- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P651–P660: trước ngày 15/1/2023.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P671. (Mức B) Một hình chữ nhật, được chia thành 9 hình chữ nhật con như hình vẽ. Biết chu vi của 4 hình chữ nhật con là các số được ghi tương ứng trong các hình chữ nhật đó. Chu vi của hình chữ nhật con trung tâm là số nguyên và không bằng với chu vi của 4 hình chữ nhật con đã biết. Tìm chu vi của các hình chữ nhật con còn lại.

	4	
2		2
	5	

Đăng Hải, Hà Nội (st)

P672. (Mức B) Cho x và y là các số nguyên dương phân biệt thoả mãn $2023x^{2023} + 999y^{2023}$ chia hết cho $x+y$. Chứng minh rằng $x+y$ là hợp số.

Nguyễn Đức Tấn, Tp. Hồ Chí Minh

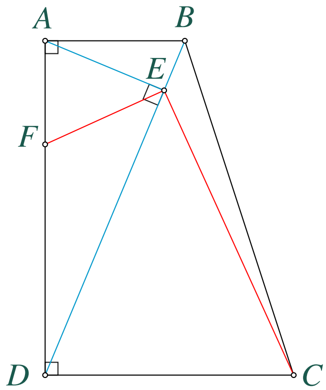
P673. (Mức B) Chứng minh rằng biểu thức

$$A=\sqrt[3]{1^3+1}+\sqrt[3]{2^3+1}+\cdots+\sqrt[3]{2023^3+1}$$

không nhận giá trị nguyên.

Nguyễn Văn Quý, Hà Nội

P674. (Mức B) Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D. Trên tia AD lấy điểm F sao cho $AF\cdot AD = AB\cdot CD$. Gọi E là hình chiếu vuông góc của A trên BD. Chứng minh rằng $\angle CEF = 90^\circ$.



Bằng Linh, Phú Thọ

P675. (Mức B) Mỗi ô của bảng 8×8 được điền số $+1$ hoặc -1 sao cho tổng của 4 số trong mỗi hình vuông con cỡ 2×2 đều bằng 2 hoặc -2. Chứng minh rằng bảng phải chứa hai hàng giống nhau.

Nguyễn Tường Thanh, Nghệ An (st)

P676. (Mức B) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \le \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{3}{2}}.$$

Nguyễn Việt Hùng, Hà Nội

P677. (Mức A) Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi

$$u_n = \frac{C_{2n}^n - 2022}{n^2} \quad \text{với } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

$a)$ Chứng minh rằng (u_n) là dãy tăng và không bị chặn trên.

$b)$ Tìm tất cả các số thực α sao cho giới hạn $\lim \dfrac{n^\alpha . u_n}{4^n}$ tồn tại hữu hạn và khác 0.

Lê Phúc Lữ, Tp. Hồ Chí Minh

P678. (Mức A) Trong mặt phẳng, cho hai điểm cố định I và J thoả mãn $IJ = 8$. Gọi (S) là tập hợp tất cả các điểm M thoả mãn $\min\{MI, MJ\} \le 7$. Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác ABC trong đó A, B, C là các điểm thuộc (S).

Trần Quốc Luật, Tp. Hồ Chí Minh

P679. (Mức A) Một cô gà mái đẻ ra được 100 quả trứng. Cô ta rất hãnh diện bày 100 quả theo một vòng tròn và cục ta cục tác mời mọi người đến lấy trứng theo cách sau đây: Quả đầu tiên để lại, chọn quả thứ hai kế tiếp (theo chiều kim đồng hồ), rồi quả thứ ba lại để lại, nhặt quả thứ tư, cứ như vậy nhặt cách một quả theo vòng tròn cho đến khi nào chỉ còn đúng một quả. Hỏi, quả này là quả thứ mấy (nếu tính từ quả đầu tiên theo chiều kim đồng hồ)?

Phạm Triều Dương, Hà Nội (st)

P680. (Mức A) Xác định tất cả các số nguyên a sao cho: với mỗi số nguyên dương k, tồn tại số nguyên dương n_k thoả mãn $2^k \mid n_k^{n_k} + a$.

Nguyễn Văn Thạch, Đắk Nông

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P641. (Mức B) Tại mỗi đỉnh của một đa giác lồi 18 cạnh ở hình dưới đây, người ta ghi một số, sao cho số được ghi ở mỗi đỉnh bằng tổng hai số được ghi ở hai đỉnh kề với nó.

Biết rằng, số được ghi ở đỉnh X là 20, và số được ghi ở đỉnh Y là 22. Hãy tìm số được ghi ở đỉnh S.

