MỤC LỤC

TOÁN HỌC ĐÃ GIÚP THIẾT KẾ VỎ Ô TÔ NHƯ THẾ NÀO?

NGUYỄN HOÀNG VŨ[1]

Có những đường cong tưởng chừng rất xa lạ nhưng lại xuất hiện ở mọi nơi trong đời sống, cả thực lẫn ảo, mà ít người ý thức được sự tồn tại của chúng. Trong bài viết này, chúng ta hãy cùng tìm hiểu về một đường cong như vậy, với tên gọi đường cong Bézier.

1. Bézier, De Casteljau và Bernstein

Vào những năm 1950, với sự phục hồi của nền kinh tế sau chiến tranh thế giới thứ 2, các hãng xe hơi của Pháp bắt đầu nghiên cứu cho ra các sản phẩm mới mang tính thẩm mỹ cao hơn. Tuy nhiên, phương thức tạo khuôn từ mô hình vật lý ban đầu vẫn không khác giai đoạn trước. Sau khi các nhà thiết kế mỹ thuật tạo ra mô hình nhỏ cho một mẫu xe mới, các bề mặt cong sẽ được phóng đại thủ công bằng cách đo đạc các tọa độ từ mô hình này để vẽ lên các bảng thiết kế kích thước thực. Quy trình tạo khuôn yêu cầu quá trình tỉ mỉ và chi tiết đòi hỏi kinh nghiệm cao từ các kỹ sư thực hiện công đoạn này. Sự thiếu rõ ràng và khả năng xảy ra lỗi cao làm cho việc thiết lập mô hình trong sản xuất có thể lặp đi lặp lại nhiều lần dẫn đến việc tăng chi phí và thời gian.

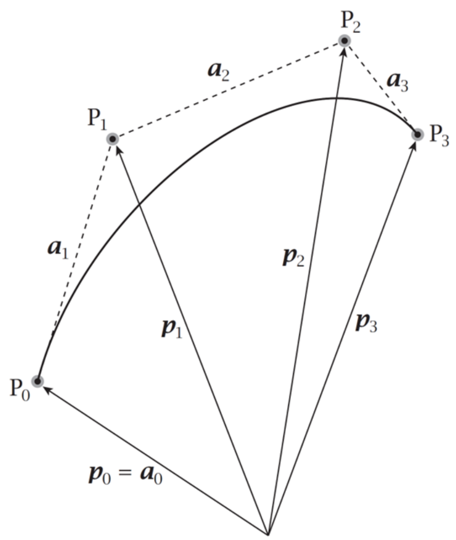
Mặt khác, cũng vào giai đoạn này, với sự tài trợ của chính phủ Pháp, các máy tính dạng analog bắt đầu xuất hiện trong nhiều ngành công nghiệp. Chúng được nối trực tiếp với các máy thao tác kim loại trong nhà máy. Các thiết bị này sử dụng đầu vào là những tấm bìa đục lỗ để điều chỉnh đường đi cũng như độ sâu của công cụ cắt. Các đường thẳng, đường tròn, parabola và các hình hình học thông thường đều có thể được đưa vào cho máy thao tác một các chính xác. Tuy nhiên, với các dạng đường cong phức tạp hơn, vẫn chưa có một phương thức phù hợp với công nghệ mới này.

Pierre Bézier (1910 – 1999).

Vào đầu những năm 1960, Pierre Bézier, một kỹ sư tại hãng xe Renault tiến hành tìm phương pháp toán học để giải quyết vấn đề trên. Thay vì dựa vào các kinh nghiệm từ

[1] *Hà Nội.*

quan sát và thực hành cũng như trí tưởng tượng, việc sản xuất cần được chính xác hóa một cách định lượng. Kết quả từ những nghiên cứu của ông đã cho ra cách xấp xỉ đường cong mà ngày nay được biết đến với tên đường cong Bézier.



Hình 1. Đường cong Bézier được xác định nhờ đường gấp khúc.

Về mặt ý tưởng, đường cong Bézier cho phép ta xấp xỉ một đường cong khác dựa trên một đường gấp khúc. Đồng thời khi điều chỉnh đường gấp khúc này ta cũng có thể thay đổi đường cong được mô tả.

Ta hãy xét một đường gấp khúc có các đỉnh P_0, P_1, P_2, P_3 với các vector tọa độ tương ứng là $\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{p_3}$. Các vector của các đoạn gấp khúc sẽ là:

$$\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{p_1} - \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{a_3} = \boldsymbol{p_3} - \boldsymbol{p_2}.$$

Vector của mỗi điểm trên đường cong sẽ được biểu diễn theo dạng tham số như sau:

$$\boldsymbol{r(t)} = \boldsymbol{a_0} + f_1(t)\boldsymbol{a_1} + f_2(t)\boldsymbol{a_2} + f_3(t)\boldsymbol{a_3}$$

với $\boldsymbol{a_0} = \boldsymbol{p_0}$ và f_i là các hàm số của t trong khoảng $[0,1]$.

Ta muốn đường cong tham số của ta có hai đầu trùng với đường cong thực tế, tức là:

$$\boldsymbol{r(0)} = \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{r(1)} = \boldsymbol{p_3}.$$

Thay vào biểu thức của $\boldsymbol{r(t)}$, ta được: $f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 0$ và $f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = 1$.

