong 2 loại giày đen hoặc nâu, mặc 1 trong 2 loại áo: trắng hoặc xanh. Có 18 bạn đội mũ mềm, 19 bạn đi giày đen, 11 bạn có áo trắng. Hỏi có thể chắc chắn có ít nhất bao nhiêu bạn vừa đi giày nâu, vừa đội mũ cứng và mặc áo xanh?

Lời giải. Ta sẽ vẽ bảng gồm 50 ô, ta kí hiệu thẻ chữ M, C lần lượt ứng với đội mũ mềm và mũ cứng, thẻ , N lần lượt cho giày đen và giày nâu, thẻ T, X cho mặc áo trắng và áo xanh.

A	A	A	A	A	A	A	A	A
A	A	A	A	A	A	A	A	A
A	A	A	A	A	A	A	A	A
A	A	A	A	A	A	A	A	P
P	P	P	P	P	P	P	P	P
P	P	P	P	P	P	P	P	P
P	P	P	P	P	P	P	P	P
PN	PN	PN	P	NA	NA	NA	NA	NA
NA	NA	N	N	N	N	N	N	N
N	N	N	N	N	N	N	N	N

Vì có 18 bạn đội mũ mềm ta rải 18 thẻ M vào 18 ô, các ô trống còn lại ta rải chữ C cho các bạn đội mũ cứng, ta rải tiếp 19 thẻ D vào hết các bạn có thẻ chữ C, hết chữ C ta sẽ rải sang chữ M, nhiều ô chữ C nhất có thể. Sau đó ta rải 11 thẻ chữ T vào ô chữ CN, hết các ô đó ta sẽ rải sang các ô còn lại, khi hết 11 thẻ chữ T ta tiếp tục rải chữ X vào tất cả các ô không chứa chữ T. Khi đó ô nào mà chưa

3 chữ **CNX** thì đó chính là học sinh đi giày Nâu, đội mũ Cứng và mặc áo Xanh.

Nhìn vào bảng ta thấy chỉ có hai ô có 3 chữ **CNX** nên có ít nhất 2 học sinh đội mũ cứng, đi giày nâu và mặc áo xanh.

Nhận xét: Đây là bài Toán logic khá hóc búa vì nó chứa đến 6 yếu tố để tác động lên một học sinh, nếu dùng phương pháp suy luận thông thường chúng ta sẽ vấp phải các lý luận khá phức tạp và dễ bị nhầm lẫn. Phương pháp “Ô ăn quan” cho ta một lời giải rất đẹp đẽ và khá ngắn gọn.

IV. Bài tập đề xuất

Bài 1: Trong một Hội nghị có 100 người tham dự, trong đó có 10 người không biết tiếng Nga và tiếng Anh, có 75 người biết tiếng Nga và 83 người biết Tiếng Anh. Hỏi trong hội nghị có bao nhiêu người biết cả 2 thứ tiếng Nga và Anh?

Bài 2: Một lớp học có 16 học sinh học giỏi môn Toán; 12 học sinh học giỏi môn Văn; 8 học sinh vừa học giỏi môn Toán và Văn; 19 học sinh không học giỏi cả hai môn Toán và Văn. Hỏi lớp học có bao nhiêu học sinh?

Bài 3: Một lớp có 45 học sinh. Mỗi em đều đăng ký chơi ít nhất một trong hai môn: bóng đá và bóng chuyền. Có 35 em đăng ký môn bóng đá, 15 em đăng ký môn bóng chuyền. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký chơi cả 2 môn?

Bài 4: Lớp 12A có 20 học sinh thích bóng đá, 17 học sinh thích bơi, 36 học sinh thích bóng chuyền, 14 học sinh thích bơi và bóng đá, 13 học sinh thích bơi và bóng chuyền, 15 học sinh thích bóng đá và bóng chuyền, 10 học sinh thích cả 3, 12 học sinh không thích môn nào cả. Tính số học sinh của lớp 12A?

Bài 5: Lớp 10A có 40 học sinh trong đó có 10 bạn học sinh giỏi Toán, 15 bạn học sinh giỏi Lý, và 22 bạn không giỏi môn học nào trong hai môn Toán, Lý. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn học sinh vừa giỏi Toán vừa giỏi Lý?

Bài 6: (Thi giữa kỳ 1 – Trường PTTH Lý Nhân Tông, Hà Nội) Lớp 10A có 45 học sinh trong đó có 15 học sinh thích chơi đá bóng, 12 học sinh thích chơi bóng rổ, 6 học sinh thích chơi cả 2 môn. Số học sinh không thích chơi cả 2 môn thể thao trên là:

Bài 7: Lớp 10A có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả 3 môn Toán, Lý, Hóa. Số học sinh giỏi đúng hai môn học của lớp 10A là bao nhiêu.

Tài liệu tham khảo

[1] L. V. An, N. T. Sơn, N. T. Thiêm, N. T. H. Anh, N. Q. Chung (2023), Nhìn bài toán cổ theo quan điểm Tổ hợp, Kỷ yếu HTKH cấp Trường: “Nâng cao chất lượng đào tạo ngành Sư phạm trong bối cảnh hiện nay”, Trường Đại học Hà Tĩnh, (Hà Tĩnh, ngày 24/3/2023), 179 – 186.

[2] Naum Yakolevich Vilenkin – Dịch giả: Nguyễn Tiến Dũng, Trần Thanh Nam, Nguyễn Chí Thức, Hồ Thị Thảo Trang, *Toán học qua các câu chuyện về Tập hợp*, Tủ sách SPUTNIK, NXB Thế giới, năm 2017.

[3] Trịnh Hồng Long, *670 bài toán đố*, NXB Sống Mới, năm 1970.

[4] Người dịch: Trần Lưu Cường, Trần Lưu Thịnh, *Những bài toán cổ*, NXB giáo dục, năm 1995.

[4] Trần Nam Dũng (Tổng chủ biên), Trần Đức Huyên (Chủ biên), Nguyễn Thành Anh – Vũ Như Thư Hương – Ngô Hoàng Long – Phạm Hoàng Quân – Phạm Thị Thu Thủy, *Sách chân trời sáng tạo – Toán 10 – Tập 1*, NXB giáo dục Việt Nam, năm 2022.

[5] Đỗ Đức Thái (Tổng chủ biên), Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, Phạm Minh Phương, Phạm Hoàng Quân, *Sách Cảnh diều – Toán 10 – Tập 1*, NXB Giáo dục, năm 2021

MỜI BẠN ĐỌC RA ĐỂ CHƠI PI



Chuyên mục Thách thức Toán học
trân trọng mời các thầy cô giáo, các
bạn học sinh, sinh viên đóng góp các
bài toán hay do mình sáng tác hoặc
sưu tầm.

YÊU CẦU ĐỐI VỚI BÀI TOÁN GỬI ĐĂNG

Dành cho đối tượng là
học sinh THCS hoặc
THPT

Có ý tưởng hay độc đáo trong lời
giải.

Đề bài sáng tác hoặc sưu tầm,
được gửi kèm cùng lời giải. Đề
bài chưa được công bố hay gửi
công bố trên các tạp chí, báo
toán bằng tiếng Việt.

Với những bài toán khó,
khuyến khích tác giả gửi
thêm các bài phân tích
về ý tưởng, phương pháp
tư duy, mối liên hệ với
các bài toán khác để
đăng trong chuyên mục
Học cùng Pi.

Đối với đề sưu tầm cần ghi rõ
nguồn gốc (trên các sách báo,
tạp chí hay trong các kỳ thi). Đối
với các bài toán được phát triển
từ một bài toán khác, cũng
khuyến khích tác giả giới thiệu
bài toán gốc.

Các bạn học sinh, sinh viên có đề bài trên chuyên mục Thách thức Toán học sẽ nhận được
giấy khen từ Tạp chí Pi.

