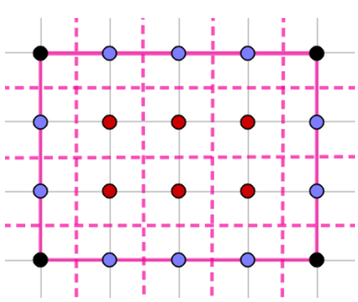
# DIỆN TÍCH TRÊN LƯỚI Ô VUÔNG
## Phần II: Định lý Pick

NGÔ VĂN MINH, PHAN NGỌC MINH VÀ NGUYỄN THỊ NHUNG

Mục Toán của Bi trong Số 11, Tập 6 đã giới thiệu đến các em cách tính diện tích của những hình tạo trên lưới ô vuông. Rất nhiều hình khác nhau có các đỉnh tại các điểm nguyên đều tính được mà chỉ cần dựa trên những ô vuông đơn vị có diện tích 1. Không biết diện tích của những hình trên lưới có liên hệ gì với những điểm trên lưới không nhỉ? Định lý Pick được giới thiệu trong phần này sẽ trả lời cho ta câu hỏi rất thú vị này đấy.

### 1. Định lý Pick

Để xem diện tích của một hình trên lưới tính thế nào qua các điểm trên lưới (còn gọi là điểm nguyên), chúng ta thử tính diện tích của một hình cơ bản trong Phần 1 – hình chữ nhật kích thước $3 \times 4$ có các cạnh nằm trên các đường thẳng của lưới bằng một cách khác nhé. Bây giờ, ta chia hình chữ nhật đã cho bởi những đường thẳng song song, cách đều, đi qua giữa hai điểm nguyên trên các cạnh của hình chữ nhật như trong Hình 1 dưới đây.



*Hình* 1.

Khi đó ta thấy

– Mỗi điểm nguyên (màu đỏ) nằm trong hình chữ nhật ứng với một hình vuông đơn vị;

– Mỗi điểm nguyên (màu xanh dương) nằm trên các cạnh của hình chữ nhật mà không phải đỉnh ứng với một nửa hình vuông đơn vị;

Mỗi điểm nguyên là đỉnh (màu đen) của hình chữ nhật ứng với một phần tư hình vuông đơn vị.

Như vậy

Diện tích của hình chữ nhật $=$ số điểm trong hình chữ nhật $+\frac{1}{2}\times$ số điểm trên cạnh mà không phải đỉnh $+\frac{1}{4}\times$ số đỉnh

Do hình chữ nhật có 4 đỉnh nên ta thấy ngay

Diện tích của hình chữ nhật $=$ số điểm trong hình chữ nhật $+\frac{1}{2}\times$ số điểm nằm trên cạnh $-1$.

Từ đó ta có diện tích của hình chữ nhật trên là:

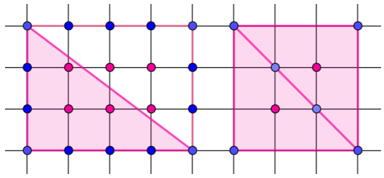
$$6+\frac{1}{2}\times 14-1=12 \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Ví dụ trên được tính trong một trường hợp cụ thể, tuy nhiên những lập luận này hoàn toàn có thể áp dụng cho tất cả những hình chữ nhật khác cùng đặc điểm. Như vậy diện tích của hình chữ nhật có các cạnh trùng với những đường thẳng của lưới có thể được tính thông qua số điểm nguyên nằm trong và nằm trên cạnh của hình chữ nhật. Nếu ta gọi $T$ là số điểm nằm trong và $B$ là số điểm nằm trên các cạnh của hình chữ nhật, thì diện tích của hình chữ nhật là:

$$T+\frac{B}{2}-1.$$

Một công thức thật đơn giản, thật hay đúng không các em. Không biết ngoài hình chữ nhật, công thức tính diện tích này còn đúng với những hình nào nữa nhỉ?

Chúng ta cùng xem xét diện tích hình cơ bản thứ hai được đề cập trong Phần 1 – tam giác vuông có hai cạnh góc vuông trùng với những đường thẳng của lưới.



