



DIỆN TÍCH TRÊN LƯỚI Ô VUÔNG

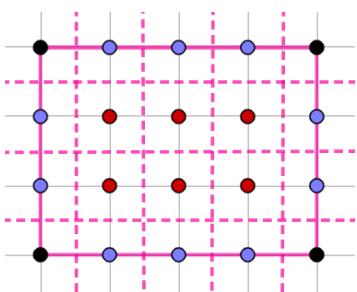
Phân II: Định lý Pick

NGÔ VĂN MINH, PHAN NGỌC MINH VÀ NGUYỄN THỊ NHUNG

Mục Toán của Bi trong Số 11, Tập 6 đã giới thiệu đến các em cách tính diện tích của những hình tạo trên lưới ô vuông. Rất nhiều hình khác nhau có các đỉnh tại các điểm nguyên đều tính được mà chỉ cần dựa trên những ô vuông đơn vị có diện tích 1. Không biết diện tích của những hình trên lưới có liên hệ gì với những điểm trên lưới không nhỉ? Định lý Pick được giới thiệu trong phần này sẽ trả lời cho ta câu hỏi rất thú vị này đây.

1. Định lý Pick

Để xem diện tích của một hình trên lưới tính thế nào qua các điểm trên lưới (còn gọi là điểm nguyên), chúng ta thử tính diện tích của một hình cơ bản trong Phần 1 – hình chữ nhật kích thước 3×4 có các cạnh nằm trên các đường thẳng của lưới bằng một cách khác nhé. Bây giờ, ta chia hình chữ nhật đã cho bởi những đường thẳng song song, cách đều, đi qua giữa hai điểm nguyên trên các cạnh của hình chữ nhật như trong Hình 1 dưới đây.



Hình 1.

Khi đó ta thấy

- Mỗi điểm nguyên (màu đỏ) nằm trong hình chữ nhật ứng với một hình vuông đơn vị;
- Mỗi điểm nguyên (màu xanh dương) nằm trên các cạnh của hình chữ nhật mà không phải đỉnh ứng với một nửa hình vuông đơn vị;

Mỗi điểm nguyên là đỉnh (màu đen) của hình chữ nhật ứng với một phần tư hình vuông đơn vị.

Như vậy

Diện tích của hình chữ nhật = số điểm trong hình chữ nhật + $\frac{1}{2} \times$ số điểm trên cạnh mà không phải đỉnh + $\frac{1}{4} \times$ số đỉnh

Do hình chữ nhật có 4 đỉnh nên ta thấy ngay

Diện tích của hình chữ nhật = số điểm trong hình chữ nhật + $\frac{1}{2} \times$ số điểm nằm trên cạnh - 1.

Từ đó ta có diện tích của hình chữ nhật trên là:

$$6 + \frac{1}{2} \times 14 - 1 = 12 \text{ (đơn vị diện tích)}.$$

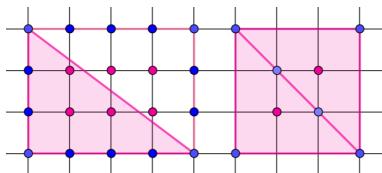
Ví dụ trên được tính trong một trường hợp cụ thể, tuy nhiên những lập luận này hoàn toàn có thể áp dụng cho tất cả những hình chữ nhật khác cùng đặc điểm. Như vậy diện tích của hình chữ nhật có các cạnh trùng

với những đường thẳng của lưới có thể được tính thông qua số điểm nguyên nằm trong và nằm trên cạnh của hình chữ nhật. Nếu ta gọi T là số điểm nằm trong và B là số điểm nằm trên các cạnh của hình chữ nhật, thì diện tích của hình chữ nhật là:

$$T + \frac{B}{2} - 1.$$

Một công thức thật đơn giản, thật hay đúng không các em. Không biết ngoài hình chữ nhật, công thức tính diện tích này còn đúng với những hình nào nữa nhỉ?