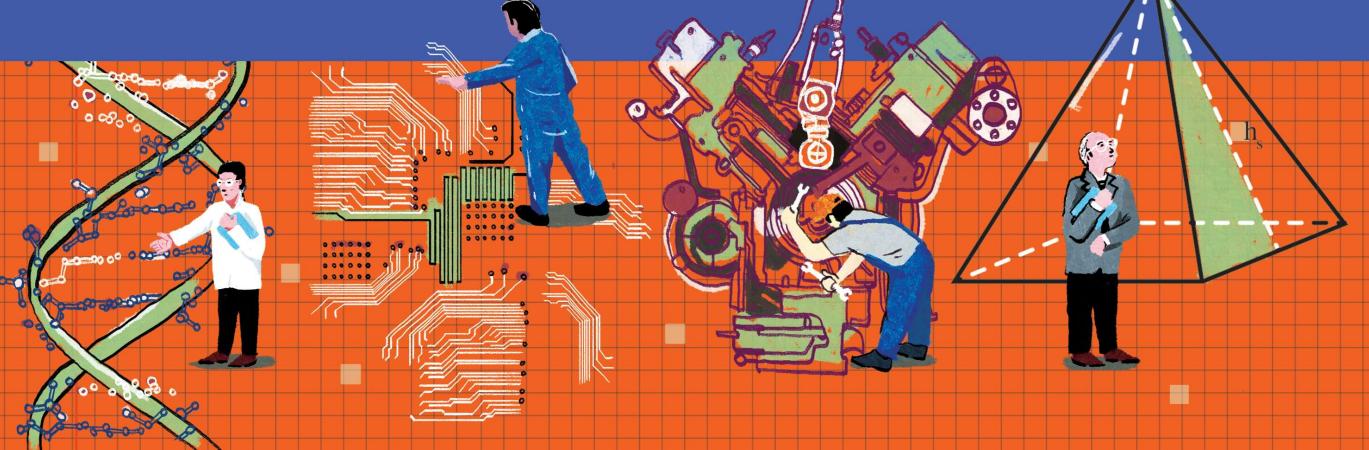
Thông tin Tòa soạn

✉ Gửi bài: bbt@pi.edu.vn

✉ Giao dịch: vanphong01.pi@gmail.com

☎ Hotline: 024.3215.1407

🌐 Website: www.pi.edu.vn



MÁY TÍNH VÀ TRÍ TUỆ NHÂN TẠO

NGUYỄN MẠNH TOÀN*

Bất chấp lịch sử ngắn ngủi của mình, máy tính và trí tuệ nhân tạo (AI) đã thay đổi một cách cơ bản những gì chúng ta thấy, những gì chúng ta biết và những gì chúng ta làm. Chỉ trong một thời gian ngắn, các hệ thống AI đã xâm nhập vào mọi lĩnh vực của cuộc sống, từ khái quát như học tập, lý luận, nhận thức, v.v., cho đến cụ thể như chơi cờ, chứng minh các định lý toán học, vẽ tranh, sáng tác nhạc, viết tiểu luận, làm thơ, lái xe ô tô hay chẩn đoán bệnh. Thế giới thay đổi nhanh chóng đến nỗi ngay cả những công nghệ khá gần đây cũng khiến chúng ta cảm thấy lạc hậu như thế nào. Điện thoại di động vào những năm 90 là những viên gạch lớn với màn hình nhỏ màu xanh lá cây. Hai thập kỷ trước đó, bộ lưu trữ chính của máy tính là thẻ đục lỗ.



Máy tính cùng các ứng dụng thông minh phát triển một cách nhanh chóng và trở thành một phần không thể thiếu trong cuộc sống hàng ngày của chúng ta khiến con người dễ dàng quên mất các công nghệ này mới ra

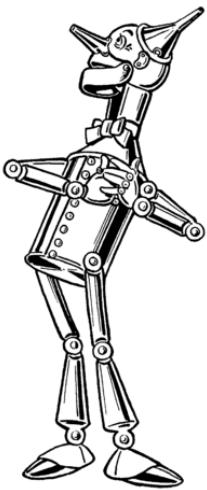
đời như thế nào. Để biết tương lai sẽ ra sao, việc nghiên cứu lịch sử thường rất hữu ích. Trong bài viết này, chúng ta hãy cùng nhìn lại một số cột mốc quan trọng trong lịch sử phát triển của máy tính và lĩnh vực AI, để xem chúng ta có thể mong đợi điều gì từ chúng trong tương lai, để xem liệu AI sẽ đi đến đâu, và quan trọng hơn, nó sẽ dẫn chúng ta đến đâu.

Những hạt giống đầu tiên

Chúng ta tự gọi mình là *Homo sapiens* – con người thông thái – bởi vì trí thông minh rất quan trọng đối với chúng ta. Trong hàng nghìn năm, chúng ta đã cố gắng hiểu cách chúng ta suy nghĩ và hành động – nghĩa là làm thế nào bộ não của chúng ta, chỉ là một số ít vật chất, lại có thể nhận thức, hiểu, dự đoán và điều khiển một thế giới rộng lớn và phức tạp hơn chính nó rất nhiều. Từ thời cổ đại, những huyền thoại và truyền thuyết về những sinh vật nhân tạo được ban cho ý thức hoặc trí thông minh bởi những người thợ bậc thầy đã xuất hiện và được lưu truyền. Đến thế kỷ 19 và nửa đầu thế kỷ 20, ý tưởng về con người nhân tạo và những cỗ máy biết suy nghĩ cũng được phát triển trong các tác phẩm văn học, điển hình như quái vật Monster có sức mạnh phi thường nhưng ý thức được sự cô đơn của mình trong *Frankenstein* của Mary Shelley, hay

*Đại học Osnabrueck, CHLB Đức.

anh chàng người thiếc Woodman luôn khao khát có một trái tim trong *Phù thủy xứ Oz* của Frank Baum.



Hình 1: Phác họa của Tin Woodman. Nguồn: Wiki.

Ở khía cạnh khác, các nhà triết học qua hàng thế kỷ đã cố gắng mô tả quá trình suy nghĩ của con người như sự thao tác của các biểu tượng (ký tự). Công trình này đạt đến đỉnh cao với việc phát minh ra máy tính kỹ thuật số có thể lập trình vào những năm 1940, một cỗ máy dựa trên bản chất trừu tượng của suy luận toán học.

Máy tính điện tử và những ý tưởng đằng sau nó đã truyền cảm hứng cho một số nhà khoa học đến từ nhiều lĩnh vực khác nhau (toán học, tâm lý học, kỹ thuật, kinh tế và khoa học chính trị), và họ bắt đầu thảo luận nghiêm túc về khả năng xây dựng bộ não điện tử – một bộ não nhân tạo có khả năng suy nghĩ và suy luận giống như bộ não của con người.

Bài kiểm tra Turing

Năm 1950, nhà toán học kiệt xuất người Anh Alan Turing – một trong những cha đẻ của máy tính hiện đại – đã thảo luận về cách chế tạo những cỗ máy thông minh và đề xuất một phương pháp để kiểm tra trí thông minh của chúng. Trong công trình nổi tiếng *Computing machinery and intelligence* (Máy tính và trí thông minh), ông xem xét câu

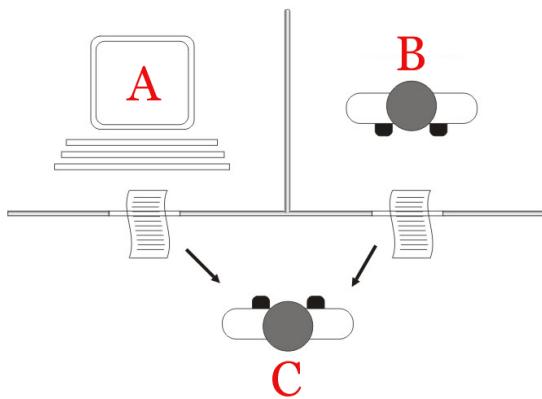
hỏi “*Máy móc có thể suy nghĩ được không?*”. Turing cho rằng vì các từ “suy nghĩ” và “máy móc” không thể được định nghĩa rõ ràng nên chúng ta có thể thay thế câu hỏi trên bằng một câu hỏi khác, có liên quan chặt chẽ với nó, được diễn đạt bằng những từ tương đối rõ ràng và có thể kiểm chứng, chẳng hạn “*Liệu máy tính điện tử có thể làm những điều mà chúng ta (những thực thể có trí tuệ) có thể làm?*”.



Hình 2: Alan Turing. Nguồn: AFP/Getty Images.