*Hình* 2.

Bây giờ ta kẻ hình chữ nhật bao quanh tam giác vuông và dùng công thức tính diện tích qua các điểm của hình chữ nhật được chỉ ra ở trên để xem về công thức tính diện tích của tam giác.

Giả sử trên cạnh huyền của tam giác vuông có $d$ điểm nguyên. Nhận thấy $d$ điểm này vẫn là điểm trong của hình chữ nhật bao quanh. Do đó

Số điểm trong $t$ của hình tam giác $=\frac{1}{2}\times$ (số điểm trong $T$ của hình chữ nhật $-$ số điểm trên cạnh huyền $d$)

Hay $T=2\times t+d$.

Mặt khác, do tính đối xứng nên số điểm nguyên nằm trên hai cạnh góc vuông của tam giác vuông đã cho và tam giác vuông bù với nó, nên ta lại có

Số điểm biên $b$ của hình tam giác $=\frac{1}{2}\times$ số điểm biên $B$ của hình chữ nhật $+1$ điểm đỉnh $+$ số điểm trên cạnh huyền $d$.

Hay $B=2i-2d-2$.

Vậy từ công thức tính diện tích của hình chữ nhật, ta có

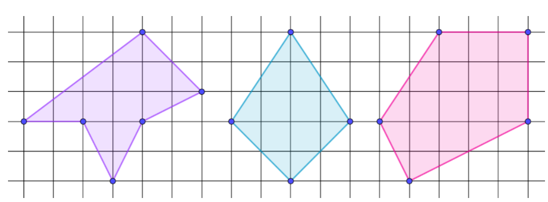
Diện tích tam giác vuông $=\frac{1}{2}$ diện tích hình chữ nhật $=\frac{T}{2}+\frac{B}{4}-\frac{1}{2}=t+\frac{b}{2}-1$.

Như vậy là công thức tính diện tích qua các điểm cũng đúng tiếp tam giác vuông! Đến đây, hẳn nhiều bạn nhỏ tiếp tục đặt câu hỏi: Công thức tính diện tích qua các điểm còn đúng cho dạng hình nào trên lưới nữa nhỉ? Câu hỏi này của chúng ta đã được một nhà toán học người Áo là Georg Alexander Pick (1859 – 1942) đưa ra câu trả lời. Ông đã chứng minh được Công thức tính diện tích qua những điểm nguyên đúng cho các đa giác đơn có các đỉnh là các điểm trên lưới. Kết quả này được phát biểu qua định lý mang tên ông – Định lý Pick.

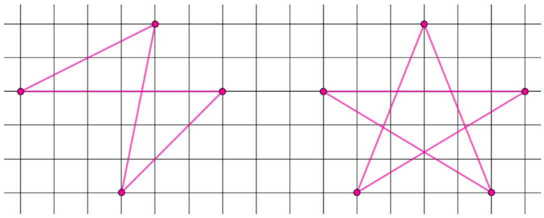
**Định lý Pick:** Cho một đa giác đơn có các đỉnh là các điểm nguyên của một lưới ô vuông. Giả sử có $T$ điểm nằm trong đa giác và $B$ điểm nằm trên các cạnh của đa giác (bao gồm cả các đỉnh). Khi đó diện tích của đa giác là:

$$T+\frac{B}{2}-1.$$

Một lưu ý là Định lý Pick tính diện tích cho những hình là đa giác đơn, là những đa giác không có cạnh tự cắt các em nhé. Dưới đây là một vài minh họa cho những đa giác loại này.

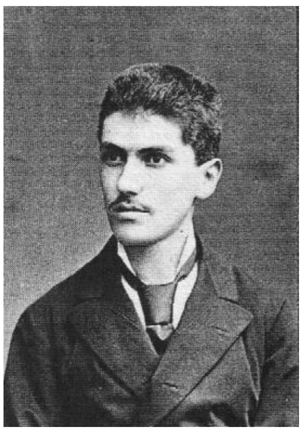


*Hình 3. Đa giác đơn.*



*Hình 4. Đa giác không đơn.*

Việc áp dụng định lý cho các đa giác không đơn có thể dẫn đến kết quả không chính xác. Các em ghi nhớ điều này khi dùng định lý Pick để tính diện tích nhé.



