LỜI GIẢI ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN LẦN THỨ 22 TẠI PHÁP

BÙI VĂN BIÊN

***LTS.** Tạp chí Pi, tập 6, số 7 – 8, năm 2022, đã giới thiệu với bạn đọc đôi nét về kỳ thi Olympic Toán của Pháp và đề bài của kỳ thi lần thứ 22, năm 2022. Trong số này, tạp chí Pi giới thiệu lời giải tóm tắt để bạn đọc tham khảo.*

Đề bài

Bài 1 (Chung cho tất cả thí sinh)

Dán nhãn duyên dáng của một hình

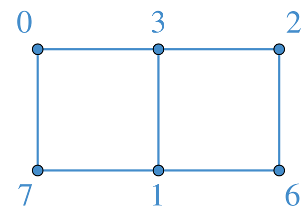
Xét một tập hợp hữu hạn các điểm. Ta nối một số điểm trong số những điểm đã cho bởi những đoạn thẳng. Tập hợp được tạo ra theo cách đó được gọi là *hình*.

Ta thực hiện việc *dán nhãn* của một hình gồm n đoạn thẳng bằng cách gắn mỗi đỉnh của hình đó với một số tự nhiên đôi một khác nhau trong khoảng từ 0 tới n.

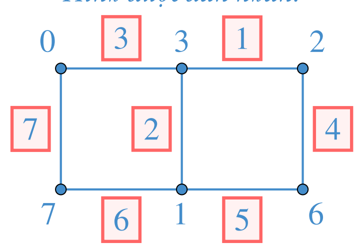
Mỗi đoạn thẳng được gán với giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số tự nhiên được gắn cho hai đầu mút của đoạn thẳng đó. Giá trị tuyệt đối thu được là một số tự nhiên, được gọi là *trọng số* của đoạn thẳng.

Ta nói rằng sự dán nhãn của một hình là *duyên dáng* nếu n trọng số nhận được trên các đoạn thẳng là những số tự nhiên từ 1 tới n.

Dưới đây là một ví dụ về sự dán nhãn duyên dáng cho một hình gồm 6 điểm và 7 đoạn thẳng.



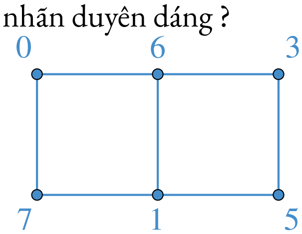
Hình được dán nhãn.

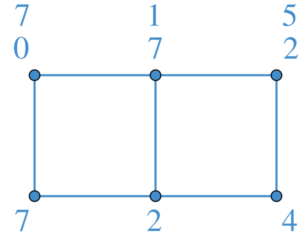


Hình được dán nhãn và trọng số.

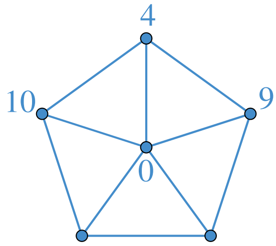
A. Một vài ví dụ

1. Trong các hình dưới đây, hình nào cho ta một dán nhãn duyên dáng ?





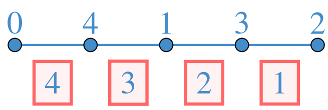
2. Bổ sung hình sau để được một dán nhãn duyên dáng.



B. Trường hợp thẳng hàng

Với mỗi số nguyên dương n, ta xét hình L_n gồm $n+1$ điểm thẳng hàng và n đoạn thẳng được tạo thành từ các điểm kề nhau.

Ta đề xuất sự gán nhãn duyên dáng của những điểm của hình L_4 như sau :



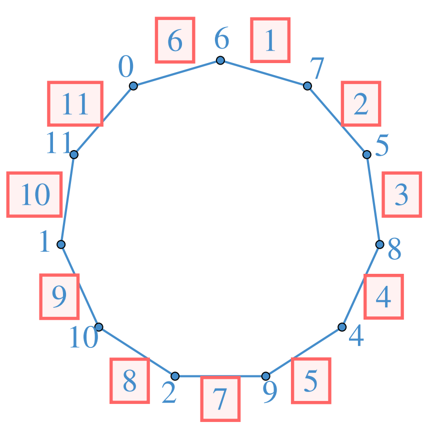
1. Chứng minh rằng tồn tại một dán nhãn duyên dáng cho mỗi hình L_5, L_6 và L_7.