Lời giải (*phỏng theo ý giải của bạn Nguyễn Chánh Thiện, lớp* $8/14$, *trường THCS Lê Quý Đôn, Quận* 3, *Tp. Hồ Chí Minh*).

Xuất phát từ đỉnh S, theo chiều kim đồng hồ, kí hiệu các số được ghi tại các đỉnh của $18-$giác, lần lượt, bởi $x_1, x_2, \ldots, x_{18}$ (xem Hình dưới đây).

Do x_8, x_{12} là các số được ghi tại các đỉnh X, Y, nên theo giả thiết của bài ra, $x_8 = 20$ và

$x_{12} = 22$.

Từ qui tắc ghi số của đề bài suy ra, với mỗi $k = 1, 2, \ldots, 15$, ta có:

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k+1} - x_{k+2} = x_{k+1} - (x_{k+1} + x_{k+3}) \\ &= -x_{k+3}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} &x_2 = -x_5 = x_8 = 20, \\ &22 = x_{12} = -x_{15} = x_{18}.7 \end{aligned}$$

Vì vậy

$$x_1 = x_{18} + x_2 = 22 + 20 = 42.$$

Vậy, số được ghi ở đỉnh S là 42.

Bình luận và Nhận xét

Tạp chí đã nhận được nhiều lời giải cho bài toán, từ bạn đọc; và tất cả những lời giải này đều là lời giải đúng.

Lê Huy

P641. (Mức B) Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $y^2 + x - 1$ chia hết cho $xy + 1$. Chứng minh rằng, tồn tại số tự nhiên z, sao cho $x + y + z + xyz$ là một số chính phương.

Lời giải (*của người đề xuất bài toán*).

Từ giả thiết của bài toán, suy ra

$$\begin{aligned} &xy + 1 | x\left(y^2 + x - 1\right) \\ &= y\,(xy + 1) + \left(x^2 - (x + y)\right). \end{aligned}$$

Do đó

$$xy + 1 | x^2 - (x + y).$$

Vì thế, tồn tại số nguyên z, sao cho

$$x^2 - (x + y) = z\,(xy + 1);$$

hay, $x + y + z + xyz = x^2$.

Nhận thấy, nếu $z \leq -1$ thì

$$\begin{aligned} x^2 &= x + y + z + xyz \leq x + y - 1 - xy \\ &= -(x - 1)(y - 1) \leq 0, \end{aligned}$$

là điều vô lí (do $x \in \mathbb{N}^*$).

Vì vậy, $z \geq 0$; hay, z là số tự nhiên.

Vậy, tồn tại số tự nhiên z, sao cho $x + y + z + xyz$ là một số chính phương.

Bình luận và Nhận xét

1. Tác giả bài toán đã chứng minh được rằng, nếu z_0 là một số tự nhiên, sao cho $x + y + z_0 + xyz_0$ là một số chính phương, thì tất cả các số tự nhiên $z_k, k \in \mathbb{N}^*$, xác định bởi

$$z_k = z_0 + 2xk + (xy + 1)\,k^2,$$

cũng có tính chất như vậy. Vì thế, kết luận của bài ra có thể được mở rộng thành: "Có vô số số tự nhiên z, sao cho $x + y + z + xyz$ là một số chính phương."

2. Theo ý giải của bạn *Vương Khánh Toàn* (lớp 10A1 Toán, trường THPT chuyên KHTN, trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội), có thể chứng minh được rằng, các số nguyên dương x, y thỏa mãn điều kiện của bài ra khi và chỉ khi $x = k + 1, y = k(k + 1)$, trong đó, k là một số nguyên dương tùy ý. Từ đây, dễ thấy, chọn $z = 0$, ta sẽ có số tự nhiên z thỏa mãn yêu cầu đề bài.

3. Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có một số lời giải sai, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau đây:

– *Ngộ nhận* rằng, không mất tính tổng quát, có thể giả sử $x^2 > x + y$;

– *Hiểu sai* rằng, số nguyên a chia hết cho số nguyên b khi và chỉ khi tồn tại số *tự nhiên* q, sao cho $a = bq$;

– *Suy luận sai* rằng, với x, y là các số nguyên dương, và a là số nguyên âm, từ

$$x^2 - x - y = a\,(xy + 1)$$

suy ra, $x^2 - x - y = 0$.

Cùng với các lời giải sai nêu trên, có một lời giải không được coi là lời giải hoàn chỉnh, do các lập luận thiếu chặt chẽ, thiếu chính xác.