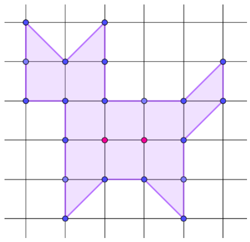
*Hình 5. Georg Alexander Pick.*

Định lý Pick được phát biểu đầy đủ như sau.

## 2. Tính diện tích theo định lý Pick

Trong mục này, chúng ta tính lại diện tích của một số hình trong Phần 1 theo công thức có được từ định lý Pick và so sánh với nhau nhé. Đầu tiên là "chú mèo" đáng yêu trong Ví dụ 4 của Phần 1.

**Ví dụ 1.** Tính diện tích của hình được tô đậm dưới đây.



*Hình 6.*

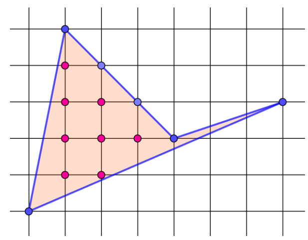
*Lời giải.* Ta dễ dàng thấy ngay $T = 2$ điểm trong "chú mèo" và $B = 20$ điểm nằm trên các cạnh biên. Từ đó, diện tích của "chú mèo" là:

$$T + \frac{B}{2} - 1 = 2 + \frac{20}{2} - 1 = 11 \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Kết quả này cũng giống với con số mà ta đã tính được trong Phần 1, nhưng có phần nhanh chóng hơn các em nhỉ.

Chúng ta thử tiếp với hình trong Ví dụ 6 trong Phần 1.

**Ví dụ 2.** Tính diện tích của đa giác được tô đậm trong hình sau.



*Hình 7.*

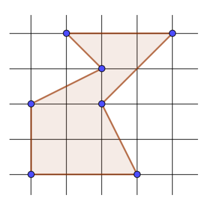
*Lời giải.* Đa giác trong Hình 7 có $T = 8$ điểm trong và $B = 6$ điểm nằm trên các canh. Do đó, Định lý Pick cho ta diện tích của đa giác này là:

$$T + \frac{B}{2} - 1 = 10 \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Kết quả này tất nhiên là trùng với con số tính ra theo cách giới thiệu ở Phần 1 rồi, nhưng thay vì phải tính khá nhiều diện tích tam giác thông qua phương pháp lấy phần bù, chúng ta chỉ cần đếm số điểm nằm trên lưới. Định lý Pick thật là lợi hại phải không!

Bài tập dưới đây để các em luyện tập thêm công thức Pick. Các em có thể tính diện tích theo cách trong Phần 1 để kiểm tra lại nhé.

**Bài tập 1.** Tính diện tích của hình tô đậm sau đây.



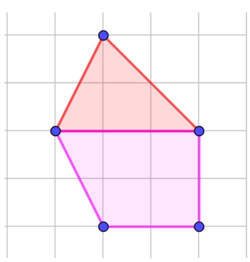
*Hình 8.*

## 3. Làm thế nào để chứng minh định lý Pick?

Định lý Pick có thể chứng minh bằng nhiều cách khác nhau, trong khuôn khổ bài viết này, chúng ta chỉ mô tả cách tìm ra công thức của Pick cho hai hình cơ bản, đơn giản nhất – hình chữ nhật và tam giác vuông có cạnh nằm trên lưới.

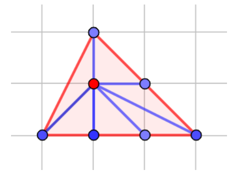
Nếu bạn nào quan tâm đến việc chứng minh đầy đủ định lý này thì có thể tham khảo các bước làm sau.

