CHUYỂN ĐỔI SỐ TRONG CÁCH MẠNG CÔNG NGHIỆP LẦN THỨ TƯ

NGUYỄN VIỆT HÙNG[1]

Cuộc cách mạng công nghiệp lần thứ tư (sau đây gọi tắt là CMCN 4.0) với xu hướng phát triển dựa trên nền tảng tích hợp cao độ của hệ thống kết nối Số hóa – Vật lý – Sinh học và sự đột phá của Internet vạn vật, Trí tuệ nhân tạo đang tác động đến toàn thế giới. Cuộc cách mạng này được dự báo sẽ xóa nhòa khoảng cách giữa thế giới thực với thế giới ảo. Đặc biệt, mức độ ảnh hưởng, lan tỏa của cuộc cách mạng này sẽ nhanh hơn những gì đã xảy ra từ trước đến nay và làm thay đổi toàn bộ hệ thống sản xuất, quản lý, quản trị trên toàn thế giới. Cuộc cách mạng công nghiệp lần thứ nhất bắt đầu vào khoảng nửa sau thế kỷ thứ 18 với nền tảng là máy móc cơ khí vận hành bằng động cơ hơi nước.

Cuộc cách mạng công nghiệp lần thứ hai vào khoảng nửa cuối thế kỷ thứ 19 với nền tảng là động cơ đốt trong, động cơ điện và sản xuất theo dây chuyền. Cuộc cách mạng công nghiệp lần thứ ba được bắt đầu vào những năm 1960 với nền tảng là công nghệ bán dẫn, điện tử, máy tính, tự động hóa. Cuộc cách mạng công nghiệp lần thứ tư được kế thừa từ Cuộc cách mạng công nghiệp lần thứ ba và được đề cập nhiều từ những năm 2013 với ba trụ cột chính là Kỹ thuật số, Sinh học và Vật lý.

Những đặc điểm nổi bật của CMCN 4.0

Công nghệ trong kỷ nguyên CMCN 4.0 có mức độ tự động hóa rất cao (so với mức độ tự động hóa của CMCN 3.0), mô phỏng trí tuệ của con người. Trí tuệ nhân tạo (Artificial intelligence–AI) có thể tương tác với con người, thực hiện các hành vi thông minh như con người. Dựa trên các mô hình toán học và thuật toán phân tích dữ liệu lớn, AI có thể thay thế con người phân tích, tối ưu hóa, đưa ra quyết định và giải quyết vấn đề thay thế con người trong nhiều lĩnh vực, kể cả những lĩnh vực trước đây là độc quyền của con người như sáng tạo nghệ thuật v.v.

Công nghệ sinh học, công nghệ vật liệu trong CMCN 4.0 có những bước tiến mang tính nhảy vọt, đột phá là nền tảng để tạo nên những tiến bộ vượt bậc trong lĩnh vực nông nghiệp, y học, dược liệu, năng lượng tái tạo...

[1] *Phó Giám đốc phụ trách, Sở Thông tin và Truyền thông Hà Nội; Thành viên Tổ công tác giúp việc Uỷ Ban Quốc gia về Chuyển đổi số.*

Vật lý hướng phát triển mạnh về nghiên cứu, chế tạo trang thiết bị công nghệ.

Chuyển hóa thông tin từ thế giới thực (bao gồm cả các thực thể vật lý, xã hội và sinh học) sang thế giới ảo với dung lượng thông tin rất lớn, tốc độ cao và đa dạng về mọi mặt của đời sống tự nhiên và xã hội gắn với thuật ngữ chuyên môn là "Dữ liệu lớn – Big data".

Thông tin trong thế giới vật lý ảo này được kết nối với nhau và được quản lý, khai thác sử dụng bằng những hệ thống công nghệ số liên kết để xóa nhòa ranh giới không gian địa lý trên phạm vi toàn cầu và với tốc độ thời gian thực. Chúng ta luôn có được cái nhìn từ tổng quát toàn diện đến chi tiết thế giới hiện tại. Đây có thể coi là lời giải thích cho cụm từ chuyển đổi số hay nói cách khác chuyển đổi số là một xu hướng tất yếu của CMCN 4.0.

Thế nào là chuyển đổi số (CĐS)

Khía cạnh công nghệ của CĐS là số hóa dữ liệu và ứng dụng dữ liệu dựa trên nền tảng kỹ thuật số. Công nghệ ở đây được hiểu là một hệ thống, trong đó có trang thiết bị kỹ thuật số, có các hệ thống xử lý kỹ thuật số, có dữ liệu đầu vào ở dạng số, có yêu tố con người, có yếu tố phương thức tổ chức hoạt động, liên kết, tác động qua lại lẫn nhau và cho kết quả đầu ra là những sản phẩm có hiệu suất lớn về giá trị.

Tuy nhiên với CĐS ở nghĩa rộng thì công nghệ không phải là yêu tố chính, mà là yếu tố kích thích. CĐS trong CMCN 4.0 là quá trình hoàn chỉnh áp dụng số hóa và ứng dụng số hóa ở một cấp độ cao hơn và có quy mô lớn, là quá trình thay đổi phương thức kiến tạo, quản lý, điều hành, sử dụng dữ liệu truyền thống sang một phương thức kiến tạo, quản lý, điều hành, sử dụng dữ liệu dựa trên những nền tảng kỹ thuật số mới như: Dữ liệu lớn, Internet vạn vật, Trí tuệ nhân tạo, Điện toán đám mây, dựa vào lực lượng sản xuất mới, tiến bộ như đề cập ở trên trong mọi mặt trong đời sống xã hội với mục tiêu tạo nên một bước chuyển lớn về năng suất lao động và tổng giá trị sản xuất cho xã hội theo hướng bền vững và tích cực. Tóm lại CĐS trong CMCN 4.0 là từ lực lượng sản xuất tiến bộ hiện đại, hình thành quan hệ sản xuất mới, phù hợp với mục tiêu xây dựng xã hội thịnh vượng, hạnh phúc và tiến bộ.

Chuyển đổi số ở nước ta

Tại Việt Nam, Đảng và Nhà nước ta đã sớm nhìn thấy cơ hội của CMCN 4.0 và đã ban hành nhiều văn bản quan trong về chủ động tham gia vào CMCN 4.0 (tiêu biểu là Nghị quyết 52 của Bộ Chính Trị năm 2019 về một số chủ trương, chính sách chủ động tham gia cuộc Cách mạng công nghiệp lần thứ tư; Quyết định 749 của Thủ tướng Chính phủ phê duyệt Chương trình Chuyển đổi số quốc gia đến năm 2025 định hướng đến năm 2030). Chương trình chuyển đổi số quôc gia theo Quyết định 749 nhằm xây dựng ba trụ cột chính là Chính phủ số, Xã hội số và Kinh tế số.

Hiện nay, cả trong công tác xây dựng/thực hiện chính sách lẫn trong hoạt động thực tiễn khái niệm CĐS đã trở nên phổ biến, lan tỏa trên toàn xã hội. Trong đó, doanh nghiệp và cơ quan quản lý nhà nước là những tổ chức tiên phong và xem CĐS là xu thế bắt buộc, tất yếu để nâng cao hiệu quả sản xuất kinh doanh, sức cạnh tranh và thực hiện thành công chiến lược xây dựng chính quyền số gắn với cải cách hành chính, xây dựng nền kinh tế số và xã hội thông minh trong thời kỳ cách mạng công nghiệp 4.0.

CĐS đối với doanh nghiệp và các cơ quan quản lý nhà nước giúp xây dựng nên những dữ liệu/tài nguyên số tạo thuận lợi cho việc quản lý, khai thác sử dụng. Dữ liệu số hóa đã trở thành tài sản của các doanh nghiệp và các cơ quan quản lý nhà nước. Dữ liệu ngày càng được bổ sung, liên kết, tích hợp với nhau giúp cải thiện, tăng cường hiệu năng quản lý nhà nước, quản trị xã hội theo hướng công khai, minh bạch, hiệu quả, tạo ra những thay đổi lớn trong chuỗi giá trị hàng hóa và cung ứng sản phẩm; tự động hóa, nâng cao hiệu suất công việc, hiệu quả sản xuất kinh doanh, năng lực cạnh tranh, gia tăng mạnh mẽ giá trị sản xuất, chất lượng dịch vụ công.

Ví dụ việc tạo lập dữ liệu về dân cư, dữ liệu về tư pháp, dữ liệu về doanh nghiệp, người nộp thuế ... và kết nối liên thông những dữ liệu này sẽ giúp người dân, doanh nghiệp thực hiện những dịch vụ công được nhanh chóng, thuận tiện, không phải xuất trình nhiều loại giấy tờ liên quan khi có nhu cầu sử dụng dịch vụ hành chính công, trong khi vẫn bảo đảm được quyền riêng tư về cá nhân. Các dịch vụ công trực tuyến về y tế, giáo dục, tư pháp, hải quan, thuế, đăng ký kinh doanh ... sẽ cung cấp cho người dân, doanh nghiệp những tiện ích nhanh chóng, hạn chế tiếp xúc trực tiếp (tránh tiêu cực và giảm thiểu chi phí đi lại) với cơ quan hành chính trong công việc, cuộc sống và hoạt động sản xuất, kinh doanh của mình, trong khi vẫn tuân thủ các thủ tục hành chính theo qui định của pháp luật. Việc xây dựng chính phủ số trong đó lấy người dân là đối tượng phục vụ và dựa vào dữ liệu số sẽ góp phần tăng cường hiệu lực, hiệu quả quản lý nhà nước. Mặt khác, tiến trình này giúp đẩy mạnh sự phát triển công nghệ thông tin, công nghệ số trong nước, giúp phát triển cộng đồng doanh nghiệp công nghệ và nguồn nhân lực công nghệ có chất lượng ở nước ta.

Các doanh nghiệp, khi áp dụng CĐS và tham gia vào nền kinh tế số sẽ xây dựng được các cách thức quản trị mới, hiệu quả hơn dựa vào tạo lập và khai thác nguồn thông tin số hóa. Họ cũng sẽ tiếp cận khách hàng và mở rộng thị trường nhanh hơn nhờ áp dụng thương mại điện tử và các chiến lược marketing tiên tiến dựa vào công nghệ phân tích dữ liệu lớn về xu hướng thị trường và nhu cầu ngày càng đa dạng của các tầng lớp khách hàng trong một xã hội số năng động và biến đông liên tục.

Có thể khẳng định, CMCN 4.0 và xu thế chuyển đổi số là tất yếu. Nó tạo ra vô vàn cơ hội cho mọi quốc gia, mọi đối tượng. Tuổi trẻ Việt Nam, đang được sống trong một đất nước năng động, hội nhập cần khẩn trương trang bị cho mình kiến thức và quyết tâm nắm bắt cơ hội, giành tấm vé lên chuyến tàu CMCN 4.0 đang chuyển động cực kỳ nhanh này.

TOÁN HỌC ĐẰNG SAU MÃ QR

NGUYỄN HOÀNG VŨ[1]

Mã QR đã trở nên rất quen thuộc trong đời sống hàng ngày quanh ta, mang lại sự tiện lợi lớn cho các hoạt động giao dịch cũng như trao đổi thông tin. Trong bài này, chúng ta hãy cùng tìm hiểu về vai trò của toán học trong quá trình xây dựng loại mã này.

1. Mã sửa lỗi và sự ra đời của mã Reed – Solomon

Một vấn đề không tránh khỏi khi thông tin được truyền tải từ nơi này đến nơi khác là việc nó có thể bị sai lệch trong quá trình truyền tin. Với các tín hiệu dạng nhị phân, một bit 0 có thể biến thành 1 và ngược lại. Xác suất của việc này phụ thuộc vào các đặc tính của đường truyền cũng như môi trường truyền dẫn.

Để đảm bảo thông tin có thể được kiểm chứng đúng/sai, ta cần ghi thông tin theo một loại mã có thể giúp ta khẳng định nó có bị lỗi hay không. Loại mã này gọi là mã phát hiện lỗi.

Một ví dụ về mã phát hiện lỗi là mã số của

[1] *Hà Nội.*

sách (ISBN) hoặc tạp chí (ISSN). Tạp chí Pi của chúng ta có mã ISSN là $2525-2437$. Trong 8 chữ số của mã, chữ số cuối cùng được dùng để phát hiện lỗi. Đầu tiên, ta lấy 7 chữ số đầu tiên, nhân mỗi một chữ số với số thứ tự tính từ bên phải (tức là 8, 7, 6, 5, ... 2) rồi tính tổng:

$$2\times 8+5\times 7+2\times 6+5\times 5+2\times 4$$
$$+4\times 3+3\times 2=114.$$

Lấy tổng này chia cho 11 rồi lại lấy 11 trừ đi số dư sẽ được chữ số cuối cùng (nếu giá trị này là 10 thì ký tự cuối cùng là X): 114 chia 11 dư 4; $11-4=7$.

Nếu chữ số hoặc ký tự cuối không khớp với 7 chữ số đầu tiên, ta có thể khẳng định rằng ISSN đã bị nhập sai. Cách làm này không chỉ phát hiện lỗi do một vị trí bị thay đổi mà còn phát hiện được trường hợp hai vị trí cạnh nhau bị hoán vị (một lỗi thường thấy khi con người nhập dữ liệu) thông qua hệ số khác nhau của các vị trí. Số 11 được chọn do nó là một số nguyên tố, không chia hết cho bất cứ hệ số nào trong phép nhân. Nếu ta chọn số 10, nó sẽ không phát hiện được lỗi nếu chữ số ở vị trí 5 bị thay đổi một lượng chẵn.

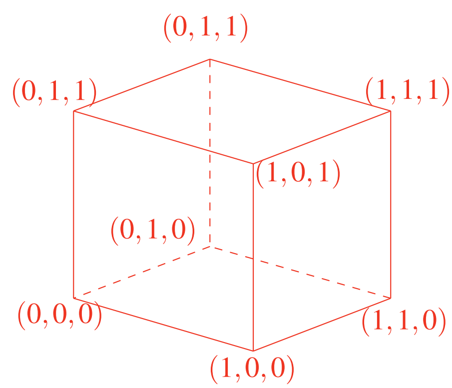
Trong nhiều trường hợp, chỉ phát hiện được lỗi là không đủ. Thay vì yêu cầu tín hiệu được gửi lại khi có lỗi, người ta muốn sử dụng một loại mã có thể giúp sửa lỗi khi lỗi được phát hiện. Muốn vậy, khi gửi tín hiệu, ta cần thêm một số thông tin khác để trợ giúp sửa lỗi.

Một cách đơn giản nhất là gửi thông tin lặp. Thay vì gửi một bit có giá trị là 0 hoặc 1, ta có thể gửi nhiều bit có cùng giá trị. Chẳng hạn, nếu tín hiệu nhận được là 1101110111, với quy định là 10 bit liền nhau sẽ có cùng một giá trị, thì ta có thể khẳng định bit được gửi đi là 1. Cách làm đơn giản này tuy có thể giúp sửa lỗi nhưng nó rất lãng phí đường truyền.

Vậy cần phải truyền thêm bao nhiêu dữ liệu và dữ liệu sửa lỗi cần phải có dạng như thế nào? Đây là những vấn đề thiết yếu của ngành lý thuyết mã hóa.

Năm 1948, những nghiên cứu của nhà toán học Claude Shannon về entropy của thông tin cùng lượng thông tin cần truyền tối thiểu để sửa lỗi đã thúc đẩy nhiều nghiên cứu về các phương thức truyền thông tin có sửa lỗi.

Một loại mã sửa lỗi quan trọng ra đời vào những năm 1950 là mã Hamming (theo tên của nhà toán học R. W. Hamming). Ta hãy xét một trường hợp rất đơn giản với dữ liệu được truyền theo 3 bit một, với 8 tổ hợp: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Nếu ta chọn cả 8 tổ hợp này để truyền tin thì khi có một bit bị lỗi, ta không thể tiến hành phát hiện lỗi. Một cách đơn giản là chọn các trạng thái mà khi bị lỗi, ta có thể biết được giá trị gốc của tín hiệu.



Hình 1. Các tổ hợp 3 bit nhị phân biểu diễn theo dạng hình lập phương. Các đỉnh kề nhau sẽ khác biệt một bit.

Ta hãy biểu diễn 8 tổ hợp trên 8 đỉnh của hình lập phương. Có thể thấy khi đi từ một đỉnh đến một đỉnh kề nó thì có đúng một bit bị thay đổi. Số cạnh trên đường đi từ một đỉnh đến một đỉnh khác cho ta biết số bit bị thay đổi giữa hai trạng thái. Đây được gọi là khoảng cách Hamming giữa chúng. Ví dụ khoảng cách Hamming giữa 000 và 101 là 2 còn khoảng cách giữa 000 và 111 là 3.

Giả sử trong môi trường truyền tin, tín hiệu 3 bit bị lỗi tối đa một bit. Để có thể xác định được trạng thái gốc từ trạng thái lỗi, ta chỉ có thể chọn các đỉnh có khoảng cách là 3. Do đó, chỉ có thể chọn 2 đỉnh là 000 và 111. Giả sử tín hiệu nhận được là 011, ta sẽ biết được tín hiệu gốc là 111 do khoảng cách Hamming giữa chúng là 1 còn khoảng cách Hamming giữa 011 và 000 là 2. Khi đó, 000 và 111 được gọi là các codeword (từ mã) cho việc truyền tín hiệu. Trong trường hợp này ta truyền đi tổng cộng 3 bit nhưng lượng thông tin chỉ có 2 trạng thái (ứng với 2^1 codeword) cho nên tốc độ truyền của ta là $1/3$. Nếu chọn tập hợp các đỉnh có khoảng cách giữa chúng là 2 (ví dụ 4 đỉnh 000, 011, 101, 110) để làm codeword thì ta chỉ có thể phát hiện lỗi chứ không sửa lỗi (ví dụ 001 có khoảng cách đến 000 và 011 đều là 1).

1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0	0
3	1	0	0	1	1	0	0
4	0	1	1	1	1	0	0
5	0	1	0	1	0	1	0
6	1	0	1	1	0	1	0
7	1	1	0	0	1	1	0
8	0	0	1	0	1	1	0
9	1	1	0	1	0	0	1
10	0	0	1	1	0	0	1
11	0	1	0	0	1	0	1
12	1	0	1	0	1	0	1
13	1	0	0	0	0	1	1
14	0	1	1	0	0	1	1
15	0	0	0	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1

Bảng 1. 16 codeword độ dài 7 bit.

Với mã Hamming, các quy tắc tính chẵn lẻ được tận dụng để thêm vào các thông tin cho phép sửa lỗi. Ta hãy xét một mã Hamming đơn giản với 7 bit $b_1, b_2, \ldots, b_7$ theo quy tắc sau:

- $b_1 + b_3 + b_5 + b_7$ là chẵn
- $b_2 + b_3 + b_6 + b_7$ là chẵn
- $b_4 + b_5 + b_6 + b_7$ là chẵn

Có tổng cộng 16 codeword độ dài 7 bit thỏa mãn các quy tắc trên (Bảng 1). Đồng thời, các codeword này đều có khoảng cách Hamming giữa chúng là 3.

Khi giải mã tín hiệu, các tín hiệu vi phạm những quy tắc chẵn lẻ sẽ bị coi là lỗi. Việc phát hiện lỗi nằm ở bit nào (giả sử chỉ có 1 bit bị lỗi) thì phức tạp hơn một chút. Tuy ta có thể dò xem codeword nào có khoảng cách ngắn nhất đến tín hiệu bị lỗi, việc này khá mất thời gian. Thay vì đó, người ta sử dụng dạng ma trận của các quy tắc được sử dụng để xây dựng mã (Bảng 2).

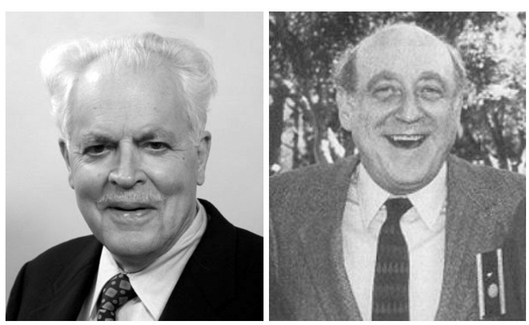
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Bảng 2. Ma trận ứng với 3 quy tắc trong mã Hamming mà ta đang xét.

Ví dụ, với chuỗi tín hiệu lỗi 1101101, nó vi phạm quy tắc 1 và 3. Ta cần tìm cột trong ma trận mà khi bit ứng với cột này bị lật ngược lại thì chỉ có quy tắc 1 và 3 bị ảnh hưởng còn quy tắc 2 không thay đổi. Nói cách khác, ta cần tìm cột có dạng:

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

tức là cột thứ 5 trong ma trận. Do đó, có thể kết luận bit thứ 5 bị lỗi và codeword gốc là 1101001.



Trái: Irving Reed (1923 – 2012). Phải: Gustave Solomon (1930 – 1996).

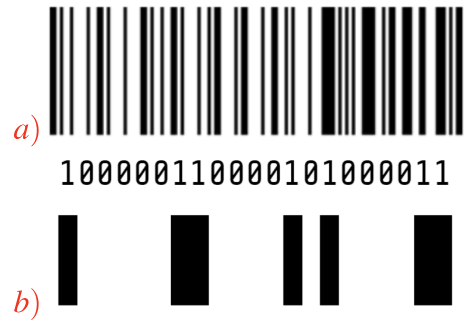
Mã Hamming 7 bit trên có $2^4 = 16$ codeword, tức là khi truyền đi 7 bit, ta thu được lượng thông tin tương đương với 4 bit. Tốc độ truyền ở đây là $4/7$. Tùy theo nhu cầu, người ta có thể thiết kế các mã Hamming với khoảng cách giữa các codeword lớn hơn để có thể sửa lỗi cho nhiều hơn 1 bit.

Sau khi Hamming đưa ra mã sửa lỗi thực tiễn đầu tiên sử dụng các kỹ thuật đại số tuyến tính như trên, cuộc đua giữa các nhà toán học để tìm ra những cách mã hóa tốt hơn trở nên sôi động. Một dấu ấn quan trọng của ngành mã hóa là sự ra đời của mã Reed – Solomon, được hai nhà toán học Irving Reed và Gustave Solomon công bố năm 1960. Mã này sử dụng các cấu trúc đại số phức tạp hơn bao gồm trường Galois cùng các đa thức trên trường này (xem chi tiết ở phần phụ lục). Với nhiều lợi thế so với mã Hamming về khả năng sửa lỗi cũng như tốc độ truyền, mã Reed – Solomon đã có nhiều ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực của đời sống. Một trong số những ứng dụng đó chính là mã QR.

2. Mã QR

Hình 2. Mã QR của Tạp chí Pi.

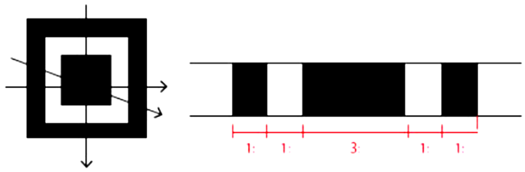
Mã QR (viết tắt của Quick Response) mà chúng ta quen thuộc được kỹ sư người Nhật, Masahiro Hara thiết kế năm 1994 khi làm tại công ty Denso Wave. Lúc đó, Masahiro được giao nhiệm vụ thiết kế một loại mã mới để thay thế mã dạng barcode (mã vạch) (Hình 3). Tuy mã barcode đã được dùng rất phổ biến trong cả sản xuất lẫn phân phối, nhưng vì nó ghi lại thông tin theo một chiều nên dung lượng thông tin của barcode (20 ký tự) đã không còn đáp ứng được nhu cầu thực tế với sự đa dạng hóa sản xuất đầu những năm 1990 ở Nhật. Để lưu trữ những thông tin dài, người ta thường phải sử dụng nhiều barcode cùng lúc và do đó phải tiến hành quét nhiều lần cho mỗi sản phẩm.



Hình 3. a) Mã barcode gồm cách vạch với độ dày và khoảng cách khác nhau. b) Thực chất của mã barcode là các cột màu trắng hoặc đen liên tiếp ứng với các bit 0 hoặc 1 để biểu diễn thông tin đã được chuyển từ dạng ký tự sang dạng bit.

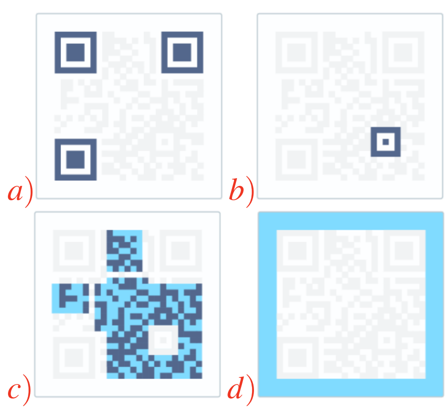
Để có thể chứa được nhiều thông tin hơn, Masahiro quyết định sử dụng mã dạng hình vuông (hai chiều không gian thay vì một chiều như barcode). Vấn đề đầu tiên là làm thế nào để thiết bị có thể nhận diện được vùng mã khi quét. Masahiro đã nảy ra ý tưởng đưa thêm các hình hình học vào các góc để giúp định vị mã.

Tuy nhiên, việc chọn hình hình học này thế nào cũng là vấn đề khó bởi trong thực tế có thể có các hình hình học khác ở gần mã của ta làm phần mềm không thể nhận diện được mã một cách chính xác. Sau một thời gian nghiên cứu về tỷ lệ giữa các vùng trắng/đen trong các nội dung ảnh hoặc văn bản trên báo, tạp chí, tờ rơi, thùng carton, và nhiều tài liệu khác; nhóm làm việc của Masahiro quyết định sử dụng hình ô vuông như ta thấy ở ba góc của mã QR ngày nay. Hình ô vuông này có tỷ lệ các phần đen/trắng khi quét theo các góc khác nhau đều là $1:1:3:1:1$. Theo kết quả thống kê thì tỷ lệ này ít xuất hiện nhất trên các vật liệu in thực tế nên mã QR sẽ không bị lẫn vào môi trường xung quanh và có thể được thiết bị quét nhận diện tự động nhanh chóng sau khi tiến hành quét.



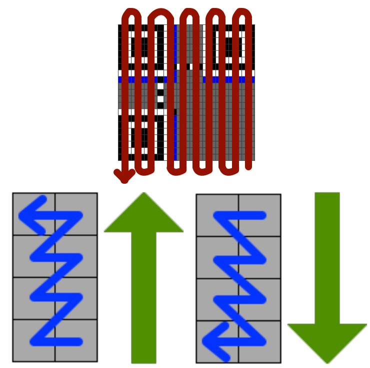
Hình 4. Ô vuông định vị cho mã QR và tỷ lệ đen/trắng khi quét.

Một vấn đề thực tế khác mà Masahiro muốn giải quyết với mã QR là tình trạng các vết bẩn làm sai lệch thông tin. Trong các môi trường như nhà xưởng, cửa hàng, ... mã đã in ra có thể dễ dàng bị dính các loại dầu, bụi đất, ... Để việc đọc mã có thể tiến hành thuận lợi trong các điều kiện này, ông sử dụng mã sửa lỗi Reed – Solomon để ghi thông tin thay vì chuyển trực tiếp từ dạng ký tự sang dạng bit như mã barcode. Do đó, thông tin bị sai lệch ở mức độ cho phép trong quá trình quét có thể được sửa lại thay vì phải quét lại hoặc làm sạch vùng chứa mã.



Hình 5. Một số thành phần của mã QR. a) Các ô định vị. b) Ô vuông gióng hàng. c) Phần ghi dữ liệu. d) Phần viền trắng.

Từ khi được Masahiro thiết kế đến nay, mã QR đã trải qua nhiều phiên bản. Về cơ bản, một mã QR gồm các nội dung như trong Hình 5. Ngoài các ô vuông định vị và phần thông tin sử dụng mã Reed – Solomon, mã QR còn gồm một số thành phần khác như ô vuông gióng hàng, phần viền trắng (để tách biệt với xung quanh) và các phần ghi một số thông tin khác về phiên bản mã và định dạng mã, ...



Hình 6. Thông tin sau khi được mã hóa theo mã Reed – Solomon sẽ được ghi theo các làn như hình vẽ (trên). Ứng với mỗi chiều trong làn, thông tin sẽ được ghi trong hai cột (dưới) với màu đen đại diện bit 1 còn màu trắng đại diện bit 0.

Khi mã hóa, các thông tin thực tế (chữ số, ký tự, ...) đã được chuyển thành dạng bit nhị phân theo quy tắc định trước (tùy theo phiên bản mã QR) sẽ được mã hóa thành mã Reed – Solomon dạng bit. Các bit được ghi lên trên hình vuông theo cách thức như trong Hình 6. Vị trí đen ứng với bit 1 còn vị trí trắng ứng với bit 0.

Khi thiết bị quét mã QR, phần mềm sẽ định vị mã dựa vào vị trí của các ô vuông đánh dấu và tiến hành quét phần dữ liệu. Dữ liệu sau khi quét được tiến hành giải mã theo thuật toán giải mã của mã Reed – Solomon. Do khả năng sửa lỗi của mã này nên nếu quá trình quét có một số bit bị nhận diện sai (đen thành trắng hoặc trắng thành đen), phần mềm vẫn có thể tiến hành sửa lỗi để cho ra thông tin ban đầu. Nếu số lượng lỗi vượt quá khả năng sửa lỗi của thuật toán, người dùng phải tiến hành quét lại.

Hình 7a. Masahiro và mã QR do ông phát minh.

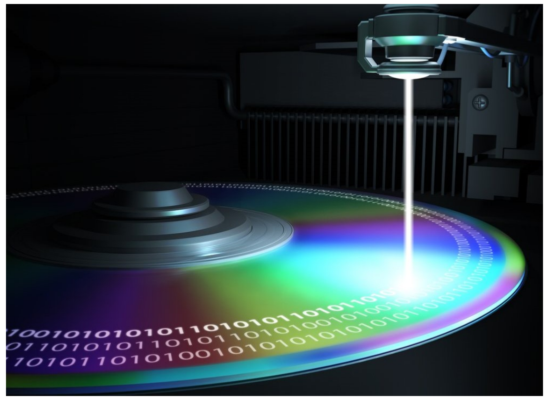
Hình 7b. Masahiro có ý tưởng về các ô đen trắng cho mã QR từ trò chơi Go (cờ vây) mà ông hay chơi trong giờ nghỉ.

Ngày nay, với sự phổ biến của các thiết bị điện thoại thông minh, mã QR đã xuất hiện không chỉ ở trong các dây chuyền sản xuất mà còn được ứng dụng ở rất nhiều hoạt động của đời sống trên thế giới, từ thanh toán ngân hàng đến các giao dịch ở cửa hàng, siêu thị, bệnh viện, phương tiện công cộng, ... Nó cũng có vai trò quan trọng trong việc truy vết COVID 19 ở nhiều nơi trên thế giới trong thời gian vừa qua; bản thân Masahiro cũng nói rằng ông cảm thấy rất hài lòng về sự đóng góp này của mã QR.

Hình 8. Việc sử dụng mã QR giúp tiến hành các giao dịch không cần tiền mặt chỉ với điện thoại di động.