Để trả lời cho câu hỏi trên, Turing đề xuất một phương pháp gọi là “Trò chơi bắt chước” (Imitation game), sau này được biết đến rộng rãi với tên gọi *Bài kiểm tra Turing*. Bài kiểm tra có sự tham gia của ba thành viên được xếp vào ba căn phòng tách biệt: Một người thẩm vấn (C), một máy tính (A) và một người phản biện (B) (Hình 3). Người thẩm vấn cố gắng xác định đâu là máy tính bằng cách đặt câu hỏi cho hai thành viên còn lại. Mọi giao tiếp đều thông qua bàn phím và màn hình hiển thị. Người thẩm vấn có thể đặt những câu hỏi sâu sắc và có phạm vi rộng tùy thích, và máy tính được phép làm mọi thứ có thể để đánh lừa người thẩm vấn. Người phản biện đóng vai trò giúp người thẩm vấn nhận dạng chính xác. Trò chơi diễn ra nhiều lần, với những người khác nhau đóng vai trò thẩm vấn và phản biện, và nếu có

đủ tỷ lệ người thẩm vấn không thể phân biệt được máy tính với con người, thì máy tính được coi là thông minh.



Hình 3: Bài kiểm tra Turing.

Bài kiểm tra Turing được coi là đề xuất nghiêm túc đầu tiên trong triết lý trí tuệ nhân tạo. Dù bản thân sự mô tả khá đơn giản, việc chế tạo một cỗ máy có khả năng vượt qua bài kiểm tra lại có ý nghĩa sâu rộng. Cỗ máy đó sẽ phải xử lý ngôn ngữ tự nhiên, có thể học hỏi từ cuộc trò chuyện, ghi nhớ những gì đã được nói và truyền đạt ý tưởng trở lại con người, hiểu các khái niệm chung và hiển thị những gì chúng ta gọi là lẽ thường.

Ý tưởng về một vấn đề khó khăn, lâu dài như vậy là chìa khóa để định hình lĩnh vực AI vì nó đi thẳng vào trọng tâm của vấn đề – thay vì giải quyết một vấn đề nhỏ, nó xác định mục tiêu cuối cùng có thể kéo nghiên cứu theo nhiều con đường. Nếu không có tầm nhìn về những gì AI có thể đạt được, bản thân lĩnh vực này có thể sẽ không bao giờ hình thành hoặc đơn giản vẫn chỉ là một nhánh của toán học hay triết học.

Sự ra đời của AI

Năm 1952, nhà khoa học máy tính Arthur Samuel tại IBM đã viết chương trình học chơi cờ đam trên máy tính IBM 701, đánh dấu sự ra đời của lĩnh vực học máy. Máy tính IBM càng chơi càng tiến bộ, có thể nghiên

cứu những nước đi nào tạo nên chiến lược chiến thắng và kết hợp những nước đi đó vào chương trình của mình. Sự thành công này đã bác bỏ quan niệm trước đây rằng máy tính không thể “học” mà chỉ làm được những điều được lập trình sẵn.



Hình 4: Samuel chơi cờ với máy tính trên truyền hình. Nguồn: IBM.

Năm 1955, hai nhà khoa học Allen Newell và Herbert Simon tại Đại học Carnegie Mellon cùng lập trình viên Cliff Shaw tại Tập đoàn Nghiên cứu và Phát triển (RAND) đã cho ra đời *Logic Theorist*, một chương trình được thiết kế để mô phỏng kỹ năng giải quyết vấn đề của các nhà toán học. Chương trình khám phá cây tìm kiếm với gốc là giả thuyết ban đầu, mỗi nhánh là một suy luận dựa trên các quy tắc logic. Đầu đó trên cây là mệnh đề mà chương trình dự định chứng minh. Con đường dọc theo các nhánh dẫn từ giả thuyết đến mệnh đề cần phải chứng minh là một chứng minh. Logic Theorist đã chứng minh được 38 trong số 52 định lý đầu tiên trong chương hai bộ sách nổi tiếng *Principia Mathematica* của Whitehead và Russell, trong đó có những chứng minh mới và ngắn hơn. Logic Theorist đã giới thiệu *Lý luận thông qua tìm kiếm* và *Phương pháp Heuristic*¹, những khái niệm trọng tâm trong nghiên cứu AI sau này.

¹ Phương pháp giải quyết vấn đề hoặc tự khám phá bằng cách sử dụng những biện pháp nhanh chóng để tạo ra các giải pháp đủ tốt trong một khoảng thời gian giới hạn.

Mùa hè năm 1956, hội thảo về trí tuệ nhân tạo đầu tiên do Marvin Minsky, Nathaniel Rochester, Claude Shannon và John McCarthy tổ chức đã diễn ra ở Đại học Dartmouth. Trong số những người tham dự có Arthur Samuel, Herbert A. Simon và Allen Newell. Dưới sự thuyết phục của McCarthy, “Trí tuệ nhân tạo” (Artificial Intelligence) đã được mọi người công nhận để chỉ lĩnh vực nghiên cứu mới, được Minsky định nghĩa như “*lĩnh vực khoa học chế tạo máy móc làm được những việc đòi hỏi trí thông minh của con người*”. Hội thảo Dartmouth đã đánh dấu sự ra đời của trí tuệ nhân tạo như một lĩnh vực học thuật. Mặc dù không thu được những kết quả như kỳ vọng nhưng hội thảo đã là chất xúc tác cho hai mươi năm nghiên cứu AI sau đó.



Hình 5: Herbert Simon (trái) và Allen Newell (phải). Nguồn: Đại học Carnegie Mellon.

Đợt bùng nổ đầu tiên

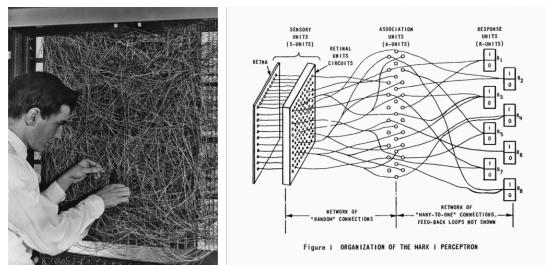
Từ năm 1957 đến năm 1974, lĩnh vực AI phát triển mạnh mẽ. Sự ra đời của bóng bán dẫn thay thế đèn chân không giúp máy tính lưu trữ nhiều thông tin hơn, trở nên nhanh hơn, rẻ hơn và dễ tiếp cận hơn. Các thuật toán học máy cũng được cải thiện và mọi người hiểu rõ hơn rằng thuật toán nào sẽ áp dụng cho vấn đề của họ.



Hình 6: Hội thảo Dartmouth năm 1956.

Nguồn: IEEE Spectrum.

Năm 1957, Herbert Simon, Cliff Shaw và Allen Newell phát triển *General Problem Solver*, hay GPS, một chương trình có mục đích giải quyết các vấn đề chung. GPS có thể giải được nhiều câu đố ẩn tượng trong logic, hình học, đồ chữ hay cờ vua thông qua phương pháp thử và sai (trial and error). GPS (cùng với Logic Theorist) đặt nền móng cho *AI biểu tượng* (Symbolic AI), một nhánh của AI xem việc biểu diễn tri thức và lý luận dựa trên các quy tắc logic như là chìa khóa của trí thông minh. Với những đóng góp to lớn này, Newell và Simon được trao Giải thưởng Turing năm 1975, giải thưởng danh giá được xem như Nobel của khoa học máy tính.²



Hình 7: Frank Rosenblatt và Perceptron.

Nguồn: Researchgate.

Cùng năm 1957, Frank Rosenblatt tại Phòng thí nghiệm Hàng không Cornell đã xây dựng *Perceptron*, mạng thần kinh nhân

²Herbert Simon cũng được trao Nobel kinh tế năm 1978 cho những nghiên cứu tiên phong về quá trình ra quyết định trong các tổ chức kinh tế.

tạo (một lớp ẩn) đầu tiên lấy cảm hứng từ mô hình toán học của não bộ phát triển bởi Warren S. McCulloch và Walter Pitts những năm 1940. Perceptron được viết trên IBM 704, một máy tính 5 tần có kích thước của một căn phòng. Sau 50 lần thử, máy tự học cách phân biệt các thẻ được đánh dấu bên trái với các thẻ được đánh dấu bên phải. Perceptron đánh dấu sự ra đời của chủ nghĩa kết nối, nền tảng của *Mạng thần kinh* và *Học sâu* được phát triển sau này.

Năm 1960, John McCarthy³ tại Viện Công nghệ Massachusetts (MIT) đã phát triển LISP, một ngôn ngữ lập trình bậc cao dựa trên giải tích lambda. LISP trở nên rất quan trọng cho sự phát triển ban đầu của AI nhờ khả năng xử lý biểu tượng và tính linh hoạt trong việc quản lý các tác vụ phức tạp. Tuy vậy, phải đến đầu những năm 1970, với sự ra đời của máy tính mạnh mẽ hơn sử dụng mạch tích hợp (chip silicon chứa nhiều bóng bán dẫn), các lập trình viên mới có thể triển khai các ứng dụng tri thức sâu rộng.