– Để chứng minh công thức Pick cho một đa giác nào đó ta chia đa giác thành hai phần bằng một đường chéo và quy về việc chứng công thức Pick cho mỗi đa giác thành phần. Ta thấy, đường chéo này trở thành cạnh của hai đa giác thành phần do đó các điểm nguyên trên đường chéo lúc trước được tính $1$ đơn vị, khi trở thành điểm biên thì tính $\frac{1}{2}$ đơn vị nhưng tính hai lần, vậy là hòa! Còn lại là hai điểm mút của đường chéo, chúng được tính hai lần do là đỉnh của hai đa giác con, vậy là dôi ra $1$ đơn vị. Nhưng trong công thức Pick sau khi tính các điểm biên và điểm trong ta bớt đi $1$ đơn vị. Đối với hai đa giác thành phần, ta bớt đi cả thảy $2$ đơn vị, vậy cũng hòa!



*Hình* 9.

– Sau khi thực hiện nhiều lần chia đa giác thành các đa giác con, cuối cùng ta quy việc chứng minh định lý Pick cho tam giác. Ta lại tiếp tục chia tam giác đó thành các tam giác con nếu có một điểm nguyên ở trong hoặc trên biên tam giác.

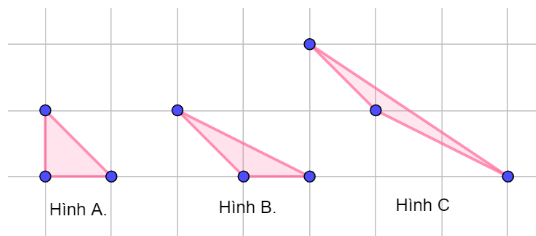


*Hình* 10.

– Đối với tam giác không chứa điểm nguyên ở trong hoặc trên biên, định lý Pick khẳng định nó có diện tích bằng

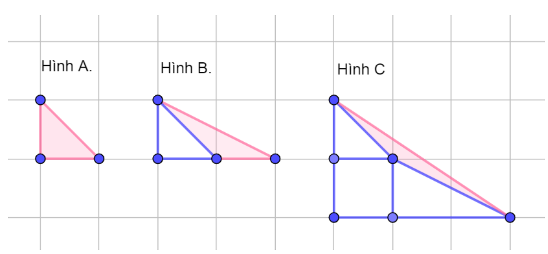
$$\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Dưới đây chúng ta sẽ xem một vài ví dụ kiểm chứng điều này. Hy vọng sau đó các bạn có thể tự đưa ra một chứng minh chặt chẽ của định lý Pick cho các tam giác đơn (nghĩa là tam giác không chứa điểm nguyên ở trong và trên biên, ngoại từ ba đỉnh).




*Hình* 11.

Ba tam giác trong Hình $11$ đều là các tam giác đơn. Ba tam giác này có nhiều hình dáng khác nhau, nhưng ta đều thấy chúng có diện tích bằng $\frac{1}{2}$. Thật vậy, vận dụng những cách tính diện tích trong Phần $1$, ta có thể thấy ngay




*Hình* 12.

– Diện tích tam giác trong Hình $A$ là $\frac{1}{2}$;

Diện tích của tam giác trong Hình *B* là:

$$\frac{1}{2}\times 1\times 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2};$$

Diện tích của tam giác trong Hình *C* là:

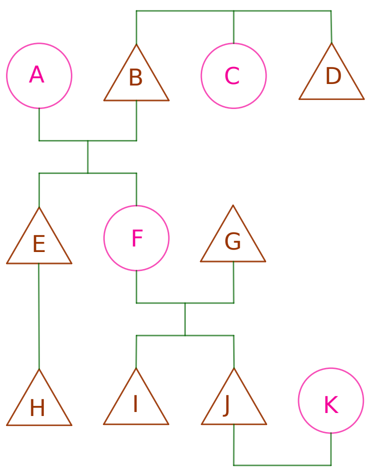
$$\frac{1}{2}\times 2\times 3-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}\times 1\times 2=\frac{1}{2}.$$

Bài viết về Tính diện tích trên lưới ô vuông đã giới thiệu đến các em cách tính diện tích của những hình trên lưới. Đầu tiên là hai phương pháp rất phổ biến: phương pháp chia hình cần tính thành những hình cơ bản đã biết diện tích và phương pháp tính theo phần bù. Tiếp theo đó bài viết giới thiệu với các em một công thức tính diện tích vô cùng đẹp đẽ qua Định lý Pick. Việc áp dụng định lý Pick giúp tính diện tích trở nên đơn giản hơn nhiều vì ta chỉ cần đếm số điểm nguyên ở trong và trên cạnh của hình cần tính. Chủ đề tính diện tích trên lưới ô vuông vẫn còn nhiều điều hấp dẫn, các bạn nhỏ nếu tìm được những bài toán hay thì hãy chia sẻ cùng Pi và các thầy cô trong câu lạc bộ UMC nhé.