Lưu Thị Thanh Hà

P643. (Mức B) Người ta lần lượt ghi các số lên bảng, theo qui tắc: Ở mỗi lần ghi, chỉ ghi một số, và nếu số được ghi ở lần thứ k ($k \in \mathbb{N}^*$) là $x \neq -1$, thì ở lần thứ $k + 1$ ghi số $\dfrac{x - 1}{x + 1}$. Hãy tìm số nhỏ nhất cần ghi ở lần thứ nhất, sao cho trong quá trình ghi số lên bảng, theo qui tắc trên, ta ghi được số $-\frac{1}{2023}$.

Lời giải (*của người chấm bài*).

Với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$, kí hiệu x_k là số được ghi lên bảng ở lần ghi thứ k.

Gọi a là số được ghi lên bảng ở lần ghi đầu tiên; ta có $x_1 = a$.

Theo qui tắc ghi số của bài ra, để có thể ghi tiếp một số mới lên bảng, cần có $a \neq -1$. Khi đó, ta có

$$x_2 = \frac{a-1}{a+1}.$$

Dễ thấy, $x_2 \neq -1$ khi và chỉ khi $a \neq 0$. Do đó, với $a \neq 0, -1$, ta có

$$x_3 = \frac{x_2 - 1}{x_2 + 1} = -\frac{1}{a}.$$

Vì $x_3 \neq -1$ khi và chỉ khi $a \neq 1$, nên với $a \neq 0, \pm 1$ ta có:

$$x_4 = \frac{x_3 - 1}{x_3 + 1} = -\frac{a+1}{a-1}.$$

Do $x_4 \neq -1$ với mọi a, nên

$$x_5 = \frac{x_4 - 1}{x_4 + 1} = a = x_1.$$

Từ những điều nêu trên, suy ra:

– Nếu $a = -1$ thì ta ghi được lên bảng duy nhất số -1.

– Nếu $a = 0$ thì ta ghi được lên bảng hai số, là 0 và -1.

– Nếu $a = 1$ thì ta ghi được lên bảng ba số, là $1, 0$ và -1.

– Nếu $a \neq 0, \pm 1$, thì tất cả các số ghi được lên bảng là $a, \frac{a-1}{a+1}, -\frac{1}{a}, -\frac{a+1}{a-1}$.

k Vì vậy, ta ghi được lên bảng số $-\frac{1}{2023}$ khi và chỉ khi $a \neq 0, \pm 1$, và đồng thời, một trong bốn số vừa nêu trên bằng $-\frac{1}{2023}$.

Ta có:

$$\frac{a-1}{a+1} = -\frac{1}{2023} \Leftrightarrow a = \frac{1011}{1012};$$
$$-\frac{1}{a} = -\frac{1}{2023} \Leftrightarrow a = 2023;$$
$$-\frac{a+1}{a-1} = -\frac{1}{2023} \Leftrightarrow a = -\frac{1012}{1011}.$$

Do đó, ta ghi được lên bảng số $-\frac{1}{2023}$ khi và chỉ khi $a \in \left\{-\frac{1}{2023}; \frac{1011}{1012}; 2023; -\frac{1012}{1011}\right\}$. Dễ thấy, $-\frac{1012}{1011}$ là số nhỏ nhất trong bốn số thuộc tập hợp vừa nêu. Vì vậy, số nhỏ nhất cần ghi ở lần đầu tiên, sao cho có thể ghi lên bảng số $-\frac{1}{2023}$, là $-\frac{1012}{1011}$.

Bình luận và Nhận xét

1. Xét về logic, trong qui tắc ghi số của bài ra, cần nêu rõ, nếu số được ghi lên bảng là -1 thì việc ghi số sẽ tiếp tục thế nào? Dừng lại, không ghi số nữa, hay ghi tiếp số nào? Lời giải trên đây là lời giải dựa trên việc hiểu qui tắc ghi số của bài ra, theo hướng: Việc ghi số lên bảng sẽ dừng lại, ngay sau khi số được ghi là -1.

2. Rất tiếc, tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều không được coi là lời giải hoàn chỉnh, do người giải bài đã khẳng định *không đúng* rằng, với a (theo kí hiệu trong Lời giải trên) là số tùy ý, các số ghi được lên bảng *luôn là* $a, \frac{a-1}{a+1}, -\frac{1}{a}, -\frac{a+1}{a-1}$.