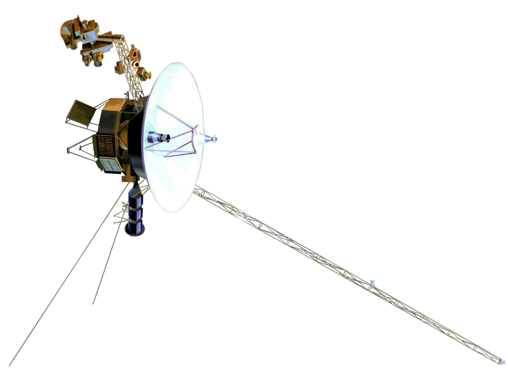
3. Một số ứng dụng khác của mã Reed – Solomon

Mã Reed – Solomon đã từ lâu được sử dụng để mã hóa dữ liệu cho các loại đĩa lưu trữ thường thấy trong đời sống như CD, DVD, MiniDisc và Blu–ray. Dữ liệu nhị phân sau khi chuyển thành mã Reed – Solomon sẽ được ghi lên bề mặt đĩa tạo thành các rãnh lồi lõm. Khi đầu đọc đọc lại các bit này, chúng sẽ được giải mã theo thuật toán giải mã tương ứng để cho ra dữ liệu ban đầu. Do khả năng khôi phục lỗi của mã Reed – Solomon, ngay cả khi có lỗi lúc đọc (thường do bề mặt đĩa bị bụi, bẩn, ...), hệ thống vẫn có thể khôi phục dữ liệu gốc.



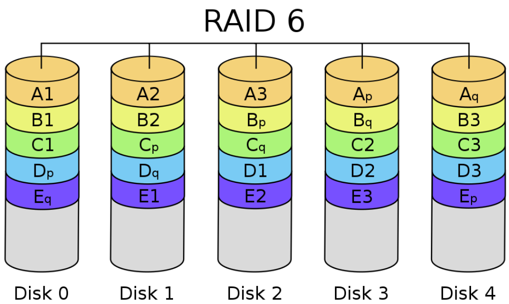
Hình 9. Dữ liệu được mã hóa thành mã Reed - Solomon trước khi ghi trên bề mặt của các đĩa quang học.

Mã Reed – Solomon cũng được sử dụng để mã hóa dữ liệu cho việc truyền tin của ngành viễn thông, theo dây cáp lẫn vô tuyến. Đặc biệt, mã này được sử dụng trên các thiết bị thăm dò không gian của NASA như tàu thăm dò Voyager 1 và nhiều tàu thăm dò sau đó.



Hình 10. Tàu thăm dò Voyager 1 của NASA.

Mã Reed – Solomon còn xuất hiện ở các hệ thống lưu trữ trong trung tâm dữ liệu. Trong kết nối ổ cứng theo dạng RAID 6, các mã Reed – Solomon để sửa lỗi cho dữ liệu của mỗi ổ cứng sẽ được hệ thống phân bố ở các ổ khác. Nếu một ổ cứng bị hỏng, dữ liệu có thể được khôi phục từ dữ liệu cùng các mã Reed – Solomon ở trong các ổ cứng còn lại.



Hình 11. Lưu trữ dữ liệu trên 5 ổ cứng theo dạng RAID 6. Dữ liệu cũng như thông tin sửa lỗi được chia ra để lưu trữ ở các ổ cứng khác nhau để cho phép phục hồi trong trường hợp một trong các ổ cứng này bị hỏng.

4. Lời kết

Sự xuất hiện của trường Galois dưới dạng cơ sở lý thuyết của mã Reed – Solomon cho thấy ngay cả những khái niệm trừu tượng và phức tạp trong toán học cũng có thể đóng vai trò quan trọng trong ứng dụng thực tiễn nếu ta tiến hành mô hình hóa bài toán một cách phù hợp. Mã Reed – Solomon cũng như các ứng dụng đa dạng của nó sẽ không xuất hiện nếu không có những nghiên cứu toán học thuần túy từ hơn một thế kỷ trước đó của Galois. Ngày nay, lĩnh vực lý thuyết mã hóa vẫn còn rất nhiều vấn đề toán học thú vị khác với nhiều cơ hội cho những ai muốn tìm tòi khám phá.

Phụ lục. Trường Galois và mã Reed – Solomon

Trong đại số, trường là một tập hợp mà trên đó có thể định nghĩa phép cộng và phép nhân với các tính chất giao hoán và kết hợp. Đồng thời, trong trường phải tồn tại phần tử 0 và 1 sao cho với phần tử a bất kỳ của trường thì $a+0=a$; $a\cdot 1=1$. Mỗi phần tử của trường đều phải có phần tử đối (với phép cộng) và phần tử nghịch đảo (với phép nhân, trừ trường hợp nghịch đảo của 0) cũng nằm trong trường này.

Ví dụ, tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ không phải là một trường vì nghịch đảo của một số nguyên có thể không phải là một số nguyên. Trong khi đó, tập hợp các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ hay tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ đều là một trường.

Trường Galois (còn gọi là trường hữu hạn), được đặt tên theo nhà toán học Evariste Galois, là một trường có số phần tử là hữu hạn. Trường Galois $GF(q)$ (có q phần tử) luôn chứa một phần tử α sao cho cả các phần tử khác 0 của trường đều là các lũy thừa của α: $\{1,\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^{q-2}\}$. Khi đó ta cũng có $\alpha^{q-1}=1$.

Thông qua các đa thức, người ta có thể liên hệ trực tiếp trường Galois $GF(2^n)$ với tập hợp các số nhị phân có n bit. Đây cũng là cách mã Reed – Solomon cùng nhiều mã sửa lỗi khác được xây dựng.

Với $n=1$, ta có trường Galois $GF(2)$ gồm hai phần tử $\{0,1\}$ cùng phép cộng và phép nhân như trong hệ cơ số nhị phân nhưng phép cộng ở đây không có nhớ: $1+1=0$.

Với $n>1$, ta hãy thử xét trường hợp $n=3$. Tập hợp các số nhị phân 3 bit sẽ gồm $\{000,001,010,100,011,110,101,111\}$. Với mỗi số nhị phân này, ta có một đa thức tương ứng trong đó các bit được dùng làm hệ số của các đơn thức trong đa thức. Ví dụ 111 ứng với x^2+x+1; 011 ứng với $x+1$, ...

Ta coi các hệ số của các đa thức trên là các phần tử của $GF(2)$. Do đó, phép cộng đa thức sẽ không có nhớ, chẳng hạn:

$$x^2+x^2=(1+1)x^2=0,$$

$$(x^2+x)+x=x^2+(1+1)x=x^2+0=x^2.$$

Để thu được trường hữu hạn, thay vì sử dụng phép nhân đa thức thông thường, người ta sử dụng phép nhân modulo một đa thức đặc trưng (tức là tiến hành nhân thông thường sau đó chia cho đa thức đặc trưng để lấy số dư). Với $GF(2^3)$, một đa thức đặc trưng của nó là x^3+x^2+1. Ta có thể biểu diễn các đa thức khác theo số dư khi chia cho đa thức này:

$$\begin{aligned}
&x^3 \equiv x+1,\\
&x^4 \equiv x(x^3) \equiv x(x+1) \equiv x^2+x,\\
&x^5 \equiv x(x^4) \equiv x(x^2+x) \equiv x^3+x^2 \equiv x^2+x+1,\\
&x^6 \equiv x(x^5) \equiv x(x^2+x+1) \equiv x^3+x^2+x\\
&\quad \equiv (x+1)+x^2+x \equiv x^2+1,\\
&x^7 \equiv x(x^6) \equiv x^3+x \equiv x+(x+1) \equiv 1 \equiv x^0.
\end{aligned}$$

Do tính tuần hoàn của các biểu diễn này nên kết quả phép nhân luôn cho ta một đa thức trong 8 đa thức ban đầu và ta thu được một trường Galois $GF(2^3)$. Người ta chứng minh được rằng cho trường hợp $n > 1$ bất kỳ, luôn có thể tìm được đa thức đặc trưng để xây dựng trường Galois cùng phần tử α tương ứng của trường này (chú ý rằng phép toán lũy thừa trên trường cũng tuân theo quy tắc nhân modulo trên).

Trong mã Reed – Solomon, việc mã hóa được tiến hành cho từng gói gồm k phần tử của $GF(2^n)$. Nói cách khác, quá trình mã hóa được tiến hành cùng lúc cho k số nhị phân, mỗi số n bit. Ký hiệu các phần tử của gói là $m_0, m_1, \ldots, m_{k-1}$. Ta xây dựng được một đa thức:

$$P(x) = m_0 + m_1x + \cdots + m_{k-1}x^{k-1}.$$

Chú ý rằng đa thức này khác với những đa thức đã nói ở trên. Những đa thức ở phía trên có hệ số là 0 hoặc 1 (phần tử của $GF(2)$) còn đa thức $P(x)$ của ta có các hệ số m_i là các phần tử của $GF(2^n)$. Một codeword được tạo ra bằng cách tính các giá trị của $P(x)$ cho từng phần tử của trường Galois $GF(2^n)$:

$$\begin{aligned}
c &= (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{q-1})\\
&= \left[P(0), P(\alpha), P(\alpha^2), \ldots, P(\alpha^{q-1})\right], q = 2^n,
\end{aligned}$$

Do mỗi phần tử m_i có thể nhận một trong $q = 2^n$ giá trị nên có tổng cộng q^k codeword trong mã Reed – Solomon. Ứng với mỗi codeword, ta có một hệ phương trình:

$$\begin{aligned}
P(0) &= m_0,\\
P(\alpha) &= m_0 + m_1\alpha + m_2\alpha^2 + \cdots\\
&\quad + m_{k-1}\alpha^{k-1},\\
P(\alpha^2) &= m_0 + m_1\alpha^2 + m_2\alpha^4 + \cdots\\
&\quad + m_{k-1}\alpha^{2(k-1)},\\
&\cdots\\
P(\alpha^{q-1}) &= m_0 + m_1\alpha^{q-1} + m_2\alpha^{2(q-1)}\\
&\quad + \cdots + m_{k-1}\alpha^{(k-1)(q-1)}.
\end{aligned}$$

Chọn bất kỳ k trong số q phương trình trên, ta được một hệ phương trình mà từ đó có thể giải để tìm các m_i.

Trong trường hợp đường truyền bị lỗi, giả sử có t trong số q phương trình bị lỗi (giá trị $P(\alpha^i)$ tương ứng bị lỗi). Khi đó, nếu ta thử tất cả các tổ hợp có thể gồm k phương trình từ q phương trình, sẽ có $\binom{t+k-1}{k}$ hệ phương trình cho kết quả m_i khác với các hệ phương trình còn lại. Do đó, việc sửa lỗi có thể được tiến hành bằng cách lấy kết quả chiếm đa số, với điều kiện là $\binom{t+k-1}{k} < \binom{q-t}{k}$. Số lỗi lớn nhất có thể sửa là số nguyên t nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}(q-k+1)$.

Việc thử các tổ hợp hệ phương trình khác nhau theo đề xuất ban đầu của Reed và Solomon là tương đối phức tạp về mặt cài đặt trong thực tế nên sau đó người ta đã đưa ra hai hướng tiếp cận khác để tạo mã Reed – Solomon, một sử dụng đa thức sinh và một sử dụng biến đổi Fourier trên trường Galois (Wicker, 1994).

Tài liệu tham khảo

[1] Aktaş, C. (2017). *The evolution and emergence of QR codes*. Cambridge Scholars Publishing.

[2] Reed, I. S., & Solomon, G. (1960). *Polynomial Codes Over Certain Finite Fields*. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 8(2), 300 – 304.

[3] Wicker, S. B., & Bhargava, V. K. (1994). *Reed–Solomon codes and their applications*. IEEE.

DẢI BỆN: TỪ TÔ-PÔ ĐẾN MẬT MÃ[1]

LUIS PARIS[2]

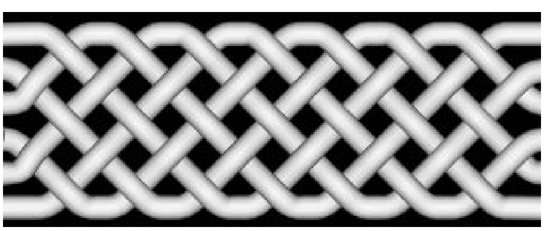
(Người dịch: Nguyễn Hoàng Thạch[3])

1. Mở đầu

Từ dải bện...

Dải bện đã tồn tại từ nhiều thế kỷ và được sử dụng khắp nơi vì mục đích trang trí cũng như trong đời sống, chẳng hạn trong sản xuất dây thừng hoặc dây cáp. Một dải bện có thể gồm ba sợi, hay cọng, được tết với nhau: cọng trái được vắt qua cọng giữa, rồi đến cọng phải, rồi lại cọng trái, rồi lại cọng phải, cứ thế lặp đi lặp lại (xem Hình 1). Nhưng "dải bện" cũng được dùng để chỉ mọi sự đan hay tết của nhiều cọng dây theo một cách nhất định. Trong Hình 2 và Hình 3 là một số thí dụ về các dải bện trang trí.

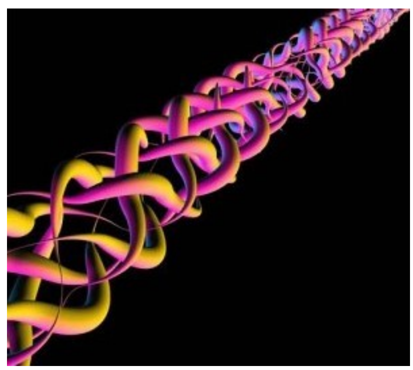
Hình 1. Dải bện cổ điển với ba cọng dây.



Hình 2. Một dải bện trang trí.

... đến lý thuyết bện

Các nhà toán học mô tả các dải bện bằng các mô hình trừu tượng, những đối tượng trung tâm của một lý thuyết toán học có tên "lý thuyết bện". Lý thuyết này đóng một vai trò trung tâm trong toán học và len lỏi vào trong nhiều ngành toán học, cũng như các khoa học khác như vật lý, sinh học, tin học và mật mã.



Hình 3. Một dải bện trang trí khác.

Bài viết này nhằm đem đến cho độc giả không làm toán một cái nhìn bao quát về lý thuyết bện. Chúng tôi sẽ đưa ra định nghĩa bện trong toán học, sau đó minh họa ứng dụng của chúng trong ba lĩnh vực: lý thuyết nút (toán học), lý thuyết thuật toán (toán học và tin học), và lý thuyết mật mã (toán học,

---

[1] *Images des Mathématiques, http://images.math.cnrs.fr/Les-tresses-de-la-topologie-a-la-cryptographie.html.*

[2] *Giáo sư, Đại học Bourgogne, Pháp.*

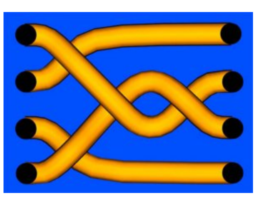
[3] *Viện Toán học.*

tin học và viễn thông). Ngoài ra, chúng còn nhiều ứng dụng và tương tác qua lại khác với các phần khác của toán học, và với cả, chẳng hạn, vật lý thiên văn. Thực vậy, các đường từ trường trong khí quyển Mặt Trời tạo thành các dải bện mà độ phức tạp có liên hệ trực tiếp đến cường độ của từ trường.

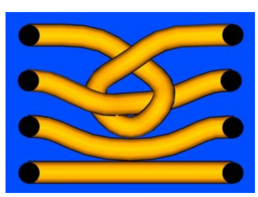
2. Dải bện trong toán học

Thế nào là một dải bện trong toán học?

Lý thuyết bện tách khái niệm bện khỏi những dải bện mà ta vẫn thường nghĩ đến. Trước tiên, ta cố định một số tự nhiên n. Để tiện trình bày, ta sẽ lấy $n = 4$, mặc dù tất cả những gì được mô tả tiếp theo đây đúng với mọi giá trị của n. Chúng ta lấy hai tập hợp, mỗi tập hợp có 4 vật (chẳng hạn những cái đinh) và để chúng trên bàn thành hai hàng dọc đối diện nhau (các chấm đen trong hình). Sử dụng bốn sợi dây, mà ta gọi là cọng, ta nối mỗi vật trong tập hợp thứ nhất với một vật trong tập hợp thứ hai. Một kết nối như vậy được gọi là một dải bện. Các cọng có thể vắt qua nhau, nhưng không được vòng ngược lại. Kết nối trong Hình 5 không phải là một dải bện (theo nghĩa toán học).

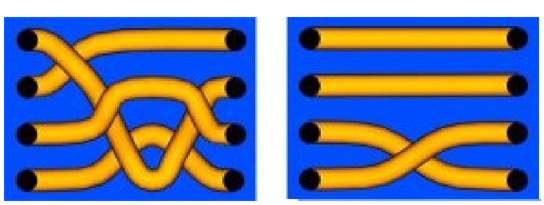


Hình 4. Một dải bện toán học.

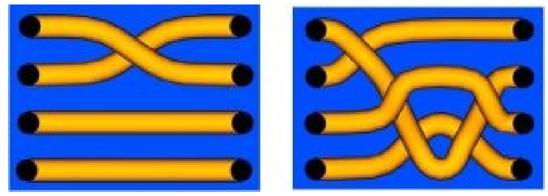


Hình 5. Đây không phải một dải bện.

Trong Hình 6 là hai dải bện khác nhau. Trong khi đó, hai dải bện trong Hình 7 là giống nhau, vì chúng có thể nhận được từ nhau bằng cách "xê dịch" các cọng.

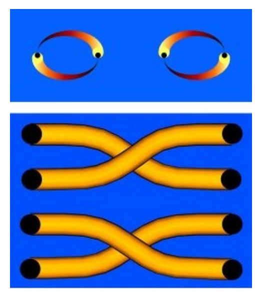


Hình 6. Hai dải bện khác nhau.



Hình 7. Hai dải bện giống nhau.

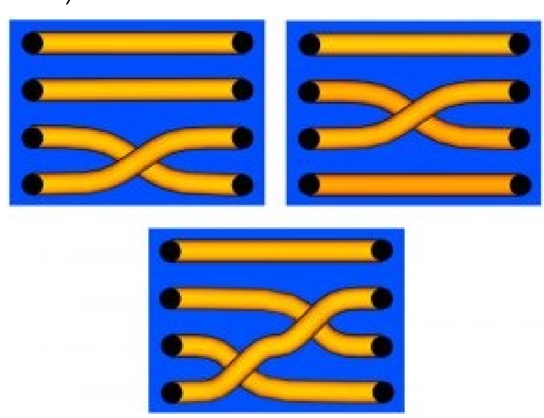
Một dải bện cũng có thể được coi như một chuỗi các đường đi của 4 hạt không gặp nhau. Ở đây, tập hợp các điểm xuất phát trùng với tập hợp các điểm đến. Thí dụ, các quỹ đạo của 4 hạt được thể hiện ở nửa trên của Hình 8 tương ứng với dải bện ở nửa dưới. Một cách nôm na, các dải bện có thể được xem như những điệu nhảy mà ở đó, mỗi vũ công kết thúc ở vị trí của một vũ công khác.



Hình 8. Hai cách nhìn của cùng một dải bện.

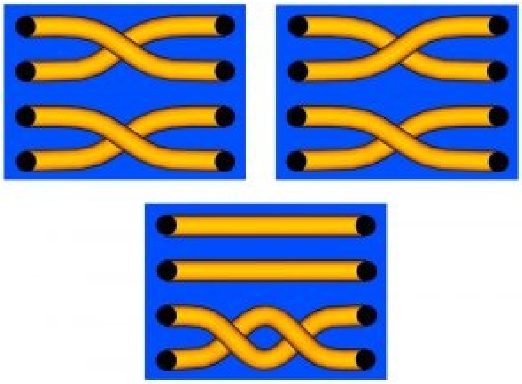
Ghép các dải bện

Từ hai dải bện α và β, ta có thể xây dựng một phép thứ ba, ký hiệu là $\alpha\beta$ và được gọi là dải bện hợp thành của α và β, bằng cách ghép chúng với nhau. Trong Hình 9 là hai dải bện (bên trên) và hợp thành của chúng (bên dưới).



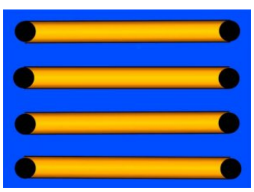
Hình 9. Hợp thành của hai dải bện.

Một thí dụ khác về phép hợp thành được minh họa trong Hình 10.



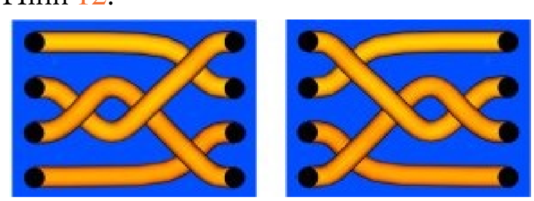
Hình 10. Hợp thành của hai dải bện khác.

Bạn đọc có kinh nghiệm hẳn đã để ý rằng dải bện $\alpha\beta$ có thể khác với dải bện $\beta\alpha$: điều này xảy ra với thí dụ trong Hình 9, nhưng không đúng với thí dụ trong Hình 10.
Dải bện trong Hình 11 được gọi là *dải bện tầm thường*. Dễ thấy hợp của một dải bện α bất kỳ với dải bện tầm thường, từ bên trái hay từ bên phải, vẫn là α.



Hình 11. Dải bện tầm thường.

Nếu ta đặt một tấm gương vuông góc với mặt bàn ở cạnh hàng đinh thứ hai, ảnh phản chiếu trong gương của dải bện α được gọi là dải bện đối xứng của α (xem Hình 12). Hợp thành của một dải bện với dải bện đối xứng của nó là dải bện tầm thường. Bạn đọc có thể dễ dàng kiểm chứng với thí dụ trong Hình 12.



Hình 12. Một dải bện và dải bện đối xứng của nó.

Từ dải bện đến nhóm bện

Những dải bện, như chúng ta vừa định nghĩa, cùng với phép hợp thành tạo thành cái mà các nhà toán học gọi là *nhóm bện*. Chúng ta có một nhóm bện [gồm các dải bện có] hai cọng, một nhóm bện ba cọng, v.v. Nhóm bện một cọng chỉ gồm dải bện tầm thường, vì một cọng thì không thể được bện, dù nó có thể được buộc thắt nút (xem Hình 13).

Hình 13. Cọng buộc thắt nút.

Phép hợp thành của các dải bện tuân theo một số quy tắc mà đối với các nhà toán học cũng quan trọng không kém, nếu không nói là hơn, chính các dải bện. Nguồn gốc của lý thuyết bện.

Emil Artin

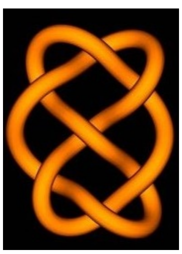
Emil Artin (1898 – 1962) là nhà toán học người Áo. Ông làm việc ở Đức (chủ yếu ở Hamburg) đến năm 1937. Ông sang Mỹ và làm giáo sư tại Đại học Indiana từ năm 1938 đến năm 1946, rồi tại Đại học Princeton từ năm 1946 đến năm 1958. Ông là một trong những nhà đại số xuất sắc nhất thế kỷ 20. Đặc biệt, ông là người khai sinh lý thuyết bện.

Nghiên cứu toán học về các dải bện thường được cho là bắt đầu từ một bài báo năm 1925 của Emil Artin, trong đó ông mô tả khái niệm dải bện dưới nhiều khía cạnh khác nhau, cái thì hiển nhiên như "một chuỗi các cọng dây được kéo căng và quấn vào nhau", những cái khác toán học hơn, chẳng hạn như nhóm được cho bởi "các phần tử sinh và các quan hệ", hay như "nhóm các tự đẳng cấu của một nhóm tự do", hay như "nhóm các phép đẳng luân của một đĩa bị thủng". Chính sự đa dạng của các cách tiếp cận khác nhau này tạo nên tính hấp dẫn của các nhóm bện.

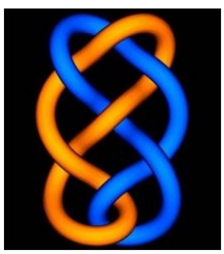
3. Từ dải bện đến lý thuyết nút

Nút trong toán học là gì?

Một *nút* trong toán học là một vòng dây khép kín (không có hai đầu, xem Hình 14). Một *cuộn dây gồm hai thành phần* được tạo bởi hai vòng dây khép kín (xem Hình 15), một *cuộn dây gồm ba thành phần* được tạo bởi ba vòng dây khép kín, v.v. *Lý thuyết nút* là nhánh của tô–pô nghiên cứu các nút và các cuộn. Trong tô–pô, hình cầu không phân biệt với hình lập phương, còn cái bánh vòng và tách trà là một. Người ta không xét đến các thuộc tính như độ dài hay góc, mục đích là hiểu các tính chất bất biến đối với sự xoắn, kéo dãn hay nén.



Hình 14. Một nút.

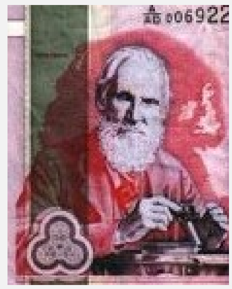


Hình 15. Một cuộn dây gồm hai thành phần.

Ngoài toán học, đặc biệt là tô–pô, lý thuyết nút có những ứng dụng trong các bài toán sinh học và hóa học. Chẳng hạn, nó được dùng trong nghiên cứu các phân tử đồng phân (có cùng công thức hóa học nhưng được sắp xếp khác nhau) hoặc trong nghiên cứu về tác động của một số enzyme đối với ADN.

Nguồn gốc của lý thuyết nút

Đóng góp đáng kể đầu tiên vào lý thuyết nút có lẽ là của Sir William Thomson (tức Kelvin) với thuyết "xoáy nguyên tử" của ông. Năm 1867, sau khi quan sát các vòng khói được tạo ra từ thí nghiệm của Peter Tait, nhà vật lý người Scotland, Thomson kết luận rằng các nguyên tử là những nút của "những cuộn xoáy trong ê–te truyền ánh sáng". Theo đó, các nguyên tố hóa học ứng với các nút hoặc cuộn dây. Từ ý tưởng này, Peter Tait bắt đầu phân loại các nút, với niềm tin rằng ông đang tạo ra một bảng nguyên tố hóa học.



William Thomson.

Sir William Thomson (1824 – 1907) là nhà vật lý học, nhà toán học và kỹ sư người Scotland. Ông được coi là một trong những nhà vật lý học hàng đầu của thế kỷ 19.

Bài toán phân biệt hai nút

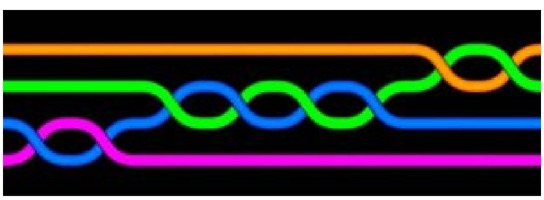
Bài toán trung tâm của lý thuyết nút là phân biệt, và xa hơn là phân loại, các nút. Phân biệt có nghĩa là quyết định xem liệu hai hình vẽ nút (hoặc cuộn dây) có biểu diễn cùng một nút (hoặc cuộn dây) hay không. Trong những năm 1920, hai nhà toán học Mỹ Alexander và Briggs và nhà toán học Đức Reidemeister, độc lập với nhau, đề xuất một thuật toán giải quyết một phần bài toán này. Thuật toán này có thể trả lời khẳng định nếu hai hình vẽ biểu diễn cùng một nút (hoặc cuộn), nhưng nó không trả lời trong trường hợp ngược lại. Nói cách khác, ta có thể nói hai nút giống nhau hay không, nhưng không thể nói hai nút có khác nhau hay không. Độc giả có thể cảm thấy điều này thật vô lý, nhưng nó là một nghịch lý thường thấy trong toán học. Hãy tưởng tượng bạn đang chờ ai đó. Bạn tự nhủ: "Nếu cậu ấy đến, đó đúng là một người bạn." Nhưng nếu người đó không đến, bạn sẽ không biết đó có phải một người bạn hay không.

Để phân biệt các nút, người ta sử dụng những cái mà các nhà toán học gọi là những *bất biến*. Người ta gán cho mỗi hình vẽ cái nút một đối tượng (thường là một số hoặc một đa thức) chỉ phụ thuộc vào cái nút mà không phụ thuộc vào cách nó được vẽ. Nếu hai nút có những bất biến khác nhau thì chúng là hai nút khác nhau. Nếu không, ta chưa thể kết luận được gì.

Alexander.

James W. Alexander (1888 – 1971) là một nhà toán học nổi tiếng người Mỹ. Ông là một trong những người tiên phong của tô–pô đại số và lý thuyết nút. Ông cũng là một nhà leo núi cừ khôi, từng chinh phục được nhiều đỉnh cao. Về cuối đời, ông trở nên đơn độc và ẩn dật. Ông được biết đến như một người theo chủ nghĩa xã hội tích cực và danh tiếng của ông khiến ông bị chủ nghĩa MacCarthy để ý. Ông không xuất hiện trước công chúng kể từ năm 1954, sau khi ký tên vào một bức thư ủng hộ Robert Oppenheimer.

Từ dải bện đến nút



Hình 16. Dải bện đóng.

Từ một dải bện, ta có thể tạo ra một cuộn dây (hoặc một nút) bằng cách nối các đầu của dải bện với nhau, như minh họa trong Hình 16. Một cuộn dây như vậy được gọi là một dải bện đóng. Vào năm 1923 Alexander đã chứng minh rằng mọi cuộn dây đều có thể được tạo ra theo cách này. Bạn đọc có thể thử với các thí dụ trong Hình 14 và Hình 15. Sau đó, Markov đưa ra một thuật toán không hoàn toàn để xác định liệu hai dải bện cho trước có tạo thành cùng một cuộn dây (nhưng nó có thể không trả lời). Đây là hai kết quả cốt yếu để áp dụng lý thuyết bện vào các nút. Đặc biệt, chúng là điểm bắt đầu của sự đổi mới sâu sắc trong lý thuyết nút trong thập niên 1980, với những công trình của Jones và những bất biến được định nghĩa từ lý thuyết bện.

Jones.

Vaughan F.R. Jones (1952 – 2020) là nhà toán học nổi tiếng người New Zealand. Ông được trao Huy chương Fields năm 1990. Các công trình của ông về bất biến nút dẫn tới những lời giải bất ngờ cho nhiều bài toán cổ điển trong lý thuyết nút và tô–pô thấp chiều.

Phân biệt hai dải bện

Khác với nút, với dải bện tồn tại các thuật toán để xác định xem hai dải bện có giống nhau hay không. Nhiều thuật toán trong số này rất nhanh và đã được đưa vào các phần mềm tính toán như GAP[4] hay MAGMA[5]. Sự tồn tại của các thuật toán này liên quan đến việc các dải bện không chỉ là những đối tượng tô–pô, mà còn là những *đối tượng đại số*, bởi như đã thấy, ta có thể áp dụng phép hợp thành lên chúng. Dưới đây là một cách xác định liệu hai dải bện có bằng nhau hay không. Rất có thể quá trình này đã được Artin biết đến từ năm 1925.