Tiếp theo, ta muốn rằng tiếp tuyến tại P_0 và P_3 sẽ cùng phương và chiều với các vector $\boldsymbol{a_1}$ và $\boldsymbol{a_3}$. Lấy đạo hàm của $\boldsymbol{r(t)}$ theo t ta có:

$$\boldsymbol{r'(t)} = f_1'(t)\boldsymbol{a_1} + f_2'(t)\boldsymbol{a_3} + f_3'(t)\boldsymbol{a_3}.$$

Điều kiện về tiếp tuyến sẽ cho ta:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r'(0)} &= f_1'(0)\boldsymbol{a_1} + f_2'(0)\boldsymbol{a_2} + f_3'(0)\boldsymbol{a_3}\\ &= k\boldsymbol{a_1}\\ \boldsymbol{r'(1)} &= f_1'(1)\boldsymbol{a_1} + f_2'(1)\boldsymbol{a_2} + f_3'(1)\boldsymbol{a_3}\\ &= k\boldsymbol{a_3}\end{aligned}$$

tương đương với $f_2'(0) = f_3'(0) = f_1'(1) = f_2'(1) = 0$.

Ta cũng muốn rằng đạo hàm cấp hai $\boldsymbol{r''(t)} = f_1''(t)\boldsymbol{a_1} + f_2''(t)\boldsymbol{a_2} + f_3''(t)\boldsymbol{a_3}$ chỉ phụ thuộc vào $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$ tại P_0 và $\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ tại P_3. Để thỏa mãn điều kiện này $f_3''(0) = f_1''(1) = 0$.

Bézier chọn các hàm f là các hàm đa thức bậc 3:

$$f_i(t) = \alpha_i t^3 + \beta_i t^2 + \gamma_i t + \delta_i, 1 \le i \le 3.$$

Thay vào các điều kiện ở trên và giải hệ phương trình tuyến tính ta được:

$$\begin{aligned}f_1(t) &= t^3 - 3t^2 + 3t\\ f_2(t) &= -2t^3 + 3t^2\\ f_3(t) &= t^3.\end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r(t)} = &\boldsymbol{a_0} + (t^3 - 3t^2 + 3t)\boldsymbol{a_1}\\ &+ (-2t^3 + 3t^2)\boldsymbol{a_2} + t^3\boldsymbol{a_3},\ 0 \le t \le 1.\end{aligned}$$

Phương trình đường cong theo tham số này cho phép ta điều chỉnh hình dạng của đường cong bằng cách thay đổi các vector $\boldsymbol{a_0}$, $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$. Đường cong Bézier cũng có thể được mở rộng bằng cách sử dụng các đa thức với bậc lớn hơn 3 nhưng trong thực tế việc này là không cần thiết. Thậm chí trong một số trường hợp đơn giản hơn, người ta chỉ dùng đường cong Bézier bậc 2:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}_0 + (-t^2 + 2t)\boldsymbol{a}_1 + t^2\boldsymbol{a}_2.$$

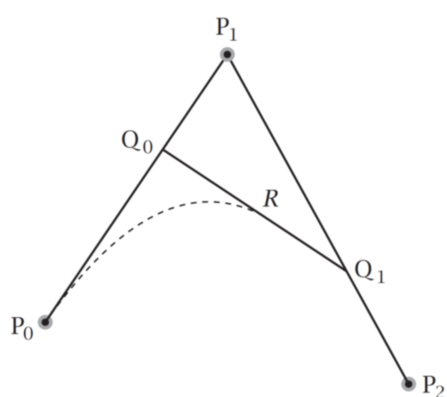
Bézier đã phát triển phương pháp mô tả đường cong trên của mình thành hệ thống UNISURF phục vụ cho công việc sản xuất ô tô. Thay vì những mô tả phức tạp, với mỗi đoạn cong, ta chỉ cần lưu tọa độ của 4 điểm mà thôi, giúp cho việc số hóa đường cong trở nên đơn giản hơn rất nhiều. Tuy nhiên phải đến năm 1966, khi Renault ký thỏa thuận hợp tác với một hãng xe nổi tiếng khác là Peugeot, phần mềm này mới bắt đầu được các kỹ sư sử dụng. Năm 1968 đánh dấu sự ra đời của mẫu xe Peugeot 204, chiếc xe đầu tiên có toàn bộ vỏ xe được xây dựng sử dụng phần mềm máy tính. Sự kiện này có ý nghĩa quan trọng là cột mốc bắt đầu vai trò của CAD (Computer Aided Design – thiết kế có máy tính hỗ trợ) trong các ngành công nghiệp.

Hình 2. Mẫu xe Peugeot 204 ra đời năm 1968.

> Bézier từng kể lại rằng, một nhân tố giúp ông thuyết phục thành công mọi người sử dụng phương pháp của mình là việc gán các kết quả toán học cho giáo sư Onésimer Durand, một nhân vật giả tưởng ông tự bịa ra. Điều này giúp mọi người cảm thấy tin tưởng nhiều hơn vào các kết quả của Bézier. Nhiều thập kỷ sau, Bézier khi đi giảng bài vẫn được hỏi rằng giáo sư Durand là ai và giảng dạy ở đâu!