Hình 8: Tương tác với ELIZA.

Năm 1965, Joseph Weizenbaum – nhà khoa học máy tính và giáo sư tại MIT – đã phát triển ELIZA, một hệ thống xử lý ngôn ngữ tự nhiên mô phỏng bác sĩ. ELIZA trả lời các câu hỏi trong bối cảnh một buổi trị liệu tâm lý. ELIZA xác định các từ khóa từ dữ liệu đầu vào của người dùng và khớp chúng với các

câu trả lời được lập trình sẵn. Một số người dùng tin rằng họ đang tương tác với một người khác cho đến khi chương trình đạt đến giới hạn và cuộc trò chuyện trở nên vô nghĩa. ELIZA là tiền thân của những chatbot ngày nay.

Bị thu hút bởi những kỳ vọng cùng sự lạc quan của các nhà khoa học hàng đầu, chính phủ Mỹ đã tài trợ ô ạt cho nghiên cứu AI. Chính phủ đặc biệt quan tâm đến một cỗ máy có thể phiên âm và dịch ngôn ngữ nói cũng như xý lý dữ liệu thông lượng cao. Cơ quan Nghiên cứu Quốc phòng Tiên tiến (DARPA) đã đầu tư hàng triệu USD để hỗ trợ nghiên cứu AI tại một số cơ sở nghiên cứu như MIT, Đại học Stanford, Đại học Carnegie Mellon cũng như một số phòng thí nghiệm nghiên cứu thương mại khác. Năm 1970, Marvin Minsky (giáo sư tại MIT, giải thưởng Turing 1969) nói với Tạp chí Life: “Từ ba đến tám năm nữa chúng ta sẽ có một cỗ máy có trí thông minh chung của một con người bình thường”.

Mùa đông AI⁴

Những kỳ vọng cao và những tuyên bố đầy tham vọng thường là con đường trực tiếp dẫn đến sự thất vọng. Các nhà nghiên cứu AI đã quá lạc quan trong việc thiết lập các mục tiêu của họ và đã đưa ra những giả định ngây thơ về những khó khăn mà họ sẽ gặp phải. Việc phá vỡ lớp sương mù ban đầu của AI đã bộc lộ một núi chướng ngại vật.

Trước hết, AI gặp phải những rào cản công nghệ không thể vượt qua, chủ yếu là hạn chế về sức mạnh tính toán, bộ nhớ và tốc độ xử lý. Vào giữa những năm 1960, các nhà nghiên cứu đã phát hiện ra sự khác biệt giữa sự tăng trưởng đa thức và tăng trưởng cấp số nhân trong độ phức tạp của bài toán. Độ phức tạp tăng trưởng theo cấp số nhân ngắn cản

³Giải thưởng Turing 1971.

⁴Được mượn từ cụm từ “Mùa đông hạt nhân”, một lý thuyết thời Chiến tranh Lạnh cho rằng việc sử dụng vũ khí hạt nhân hàng loạt sẽ che khuất Mặt Trời bằng khói và bụi, khiến nhiệt độ toàn cầu giảm mạnh, Trái Đất đóng băng và nhân loại tuyệt chủng.

việc giải quyết các vấn đề cỡ lớn vừa phải trong một khoảng thời gian hợp lý. Điều này dẫn đến khái niệm quan trọng nhất trong lý thuyết độ phức tạp, *tính NP–đầy đủ* (*NP-completeness*) và câu hỏi cơ bản nhất của nó, liệu $P = NP$, trong đó P là lớp các câu hỏi mà tồn tại thuật toán có thể *giải* trong thời gian đa thức và NP là lớp các câu hỏi mà câu trả lời (cho trước) có thể được *xác minh* trong thời gian đa thức.⁵ Nhiều bài toán tổ hợp và logic là *NP*–đầy đủ, đòi hỏi thời gian giải theo cấp số nhân và các hệ thống không có khả năng giải quyết một cách hiệu quả.

Thêm vào đó, các nhà nghiên cứu đã tập trung nhiều vào khía cạnh lý thuyết và đánh giá thấp sự phức tạp đến từ các vấn đề thực tiễn. Sau khi giải mã thành công mật mã của Đức trong Thế chiến thứ hai, các nhà khoa học đã làm tưởng rằng việc dịch văn bản giữa các ngôn ngữ sẽ không khó hơn việc giải mã mật mã. Trên thực tế, việc xử lý ngôn ngữ tự nhiên trong dịch máy đòi hỏi những hiểu biết sâu sắc về ngôn ngữ học. Người ta cần biết nghĩa của nhiều từ và hiểu chúng theo nhiều cách kết hợp. Nỗ lực tự động tra cứu từ điển và áp dụng các quy tắc ngữ pháp đã không đem lại kết quả.

Năm 1969, trong cuốn sách *Perceptrons*, Marvin Minsky và Seymour Papert đã công kích công trình Perceptron của Rosenblatt và chỉ những hạn chế của mạng thần kinh nhân tạo. Cuốn sách có ảnh hưởng lớn và được xem là nguyên nhân chính dẫn đến sự đình trệ trong việc nghiên cứu mạng thần kinh những năm 1970.

Sau hai thập kỷ với hàng chục triệu đô la đầu tư mà không nhận được những giải pháp như kỳ vọng, cộng với những khó khăn về tài chính, chính phủ Mỹ và Anh lần lượt cắt giảm các nguồn tài trợ cho AI, dẫn đến sự sụt giảm đáng kể các hoạt động AI trong cả công nghiệp và các viện nghiên cứu. Mùa đông AI

đầu tiên kéo dài từ 1974 đến 1980.

Hệ thống chuyên gia

Vào những năm 1970, nghiên cứu AI tập trung vào AI biểu tượng với trọng tâm là các lĩnh vực chuyên môn được đánh giá cao và phức tạp. Với ý tưởng “các hệ thống thông minh có được sức mạnh từ kiến thức mà chúng sở hữu chứ không phải từ các hình thức và sơ đồ suy luận cụ thể mà chúng sử dụng”, Edward Feigenbaum⁶ tại Đại học Stanford cùng các đồng nghiệp đã phát triển các hệ thống chuyên gia – hay hệ thống dựa trên tri thức – chương trình máy tính mô phỏng quá trình ra quyết định của các chuyên gia.



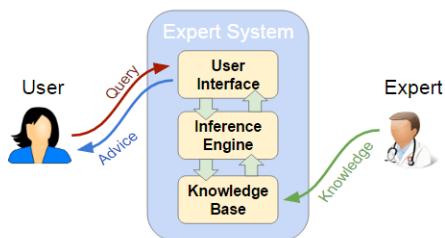
Hình 9: Edward Feigenbaum. Nguồn: Britannica.

Một hệ thống chuyên gia bao gồm hai thành phần cơ bản: cơ sở tri thức và công cụ suy luận. Cơ sở tri thức lưu trữ thông tin, được thu thập bằng cách phỏng vấn những người là chuyên gia trong lĩnh vực được đề cập và được sắp xếp thành một tập hợp các quy tắc, thường có cấu trúc “NẾU–THÌ” (if–then). Chẳng hạn: “NẾU bệnh nhân bị sốt VÀ bệnh nhân ho VÀ bệnh nhân khó thở THÌ bệnh nhân có thể bị viêm phổi”. Công cụ suy luận cho phép hệ thống chuyên gia rút ra các suy luận từ các quy tắc trong cơ sở tri thức. Ví dụ:

⁵Một trong bảy bài toán thiên niên kỷ của viện toán Clay.

⁶Giải thưởng Turing 1994.

nếu cơ sở tri thức chứa quy tắc “NẾU *x* THÌ *y*” và “NẾU *y* THÌ *z*”, công cụ suy luận có thể suy ra “NẾU *x* THÌ *z*”. Sau đó, hệ thống chuyên gia có thể truy vấn người dùng (có thể không phải chuyên gia) “*x* có đúng trong tình huống mà chúng ta đang xem xét không?” Nếu câu trả lời là khẳng định, hệ thống sẽ tiến hành suy ra *z*.



Hình 10: Hệ thống chuyên gia.