Xét hai (hình) dải bện α và β.

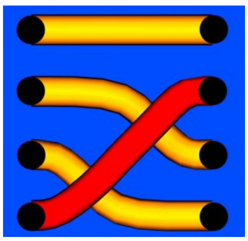
Bước 1: Gọi $\tilde{\beta}$ là dải bện đối xứng của β. Để ý rằng α và β là cùng một dải bện nếu và chỉ nếu dải bện hợp thành $\alpha\tilde{\beta}$ là tầm thường. Đặt $\gamma = \alpha\tilde{\beta}$. Bài toán trở thành xác định xem

[4] *http://www.gap-system.org/*

[5] *http://magma.maths.usyd.edu.au/*

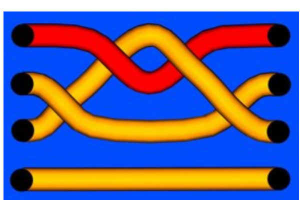
γ có phải dải bện tầm thường hay không.

Bước 2: Để γ là dải bện tầm thường thì cọng đi từ đinh trên cùng bên trái phải nối đến đinh trên cùng bên phải, cọng từ đinh thứ hai bên trái nối đến đinh thứ hai bên phải, v.v. Ta kiểm tra điều này với γ. Nếu γ không thỏa mãn thì nó không tầm thường. Thí dụ, dải bện trong Hình 17 không tầm thường vì cọng đi từ đinh dưới cùng bên trái nối đến đinh thứ hai từ trên xuống ở bên phải. Còn nếu γ thỏa mãn, ta chuyển sang bước 3.



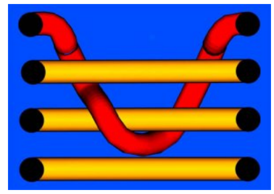
Hình 17. Một dải bện không tầm thường.

Bước 3: Nếu bỏ đi cọng dây trên cùng, ta nhận được một dải bện γ' gồm 3 cọng (có thể làm điều này vì cọng dây nối đinh trên cùng bên trái với đinh trên cùng bên phải). Giả sử ta đã biết cách phân biệt hai dải bện gồm 3 cọng. Để γ là tầm thường thì γ' cũng phải tầm thường. Thí dụ, dải bện γ trong Hình 18 không tầm thường vì γ' không tầm thường. Nếu γ' là tầm thường, ta chuyển sang bước 4.



Hình 18. Xóa một cọng dây.

Bước 4: Tới bước này, ba cọng bên dưới của dải bện của chúng ta là các đoạn thẳng, trong khi cọng bị xóa vắt qua chúng, như minh họa trong Hình 19. Tới đây cần những công cụ toán học phức tạp hơn, nhưng bạn đọc có thể nắm được rằng người ta biết cách xử lý trường hợp này một cách không quá khó khăn, nhưng cần những công cụ mà trong khuôn khổ bài viết này không đủ chỗ để giải thích.



Hình 19. Một cọng vắt qua các cọng khác.

4. Từ dải bện đến thuật toán

Thuật toán và ngôn ngữ

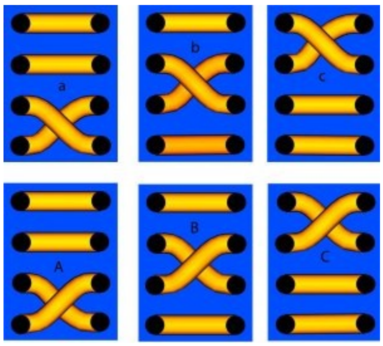
Nếu bạn chỉ đường cho một người khách đến chơi nhà mình, bạn đang tạo ra (và cho thực hiện) một thuật toán đấy! Một *thuật toán* là một dãy các chỉ dẫn (toán học hoặc không) được định nghĩa rõ ràng nhằm thực hiện một công việc nào đó. Nếu thuật toán đúng, kết quả nhận được sẽ là kết quả mong muốn và vị khách sẽ tìm được đường đến đúng nhà bạn. Nếu thuật toán sai, kết quả có thể ngoài dự kiến. Trong tin học, thuật toán cho phương pháp, và việc lập trình chuyển nó thành dạng các câu lệnh cho máy tính.

Một khái niệm quan trọng trong khoa học thuật toán là từ và ngôn ngữ. Với một nhà nghiên cứu thuật toán, một *bảng chữ cái* là một tập hợp hữu hạn mà các phần tử được gọi là các chữ cái, một từ là một dãy hữu hạn các chữ cái, và một *ngôn ngữ* là một tập hợp các từ. Thí dụ, tập hợp $\mathscr{A} = \{a, b\}$ là một bảng chữ cái, các dãy $b, ab, aab, aaab$ là các từ, và tập hợp $\{b, ab, aab, aaab, aaaab, \dots\}$ là một ngôn ngữ. Một thí dụ khác: ADN là thuật toán nền tảng để xây dựng nên sự sống. Mỗi phân tử ADN là một chuỗi được tạo thành từ bốn phần tử: adenine (A), thymine (T), cytosine (C) và guanine (G). Số phần tử cũng như thứ tự sắp xếp của chúng sẽ quyết định tạo ra con muỗi hay con sư tử. Một cách ngắn gọn: mỗi từ tạo thành từ bảng chữ cái $\{A, T, C, G\}$ biểu diễn một thuật toán để tạo ra một sinh vật, và tập hợp tất cả các sinh vật có thể được xem như một ngôn ngữ trên bảng chữ cái

$\{A,T,C,G\}$. Đó là khởi đầu việc mô hình hóa trong di truyền học.

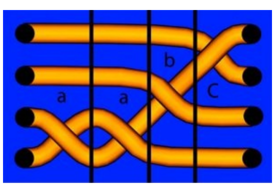
Từ dải bện đến các từ

Chúng ta có thể biểu diễn các dải bện bằng các từ mà không cần đến hình vẽ. Bảng chữ cái được dùng ở đây là $\mathscr{A} = \{a,b,c,A,B,C\}$. Mỗi chữ cái trong bảng chữ cái này tương ứng với một dải bện "sơ cấp", xem Hình 20.



Hình 20. Dải bện sơ cấp.

Cho một dải bện α bất kỳ, bằng cách cắt α thành các lát nhỏ theo chiều dọc, ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng α là hợp thành của nhiều dải bện sơ cấp. Nói cách khác, α có thể được viết như một từ trên bảng chữ cái $\mathscr{A}$. Thí dụ, dải bện trong Hình 21 tương ứng với từ $aabC$.



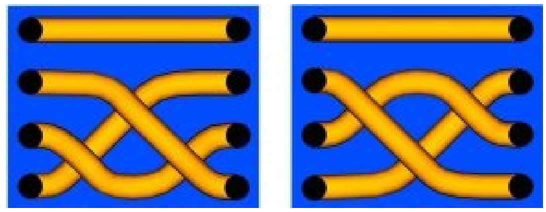
Hình 21. Dải bện aabC.

Nhóm bện được đặc trưng bởi hai tính chất sau:

1. Mọi dải bện đều viết được dưới dạng một từ trên bảng chữ cái $\mathscr{A} = \{a,b,c,A,B,C\}$;
2. Ta có các đẳng thức sau:

$$aA = Aa = \varepsilon\,, bB = Bb = \varepsilon\,, cC = Cc = \varepsilon$$
$$aba = bab\,, ac = ca\,, bcb = cbc\,,$$

ở đó ε chỉ từ rỗng, tức là từ có độ dài 0, không có chữ cái nào. Đẳng thức $aba = bab$ được minh họa trong Hình 22.



Hình 22. Đẳng thức $aba = bab$.

Bài toán từ và bài toán liên hợp

Tồn tại một thuật toán nhận đầu vào là hai từ trên bảng chữ cái $\mathscr{A} = \{a,b,c,A,B,C\}$ và quyết định liệu chúng có biểu diễn cùng một dải bện hay không. Một thuật toán như vậy được gọi là một lời giải cho *bài toán từ*. Bạn đọc có lẽ cũng đã để ý rằng bài toán này rõ ràng chính là một bài toán đã được nói đến ở bên trên: xác định xem hai hình vẽ có biểu diễn cùng một dải bện hay không.

Và đây là một bài toán nữa về dải bện mà chúng ta có thuật toán để giải. Cho hai dải bện α và β, chúng ta có thể trả lời rằng có hay không một dải bện γ sao cho $\alpha\gamma = \gamma\beta$, và trong trường hợp câu trả lời là khẳng định, ta còn biết cách tìm tất cả các γ thỏa mãn. Độc giả có thể nhận ra rằng bài toán này chính là giải phương trình $\alpha X = X\beta$. Nhắc lại rằng giải phương trình $\alpha X = X\beta$ nghĩa là tìm tập hợp tất cả các X thỏa mãn đẳng thức này. Nếu không tồn tại X như vậy, tập hợp này là rỗng. Một thuật toán giải phương trình $\alpha X = X\beta$ với α và β cho trước được gọi là một lời giải cho *bài toán liên hợp*.

Bài toán quyết định

Bài toán từ và bài toán liên hợp thuộc vào họ các bài toán trong toán học, rất gần với thuật toán và tin học, được gọi là "các bài toán quyết định". Các bài toán quyết định nhận được sự quan tâm ngày càng tăng không chỉ vì ứng dụng của chúng trong nhiều lĩnh vực khác, mà còn vì chính những thay đổi của khái niệm chứng minh toán học. Quả vậy, ngày nay người ta phân biệt khái niệm chứng minh và khái niệm chứng minh "thực sự", tức là phải xây dựng được lời giải. Một xây dựng như vậy được thực hiện bởi một thuật toán và độ phức tạp (tức thời gian tính toán) của nó là một dữ liệu cần được tính toán và được quan tâm bởi những kỹ sư tin học muốn sử dụng nó.

Kết quả toán học không xây dựng bằng thuật toán

Định lý sau đây là một thí dụ về một chứng minh không xây dựng. Nó thường được biết đến dưới cái tên *định lý bánh mỳ kẹp* (xem Hình 23).

Hình 23. Định lý bánh mỳ kẹp không áp dụng được trong thực tế.

Định lý: Với mọi cái bánh mỳ kẹp gồm bánh mỳ, giăm–bông và phô–mai, luôn tồn tại một nhát cắt đều, tức là sao cho hai phần nhận được có lượng bánh mỳ, giăm bông và phô–mai bằng nhau.

Dù biết là một nhát cắt như thế tồn tại, ta không biết cách nào tìm ra nó. Tuy nhiên, không như vẻ bề ngoài của nó, lý thuyết dẫn đến định lý này không hề vô dụng một chút nào (hình ảnh bánh mỳ kẹp chỉ là minh họa dễ hiểu). Chẳng hạn, với chính những kỹ thuật đó, các nhà toán học đã thiết lập được sự tồn tại của những enzyme có tên topoisomerase có khả năng làm biến đổi hình dạng của ADN.

Các bài toán quyết định về dải bện

Thuật toán trong các nhóm bện được nghiên cứu đặc biệt tích cực. Nhiều bài toán quyết định như bài toán từ hay bài toán liên hợp, được Garside giải quyết vào năm 1969. Không có thêm nhiều đột phá, cho đến khi cuốn sách của Epstein và các cộng sự được xuất bản. Cuốn sách này mô tả nhiều thuật toán bắt nguồn từ lý thuyết ô–tô–mát để giải các bài toán quyết định trong nhóm bện.

Frank A. Garside đang là giám đốc một trường nam sinh khi ông bắt đầu làm nghiên cứu sinh tiến sỹ tại Oxford vào năm 1968. Với một công việc toàn thời gian, ông biết rằng tốc độ làm việc của mình sẽ chậm và lựa chọn một chủ đề xa với những xu hướng chủ đạo đương thời: ông tìm cách giải bài toán liên hợp trong nhóm bện. Ông phát hiện ra một cấu trúc khi đó còn chưa được biết đến nhưng đến nay đã có vô số ứng dụng và dạng tổng quát hóa vượt xa chủ đề luận án của ông. Mặc dù đóng góp của ông khởi nguồn cho một lĩnh vực nghiên cứu vẫn còn rất tích cực đến tận ngày nay, trong suốt đời ông chỉ công bố đúng một bài báo.

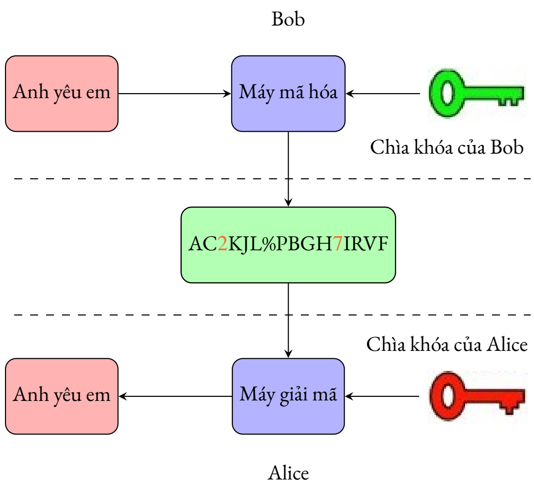
Dehornoy và tác giả bài viết này đưa ra một bộ khung rõ ràng và tổng quát hơn để nghiên cứu các bài toán quyết định trong nhóm bện: nhóm Garside. Ý tưởng ban đầu là tách riêng một số tính chất tổ hợp của các nhóm bện: đại loại nghĩa là tạo ra một mô hình ít ràng buộc hơn và chỉ sử dụng những công cụ từ lý thuyết ngôn ngữ và tổ hợp, những lĩnh vực đặc biệt thích hợp để xử lý những vấn đề thuật toán. Dưới sự thúc đẩy của các trường phái Pháp, Mỹ, Hàn Quốc và Israel, nhiều bước tiến lớn đã được đạt tới, giúp hiểu rõ các cấu trúc này. Nhiều ứng dụng đã xuất hiện, đặc biệt là trong mật mã.

5. Từ dải bện đến mật mã

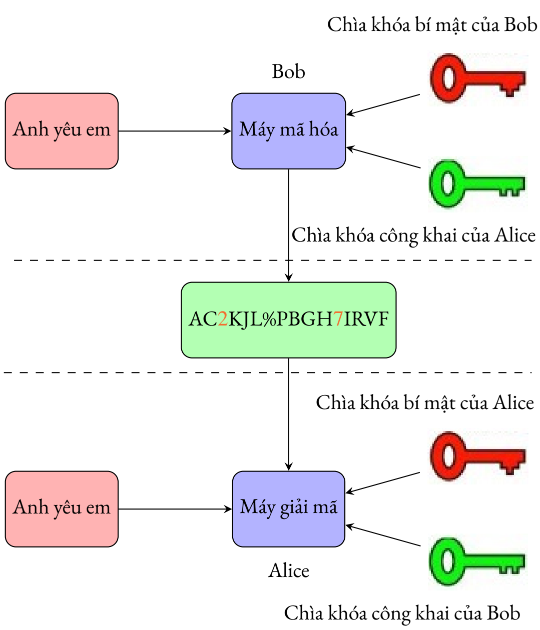
Mật mã

Mật mã là ngành nghiên cứu những cách gửi các thông điệp bí mật trên các kênh liên lạc công khai. Nó được coi như một nhánh của cả toán học, tin học lẫn khoa học truyền thông, và có rất nhiều ứng dụng, chẳng hạn như trong thẻ ngân hàng, trong thương mại điện tử hay trong bảo mật của điện thoại di động.

Một *hệ thống mật mã* gồm hai thuật toán. Thuật toán thứ nhất được người gửi (một anh chàng tên là Bob) dùng để mã hóa thông điệp cần gửi. Thuật toán thứ hai để người nhận (một cô nàng tên là Alice) giải mã thông điệp đó. Bob cần đưa vào máy mã hóa (mà ai cũng có) thông điệp cùng với một chìa khóa (thường là một từ chỉ có Bob và Alice biết), xem Hình 24. Thông điệp lộn xộn vô nghĩa ở đầu ra phụ thuộc vào hai tham số này. Tương tự, Alice đưa vào máy giải mã thông điệp nhận được và một chìa khóa khác (cũng chỉ có Bob và Alice biết) để đọc thông điệp. Độ bảo mật của hệ thống phụ thuộc vào khả năng giữ bí mật chìa khóa của Alice và Bob.



Hình 24. Hệ thống mật mã.



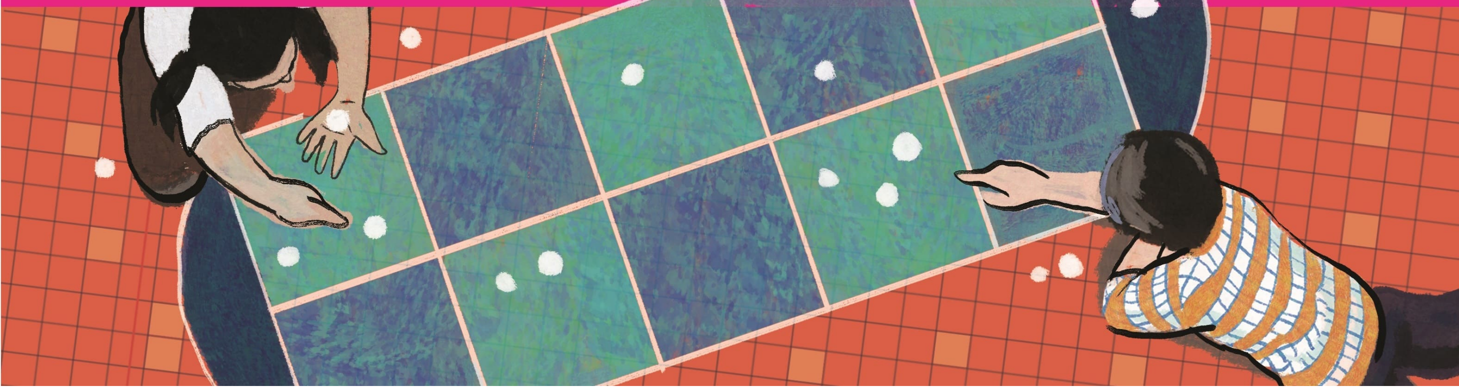
Hình 25. Hệ thống mật mã khóa công khai.

Trong một số hệ mật mã hiện đại, như RSA, được gọi là *hệ mật mã khóa công khai*, hay *hệ mật mã không đối xứng*, người dùng có hai chìa khóa: một chìa khóa công khai và một chìa khóa bí mật. Chìa khóa bí mật được giữ... bí mật, còn chìa khóa công khai thì được phát tán rộng rãi. Hai chìa khóa này liên quan đến nhau, nhưng từ chìa khóa công khai không thể suy ra được chìa khóa bí mật. Trong một hệ mật mã như vậy, máy mã hóa của Bob dùng chìa khóa bí mật của Bob và chìa khóa công khai của Alice để mã hóa thông điệp, và máy giải mã của Alice dùng chìa khóa bí mật của Alice và chìa khóa công khai của Bob để giải mã thông điệp (xem Hình 25).

Hệ mật mã dựa trên dải bện

Chính trong bộ khung các nhóm bện và các nhóm Garside mà những hệ mật mã đầu tiên dựa trên các cấu trúc không giao hoán đã ra đời. Sự tồn tại của các thuận toán hiệu quả cho bài toán từ, độ phức tạp lớn của các thuật toán giải bài toán liên hợp, cùng với hiểu biết sâu sắc về các nhóm này giúp các hệ mật mã này có đầy triển vọng. Tuy nhiên, việc đưa chúng vào sử dụng đòi hỏi những nỗ lực về mặt kỹ thuật và đào tạo quá lớn để chúng có thể được sử dụng trong công nghiệp hay trong quân đội trong tương lai ngắn hạn.

Trong hệ mật mã được Garside đề xuất, chìa khóa bí mật của Alice gồm hai dải bện γ_1 và γ_2, còn chìa khóa công khai tương ứng là một dải bện α khác và dải bện hợp thành $\gamma_1 \alpha \gamma_2$. Để hệ mật mã này an toàn thì phương trình $X \alpha Y = \beta$, với α, β là tham số và X, Y là ẩn, phải không giải được bằng một thuật toán hiệu quả. Những nghiên cứu gần đây về nhóm bện chỉ ra rằng thể giải được nhanh chóng những phương trình như thế với "hầu hết" các α và β; điều này làm cho hệ mật mã trở nên kém tin cậy. Mặc dù vậy, những biến thể với các nhóm Garside khác đang được nghiên cứu và chưa có kết luận nào được chứng minh. Đó là một chủ đề nghiên cứu đang rất nóng bỏng.



NHIỆM VỤ BẤT KHẢ THI

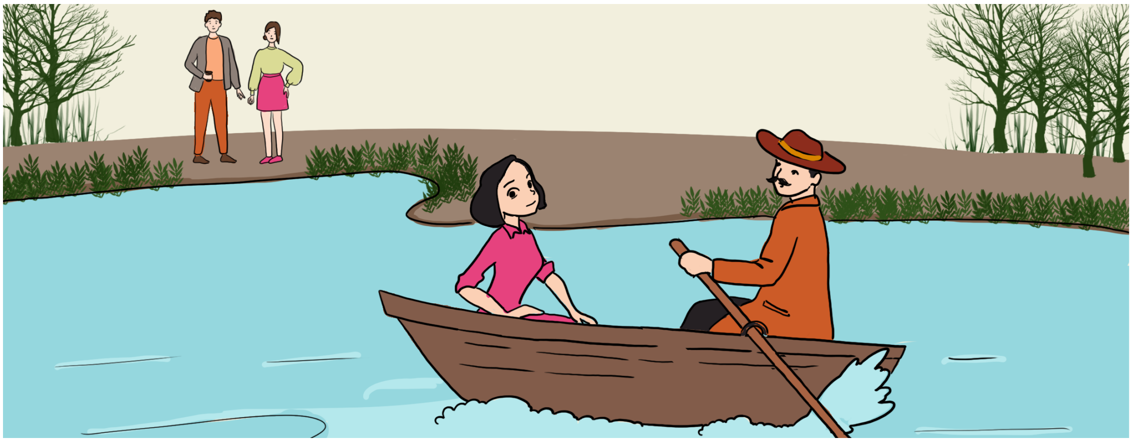
GIA DƯƠNG

Thám tử Xuân Phong cùng vợ là bà Xuân Bích tham gia một buổi dã ngoại cùng với hai cặp vợ chồng khác. Cả hai ông chồng là các nhà báo nổi tiếng, còn các bà vợ của họ cũng đều là các quý bà danh giá trong thành phố. Kết thúc buổi dã ngoại, cả ba cặp vợ chồng cùng quay trở về nhà và ra tới một con sông và họ phải chèo trên một chiếc thuyền nhỏ để vượt qua sông. Thuyền chỉ có thể chở được một lúc đồng thời hai người, và hơn nữa không có một phụ nữ nào trong họ lại biết chèo thuyền.

Bỗng dưng, đang lúc hào hứng ôn kể lại các câu chuyện điều tra phá án của mình, thám tử Xuân Phong đâm ra xích mích, giận mặt đỏ tía tai với hai nhà báo kia về phương pháp điều tra đặc biệt thông minh của mình. Thấy tình hình trở nên căng thẳng như vậy, bà Xuân Bích cũng quyết định đứng về phía chồng mình và không thèm nói chuyện với hai quý bà kia cho bõ tức. còn hai quý bà thì ra sức can ngăn hai ông chồng nóng tính của mình và vẫn giữ hoà khí với thám tử Xuân Phong đáng kính.

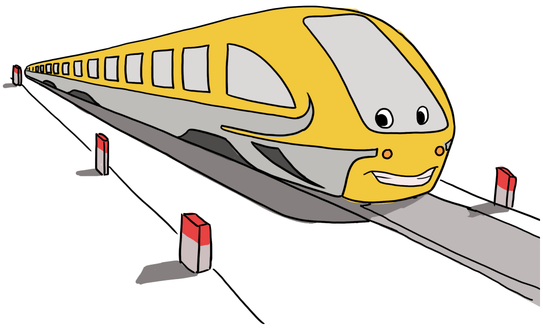
Vậy em có thể giúp Xuân Phong và mọi người tìm ra cách để tất cả các thành viên tham gia buổi dã ngoại đều có thể vượt qua sông, sao cho hai người đang giận dỗi nhau thì không ngồi trên thuyền cùng một lúc, và cũng không đứng đồng thời trên cùng một bờ sông. Và một yêu cầu đặc biệt đặt ra nữa là không một nhà báo nào có thể ở lại một mình trên bất kỳ bờ sông nào cùng với hai quý bà mà không có chồng của bà kia.

Bài đố này không khó nhưng rất ít, chỉ khoảng 1 người trong số 1000 người tham gia giải, mới có thể giải được ra đáp số mà lại không phải dùng đến giấy và bút đấy các em ạ!

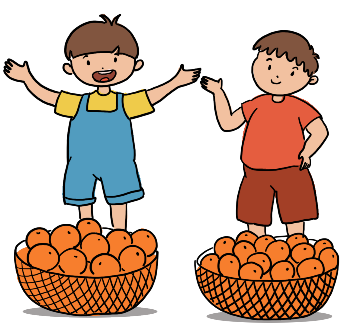


CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

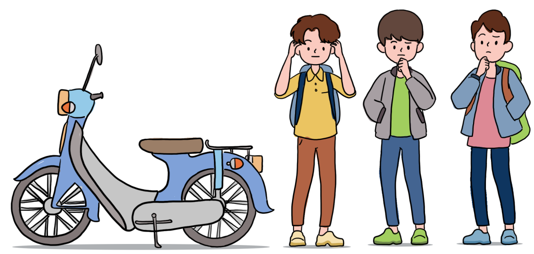
1. Một chiếc tàu cao tốc dài 18 m đi ngang qua một cột cây số trong vòng 9 giây. Hỏi chiếc tàu đó cần bao nhiêu thời gian để đi qua hết một cây cầu dài 36 m.



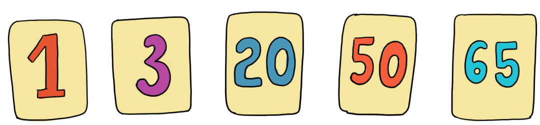
2. Hai cậu bé đi bán cam để gây quỹ xây dựng thư viện. Mỗi cậu có 30 quả cam. Cậu thứ nhất bán 10.000 đồng hai quả cam, cậu thứ hai bán 10.000 đồng ba quả cam. Trong lúc đang chuẩn bị bày cam ra bán thì một cậu bị gọi về nhà nên cậu ta nhờ cậu thứ hai bán hộ số cam của mình. Tất cả số cam còn lại được cậu bé thứ hai bán với giá 20.000 đồng năm quả. Nếu như số cam bán riêng như dự định lúc đầu thì đã thu được là 150.000 đồng và 100.000 đồng, tức là tổng cộng có 250.000 đồng, nhưng vì bán gộp 20.000 đồng cho 5 quả nên hai cậu chỉ thu được 240.000 đồng. Hỏi số tiền bị hụt 10.000 đồng đã mất ở chỗ nào?



3. Có ba người bạn tập trung lại để đi cắm trại và họ chỉ có duy nhất một chiếc xe máy có 2 chỗ ngồi. Liệu họ có thể vượt được quãng đường dài 60 km tới nơi cắm trại sau khoảng thời gian 3 giờ đồng hồ được hay không, biết rằng vận tốc của mỗi người đi bộ là 5 km/giờ và vận tốc của xe máy (có tải hay không có tải) luôn là 50 km/giờ?



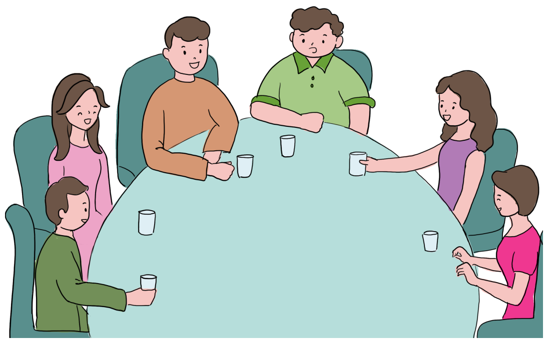
4. Có 100 chiếc thẻ bài bằng nhựa đánh số từ 1 tới 100 lần lượt được xếp thành hàng ngang. Cứ hai chiếc thẻ xếp cách nhau một chiếc thẻ khác đều có thể đổi chỗ được cho nhau. Liệu em có thể đổi chỗ các chiếc thẻ này bằng cách như trên để xếp lại được 100 chiếc thẻ trên theo thứ tự ngược lại được hay không?



5. Trong ngày khai giảng các bạn học sinh gặp lại nhau sau một mùa hè nên vô cùng mừng rỡ. Gặp lại bạn bè cũ và ai cũng tranh thủ bắt tay bạn mình. Kết thúc màn chào hỏi vui tươi sôi nổi, anh phụ trách thống kê lại trong cuốn sổ tổng số bạn học sinh đã có số lẻ lần bắt tay: tổng cộng là 67 bạn. Bạn Lâm đứng cạnh anh phụ trách nói nhỏ "Anh ơi, anh đếm nhầm rồi, chắc chắn không phải là 67 bạn ạ". Anh phụ trách vô cùng ngạc nhiên, vì sao Lâm lại biết vậy. Em có thể giải thích vì sao Lâm lại cho rằng anh phụ trách đếm nhầm được không?

6. *a*) Có 50 vị khách ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn được xếp đều, trong số họ có 25 phụ nữ. Em hãy chứng tỏ rằng có một vị khách ngồi cạnh hai phụ nữ.

b) Giả sử bây giờ số phụ nữ là 26 người. Trong buổi tiệc bỗng dưng có hai vị khách làm vỡ mất hai chiếc cốc đặt trước mặt họ. Em hãy chứng tỏ rằng có thể xoay lại chiếc bàn tròn theo một cách nào đó để sao cho hai chiếc cốc vỡ lại đặt trước mặt của hai vị khách nữ.



LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 6 năm 2022)

1. Hai bạn nhỏ tham gia trò chơi Nhà đầu tư nhỏ tuổi. Bạn Vinh nói với bạn Bình: "Nếu $3/5$ số vốn của tớ mà được thêm 7000 đồng, thì sẽ bằng số vốn của cậu". Nghe thế, Bình liền nhận xét: "Vậy là vốn của cậu chỉ hơn của tớ có 3000 đồng." Các em hãy xác định số vốn của các bạn nhỏ này nhé.

Lời giải. Số vốn tổng cộng của Vinh gồm $3/5$ phần vốn cộng với $2/5$ phần vốn. Nếu như Vinh thêm cả 7000 vào số vốn của mình, thì Vinh sẽ hơn Bình tận $7000 + 3000 = 10000$ (đồng). Từ đề bài ta thấy, do $3/5$ tiền vốn của Vinh cộng với 7000 đồng đã bằng số vốn của Bình, nên $2/5$ số vốn của Vinh đúng bằng 10000 (đồng). Vì thế số vốn của Vinh tham gia trò chơi là: $10000 : (2/5) = 25000$ (đồng), và số vốn của Bình là $25000 - 3000 = 22000$ (đồng).