Về mặt lịch sử, đường cong Bézier đã được khám phá trước đó không lâu bởi De Casteljau, một kỹ sư ở hãng xe Citroën cũng của Pháp. Công trình này được ông công bố nội bộ năm 1963. Tuy nhiên, do hãng coi đây là một bí mật công nghiệp, nó đã không được công bố ra bên ngoài cho đến tận năm 1975.

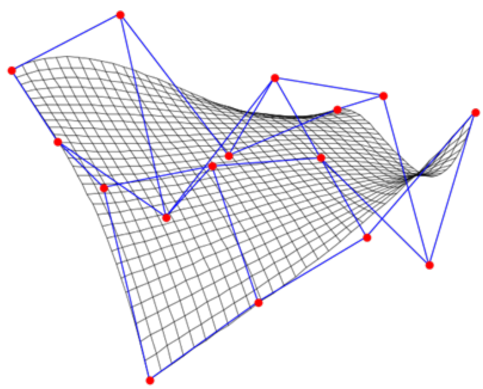
Thay vì sử dụng các vector như Bézier, De Casteljau xấp xỉ các đường cong dựa trên các điểm cực. Giả sử một đường cong có hai đầu ở P_0 và P_2. Một điểm P_1 được sử dụng để làm điểm điều khiển. Trên P_0P_1 lấy điểm Q_0 sao cho $\dfrac{P_0Q_0}{P_0P_1} = k$ Tương tự, trên P_1P_2 lấy điểm Q_1 sao cho $\frac{P_1Q_1}{P_1P_2}$ cũng bằng k. Trên Q_0Q_1 ta lại lấy điểm R sao cho $\dfrac{Q_0R}{Q_0Q_1} = k$. Từ tọa độ của P_0, P_1, P_2 có thể dễ dàng tính được tọa độ của Q_0, Q_1 và R bằng các công thức hình học giải tích. R sẽ là một điểm nằm trên đường cong ta cần mô tả. Tiếp đó, các bộ ba điểm P_0, Q_0, R và R, Q_1, P_2 lại cho ta 2 điểm tiếp theo thuộc đường cong. Lặp lại quá trình này cho đến khi được số lượng điểm nằm trên đường cong đủ dày đặc, ta có thể nối chúng bằng các đoạn thẳng để xấp xỉ đường cong. Bạn đọc có thể tự chứng minh để thấy rằng các điểm được xác định bằng thuật toán trên nằm trên một đường cong Bézier bậc 2. Khi ta di chuyển các điểm P_0, P_1 và P_2, ta có thể thay đổi được hình dạng của đường cong theo ý muốn.



Hình 3. Thuật toán De Casteljau.

Do De Casteljau phát hiện ra trước nhưng không được đặt tên cho đường cong, người ta đã bù đắp bằng cách đặt tên thuật toán tách đường cong trên là thuật toán De Casteljau. Thuật toán De Casteljau với $k = 0,5$ có thể được cài đặt hiệu quả trên các máy tính điện tử do việc chia một số cho 2 là rất dễ dàng với hệ cơ số nhị phân.

Đường cong Bézier còn có thể được mở rộng cho không gian 3 chiều. Khi đó ta sẽ có mặt cong Bézier.



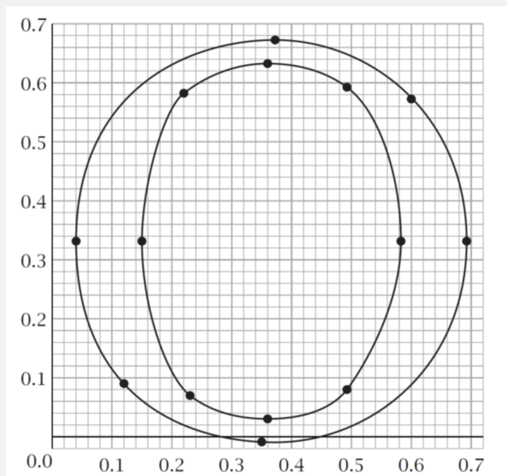
Hình 4. Mặt cong Bézier trong không gian 3 chiều.

Đường cong Bézier và font chữ máy tính

Việc hiển thị các font chữ khi soạn thảo văn bản trên máy tính cũng như khi in ấn từ máy tính là một vấn đề tưởng đơn giản nhưng lại phức tạp. Vào thời ban đầu của máy tính, các font được lưu dưới dạng bitmap, với các kích cỡ font khác nhau, ta cần các bitmap với độ phân giải khác nhau, rất tốn kém và không hiệu quả.

Đến năm 1985, John Warnock, người sáng lập ra công ty Adobe, đã đưa ra một giải pháp mới. Ông đã phát triển một ngôn ngữ lập trình với tên gọi PostScript để có thể xây dựng trang văn bản dựa trên các cấu trúc toán học. Trong đó, các font chữ được lưu dưới dạng font vector, dạng font mà sau này cả Apple lẫn Microsoft đều sử dụng cho các thế hệ font chữ sau này. Với những thành phần của font chữ là dạng đường cong, đường cong Bézier bậc 3 được sử dụng để lưu trữ chúng trong máy tính. Ví dụ như với chữ O ở bên dưới, với mỗi đoạn cong giữa hai điểm được đánh dấu liên tiếp, người ta cần lưu 4 tọa độ gồm tọa độ của hai điểm được đánh dấu và tọa độ của hai điểm còn lại để biểu diễn đoạn cong này dưới dạng đường cong Bézier.