Chúng ta cùng xem xét diện tích hình cơ bản thứ hai được đề cập trong Phần 1 – tam giác vuông có hai cạnh góc vuông trùng với những đường thẳng của lưới.



Hình 2.

Bây giờ ta kẻ hình chữ nhật bao quanh tam giác vuông và dùng công thức tính diện tích qua các điểm của hình chữ nhật được chỉ ra ở trên để xem về công thức tính diện tích của tam giác.

Giả sử trên cạnh huyền của tam giác vuông có d điểm nguyên. Nhận thấy d điểm này vẫn là điểm trong của hình chữ nhật bao quanh. Do đó

Số điểm trong T của hình tam giác = $\frac{1}{2} \times$ (số điểm trong T của hình chữ nhật – số điểm trên cạnh huyền d)

Hay $T = 2 \times t + d$.

Mặt khác, do tính đối xứng nên số điểm nguyên nằm trên hai cạnh góc vuông của tam giác vuông đã cho và tam giác vuông bù với nó, nên ta lại có

Số điểm biên b của hình tam giác = $\frac{1}{2} \times$ số

điểm biên B của hình chữ nhật + 1 điểm đỉnh + số điểm trên cạnh huyền d .

Hay $B = 2i - 2d - 2$.

Vậy từ công thức tính diện tích của hình chữ nhật, ta có

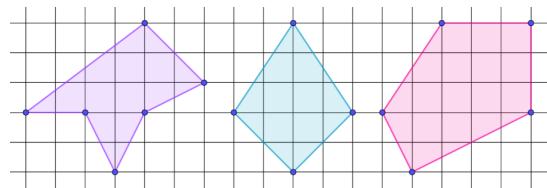
$$\begin{aligned} \text{Diện tích tam giác vuông} &= \frac{1}{2} \text{ diện tích hình} \\ \text{chữ nhật} &= \frac{T}{2} + \frac{B}{4} - \frac{1}{2} = t + \frac{b}{2} - 1. \end{aligned}$$

Như vậy là công thức tính diện tích qua các điểm cũng đúng tiếp tam giác vuông! Đến đây, hẳn nhiều bạn nhỏ tiếp tục đặt câu hỏi: Công thức tính diện tích qua các điểm còn đúng cho dạng hình nào trên lưới nữa nhỉ? Câu hỏi này của chúng ta đã được một nhà toán học người Áo là Georg Alexander Pick (1859 – 1942) đưa ra câu trả lời. Ông đã chứng minh được Công thức tính diện tích qua những điểm nguyên đúng cho các đa giác đơn có các đỉnh là các điểm trên lưới. Kết quả này được phát biểu qua định lý mang tên ông – Định lý Pick.

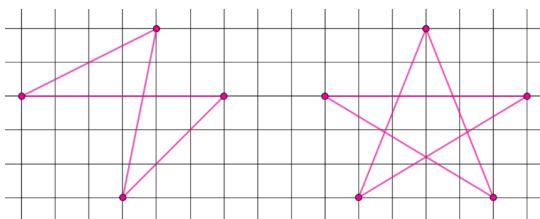
Định lý Pick: Cho một đa giác đơn có các đỉnh là các điểm nguyên của một lưới ô vuông. Giả sử có T điểm nằm trong đa giác và B điểm nằm trên các cạnh của đa giác (bao gồm cả các đỉnh). Khi đó diện tích của đa giác là:

$$T + \frac{B}{2} - 1.$$

Một lưu ý là Định lý Pick tính diện tích cho những hình là đa giác đơn, là những đa giác không có cạnh tự cắt các em nhé. Dưới đây là một vài minh họa cho những đa giác loại này.