2. Có một số điểm dừng nghỉ cho người đi đường (nhiều hơn 1) trải dọc trên một con đường dài 60 km. Một người đi bộ dọc theo con đường với vận tốc 5 (km/h) và nghỉ chân tại mỗi điểm dừng nghỉ cùng một khoảng thời gian là một số nguyên giờ đồng hồ. Một người khác đi xe đạp trên quãng đường đó với vận tốc 12 (km/h) và nghỉ tại mỗi điểm dừng nghỉ với thời gian gấp đôi so với người đi bộ. Hai người cùng khởi hành và đến đích đồng thời. Hỏi có bao nhiêu điểm dừng nghỉ dọc trên đường.

Lời giải. Thời gian người đi bộ đi trên đường không tính thời gian nghỉ chân là 12 giờ. Còn người đi xe đạp mất 5 giờ để đạp xe. Vì thế thời gian người đi xe đạp nghỉ tại các gốc cây nhiều hơn số thời gian người đi bộ nghỉ là $12 - 5 = 7$ (giờ). Đây cũng chính là số tiếng người đi bộ đã nghỉ tại các điểm dừng nghỉ. Vì có nhiều hơn một điểm dừng nghỉ và khoảng thời gian nghỉ tại mỗi gốc là một lượng nguyên của giờ đồng hồ, nên suy ra có 7 điểm dừng nghỉ trên đường.

3. Mãng xà hay có thói bắt trộm gà của dân làng. Một lần nọ nó bị đau bụng vì ăn nhiều thịt gà sống quá nên phải tới khám bác sỹ. Bác sỹ bảo nếu Mãng xà còn ăn tới 6 con gà sống trong một ngày thì 10 năm nữa nó sẽ chết, còn nếu ăn tận 17 con gà một ngày như bây giờ thì chỉ còn sống được 5 năm nữa. Hỏi Mãng xà sẽ sống được thêm bao nhiêu năm, nếu nó chịu khó không bắt gà ăn thịt lung tung nữa. (Ta coi rằng độ dài mỗi năm là như nhau và mỗi một con gà sống làm giảm tuổi thọ một số thời gian như nhau).

Ta gọi số ngày trong năm là n. Khi đó $6 \cdot 10n = 60n$ là số gà ăn vào sẽ làm giảm tuổi thọ của Mãng xà để nó chỉ sống thêm được 10 năm nữa. Còn $17 \cdot 5n = 85n$ là số gà ăn vào sẽ làm giảm tuổi thọ của Mãng xà để nó chỉ sống thêm được 5 năm. Như vậy $85n - 60n = 25n$ con gà sẽ làm giảm tuổi thọ của Mãng xà mất 5 năm. Như vậy, nếu Mãng xà thôi không bắt gà sống ăn thịt thì nó sẽ sống thêm được 10 năm cộng với số năm mà $60n$ con gà có thể đã tước đoạt đi tuổi thọ của nó, có nghĩa là $(60 : 25) \cdot 5 = 12$ (năm).

Vậy nếu không bắt gà của dân làng nữa, Mãng xà có thể sống thêm được $10 + 12 = 22$ (năm).

4. Có thể đặt các số tự nhiên từ 1 tới 15 vào một bảng vuông hình chữ nhật 3×5 sao cho tổng các số trong mỗi hàng là như nhau và tổng các số trong mỗi cột cũng như nhau được hay không?

Có thể. ta đưa ra một ví dụ như sau

1	11	14	9	5
8	3	4	13	12
15	10	6	2	7

Sau đây là một số gợi ý:

– Trước tiên ta biết tổng của 15 số bằng $(15 \times 16) : 2 = 120$. Do đó tổng của mỗi cột (nếu xếp được) là 24, còn tổng mỗi hàng bằng 40. Theo suy nghĩ thông thường ta chọn 3 số cách đều 1, 8, 15 cho cột đầu tiên.

– Xem xét 5 số lớn nhất còn lại ta thấy 10 và 11 phải cùng một cột và cùng với số 3. Ta xếp ba số 3, 10, 11 vào cột hai (tạm thời chưa xếp vào các dòng).

– Tiếp theo, trong các ô ở 3 cột còn lại (cột thứ 3 tới cột thứ 5) ta sẽ xếp số lớn nhất (14) cùng hàng với 1 và số bé nhất (2) cùng hàng với 15 (cũng theo nguyên tắc xếp dãn đều). Thấy ngay 14 và 2 không thể ở cùng một cột, vì nếu như vậy, ô còn lại phải ghi số 8 là số ta đã xếp ở cột 1. Quay lại cột 2, bằng cách xét từng trường hợp ta chỉ có thể xếp số 3 vào ô G (Hình 1).

1 A	B	14 C	D	E
8 F	3 G	H	I	J
15 K	L	M	2 N	P

Hình 1.

– Tiếp theo do tổng các ô H, I và J sẽ bằng $40-(8+3)=29$ các ô này phải có cả hai số "lớn" còn lại là 12 và 13 và ô còn lại trong 3 ô này phải là số 4. Xét 3 trường hợp cho ô I ta thấy chỉ có thể điền 13 vào ô I. Khi đó ta điền tiếp được các ô H, J, D, M (Hình 2)

1 A	B	14 C	9 D	E
8 F	3 G	4 H	13 I	12 J
15 K	L	6 M	2 N	P

Hình 2.

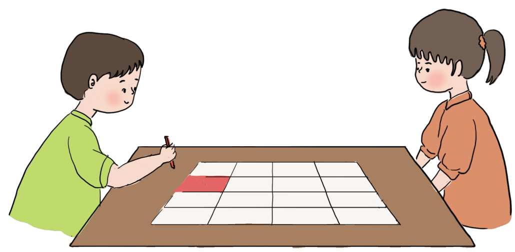
– Chỉ có thể điền 11 vào ô B và cuối cùng thu được toàn bộ bảng ở Hình 3.

1 A	11 B	14 C	9 D	5 E
8 F	3 G	4 H	13 I	12 J
15 K	10 L	6 M	2 N	7 P

Hình 3.

Các em cũng có thể đổi chỗ các cột, hoặc các hàng để có một cách điền khác.

5. Hai bạn cùng chơi một trò tô màu sau đây: các bạn lần lượt tô bằng màu đỏ các ô của một bảng ô vuông ca–rô 4×4. Ở mỗi một bước, các bạn phải tô một ô trắng bằng màu đỏ, sao cho không có hình vuông 2×2 nào bị tô đỏ hết. Bạn nào không đi được bước tiếp theo sẽ bị thua. Hỏi bạn nào sẽ luôn có cách chơi để thắng đối phương: bạn tô đầu tiên hay là người chơi cùng với bạn đó?

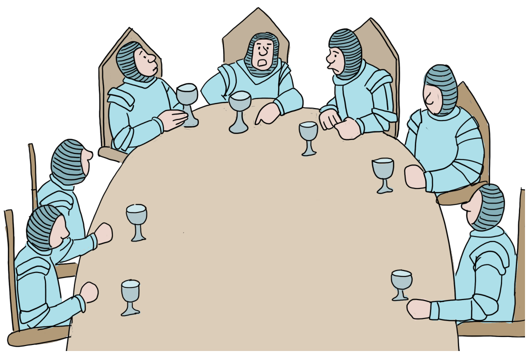


Lời giải. Ta đánh số 16 ô của bàn cờ caro như sau

1	2	3	4
5	6	7	8
1	2	3	4
5	6	7	8

Người chơi thứ hai (đối thủ của người đi trước) sẽ luôn có thể thắng bằng chiến thuật sau đây: hễ người thứ nhất tô màu vào ô nào trong số 16 ô trong bảng, người chơi thứ hai sẽ tô vào ô có cùng số với ô vừa được người thứ nhất đã tô. Do không có hình vuông 2×2 nào trong bàn cờ có 2 số giống nhau nên người thứ hai không bao giờ bị đẩy vào tình huống thua vì không đi được bước tiếp theo.

6. Có 31 người cùng ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn. Một số người trong họ là các Hiệp sỹ – đó là những người luôn nói thật, còn những người còn lại là Lừa dối – họ luôn nói sai, hơn nữa số người Lừa dối ít nhất là 1. Người ta hỏi mỗi người trong số họ "có bao nhiêu người Lừa dối ngồi cạnh anh?" (tức là người ngồi cạnh bên tay trái và bên tay phải). Tất cả mọi người cùng đưa ra câu trả lời như nhau. Hỏi số Hiệp sỹ lớn nhất có thể ngồi xung quanh bàn là bao nhiêu?



Lời giải. Giả sử xung quanh bàn có ít nhất 16 Hiệp sỹ. Khi đó phải có ít nhất 2 Hiệp sỹ ngồi cạnh nhau. Hơn nữa vì số người Lừa dối có ít nhất là 1, nên phải có 2 Hiệp sỹ ngồi cạnh nhau, và một trong số họ có một người Lừa dối ngồi cạnh. Như vậy, có một Hiệp sỹ đưa ra câu trả lời là "1", và tất cả cũng đã đều trả lời là "1".

Vì thế các Hiệp sỹ phải ngồi theo từng cặp, mỗi một cặp Hiệp sỹ được bao quanh bởi các người Lừa dối. Hơn nữa, mỗi một người Lừa dối phải được bao quanh bởi 2 Hiệp sỹ (vì nếu có một người Lừa dối có 2 người ngồi cạnh là Hiệp sỹ và Lừa dối khác, thì hóa ra anh ta lại nói thật, điều này là không thể. Do đó chỉ có thể có cách xếp như sau

. . . HHLHHLHHL . . .

(H – Hiệp sỹ, L – Lừa dối). Nhưng khi đó thì tổng số người phải là bội số của 3. Đây là điều mâu thuẫn. Do vậy số Hiệp sỹ không quá 15.

Ta sẽ chỉ ra ví dụ khi có đúng 15 Hiệp sỹ ngồi quanh bàn như sau

LHLHLHLHLHLHLHLHLHLHLHLHLHLHLLH

(người đầu và người cuối trong dãy trên ngồi cạnh nhau). Khi đó mỗi người ở quanh bàn đều trả lời "2".

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Đố vui

Tom có thể làm được: bạn chỉ cần cắt dọc theo đường thẳng đi qua tâm của hai hình chữ nhật! Thật là đơn giản, phải không các bạn?

Nhiệm vụ bất khả thi

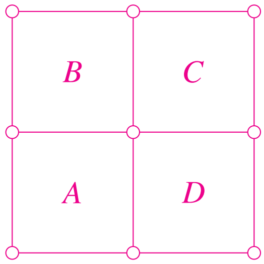
Các thành viên buổi dã ngoại có thể vượt qua con sông với 17 chuyến chèo thuyền như sau:

1. Xuân Phong và Xuân Bích cùng đi qua sông;
2. Xuân Phong một mình quay trở lại bờ kia;
3. Xuân Phong cùng sang sông với một quý bà;
4. Xuân Phong quay trở lại với vợ mình;
5. Xuân Phong sang sông với quý bà thứ hai;
6. Xuân Phong quay trở lại một mình;
7. Hai nhà báo cùng sang sông;
8. Một nhà báo quay trở lại với vợ của mình;
9. Xuân Phong và vợ cùng sang sông;
10. Một nhà báo khác quay trở lại với vợ của mình;
11. Hai nhà báo sang bờ bên kia;
12. Xuân Phong quay trở lại một mình;
13. Xuân Phong chở một quý bà sang sông;

RULE OF MULTIPLICATION

NGÔ VĂN MINH[1]

Problem 1. How many ways are there to color the regions A, B, C, D in the figure with three different colors, where each region is colored by one color?

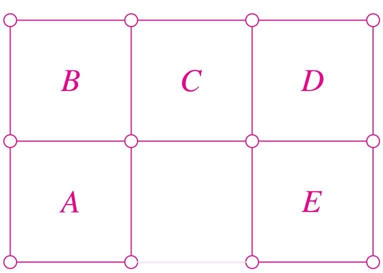


Rule of Multiplication: Suppose that we have to do two independent jobs A and B, and that there are m ways to do job A and n ways to do job B. We cannot do both jobs at the same time, then there are $(m \times n)$ ways to do **both** jobs.

Solution: There are 4 regions to be colored, and there are 3 ways to color each region. Therefore, the number of colorings is

$$\text{Rule of multiplication: } 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81.$$

Problem 2. How many ways are there to color the regions A, B, C, D, E in the figure using three different colors such that two adjacent regions have different colors?



Solution: We color in the order $A \to B \to C \to D \to E$. There are 3 ways to color region A. After that, there are 2 ways to color B with a different color. Then there are 2 ways to color C with a color different from B, and so on ...

According to the rule of multiplication, the number of colorings is given by

$$\text{Rule of multiplication: } 3 \times 2^4 = 48.$$

Problem 3. How many ways are there to put 8 rooks on a chessboard so that they do not attack each other?

(*Note that two rooks on the same row or column attack each other.*)

Solution:

- Step 1: Put the 1^{st} rook on the 1^{st} row: 8 ways
- Step 2: Put the 2^{nd} rook on the 2^{nd} row: 7 ways
- ...
- Step 8: Put the 8^{th} rook on the 8^{th} row: 1 way

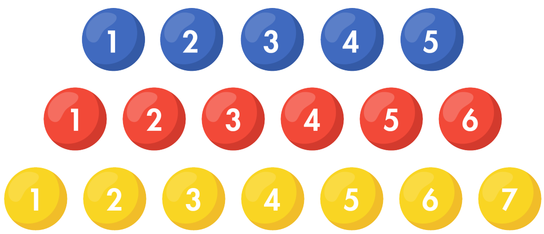
By the rule of multiplication, there are

$$8 \times 7 \times 6 \times \ldots \times 1 = 40320$$

[1] *Trường THCS Archimedes, Hà Nội.*

ways to put 8 rooks on a chessboard such that they do not attack each other.

Problem 4. There are 5 blue balls numbered from 1 to 5, 6 red balls numbered from 1 to 6, and 7 yellow balls numbered from 1 to 7. How many ways are there to choose 3 balls such that they have different colors and numbers?



Solution:

∘ First, we choose a blue ball. There are 5 available choices.

∘ Next, we choose a red ball. The number on this red ball is different from that of the blue ball, so there are $6-1=5$ available choices.

∘ Finally, we choose a yellow ball, and there are $7-2=5$ available choices.

According to the rule of multiplication, the number of ways to choose 3 balls of different colors and different numbers is:

$$5\times 5\times 5=125.$$

Problem 5. How many even 4–digit numbers with distinct digits are there?

Solution: Let's write an even 4–digit number as $\overline{abcd}$ where $a\neq 0$, the 4 digits a, b, c, d are pairwise distinct, and d is in the set $\{0,2,4,6,8\}$.

We consider two cases:

Case 1: $d=0$. There are 9 ways to choose a, then 8 ways to choose b and then 7 ways to choose c. Therefore, there are $1\times 9\times 8\times 7$ choices of the number $\overline{abcd}$.

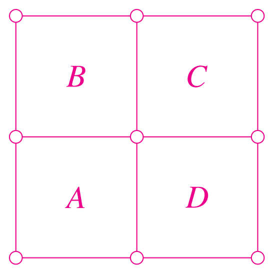
Case 2: $d\neq 0$. There are 4 ways to choose d. For each choice of d, there are 8 ways to choose a ($a\neq 0$ and $a\neq d$), then 8 ways to choose b and then 7 ways to choose c. Therefore, there are $4\times 8\times 8\times 7$ choices of the number $\overline{abcd}$.

Thus, there are

$$1\times 9\times 8\times 7+4\times 8\times 8\times 7=2296$$

numbers that satisfy the requirement of the problem.

Exercise 1. How many ways are there to color the regions A, B, C, D in the figure with one color for each region, given that there are three different colors and no two adjacent regions have the same color?



Exercise 2. How many ways are there to color the sides of a pentagon with three different colors such that no two adjacent sides have the same color?

New words

Adjacent(adj): bên cạnh, cạnh nhau

Case: trường hợp

Color (v): tô màu

Different: khác

Region: vùng, miền

Rook (Chess): quân Xe trên bàn cờ Vua

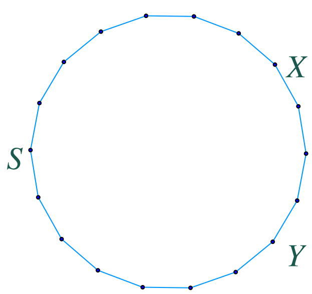
Rule of Multiplication: Quy tắc Nhân

Way: con đường, cách (thực hiện)

- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P641–P650: trước ngày 15/11/2022.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P641. (Mức B) Tại mỗi đỉnh của một đa giác lồi 18 cạnh ở hình dưới đây, người ta ghi một số, sao cho số được ghi ở mỗi đỉnh bằng tổng hai số được ghi ở hai đỉnh kề với nó.



Biết rằng, số được ghi ở đỉnh X là 20, và số được ghi ở đỉnh Y là 22. Hãy tìm số được ghi ở đỉnh S.

Bùi Văn Biên, France (st)

P642. (Mức B) Cho x, y là các số nguyên dương thoả mãn y^2+x-1 chia hết cho $xy+1$. Chứng minh rằng, tồn tại số tự nhiên z sao cho $x+y+z+xyz$ là số chính phương.

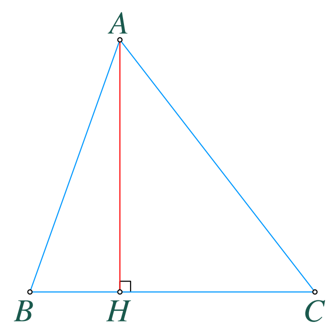
Nguyễn Đức Tấn, Tp. Hồ Chí Minh

P643. (Mức B) Người ta lần lượt ghi các số lên bảng, theo quy tắc: Ở mỗi lần ghi, chỉ ghi một số, và nếu số được ghi ở lần thứ k ($k \in \mathbb{N}^*$) là $x \neq -1$, thì ở lần thứ $k+1$ ghi số $\dfrac{x-1}{x+1}$. Hãy tìm số nhỏ nhất cần ghi ở lần thứ nhất, sao cho trong quá trình ghi số lên bảng theo quy tắc trên, ta ghi được số $-\frac{1}{2023}$.

Phùng Chí Tự, Hà Nội

P644. (Mức B) Xét tam giác ABC có các góc B, C nhọn. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác đó. Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông tại A khi và chỉ khi

$$\frac{HB^3}{AB^4}+\frac{HC^3}{AC^4}=\frac{1}{BC}.$$



Trần Quang Hùng, Hà Nội

P645. (Mức B) Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b^3c+b}+\frac{b}{b+c^3a+c}+\frac{c}{c+a^3b+a} \geq 1.$$

Đào Văn Nam, Hà Nội

P646. (Mức B) Chứng minh rằng, trong mỗi bát giác lồi, luôn có ít nhất ba đường chéo mà độ dài của chúng đôi một khác nhau.

(Bát giác là một đa giác có 8 cạnh.)

Phạm Nhật Nguyệt, Hải Phòng

P647. (Mức A) Cho số nguyên $n \geq 2$, và cho n điểm đôi một phân biệt $A_1, A_2, \ldots, A_n$ cùng nằm trên một đường tròn, theo thứ tự đó (tính theo chiều kim đồng hồ). Một dãy các điểm đôi một phân biệt $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_t}$ $(t \in \mathbb{N}, t \geq 2)$ được gọi là một *đường đi*, nếu đường gấp khúc $A_{k_1}A_{k_2}\ldots A_{k_t}$ (t đỉnh) là một đường gấp khúc không tự cắt. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường đi?

(Một đường gấp khúc được gọi là *không tự cắt*, nếu không có hai cạnh nào của nó cắt nhau tại một điểm nằm bên trong mỗi cạnh, trong hai cạnh ấy.)

Nguyễn Tường Thanh, Nghệ An (st)

P648. (Mức A) Với mỗi số thực a, xét tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, thỏa mãn

$$f(ax + y + f(x + y)) + f(xy) = yf(x)$$

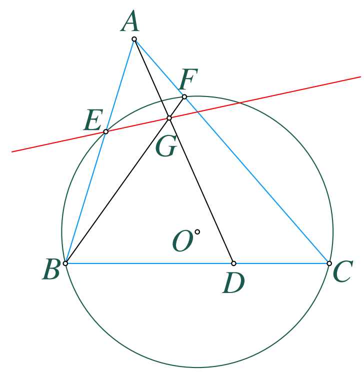
với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

$a)$ Tìm tất cả các số thực a, sao cho trong các hàm số f, tồn tại một hàm là đơn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$.

$b)$ Với $a = 2$, tìm tất cả các hàm số f có $f(0) = 0$.

Lê Phúc Lữ, Tp. Hồ Chí Minh

P649. (Mức A) Cho tam giác ABC và điểm D cố định nằm trên cạnh BC (D khác B, C). Một đường tròn (O) thay đổi, đi qua B, C và cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại E, F (khác A, B, C). Gọi G là giao điểm của BF và AD. Chứng minh rằng, đường thẳng GE luôn đi qua một điểm cố định.



Phạm Vĩnh Minh, Đồng Tháp

P650. (Mức A) Cho p là một số nguyên tố có dạng $4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$. Xét dãy số Fibonacci (F_n), xác định bởi: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, và

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{với mọi } n \geq 0.$$

Chứng minh rằng, không tồn tại các số nguyên dương m, n, với $n \geq 5$, sao cho $F_n = p^m$.

Nguyễn Song Minh, Hà Nội (st)

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P611. (Mức B) Cho A, B, C là các chữ số khác 0 sao cho $\overline{CCA} + \overline{B2B} = \overline{A88}$. Hãy tìm số $\overline{ABC}$.

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Phùng Việt Cường, lớp 10T2, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định*).

Viết lại giả thiết của bài ra dưới dạng:

$$\begin{array}{r} \overline{CCA} \\ + \\ \overline{B2B} \\ \hline \overline{A88} \end{array}$$

Theo quy tắc "cộng dọc", từ phép cộng ở hàng trăm, suy ra, $C + B \leq A \leq 9$.

Do đó, $B < 9$ (vì $C > 0$); suy ra, $A + B < 18$. Vì thế, từ phép cộng ở hàng đơn vị, ta được

$$A + B = 8. \qquad (1)$$

Do đó, từ phép cộng ở hàng chục, với lưu ý $C + 2 \leq 11$, ta có $C + 2 = 8$. Vì thế, $C = 6$. Do đó, từ phép cộng ở hàng trăm, ta có

$$6 + B = A, \text{ hay } A - B = 6. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được $A = 7$ và $B = 1$.

Vậy, $\overline{ABC} = 716$.

Bình luận và Nhận xét

Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có ba lời giải không đúng, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau:

- Với $a, b, c, x, y, z, u, v, t$ là các số nguyên, từ
$$ax+by+cz=au+bv+ct,$$
suy ra, $x=u$, $y=v$ và $z=t$.

- Khi xét phép cộng ở hàng chục của phép "cộng dọc", quên trường hợp "có nhớ từ phép cộng ở hàng đơn vị".

Lê Huy

P612. (Mức B) Chứng minh biểu thức sau nhận giá trị nguyên, với mọi giá trị nguyên dương của n:
$$A=\frac{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left((2n)^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left((2n-1)^4+\frac{1}{4}\right)}.$$

Lời giải (*dựa theo tuyệt đại đa số lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).

Với mọi số nguyên dương m, ta có:
$$\begin{aligned}m^4+\frac{1}{4}&=m^4+2\cdot m^2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-m^2\\&=\left(m^2+\frac{1}{2}\right)^2-m^2\\&=\left(m^2-m+\frac{1}{2}\right)\left(m^2+m+\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Do đó, với mọi số nguyên dương k, ta có:
$$\begin{aligned}&(2k)^4+\frac{1}{4}\\&=\left((2k)^2-2k+\frac{1}{2}\right)\left((2k)^2+2k+\frac{1}{2}\right);\\&(2k-1)^4+\frac{1}{4}\\&=\left((2k-1)^2-(2k-1)+\frac{1}{2}\right)\\&\quad\times\left((2k-1)^2+(2k-1)+\frac{1}{2}\right)\\&=\left((2(k-1))^2+2(k-1)+\frac{1}{2}\right)\\&\quad\times\left((2k)^2-2k+\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Suy ra
$$\frac{(2k)^4+\frac{1}{4}}{(2k-1)^4+\frac{1}{4}}=\frac{(2k)^2+2k+\frac{1}{2}}{(2(k-1))^2+2(k-1)+\frac{1}{2}}$$
với mọi số nguyên dương k.

Do đó
$$\begin{aligned}&A\\&=\frac{2^4+\frac{1}{4}}{1^4+\frac{1}{4}}\cdot\frac{4^4+\frac{1}{4}}{3^4+\frac{1}{4}}\cdot\frac{6^4+\frac{1}{4}}{5^4+\frac{1}{4}}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n)^4+\frac{1}{4}}{(2n-1)^4+\frac{1}{4}}\\&=\frac{(2\cdot1)^2+2\cdot1+\frac{1}{2}}{(2\cdot0)^2+2\cdot0+\frac{1}{2}}\cdot\frac{(2\cdot2)^2+2\cdot2+\frac{1}{2}}{(2\cdot1)^2+2\cdot1+\frac{1}{2}}\\&\quad\cdot\frac{(2\cdot3)^2+2\cdot3+\frac{1}{2}}{(2\cdot2)^2+2\cdot2+\frac{1}{2}}\cdot\ldots\\&\quad\cdot\frac{(2n)^2+2n+\frac{1}{2}}{(2(n-1))^2+2(n-1)+\frac{1}{2}}\\&=\frac{(2n)^2+2n+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=8n^2+4n+1.\end{aligned}$$

Vì vậy, biểu thức A nhận giá trị nguyên tại mọi giá trị nguyên dương của n.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng.

Hà Thanh

P613. (Mức B) Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng, trong ba số n, $\frac{n-5}{2}$, và $\frac{15n-9}{7}$, có ít nhất hai số không phải là số chính phương.

Lời giải (*phỏng theo cách giải của một bạn học sinh cấp THCS*).

Trước hết, dễ dàng chứng minh được Nhận xét sau:

Nhận xét 1: Với mọi số nguyên dương a, số dư trong phép chia a^2 cho 5 chỉ có thể là 0, 1, hoặc 4.

Từ đó, ta có:

Nhận xét 2: $\dfrac{15n-9}{7}$ là số không chính phương.

Chứng minh. Giả sử ngược lại, $\dfrac{15n-9}{7}$ là số chính phương.

Khi đó, tồn tại số nguyên dương m, sao cho

$$\frac{15n-9}{7}=m^2, \text{hay } 15n=7m^2+9. \quad (1)$$

Từ Nhận xét 1 suy ra, số dư trong phép chia $7m^2+9$ cho 5 sẽ là 4, 1 hoặc 2. Điều này mâu thuẫn với (1), do $15n$ chia hết cho 5. Mâu thuẫn nhận được cho thấy giả sử ở trên là sai; vì thế, Nhận xét 2 được chứng minh.

Tiếp theo, giả sử n và $\dfrac{n-5}{2}$ cùng là số chính phương. Khi đó, tồn tại các số nguyên dương x, y, sao cho $n=x^2$ và $\dfrac{n-5}{2}=y^2$, hay $n=2y^2+5$. Từ đây, ta có:

$$x^2=2y^2+5; \quad (2)$$

suy ra, $x^2\equiv 2y^2 \pmod 5$. (3)

Theo Nhận xét 1, $x^2\equiv 0,1,4 \pmod 5$ và $2y^2\equiv 0,2,3 \pmod 5$.

Vì thế, từ (3) suy ra

$$x^2\equiv 2y^2\equiv 0 \pmod 5.$$

Do đó, $x^2\equiv y^2\equiv 0 \pmod 5$; suy ra, $x\equiv y\equiv 0 \pmod 5$ (do 5 là số nguyên tố). Vì thế

$$x^2\equiv y^2\equiv 0 \pmod{25};$$

do đó, từ (2) suy ra, $5\equiv 0 \pmod{25}$, là điều vô lý. Điều vô lý này cho thấy, trong hai số n và $\dfrac{n-5}{2}$ chỉ có tối đa một số là số chính phương. Từ đây và Nhận xét 2, hiển nhiên ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có một lời giải sai, do người giải bài đã ngộ nhận rằng, "cả ba số đồng thời là số chính phương" là khẳng định ngược lại với khẳng định cần chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Lưu Thị Thanh Hà

P614. (Mức B) Cho a,b là các số nguyên dương thoả mãn

$$\left\{\sqrt{a+\sqrt{a}}\right\}=\{\sqrt{b}\}.$$

Chứng minh rằng, $4b+1$ là một số chính phương.

(Với x là một số thực, $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$, trong đó $\lfloor x\rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. $\{x\}$ được gọi là *phần lẻ* của số thực x.)

Lời giải (*dựa theo cách giải của bạn Nguyễn Đức Khải, lớp 10T2, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định*).

Viết lại hệ thức của đề bài dưới dạng:

$$\sqrt{a+\sqrt{a}}-\lfloor\sqrt{a+\sqrt{a}}\rfloor=\sqrt{b}-\left\lfloor\sqrt{b}\right\rfloor.$$

Từ đó, suy ra

$$\sqrt{a+\sqrt{a}}=\sqrt{b}+\left\lfloor\sqrt{a+\sqrt{a}}\right\rfloor-\left\lfloor\sqrt{b}\right\rfloor.$$

Vì thế, đặt $\left\lfloor\sqrt{a+\sqrt{a}}\right\rfloor-\left\lfloor\sqrt{b}\right\rfloor=x$, ta có $x\in\mathbb{Z}$ và

$$\sqrt{a+\sqrt{a}}=\sqrt{b}+x;$$

suy ra

$$a+\sqrt{a}=\left(x+\sqrt{b}\right)^2=x^2+2x\sqrt{b}+b. \quad (1)$$

Do đó, $\sqrt{a}=x^2-a+b+2x\sqrt{b}$.

Vì thế, đặt $x^2-a+b=y$, ta có $y\in\mathbb{Z}$ và

$$\sqrt{a}=y+2x\sqrt{b}.$$

Do đó, $a=y^2+4xy\sqrt{b}+4x^2b$. (2)

Suy ra, $4xy\sqrt{b}\in\mathbb{Z}$ (do $a,b,x,y\in\mathbb{Z}$). (3)

Vì $b\in\mathbb{N}^*$ nên hoặc $\sqrt{b}\in\mathbb{N}^*$, hoặc $\sqrt{b}$ là số vô tỷ.

Nếu $\sqrt{b}\in\mathbb{N}^*$ thì từ (1) suy ra, $\sqrt{a}\in\mathbb{N}^*$ (do $a\in\mathbb{N}^*$) và $a+\sqrt{a}$ là số chính phương, là

điều vô lý, do
$$\left(\sqrt{a}\right)^2 < a+\sqrt{a} < \left(\sqrt{a}+1\right)^2.$$
Vì vậy, $\sqrt{b}$ là số vô tỷ. Kết hợp với (3) suy ra, $x=0$ hoặc $y=0$.