2. Ta chấp nhận mà không chứng minh rằng tồn tại một dán nhãn duyên dáng đối với hình L_{2022} sao cho điểm ngoài cùng bên trái được gắn số 0. Hãy mô tả sự dán nhãn này.

C. Trường hợp đa giác

1. Chứng minh rằng mọi tam giác và tứ giác đều có thể được dán nhãn một cách duyên dáng.

2. Dựa vào dán nhãn duyên dáng của hình đa giác 11 cạnh dưới đây, hãy chỉ ra một cách dán nhãn duyên dáng của đa giác 12 cạnh.



3. Xác định tính chẵn lẻ đối với trọng số của một đoạn thẳng khi mà các số được gán cho các đầu mút của nó:

a. Khác nhau về tính chẵn lẻ.

b. Cùng tính chẵn lẻ.

4. Từ đó suy ra rằng hình ngũ giác không thể có dán nhãn duyên dáng.

D. Một hình đa giác với số cạnh lớn

Ta ký hiệu K_{2022} là hình được tạo thành từ 2022 điểm sao cho mỗi cặp điểm bất kỳ trong chúng được nối với nhau bằng một đoạn thẳng duy nhất.

1. Chứng minh rằng K_{2022} được tạo thành từ 2043231 đoạn thẳng.

2. Giả sử rằng tồn tại một dán nhãn duyên dáng đối với hình K_{2022}.

a. Có bao nhiêu đoạn thẳng mang trọng số là số lẻ?

b. Ta ký hiệu p là số điểm được dán nhãn là một số chẵn. Biểu diễn theo tham số p, số đoạn thẳng mà ở đó trọng số là một số lẻ.

3. Chứng minh rằng hình K_{2022} không thể có dán nhãn duyên dáng.

Bài 2 (Dành cho thí sinh theo chương trình chuyên)

Những số phân chia được

Phần A

Ta nói rằng một số tự nhiên là *phân chia được đơn nguyên* nếu như số đó lớn hơn hoặc bằng 3 và viết được dưới dạng : $1+2+3+\cdots+p$, trong đó p là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 2. Ví dụ, 3 và 10 là những số tự nhiên phân chia được đơn nguyên bởi vì: $3=1+2$ và $10=1+2+3+4$.

Ta nhắc lại rằng, tổng các số tự nhiên từ 1 tới n được cho bởi công thức:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

1. *a.* Chứng minh rằng 21 và 136 là những số tự nhiên phân chia được đơn nguyên.

b. Số tự nhiên 1850 có phân chia được đơn nguyên không?

2. Xét a là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 3. Hãy xác định điều kiện cần và đủ sao cho a là một số tự nhiên phân chia được đơn nguyên.

Phần B

Ta nói rằng một số tự nhiên là phân chia được nếu nó có thể viết dưới dạng tổng của hai hoặc nhiều hơn các số nguyên dương liên tiếp. Ví dụ, 24 và 25 là những số tự nhiên phân chia được vì $24 = 7+8+9$ và $25 = 12+13$. Tuy nhiên 4 không phải là số tự nhiên phân chia được vì $1+2 < 4 < 1+2+3$ và $2+3 > 4$.

1. Chứng minh rằng 9 và 15 là những số tự nhiên phân chia được nhưng 16 thì không.

2. Chứng minh rằng mọi số nguyên lẻ lớn hơn hoặc bằng 3 là phân chia được.

Xét k và q là những số tự nhiên với $k \geq 2$. Đặt $S = (q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$. Chứng minh rằng: $2S = k(k+1+2q)$.

4. Chứng minh rằng mọi lũy thừa của 2 đều không phân chia được.

5. Chúng ta quan tâm đến những số nguyên dương chẵn và không phải là lũy thừa của 2. Gọi n là một số như thế. Ta chấp nhận rằng tồn tại duy nhất một cặp số tự nhiên (r, m) trong đó m là một số tự nhiên lẻ lớn hơn hoặc bằng 3 và r một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1, sao cho $n = 2^r \times m$.

a. Xác định r và m khi $n = 56$. Từ đó chỉ ra rằng 56 là một số phân chia được và hãy viết nó dưới dạng tổng của các số nguyên dương liên tiếp.

b. Chứng minh rằng 44 là phân chia được.

c. Chứng minh rằng mọi số nguyên dương chẵn và không phải là lũy thừa của 2 là phân chia được.