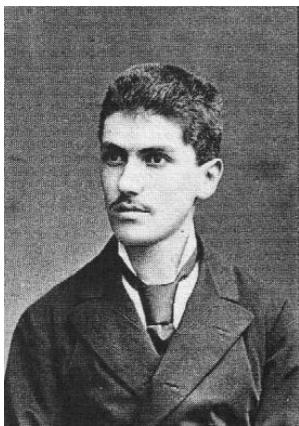


Hình 3. Đa giác đơn.



Hình 4. Đa giác không đơn.

Việc áp dụng định lý cho các đa giác không đơn có thể dẫn đến kết quả không chính xác. Các em ghi nhớ điều này khi dùng định lý Pick để tính diện tích nhé.



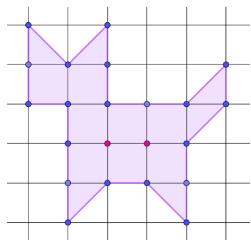
Hình 5. Georg Alexander Pick.

Định lý Pick được phát biểu đầy đủ như sau.

2. Tính diện tích theo định lý Pick

Trong mục này, chúng ta tính lại diện tích của một số hình trong Phần 1 theo công thức có được từ định lý Pick và so sánh với nhau nhé. Đầu tiên là “chú mèo” đáng yêu trong Ví dụ 4 của Phần 1.

Ví dụ 1. Tính diện tích của hình được tô đậm dưới đây.



Hình 6.

Lời giải. Ta dễ dàng thấy ngay $T = 2$ điểm trong “chú mèo” và $B = 20$ điểm nằm trên

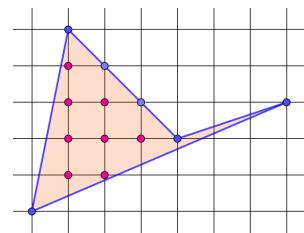
các cạnh biên. Từ đó, diện tích của “chú mèo” là:

$$T + \frac{B}{2} - 1 = 2 + \frac{20}{2} - 1 = 11 \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Kết quả này cũng giống với con số mà ta đã tính được trong Phần 1, nhưng có phần nhanh chóng hơn các em nhỉ.

Chúng ta thử tiếp với hình trong Ví dụ 6 trong Phần 1.

Ví dụ 2. Tính diện tích của đa giác được tô đậm trong hình sau.



Hình 7.

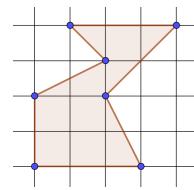
Lời giải. Đa giác trong Hình 7 có $T = 8$ điểm trong và $B = 6$ điểm nằm trên các canh. Do đó, Định lý Pick cho ta diện tích của đa giác này là:

$$T + \frac{B}{2} - 1 = 10 \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Kết quả này tất nhiên là trùng với con số tính ra theo cách giới thiệu ở Phần 1 rồi, nhưng thay vì phải tính khá nhiều diện tích tam giác thông qua phương pháp lấy phần bù, chúng ta chỉ cần đếm số điểm nằm trên lưới. Định lý Pick thật là lợi hại phải không!

Bài tập dưới đây để các em luyện tập thêm công thức Pick. Các em có thể tính diện tích theo cách trong Phần 1 để kiểm tra lại nhé.

Bài tập 1. Tính diện tích của hình tô đậm sau đây.



Hình 8.

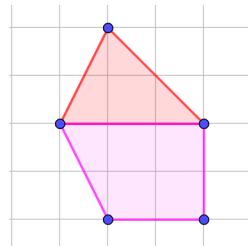
3. Làm thế nào để chứng minh định lý Pick?

Định lý Pick có thể chứng minh bằng nhiều cách khác nhau, trong khuôn khổ bài viết này, chúng ta chỉ mô tả cách tìm ra công thức của Pick cho hai hình cơ bản, đơn giản nhất – hình chữ nhật và tam giác vuông có cạnh nằm trên lưới.

Nếu bạn nào quan tâm đến việc chứng minh đầy đủ định lý này thì có thể tham khảo các bước làm sau.