Đường cong Bézier cũng trở thành công cụ chính trong Illustrator, một phần mềm khác của Adobe. Thay vì các thao tác phức tạp, những người thiết kế đồ họa chỉ cần nhấn chuột vài lần để tạo một đường cong trong phần mềm. Việc này đã thay đổi hoàn toàn ngành công nghiệp thiết kế đồ họa.



2. Sơ lược về đa thức Bernstein

Nếu viết đường cong Bézier bậc 3 theo tọa độ của các điểm xác định nó (thay vì các vector $\boldsymbol{a_i}$), ta được phương trình:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(t) =& (1-t)^3\boldsymbol{p_0} + 3t(1-t)^2\boldsymbol{p_1} \\ &+ 3t^2(1-t)\boldsymbol{p_2} + t^3\boldsymbol{p_3}. \end{aligned}$$

Các đa thức $(1-t)^3, 3t(1-t)^2, 3t^2(1-t)$ và t^3 có thể được coi là trọng số ứng với tọa độ của mỗi điểm trong biểu diễn của đường cong. Bạn đọc với trực giác toán học tốt sẽ nhận ngay thấy chúng là các đa thức thành phần khi ta tiến hành khai triển $(t+(1-t))^3$.

Các đa thức dạng này còn được gọi là các đa thức Bernstein:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},$$
$$1 \le i \le n, 0 \le t \le 1.$$

Các đa thức Bernstein được suy ra từ biến đổi sau:

$$\begin{aligned} 1 = 1^n &= (t + (1-t)) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t). \end{aligned}$$

Chúng được đặt tên theo nhà toán học Liên Xô Sergei Bernstein. Ông là một nhà toán học có nhiều đóng góp về vấn đề xấp xỉ hàm số. Ta luôn có thể biểu diễn một đa thức bất kỳ dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các đa thức Bernstein. Theo thuật ngữ trong đại số tuyến tính, các đa thức này tạo thành một cơ sở của không gian vector các đa thức.

Sergei Natanovich Bernstein (1880 – 1968).

Bernstein đã sử dụng các đa thức mang tên mình để chứng minh định lý xấp xỉ Weierstrass: "các đa thức với bậc đủ cao có thể xấp xỉ bất cứ hàm số liên tục nào trên một khoảng hữu hạn". Ông đã chứng minh rằng:

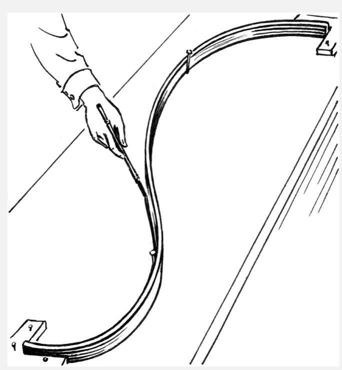
$$\lim_{n\to\infty} B_n(f,t) = f(t)$$

với $B_n(f,t) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(t)$ trên khoảng $[0,1]$ (chứng minh này được trình bày ở phần phụ lục). Do biến đổi $t \to \dfrac{t-a}{b-a}$ cũng biến đổi $[a,b] \to [0,1]$ nên định lý được chứng minh.

Tuy rằng tốc độ hội tụ của hàm đa thức B_n rất chậm, trong thực tế các đa thức Bernstein bậc 2 hoặc bậc 3 thường đã đủ để thỏa mãn các nhu cầu ứng dụng, ví dụ như trường hợp đường cong Bézier. Bản thân De Casteljau cũng đã tiến hành xây dựng nghiên cứu của mình dựa trên lý thuyết về đa thức Bernstein. Có thể thấy rằng những nghiên cứu toán học tưởng như trừu tượng lại nhiều lúc tạo cơ sở cho những ứng dụng thực tiễn đầy thú vị.

Hàm spline

Trước kia, người ta dùng thuật ngữ *spline* để gọi tên thanh gỗ được uốn cong bằng cách kẹp cố định một số điểm. Cách làm này giúp tạo ra đường cong được uốn tự nhiên trong quá trình đóng tàu. Trong toán học, các hàm số có dạng đa thức trên từng đoạn được gọi là các hàm spline. Những đường cong dùng để xấp xỉ sử dụng những hàm spline được gọi là các đường cong spline, bao gồm đường cong Bézier và những đường cong được phát triển sau này dựa trên nó như B–spline, NURB, ... Những đường cong này hiện nay được ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực công nghiệp như sản xuất máy bay, ô tô, thời trang, ... cũng như trong các lĩnh vực đồ họa máy tính và kiến trúc.



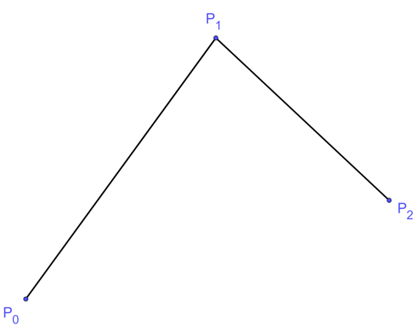
Cách làm thanh spline khi đóng tàu.