Nếu $y=0$ thì $a=x^2+b$ (suy ra từ định nghĩa của y) và đồng thời, $a=4x^2b$ (theo (2)). Do đó, $x^2+b=4x^2b$; suy ra
$$b=\frac{x^2}{4x^2-1}<1,$$
là điều vô lý, do $b\in\mathbb{N}^*$.

Do đó, $x=0$. Vì thế, từ định nghĩa của y và (2), suy ra, $b=a+y=y^2+y$.

Do đó
$$4b+1=4y^2+4y+1=(2y+1)^2,$$
là một số chính phương.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Ở lời giải trên, ta đã sử dụng (không chứng minh) kết quả cơ bản sau:

"*Nếu m là một số tự nhiên thì $\sqrt{m}$ hoặc là một số tự nhiên, hoặc là một số vô tỷ.*"

Có thể dễ dàng chứng minh kết quả trên, bằng cách xét hai trường hợp: m là số chính phương, và m là số tự nhiên không chính phương. Với trường hợp thứ nhất, ta có $\sqrt{m}$ là một số tự nhiên; với trường hợp thứ hai, dễ dàng chứng minh được $\sqrt{m}$ là một số vô tỷ, nhờ suy luận phản chứng.

2. Bài đã ra là một bài toán dành cho học sinh lớp 9, trong Đề thi của Romanian District Olympiad năm 2016.

3. Tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng.

Lưu Thị Thanh Hà

P615. (Mức B) Cho tam giác ABC vuông tại A. Một điểm D di chuyển trên tia CA. Gọi E là hình chiếu vuông góc của điểm C trên đường thẳng BD; F là giao điểm của AE và BC. Chứng minh rằng, đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải (*của người chấm bài*).

Trên tia CA lấy điểm G, sao cho $GB\perp BC$ (điểm này tồn tại do tam giác ABC vuông tại A); ta có G là một điểm cố định.

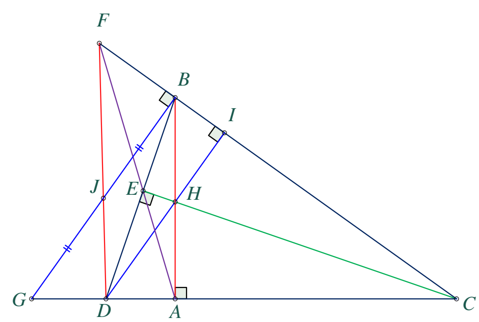
Từ giả thiết của bài toán suy ra, có thể xảy ra các trường hợp sau đối với vị trí của điểm D trên tia CA:

• *Trường hợp* 1: $D\equiv A$.

Khi đó, $E\equiv A$; vì thế, không thể xác định được điểm F.

• *Trường hợp* 2: *BD và BC không vuông góc với nhau*.

Khi đó, $D\not\equiv G$. Suy ra, $E\not\equiv B$; do đó, $F\not\equiv B$.



Gọi J là giao điểm của GB và DF; do $D\not\equiv G$ và $F\not\equiv B$, nên J nằm giữa D và F.

Gọi H là giao điểm của CE và AB; I là giao điểm của DH và BC.

Do $BA\perp CD$ và $CE\perp BD$, nên H là trực tâm tam giác BCD; suy ra, $DI\perp BC$. (1)

Áp dụng định lý Ceva cho tam giác BCD, với ba đường đồng quy BA, CE, DI, ta được:
$$\frac{IC}{IB}\cdot\frac{EB}{ED}\cdot\frac{AD}{AC}=1. \tag{2}$$
Từ (1) và định nghĩa điểm G, suy ra $DI \parallel GB$. Do đó, theo định lý Thales, ta có:
$$\frac{DC}{DG}=\frac{IC}{IB}. \tag{3}$$
Áp dụng định lý Menelaus lần lượt cho tam giác BCD, với cát tuyến AEF, và cho tam giác BCG, với cát tuyến DJF, ta được:
$$\frac{FB}{FC}\cdot\frac{AC}{AD}\cdot\frac{ED}{EB}=1, \tag{4}$$
$$\frac{JB}{JG}\cdot\frac{DG}{DC}\cdot\frac{FC}{FB}=1. \tag{5}$$

Từ (4) suy ra, $\dfrac{FB}{FC}=\dfrac{AD}{AC}\cdot\dfrac{EB}{ED}$. (6)

Từ (5), (3), (6) và (2), suy ra

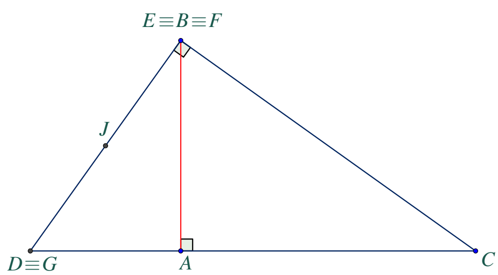
$$\frac{JB}{JG}=\frac{DC}{DG}\cdot\frac{FB}{FC}=\frac{IC}{IB}\cdot\frac{EB}{ED}\cdot\frac{AD}{AC}=1;$$

do đó, J là trung điểm của BG. Mà B, G cố định nên J là một điểm cố định.

Như vậy, trong trường hợp này, DF luôn đi qua điểm cố định J.

• *Trường hợp* 3: $BD\perp BC$.

Khi đó, $D\equiv G$; suy ra, $E\equiv B\equiv F$. Vì thế, đường thẳng DF cũng chính là đường thẳng BG; do đó, DF đi qua điểm cố định J.



• *Trường hợp* 4: $D\equiv C$.

Khi đó, $E\equiv C$, và do đó, $F\equiv C$. Vì thế, bất kỳ đường thẳng nào đi qua C cũng có thể được coi là đường thẳng DF. Do vậy, coi đường thẳng CJ là đường thẳng DF, ta sẽ có DF đi qua điểm cố định J.

Vậy, tóm lại, khi điểm D di động trên tia CA, sao cho $D\not\equiv A$, đường thẳng DF luôn đi qua điểm cố định J, là trung điểm của đoạn thẳng BG, với G là điểm nằm trên tia CA, thỏa mãn $GB\perp BC$.

Bình luận và Nhận xét

Do không xét các trường hợp 3, 4, được nêu ở lời giải trên, nên ở tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều có những tỷ số có mẫu *không* luôn khác 0. Vì thế, tất cả lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải không chính xác.

Hạ Vũ Anh

P616. (Mức B) Xét các số dương a,b,c thoả mãn $a+b+c=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left|\frac{1}{a}-1\right|+\left|\frac{1}{b}-1\right|+\left|\frac{1}{c}-1\right|.$$

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Trần Việt Anh, lớp 8C1, trường TH, THCS & THPT Archimedes, Đông Anh, Tp. Hà Nội*)**.**

Do a, b, c có vai trò như nhau trong biểu thức P nên không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a=\max\{a,b,c\}$.

Xét hai trường hợp sau:

• *Trường hợp* 1: $a>2$.

Khi đó, $\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$ suy ra

$$\frac{1}{a}-1<\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}.$$

Do đó

$$\left|\frac{1}{a}-1\right|>\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}.$$

Vì thế

$$P\geq\left|\frac{1}{a}-1\right|>\frac{1}{2}.$$

• *Trường hợp* 2: $0<a\leq 2$.

Khi đó, $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{2}$; do đó, với lưu ý tới các giả thiết của bài ra, ta có:

$$\begin{aligned}P&=\frac{|a-1|}{a}+\frac{|b-1|}{b}+\frac{|c-1|}{c}\\&\geq\frac{|a-1|}{a}+\frac{|b-1|}{a}+\frac{|c-1|}{a}\\&\quad(\text{do } a=\max\{a,b,c\})\\&=\frac{|a-1|+|b-1|+|c-1|}{a}\\&\geq\frac{|a+b+c-3|}{a}=\frac{1}{a}\geq\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Như vậy, với mọi số thực dương a, b, c, thỏa mãn điều kiện của đề bài, ta luôn có $P\geq\frac{1}{2}$.

Hơn nữa, với $a=2, b=c=1$, ta có $a,b,c>0$, $a+b+c=4$, và $P=\frac{1}{2}$.

Vì vậy, giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{1}{2}$.

Bình luận và Nhận xét

1. Ở lời giải trên, ta đã sử dụng (không chứng minh) bất đẳng thức "trị tuyệt đối" rất cơ bản sau:

"*Cho số nguyên $n \geq 2$. Khi đó, với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, ta có:*
$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n| \geq |x_1+x_2+\cdots+x_n|."$$

Bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh bất đẳng thức trên bằng phương pháp quy nạp theo $n \geq 2$.

2. Rất tiếc, có tới một nửa số lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc là lời giải sai, hoặc không hoàn chỉnh, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau:

◇ Ngộ nhận rằng, với $x, y \in \mathbb{R}$ nếu $x \geq y$ thì $|x| \geq |y|$.

◇ Khẳng định giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{1}{2}$, ngay sau khi mới chỉ chứng minh được $P \geq \frac{1}{2}$.

Nguyễn Khắc Minh

P617. (Mức A) Giải phương trình
$$\sqrt{(x^3-4)^3} = \sqrt[3]{(x^2+4)^2}+4.$$

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Trần Hữu Dương, lớp 10 Toán 1, trường THPT chuyên Hưng Yên, tỉnh Hưng Yên*).

Điều kiện xác định của phương trình: $x \geq \sqrt[3]{4}$. (1)

Đặt $\sqrt{x^3-4} = a$, $\sqrt[3]{x^2+4} = b$; khi đó, phương trình đã cho được viết lại dưới dạng:
$$a^3 = b^2+4. \quad (2)$$

Từ định nghĩa của a, b, ta có:
$$a^2-b^3 = x^3-x^2-8, \quad (3)$$
$$a^2-x^2 = x^3-b^3 = x^3-x^2-4. \quad (4)$$

Từ (2) và (3), suy ra
$$a^3-x^3+x^2-b^2+a^2-b^3+4=0. \quad (5)$$

Do (1), và do $a \geq 0$, $b > 0$, nên $a+x > 0$, $x+b > 0$, và
$$x^2+ax+a^2 > 0,\ x^2+bx+b^2 > 0.$$

Vì thế, với lưu ý tới (3), (4), ta có:

$$\begin{aligned}
&(5)\\
&\Leftrightarrow (a-x)\left(a^2+ax+x^2\right)+(x-b)(x+b)\\
&\quad +\left(x^3-x^2-4\right)=0\\
&\Leftrightarrow \frac{(a^2-x^2)(a^2+ax+x^2)}{a+x}+\frac{(x^3-b^3)(x+b)}{x^2+bx+b^2}\\
&\quad +\left(x^3-x^2-4\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left(x^3-x^2-4\right)\\
&\quad \times\left(\frac{a^2+ax+x^2}{a+x}+\frac{x+b}{x^2+bx+b^2}+1\right)=0\\
&\Leftrightarrow x^3-x^2-4=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+x+2\right)=0\\
&\Leftrightarrow x=2 \quad (\text{do } x^2+x+2>0).
\end{aligned}$$

Bằng cách thử trực tiếp, ta thấy $x=2$ nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bình luận và Nhận xét

1. Ở lời giải trên, phép thử lại là bắt buộc, do phép biến đổi từ (2) sang (5) là phép biến đổi hệ quả.

2. Tất cả lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều có cách giải đúng và đáp số đúng. Tuy nhiên, một số lời giải trong số đó *không* được coi là lời giải hoàn chỉnh, do người giải bài quên (?) không tìm điều kiện xác định của phương trình đã cho, trước khi tiến hành các biến đổi.

Nguyễn Khắc Minh

P618. (Mức A) Cho a, b, c là các số nguyên lớn hơn 1. Giả sử x, y, z là các số thực thoả mãn $a^x = bc$, $b^y = ca$ và $c^z = ab$. Tính giá trị của biểu thức $T = x+y+z-xyz$.

Lời giải (*dựa theo lời giải của các bạn: Nguyễn Đức Khải, Trần Đình Nam (lớp 10T2, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định) và Nguyễn Đình Khải Nguyên, Trần Thị Thanh Thư (lớp 11T2, 12T1, trường THPT chuyên Quốc học Huế, tỉnh Thừa Thiên – Huế)*).

Từ các giả thiết của bài ra, ta có:

$$\begin{aligned}a^{xyz} &= (bc)^{yz} = (b^y)^z \cdot (c^z)^y = (ca)^z \cdot (ab)^y\\ &= a^{y+z} \cdot c^z \cdot b^y = a^{y+z} \cdot (ab)(ca)\\ &= a^{y+z+2} \cdot (bc) = a^{x+y+z+2}.\end{aligned}$$

Từ đó, do $a \neq 1$, suy ra

$$xyz = x + y + z + 2.$$

Vì thế

$$T = x + y + z - xyz = -2.$$

Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng.

Lê Huy

P619. (Mức A) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có trực tâm H. Gọi M là điểm chính giữa cung BAC của (O). Qua O kẻ đường thẳng song song với AM, cắt HM tại P. Gọi X, Y, Z tương ứng là hình chiếu vuông góc của P trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng, đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ đi qua trung điểm của HM.

Lời giải (*dựa theo lời giải của người đề xuất bài toán*).

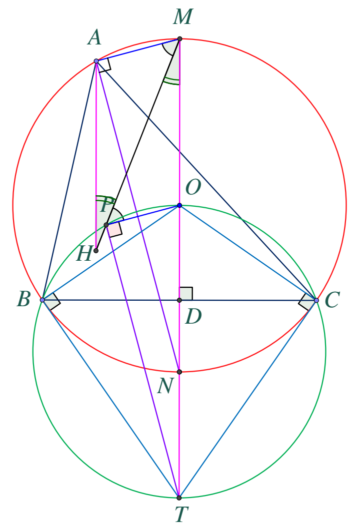
Dễ thấy, khi ABC là tam giác vuông tại A thì điểm P không tồn tại (do khi đó, hai đường thẳng AM và HM trùng nhau). *Dưới đây là lời giải cho bài đã ra, với giả thiết tam giác ABC không vuông tại A.*

Gọi N là điểm chính giữa cung BC không chứa A của (O); gọi D là trung điểm của BC; và gọi T là giao điểm của tiếp tuyến tại B và tiếp tuyến tại C của (O). Ta có, năm điểm M, O, D, N, T cùng nằm trên đường trung trực của BC, và N là trung điểm của OT. (Xem Hình 1.)

Vì D là trung điểm BC, và H, O tương ứng là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, nên $AH = 2OD$. (1)

Vì $AH \parallel MO$ (do cùng vuông góc với BC) và $AM \parallel PO$ (theo giả thiết), nên

$$\angle MHA = \angle PMO \text{ và } \angle HMA = \angle MPO.$$



Hình 1.

Do đó, $\Delta AMH \sim \Delta OPM$. Kết hợp với (1), suy ra

$$\frac{AM}{OP} = \frac{HA}{MO} = \frac{2OD}{MO}.$$

Vì CT là tiếp tuyến tại C của (O) nên OCT là tam giác vuông tại C. Do đó

$$OC^2 = OD \cdot OT;$$

suy ra, $\dfrac{OD}{MO} = \dfrac{OD}{OC} = \dfrac{OC}{OT}$.

Vì thế, $\dfrac{2OD}{MO} = \dfrac{2OC}{OT} = \dfrac{MN}{OT}$. (3)

Từ (2) và (3), suy ra

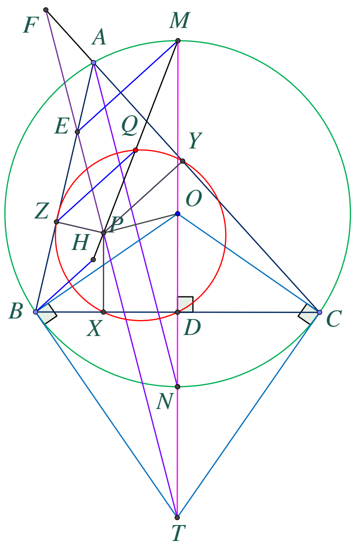
$$\frac{AM}{PO} = \frac{MN}{OT}. \quad (4)$$

Vì $AM \parallel PO$ (theo giả thiết), nên $\angle AMN = \angle POT$. Kết hợp với (4), suy ra $\Delta AMN \sim \Delta POT$. Do đó

$$\angle OPT = \angle MAN = 90^\circ. \quad (5)$$

Vì vậy, P nằm trên đường tròn đường kính OT. Mà đường tròn này chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC (do các tam giác OBT, OCT, tương ứng, vuông góc tại B, C, và N là trung điểm của OT), nên ta có năm điểm P, O, B, T, C cùng nằm trên đường tròn đường kính OT. (6)

Gọi E, F tương ứng là giao điểm của PT và AB, AC; gọi Q là trung điểm của HM. (Xem Hình 2.)



Hình 2.

Từ (5) và giả thiết $AM \parallel PO$, suy ra:

$$AN \parallel PT. \qquad (7)$$

Do đó

$$\begin{aligned}\angle BEP = \angle BET &= \angle BAN = \angle BMN \\ &= \frac{1}{2}\angle BMC = \frac{1}{2}\angle BCT \\ &= \frac{1}{2}\angle BPT \text{ (do (6))}.\end{aligned}$$

Suy ra, tam giác BEP cân tại P; vì thế, Z là trung điểm của BE. (8)

Lại do (7) nên

$$\angle MTE = \angle MNA = \angle MBA = \angle MBE;$$

suy ra, $BEMT$ là tứ giác nội tiếp. Do đó

$$\begin{aligned}\angle AEM = \angle BTM &= \angle BTO \\ &= \angle BCO \text{ (do (6))} \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BOC \\ &= 90^\circ - \angle BAC;\end{aligned}$$

suy ra, $EM \perp AC$. Vì thế, $EM \parallel BH$. Do vậy, tứ giác $BHME$ là một hình thang. Vì thế, từ định nghĩa điểm Q và (8), suy ra $ZQ \parallel BH$. Do đó, $ZQ \perp AY$. (9)

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được Y là trung điểm của CF, $CMFT$ là tứ giác nội tiếp, và $YQ \perp AZ$. (10)

Từ (9) và (10) suy ra, Q là trực tâm tam giác AZY. Do đó

$$\begin{aligned}\angle ZQY &= 180^\circ - \angle ZAY \\ &= 180^\circ - \angle BAC. \qquad (11)\end{aligned}$$

Do $BXPZ, CXPY, BEMT, CMFT$ là các tứ giác nội tiếp, nên

$$\begin{aligned}\angle ZXY &= \angle ZXP + \angle PXY = \angle ZBP + \angle PCY \\ &= \angle ZEP + \angle PFY \text{ (do (8) và (10))} \\ &= \angle BET + \angle TFC = \angle BMT + \angle TMC \\ &= \angle BMC = \angle BAC. \qquad (12)\end{aligned}$$

Từ (11) và (12), suy ra

$$\angle ZQY + \angle ZXY = 180^\circ;$$

do đó, $ZQYX$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng, cho bài đã ra với giả thiết tam giác ABC không vuông tại A.

Hạ Vũ Anh

P620. (Mức A) Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p \geq 5$, tồn tại số nguyên t sao cho: với mọi số nguyên k thì $k^2 - 2t^2 - 1$ không chia hết cho p.

Lời giải (*của người chấm bài*).

Nhắc lại định nghĩa *ký hiệu Legendre*: Với a là số nguyên, và p là số nguyên tố, ký hiệu:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } p \mid a \\ 1 \text{ nếu } p \nmid a \text{ và } \exists x \in \mathbb{Z} : x^2 \equiv a \pmod p \\ -1 \text{ nếu } p \nmid a \text{ và } \not\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 \equiv a \pmod p. \end{cases}$$

Trước hết, ta chứng minh hai Bổ đề sau:

Bổ đề 1. Với p là một số nguyên tố lẻ, và k là một số nguyên dương nhỏ hơn $p-1$, ta có:

$$1^k + 2^k + \cdots + (p-1)^k \equiv 0 \pmod p.$$

Chứng minh. Đặt

$$S = 1^k + 2^k + \cdots + (p-1)^k.$$

Do $k < p-1$ nên theo định lý Lagrange, phương trình

$$x^k - 1 \equiv 0 \pmod p$$

có tối đa k nghiệm modulo p. Vì vậy, tồn tại $a \in \{1; 2; \ldots; p-1\}$ sao cho

$$a^k \not\equiv 1\,(\bmod p)\,. \quad (1)$$

Do $\{a, 2a, \ldots, (p-1)a\}$ là một hệ thặng dư thu gọn modulo p, nên

$$\begin{aligned} S &\equiv a^k + (2a)^k + \cdots + ((p-1)\,a)^k \\ &= a^k \cdot S\,(\bmod p)\,. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $S \equiv 0\,(\bmod p)$.

Bổ đề 1 được chứng minh.

Bổ đề 2. Nếu p là một số nguyên tố lẻ thì

$$\sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{2i^2+1}{p}\right) \equiv \pm 1\,(\bmod p)\,.$$

Chứng minh. Theo tiêu chuẩn Euler, ta có:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{2i^2+1}{p}\right) \\ &\equiv \sum_{i=0}^{p-1} \left(2i^2+1\right)^{\frac{p-1}{2}}\,(\bmod p)\,. \end{aligned} \quad (3)$$

Do

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{p-1} \left(2i^2+1\right)^{\frac{p-1}{2}} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{s=0}^{(p-1)/2} \mathrm{C}^s_{(p-1)/2} \left(2i^2\right)^s \\ &= \sum_{s=0}^{(p-1)/2} 2^s \mathrm{C}^s_{(p-1)/2} \sum_{i=0}^{p-1} i^{2s} \end{aligned}$$

nên theo (3), ta có:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{2i^2+1}{p}\right) \\ &\equiv \sum_{s=0}^{(p-1)/2} 2^s \mathrm{C}^s_{(p-1)/2} \sum_{i=0}^{p-1} i^{2s}\,(\bmod p)\,. \end{aligned} \quad (4)$$

Theo Bổ đề 1, với mỗi $s \in \left\{1; 2; \ldots; \dfrac{p-3}{2}\right\}$, đều có

$$\sum_{i=0}^{p-1} i^{2s} \equiv 0\,(\bmod p)\,;$$

và theo định lý nhỏ Fermat, với mỗi số $i \in \{1; 2; \ldots; p-1\}$, đều có $i^{p-1} \equiv 1\,(\bmod p)$. Do đó, từ (4) suy ra

$$\sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{2i^2+1}{p}\right) \equiv p - 2^{(p-1)/2} \equiv \pm 1\,(\bmod p)\,.$$

Bổ đề 2 được chứng minh.

Trở lại bài toán.

Giả sử phản chứng, với mọi số nguyên t, tồn tại số nguyên k, sao cho $k^2 - 2t^2 - 1$ chia hết cho p.

Khi đó, $\left(\frac{2t^2+1}{p}\right) \in \{0; 1\}$, với mọi $t \in \mathbb{Z}$. (5).

Ta biết rằng, trong một hệ thặng dư đầy đủ modulo p, hoặc không có số m nào, hoặc có đúng hai số m, mà p là ước của $2m^2 + 1$. Vì thế, từ (5) suy ra

$$\sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{2i^2+1}{p}\right) = p,$$

$$\text{hoặc} \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{2i^2+1}{p}\right) = p - 2.$$

Do đó

$$\sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{2i^2+1}{p}\right) \equiv 0, -2\,(\bmod p)\,.$$

Vì thế, theo Bổ đề 2, ta có

$$\pm 1 \equiv 0, -2\,(\bmod p)\,,$$

là điều vô lý, do $p \geq 5$. Điều vô lý này cho thấy, giả sử phản chứng ở trên là sai; và vì thế, ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Để thuận tiện cho việc theo dõi lời giải trên, xin nhắc lại các kết quả đã được sử dụng ở lời giải đó.

◇ **Định lý Lagrange.** *Cho p là một số nguyên tố. Cho $P(x)$ là một đa thức bậc n ($n \in \mathbb{N}$), có tất cả hệ số là các số nguyên, không đồng thời chia hết cho p. Khi đó, trong tập $\{0; 1; \ldots; p-1\}$, có tối đa n số k, mà $P(k) \equiv 0\,(\bmod p)$.*

Có thể dễ dàng chứng minh định lý trên bằng phương pháp quy nạp theo n.

Một trong các hệ quả của định lý Lagrange là Tiêu chuẩn Euler, được phát biểu như sau:

◇ **Tiêu chuẩn Euler.** *Với mọi số nguyên a, với mọi số nguyên tố lẻ p, luôn có:*

$$a^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) (\bmod p).$$

2. Rất tiếc, cho tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí chưa nhận được lời giải nào cho bài toán, từ bạn đọc.

Hà Duy Hưng

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI HOÀN CHỈNH

Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải hoàn chỉnh.

KHỐI THCS

• Trường **THCS xã Pom Lót**, huyện Điện Biên, tỉnh Điện Biên: *Nguyễn Ngọc Diệp* (lớp 8C3; P611).

• Trường **TH, THCS&THPT Archimedes Đông Anh**, Tp. Hà Nội: *Trần Việt Anh* (lớp 8C1; P611, P612, P614, P616).

• Trường **THCS Việt Nam – Angieri**, Tp. Hà Nội: *Vương Khánh Toàn* (lớp 9A1; P611, P612, P613, P614, P616).

• Trường **THCS Lê Quý Đôn**, Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh: *Nguyễn Chánh Thiện* (lớp 7/14; P612, P618).

• Trường **THCS Nguyễn Trãi**, huyện Đại Lộc, tỉnh Quảng Nam: *Nguyễn Châu Tuấn Kiệt* (lớp 9/7; P612, P613, P619).

KHỐI THPT

• Trường **THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu**, tỉnh Đồng Tháp: *Đỗ Duy Quang* (lớp 11T1; P611, P612, P618).

• Trường **THPT Chu Văn An**, Tp. Hà Nội: *Nguyễn Hoàng Minh* (lớp 10I1; P618).

• Trường **THPT Hà Đông**, huyện Thanh Hà, tỉnh Hải Dương: *Phạm Văn Đăng* (lớp 10A; P611, P617, P618).

• Trường **THPT Gia Định**, Tp. Hồ Chí Minh: *Lê Đình Minh Quân* (lớp 12CT; P611, P613, P614, P616, P617, P618, P619).

• Trường **THPT chuyên Hưng Yên**, tỉnh Hưng Yên: *Trần Hữu Dương* (lớp 10 Toán 1; P611, P613, P617), *Nguyễn Gia Khánh* (lớp 11 Toán 1; P611, P612, P613, P618, P619), *Nguyễn Văn Khiêm* (lớp 10 Toán 1; P619).

• Trường **THPT chuyên Lê Hồng Phong**, tỉnh Nam Định: *Ngô Quang Bình* (lớp 10T1; P613), *Phùng Việt Cường* (lớp 10T2; P611, P613), *Nguyễn Đức Khải* (lớp 10T2; P611, P612, P614, P616, P618), *Nguyễn Ngọc Chi Mai* (lớp 12T2; P612), *Trần Đình Nam* (lớp 10T2; P616, P617, P618), *Hà Thị Kim Oanh* (lớp 12T2; P617, P618).

• Trường **THPT chuyên Lương Văn Chánh**, tỉnh Phú Yên: *Nguyễn Thị Bảo Tiên* (lớp 10 Toán 1; P618).

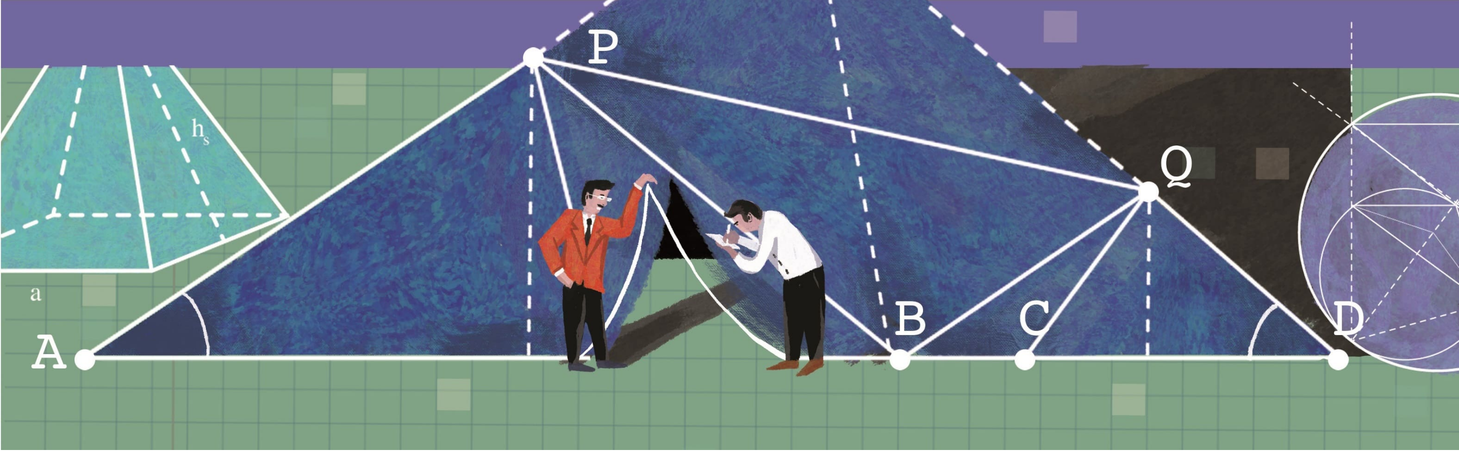
• Trường **THPT chuyên Tiền Giang**, tỉnh Tiền Giang: *Phan Tiến Đạt* (lớp 10 Toán; P611), *Nguyễn Huy Hoàng* (lớp 10 Toán; P611), *Lê Gia Khiêm* (lớp 12 Toán 1; P618), *Lê Gia Khiết* (lớp 10 Toán; P611).

• Trường **THPT chuyên Quốc học Huế**, tỉnh Thừa Thiên – Huế: *Nguyễn Đình Khải Nguyên* (lớp 11 Toán 2; P618), *Trần Sĩ Phương* (lớp 11 Toán 1; P611, P612), *Nguyễn Thị Nhật Thảo* (lớp 11 Toán 2; P612, P617), *Trần Thị Thanh Thư* (lớp 12 Toán 1; P612, P617, P618), *Đặng Quỳnh Bảo Uyên* (lớp 11 Toán 2; P611, P612, P617).

• Trường **THPT chuyên Khoa học tự nhiên**, ĐH Khoa học tự nhiên – ĐHQG Hà Nội: *Nguyễn Hữu Đức* (lớp 10A2 Toán; P613, P614, P617, P618, P619).

• Trường **THPT chuyên Sư phạm**, ĐH Sư phạm Hà Nội: *Hồ Trần Khánh Linh* (lớp 11 Toán 2; P617, P618, P619).

• Trường **Phổ thông Năng khiếu**, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh: *Lê Nam Khánh* (lớp 10; P612).



VỀ BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRONG ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA 2022

NGUYỄN TÀI CHUNG[1]

A. Giới thiệu

Trong đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia năm 2022 có bài toán phương trình hàm sau:

Bài toán 1. (HSG Quốc gia 2022). Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thoả mãn

$$f\left(\frac{f(x)}{x}+y\right)=1+f(y)$$

với mọi số thực dương x, y.