Sau thành công của hệ thống DENDRAL trong việc xác định các phân tử hữu cơ chưa biết và MYCIN trong việc chẩn đoán các bệnh truyền nhiễm vào thập niên 1970, hệ thống chuyên gia thương mại được sử dụng rộng rãi trong chẩn đoán y tế, phân tích hóa học, tín dụng ủy quyền, quản lý tài chính, thăm dò dầu và khoáng sản, kỹ thuật di truyền, thiết kế và sản xuất ô tô, thiết kế lắp đặt máy tính, lập kế hoạch hàng không, sắp xếp hàng hóa và các dịch vụ, v.v. Các hệ thống chuyên gia cho thấy những lợi thế khác biệt so với các chương trình máy tính truyền thống. Chúng có thể cung cấp các lựa chọn và các vấn đề cho người ra quyết định cũng như hỗ trợ việc ra quyết định trong trường hợp quyết định đó vượt quá trình độ kiến thức và kinh nghiệm của họ. Ngược lại với con người, hệ thống chuyên gia có thể lưu trữ vĩnh viễn kiến thức chuyên môn, đưa ra mức độ tham vấn nhất quán sau khi được lập trình. Với kiến thức có được từ nhiều chuyên gia, các hệ thống này có thể cung cấp, hỗ trợ việc ra quyết định một cách toàn diện. Theo khảo sát những năm 1980, khoảng 2/3 trong số 500 tập đoàn lớn nhất của Mỹ lúc bấy giờ

sử dụng hệ thống chuyên gia trong hoạt động kinh doanh thường nhật.

Đứng trước những triển vọng to lớn, chính phủ nhiều nước đã đầu tư mạnh mẽ cho nghiên cứu và phát triển các hệ thống AI. Năm 1981, Bộ Kinh tế, Thương mại và Công nghiệp Nhật Bản phân bổ ngân sách 850 triệu USD cho dự án máy tính thế hệ thứ năm với tham vọng dẫn đầu thế giới về công nghệ máy tính. Mục tiêu của Nhật Bản là tạo ra những cỗ máy có thể nói chuyện với con người, dịch ngôn ngữ, diễn giải hình ảnh và suy luận như con người. Đáp lại, các chính phủ Mỹ, Anh và Châu Âu cũng đẩy mạnh tài trợ cho nghiên cứu AI. Đến năm 1985, khoản đầu tư của Mỹ vào hệ thống chuyên gia AI đã đạt hơn 1 tỷ USD. Vương quốc Anh cũng bắt đầu dự án Alvey trị giá 350 triệu bảng Anh.

Một lần nữa, kỳ vọng đã cao hơn nhiều so với mức thực tế có thể thực hiện được. Đến cuối những năm 1980, các hệ thống chuyên gia dần bộc lộ nhiều vấn đề và hạn chế về công nghệ khó giải quyết. Trước tiên, việc thu thập dữ liệu và thiết kế các quy tắc đòi hỏi rất nhiều công sức. Trên thực tế, các chuyên gia chỉ có thể diễn đạt bằng lời một phần nhỏ kiến thức của họ.Thêm vào đó, những hệ thống nhiều hơn 200 quy tắc có thể xuất hiện hiệu ứng “hộp đen” – chúng ta không rõ máy suy luận như thế nào.⁷ Các hệ thống chuyên gia cũng tỏ ra rất tốn kém để bảo trì. Chúng khó cập nhập, không có khả năng học và có thể mắc những sai lầm ngớ ngẩn khi được cung cấp thông tin đầu vào bất thường.

Từ cuối những năm 1980, chính phủ Mỹ và Nhật Bản lần lượt chấm dứt các nguồn tài trợ cho AI để tập trung vào các dự án nhanh đem lại kết quả. Như một hệ quả, AI trải qua mùa đông thứ hai, kéo dài đến năm 2000.

Học máy và học sâu

Năm 1997, đương kim vô địch cờ vua thế

⁷ Những hệ thống chuyên gia lớn thường có trên 1000 quy tắc.

giới Gary Kasparov đã bị đánh bại bởi Deep Blue, một hệ thống chuyên gia chơi cờ vua của IBM. Trận đấu được công bố rộng rãi và trở thành biểu tượng trong lịch sử. Tuy vậy, thành công này không còn hỗ trợ cho sự phát triển của AI biểu tượng. Trên thực tế, Deep Blue và những hệ thống chuyên gia khác chỉ xử lý được một phạm vi rất hạn chế (như là quy tắc của ván cờ), rất xa so với sự phức tạp của thế giới thực.

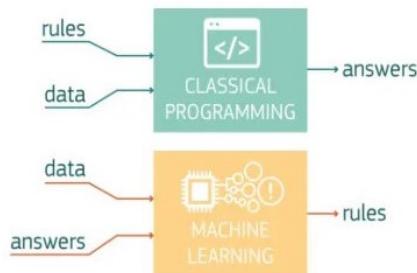


Hình 11: Kasparov đối đầu Deep Blue. Nguồn: Sportshistoryweekly.

Từ những năm 1990, trọng tâm của nghiên cứu về AI đã chuyển từ cách tiếp cận dựa trên tri thức sang cách tiếp cận dựa trên dữ liệu (học máy). Thay vì mã hóa quy tắc cho các hệ thống AI như trước kia, các nhà khoa học tạo ra các chương trình máy tính để phân tích lượng lớn dữ liệu và rút ra kết luận – hay “học” – từ kết quả (Hình 12). Sự chuyển dịch này là kết quả của sự phát triển của Internet. Học máy được hưởng lợi từ sự sẵn có ngày càng tăng của dữ liệu số và khả năng chia sẻ các dịch vụ của mình qua Internet.

Nhằm giải quyết các vấn đề phức tạp cũng như cung cấp các giải pháp hữu ích trong các lĩnh vực ứng dụng khác nhau, các nhà nghiên cứu AI bắt đầu sử dụng và phát triển các công cụ toán học phức tạp hơn. Họ nhận ra rằng nhiều vấn đề về AI đã được các nhà nghiên cứu trong các lĩnh vực như toán học, kinh tế hoặc vật lý giải quyết. Chẳng hạn,

các mạng thần kinh nhân tạo không gì khác hơn là các mô hình hồi quy phi tuyến tính và mô hình khác biệt (Discriminant models) và có thể được phân tích bằng phần mềm thống kê tiêu chuẩn, giống như nhiều mô hình thống kê khác. Sử dụng ngôn ngữ toán học cho phép sự cộng tác ở mức độ cao hơn giữa các lĩnh vực khác nhau và khiến AI trở thành một ngành khoa học chặt chẽ hơn.



Hình 12: Sự khác nhau giữa các chương trình truyền thống và học máy. Trong học máy, dữ liệu đầu vào (data) và đầu ra (answers) được đưa vào thuật toán để tạo ra chương trình (rules). Chương trình này có thể được sử dụng để dự đoán kết quả trong tương lai. Nguồn: [3].

Năm 2004, Geoffrey Hinton (Đại học Toronto), Yoshua Bengio (Đại học Montreal) và Yann LeCun (Đại học New York) dưới sự tài trợ của chính phủ Canada đã bắt đầu một chương trình nghiên cứu để cập nhật mạng thần kinh nhân tạo. Các thí nghiệm được tiến hành đồng thời tại Microsoft, Google và IBM với sự trợ giúp của phòng thí nghiệm của Hinton ở Toronto cho thấy kiểu học này đã thành công trong việc giảm một nửa tỷ lệ lỗi trong nhận dạng giọng nói. Nhóm nhận dạng hình ảnh của Hinton cũng đạt được kết quả tương tự. Thuật ngữ “học sâu” được Geoffrey Hinton đặt cho các thuật toán mới này. Trong một thời gian ngắn, phần lớn các nhóm nghiên cứu đã chuyển sang sử dụng công nghệ này với những lợi ích không thể chối cãi.⁸

⁸Bengio, Hilton và LeCun được trao Giải thưởng Turing năm 2018 cho việc cách mạng hóa lĩnh vực học sâu.



Hình 13: Giải thưởng Turing 2018. Nguồn: AMC.

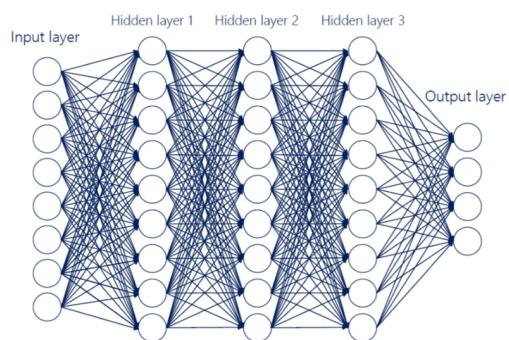
Kể từ năm 2010, lĩnh vực học sâu phát triển chóng mặt.