3. Vẽ đường cong Bézier bằng quỹ tích trong GeoGebra

Ta có thể vẽ đường cong Bézier bằng cách nhập phương trình tham số một cách trực tiếp. Tuy nhiên, việc vẽ bằng quỹ tích sẽ mang tính trực quan hơn. Để vẽ đường cong này theo quỹ tích, ta sử dụng cách mô tả của De Casteljau và cho hệ số k thay đổi trong khoảng $[0,1]$. Khi $k=0$, R trùng với P_0, còn khi $k=1$, R trùng với P_1. Quỹ tích của R chính là đường cong Bézier.

Trong GeoGebra, trước hết ta chọn các điểm P_0, P_1 và P_2 trong mặt phẳng rồi nối các đoạn thẳng P_0P_1 và P_1P_2.

$$d_1 = segment(P_0, P_1)$$
$$d_2 = segment(P_1, P_2)$$



Hình 5. Chọn 3 điểm trong mặt phẳng để xác định đường cong Bézier bậc 2.

Ta cho tham số k chạy từ 0 đến 1:

$$k = slider(0,1).$$

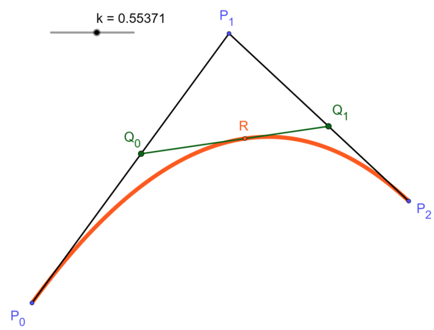
Để xác định các điểm Q_0 và Q_1, thay vì dùng công thức dạng vector, ta có thể sử dụng giao điểm của đường tròn và đoạn thẳng:

$$Q_0 = intersect\,(\text{circle}(P_0, d_1 * k), d_1)$$
$$Q_1 = intersect\,(\text{circle}(P_1, d_2 * k), d_2)$$

Điểm R cũng được xác định tương tự:

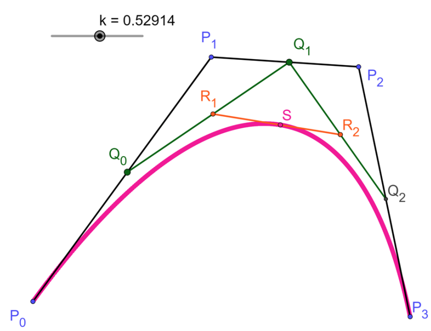
$$d_3 = segment(Q_0, Q_1)$$
$$R = intersect\,(\text{circle}(Q_0, d_3 * k), d_3)\,.$$

Ta ấn chuột phải vào điểm R và chọn "Show trace". Khi đó, cho thanh trượt của k di chuyển từ 0 đến 1, quỹ tích của R sẽ cho ta đường cong Bézier bậc 2 (bạn đọc có thể thử chứng minh bằng hình học giải tích rằng nó chính là đường cong này).



Hình 6. Đường cong Bézier bậc 2 dưới dạng quỹ tích trong GeoGebra.

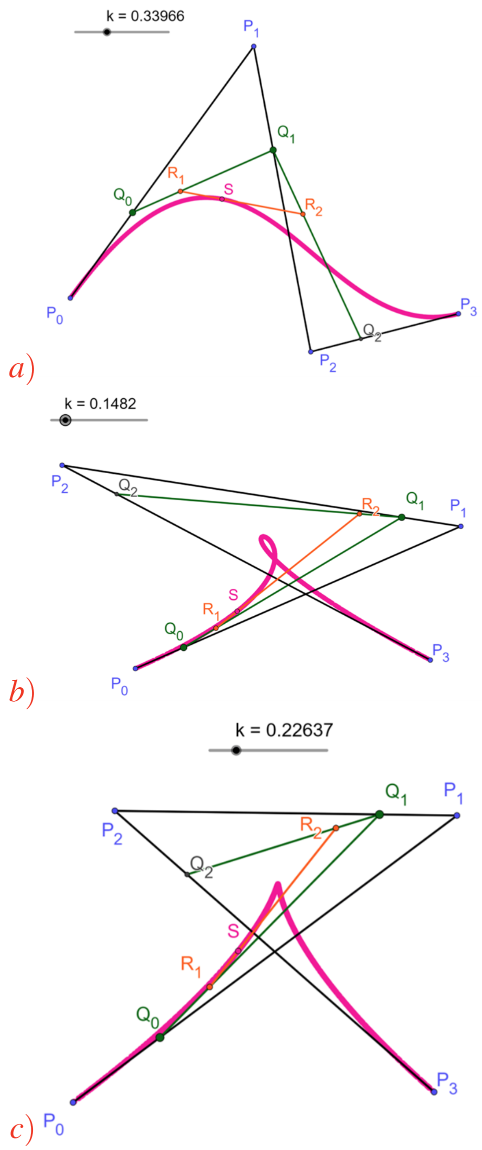
Với đường cong Bézier bậc 3, ta sẽ có 4 điểm P_0, P_1, P_2 và P_3. Để tiến hành dựng đường cong, ta xác định các điểm Q_0, Q_1 và Q_2 sao cho $\dfrac{P_0Q_0}{P_0P_1} = \dfrac{P_1Q_1}{P_1P_2} = \dfrac{P_2Q_2}{P_2P_3} = k$. Từ 3 điểm này, ta lại tiếp tục tìm các điểm R_1, R_2 và S sao cho $\dfrac{Q_0R_1}{Q_0Q_1} = \dfrac{Q_1R_2}{Q_1Q_2} = \dfrac{R_1S}{R_1R_2} = k$. Quỹ tích của S chính là đường cong cần dựng.