Hà Thanh

P644. (Mức B) Xét tam giác ABC có các góc B, C là góc nhọn. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác đó. Chứng minh rằng, ABC là tam giác vuông tại A khi và chỉ khi

$$\frac{HB^3}{AB^4} + \frac{HC^3}{AC^4} = \frac{1}{BC}.$$

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Vũ Bảo Lân, lớp 8A5, trường THCS Phúc Yên, Tp. Phúc Yên, Tỉnh Vĩnh Phúc*).

1. *Chứng minh "chỉ khi". Giả sử tam giác ABC vuông tại A* (xem Hình 1) *. Ta cần chứng* *minh*

$$\frac{HB^3}{AB^4}+\frac{HC^3}{AC^4}=\frac{1}{BC}.$$

Do H là chân đường cao kẻ từ đỉnh góc vuông của tam giác vuông ABC nên

$$AB^2=BC\cdot BH, AC^2=BC\cdot CH,$$
$$\text{và } BC=HB+HC.$$

Do đó

$$\frac{HB^3}{AB^4}+\frac{HC^3}{AC^4}=\frac{HB^3}{BC^2\cdot HB^2}+\frac{HC^3}{BC^2\cdot HC^2}$$
$$=\frac{HB+HC}{BC^2}=\frac{1}{BC}.$$

(1) được chứng minh.

2. *Chứng minh "khi". Giả sử ABC là tam giác thỏa mãn (1), và có các góc B, C là góc nhọn. Ta cần chứng minh tam giác ABC vuông tại A.*

Gọi A' là giao điểm của tia HA và đường tròn đường kính BC; ta có $\angle BA'C=90^\circ$, và H là chân đường cao kẻ từ A' của tam giác vuông $A'BC$. Do đó, theo chứng minh ở phần 1, ta có:

$$\frac{HB^3}{A'B^4}+\frac{HC^3}{A'C^4}=\frac{1}{BC}. \qquad (2)$$

Nhận thấy:

– Nếu góc A là góc nhọn (xem Hình 2) thì điểm A nằm bên ngoài đường tròn đường kính BC.

Vì thế, điểm A' nằm giữa hai điểm H, A. Suy ra, $AB>A'B$ và $AC>A'C$. Do đó, với lưu ý tới (2), ta có:

$$\frac{HB^3}{AB^4}+\frac{HC^3}{AC^4}<\frac{HB^3}{A'B^4}+\frac{HC^3}{A'C^4}=\frac{1}{BC},$$

mâu thuẫn với (1). Vì vậy, góc A không thể là góc nhọn. (3)

– Nếu góc A là góc tù (xem Hình 3) thì điểm A nằm bên trong đường tròn đường kính BC.

Vì thế, điểm A nằm giữa hai điểm H, A'. Suy ra, $AB<A'B$ và $AC<A'C$. Do đó, với lưu ý tới (2), ta có:

$$\frac{HB^3}{AB^4}+\frac{HC^3}{AC^4}>\frac{HB^3}{A'B^4}+\frac{HC^3}{A'C^4}=\frac{1}{BC},$$

mâu thuẫn với (1). Vì vậy, góc A không thể là góc tù. (4)

Từ (3) và (4) suy ra, góc A là góc vuông; và do đó, ta có điều cần chứng minh.

Bình luận và Nhận xét

Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có một số lời giải sai, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau:

– *Mới chỉ chứng minh được*, nếu tam giác ABC vuông tại A thì ta có hệ thức đã nêu trong đề bài;

– *Ngộ nhận* rằng, hiển nhiên có

$$HB\left(\frac{HB^2}{AB^4}-\frac{1}{BC^2}\right)+HC\left(\frac{HC^2}{AC^4}-\frac{1}{BC^2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{HB^2}{AB^4}-\frac{1}{BC^2}=\frac{HC^2}{AC^4}-\frac{1}{BC^2}=0.$$

Hạ Vũ Anh

P645. (Mức B) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b^3c+b}+\frac{b}{b+c^3a+c}+\frac{c}{c+a^3b+a}\geq 1.$$

Lời giải (*dựa theo lời giải của người đề xuất bài toán*).

Do $abc=1$ nên

$$\frac{a}{a+b^3c+b}=\frac{a^2}{a^2+ab^3c+ab}=\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}.$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\frac{b}{b+c^3a+c}=\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}, \frac{c}{c+a^3b+a}$$
$$=\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}.$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh của đề bài tương đương với bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}$$
$$+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\geq 1. \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz cho

hai số thực dương, ta có:

$$\begin{aligned}&\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{c}{a+b+c}\\ =&\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^2}{ac+bc+c^2}\\ \geq&\frac{(a+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}. \quad (2)\end{aligned}$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$\begin{aligned}&\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{a}{a+b+c}\\ \geq&\frac{(b+a)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} \quad (3)\\ &\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}+\frac{b}{a+b+c}\\ \geq&\frac{(c+b)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}. \quad (4)\end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức (2), (3), (4), vế theo vế, ta được:

$$\begin{aligned}&\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}+1\\ \geq&\frac{(a+c)^2+(b+a)^2+(c+b)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}\\ =&\frac{2\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}=2.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\geq 1.$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh; và do đó, bất đẳng thức của đề bài được chứng minh.