Bài viết này, chúng tôi xin được trình bày lời giải cho bài toán 1 (mục B); sau đó là trình bày bài toán tổng quát (bài toán 2), mà bài toán 1 chỉ là một trường hợp riêng của nó (mục C). Mục cuối cùng (mục D) là ứng dụng của bài toán tổng quát để giải một số bài toán phương trình hàm đi từ $\mathbb{R}^+$ vào $\mathbb{R}^+$. Mặc dù bài toán 2 có ứng dụng rất mạnh mẽ và bất ngờ, tuy nhiên vẫn có một vài bài toán thỏa mãn các giả thiết của bài toán 2, nhưng khi ta áp dụng bài toán 2 thì vẫn không thu được kết quả nào đáng kể. Bài viết này cũng sẽ giới thiệu một vài bài toán như thế để các em học sinh giỏi và các thầy cô giáo tham khảo.

B. Lời giải bài toán 1

Giả sử tồn tại hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thoả mãn

$$f\left(\frac{f(x)}{x}+y\right)=1+f(y)\qquad(1)$$

với mọi số thực dương x, y. Từ (1) ta có

$$f\left(\frac{f(x)}{x}+y\right)=1+f(y),$$
$$f\left(\frac{f(z)}{z}+y\right)=1+f(y).$$

Do đó

$$f\left(\frac{f(x)}{x}+y\right)=f\left(\frac{f(z)}{z}+y\right)\qquad(2)$$

với mọi số thực dương x, y, z.

1) Giả sử f là đơn ánh. Từ (2) ta suy ra $\frac{f(x)}{x}=\frac{f(z)}{z}$ với mọi số thực dương x, z. Do đó $f(x)=cx$ với mọi số thực dương x (với $c=f(1)$); thay vào (1) ta được $c=1$. Vậy $f(x)=x$ với mọi số thực dương x.

2) Giả sử f không là đơn ánh. Khi đó tồn tại các số thực dương $a<b$ sao cho $f(a)=f(b)$. Từ (2) ta có

$$f\left(\frac{f(a)}{a}+y\right)=f\left(\frac{f(b)}{b}+y\right)$$

---

[1] *Giáo viên trường THPT Chuyên Trần Phú, Hải Phòng.*

với mọi số thực dương y. Từ đây, thay y bởi $x-\dfrac{f(b)}{b}$, ta được

$$f(x+T)=f(x)$$

với mọi số thực $x>\dfrac{f(b)}{b}$, (với $T=\dfrac{f(a)}{a}-\dfrac{f(b)}{b}>0$). Bằng quy nạp, ta được

$$f(x)=f(x+nT)$$

với mọi số thực $x>\dfrac{f(b)}{b}$ và số nguyên dương n. Từ (1), cho $x=1$, ta được

$$f(y+\alpha)=f(y)+1$$

với mọi số thực dương y (với $\alpha=f(1)$). Do đó $f(y+n\alpha)=f(y)+n$ với mọi số thực dương y và số nguyên dương n. Xét một số thực $x>\dfrac{f(b)}{b}$ bất kỳ. Chọn số nguyên dương $n>f(x)$, rồi chọn số nguyên dương k sao cho $kT>n\alpha$, khi đó

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x+kT)=f(x+kT-n\alpha+n\alpha)\\&=f(x+kT-n\alpha)+n>n>f(x);\end{aligned}$$

ta gặp mâu thuẫn.

Vậy, có duy nhất hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x)=x$ với mọi số thực dương x.

C. Bài toán tổng quát

Bài toán 1 chỉ là một trường hợp riêng của bài toán 2 sau đây.

Bài toán 2. Cho các hàm số $f,g,h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(g(x)+y)=h(x)+f(y)$$

với mọi số thực dương x,y. Chứng minh rằng $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ là hàm hằng.

Bài toán 2 này có ý nghĩa quan trọng, nó cung cấp thêm cho chúng ta một công cụ hữu hiệu để giải một số bài toán phương trình hàm đi từ $\mathbb{R}^+$ vào $\mathbb{R}^+$.

Lời giải. Ký hiệu $P(x,y)$ là mệnh đề $f(g(x)+y)=h(x)+f(y)$, với x, y là các số thực dương.

Từ $P(x,y-g(x))$ ta suy ra $f(y-g(x))=f(y)-h(x)$ với mọi số thực $x>0,y>g(x)$. Bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được

$$f(y-pg(x))=f(y)-ph(x)$$

với mọi số thực dương x, với y đủ lớn, $p=1,2,\ldots$; và

$$f(y+qg(x))=f(y)+qh(x)$$

với mọi số thực $x>0$, với y đủ lớn, $q=1,2,\ldots$

Cố định các số thực dương x, y. Giả sử p, q là các số nguyên dương sao cho $pg(x)-qg(y)>0$ (hay $\dfrac{p}{q}>\dfrac{g(y)}{g(x)}$). Từ các đẳng thức trên, ta dễ dàng chứng minh được

$$\begin{aligned}&f(z+pg(x)-qg(y))\\&=f(z)+ph(x)-qh(y)\end{aligned}\tag{1}$$

với $z>0$ đủ lớn. Nếu $ph(x)-qh(y)<0$, khi đó từ (1) ta thay (p,q) bởi (kp,kq) với k nguyên dương đủ lớn, thì

$$\begin{aligned}&f(z+kpg(x)-kqg(y))\\&=f(z)+k(ph(x)-qh(y)),\end{aligned}$$

đây là điều vô lý (do $\lim\limits_{k\to+\infty}(k(ph(x)-qh(y)))=-\infty$). Như vậy ta phải có $ph(x)\geq qh(y)$.

Tóm lại, ta đã chứng minh được, nếu $x>0$ và $y>0$ sao cho $\dfrac{g(x)}{g(y)}>\dfrac{q}{p}$ thì $\dfrac{h(x)}{h(y)}\geq\dfrac{q}{p}$. (2)

Giả sử có $x>0$ và $y>0$ sao cho $\dfrac{g(x)}{g(y)}>\dfrac{h(x)}{h(y)}$, khi đó ta có thể chọn $p,q\in\mathbb{Z}^+$ sao cho

$$\frac{g(x)}{g(y)}>\frac{q}{p}>\frac{h(x)}{h(y)},$$

điều này mâu thuẫn với (2). Vậy $\dfrac{h(x)}{h(y)}\geq\dfrac{g(x)}{g(y)}$ với mọi số thực dương x,y; hay $\dfrac{h(x)}{g(x)}\geq$

$\frac{h(y)}{g(y)}$ với mọi số thực dương x, y. Thay đổi vai trò của x và y trong đánh giá trên ta thu được bất đẳng thức ngược lại. Vậy hàm $\frac{g(x)}{h(x)}$ là hàm hằng.

D. Ứng dụng của bài toán tổng quát

Để giải bài toán 1, ngoài cách đã trình bày như trên, dễ thấy rằng, chỉ cần áp dụng bài toán 2 cho hàm $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $h(x) = 1$, ta có ngay $f(x) = cx$, với mọi $x > 0$, trong đó c là hằng số dương. Thay lại vào đầu bài ta tìm được $c = 1$. Vậy $f(x) = x$ với mọi $x > 0$. Sau đây, chúng tôi sẽ trình bày thêm một số ứng dụng của bài toán 2.

Bài toán 3. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(x+y+f(y)) = f(x)+2y$$

với mọi số thực dương x, y.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f(x+y+f(y)) = f(x)+2y$ (1) với mọi số thực dương x, y.

Cách 1. Áp dụng bài toán 2 với $g(y) = y+f(y)$, $h(y) = 2y$, ta suy ra $y+f(y) = 2cy$ với mọi số thực dương y, với c là hằng số dương nào đó. Do đó (1) trở thành

$$f(x+2cy) = f(x)+2y$$

với mọi số thực dương x, y. Từ đây, thay y bởi $\frac{y}{2c}$, ta được

$$f(x+y) = f(x)+\frac{y}{c} = f(y)+\frac{x}{c}.$$

Do đó $f(x)+\frac{1}{c} = f(1)+\frac{x}{c}$, suy ra $f(x) = \alpha x+\beta$ với mọi số thực dương x, với α, β là các hằng số, $\alpha > 0$. Thay vào (1) ta được $\alpha = 1, \beta = 0$. Vậy $f(x) = x$ với mọi số thực dương x.

Cách 2. Trước hết, ta sẽ nhắc lại kết quả quen thuộc về phương trình hàm Cauchy: Nếu hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x)+f(y)$$

với mọi số thực dương x, y thì $f(x) = ax$ với mọi số thực dương x, trong đó a là hằng số dương. Từ (1) thay y bởi $y+z+f(z)$ ta được

$$\begin{aligned}&f\left(x+y+z+f(z)+f\left(y+z+f(z)\right)\right)\\&=f(x)+2\left(y+z+f(z)\right).\end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned}&f\left(x+y+z+f(z)+f\left(y+z+f(z)\right)\right)\\&=f\left(x+y+z+f(z)+f(y)+2z\right)\\&=f\left(x+y+f(y)+2z+(z+f(z))\right)\\&=f\left(x+2z+y+f(y)\right)+2z\\&=f\left(x+2z\right)+2y+2z\end{aligned}$$

nên

$$f\left(x+2z\right) = f(x)+2f(z) \qquad (2)$$

với mọi số thực dương x, z. Từ (2), thay z bởi $z+y$, ta được

$$f\left(x+2z+2y\right) = f(x)+2f(z+y);$$

mà $f\left(x+2z+2y\right) = f(x+2z)+2f(y) = f(x)+2f(z)+2f(y)$ nên

$$f(z+y) = f(z)+f(y).$$

Như vậy $f(z+y) = f(z)+f(y)$ với mọi số thực dương z, y. Áp dụng kết quả về phương trình hàm Cauchy ta được $f(x) = ax$ với mọi số thực dương x, trong đó a là hằng số dương nào đó. Thay vào (1) ta được $a = 1$, nghĩa là $f(x) = x$ với mọi số thực dương x.

Bài toán 4. (BMO 2021). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x+f(x)+f(y)) = 2f(x)+y$$

với mọi $x, y > 0$.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x+f(x)+f(y)) = 2f(x)+y \qquad (1)$$

với mọi số thực dương x, y.

Cách 1. Từ (1), cho $x = 1$, ta được

$$f(1+f(1)+f(y)) = 2f(1)+y$$

với mọi số thực dương y. Từ (1), thay y bởi $1+f(1)+f(y)$, ta được

$$f((x+f(x)+2f(1))+y)$$
$$=(2f(x)+1+f(1))+f(y)$$

với mọi số thực dương x, y. Áp dụng bài toán 2 với $g(x) = x+f(x)+2f(1)$, $h(x) = 2f(x)+1+f(1)$, ta suy ra

$$\frac{2f(x)+1+f(1)}{x+f(x)+2f(1)} = c$$

với mọi số thực dương x, với $c > 0$ là hằng số nào đó. Do đó

$$(c-2)f(x) = -cx+f(1)-2cf(1)+1$$

với mọi số thực dương x. Nếu $c = 2$ thì ta thấy ngay điều vô lý, do đó $c \neq 2$. Suy ra $f(x) = ax+b$, với mọi số thực dương x, với a và b là các hằng số nào đó. Thay vào phương trình ban đầu ta tìm được $a = 1$ và $b = 0$. Vậy có duy nhất hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $f(x) = x$ với mọi số thực dương x.

Cách 2. Từ (1), cho $x = 1$, ta được

$$f(1+f(1)+f(y)) = 2f(1)+y \qquad (2)$$

với mọi số thực dương y. Giả sử $z > 2f(1)$, khi đó tồn tại $y > 0$ sao cho $z = 2f(1)+y$, và theo (2) thì

$$f(1+f(1)+f(y)) = 2f(1)+y = z.$$

Như vậy hàm f nhận mọi giá trị trên khoảng $(2f(1);+\infty)$. Từ (2), cho $y = 1$, ta được

$$f(1+2f(1)) = 2f(1)+1;$$

như thế, $t = 2f(1)+1$ là điểm bất động ($f(t) = t$) của hàm số f. Với $y > 0$, ta có

$$\begin{aligned} f(y+4t) &= f(2t+(2t+y)) \\ &= f(2t+2f(t)+y) \\ &= f(2t+f(t+f(t)+f(y))) \\ &= f(t+f(t)+f(2t+f(y))) \\ &= 2f(t)+2t+f(y) = f(y)+4t. \end{aligned}$$

Vậy $f(y+4t) = f(y)+4t$, với mọi số thực dương y. Bằng quy nạp, ta được

$$f(y+4nt) = f(y)+4nt$$

với mọi $y > 0$, $n = 1,2,\ldots$ Giả sử $y > 0$. Chọn số nguyên dương N đủ lớn sao cho $4Nt - f(y) > 2f(1)$. Do hàm f nhận mọi giá trị trên khoảng $(2f(1);+\infty)$ nên tồn tại $x > 0$ sao cho $f(x) = 4Nt - f(y)$. Ta có

$$\begin{aligned} 8Nt - f(y) = f(x)+4Nt &= f(x+4Nt) \\ &= f(x+f(x)+f(y)) \\ &= 2f(x)+y = 2(4Nt-f(y))+y. \end{aligned}$$

Vậy $f(y) = y$. Như thế, $f(x) = x$ với mọi số thực dương x. Ta dễ dàng kiểm tra được rằng hàm số này thỏa mãn phương trình hàm đã cho.

Nhận xét 1. Qua các bài toán đã trình bày ở trên, chúng ta có thể thấy rằng, bài toán 2 có những ứng dụng rất mạnh mẽ và bổ ích; nó cung cấp thêm cho ta một công cụ mạnh, cũng như giúp chúng ta có những định hướng rõ ràng và nhất quán hơn khi giải một lớp các phương trình hàm đi từ $\mathbb{R}^+$ đến $\mathbb{R}^+$; nếu biết vận dụng một cách linh hoạt và sáng tạo bài toán 2 thì chúng ta có thể đưa ra được lời giải cho nhiều bài toán phương trình hàm khó. Tuy nhiên, vẫn có những phương trình thỏa mãn các giả thiết của bài toán 2, nhưng khi ta áp dụng kết quả của bài toán 2 thì lại không thu được kết quả nào đáng kể. Những phương trình hàm như vậy, thường là rất khó giải. Sau đây chúng tôi xin được nêu ra một vài phương trình hàm như thế.

1) Xét hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(f(x)+y)=f(x)+f(y) \qquad (d1)$$

với mọi số thực dương x, y. Khi áp dụng bài toán 2 ta thu được kết quả: $\dfrac{f(x)}{f(x)}$ là hằng số với mọi $x>0$. Kết quả này là tầm thường. Ta dễ dàng kiểm tra được các hàm số sau thỏa mãn $(d1)$:

$$\begin{aligned}&f(x)=x,\quad f(x)=x+2022,\\&f(x)=\left[x+1+100\sin^2(2\pi x)\right].\end{aligned}$$

2) Xét hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x+f(x)+y)=x+f(x)+f(y) \qquad (d2)$$

với mọi số thực dương x, y. Khi áp dụng bài toán 2 ta thu được kết quả: $\dfrac{f(x)+x}{f(x)+x}$ là hằng số với mọi $x>0$. Kết quả này là tầm thường. Ta dễ dàng kiểm tra được các hàm số sau thỏa mãn $(d2)$:

$$\begin{aligned}&f(x)=x,\quad f(x)=x+2022,\\&f(x)=3+[x]-\{x\}.\end{aligned}$$

Chúng ta có thể giải được các phương trình hàm $(d1)$, $(d2)$ bằng cách vận dụng thêm kiến thức toán học cao cấp, hiện đại hơn. Bạn đọc quan tâm có thể tham khảo thêm bài viết "Về một bài toán phương trình hàm trong đề chọn đội tuyển Trung Quốc 2011" của tác giả, đã được đăng trên Tạp chí Pi Tập 5 – số $7-8$ tháng $8/2021$.

Các bài toán tự rèn luyện

Bài toán 5. (Gặp gỡ Toán học 2019). Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x+f(y))=2y+f(x)$$

với mọi số thực dương x, y.

Bài toán 6. Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(f(x+f(x))+y)=2x+f(y)$$

với mọi số thực dương x, y.

Bài toán 7. (Romania 2014). Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x+3f(y))=f(x)+f(y)+2y$$

với mọi số thực dương x, y.

Bài toán 8. Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x+f(x)+y)=2f(x)+f(y)$$

với mọi số thực dương x, y.

Bài toán 9. Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(f(x)f(f(x))+y)=xf(x)+f(y)$$

với mọi số thực dương x, y.

Bài toán 10. Cho số nguyên dương n. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(x^n+f(y)\right)=f(x)^n+y$$

với mọi số thực dương x, y.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Tài Chung, 2014, *Phương trình hàm*, Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội.

[2] Đoàn Quang Đăng, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre, 2021, *Hai bổ đề trong bài toán Phương trình hàm trên tập các số thực dương.*

[3] Tạp chí Pi Tập 5 – số $7-8$ tháng $8/2021$, trang 42–49.

LỜI GIẢI ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN LẦN THỨ 22 TẠI PHÁP

BÙI VĂN BIÊN

***LTS.** Tạp chí Pi, tập 6, số 7 – 8, năm 2022, đã giới thiệu với bạn đọc đôi nét về kỳ thi Olympic Toán của Pháp và đề bài của kỳ thi lần thứ 22, năm 2022. Trong số này, tạp chí Pi giới thiệu lời giải tóm tắt để bạn đọc tham khảo.*

Đề bài

Bài 1 (Chung cho tất cả thí sinh)

Dán nhãn duyên dáng của một hình

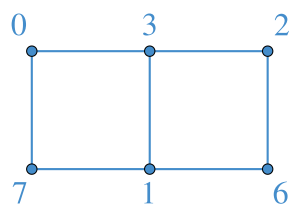
Xét một tập hợp hữu hạn các điểm. Ta nối một số điểm trong số những điểm đã cho bởi những đoạn thẳng. Tập hợp được tạo ra theo cách đó được gọi là *hình*.

Ta thực hiện việc *dán nhãn* của một hình gồm n đoạn thẳng bằng cách gắn mỗi đỉnh của hình đó với một số tự nhiên đôi một khác nhau trong khoảng từ 0 tới n.

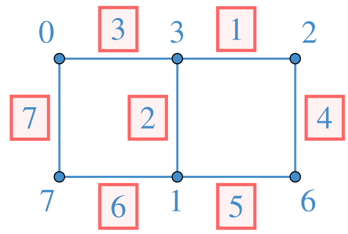
Mỗi đoạn thẳng được gán với giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số tự nhiên được gắn cho hai đầu mút của đoạn thẳng đó. Giá trị tuyệt đối thu được là một số tự nhiên, được gọi là *trọng số* của đoạn thẳng.

Ta nói rằng sự dán nhãn của một hình là *duyên dáng* nếu n trọng số nhận được trên các đoạn thẳng là những số tự nhiên từ 1 tới n.

Dưới đây là một ví dụ về sự dán nhãn duyên dáng cho một hình gồm 6 điểm và 7 đoạn thẳng.



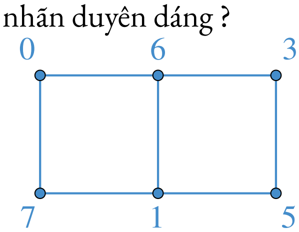
Hình được dán nhãn.

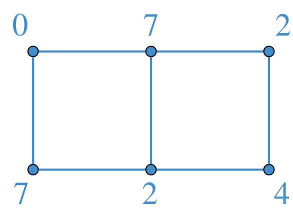


Hình được dán nhãn và trọng số.

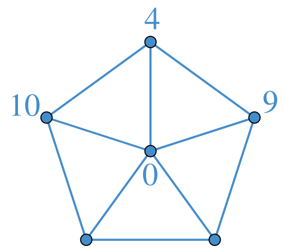
A. Một vài ví dụ

1. Trong các hình dưới đây, hình nào cho ta một dán nhãn duyên dáng ?





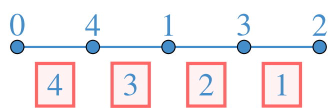
2. Bổ sung hình sau để được một dán nhãn duyên dáng.



B. Trường hợp thẳng hàng

Với mỗi số nguyên dương n, ta xét hình L_n gồm $n+1$ điểm thẳng hàng và n đoạn thẳng được tạo thành từ các điểm kề nhau.

Ta đề xuất sự gán nhãn duyên dáng của những điểm của hình L_4 như sau :



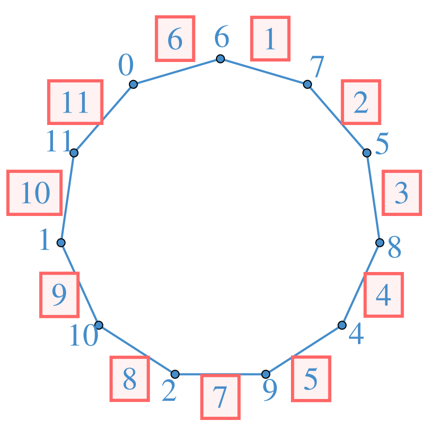
1. Chứng minh rằng tồn tại một dán nhãn duyên dáng cho mỗi hình L_5, L_6 và L_7.

2. Ta chấp nhận mà không chứng minh rằng tồn tại một dán nhãn duyên dáng đối với hình L_{2022} sao cho điểm ngoài cùng bên trái được gắn số 0. Hãy mô tả sự dán nhãn này.

C. Trường hợp đa giác

1. Chứng minh rằng mọi tam giác và tứ giác đều có thể được dán nhãn một cách duyên dáng.

2. Dựa vào dán nhãn duyên dáng của hình đa giác 11 cạnh dưới đây, hãy chỉ ra một cách dán nhãn duyên dáng của đa giác 12 cạnh.



3. Xác định tính chẵn lẻ đối với trọng số của một đoạn thẳng khi mà các số được gán cho các đầu mút của nó:

a. Khác nhau về tính chẵn lẻ.

b. Cùng tính chẵn lẻ.

4. Từ đó suy ra rằng hình ngũ giác không thể có dán nhãn duyên dáng.

D. Một hình đa giác với số cạnh lớn

Ta ký hiệu K_{2022} là hình được tạo thành từ 2022 điểm sao cho mỗi cặp điểm bất kỳ trong chúng được nối với nhau bằng một đoạn thẳng duy nhất.

1. Chứng minh rằng K_{2022} được tạo thành từ 2043231 đoạn thẳng.

2. Giả sử rằng tồn tại một dán nhãn duyên dáng đối với hình K_{2022}.

a. Có bao nhiêu đoạn thẳng mang trọng số là số lẻ?

b. Ta ký hiệu p là số điểm được dán nhãn là một số chẵn. Biểu diễn theo tham số p, số đoạn thẳng mà ở đó trọng số là một số lẻ.

3. Chứng minh rằng hình K_{2022} không thể có dán nhãn duyên dáng.

Bài 2 (Dành cho thí sinh theo chương trình chuyên)

Những số phân chia được

Phần A

Ta nói rằng một số tự nhiên là *phân chia được đơn nguyên* nếu như số đó lớn hơn hoặc bằng 3 và viết được dưới dạng : $1+2+3+\cdots+p$, trong đó p là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 2. Ví dụ, 3 và 10 là những số tự nhiên phân chia được đơn nguyên bởi vì: $3=1+2$ và $10=1+2+3+4$.

Ta nhắc lại rằng, tổng các số tự nhiên từ 1 tới n được cho bởi công thức:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

1. *a*. Chứng minh rằng 21 và 136 là những số tự nhiên phân chia được đơn nguyên.

b. Số tự nhiên 1850 có phân chia được đơn nguyên không?

2. Xét a là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 3. Hãy xác định điều kiện cần và đủ sao cho a là một số tự nhiên phân chia được đơn nguyên.

Phần B

Ta nói rằng một số tự nhiên là phân chia được nếu nó có thể viết dưới dạng tổng của hai hoặc nhiều hơn các số nguyên dương liên tiếp. Ví dụ, 24 và 25 là những số tự nhiên phân chia được vì $24 = 7 + 8 + 9$ và $25 = 12 + 13$. Tuy nhiên 4 không phải là số tự nhiên phân chia được vì $1 + 2 < 4 < 1 + 2 + 3$ và $2 + 3 > 4$.

1. Chứng minh rằng 9 và 15 là những số tự nhiên phân chia được nhưng 16 thì không.

2. Chứng minh rằng mọi số nguyên lẻ lớn hơn hoặc bằng 3 là phân chia được.

Xét k và q là những số tự nhiên với $k \geq 2$. Đặt $S = (q+1) + (q+2) + \cdots + (q+k)$. Chứng minh rằng: $2S = k(k+1+2q)$.

4. Chứng minh rằng mọi lũy thừa của 2 đều không phân chia được.

5. Chúng ta quan tâm đến những số nguyên dương chẵn và không phải là lũy thừa của 2. Gọi n là một số như thế. Ta chấp nhận rằng tồn tại duy nhất một cặp số tự nhiên (r, m) trong đó m là một số tự nhiên lẻ lớn hơn hoặc bằng 3 và r một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1, sao cho $n = 2^r \times m$.

a. Xác định r và m khi $n = 56$. Từ đó chỉ ra rằng 56 là một số phân chia được và hãy viết nó dưới dạng tổng của các số nguyên dương liên tiếp.

b. Chứng minh rằng 44 là phân chia được.

c. Chứng minh rằng mọi số nguyên dương chẵn và không phải là lũy thừa của 2 là phân chia được.

6. Từ những kết quả trên, hãy xác định tập hợp tất cả các số tự nhiên phân chia được.

Phần C

Một số tự nhiên được gọi là phân chia được một cách duy nhất nếu số đó được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tổng của hai hoặc nhiều hơn các số nguyên dương liên tiếp.

1. Chứng minh rằng 13 là số phân chia được một cách duy nhất. Số 25 có phải là số phân chia được một cách duy nhất không?

2. *a*. Xét số tự nhiên n là tổng của k số tự nhiên dương liên tiếp, với k $ge3$. Ta có thể viết n dưới dạng $n = (q+1) + (q+2) + \cdots + (q+k)$, với q là số tự nhiên. Chứng minh rằng n không phải là số nguyên tố.

b. Từ đó suy ra rằng mọi số nguyên tố lớn hơn hoặc bằng 3 là phân chia được một cách duy nhất.

Bài 3 (Dành cho các thí sinh không theo chương trình chuyên)

Số ba

Ta xây dựng một dãy số tự nhiên dựa trên quy tắc sau.

Quy tắc

Số hạng đầu tiên của dãy là 4.

Từ một số hạng, để có số hạng tiếp theo, ta thực hiện một trong những phép toán sau:

- Nhân số đó với 3;
- Nhân số với 3 rồi cộng kết quả nhận được với 2;
- Nếu là số chẵn thì chia cho 2.

Nếu một trong các dãy được xây dựng theo cách này có số hạng nào đó bằng N, thì ta nói rằng N là *số có thể đạt được*.

Ví dụ, số 11 có thể đạt được: thật vậy, ta bắt đầu từ số 4, nhân 4 với 3 để được 12, sau đó ta chia 12 cho 2 hai lần liên tiếp để được 3, sau đó nhân 3 với 3 rồi cộng 2 ta được kết quả là 11.

1. Chứng tỏ rằng tất cả các số tự nhiên từ 1 đến 12 đều có thể đạt được bằng quy tắc nêu trên.

2. Chứng tỏ rằng 2022 có thể đạt được bằng quy tắc nêu trên.

3. Giả sử rằng tồn tại các số tự nhiên không thể đạt được bằng cách áp dụng quy tắc nêu trên. Gọi m là số nhỏ nhất như vậy.

a. Chứng tỏ rằng m không phải là bội của 3.

b. Chứng tỏ rằng $m-2$ không phải là bội của 3.

c. Chứng tỏ rằng $m-1$ cũng không phải là bội của 3.

d. Dựa vào kết quả trên, hãy đưa ra kết luận.

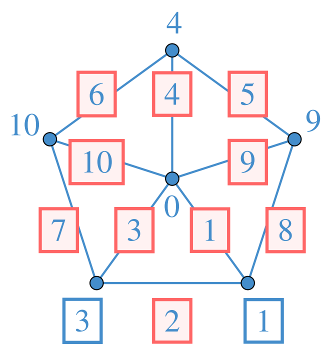
Lời giải

Bài 1 (Chung cho tất cả thí sinh).

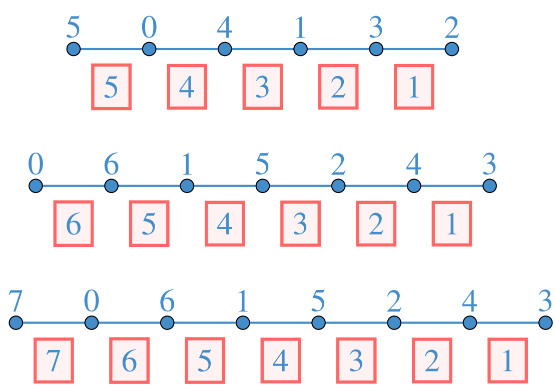
Sự dán nhãn duyên dáng của một hình.

A. 1. Hình thứ nhất không phải là một dán nhãn duyên dáng bởi vì có hai trọng số giống nhau: $6-0=6=7-1$. Hình thứ hai cũng không phải là một dán nhãn duyên dáng bởi vì có hai nhãn 7 bằng nhau.

2. Hình đã cho có thể được bổ sung như sau:



B. 1. Ví dụ về dán nhãn duyên dáng của L_5, L_6, L_7:

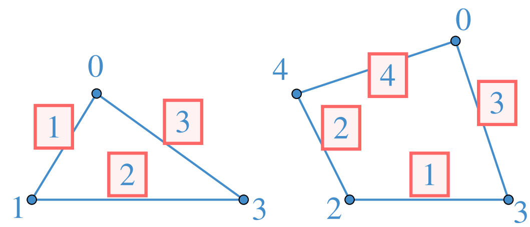


2. Tương tự như các dán nhãn đã nêu của L_4 và L_6, ta có thể dán nhãn hình L_{2022} như sau: đánh số các điểm từ trái qua phải:

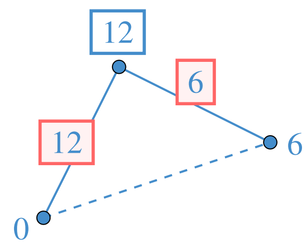
$$0, 2022, 1, 2021, 2, 2020, 3, 2019, 4, 2018 \ldots, 1000, 1012, 1011$$

Với cách dán nhãn trên, các trọng số từ trái qua phải là: $2022, 2021, \ldots, 4, 3, 2, 1$. Đó là một dán nhãn duyên dáng của L_{2022}.

C. 1. Ví dụ cho tam giác và tứ giác:



2. Thêm đỉnh số 12 vào đa giác 11 cạnh của bài ra như sau:

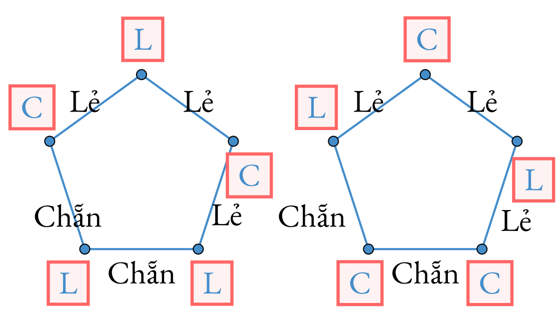


3*a*. Lẻ.