Hình 7. Đường cong Bézier bậc 3 dưới dạng quỹ tích trong GeoGebra.

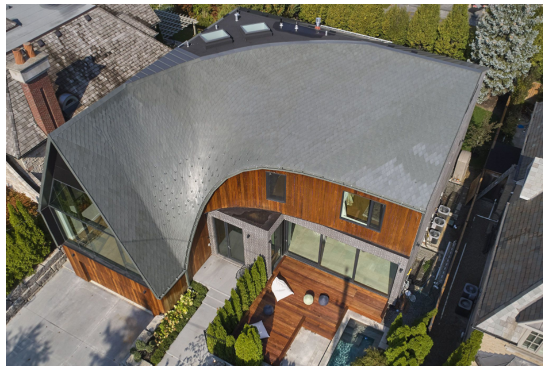
Với các đường cong Bézier bậc cao hơn, quá trình cũng tương tự, ở mỗi bước ta giảm đi một điểm cho đến khi chỉ còn lại điểm cuối cùng và tìm quỹ tích của điểm này.

Cho trường hợp đường cong Bézier bậc 3, ta có thể thay đổi vị trí các điểm P_i để được các dạng đường cong khác nhau. Có thể thấy, chỉ với tọa độ của vài điểm trong không gian, ta đã có thể xấp xỉ những đường cong phức tạp. Do tính dễ điều chỉnh này mà đường cong Bézier còn được sử dụng để tạo hình động trong đồ họa máy tính. Ta chỉ cần yêu cầu phần mềm thay đổi tọa độ của các điểm điều khiển và toàn bộ đường cong sẽ được di chuyển theo mà không phải đưa ra yêu cầu phức tạp nào khác.



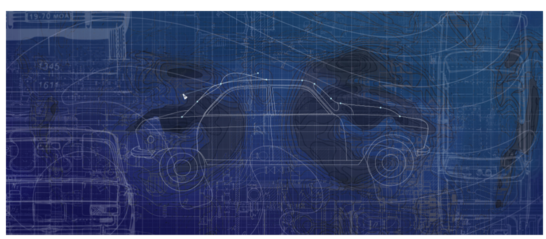
Hình 8. Một số dạng đường cong Bézier bậc 3 khi ta thay đổi vị trí các điểm xác định nó. a) Đường cong có điểm uốn. b) Đường cong có vòng. c) Đường cong có điểm đỉnh.

4. Lời kết



Hình 9. Đường cong Bézier cũng được các kiến trúc sư sử dụng khi thiết kế với sự hỗ trợ của phần mềm. Trong ảnh là một căn nhà có hình dạng mái được thiết kế với đường cong Bézier.

Đường cong Bézier cho thấy ngay cả trong các ngành sản xuất phục vụ đời sống, toán học cũng có thể có những đóng góp quan trọng giúp cải tiến và nâng cao hiệu quả công việc. Toán học được ứng dụng rất phổ biến trong các ngành công nghiệp nhưng vai trò này của nó lại ít được các tài liệu nhắc đến. Việc trình bày về những ứng dụng này cho học sinh sẽ giúp các em có hứng thú hơn với các lĩnh vực khoa học và công nghệ khi định hướng tương lai cho bản thân. Những đường cong hình học còn có nhiều ứng dụng thú vị khác mà Pi sẽ trình bày trong các số sau này với độc giả.



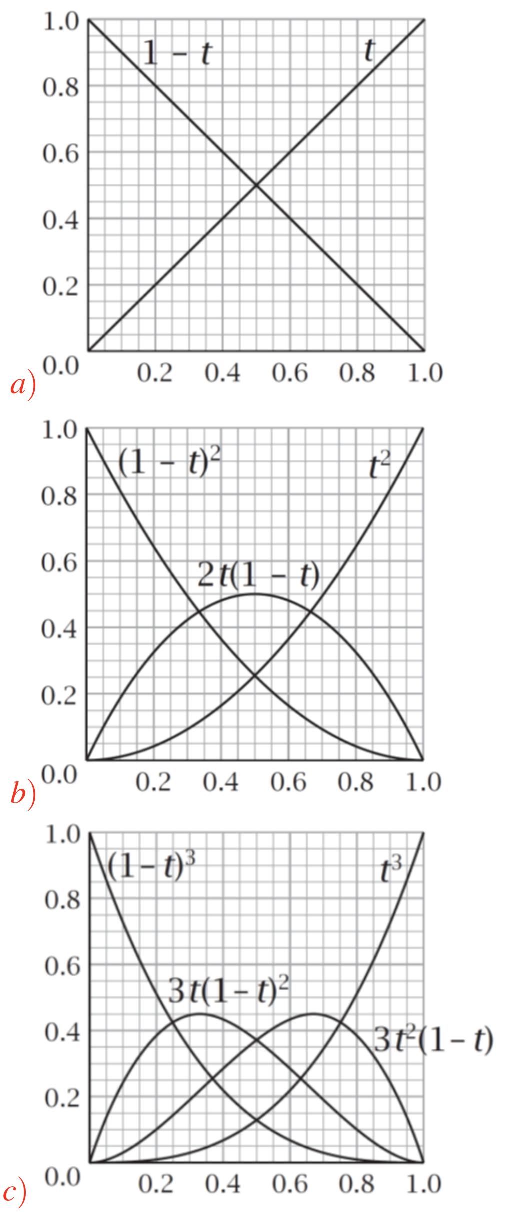
Phụ lục: Chứng minh định lý xấp xỉ Weierstrass sử dụng đa thức Bernstein