Bình luận và Nhận xét

1. Từ Lời giải trên dễ thấy, bất đẳng thức của bài ra là một biến thể đơn sơ, nhẹ nhàng của bất đẳng thức (1).

2. Bất đẳng thức (1) là một bất đẳng thức đã có từ lâu. Tác giả Vasile Cirtoaje đã giới thiệu bất đẳng thức này trong cuốn sách "*Algebraic Inequalities: Old and New Method*" (bài số 10, trang 21), do Nhà xuất bản GIL phát hành năm 2006. Trong cuốn sách này, Vasile Cirtoaje đã giới thiệu một cách chứng minh rất độc đáo cho bất đẳng thức đó, như sau:

"Đặt $x=a^2+ab+b^2$, $y=b^2+bc+c^2$, và $z=c^2+ca+a^2$. Ta có:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)\\ =&\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}+\frac{a^2+b^2}{xy}+\frac{b^2+c^2}{yz}+\frac{c^2+a^2}{zx}\\ \geq&\frac{ab}{xy}+\frac{bc}{yz}+\frac{ca}{zx}+\frac{a^2+b^2}{xy}+\frac{b^2+c^2}{yz}+\frac{c^2+a^2}{zx}\\ =&\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Từ đó, hiển nhiên thu được bất đẳng thức (1)."

3. Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có hai lời giải sai, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau:

– *Thực hiện sai một số biến đổi*; chẳng hạn:

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}=a^2\left(1-\frac{ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\right).$$

– *Nhầm chiều bất đẳng thức*; chẳng hạn:

$$\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\geq\frac{(a+b+}{(a+b+}$$

Võ Quốc Bá Cẩn

P646. (Mức *B*) Chứng minh rằng, trong mỗi bát giác lồi, luôn có ít nhất ba đường chéo mà độ dài của chúng đôi một khác nhau. (Bát giác là một đa giác có 8 cạnh.)

Lời giải (*của người chấm bài*).

Xét một bát giác lồi tùy ý; gọi là (H).

Do (H) là bát giác lồi, nên mỗi đỉnh của nó đều không nằm bên trong bất kì tam giác nào có ba đỉnh là ba đỉnh của bát giác đó. Do đó, đường trung trực của mỗi cạnh của (H) chỉ có thể đi qua tối đa một đỉnh của nó. (1)

Cũng do (H) là bát giác lồi, nên đường trung trực của mỗi đường chéo của nó không đi qua hai đỉnh kề nhau của bát giác. (2)

Xét một cạnh tùy ý của (H); gọi cạnh này là AB. Gọi C là đỉnh khác B và kề với A; gọi D

là đỉnh khác A và kề với B.

Theo (1), ngoại trừ bốn đỉnh C, A, B, D, trong bốn đỉnh còn lại của (H) chỉ có tối đa một đỉnh cách đều A và B. Do đó, trong bốn đỉnh đó, tồn tại ba đỉnh, mà mỗi đỉnh đều *không* cách đều A và B. Gọi ba đỉnh này là X, Y, Z; ta có $XA \neq XB, YA \neq YB$, và $ZA \neq ZB$. Xảy ra một trong các trường hợp sau:

k ◇ *Trường hợp* 1: $YA \neq XA$ và $YA \neq XB$.

Trong trường hợp này, XA, XB, YA là ba đường chéo có độ dài đôi một khác nhau.

◇ *Trường hợp* 2: $YA = XA$.

Khi đó, $YB \neq XA$ (do $YB \neq YA$), và $YB \neq XB$ (vì nếu ngược lại, $YB = XB$, thì đường trung trực của XY đi qua hai đỉnh A, B, mâu thuẫn với (1), hoặc với (2), tùy thuộc XY là cạnh, hay là đường chéo, của (H)). Do đó, XA, XB, YB là ba đường chéo có độ dài đôi một khác nhau.

◇ Trường hợp 3: $YA = XB$.

Khi đó:

– Nếu $ZA \neq XA$ và $ZA \neq XB$ thì XA, XB, ZA là ba đường chéo có độ dài đôi một khác nhau.