6. Từ những kết quả trên, hãy xác định tập hợp tất cả các số tự nhiên phân chia được.

Phần C

Một số tự nhiên được gọi là phân chia được một cách duy nhất nếu số đó được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tổng của hai hoặc nhiều hơn các số nguyên dương liên tiếp.

1. Chứng minh rằng 13 là số phân chia được một cách duy nhất. Số 25 có phải là số phân chia được một cách duy nhất không?

2. *a*. Xét số tự nhiên n là tổng của k số tự nhiên dương liên tiếp, với $k\ ge 3$. Ta có thể viết n dưới dạng $n = (q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$, với q là số tự nhiên. Chứng minh rằng n không phải là số nguyên tố.

b. Từ đó suy ra rằng mọi số nguyên tố lớn hơn hoặc bằng 3 là phân chia được một cách duy nhất.

Bài 3 (Dành cho các thí sinh không theo chương trình chuyên)

Số ba

Ta xây dựng một dãy số tự nhiên dựa trên quy tắc sau.

Quy tắc

Số hạng đầu tiên của dãy là 4.

Từ một số hạng, để có số hạng tiếp theo, ta thực hiện một trong những phép toán sau:

- Nhân số đó với 3;
- Nhân số với 3 rồi cộng kết quả nhận được với 2;
- Nếu là số chẵn thì chia cho 2.

Nếu một trong các dãy được xây dựng theo cách này có số hạng nào đó bằng N, thì ta nói rằng N là *số có thể đạt được*.

Ví dụ, số 11 có thể đạt được: thật vậy, ta bắt đầu từ số 4, nhân 4 với 3 để được 12, sau đó ta chia 12 cho 2 hai lần liên tiếp để được 3, sau đó nhân 3 với 3 rồi cộng 2 ta được kết quả là 11.

1. Chứng tỏ rằng tất cả các số tự nhiên từ 1 đến 12 đều có thể đạt được bằng quy tắc nêu trên.

2. Chứng tỏ rằng 2022 có thể đạt được bằng quy tắc nêu trên.

3. Giả sử rằng tồn tại các số tự nhiên không thể đạt được bằng cách áp dụng quy tắc nêu trên. Gọi m là số nhỏ nhất như vậy.

a. Chứng tỏ rằng m không phải là bội của 3.

b. Chứng tỏ rằng $m-2$ không phải là bội của 3.

c. Chứng tỏ rằng $m-1$ cũng không phải là bội của 3.

d. Dựa vào kết quả trên, hãy đưa ra kết luận.

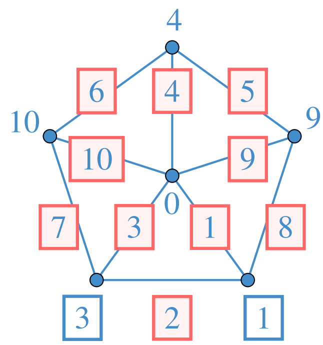
Lời giải

Bài 1 (Chung cho tất cả thí sinh).

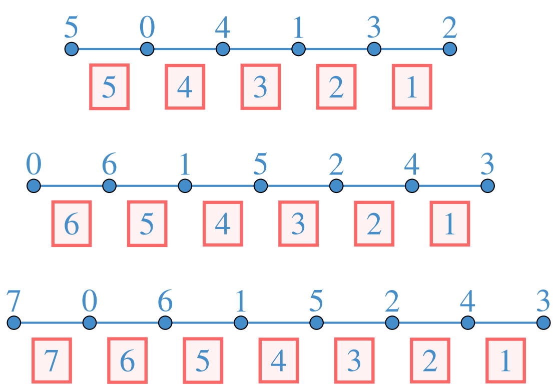
Sự dán nhãn duyên dáng của một hình.

A. 1. Hình thứ nhất không phải là một dán nhãn duyên dáng bởi vì có hai trọng số giống nhau: $6-0=6=7-1$. Hình thứ hai cũng không phải là một dán nhãn duyên dáng bởi vì có hai nhãn 7 bằng nhau.