Năm 2011, IBM Watson, một hệ thống máy tính có khả năng trả lời các câu hỏi được đặt ra bằng ngôn ngữ tự nhiên đã thắng trò chơi *Jeopardy!*⁹ trước Ken Jennings và Brad Rutter, hai trong số những thí sinh thành công nhất trong chương trình này, và giành được 1 triệu USD. Máy tính của IBM áp dụng các công nghệ xử lý ngôn ngữ tự nhiên tiên tiến, truy xuất thông tin, biểu diễn tri thức, lý luận tự động và học máy vào lĩnh vực trả lời câu hỏi trong miền mở. Cùng năm, Apple cho ra mắt Siri, trợ lý ảo đầu tiên được sử dụng rộng rãi.

Năm 2016, AlphaGo, phát triển bởi DeepMind, đã đánh bại Lee Sedol, một trong số những kỳ thủ cờ vây xuất sắc nhất thế giới. Vì tính phức tạp của nó, cờ vây (Go) lúc đó được coi là nằm ngoài tầm với của AI trong ít nhất một thập kỷ nữa. AlphaGo sử dụng mạng thần kinh nhân tạo sâu, được đào tạo thông qua *học tăng cường*. Một năm sau, AlphaGo được nâng cấp thành AlphaZero, chương trình mạnh mẽ hơn có thể chơi được cả cờ vua, cờ vây và cờ tướng Nhật Bản (Shogi).

Vào tháng 11 năm 2020, mô hình AlphaFold của DeepMind, một hệ thống học sâu được thiết kế để xác định cấu trúc ba chiều của

protein, đã mang lại kết quả cực kỳ chính xác, tạo ra một bước tiến vượt bậc trong cái mà các nhà khoa học gọi là “ván đề gấp protein”. Vào tháng 7 năm 2022, DeepMind thông báo rằng AlphaFold có thể xác định cấu trúc của gần 200 triệu protein từ 1 triệu loài, bao gồm hầu hết mọi loại protein mà con người biết đến. Khả năng của AlphaFold đã mở ra cánh cửa cho các nhà nghiên cứu y tế phát triển rất nhiều các loại thuốc và vắc xin phục vụ nhân loại.



Hình 14: Một ví dụ về mạng thần kinh nhân tạo sâu đơn giản gồm lớp đầu vào, lớp đầu ra và 3 lớp ẩn. Mỗi nơron trong một lớp được kết nối với tất cả các nơron ở lớp trước (và sau).

Những thành công và triển vọng to lớn được mở ra bởi lĩnh vực học máy, đặc biệt là học sâu đã thúc đẩy các tập đoàn công nghệ tư nhân như Google, Microsoft, Facebook, Tesla, Alibaba v.v. đầu tư mạnh mẽ vào AI, được sau bởi các chính phủ. Năm 2022, tổng vốn đầu tư tư nhân cho AI toàn cầu đạt 92 tỷ USD, trong đó Mỹ dẫn đầu với 47,4 tỷ USD, sau là Trung Quốc với 13,4 tỷ USD. Năm 2018, chính phủ Trung Quốc đưa ra quy trình gồm ba giai đoạn đầy tham vọng với mục tiêu đưa Trung Quốc trở thành trung tâm AI “chính” của thế giới vào năm 2030. Cùng năm, Ủy ban châu Âu dự định phân bổ 1 tỷ euro để đầu tư cho AI mỗi năm. Con số này dự định sẽ tăng lên 20 tỷ euro mỗi

⁹Chương trình đó vui ngược với hình thức hỏi đáp truyền thống trên truyền hình của Mỹ. Thí sinh được cung cấp những manh mối kiến thức chung dưới dạng câu trả lời và họ phải diễn đạt từng câu trả lời dưới dạng một câu hỏi.

năm vào thập kỷ tới. Các quốc gia Ấn Độ, Hàn Quốc, Canada, Nhật Bản, Israel, Nga và Singapore cũng đầu tư mạnh mẽ cho AI.

Định luật Moore

Những tiến bộ mà AI đạt được có sự đóng góp to lớn của những tiến bộ trong công nghệ máy tính.

Năm 1965, Gordon E. Moore – một trong những người tiên phong về mạch tích hợp, nhà đồng sáng lập và giám đốc điều hành của Intel sau này – đưa ra dự đoán rằng số lượng bóng bán dẫn có thể được tích hợp trên một đơn vị không gian của mạch tích hợp sẽ tăng gấp đôi mỗi năm. Năm 1975, ông sửa lại ước tính của mình thành tăng gấp đôi sau mỗi hai năm. Dự đoán này được gọi là *Định luật Moore*. Các phép đo quan trọng khác cũng cho thấy hành vi nhân đôi tương tự, chẳng hạn như tốc độ bộ xử lý và dung lượng bộ nhớ phù hợp với máy tính.



Hình 15: Gordon E. Moore. Nguồn: Intel.

Trong suốt sáu thập kỷ qua, định luật Moore được sử dụng như kim chỉ nam trong ngành công nghiệp bán dẫn. Tâm quan trọng của định luật này không chỉ ở việc dung lượng bộ nhớ ngày càng lớn và tốc độ máy tính ngày càng nhanh theo thời gian mà các kỹ sư có thể dự đoán quy mô lớn hơn và nhanh hơn bao nhiêu. Điều này giúp họ lập kế hoạch dài hạn

cho các dự án phát triển phần mềm và phần cứng.

Định luật Moore có tác động lâu dài đến sự phát triển của AI. Việc tăng gấp đôi tốc độ phần cứng hoặc gấp đôi bộ nhớ sẽ cải thiện quy mô của vấn đề mà ta có thể xử lý hiệu quả. Cách Deep Blue được mã hóa không khác nhiều so với các chương trình chơi cờ vua 30 năm trước đó. Điều khác biệt ở đây là Deep Blue có khả năng tìm kiếm 200 triệu thế cờ mỗi giây kết hợp với thông tin trong kho dữ liệu khổng lồ để chọn nước đi. Nó đưa ra một chút lời giải thích cho quá trình nghiên cứu AI: các nhà khoa học tạo ra các chương trình vượt quá sức mạnh tính toán hiện tại, sau đó chờ định luật Moore bắt kịp.



Hình 16: Ổ cứng dung lượng 5 MB năm 1956 có giá trên 50.000 USD so với thẻ nhớ 1 TB (1000.000 MB) năm 2020 có giá 100 USD.

Từ năm 2010, đã có những dấu hiệu cho thấy định luật Moore đang chậm lại. Tuy vậy, sự gia tăng dữ liệu cũng như sức mạnh tính toán mới đã đem đến động lực mới to lớn, dẫn đến sự bùng nổ của học sâu. Các nhà khoa học phát hiện ra hiệu quả rất cao của bộ xử lý đồ họa máy tính (GPU) trong việc đẩy nhanh quá trình tính toán các thuật toán học máy. Từ năm 2010, tốc độ tính toán tăng theo cấp số nhân trước kia thậm chí còn nhanh hơn nữa, đạt gấp đôi chỉ trong vòng 6 tháng. PaLM, một mô hình ngôn ngữ tự nhiên của Google, lớn hơn 5 triệu lần so với AlexNet, hệ thống AI có tính toán đào tạo lớn nhất 10 năm trước. Những đột phá trong công nghệ lượng tử, khoa học máy tính, toán

học, vật lý hay học máy đều đóng vai trò là những bước đột phá tiềm năng vượt qua giới hạn của định luật Moore.

Tương lai

Bây giờ chúng ta quay trở lại hiện tại. Rất nhiều các ứng dụng thông minh đã hiện hữu trong cuộc sống hàng ngày, nhiều công nghệ mới chỉ gần đây còn là khoa học viễn tưởng giờ đã trở thành hiện thực. Vậy điều gì đang chờ đợi chúng ta phía trước?

Theo Rodney Brooks, giáo sư Robotics tại MIT, thì việc dự đoán tương lai của AI là rất khó khăn. Ông dẫn ra luật Amara nổi tiếng: “*Chúng ta có xu hướng đánh giá quá cao tác động của một công nghệ trong thời gian ngắn và đánh giá thấp tác động về lâu dài.*” Luật Amara trình bày một mô hình được tìm thấy trong nhiều công nghệ mới nổi. Một lời hứa lớn trước mắt, sự thất vọng, và rồi sự tự tin dần dần tăng lên vượt xa những gì mong đợi ban đầu hướng tới. Nhiều công nghệ được đánh giá quá cao trong ngắn hạn, trong khi lợi ích lại được tích lũy về lâu dài.