– Nếu $ZA = XA$ thì bằng các lập luận tương tự như ở trường hợp 2, ta có XA, XB, ZB là ba đường chéo có độ dài đôi một khác nhau.

– Nếu $ZA = XB$ thì $ZA = YA$ (do $YA = XB$). Do đó, bằng các lập luận tương tự như ở trường hợp 2, ta có YA, YB, ZB là ba đường chéo có độ dài đôi một khác nhau.

Vậy, trong (H) có ít nhất ba đường chéo có độ dài đôi một khác nhau.

Vì (H) là tùy ý, nên ta có điều phải chứng minh, theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Tạp chí đã nhận được đúng một lời giải, từ bạn đọc; và rất tiếc, lời giải đó lại là một lời giải sai, do người giải bài đã ngộ nhận rằng, phủ định của điều cần chứng minh theo yêu cầu đề bài là: "tồn tại một bát giác lồi, mà tất cả các đường chéo của nó có độ dài bằng nhau".

Nguyễn Khắc Minh

P647. (Mức A) Cho số nguyên $n \geq 2$, và cho n điểm đôi một phân biệt $A_1, A_2, \ldots, A_n$ cùng nằm trên một đường tròn, theo thứ tự đó (tính theo chiều kim đồng hồ). Một dãy các điểm đôi một phân biệt $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_t}$ $(t \in \mathbb{N}, t \geq 2)$ được gọi là một *đường đi*, nếu đường gấp khúc $A_{k_1}A_{k_2}\ldots A_{k_1}$ (t đỉnh) là một đường gấp khúc không tự cắt. Hỏi, có tất cả bao nhiêu đường đi?

(Một đường gấp khúc được gọi là *không tự cắt*, nếu không có hai cạnh nào của nó cắt nhau tại một điểm nằm bên trong mỗi cạnh, trong hai cạnh ấy.)

Lời giải (*dựa theo ý giải của một bạn học sinh cấp THPT*).

Bình luận và Nhận xét

Nguyễn Khắc Minh

P647. (Mức A) Với mỗi số thực a, xét tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, thỏa mãn

$$f(ax + y + f(x + y)) + f(xy) = yf(x)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

$a)$ Tìm tất cả các số thực a, sao cho trong các hàm số f, tồn tại một hàm là đơn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$.

$b)$ Với $a = 2$, tìm tất cả các hàm số f có $f(0) = 0$.

Lời giải (*dựa theo lời giải của một bạn học sinh cấp THPT*).

$a)$ Giả sử a là một số thực thỏa mãn yêu cầu đề bài. Khi đó, tồn tại hàm số f là đơn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$, và thỏa mãn

$$f(ax + y + f(x + y)) + f(xy) = yf(x) \tag{1}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Trong (1):

– Cho $x = y = 0$, ta được

$$f(f(0)) + f(0) = 0; \tag{2}$$

– Cho $y = 0$, ta được

$$f(ax + f(x)) + f(0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (2) và (3), suy ra

$$f(ax+f(x)) = f(f(0))\,\forall x\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Đặt $c = f(0)$. Vì f là đơn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$, nên từ (4) ta có:

$$f(x) = -ax+c \quad \forall x\in\mathbb{R}. \quad (5)$$

Vì $f(x)\equiv c$ không là đơn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$, nên $a\neq 0$.

Tiếp theo, thế (5) vào (1), ta được

$$-a(ax+y-a(x+y)+c)+c-axy+c = y(-ax+c) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (6)$$

Ta có:

$$(6) \Leftrightarrow -(a(1-a)+c)y+c(2-a) = 0 \quad \forall y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(1-a)+c = 0 \\ c(2-a) = 0. \end{cases}$$

Giải hệ trên, với lưu ý $a\neq 0$ (theo trên), ta được $a\in\{1;2\}$.

Ngược lại: – Với $a=1$, dễ thấy hàm số $f(x) = -x$ thỏa mãn (1), và là một đơn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$;

– Với $a=2$, dễ thấy hàm số $f(x) = -2x+2$ thỏa mãn (1), và là một đơn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$.