2. Hình đã cho có thể được bổ sung như sau:



B. 1. Ví dụ về dán nhãn duyên dáng của L_5, L_6, L_7:

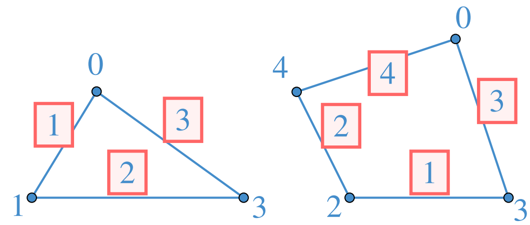


2. Tương tự như các dán nhãn đã nêu của L_4 và L_6, ta có thể dán nhãn hình L_{2022} như sau: đánh số các điểm từ trái qua phải:

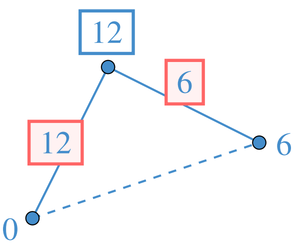
$$0, 2022, 1, 2021, 2, 2020, 3, 2019, 4, 2018 \ldots, 1000, 1012, 1011$$

Với cách dán nhãn trên, các trọng số từ trái qua phải là: $2022, 2021, \ldots, 4, 3, 2, 1$. Đó là một dán nhãn duyên dáng của L_{2022}.

C. 1. Ví dụ cho tam giác và tứ giác:



2. Thêm đỉnh số 12 vào đa giác 11 cạnh của bài ra như sau:

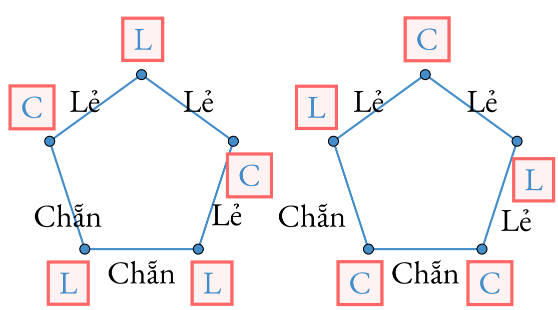


3*a*. Lẻ.

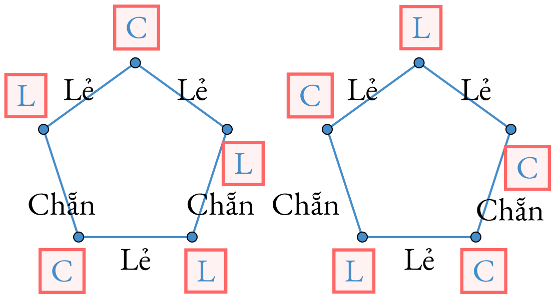
b. Chẵn.

4. Giả sử ngược lại: tồn tại dán nhãn duyên dáng đối với hình ngũ giác. Khi đó trọng số các cạnh sẽ là các số tự nhiên từ 1 tới 5, do đó có 3 số lẻ và 2 số chẵn. Các đầu mút của 3 cạnh có trọng số lẻ phải khác tính chẵn lẻ. Ta có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: 3 cạnh trọng số lẻ kề nhau.



Trường hợp 2: 2 cạnh trọng số lẻ kề nhau liền kề với một cạnh có trọng số chẵn.



Trong mọi trường hợp, tồn tại hai đỉnh liên tiếp, khác tính chẵn lẻ nhưng lại cho trọng số chẵn như minh họa phía trên, mâu thuẫn.

D. 1. Hình K_{2022} có $C_{2022}^2 = \frac{1}{2} \times 2022 \times 2021 = 2043231$ đoạn thẳng.

$2a$. Có 1021616 đoạn thẳng có trọng số lẻ là.

b. Có p điểm được dán nhãn chẵn và $2022 - p$ điểm được dán nhãn lẻ. Số các đoạn thẳng có trọng số lẻ chính là số cặp điểm được dán nhãn khác tính chẵn lẻ, nghĩa là $p(2022 - p)$.

3. Giả sử ngược lại, khi đó số các đoạn thẳng có trọng số lẻ là 1021616, vì thế tồn tại một số tự nhiên p sao cho $p(2022 - p) = 1021616$. Nhưng phương trình này không có nghiệm nguyên, mâu thuẫn.

Bài 2

A. $1a$. Các số 21 và 136 là phân chia được đơn nguyên vì: $21 = 1 + 2 + \cdots + 6$ và $136 = 1 + 2 + \cdots + 16$.

b. Giả sử 1850 là phân chia được đơn nguyên. Khi đó tồn tại số tự nhiên n sao cho: $1 + 2 + \cdots + n = 1850$, dẫn đến $n^2 + n - 3700 = 0$. Nhưng phương trình bậc hai này không có nghiệm nguyên, mâu thuẫn.