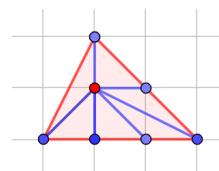
– Để chứng minh công thức Pick cho một đa giác nào đó ta chia đa giác thành hai phần bằng một đường chéo và quy về việc chứng công thức Pick cho mỗi đa giác thành phần. Ta thấy, đường chéo này trở thành cạnh của hai đa giác thành phần do đó các điểm nguyên trên đường chéo lúc trước được tính

1 đơn vị, khi trở thành điểm biên thì tính $\frac{1}{2}$ đơn vị nhưng tính hai lần, vậy là hòa! Còn lại là hai điểm mút của đường chéo, chúng được tính hai lần do là đỉnh của hai đa giác con, vậy là đôi ra **1** đơn vị. Nhưng trong công thức Pick sau khi tính các điểm biên và điểm trong ta bớt đi **1** đơn vị. Đổi với hai đa giác thành phần, ta bớt đi cả thảy **2** đơn vị, vậy cũng hòa!



Hình 9.

– Sau khi thực hiện nhiều lần chia đa giác thành các đa giác con, cuối cùng ta quy việc chứng minh định lý Pick cho tam giác. Ta lại tiếp tục chia tam giác đó thành các tam giác con nếu có một điểm nguyên ở trong hoặc trên biên tam giác.

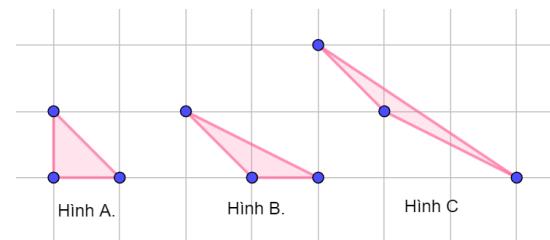


Hình 10.

– Đối với tam giác không chứa điểm nguyên ở trong hoặc trên biên, định lý Pick khẳng định nó có diện tích bằng

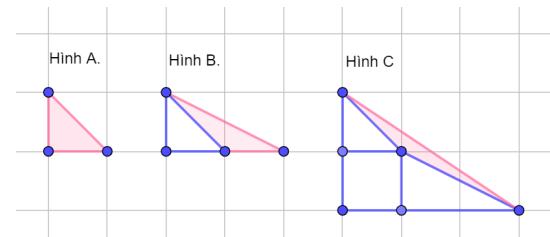
$$\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Dưới đây chúng ta sẽ xem một vài ví dụ kiểm chứng điều này. Hy vọng sau đó các bạn có thể tự đưa ra một chứng minh chặt chẽ của định lý Pick cho các tam giác đơn (nghĩa là tam giác không chứa điểm nguyên ở trong và trên biên, ngoại trừ ba đỉnh).



Hình 11.

Ba tam giác trong Hình 11 đều là các tam giác đơn. Ba tam giác này có nhiều hình dáng khác nhau, nhưng ta đều thấy chúng có diện tích bằng $\frac{1}{2}$. Thật vậy, vận dụng những cách tính diện tích trong Phần 1, ta có thể thấy ngay



Hình 12.

– Diện tích tam giác trong Hình A là $\frac{1}{2}$;

Diện tích của tam giác trong Hình **B** là:

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

Diện tích của tam giác trong Hình **C** là:

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 3 - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = \frac{1}{2}.$$

Bài viết về Tính diện tích trên lưới ô vuông đã giới thiệu đến các em cách tính diện tích của những hình trên lưới. Đầu tiên là hai phương pháp rất phổ biến: phương pháp chia hình

cần tính thành những hình cơ bản đã biết diện tích và phương pháp tính theo phần bù. Tiếp theo đó bài viết giới thiệu với các em một công thức tính diện tích vô cùng đẹp đẽ qua Định lý Pick. Việc áp dụng định lý Pick giúp tính diện tích trở nên đơn giản hơn nhiều vì ta chỉ cần đếm số điểm nguyên ở trong và trên cạnh của hình cần tính. Chủ đề tính diện tích trên lưới ô vuông vẫn còn nhiều điều hấp dẫn, các bạn nhỏ nếu tìm được những bài toán hay thì hãy chia sẻ cùng Pi và các thầy cô trong câu lạc bộ UMC nhé.