Trước mắt, các *mô hình ngôn ngữ lớn* (Large Language Models) và *AI tạo sinh* (Generative AI) đang tạo ra những bước đột phá lớn tiếp theo. Người ta có thể tưởng tượng việc tương tác với một hệ thống chuyên gia trong một cuộc trò chuyện trôi chảy hoặc có một cuộc trò chuyện bằng hai ngôn ngữ khác nhau được dịch theo thời gian thực. Chúng ta cũng có thể kỳ vọng sẽ thấy những chiếc ô tô không người lái trên đường trong nhiều năm tới.

Cũng giống nhiều mô hình trí tuệ nhân tạo khác, học sâu còn nhiều vấn đề cần được giải quyết, bao gồm các cuộc tấn công đối nghịch, tạo ra nội dung giả (deepfake), sự công bằng, trách nhiệm giải trình, tính minh bạch và các cân nhắc về đạo đức khác.

Mặc dù không thể phủ nhận rằng những tiến bộ gần đây đã đẩy nhanh sự phát triển của trí tuệ nhân tạo nhưng hiện nay chúng

vẫn còn một khoảng cách rất xa so với trí tuệ thực sự. Có rất nhiều điều mà các mô hình học sâu chưa thể làm được. Mạng thần kinh được lấy cảm hứng từ não bộ con người nhưng chưa thực sự giống. Trí thông minh mà học sâu mang lại cho máy tính có thể rất xuất sắc trong các nhiệm vụ được xác định trong phạm vi hẹp – chơi trò chơi cụ thể, nhận ra những âm thanh hay hình ảnh cụ thể – nhưng chúng chưa có khả năng thích ứng và linh hoạt như trí thông minh của con người. Về lâu dài, mục tiêu của trí tuệ nhân tạo là trí thông minh tổng quát, tức là một cỗ máy vượt qua khả năng nhận thức của con người trong mọi nhiệm vụ. Điều này giống với hình dáng của robot có tri giác mà chúng ta thường thấy trong những bộ phim khoa học viễn tưởng. Để làm được điều đó, cần có những đột phá trong rất nhiều lĩnh vực như khoa học máy tính, khoa học thần kinh, sinh học hay toán học.

Nhìn chung, chúng ta chưa thể xác định một cách chắc chắn rằng AI sẽ phát triển đến đâu, liệu sắp tới có xảy ra một mùa đông tiếp theo hay không? Nhưng chúng ta hoàn toàn có thể tiếp tục chờ đợi và hy vọng vào những bước tiến mới, những sự đột phá tiếp theo của ngành này trong tương lai.

Tài liệu

[1] European Commission, Joint Research Centre, Delipetrev, B., Tsinaraki, C., Kostić, U., *AI watch, historical evolution of artificial intelligence – Analysis of the three main paradigm shifts in AI*, Publications Office, 2020

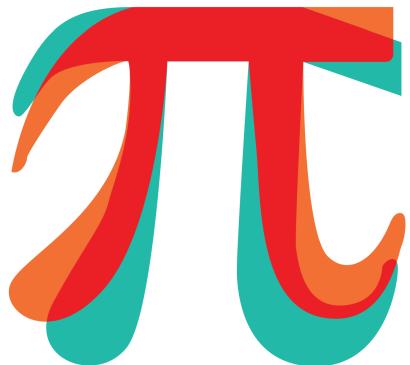
[2] Council of Europe, *History of Artificial Intelligence*.

[3] Craglia M., (Ed.), *Artificial Intelligence – A European Perspective.*, EUR 29425 EN, Publications Office, Luxembourg, 2018

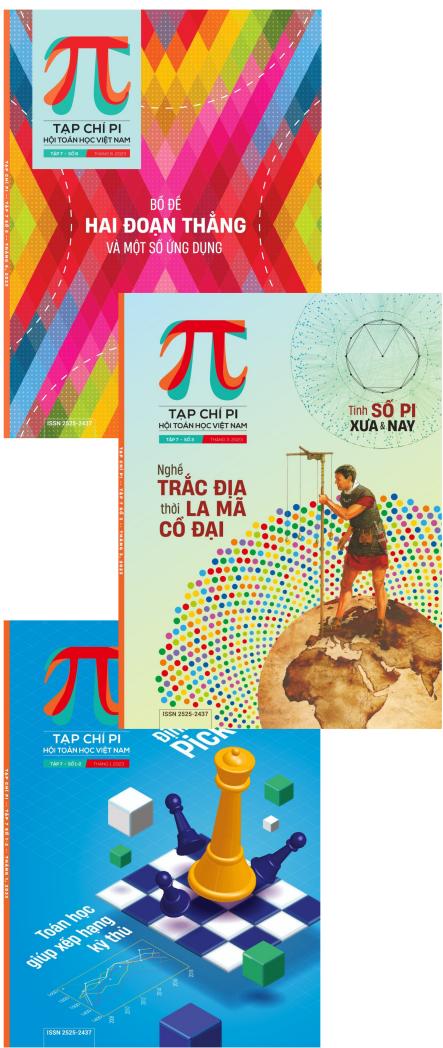
[4] Các bài viết về cùng chủ đề trên Wikipedia và Encyclopaedia Britannica.



Hội Toán học Việt Nam



Tạp chí Toán học cho mọi người



Pi.edu.vn

Tạp chí *Pi* là một ấn phẩm của Hội Toán học Việt Nam, với mục đích quảng bá Toán học tới cộng đồng. *Pi* được xuất bản hàng tháng, và được in màu toàn bộ (kể từ tháng 1/2020). Tạp chí mang vẻ đẹp toán học, kiến thức toán học tới mọi người qua các chuyên mục đa dạng với các nội dung phong phú, thân thiện và nhiều màu sắc. Chúng tôi hy vọng rằng mỗi độc giả, từ trẻ em tới người lớn tuổi, với các kiến thức về Toán học khác nhau, đều tìm được những điều lý thú về Toán học cùng những ích lợi của nó, qua các chuyên mục phù hợp trong *Pi*.



: Pi của bạn

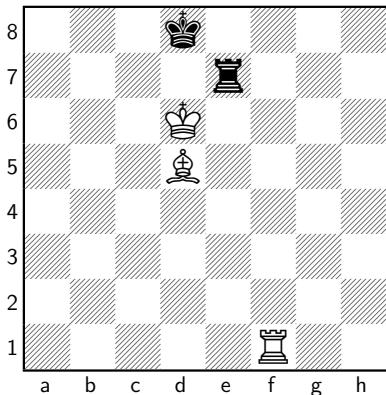


XE VÀ TƯỢNG CHỐNG XE ĐƠN ĐỘC (Phần I)

BÙI VINH¹

Lý thuyết cờ tàn cơ bản đều cho rằng xe và tượng chống xe không có tốt đều được coi là hòa cờ cơ bản. Tuy nhiên thực tế thi đấu cho thấy khả năng hòa cờ cho bên yếu không nhiều. Bên yếu cần phải chơi rất chính xác nếu muốn gỡ hòa. Trong bài học hôm nay, chúng tôi xin trình bày một số tình huống cơ bản

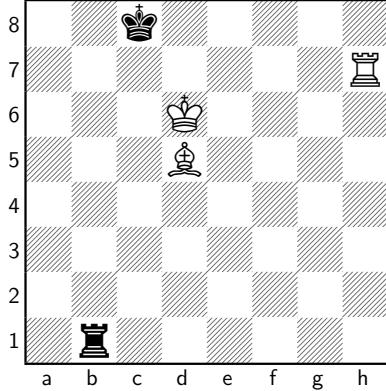
A. Philidor



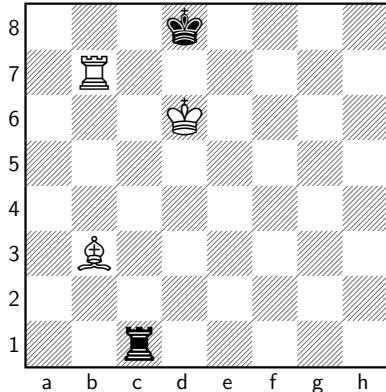
Hình 1. Trắng đi trước thắng, 1749.

1.Xf8+ Xe8 2.Xf7 Xe2 3.Xh7 (Hình 2)
[Một nước đi chờ đợi]

**3...Xe1 4.Xb7! Xc1 [4...Vc8 5.Xa7 Xb1 6.Xh7!
6...Vb8 7.Xh8+ Va7 8.Xa8+ Vb6 9.Xb8+ Va5 10.Xxb1]
5.Tb3!!**



Hình 2.