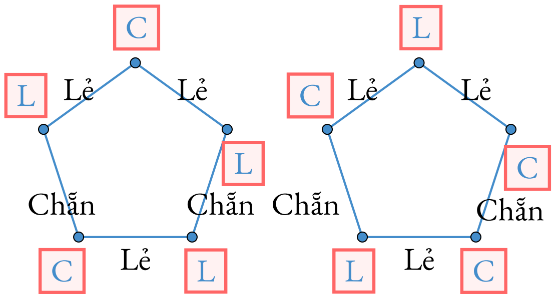
b. Chẵn.

4. Giả sử ngược lại: tồn tại dán nhãn duyên dáng đối với hình ngũ giác. Khi đó trọng số các cạnh sẽ là các số tự nhiên từ 1 tới 5, do đó có 3 số lẻ và 2 số chẵn. Các đầu mút của 3 cạnh có trọng số lẻ phải khác tính chẵn lẻ. Ta có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: 3 cạnh trọng số lẻ kề nhau.



Trường hợp 2: 2 cạnh trọng số lẻ kề nhau liền kề với một cạnh có trọng số chẵn.



Trong mọi trường hợp, tồn tại hai đỉnh liên tiếp, khác tính chẵn lẻ nhưng lại cho trọng số chẵn như minh họa phía trên, mâu thuẫn.

D. 1. Hình K_{2022} có $C^2_{2022} = \frac{1}{2} \times 2022 \times 2021 = 2043231$ đoạn thẳng.

2*a*. Có 1021616 đoạn thẳng có trọng số lẻ là.

b. Có p điểm được dán nhãn chẵn và $2022 - p$ điểm được dán nhãn lẻ. Số các đoạn thẳng có trọng số lẻ chính là số cặp điểm được dán nhãn khác tính chẵn lẻ, nghĩa là $p(2022 - p)$.

3. Giả sử ngược lại, khi đó số các đoạn thẳng có trọng số lẻ là 1021616, vì thế tồn tại một số tự nhiên p sao cho $p(2022-p) = 1021616$. Nhưng phương trình này không có nghiệm nguyên, mâu thuẫn.

Bài 2

A. 1*a*. Các số 21 và 136 là phân chia được đơn nguyên vì: $21 = 1+2+\cdots+6$ và $136 = 1+2+\cdots+16$.

b. Giả sử 1850 là phân chia được đơn nguyên. Khi đó tồn tại số tự nhiên n sao cho: $1+2+\cdots+n = 1850$, dẫn đến $n^2+n-3700 = 0$. Nhưng phương trình bậc hai này không có nghiệm nguyên, mâu thuẫn.

2. Số tự nhiên $a \geq 3$ là một số phân chia được đơn nguyên khi và chỉ khi phương trình: $n^2 + n - 2a = 0$ có ít nhất một nghiệm nguyên dương. Từ đó dễ thấy điều kiện cần và đủ là $1+8a$ là số chính phương.

B. 1. Các số 9 và 15 là phân chia được vì $9 = 4+5$ và $15 = 7+8$. Tuy nhiên, 16 không phân chia được vì:

$1+2+3+4+5<16<1+2+3+4+5+6;$
$2+3+4+5<16<2+3+4+5+6;$
$3+4+5<16<3+4+5+6;$
$4+5+6<16<4+5+6+7;$
$5+6<16<5+6+7; 6+7<16<6+7+8;$
$7+8<16<7+8+9$ và $8+9>16$.

2. Đặt $n = 2k+1$. Khi đó $n = k+(k+1)$, do đó là phân chia được.

3. Hiển nhiên.

4. Giả sử $N = 2^p$ là phân chia được. Theo câu trên, tồn tại các số nguyên $k, q \geq 2$ sao cho: $2^{p+1} = k(2q+k+1)$. Điều này là vô lý vì vế trái là một luỹ thừa của 2 còn vế phải là tích của một số chẵn và một số lẻ lớn hơn 1.

5*a*. Ta có $56 = 2^3 \times 7$ nên $r = 3$ và $m = 7$. Do đó $2 \times 56 = 2^4 \times 7 = 7(2\times 4+7+1)$ vì thế 56 là phân chia được theo câu $B.3$. Cụ thể hơn, $56 = 5+6+\cdots+11$.

b. Tương tự, $2\times 44 = 8\times 11 = 8(2\times 1 + 8+1)$. Do đó $44 = 2+3+\cdots+9$ và 44 là phân chia được.

c. Đặt $n = 2^r \times m$, với $m \geq 3$ là một số nguyên lẻ và r nguyên dương. Ta suy ra $2n = 2^{r+1} \times m$. Xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1: $m > 2^{r+1}$. Tồn tại số tự nhiên l sao cho $m = 2^{r+1}+1+2l$. Khi đó $2n = 2^{r+1}(2l+2^{r+1}+1)$, vì thế theo câu $B.3$ thì n phân chia được.

Trường hợp 2: $m < 2^{r+1}$. Tồn tại một số tự nhiên l sao cho $2^{r+1} = m+1+2l$. Khi đó $2n = m(2l+m+1)$ Vì thế, vẫn theo câu $B.3$ thì n phân chia được.

6. Từ các câu 2 và 5, ta suy ra rằng tập hợp những số tự nhiên phân chia được là những số tự nhiên lẻ lớn hơn hoặc bằng 3 và những số tự nhiên chẵn không phải là lũy thừa của 2.

C. 1. Do 13 là số tự nhiên lẻ lớn hơn 3, nên theo phần trên là phân chia được. Cụ thể, $13 = 6+7$. Đây là biểu diễn duy nhất của 13.

Thật vậy, nếu $13 = (q'+1)+(q'+2)+\cdots+(q'+k')$ với $k' \geq 2$ và q'. Khi đó $2\times 13 = k'(2q'+k'+1)$. Vì $2q'+k'+1 > k'$ nên ta suy ra $k' < 13$. Vì 13 là số nguyên tố, nên ta suy ra k' là ước của 2, chứng tỏ k'. Từ đó $q' = 5$ và ta nhận được biểu diễn $13 = 6+7$. Vậy, 13 là số phân chia được một cách duy nhất.

Số 25 là phân chia được, nhưng không phải là phân chia được một cách duy nhất do $25 = 12+13 = 3+4+5+6+7$.

$2a$. Ta có $n = (q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$, hay $n = \dfrac{k(2q+k+1)}{2}$. Tùy vào tính chẵn lẻ của k, một trong hai biểu diễn $n = \dfrac{k}{2}\cdot(2q+k+1), n = k\cdot\dfrac{2q+k+1}{2}$ cho thấy n là tích của hai số nguyên > 1, do đó là không là số nguyên tố.

b. Giả sử p là một số nguyên tố ≥ 3. Theo phần B, ta biết rằng p là phân chia được. Cụ thể, $p = (q+1)+(q+2)$ với $q = \dfrac{p-3}{2}$. Ta sẽ chứng minh biểu diễn này là duy nhất. Giả sử $p = (q'+1)+(q'+2)+\cdots+(q'+k')$ với các số tự nhiên q' và $k' \geq 2$. Suy ra $2p = k'(2q'+k'+1)$. Vì $2q'+k'+1 > k'$ nên $k' < p$ là một ước ≥ 2 nhưng $< p$ của $2p$. Mà các ước của $2p$ là $1, 2, p, 2p$ nên ta suy ra $k' = 2$. Từ đó $q' = q$. Vậy, mọi số nguyên tố lớn hơn hoặc bằng 3 đều phân chia được một cách duy nhất.

Bài 3

1. Tất cả các số tự nhiên từ 1 đến 12 đều có thể đạt được bằng các quy tắc của đề bài, chẳng hạn:

$$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{:2} 1, \qquad 4 \xrightarrow{:2} 2,$$

$$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{:2} 3, \qquad 4,$$

$$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{:2} 1 \xrightarrow{\times 3} 3 \xrightarrow{+2} 5,$$

$$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{\times 3} 6,$$

$$4 \xrightarrow{\times 3} 12 \xrightarrow{+2} 14 \xrightarrow{:2} 7,$$

$$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{+2} 8,$$

$$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{:2} 1 \xrightarrow{\times 3} 3 \xrightarrow{\times 3} 9,$$

$$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{\times 3} 18 \xrightarrow{+2} 20 \xrightarrow{:2} 10,$$

$$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{:2} 1 \xrightarrow{\times 3} 3 \xrightarrow{\times 3} 9 \xrightarrow{+2} 11,$$

$$4 \xrightarrow{\times 3} 12.$$

2. Ta có thể đạt được 2022 như sau: trước hết, dựa vào câu 1, ta có thể thu được 8, sau đó:

$$8 \xrightarrow{\times 3} 24 \xrightarrow{\times 3} 72 \xrightarrow{+2} 74 \xrightarrow{\times 3} 222$$

$$222 \xrightarrow{+2} 224 \xrightarrow{\times 3} 672 \xrightarrow{+2} 674 \xrightarrow{\times 3} 2022.$$

$3a$. Giả sử $m = 3a$, với a là số tự nhiên. Do $a < m$ nên a là số đạt được. Thế nhưng khi đó, sau khi đạt được a, ta chỉ cần Nhân 3 để đạt được m. Chứng tỏ m cũng đạt được, mâu thuẫn.

b. Giả sử $m - 2 = 3b$. Do $b < m$ nên b là đạt được. Khi đó, sau khi đạt được b, ta chỉ cần áp dụng thêm 2 phép toán: Nhân 3, sau đó Cộng 2, để thu được m. Vậy, m cũng đạt được, mâu thuẫn.

c. Giả sử $m - 1 = 3c$. Ta có $m = 3c+1 > 2c$ nên $2c$ cũng đạt được. Khi đó, sau khi đạt được $2c$, ta lần lượt thực hiện các phép toán Nhân 3, Cộng 2, rồi Chia 2, ta thu được m. Vậy, m cũng đạt được, mâu thuẫn.

d. Từ các lập luận ở trên, ta thấy rằng không có số nguyên dương không đạt được nhỏ nhất. Chứng tỏ không có số nguyên dương không đạt được, hay, mọi số nguyên dương đều đạt được.

Tài liệu tham khảo

[1] Tạp chí Pi, tập 6, số 7 – 8, năm 2022.

[2] Les Olympiades nationales de mathématiques | Ministère de l'Education Nationale et de la Jeunesse.

[3] https://www.freemaths.fr/annales-olympiades-mathematiques-premieres-scientifiques-s/nationales/2022

GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày lời giải của các bài toán trong kỳ thi Olympic Toán học của Hà Lan năm học $2020-2021$ đăng trong số báo $6/2022$.

OC13. Bằng cách thay mỗi dấu $*$ trong biểu thức

$$1*2*3*4*5*\cdots*2019*2020$$

bởi dấu $+$ hoặc dấu $-$, ta được một phép tính. Hãy thay các dấu $+$ và $-$ vào như vậy để kết quả của phép tính nhận được là dương và nhỏ nhất có thể.

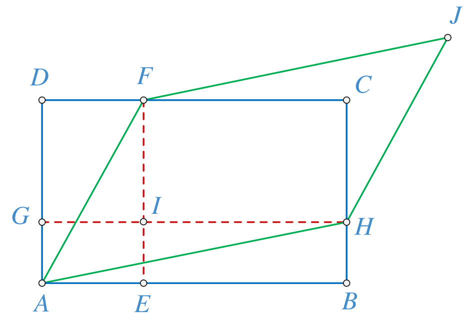
Lời giải. Ta nhận xét rằng hai số $a+b$ và $a-b$ có cùng tính chẵn lẻ. Do đó dù thay các dấu $+, -$ vào như thế nào thì kết quả của phép tính thu được cũng luôn chẵn vì có cùng tính chẵn lẻ với tổng

$$1+2+3\cdots+2019+2020=2021\times1010.$$

Như vậy nếu kết quả là số dương thì luôn lớn hơn hoặc bằng 2. Để đạt được giá trị 2, ta chia các số thành các nhóm gồm 4 số liên tiếp và điền dấu để nhóm đầu tiên cho kết quả là 2, các nhóm còn lại cho kết quả 0:

$$\begin{aligned}&(1+2+3-4)+(5-6-7+8)+\cdots\\&+(2017-2018-2019+2020)=2.\end{aligned}$$

OC14. Hình chữ nhật $ABCD$ được chia nhỏ thành bốn hình chữ nhật như trong hình vẽ bên dưới. Diện tích hình chữ nhật $AEIG$ bằng 3, diện tích hình chữ nhật $EBHI$ bằng 5 và diện tích hình chữ nhật $IHCF$ bằng 12. Hỏi diện tích của hình bình hành $AHJF$ bằng bao nhiêu?



Lời giải. Do $S_{AHJF}=2S_{AHF}$, ta chỉ cần tính diện tích tam giác AHF.

Trước tiên ta có

$$\begin{aligned}S_{GIFD}\times S_{EBHI}&=(IG\times IF)\times(IE\times IH)\\&=(IG\times IE)\times(IF\times IH)\\&=S_{AEIG}\times S_{IHCF}.\end{aligned}$$

Từ đó tính được $S_{GIFD}=\dfrac{36}{5}$. Như vậy, ta biết diện tích hình vuông

$$S_{ABCD}=3+5+12+\frac{36}{5}=27\frac{1}{5}.$$

Do đó, ta tính được

$$\begin{aligned}S_{AHF}&=S_{ABCD}-S_{AFD}-S_{FHC}-S_{ABH}\\&=S_{ABCD}-\frac{S_{AEFD}}{2}-\frac{S_{ABHG}}{2}-\frac{S_{IHCF}}{2}\\&=27\frac{1}{5}-\frac{51}{10}-4-6=12\frac{1}{10}.\end{aligned}$$

Như vậy diện tích hình bình hành $AHJF$ là $24\frac{1}{5}$.

OC15. Chúng ta xét các hàng ngang gồm 2020 đồng tiền xu, mỗi đồng có mệnh giá 1, 2 hoặc 3. Biết rằng :

- Giữa hai đồng xu mệnh giá 1 luôn có ít nhất một đồng xu khác;
- Giữa hai đồng xu mệnh giá 2 luôn có ít nhất hai đồng xu khác;
- Giữa hai đồng xu mệnh giá 3 luôn có ít nhất ba đồng xu khác.

Hỏi có bao nhiêu hàng khác nhau gồm 2020 đồng xu thỏa mãn các điều kiện trên?

Lời giải. Xét một dãy hàng ngang 2020 thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Tạm thời bỏ đi các đồng xu mệnh giá 3 (nếu có) ra khỏi hàng, ta nhận được các dãy các đồng xu liên tiếp, mỗi đồng có mệnh giá 1 hoặc 2 (chúng được ngăn cách nhau bởi các đồng xu mệnh giá 3 ban đầu).

Nhận xét rằng một dãy các đồng xu liên tiếp như vậy (mỗi đồng có mệnh giá 1 hoặc 2) không chứa hai đồng mệnh giá 2, vì nếu không khi đó, theo điều kiện thứ hai, giữa hai đồng mệnh giá 2 liên tiếp có hai đồng mệnh giá 1 đứng cạnh nhau, mâu thuẫn với điều kiện đầu tiên. Như vậy, một dãy liên tiếp các đồng xu mệnh giá nhỏ hơn 3 chỉ có 5 loại sau:

$$121; 12; 21; 1; 2.$$

Mà theo điều kiện thứ ba, giữa hai đồng mệnh giá 3 có đúng 3 đồng xu khác, do đó trong 5 loại trên thì 4 loại sau không thể xuất hiện, nghĩa là giữa hai đồng mệnh giá 3 liên tiếp có đúng 3 đồng xu như sau: 31213. Vì vậy dãy 2020 đồng xu thỏa mãn đề bài sẽ có dạng:

$$\underbrace{\cdots}_{\text{không chứa 3}}\quad \underbrace{312131213\cdots31213}_{k\text{ dãy 3121 và thêm số 3}}\quad \underbrace{\cdots}_{\text{không chứa 3}}.$$

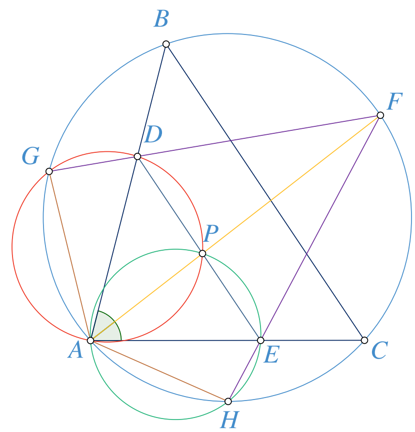
Do mỗi khúc ở đầu và cuối chứa không quá 3 đồng xu nên chỉ có duy nhất một khả năng là $k = 504$ và tổng số đồng xu ở cả hai khúc đầu và cuối bằng 3. Ta có 10 lựa chọn cho khúc đầu và cuối như sau:

Khúc đầu	$\emptyset$	1	1	2	2	12	12	21	21	121
Khúc cuối	121	12	21	12	21	1	2	1	2	$\emptyset$

Như vậy có 10 hàng khác nhau gồm 2020 đồng xu thỏa mãn đầu bài.

Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc ba bài toán trong kỳ thi Olympic Toán học Trẻ của Estonia năm học $2020-2021$. Các bài toán này phù hợp với trình độ học sinh Trung học cơ sở.

OC22. Tia phân giác tại đỉnh A của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm $F\,(F \neq A)$. Lấy điểm D và E lần lượt trên các cạnh AB và AC sao cho DE song song với BC. Gọi G và H lần lượt là giao điểm của các tia FD và FE với đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC (G \neq F, H \neq F)$. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác AGD và AHE cắt nhau tại điểm $P (P \neq A)$. Chứng minh rằng điểm P nằm trên đường thẳng AF.

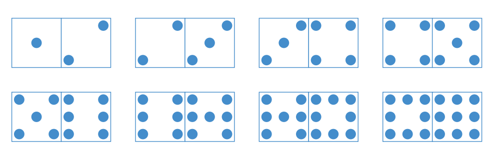


OC23. Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 3$ sao cho có thể viết một số (không nhất thiết là số nguyên) vào mỗi đỉnh của một đa giác đều n cạnh thỏa mãn cả hai điều kiện sau:

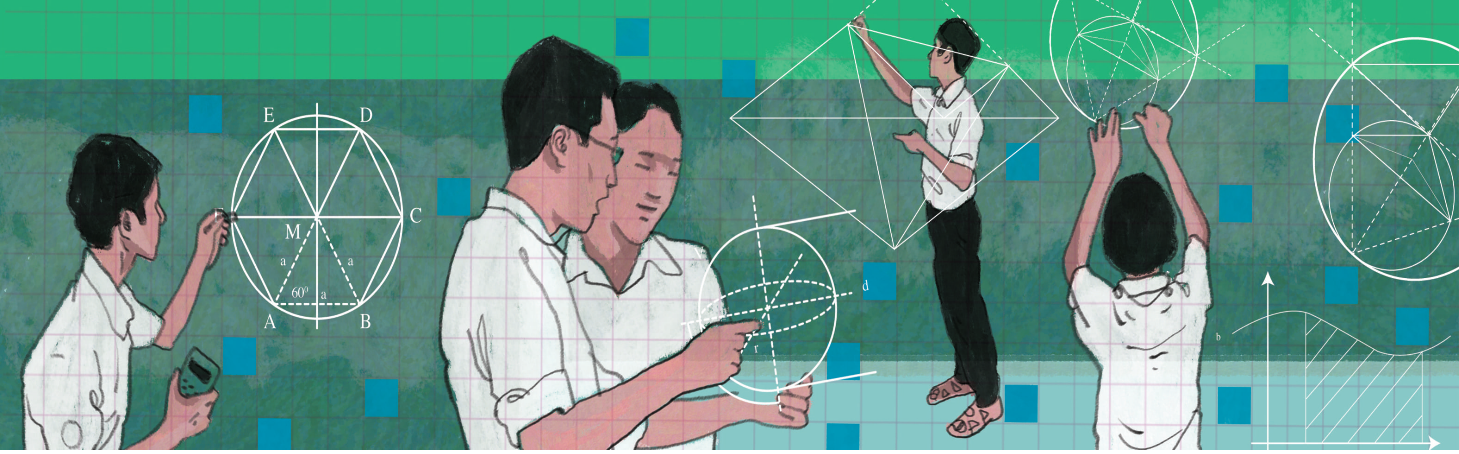
(1) Với bất kỳ ba đỉnh liên tiếp theo chiều kim đồng hồ của đa giác, chứa các số x, y và z tương ứng, thì ta có $x = |y - z|$;

(2) Tổng các số trong tất cả các đỉnh của đa giác bằng 1.

OC24. Có một bộ 8 quân cờ domino như trong hình vẽ bên dưới, mỗi quân gồm hai ô vuông đơn vị:



Liệu có thể lát kín hoàn toàn một bảng vuông có kích thước 4×4 bằng những quân domino này sao cho tổng số chấm trên mỗi hàng, mỗi cột đều bằng nhau?



SUY NGHĨ VỀ VIỆC DẠY TIN HỌC TRONG TRƯỜNG PHỔ THÔNG

HỒ ĐẮC PHƯƠNG

Trong bài viết này, tôi muốn nhấn mạnh việc giảng dạy Tin học và Công nghệ Thông tin (CNTT) hiện nay còn lạc hậu và điều này hạn chế việc phát triển ngành CNTT của nước ta.

1. Sự cần thiết của tư duy Tin học

Trong một nền kinh tế dựa vào công nghệ cao – khi mà "nội dung" sẽ là một trong những mặt hàng chính thì Lập trình – thao tác trên các dữ liệu thô, tạo ra các tri thức có giá trị trở thành một kỹ năng có nhu cầu cao, một nghề nghiệp thu hút trong thị trường lao động. Gần như mọi khía cạnh của nền kinh tế, mọi hoạt động khoa học ngày nay đều có sự hiện diện của Tin học. Chẳng hạn, ngày nay chúng ta đang "bơi trong biển dữ liệu", làm thế nào để có thể "chắt lọc" được từ đó những tri thức đáng giá – "xử lý dữ liệu lớn" là minh chứng rõ nét cho nhu cầu này.

Chính vì thế, có được một tư duy tốt về thuật toán và kỹ năng lập trình sẽ giúp ích rất lớn cho học sinh muốn tham gia vào các lĩnh vực khoa học – công nghệ.

Có thể nói, Tin học rèn dũa cho học sinh tư duy thuật toán và tính thực tế. Ở mức độ đơn giản, học sinh có được *kỹ năng giải quyết vấn đề*: từ một tập hợp đầu vào, cần phải xử lý như thế nào để có được một kết quả thỏa mãn. Ở mức cao hơn, học sinh được rèn luyện *kỹ năng sáng tạo ra vấn đề*, rồi tìm cách giải quyết nó. Ngoài ra, Tin học sẽ giúp học sinh có được *sản phẩm* thông qua quá trình lao động. Điều này khiến cho việc học nói chung không chỉ mang tính lý thuyết, mà còn tăng tính thực hành.

Qua quá trình giảng dạy, tôi nhận thấy việc dạy các kỹ năng lập trình cơ bản sẽ giúp học sinh:

- Tăng tốc quá trình phát triển;
- Thúc đẩy sáng tạo;
- Tăng tính tự tin;
- Nâng cao kỹ năng giải quyết vấn đề và tư duy phản biện;
- Thấy được ứng dụng cụ thể của các môn khoa học khác, đặc biệt là Toán học
- Định hướng nghề nghiệp.

Ở Hoa Kỳ, Tổng Thống Barack Obama trong thông điệp liên bang 2013, đã nhấn mạnh vào "việc xây dựng các kỹ năng cho học sinh đáp ứng một nền kinh tế công nghệ cao", và sau này, ông kêu gọi giới trẻ "thay vì chỉ biết tiêu thụ, hãy sản xuất ra thông tin", và "không chỉ sử dụng máy điện thoại di động, hãy lập trình cho nó". Hoa Kỳ đã có nhiều chương trình tài trợ đưa việc giảng dạy lập trình vào khối tiểu học và trung học.

Anh Quốc là quốc gia đầu tiên trên thế giới đã đưa việc học lập trình thành điều bắt buộc trong các trường tiểu học và trung học. Trẻ em sẽ học lập trình ở độ tuổi 5 đến 16. Ở giai đoạn 1, học sinh học viết chương trình nhỏ, các khía cạnh đơn giản của thuật toán, cài đặt và thực thi trên thiết bị điện tử. Trong giai đoạn 2, học sinh được học cách thiết kế và viết các chương trình phức tạp hơn, tương tác với môi trường xung quanh. Ở giai đoạn 3 (cấp trung học), học sinh học về đại số Boolean, tư duy thuật toán. Giai đoạn 4 tập trung vào sáng tạo và định hướng nghề nghiệp.

2. Học Tin học quá muộn sẽ làm ngành CNTT tụt hậu

Ở Việt Nam, CNTT là một ngành quan trọng, được Đảng và Nhà nước coi là một mũi nhọn trong việc phát triển kinh tế. Và để có thể cạnh tranh trong ngành công nghiệp, chúng ta cần thật nhiều những chuyên gia – lập trình, thiết kế hệ thống, quản trị hệ thống. Những người này phải có khả năng tương tác, nhận và bàn giao công việc với các đối tác nước ngoài. Ngành CNTT của chúng ta thực sự thiếu trầm trọng những nhân lực có chất lượng cao.

Ở Khoa CNTT thuộc Đại học Công Nghệ, ĐHQGHN, một trong những điều chúng tôi cố gắng làm, là đưa việc giảng dạy chuyên môn vào ngay từ đầu, nhưng phải đến sau năm thứ ba và thứ tư, sinh viên mới dần có đủ kỹ năng căn bản để đi thực tập. Mặc dù cấp THPT đã có môn lập trình, nhưng gần như sinh viên lên Đại học lại học lại từ đầu.

Một lý do có lẽ là, hiện nay, Tin học ở cấp THPT là môn phụ, không có mặt trong các kỳ thi quan trọng như Kỳ thi tốt nghiệp THPT hay thậm chí trong cả các kỳ thì tuyển vào ngành CNTT ở các trường đại học. Chính vì thế, nên ở cấp THPT, việc dạy và học Tin học có phần bị buông lỏng. Học sinh không học đủ, không làm được những bài tập lập trình rất cơ bản. Giáo viên Tin học có thể phải kiêm nhiệm thêm hàng núi các công việc "vô danh" khác và ít có điều kiện trau dồi chuyên môn. Phụ huynh nói chung cũng không quan tâm cho con con em mình học Tin học sớm.

Trong bất kỳ lĩnh vực nào, để trở thành chuyên gia xuất sắc, bạn phải bỏ ra 10.000 giờ luyện tập. Ngành CNTT cũng không ngoại lệ. Trong lĩnh vực CNTT, rất nhiều hãng khởi nghiệp bởi những thanh niên còn rất trẻ. Và những người rất trẻ này thường được tiếp xúc với máy tính, lập trình từ bé. Nhưng thực tế ở ngay Đại học Công Nghệ cho thấy, chỉ có khoảng $1/10$ số sinh viên vào thẳng của Khoa CNTT, Đại học Công Nghệ là có nền tảng lập trình tốt (phần lớn là học sinh đạt giải trong kỳ thi HSG Quốc gia môn Tin học). Đa phần trong số $9/10$ sinh viên còn lại dù thi Đại học ở khối A và A1 nhưng gần như không biết gì về lập trình, và phải học từ đầu.

Lời kết

CNTT là ngành phụ thuộc rất lớn vào trí tuệ và kỹ năng lao động (kỹ năng lập trình, kỹ năng vận hành các hệ thống tin học). Như vậy ngành CNTT của Việt Nam hoàn toàn có thể "cất cánh" trở thành một ngành mũi nhọn. Và để tiềm năng này trở thành hiện thực, hãy coi trọng và khích lệ học sinh học Tin học từ bé.

Việc dạy tin học và lập trình sớm rất cần cho cho toàn bộ học sinh phổ thông, vì ngoài những người sẽ làm nghề lập trình, hầu hết người lao động ở mọi ngành nghề sẽ cần dùng tin học như một công cụ lao động cơ bản.

Hệ thống Giáo dục phổ thông ngày nay đã quá lạc hậu trong việc giảng dạy CNTT. Và tôi kỳ vọng vào công cuộc Đổi mới Giáo dục mà Bộ Giáo dục đang tiến hành có thể góp phần thay đổi thực trạng này. Tuy nhiên với cách triển khai của Bộ Giáo Dục, tôi có cảm nhận rằng, môn Tin học sẽ vẫn chỉ là một môn phụ. Nên chăng, các gia đình, các bạn học sinh, hãy tự trang bị cho mình công nghệ, tư duy hiện đại, để vững bước vào kỷ nguyên số.

CÁC NHÀ TOÁN HỌC HY LẠP TỪ PYTHAGORAS TỚI EUCLID (Thế kỷ V đến thế kỷ III trước Công nguyên) Phần II: Số vô tỷ, Nghịch lý Zenos

TẠ DUY PHƯỢNG[1]

1. Số vô tỷ

Hippasus xứ Croton, khoảng 530 – 450 trước công nguyên (TCN), ban đầu là người thuộc trường phái Pythagoras, nhưng sau bị khai trừ khỏi trường phái này. Một tài liệu nói những người Pythagoras đã dựng bia mộ ông, như thể ông đã chết; một tài liệu khác nói rằng sự bội đạo của ông đã bị trừng phạt bằng cái chết trên biển trong một tai nạn chìm tàu. Nguyên nhân chính xác có lẽ không bao giờ được biết, do quy tắc bí mật của trường phái Pythagoras, nhưng có ba khả năng đã được nêu ra.

Khả năng thứ nhất, Hippasus bị trục xuất vì ông đứng đầu một phong trào dân chủ chống lại những quy định bảo thủ của Pythagoras.

Khả năng thứ hai quy việc trục xuất ông về lý do ông đã tiết lộ các phát minh của trường phái Pythagoras về ngũ giác đều hoặc khối 12 mặt đều.

Giải thích thứ ba cho rằng ông bị trục xuất vì tiết lộ một khám phá toán học có ý nghĩa tàn khốc đối với học thuyết Pythagoras – sự tồn tại các số vô tỷ.

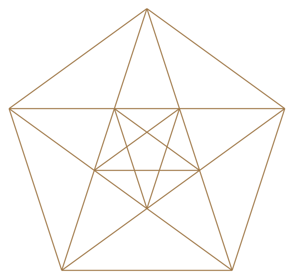
Nguyên lý cơ bản của học thuyết Pythagoras là các thuộc tính của số nguyên hoặc tỷ lệ của chúng (các số hữu tỷ) có thể giải thích bản chất của tất cả mọi thứ, trong hình học cũng như trong thiên văn và xã hội. Tuy nhiên, *Đối thoại* của Plato (khoảng 428 – 347 TCN) cho thấy rằng cộng đồng toán học Hy Lạp đã bị choáng váng bởi một tiết lộ hầu như phá hủy toàn bộ niềm tin của người Pythagoras và cộng đồng vào những con số. Đây là khám phá rằng trong bản thân hình học, các số hữu tỷ không đủ để giải thích các thuộc tính cơ bản. Chẳng hạn, số hữu tỷ không đủ để so sánh tỷ lệ của đường chéo hình vuông, đường chéo hình lập phương hoặc đường chéo ngũ giác đều với cạnh của nó.