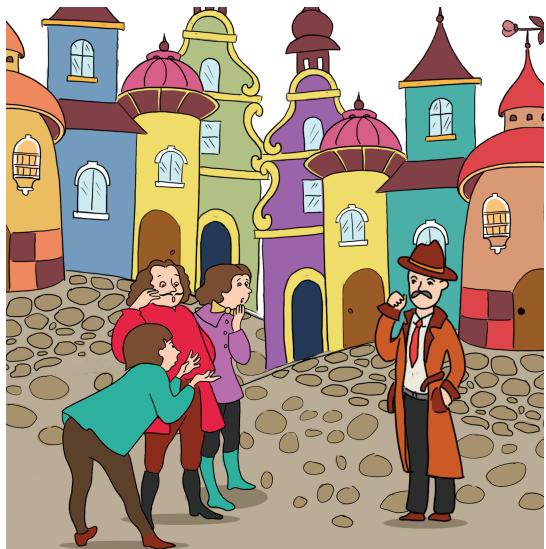
THÀNH PHỐ CỦA CÁC CÔNG DÂN THÔNG MINH

GIA DƯƠNG

Thám tử Xuân Phong và thanh tra Lê Kính nhân dịp đi điều tra ở vùng xa được mời tới thăm quan một thành phố kỳ lạ được mang tên Thành phố Thông minh. Thành phố chỉ có vỏn vẹn **200** cư dân, họ ở trong những ngôi nhà cực kỳ hiện đại với nhiều tiện nghi tối tân và đặc biệt hơn, cư dân được chia ra thành **3** loại người: **a)** Người *ngốc* *ngêch* luôn coi tất cả mọi người khác là ngốc *ngêch* còn mỗi mình là thông minh; **b)** người *thông minh khiêm tốn* biết chính xác về tất cả những người khác, còn coi bản thân là ngốc *ngêch*; **c)** người *thông minh tự tin* biết chính xác về tất cả những người khác và coi mình là thông minh. Theo thói quen nghề nghiệp, Xuân Phong liền mời tất cả công dân của thành phố tới tòa thị chính để mở một cuộc điều tra khảo sát ẩn danh về câu hỏi: trong tòa thị chính bây giờ có tất cả bao nhiêu công dân của thành phố là thông minh? Sau khi thu phiếu điều tra về, Xuân Phong không thể nào xác định được số lượng công dân thông minh của thành phố. Bỗng dưng vừa đúng lúc đó có một công dân trở về sau chuyến du lịch và chưa kịp tham gia trả lời khảo sát cùng với

199 công dân đứng chật ních ở tòa thị chính. Anh ta nhanh chóng nhận phiếu điều tra,传递 thông tin về các công dân trong phòng thị chính, kể cả về bản thân. Xuân Phong đọc câu trả lời của công dân đến muộn này và nói nhỏ cho Lê Kính “Giờ thì tôi cũng biết rõ về số các nhà thông minh trong thành phố này rồi”.

Vậy theo em trong thành phố đặc biệt nọ có thể có bao nhiêu công dân thông minh?



CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

1. Một bác nông dân chở một xe ô tô quất cảnh ra chợ Tết để bán. Sau khi bán hết cây quất cuối cùng với giá 230 nghìn đồng, bác tính nhẩm lại thấy mình đã bán số cây quất với giá trung bình là 245 nghìn đồng/cây. Nhưng ngay lúc ấy người mua cây quất cuối quay trở lại và chỉ cho bác thấy càành quất bị rụng quá nhiều lá, nên ông ta chỉ đồng ý mua với giá 158 nghìn đồng. Bác chấp thuận và bán càành quất đó. Khi nhẩm tính lại, bác nông dân thấy giá trung bình của xe quất bây giờ là 242 nghìn đồng. Hỏi bác đã bán được bao nhiêu cây quất?