2. Số tự nhiên $a \geq 3$ là một số phân chia được đơn nguyên khi và chỉ khi phương trình: $n^2 + n - 2a = 0$ có ít nhất một nghiệm nguyên dương. Từ đó dễ thấy điều kiện cần và đủ là $1 + 8a$ là số chính phương.

B. 1. Các số 9 và 15 là phân chia được vì $9 = 4 + 5$ và $15 = 7 + 8$. Tuy nhiên, 16 không phân chia được vì:

$1+2+3+4+5 < 16 < 1+2+3+4+5+6;$
$2+3+4+5 < 16 < 2+3+4+5+6;$
$3+4+5 < 16 < 3+4+5+6;$
$4+5+6 < 16 < 4+5+6+7;$
$5+6 < 16 < 5+6+7; 6+7 < 16 < 6+7+8;$
$7+8 < 16 < 7+8+9$ và $8+9 > 16$.

2. Đặt $n = 2k + 1$. Khi đó $n = k + (k + 1)$, do đó là phân chia được.

3. Hiển nhiên.

4. Giả sử $N = 2^p$ là phân chia được. Theo câu trên, tồn tại các số nguyên $k, q \geq 2$ sao cho: $2^{p+1} = k(2q + k + 1)$. Điều này là vô lý vì vế trái là một luỹ thừa của 2 còn vế phải là tích của một số chẵn và một số lẻ lớn hơn 1.

$5a$. Ta có $56 = 2^3 \times 7$ nên $r = 3$ và $m = 7$. Do đó $2 \times 56 = 2^4 \times 7 = 7(2 \times 4 + 7 + 1)$ vì thế 56 là phân chia được theo câu $B.3$. Cụ thể hơn, $56 = 5 + 6 + \cdots + 11$.

b. Tương tự, $2 \times 44 = 8 \times 11 = 8(2 \times 1 + 8 + 1)$. Do đó $44 = 2 + 3 + \cdots + 9$ và 44 là phân chia được.

c. Đặt $n = 2^r \times m$, với $m \geq 3$ là một số nguyên lẻ và r nguyên dương. Ta suy ra $2n = 2^{r+1} \times m$. Xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1: $m > 2^{r+1}$. Tồn tại số tự nhiên l sao cho $m = 2^{r+1} + 1 + 2l$. Khi đó $2n = 2^{r+1}(2l + 2^{r+1} + 1)$, vì thế theo câu $B.3$ thì n phân chia được.

Trường hợp 2: $m < 2^{r+1}$. Tồn tại một số tự nhiên l sao cho $2^{r+1} = m + 1 + 2l$. Khi đó $2n = m(2l + m + 1)$ Vì thế, vẫn theo câu $B.3$ thì n phân chia được.

6. Từ các câu 2 và 5, ta suy ra rằng tập hợp những số tự nhiên phân chia được là những số tự nhiên lẻ lớn hơn hoặc bằng 3 và những số tự nhiên chẵn không phải là lũy thừa của 2.

C. 1. Do 13 là số tự nhiên lẻ lớn hơn 3, nên theo phần trên là phân chia được. Cụ thể, $13 = 6 + 7$. Đây là biểu diễn duy nhất của 13.

Thật vậy, nếu $13=(q'+1)+(q'+2)+\cdots+(q'+k')$ với $k'\geq 2$ và q'. Khi đó $2\times 13=k'(2q'+k'+1)$. Vì $2q'+k'+1>k'$ nên ta suy ra $k'<13$. Vì 13 là số nguyên tố, nên ta suy ra k' là ước của 2, chứng tỏ k'. Từ đó $q'=5$ và ta nhận được biểu diễn $13=6+7$. Vậy, 13 là số phân chia được một cách duy nhất.

Số 25 là phân chia được, nhưng không phải là phân chia được một cách duy nhất do $25=12+13=3+4+5+6+7$.