# FAMILY TREES

NGHIA DOAN[1]

The diagram below is an example of a *family tree*. The circles denote females and the triangles denote males.




$A$ and $B$ are married, as are $F$ and $G$, and $J$ and $K$.

$B, C$, and $D$ are siblings, as are $E$ and $F$. $E$ and $F$ are children of $A$ and $B$.

Similarly, the parents of $I$ and $J$ are $F$ and $G$. $E$ is the father of $H$.

In addition, $A$ is the grandmother of $H, I$, and $J$, $F$ is the aunt of $H$, and $C$ is the sister–in–law of $A$.


**Example** (Who is who)**.** Inspector Jade asked six children to briefly introduce their brothers, sisters, and first cousins (cousins who share a grandparent). She had to match the name of each child to a numbered position in the family tree with the responses given below. Note that the relations were given in the local language. *Please do not try to guess the genders of the children from the names. It may lead you to wrong conclusions.*

Response from Binh:

- I have three *arawa*: Kim, Minh, Thao
- I have two *surubu*: Oanh and Yen

Response from Dinh:

- I have two *surubu*: Oanh and Yen
- I have one *ere*: Binh

Response from Kim:

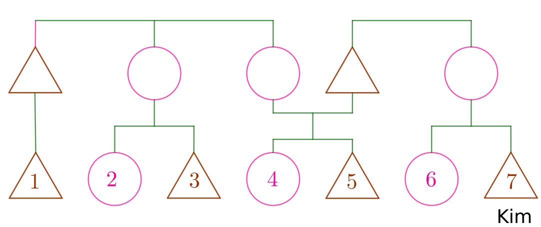
- I have one *arawa*: Dinh
- I have one *surubu*: Binh

Response from Minh:

- I have one *ere*: Yen
- I have two *arawa*: Dinh and Thao

Response from Thao:

- I have two *surubu*: Yen and Binh
- I have two *arawa*: Minh and Dinh




*Solution.* From what Binh said, Binh has the same type of relations to three children. Consequently, those children cannot be

[1] *Ottawa, Canada.*

Binh's sisters or brothers, and *arawa* does not mean sister or brother. Only the child with number 4 or 5 has three cousins in the same gender.

Looking at the cousins of the children with numbers 4 and 5, we see that *arawa* and *suburu* refer to the gender of the cousins. Observe that Binh is a *suburu* to Kim and Kim is an *arawa* to Binh. Therefore, Binh and Kim are of opposite genders. Because both children with numbers 4 and 5 have three male cousins, Kim has to be a boy and so Binh is a girl. Thus, Binh is the girl with number 4.

Now, Kim, Minh and Thao are the children with numbers 1, 3 and 7; *arawa* means *male cousin*. Furthermore, Binh is a *suburu* to Kim and Thao; in other words, she is a *female cousin* to them.

We deduce that Binh is not a *suburu* to the boy with number 5. Thus, Dinh is the boy with number 5. Obviously, she is not an *arawa* to anyone. Since she is an *ere* to Dinh, *ere* means sister and Dinh is Binh's brother.

Next, Thao must be the boy with number 1 because Thao has two female cousins and two male cousins. It follows that Minh is the boy with number 3.

Yen is an *ere* to Minh, so Yen is the girl with number 2. Finally, Oanh is the girl with number 6.

The answer is 1—Thao, 2—Yen, 3—Minh, 4—Binh, 5—Dinh, 6—Oanh, 7—Kim.

**Vocabulary**

male: nam

female: nữ

family tree: cây phả hệ

sibling: anh/chị/em ruột

aunt: cô, dì

sister–in–law: chị/em dâu

cousin: anh/chị/em họ

gender: giới tính