2. Chuyện kể rằng có một người khi gặp nhà triết học và toán học Hy-lạp Pithagoras đã hỏi ông: "Bây giờ là mấy giờ?" Pithagoras đã trả lời "Cho đến hết ngày còn lại hai lần của hai phần năm khoảng thời gian đã trôi qua từ lúc bắt đầu ngày". Nghe vậy, người đó chịu không thể nghĩ ra ngay được lúc họ gặp nhau là mấy giờ. Em có thể giúp trả lời lúc đó là mấy giờ được không?



3. Một tháng trước bà Hoa ra chợ mua một cân khoai tây, một cân thịt và một chục trứng. Chủ nhật vừa rồi, khoai tây tăng lên gấp ba, thịt gấp 4 lần còn trứng chỉ gấp 5 lần, nên bà Hoa phải trả 600 nghìn cho từng ấy món hàng như lần thứ nhất. Hôm nay thì khoai lại gấp 6 lần so với tháng trước, thịt gấp 5 lần còn trứng chỉ gấp 4 lần nên bà Hoa lại phải trả 660 nghìn với cùng một lượng hàng. Hỏi bà Hoa đã trả bao nhiêu tiền cho lần mua thứ nhất?



4. Trong một buổi dạ hội nọ mỗi quý ông đã hân hạnh khiêu vũ với ba quý bà, còn mỗi quý bà cũng đã khiêu vũ với ba quý ông. Em hãy chỉ ra rằng số quý ông và số quý bà tham gia dạ hội là bằng nhau.



5. Sau khi kết thúc một giải thi đấu cờ, ban tổ chức nhận thấy mỗi kỳ thủ tham gia đã có số trận thắng khi chơi bằng quân trắng bằng đúng số trận mà tất cả các kỳ thủ còn lại đã thắng khi chơi quân đen. Em hãy chỉ ra rằng tất cả các kỳ thủ tham gia thi đấu đã có số trận thắng là như nhau.



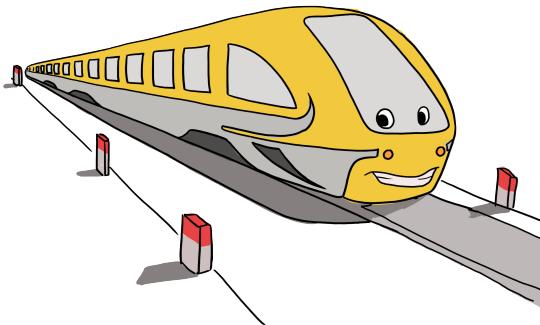
6. Vào một ngày Chủ nhật nọ, Vinh và người em trai nhỏ tuổi hơn là Minh đạp hai chiếc xe tới hiệu sách trung tâm cách nhà vài cây số. Tại đó mỗi người chọn mua một cuốn sách quý mà nhóm bạn bè cũ đang bàn luận khen ngợi thường xuyên mấy năm nay trên

Facebook. Mỗi người đều lấy tổng tất cả các chữ số của tất cả các trang sách mình đã mua và nhận thấy rằng số đó bằng năm sinh của mình. Vậy ai trong số hai anh em Vinh và Minh đang đi học lớp bồi dưỡng Toán cho học sinh phổ thông nhỉ?



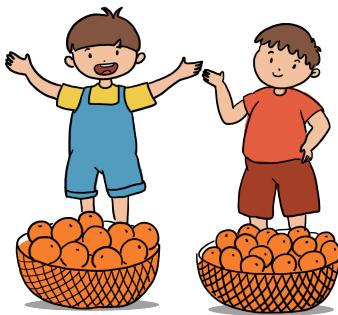
LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 10 năm 2022)

1. Một chiếc tàu cao tốc dài 18 m đi ngang qua một cột cây số trong vòng 9 giây. Hỏi chiếc tàu đó cần bao nhiêu thời gian để đi qua hết một cây cầu dài 36 m.