Thông thường, người ta cho rằng sự công nhận số vô tỷ liên quan đến ứng dụng của định lý Pythagoras vào tam giác vuông cân. Một chứng minh như vậy rất dễ xây dựng (xem [10]). Aristotle (384 – 322 TCN) đã đề cập đến một chứng minh về tính không thông ước[2] của đường chéo của hình vuông với cạnh của nó. Trong chứng minh này, mức

[1] *Cộng tác viên Viện Toán học.*

độ trừu tượng cao đến mức người ta nghi ngờ nó đã được thực hiện vào thế kỉ V TCN. Tuy nhiên, khám phá về số vô tỷ có thể đã xảy ra vào thế kỉ V TCN theo những cách khác.

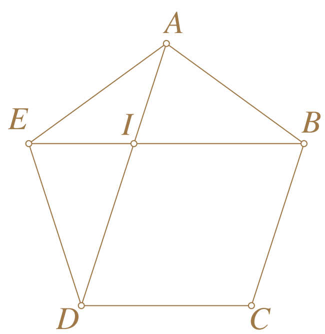
Năm đường chéo của một ngũ giác đều tạo thành một ngũ giác đều nhỏ hơn và các đường chéo của hình ngũ giác thứ hai lần lượt tạo thành hình ngũ giác đều thứ ba ... (Hình 1).



Hình 1.

Quá trình này có thể được tiếp tục đến vô hạn, dẫn đến gợi ý: *Tỷ số giữa một đường chéo và một cạnh của một ngũ giác đều không thể là số hữu tỷ.*

Xét ngũ giác đều $ABCDE$ với hai đường chéo AD và BE (Hình 2). Do $\angle ABE = \angle IAE$ và $\angle AEB = \angle IEA$ nên $\Delta ABE \sim \Delta IAE$.



Hình 2.

Suy ra $\dfrac{AB}{BE} = \dfrac{IA}{AE}$. Nhưng $AE = AB$ nên

$$AB^2 = BE \times IA = BE \times (BE - AB)$$
$$\Rightarrow AB^2 = BE^2 - BE \times AB.$$

Chia cả hai vế cho AB^2 và đặt $\dfrac{BE}{AB} = x$ ta được $x^2 - x - 1 = 0$. Suy ra $\dfrac{BE}{AB} = x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Suy ra $\dfrac{AB}{BE} = \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Số $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $\dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ được gọi là *tỷ lệ vàng*.

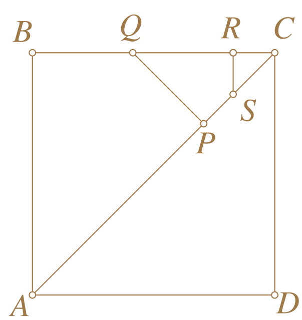
Có vẻ như, không phải là $\sqrt{2}$ mà là $\sqrt{5}$ lần đầu tiên tiết lộ sự tồn tại của các số vô tỷ (thông qua các đại lượng không thông ước đến từ ngũ giác đều). Tính chất vô tỷ của tỷ lệ này, trên thực tế, là hệ quả của lập luận được trình bày trên Hình 3, trong đó tỷ lệ vàng được hiển thị lặp đi lặp lại nhiều lần:

$$\frac{RP_1}{P_1S} = \frac{RP_2}{P_2P_1} = \frac{RP_3}{P_3P_2} = \dots$$

Hình 3.

Tính chất này dẫn đến việc tiết lộ, có thể bởi Hippasus, về tính không thông ước giữa đường chéo của ngũ giác đều và cạnh của nó. Không có tài liệu nào khẳng định điều này, nhưng có vẻ như đây là một suy đoán có lý.

Tỷ lệ giữa đường chéo của hình lập phương với một cạnh bằng $\sqrt{3}$, cũng dẫn tới tính không thông ước của đường chéo và cạnh của hình lập phương, hay tính chất vô tỷ của số $\sqrt{3}$.



Hình 4.

[2] *Hai đoạn thẳng có độ dài a và b được gọi là thông ước với nhau nếu tồn tại một đoạn thẳng có độ dài c và các số tự nhiên m và n sao cho a = mc và b = nc, tức là $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$. Theo ngôn ngữ ngày nay, hai đại lượng là thông ước nếu thương của chúng là một số hữu tỷ.*

Tương tự như ngũ giác đều, nếu trong hình vuông $ABCD$ (Hình 4) dựng trên đường chéo AC đoạn $AP = AB$ và tại P dựng đoạn thẳng PQ vuông góc với đường chéo thì $\frac{CQ}{CP} = \frac{AC}{AB}$. Một lần nữa, nếu trên CQ đặt $QR = QP$ và dựng RS vuông góc với CR, thì $\frac{CS}{CR} = \frac{CQ}{CP} = \frac{AC}{AB}$. Quá trình này có thể được lặp lại vô hạn. Đây một chứng minh cho thấy không có đơn vị độ dài nào, dù nhỏ, có thể được tìm thấy để đường chéo và cạnh hình vuông là thông ước với nhau.

Bài tập. Sử dụng chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỷ (xem [10]), hãy chứng minh $\sqrt{3}$ là số vô tỷ, hay đường chéo của hình lập phương không thông ước với cạnh của nó. Tương tự, chứng minh $\sqrt{5}$ là số vô tỷ.

2. Nghịch lý Zeno

Học thuyết Pythagoras cho rằng "Các con số [hữu tỷ] tạo nên toàn bộ thiên đường" thực sự đã phải đối mặt với một vấn đề rất nghiêm trọng khi số vô tỷ được phát hiện, nhưng trường phái Pythagoras còn phải đối mặt với những lập luận do những học giả xứ Elea, một trường phái đối thủ đưa ra.

Các nhà triết học Ionia ở Tiểu Á đã tìm cách xác định yếu tố cơ bản của vật chất.

Thales cho rằng nước là nguồn gốc của vật chất, nhưng những người khác ưu tiên coi không khí hoặc lửa là yếu tố cơ bản. Trường phái Pythagoras đã theo một hướng trừu tượng hơn: cho rằng các con số (hữu tỷ) là cơ bản. Thuyết này, được minh họa một cách tuyệt đẹp trong hình học của các con số tượng hình, đã bị công kích bởi những người theo Parmenides (đầu thế kỉ V TCN) xứ Elea. Nguyên lý cơ bản của trường phái Elea là sự thống nhất và vĩnh viễn, một quan điểm trái ngược với các ý tưởng của Pythagoras về tính đa dạng và thay đổi. Trong các môn đệ của Parmenides, người được biết đến nhiều nhất là Zeno ở Elea (khoảng 495 – 430 TCN), người đã đưa ra các lý lẽ để chứng minh sự mâu thuẫn trong các khái niệm của Pythagoras.

Những người Pythagoras cho rằng không gian và thời gian có thể được coi là bao gồm các điểm và cá thể, nhưng không gian và thời gian cũng có thuộc tính, được gọi là "tính liên tục". Một mặt, tính liên tục có các đặc điểm của đơn vị hình học – điểm – và mặt khác, có các đặc điểm của các đơn vị số hoặc các số. Aristotle (384 – 322 TCN) đã mô tả quan điểm của Pythagoras là "sự thống nhất có vị trí" hoặc "sự thống nhất được xem xét trong không gian". Để chống lại quan điểm này, Zeno đưa ra những nghịch lý, trong đó các nghịch lý về chuyển động dường như đã gây ra nhiều rắc rối nhất:

(1) Sự phân đôi (the Dichotomy),

(2) Achilles và con rùa,

(3) Mũi tên (the Arrow), và

(4) Sân vận động (the Stade, hay Stadium).

Sự phân đôi

Một người chạy được một quãng đường nhất định, trước tiên anh ta phải đi một nửa quãng đường này, nhưng trước khi anh ta có thể làm được điều này, anh ta phải đi một phần tư quãng đường đầu tiên, và trước đó, một phần tám quãng đường đầu tiên, và cứ như vậy, thông qua vô số đoạn. Anh ta phải tạo vô số đoạn trong một thời gian hữu hạn, nhưng điều này là không thể. Do đó sự khởi động của chuyển động là không thể.

Achilles và con rùa

Nghịch lý thứ hai tương tự như nghịch lý thứ nhất, ngoại trừ việc chia nhỏ vô hạn không gian là lũy tiến, chứ không phải là thoái lui. Giả sử Achilles chạy đua với một con rùa đã xuất phát từ trước. Khi Achilles đạt đến vị trí ban đầu của con rùa, thì con rùa đã đi được một đoạn ngắn và vào thời điểm Achilles vượt qua đoạn này, con rùa sẽ tiến lên hơi xa hơn, và quá trình này tiếp tục vô hạn, với kết quả là Achilles nhanh nhẹn không bao giờ có thể vượt qua con rùa chậm chạp.

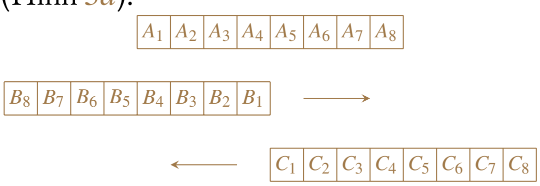
Mũi tên

Các nghịch lý *Phân đôi* và *Achilles* lập luận rằng chuyển động là không thể dưới giả thiết về sự chia nhỏ vô hạn không gian và thời gian. Mặt khác, *Mũi tên* và *Sân vận động* lập luận rằng chuyển động không thể xảy ra nếu giả định ngược lại rằng có một đại lượng nhỏ nhất của không gian và thời gian. Trong *Mũi tên*, Zeno lập luận rằng một vật thể đang bay luôn chiếm một khoảng không gian bằng chính nó, nhưng chiếm một khoảng không gian bằng chính nó thì nó không chuyển động. Vì thế mũi tên đang bay luôn dừng lại, do đó chuyển động của nó chỉ là một ảo giác.

Sân vận động

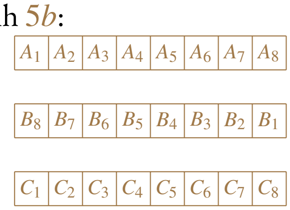
Gây tranh cãi nhiều nhất và khó xử nhất về những nghịch lý trong chuyển động là *Sân vận động*, nó có thể được diễn giải như sau.

Giả sử rằng tại một thời điểm nhất định, các vật A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8; B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8 và C_1, C_3, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8 chiếm các vị trí tương đối sau (Hình 5*a*):



Hình 5a: Sân vận động.

Các vật B chuyển động sang phải và các vật C chuyển động sang trái với cùng vận tốc để được Hình 5*b*:



Hình 5b: Sân vận động.

Khi C_1 đi qua 8 vật B (và B_1 đi qua 8 vật C) thì B_1 chỉ đi qua 4 vật A_5, A_6, A_7, A_8 (tương tự, C_1 đi qua 4 vật A_1, A_2, A_3, A_4). Nhưng C_1 mất cùng một thời gian khi đi qua 8 vật B như là đi qua 4 vật A. Suy ra thời gian để C_1 đi qua 8 vật A cũng bằng thời gian đi qua một nửa A, hay thời gian đã cho bằng một nửa của nó. Mâu thuẫn.

Aristotle cho rằng Zeno đã không hiểu sự khác nhau giữa chuyển động tương đối với chuyển động tuyệt đối và tin rằng ông đã bác bỏ nghịch lý của Zeno vì ông đã phủ nhận giả định ban đầu: thời gian bao gồm các đơn vị không thể phân chia. Tuy nhiên, giải thích thấu đáo nghịch lý Zeno về sân vận động chỉ được đưa ra bởi Brochard, Noël và Russell vào thế kỉ XIX–XX.

Các lập luận của Zeno dường như đã có ảnh hưởng sâu sắc đến sự phát triển của toán học Hy Lạp, có thể so sánh với sự phát hiện ra số vô tỉ, mà chúng có thể có liên quan với nhau. Ban đầu, trong lý thuyết của Pythagoras, độ lớn được biểu thị bằng hạt hoặc đá cuội, nhưng đến thời Euclid thì có một sự thay đổi hoàn toàn về quan điểm. Độ lớn nói chung không phải được liên kết với các con số hoặc viên sỏi, mà với các đoạn thẳng. Trong *Cơ sở*, thậm chí các số nguyên cũng được biểu diễn bằng các đoạn. Vương quốc của con số có đặc tính rời rạc, nhưng thế giới của các đại lượng liên tục là một thứ ngoài số và phải được xử lý bằng phương pháp hình học (và điều này bao gồm hầu hết toán học thời kỳ tiền cổ đại và Pythagoras). Dường như là hình học, hơn là con số, thống trị thế giới.

Tài liệu trích dẫn

[10] Tạ Duy Phượng, *Pythagoras và trường phái toán học Pythagoras*, Tạp chí Pi, Tập 6 (2022), số 5, trang 45 – 53.

SULTAN KHAN: NGƯỜI HẦU LẼ RA ĐÃ CÓ THỂ TRỞ THÀNH MỘT KỲ THỦ VĨ ĐẠI

HOÀI ANH[1]

Trong bất cứ môn thể thao nào, khán giả cũng thích chứng kiến một vận động viên vô danh đột ngột xuất hiện và lật đổ các nhà vô địch. Nhưng ngày nay, với sự chuyên nghiệp hóa trong hầu hết các khía cạnh, điều đó có lẽ chỉ xảy ra trong các bộ phim hay các cuốn tiểu thuyết. Đặc biệt, nó gần như không thể xảy ra trong cờ vua, nơi bạn cần phải trải qua rất nhiều khổ luyện trước khi có đủ năng lực để thi đấu ngang bằng với các đại kiện tướng. Và không phi thường sao nếu như một người chưa bao giờ học chơi cờ vua một cách bài bản, chỉ dựa vào duy nhất tài năng của mình, mà trở thành nhà vô địch thế giới, như trong *Thiên truyện cờ vua* của Stefan Zweig?

Đó chính là điều mà một người đã làm được vào những năm 1930: ông đã đánh bại Capablanca (người khi đó tuy không còn giữ chức vô địch thế giới, nhưng vẫn còn đang trong thời kỳ đỉnh cao của sự nghiệp), cũng như cả các kỳ thủ Frank Marshall và Tartakover. Ngoài ra, ông cũng cầm hòa Alekhine, nhà đương kim vô địch thế giới, và với Max Euwe, nhà vô địch thế giới tiếp theo, mà không hề học một chút gì về khai cuộc, không biết gì về lịch sử cờ vua hay lối chơi của các đối thủ và thậm chí, trong đa số các ván đấu của mình ... không hề nhập thành!

Sultan Khan (1903 – 1965) kỳ thủ cờ vua người Ấn Độ (về sau thuộc về Pakistan.)

Sẽ chẳng ai tin một câu chuyện như vậy nếu xem nó trong rạp chiếu phim nhưng Sultan Khan đã làm được tất cả những điều đó! Đặc biệt hơn nữa, ông là một người hầu của Ngài Umar, một maharaja[2] của vùng Punjab, Ấn Độ (ngày nay thuộc về Pakistan). Khi theo hầu Ngài Umar đến Anh vào năm 1929, ông

[1] *Viện Toán học.*

[2] *Một kiểu lãnh chúa Ấn Độ.*

[3] *Phiên bản Ấn Độ của cờ vua có luật chơi hơi khác so với cờ vua phương Tây.*

24 tuổi và là kỳ thủ mạnh nhất trong cờ vua Ấn Độ[3] ở vùng Punjab. Theo yêu cầu của người chủ, ông học luật chơi của của cờ vua phương Tây.

Khi đến Anh, ông đã giành được chức vô địch Đế chế Anh năm 1929 ngay từ lần đầu tiên tham gia, trước sự sửng sốt của mọi người (về sau, ông còn tiếp tục giành chức vô địch vào các năm 1932 và 1933). Vì không có luật nhập thành trong cờ vua Ấn Độ, ông đã chơi nhiều ván mà không nhập thành, trong đó có cả ván cờ thắng Capablanca hoặc trong ván cờ hòa với Alekhine. Ngay cả những năm 1930, nếu không thuộc các thế khai cuộc trong cờ vua thì gần như không thể thể chơi ở các giải đấu đỉnh cao. Nhưng Sultan Khan chưa từng học lý thuyết về cờ, cũng như không đọc bất kỳ cuốn sách nào, do mù chữ. Mặc dầu vậy, tài năng thiên phú của ông đã bù đắp cho những sự thiếu hiểu biết này về khai cuộc khi các ván cờ đi tới trung cuộc. Ông cũng có một giác quan rất nhạy bén về tàn cuộc mặc dù cũng không biết gì về lý thuyết tàn cuộc. Một điều thú vị nữa là ông cũng không có ý thức gì về việc tính toán lợi ích vật chất và vinh quang: tại giải Hastings năm 1931, sau ván thắng huyền thoại trước Capablanca, ông có cơ hội giành chiến thắng chung cuộc giải này bằng cách hòa trong ván đấu với Max Euwe, nhưng ông từ chối đề nghị hòa của Euwe và sau đó để thua! Có lẽ là vì đề nghị hòa có lẽ không phải nằm trong thế giới của ông. Kiểu như: "Ván cờ đang thú vị, tại sao lại dừng lại?".

Năm 1933, ông theo người chủ trở lại Ấn Độ và không còn cơ hội để chơi cờ vua nữa và nhanh chóng bị rơi vào quên lãng. Chỉ nhiều năm sau khi qua đời (vào năm 1965), ông mới được giới cờ vua biết đến. Ngài Umar đã chấm dứt sự nghiệp của người mà, có lẽ, nếu được đào tạo chuyên nghiệp có thể đã trở thành một trong những kỳ thủ cờ vua vĩ đại nhất mọi thời đại. Tất nhiên, không ai chắc được rằng liệu ông có thể giành chức vô địch thế giới hay không, nhưng với những gì ông đã đạt được chỉ sau 4 năm ở Anh, điều đó không phải là không thể.

Một số thành tích nổi bật của Sultan Khan:

- Vô địch Đế chế Anh các năm 1929, 1932 và 1933;
- Đứng thứ hai (sau Tarktakower) tại giải Liege năm 1930;
- Đứng thứ ba tại giải Hastings năm 1930 – 1931 (sau nhà vô địch thế giới tương lai Max Euwe và cựu vô địch thế giới Capablanca);
- Hạ Savielly Tartakower 6.5 – 5.5 trong một trận đấu vào tháng 1 năm 1931;

Sau đây là diễn biến ván đấu nổi tiếng Khan–Capablanca tại giải Hastings 1930 – 1931.

Sultan Khan – Capablanca

1. **Nf3 Nf6** 2. **d4 b6** 3. **c4 Bb7** 4. **Nc3 e6** 5. **a3**. Một nước đi tiên phong. Nhiều thập kỷ sau, nó được gọi là biến thể Petrosian, một khai cuộc ưa thích của Garry Kasparov. Cho dù một vài kỳ thủ đã thử khai cuộc này vào những năm 1920 nhưng gần như chắc chắn là Sultan Khan không biết khai cuộc này. Sự thiếu hiểu biết này của Khan đã tạo cơ hội cho sự sáng tạo của ông. Ông đã thử nghiệm những nước đi ngắn cho tốt như vậy ở cả hai cánh (a3 và h3) trong một số ván khác, nhưng ở ván này là hiệu quả nhất. Đen bị ngăn không cho tượng di chuyển đến b4, và do đó Trắng giành được nhiều quyền kiểm soát hơn đối với e4. **5... d5** 6. **cxd5 exd5**. Như người ta chờ đợi từ Capablanca, một nước đi cổ điển, duy trì một Tốt ở trung tâm. Nước này hoàn toàn có thể chơi được, nhưng biến thể chính hiện đại là **6...Nxd5**. 7. **Bg5 Be7** 8. **e3 O–O** 9. **Bd3 Ne4** Capablanca cho thấy ý định đổi quân nhanh chóng. **9...Nbd7**, để hoàn thiện phát triển là nước đi tốt hơn. 10. Bf4! Mặc dù thiếu kinh nghiệm trong khai cuộc, Khan cho thấy sự thấu hiểu thế trận. Thay vì 10 **Bxe7 Qxe7**, điều này sẽ giải phóng thế trận của Đen do khi đó Hậu thoát khỏi hàng sau

và các Xe sẵn sàng tiến vào giữa bàn cờ. 10... **Nd7** 11. **Qc2** Một nước đi tuyệt vời, nhằm vào hai ô nhạy cảm của Đen, h7 và c7. Trong trường hợp này, thói quen trì hoãn nhập thành của Khan được đền đáp. 11... **f5**

(11... **Nxc3?** 12. **Bxh7+** **Kh8** 13. **bxc3** **g6** 14. **Bxg6** **fxg6** 15. **Qxg6** **Bf6** 16. **h4** với thế chủ động.)

(Về sau, Capablanca nói rằng ở đây cần phải đi nước quen thuộc 11... **Ndf6**, tuy nhiên ông (và nhiều người khác) đã bỏ sót một chiến thuật đơn giản: 12. **Bxc7** **Qxc7** 13. **Nxe4** **Qxc2** 14. **Nxf6+** **Bxf6** 15. **Bxc2**)

12. **Nb5** Đen gặp khó trong việc bảo vệ Tốt c7. Nếu 12... **c5** 13 **Nc7** đe dọa Xe và ghim với **e6**.12... **Bd6** Capablanca nhượng bộ. Nước đi kịch tính là 12... **a6**, mời bắt tốt và dẫn đến những biến thể hoang dã. Về sau, thế cờ này đã được thảo luận kỹ, nhiều người cho rằng Đen vẫn ổn, nhưng thực tế thì Trắng tốt hơn.

(12... **a6** 13. **Qxc7**! (13. **Nxc7** cũng hoàn toàn có thể) 13... **axb5** 14. **Qxb7** **Ndc5** 15. **dxc5** **Nxc5** 16. **Bc7** không phải là một nước dễ thấy 16... **Nxb7** (16... **Nxd3+** 17. **Ke2** **Qd7** 18. **Kxd3**±) (16... **Qd7** 17. **Ne5**±) 17. **Bxd8** **Rfxd8** 18. **Bxb5**±

(12... **c5** 13. **Nc7**±)

(12... **c6** 13. **Nc7** **Rc8** 14. **Ne6**±)

13. **Nxd6** **cxd6** Cấu trúc cố định của Tốt đã tước sự cơ động của Đen và Tốt d6 là một điểm yếu lâu dài.

14. **h4** Một nước đi tuyệt vời, ngăn chặn sự phát triển của quân Đen bên phía vua và chiếm lấy không gian. Như chúng ta đã thấy, Khan thường không ngại để Vua của mình ở giữa bàn cờ, và trong trường hợp này thì điều đó là hoàn toàn hợp lý. Đen không có khả năng mở trung tâm. 14... **Rc8** 15. **Qb3** **Qe7** 16. **Nd2** **Ndf6** 17. **Nxe4** **fxe4** Khan đổi Mã ở e4, quân có vị trí tốt nhất của Đen.

(17... **Nxe4** 18. **f3** **Nf6** 19. **Bxf5**±)

18. **Be2** **Rc6**19. **g4** Khan nhận thấy rằng đang hoàn toàn kiểm soát thế trận và phát triển quân phía bên vua. Vua trắng vẫn an toàn ở giữa bàn cờ. 19... **Rfc8** 20. **g5** **Ne8** 21. **Bg4**

Cả hai quân trung bình của Đen đều đứng ở vị trí đáng thương, bị chặn bởi những con tốt của chính bên mình, điều này trái ngược hoàn toàn với cặp tượng của Trắng. Có thể ăn Tốt 21 **Qxd5+**, nhưng làm thế sẽ chỉ mang lại cho Đen nhiều không gian hơn. 21...*Rc*1+

(Capablanca không muốn chờ đợi một cách thụ động; thay vào đó, ông muốn thay đổi bản chất của thế cờ. Ông có thể trì hoãn với 21... **R8c7** nhưng khi đó Trắng có sự lựa chọn giữa 22. **Qxd5+** (hoặc 22. **Kd2** **Rc2+** 23. **Qxc2** **Rxc2+** 24. **Kxc2** **Qc7+** 25. **Kb1)** **và** 22... **Kh8** 23. **O-O** ±)

22. **Kd2** **R8c2+** 23. **Qxc2** **Rxc2+** 24. **Kxc2** Trắng vẫn chiếm ưu thế hơn nhờ các quân trung bình, nhưng theo quan điểm của Đen thì ít nhất thế cờ cũng phức tạp do sự mất cân bằng về chất. Trong vài nước đi tiếp theo Khan phải kiềm chế Hậu đen, nhưng điều đó là tương đối dễ dàng vì Tượng và Mã đen không có khả năng hỗ trợ tốt cho Hậu đen.

24... **Qc7+** 25. **Kd2** **Qc4** 26. **Be2** **Qb3** 27. **Rab1** **Kf7** 28. **Rhc1** **Ke7** 29. **Rc3** **Qa4** 30. **b4** **Qd7** Hậu lùi lại để di chuyển sang cánh khác của bàn cờ. 31. **Rbc1** **a6** 32. **Rg1** **Qh3** 33. **Rgc1**

(Khan có thể lợi quân ở đây với 33. **Bg4** **Qxh4** 34. **Bg3** 34. **Rg2?** **Qh1** 34... **Qxg5** 35. **Bc8** **Bxc8** 36. **Bxd6+** **Kxd6** 37. **Rxg5** **Bd7** nhưng Trắng có thắng dễ với thế cờ như vậy không? Có lẽ vì thế mà Khan đã không chơi biến thể này.)

33... **Qd7** (Nếu 33... **Qxh4** 34. **Rc7+** **Nxc7** 35. **Rxc7+** **Kd8** 36. **Rxb7** với lợi thế đủ để Trắng thắng dễ.)

34. **h5** Gọng kìm đang dần siết chặt lại. Tốt

trắng khó bị uy hiếp khi nằm ở ô này và giúp hạn chế Mã đen. Các quân cờ của Đen hầu như không thể di chuyển vì chúng cần phải ngăn chặn sự xâm nhập của các Xe trắng. Capablanca liên tục thử thách Trắng bằng Hậu chỉ để khiến Trắng bận rộn. Còn Khan dần dần củng cố vị trí của Vua bằng cách di chuyển ra xa khỏi phía bên vua của bàn cờ và bắt đầu đẩy tốt phía bên hậu lên. Càng đến gần ô phong hậu, chiến thắng của Trắng càng trở nên dễ dàng nếu họ đột phá thành công.

34... **Kd**8 35. **R**1**c**2 **Qh**3 36. **Kc**1 **Qh**4 37. **Kb**2 **Qh**3

(37... **Qxf**2 38. **Bxa**6 **Qxc**2+ 39. **Rxc**2 **Bxa**64 0. **Rc**6 ±)

38. **Rc**1 **Qh**4 39. **R**3**c**2 **Qh**3 40. **a**4 **Qh**4 41. **Ka**3 **Qh**3 42. **Bg**3 **Qf**5 43. **Bh**4 **g**6 44. **h**6 **Qd**7 45. **b**5 **a**5 46. **Bg**3 **Qf**5 47. **Bf**4 **Qh**3

Để có thể xuyên qua cột c, Trắng cần phải đưa được Tượng đến g4. Capablanca cố gắng ngăn cản điều này bằng cách điều Hậu di chuyển xoay quanh đường chéo h3–c8. Trong khi đó, Khan kiên nhẫn điều quân, duy trì lợi thế của mình, tìm ra cách tốt nhất để tiến quân. Như thường lệ, bên phòng thủ thoát ra khỏi trạng thái bị động trước khi bị bắt buộc phải làm thế, khiến cho bên tấn công dễ dàng hơn rất nhiều. 48. **Kb**2 **Qg**2 49. **Kb**1 **Qh**3

(49... **Qxf**2 50. **Bg**4 **Qh**4 51. **Rg**1±)

50. **Ka**1 **Qg**2 51. **Kb**2 **Qh**3

(51... **Kd**7 52. **Bg**3 **Qh**3 53. **Rg**1 theo sau bằng Bf4 và Bg4 và Đen sụp đổ)

52. **Rg**1 Trắng đã sẵn sàng chơi **Bg**4 52... **Bc**8. Chống lại đe dọa đó nhưng lại cho phép Xe trắng xâm nhập. 53. **Rc**6 **Qh**4 54. **Rgc**1 **Bg**4

(54... **Bd**7 55. **Bg**3 **Qxg**5 56. **Rxb**6±)

55. **Bf**1 **Qh**5

(55... **Qxf**2+ 56. **R**6**c**2 **Qh**4 (56... **Qg**1 57. **Rg**2±) 57. **Rh**2 **Bh**3 58. **Bxh**3±)

56. **Re**1 Ở đây cũng có thể bắt Tốt b6 nhưng trước tiên Khan muốn ngăn Tượng di chuyển đến e2.

(56. **Rxb**6 **Be**2)

56... **Qh**1 57. **Rec**1

(57. **Rxb**6 cũng là một nước đi tốt vì 57...**Bh**3 có thể được trả lời bằng 58 **Rb**8+, nhưng một lần nữa Khan muốn tránh những phức tạp và đưa Xe đến một ô được bảo vệ. Capablanca lùi Hậu, lặp lại thế cờ cũ, nhưng Khan đi nước khác.)

57... **Qh**5 58. **Kc**3 **Qh**4

(58... **Be**2 59. **Kd**2 ngăn Hậu xâm nhập)

59. **Bg**3 duy trì chuỗi Tốt mạnh f2–e3–d4 – đến giai đoạn này, Tốt g5 là thừa.

59... **Qxg**5 60. **Kd**2 **Qh**5

(60... **Qxh**6 61. **Rxb**6)

61. **Rxb**6 Cuối cùng, khi tất cả các quân cờ của Trắng được phối hợp, Vua trắng hoàn toàn an toàn và Đen không còn cơ hội nào để phản công, Khan bắt con tốt chiến lược. 61... **Ke**7 62. **Rb**7+ **Ke**6 63. **b**6 **Nf**6 64. **Bb**5 **Qh**3 65. **Rb**8

(65. **Rb**8 **Nh**5 66. **b**7 **Nxg**3 67. **Rf**8 Trớ trêu thay, Capablanca bại trận và là một trong số ít những người chơi trong giải đấu này có thể đánh giá hết được lối chơi kiên nhẫn của Khan. Đây là một màn trình diễn lớn về chiến lược, thực hiện với phong cách và sự chính xác và được chơi với những nét độc đáo, khiến ván cờ này trở thành kinh điển: sự phát triển sớm của Tốt bên vua; những nước đi ngang cẩn trọng với Vua; ngăn chặn khả năng phản công của đối thủ. Capablanca có thường xuyên bị áp đảo theo phong cách này không?)

1 – 0