Vậy, tất cả các số thực a thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $a=1$ và $a=2$.

b) Giả sử f là hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài; nghĩa là, ta có $f(0)=0$ và

$$f(2x+y+f(x+y))+f(xy) = yf(x) \quad (7)$$

với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

Trong (7):

– Cho $x=-1, y=1$, ta được $f(-1)=0$; (8)

– Cho $x=1, y=-1$, với lưu ý tới (8), ta được $f(1)=0$; (9)

– Cho $y=0$, ta được

$$f(2x+f(x)) = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}; \quad (10)$$

– Thay x bởi $x+1$, và cho $y=-1$, ta được

$$f(2x+1+f(x))+f(-x-1) = -f(x+1) \quad \forall x\in\mathbb{R}; \quad (11)$$

– Thay x bởi $x-1$, và cho $y=1$, ta được

$$f(2x-1+f(x)) = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}; \quad (12)$$

– Cho $x=1$, và thay y bởi x, với lưu ý tới (9), ta được

$$f(2+x+f(x+1))+f(x) = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}. \quad (13)$$

Trong (13), thay x bởi $2x+f(x)-1$, với lưu ý tới (10) và (12), ta được

$$f(2x+1+f(x)) = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}. \quad (14)$$

Từ (11) và (14), suy ra

$$f(-x-1) = -f(x+1) \quad \forall x\in\mathbb{R}. \quad (15)$$

Do đó, f là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$. (15)

Tiếp theo, trong (7), cho $x=-1$ và thay y bởi $-x$, với lưu ý tới (8), ta được

$$f(-2-x+f(-1-x))+f(x) = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Suy ra

$$-f(2+x+f(x+1))+f(x) = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}(\text{do }(15)).$$

Kết hợp với (13), ta được $f(x)\equiv 0$.

Ngược lại, dễ thấy hàm số vừa nêu trên có $f(0)=0$ và thỏa mãn (7).

Vậy, có duy nhất hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài, là: $f(x)\equiv 0$.

Bình luận và Nhận xét

1. Bài đã ra là một bài toán phương trình hàm, được giải bằng phương pháp thế, khá cơ bản.

2. Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc, có hai lời giải cho kết quả sai ở câu *a*), do khi thực hiện phép thử lại, người giải bài đã ngộ nhận rằng, $f(x)\equiv 0$ là một đơn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$. Cùng với đó, có một lời giải không được coi là lời giải hoàn chỉnh, do trong lời giải có lỗi "chính tả" không thể châm chước.

3. Bạn đọc có thể thử sức với bài toán thú vị và bổ ích sau (Bài thi chọn học sinh vào Đội tuyển Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2022 – 2023):

Bài toán. Xét hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, thỏa mãn hệ thức

$f(yf(x+y)+x) = (f(y))^2 + f((x-1)f(y))$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

$a)$ Trong số các hàm số được xét, tìm tất cả các hàm số là đơn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$.

$b)$ Trong số các hàm số được xét, tìm tất cả các hàm số là toàn ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$.

Trần Nam Dũng

P649. (Mức A) Cho tam giác ABC và điểm D cố định nằm trên cạnh BC (D khác B, C). Một đường tròn (O) thay đổi, đi qua B, C, và cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại E, F (khác A, B, C). Gọi G là giao điểm của BF và AD. Chứng minh rằng, đường thẳng GE luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải (*của người chấm bài*).

Do bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn, nên

$(EF;AB) \equiv (EF;EB) \equiv (CF;CB) \equiv (CA;CB) \pmod{\pi}$.

Suy ra, đường thẳng EF có phương không đổi. (1)

Gọi I là giao điểm của AD và EF. Do (1) nên theo định lí Thales, tỉ số $\frac{\overline{IE}}{\overline{IF}}$ là một hằng số, khi E, F thay đổi. (2)

Qua B, kẻ đường thẳng song song với EF, cắt AD, EG tại J, K, tương ứng.

Do B là điểm cố định nên từ $BK \parallel EF$ và (1) suy ra, BK là đường thẳng cố định. Vì thế, giao điểm J của BK và đường thẳng cố định AD là một điểm cố định.

Do $BK \parallel EF$ nên theo định lí Thales, ta có:

$$\frac{\overline{JB}}{\overline{JK}} = \frac{\overline{IE}}{\overline{IF}}$$

Kết hợp với (2) suy ra, $\frac{\overline{JB}}{\overline{JK}}$ là một hằng số; mà B và J là các điểm cố định, nên K là một điểm cố định.

Vì vậy, GE luôn đi qua một điểm cố định. Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Ở Lời giải trên, ta đã chứng minh kết luận của bài ra với giả thiết nhẹ nhàng hơn: Đường tròn (O) thay đổi, đi qua B, C, và cắt các *đường thẳng* AB, AC tương ứng tại E, F, khác A, B, C.