2. Hai cậu bé đi bán cam để gây quỹ xây dựng thư viện. Mỗi cậu có 30 quả cam. Cậu thứ nhất bán 10.000 đồng hai quả cam, cậu thứ hai bán 10.000 đồng ba quả cam. Trong lúc đang chuẩn bị bày cam ra bán thì một cậu bị gọi về nhà nên cậu ta nhờ cậu thứ hai bán hộ số cam của mình. Tất cả số cam còn lại được cậu bé thứ hai bán với giá 20.000 đồng/năm

quả. Nếu như số cam bán riêng như dự định lúc đầu thì đã thu được là 150.000 đồng và 100.000 đồng, tức là tổng cộng có 250.000 đồng, nhưng vì bán gộp 20.000 đồng cho 5 quả nên hai cậu chỉ thu được 240.000 đồng. Hỏi số tiền bị hụt 10.000 đồng đã mất ở chỗ nào?



3. Có ba người bạn tập trung lại để đi cắm trại và họ chỉ có duy nhất một chiếc xe máy có 2 chỗ ngồi. Liệu họ có thể vượt được quãng đường dài 60 km tới nơi cắm trại sau khoảng thời gian 3 giờ đồng hồ được hay không, biết rằng vận tốc của mỗi người đi bộ là 5 km/giờ

và vận tốc của xe máy (có tải hay không có tải) luôn là **50 km/giờ**?



4. Có **100** chiếc thẻ bài bằng nhựa đánh số từ **1** tới **100** lần lượt được xếp thành hàng ngang. Cứ hai chiếc thẻ xếp cách nhau một chiếc thẻ khác đều có thể đổi chỗ được cho nhau. Liệu em có thể đổi chỗ các chiếc thẻ này bằng cách như trên để xếp lại được **100** chiếc thẻ trên theo thứ tự ngược lại được hay không?



5. Trong ngày khai giảng các bạn học sinh gặp lại nhau sau một mùa hè nên vô cùng mừng rỡ. Gặp lại bạn bè cũ và ai cũng tranh thủ bắt tay bạn mình. Kết thúc màn chào hỏi vui tươi sôi nổi, anh phụ trách thống kê lại trong cuốn sổ các bạn học sinh đã có số lẻ lần bắt tay và tổng cộng có **67** bạn. Bạn Lâm đứng cạnh anh phụ trách nói nhỏ “Anh ơi, anh đếm nhầm rồi, chắc chắn không phải là **67** bạn à”. Anh phụ trách vô cùng ngạc nhiên, vì sao Lâm lại biết vậy. Em có thể giải thích vì sao Lâm lại cho rằng anh phụ trách đếm nhầm được không?



6. a) Có **50** vị khách ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn được xếp đều, trong số họ có **25** phụ nữ. Em hãy chứng tỏ rằng có một vị khách ngồi cạnh hai phụ nữ.

b) Giả sử bây giờ số phụ nữ là **26** người. Trong buổi tiệc bỗng dừng có hai vị khách làm vỡ mất hai chiếc cốc đặt trước mặt họ. Em hãy chứng tỏ rằng có thể xoay lại chiếc bàn tròn theo một cách nào đó để sao cho hai chiếc cốc vỡ lại đặt trước mặt của hai vị khách nữ.