$2a$. Ta có $n=(q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$, hay $n=\dfrac{k(2q+k+1)}{2}$. Tùy vào tính chẵn lẻ của k, một trong hai biểu diễn $n=\dfrac{k}{2}\cdot(2q+k+1)$, $n=k\cdot\dfrac{2q+k+1}{2}$ cho thấy n là tích của hai số nguyên >1, do đó là không là số nguyên tố.

b. Giả sử p là một số nguyên tố ≥ 3. Theo phần B, ta biết rằng p là phân chia được. Cụ thể, $p=(q+1)+(q+2)$ với $q=\dfrac{p-3}{2}$. Ta sẽ chứng minh biểu diễn này là duy nhất. Giả sử $p=(q'+1)+(q'+2)+\cdots+(q'+k')$ với các số tự nhiên q' và $k'\geq 2$. Suy ra $2p=k'(2q'+k'+1)$. Vì $2q'+k'+1>k'$ nên $k'<p$ là một ước ≥ 2 nhưng $<p$ của $2p$. Mà các ước của $2p$ là $1,2,p,2p$ nên ta suy ra $k'=2$. Từ đó $q'=q$. Vậy, mọi số nguyên tố lớn hơn hoặc bằng 3 đều phân chia được một cách duy nhất.

Bài 3

1. Tất cả các số tự nhiên từ 1 đến 12 đều có thể đạt được bằng các quy tắc của đề bài, chẳng hạn:

$$4\xrightarrow{:2}2\xrightarrow{:2}1,\qquad 4\xrightarrow{:2}2,$$

$$4\xrightarrow{:2}2\xrightarrow{\times 3}6\xrightarrow{:2}3,\qquad 4,$$

$$4\xrightarrow{:2}2\xrightarrow{:2}1\xrightarrow{\times 3}3\xrightarrow{+2}5,$$

$$4\xrightarrow{:2}2\xrightarrow{\times 3}6,$$

$$4\xrightarrow{\times 3}12\xrightarrow{+2}14\xrightarrow{:2}7,$$

$$4\xrightarrow{:2}2\xrightarrow{\times 3}6\xrightarrow{+2}8,$$

$$4\xrightarrow{:2}2\xrightarrow{:2}1\xrightarrow{\times 3}3\xrightarrow{\times 3}9,$$

$$4\xrightarrow{:2}2\xrightarrow{\times 3}6\xrightarrow{\times 3}18\xrightarrow{+2}20\xrightarrow{:2}10,$$

$$4\xrightarrow{:2}2\xrightarrow{:2}1\xrightarrow{\times 3}3\xrightarrow{\times 3}9\xrightarrow{+2}11,$$

$$4\xrightarrow{\times 3}12.$$

2. Ta có thể đạt được 2022 như sau: trước hết, dựa vào câu 1, ta có thể thu được 8, sau đó:

$$8\xrightarrow{\times 3}24\xrightarrow{\times 3}72\xrightarrow{+2}74\xrightarrow{\times 3}222$$

$$222\xrightarrow{+2}224\xrightarrow{\times 3}672\xrightarrow{+2}674\xrightarrow{\times 3}2022.$$

$3a$. Giả sử $m=3a$, với a là số tự nhiên. Do $a<m$ nên a là số đạt được. Thế nhưng khi đó, sau khi đạt được a, ta chỉ cần Nhân 3 để đạt được m. Chứng tỏ m cũng đạt được, mâu thuẫn.

b. Giả sử $m-2=3b$. Do $b<m$ nên b là đạt được. Khi đó, sau khi đạt được b, ta chỉ cần áp dụng thêm 2 phép toán: Nhân 3, sau đó Cộng 2, để thu được m. Vậy, m cũng đạt được, mâu thuẫn.

c. Giả sử $m-1=3c$. Ta có $m=3c+1>2c$ nên $2c$ cũng đạt được. Khi đó, sau khi đạt được $2c$, ta lần lượt thực hiện các phép toán Nhân 3, Cộng 2, rồi Chia 2, ta thu được m. Vậy, m cũng đạt được, mâu thuẫn.

d. Từ các lập luận ở trên, ta thấy rằng không có số nguyên dương không đạt được nhỏ nhất. Chứng tỏ không có số nguyên dương không đạt được, hay, mọi số nguyên dương đều đạt được.

Tài liệu tham khảo

[1] Tạp chí Pi, tập 6, số 7 – 8, năm 2022.

[2] Les Olympiades nationales de mathématiques | Ministère de l'Education Nationale et de la Jeunesse.

[3] https://www.freemaths.fr/annales-olympiades-mathematiques-premieres-scientifiques-s/nationales/2022