2. Đường thẳng EF trong bài toán được gọi là *đường đối song của BC đối với tam giác ABC*. Các kết quả về đường đối song đã được trình bày trong nhiều tài liệu về Hình học sơ cấp.

3. Rất tiếc, trong các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có một lời giải sai, do người giải bài đã *khẳng định sai* rằng, đường thẳng EF song song với đường thẳng đi qua chân hai đường cao, kẻ từ B, C của tam giác ABC.

Lưu ý rằng, hai đường thẳng nêu trên có thể trùng nhau; và trong trường hợp tam giác ABC vuông ở A, đường thẳng thứ hai hoàn toàn không xác định!

Hạ Vũ Anh

P649. (Mức A) Cho p là một số nguyên tố có dạng $4k+3$, $k \in \mathbb{N}$. Xét dãy số Fibonacci, xác định bởi: $F_0 = 0, F_1 = 1$, và

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Chứng minh rằng, không tồn tại các số nguyên dương m, n, với $n \geq 5$, sao cho $F_n = p^m$. **Lời giải** (*dựa theo lời giải của bạn Trần Minh Hoàng, lớp 10T1, trường THPT chuyên Hà Tĩnh, Tỉnh Hà Tĩnh*).

Trước hết, ta nhắc lại (không chứng minh) hai tính chất đơn giản sau, của dãy Fibonacci:

$1/$ Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, $F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_{2k+1}$.

$2/$ Với mọi $k, m \in \mathbb{N}^*$, $F_m | F_{km}$.

Trở lại bài toán.

Giả sử ngược lại, tồn tại các số nguyên dương m, n, với $n \geq 5$, sao cho $F_n = p^m$. $(*)$

Do $F_6 = 8$, không là lũy thừa của một số nguyên tố có dạng $4k+3$, nên $n \neq 6$.

Xét các trường hợp sau:

◇ *Trường hợp* 1: n là số lẻ lớn hơn 3.

Đặt $n = 2h+1$, $h \geq 2$; theo $1/$, ta có:

$$F_n = F_{2h+1} = F_h^2 + F_{h+1}^2.$$

Kết hợp với $(*)$, suy ra

$$p|F_h^2 + F_{h+1}^2.$$

Mà p là số nguyên tố có dạng $4k+3$, nên $p|F_h$ và $p|F_{h+1}$. Do đó

$$p|F_{h+1} - F_h = F_{h-1}.$$

Vì thế

$$p|F_h - F_{h-1} = F_{h-2}.$$

Tiếp tục quá trình suy luận như trên, ta được $p|F_1 = 1$, là điều vô lí. Vì vậy, n phải là số chẵn.

◇ *Trường hợp* 2: n là số chẵn, có ước lẻ $t > 3$. Do $t \mid n$ nên theo $2/$, ta có

$$F_t|F_n = p^m.$$

Suy ra, tồn tại số nguyên dương s, sao cho $F_t = p^s$, là điều vô lí (theo kết quả xét trường hợp 1). Vì vậy, với lưu ý $n \neq 6$, suy ra phải xảy ra:

◇ *Trường hợp* 3: n có dạng $n = 2^s$, với $s \in \mathbb{N}^*$ và $s \geq 3$.

Do $s \geq 3$ nên $2^3 = 8|2^s$. Do đó, theo $2/$, ta có

$$F_8 = 21|F_{2^s} = F_n = p^m,$$

là điều vô lí. Điều vô lí này cho thấy, giả sử $(*)$ là sai. Vì thế, ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Bạn đọc có thể chứng minh tính chất $1/$ (nêu trong Lời giải trên) bằng cách sử dụng công thức số hạng tổng quát của dãy Fibonacci, và chứng minh tính chất $2/$ bằng phương pháp qui nạp theo k.

2. Trong Lời giải trên, ta đã sử dụng (không chứng minh) kết quả sau:

"*Với a, b là các số nguyên, và p là số nguyên tố có dạng $4k+3$, nếu $p|a^2+b^2$ thì $p \mid a$ và $p \mid b$*"

Sử dụng định lí nhỏ Fermat, bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh kết quả trên bằng phương pháp phản chứng.

3. Trong bài báo "Fibonacci and Lucas perfect powers", đăng tải trong Annals of Mathematics, 163 (2006) (trang $969-1018$), các nhà toán học Yann Bugeaud, Maurice Mignotte và Samir Siksek đã chứng minh được rằng, *trong dãy Fibonacci,* ***chỉ có*** *các số hạng $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_6 = 8$ và $F_{12} = 144$ là các lũy thừa hoàn hảo của một số nguyên.*

4. Tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Lưu Thị Thanh Hà