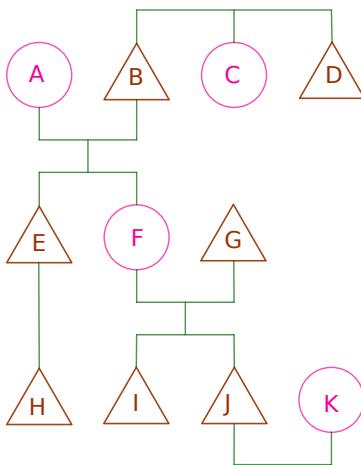




FAMILY TREES

NGHIA DOAN¹

The diagram below is an example of a *family tree*. The circles denote females and the triangles denote males.



A and **B** are married, as are **F** and **G**, and **J** and **K**.

B, **C**, and **D** are siblings, as are **E** and **F**. **E** and **F** are children of **A** and **B**.

Similarly, the parents of **I** and **J** are **F** and **G**. **E** is the father of **H**.

In addition, **A** is the grandmother of **H**, **I**, and **J**, **F** is the aunt of **H**, and **C** is the sister-in-law of **A**.



Example (Who is who). Inspector Jade asked six children to briefly introduce their brothers, sisters, and first cousins (cousins who share a grandparent). She had to match the name of each child to a numbered position in the family tree with the responses given below. Note that the relations were given in the local language. *Please do not try to guess the genders of the children from the names. It may lead you to wrong conclusions.*

Response from Binh:

- I have three *arawa*: Kim, Minh, Thao
- I have two *surubu*: Oanh and Yen

Response from Dinh:

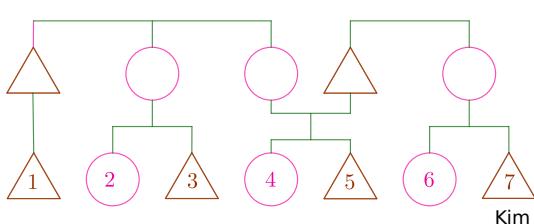
- I have two *surubu*: Oanh and Yen
- I have one *ere*: Binh

Response from Kim:

- I have one *arawa*: Dinh
- I have one *surubu*: Binh

Response from Minh:

- I have one *ere*: Yen
 - I have two *arawa*: Dinh and Thao
- Response from Thao:
- I have two *surubu*: Yen and Binh
 - I have two *arawa*: Minh and Dinh



Solution. From what Binh said, Binh has the same type of relations to three children. Consequently, those children cannot be

¹Ottawa, Canada.

Binh's sisters or brothers, and *arawa* does not mean sister or brother. Only the child with number **4** or **5** has three cousins in the same gender.

Looking at the cousins of the children with numbers **4** and **5**, we see that *arawa* and *suburu* refer to the gender of the cousins. Observe that Binh is a *suburu* to Kim and Kim is an *arawa* to Binh. Therefore, Binh and Kim are of opposite genders. Because both children with numbers **4** and **5** have three male cousins, Kim has to be a boy and so Binh is a girl. Thus, Binh is the girl with number **4**.

Now, Kim, Minh and Thao are the children with numbers **1**, **3** and **7**; *arawa* means *male cousin*. Furthermore, Binh is a *suburu* to Kim and Thao; in other words, she is a *female cousin* to them.

We deduce that Binh is not a *suburu* to the boy with number **5**. Thus, Dinh is the boy with number **5**. Obviously, she is not an

arawa to anyone. Since she is an *ere* to Dinh, *ere* means sister and Dinh is Binh's brother.

Next, Thao must be the boy with number **1** because Thao has two female cousins and two male cousins. It follows that Minh is the boy with number **3**.

Yen is an *ere* to Minh, so Yen is the girl with number **2**. Finally, Oanh is the girl with number **6**.

The answer is **1**—Thao, **2**—Yen, **3**—Minh, **4**—Binh, **5**—Dinh, **6**—Oanh, **7**—Kim.

Vocabulary

male: nam

female: nữ

family tree: cây phả hệ

sibling: anh/chị/em ruột

aunt: cô, dì

sister-in-law: chị/em dâu

cousin: anh/chị/em họ

gender: giới tính

Kid Friendly Family Tree