Xét

$$B_n(f,t) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i f\left(\frac{i}{n}\right).$$

Với $t \in [0,1]$, ta có:

$$
\begin{aligned}
&|f(t) - B_n(f,t)| \\
=&|(t + (1-t))^n f(t) - B_n(f,t)| \\
=&\left|\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = \left(f(t) - -f\left(\frac{i}{n}\right)\right)\right| \\
\leq&\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \left|f(t) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right| = S
\end{aligned}
$$



Hình 9. a) Các đa thức Bernstein bậc 1. b) Các đa thức Bernstein bậc 2. c) Các đa thức Bernstein bậc 3.

Quan sát đồ thị của các $B_i^n(t)$, ta nhận thấy đỉnh của chúng sẽ gần với một giá trị $t = \frac{i}{n}$ và phần lớn diện tích dưới đường cong sẽ phân bố xung quanh đỉnh này. Điều đó có nghĩa rằng các hàm số Bernstein có $\frac{i}{n}$ gần với t hơn sẽ có đóng góp nhiều hơn cho $B_n(f,t)$. Do đó, ta có thể tách S thành hai phần như sau với $\delta > 0$:

$$
\begin{aligned}
S =& \sum_{\left|\frac{i}{n} - t\right| \geq \delta} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \left|f(t) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \\
&+ \sum_{\left|\frac{i}{n} - t\right| < \delta} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \left|f(t) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \\
=& S_1 + S_2.
\end{aligned}
$$

Tiến hành khai triển đại số và sử dụng một số công thức để biến đổi tổ hợp, ta có các công thức sau:

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1.$$

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot B_i^n(t) = nt.$$

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1) \cdot B_i^n(t) = n(n-1)t^2.$$

Từ ba công thức này ta có:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} (i - nt)^2 B_i^n(t) \\
=& \sum_{i=0}^{n} \left[i(i-1) - (2nt-1)i + n^2t^2\right] B_i^n \\
=& n(n-1)t^2 - (2nt-1)nt + n^2t^2 \\
=& nt(1-t) \leq \frac{n}{4}.
\end{aligned}
$$

Chia cả hai vế cho n^2 ta được:

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n} - t\right)^2 B_i^n(t) \leq \frac{1}{4n}.$$

Do đó:

$$\sum_{\left|\frac{i}{n}-t\right|\geq\delta} B_i^n(t) \leq \frac{1}{\delta^2}\sum_{\left|\frac{i}{n}-t\right|\geq\delta}\left(\frac{i}{n}-t\right)^2 B_i^n(t) \leq \frac{1}{\delta^2}\cdot\frac{1}{4n}.$$

Với giá trị M thỏa mãn $|f(t)| \leq M$ trên $[0,1]$, ta có:

$$S_1 \leq \sum_{\left|\frac{i}{n}-t\right|\geq\delta}\left|f(t)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right| B_i^n(t) \leq 2M\cdot\frac{1}{4n\delta^2} = \frac{M}{2\delta^2 n}.$$

Với một giá trị ε cho trước, với δ đủ nhỏ sao cho $|f(u)-f(v)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ khi $|u-v| < \delta$ trong khoảng $[0,1]$, ta có:

$$S_2 \leq \sum_{\left|\frac{i}{n}-t\right|\geq\delta}\frac{\varepsilon}{2}\cdot B_i^n(t) < \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tóm lại, với $\varepsilon > 0$ cho trước và δ thỏa mãn điều kiện nêu ở trên, khi n đủ lớn để $\frac{M}{2\delta^2 n} < \frac{\varepsilon}{2}$, ta có:

$$|f(x) - B_{n,f}(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Thay vì biến đổi sử dụng các công thức tổ hợp, ta cũng có thể sử dụng bất đẳng thức Chebyshev trong xác suất để chứng minh $S_1 \leq \frac{M}{2\delta^2 n}$. Bất đẳng thức Chebyshev được phát biểu như sau: Cho p là một phân phối rời rạc với giá trị trung bình m và độ lệch chuẩn σ, khi đó: $P(|x-m| \geq s\cdot\sigma) \leq \frac{1}{s^2}$ (chứng minh của bất đẳng thức này không quá phức tạp và có thể được tìm thấy trong các giáo trình xác suất hoặc qua internet). Với trường hợp của ta, $B_i^n(t)$ là các giá trị ứng với $p(x=i)$ của phân phối nhị thức có trung bình là $m = nt$. Độ lệch chuẩn tương ứng của phân phối này sẽ là $\sigma = \sqrt{nt(1-t)}$. Theo bất đẳng thức Chebyshev, chọn s sao cho $s\cdot\frac{\sigma}{n} = \delta$, ta có:

$$\begin{aligned} &P(|x-nt| \geq s\cdot\sigma) \\ &= \sum_{\left|\frac{i}{n}-t\right|\geq\delta} B_i^n(t) \leq \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{n^2\delta^2} = \frac{t(1-t)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}. \end{aligned}$$