Hình 3.

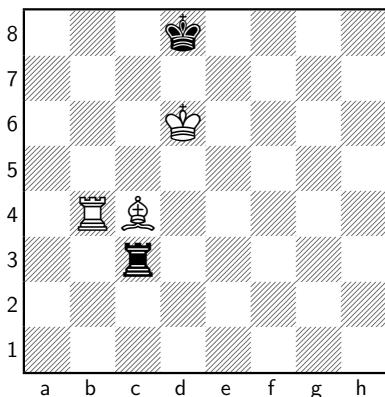
Kỹ thuật giành chiến thắng cơ bản của bên có tướng là tìm cách ép vua đối phương xuống hàng ngang số 8, 1 hoặc cột a, h. Sau đó phối hợp giữa xe và tượng thực hiện vừa che chắn

¹Đại kiện tướng quốc tế.

cho vua khỏi các nước chiếu của xe đối bằng tượng trong khi đó dùng xe đe dọa chiếu hết.

5...Xc3 6.Te6! Xd3+ 7.Xd5 [Tượng trắng che chắn cho vua]

7...Xc3 8.Xd7+ Vc8 9.Xh7 Vb8 10.Xb7+ Vc8 11.Xb4 Vd8 12.Tc4!! (Hình 4). Trắng dùng Tượng ngăn cản xe đối phương phòng thủ ở ô c8.



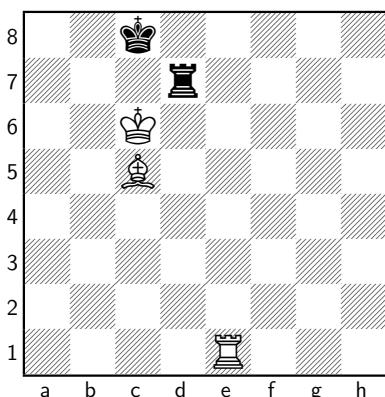
Hình 4.

Trắng đe dọa chiếu hết ở nước tiếp theo

12...Vc8 [**12...Ve8 13.Xb8#**]

13.Te6+ Vd8 14.Xb8+

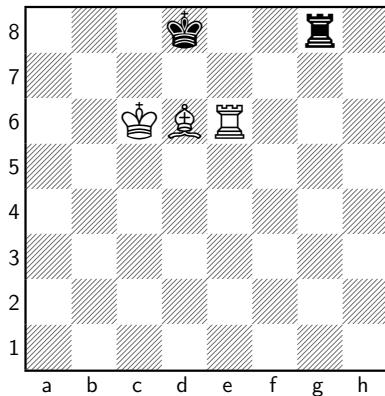
Lolly



Hình 5. Trắng đi trước thắng, 1763.

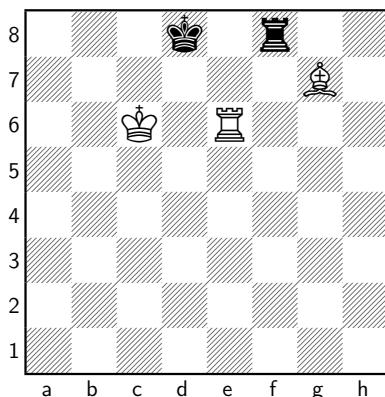
Trong rất nhiều trường hợp mặc dù xe đen cũng phòng thủ từ phía sau hoặc bên sườn, tuy nhiên bên mạnh cũng vẫn thắng.

1.Xe8+ Xd8 2.Xe7 Xd2 [Nếu **2...Xh8 3.Td6 Vd8 4.Xa7 Ve8 5.Xa8+**; Nếu **2...Xg8 3.Td6 Vd8 4.Xe6!**] (Hình 6)



Hình 6.

4...Vc8 (**4...Xh8 5.Te5 Xf8 6.Tg7!**) Trắng giam xe đen ở hàng ngang số 8

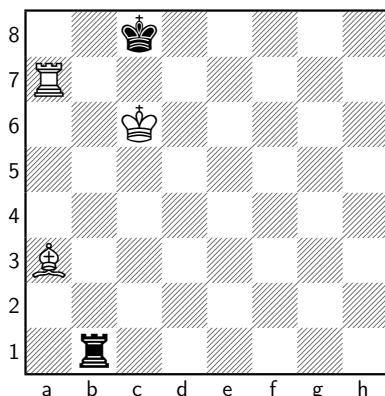


Hình 7.

6...Xg8 7.Tf6+ Vc8 8.Xe4 Xf8 9.Tg7 Xg8 10.Xa4 Vb8 (**10...Vd8 11.Xa8+**) **11.Te5+ Vc8 12.Xa8#** **5.Xe5 Vd8 6.Tc7+ Vc8 7.Xa5 Xg6+ 8.Td6+-]**

3.Xf7! Xd1 [**3...Xd8 4.Te7 Xg8 5.Xf5 Vb8 6.Td6+ Vc8 7.Xa5**]

4.Xa7 Xb1 [**4...Vb8 5.Xa4 Xc1 6.Xe4!**]



Hình 8.

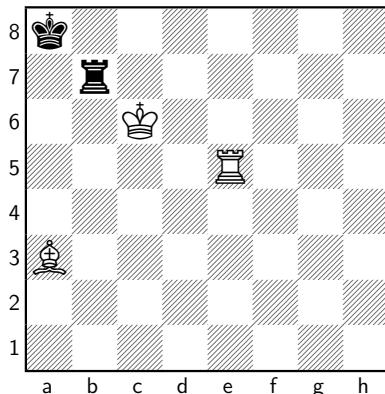
5.Ta3!!

Nước cờ chia khóa. Đen bị “xung xoang” vì không có nước đi cho xe.

5...Xb3 [Phương án khác cũng không tốt hơn cho đen 5...Vb8 6.Xe7 Va8 7.Xe4!! Xb7!]

8.Xe5

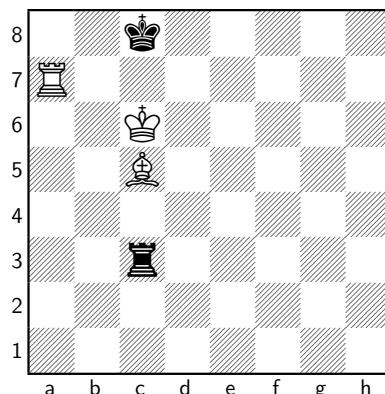
Đen bị “xung xoang” 8...Xf7 (8...Xb1 9.Xa5+ Vb8 10.Td6+ Vc8 11.Xa8+) 9.Xe8+ Va7 10.Tc5+ Va6 11.Xa8+ Trắng thắng]



Hình 9.

6.Td6! Xc3+ 7.Tc5

Tượng trắng phối hợp với vua và xe. Tượng vừa thực hiện việc che chắn cho vua và tấn công vua đối phương.



Hình 10.

7...Xb3 8.Xc7+ Vb8 [8...Vd8 9.Xf7]

9.Xe7 Va8 10.Xe4! [10.Xe8+ Xb8 11.Xe1]

10...Xb7 11.Xa4+ Vb8 12.Td6+ Vc8
13.Xa8+ Trắng thắng

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Về một người đã được đánh dấu, ta đã biết chắc anh ta không phải là Z , vì hoặc anh ta không biết ai đó, hoặc ai đó biết anh ta. Sau khi đưa ra tất cả các câu hỏi (chúng không quá $(n - 2)$ câu), số những người chưa được đánh dấu không ít hơn 2.

Giả sử X là một trong số những người chưa được đánh dấu. Sau khi đưa ra tất cả các câu hỏi, ta đã có một số thông tin về ai biết ai. Ta sẽ thay đổi toàn bộ hệ thống quen biết, sao cho các thông tin đã có thì vẫn giữ nguyên,

tuy nhiên X sẽ biến thành Z . Khi đó, ta sẽ làm cho X biết tất cả mọi người, còn trong tất cả những trường hợp còn lại (trừ những trường hợp quen biết đã được xác định trước đó) ta sẽ đều coi là không ai biết ai.

Như vậy, đối với một người chưa được đánh dấu bất kỳ (X được chọn ra trong số họ một cách tùy ý), luôn có thể thay đổi hệ thống quen biết để sao cho chính anh ta là Z . Và điều này có nghĩa là với ít hơn $(n - 1)$ câu hỏi không đủ để làm rõ được ai là Z .