Tài liệu tham khảo

[1] Farin, Gerald. *Curves and Surfaces for Computer–Aided Geometric Design*. Elsevier, 28 June 2014.

[2] Farin, Gerald E, et al. *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. Amsterdam ; Boston, Mass., Elsevier, 2002.

[3] Havil, Julian. *Curves for the Mathematically Curious : An Anthology of the Unpredictable, Historical, Beautiful and Romantic*. Princeton, New Jersey ; Oxford, Princeton University Press, 2019.

[4] Levasseur, Kenneth M. "A Probabilistic Proof of the Weierstrass Approximation Theorem." *The American Mathematical Monthly*, vol. 91, no. 4, Apr. 1984, p. 249, https://doi.org/10.2307/2322960. Accessed 31 Oct. 2019.

[5] Salomon, David. *Curves and Surfaces for Computer Graphics*. New York, Ny, Springer New York, 2006.

ĐỊNH LÝ PHÂN LOẠI MẶT ĐÓNG TRONG TÔPÔ HỌC (Phần II)

NGUYỄN MẠNH LINH[1]

5. Ký hiệu của mặt đã trải phẳng. Chứng minh định lý

Trải phẳng cho phép chúng ta đưa việc phân loại mặt đóng từ một bài toán tôpô thành một bài toán hình học tổ hợp. Để mô tả một mặt compact đã trải phẳng, ta dùng khái niệm sau đây. Cho X là một mặt compact và xét một trải phẳng của X. Đó là một đa giác cong hữu hạn với một số cặp cạnh được dán lại với nhau theo một chiều nào đó. Ta dùng các chữ cái để đặt tên cho các cạnh của đa giác cong sao cho các cạnh được dùng một chữ cái khi và chỉ khi chúng được dán lại với nhau. Ta đánh mũi tên cho các cạnh để thể hiện chiều dán; đối với những cạnh biên (chỉ xuất hiện một lần, không dán với cạnh nào khác) thì ta đánh mũi tên tùy ý. Ta bắt đầu từ một đỉnh tùy ý và lần lượt đi qua các cạnh của đa giác cong theo một chiều xác định trên mặt phẳng (chẳng hạn, ngược chiều kim đồng hồ) và lần lượt viết tên các cạnh thành một dãy theo quy tắc sau: nếu cạnh a cùng chiều với hướng đi đã chọn thì viết a, ngược lại thì viết a^{-1}. Ta thu được một dãy ký tự, được gọi là một *ký hiệu* của mặt X.

Chẳng hạn, mặt cầu có thể được mô tả bởi ký hiệu aa^{-1} hoặc $abb^{-1}a^{-1}$, mặt xuyến có thể được mô tả bởi ký hiệu $aba^{-1}b^{-1}$, mặt phẳng xạ ảnh có thể được mô tả bởi ký hiệu aa hoặc $abab$, chai Klein có thể được mô tả bởi ký hiệu $aba^{-1}b$ (xem các Hình 12, 14, 16 và 18).

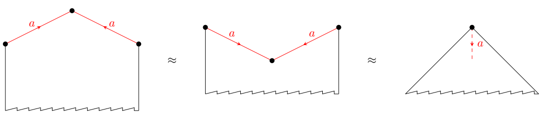
Ký hiệu cho phép ta mô tả tổng liên thông một cách đơn giản. Thật vậy, giả sử X, Y là các mặt compact, S_1 là một ký hiệu của X và S_2 là một ký hiệu của Y. Ta khoét một đĩa mở D_1° khỏi X sao cho biên ∂D_1 đi qua đỉnh đầu (cũng là đỉnh cuối) của đường đi mà ta đã chọn để định nghĩa S_1. Mặt thu được được cho bởi ký hiệu S_1a, với a là một chữ cái chưa xuất hiện trong S_1 (dùng để ký hiệu ∂D_1). Khoét một đĩa mở D_2° khỏi Y theo cách tương tự, ta thu được mặt S_2 cho bởi ký hiệu aS_2. Dán hai mặt vừa thu được theo cạnh a, ta thu được tổng liên thông $X\#Y$, được cho bởi ký hiệu S_1S_2. Tóm lại, ta chỉ cần viết một ký hiệu của X liền với một ký hiệu của Y để thu được một ký hiệu của $X\#Y$. Chẳng hạn, mặt $\mathbb{T}^{\#g}$ được mô tả bởi ký hiệu $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$, trong khi mặt $\mathbb{P}^{\#g}$ được mô tả bởi ký hiệu $a_1a_1a_2a_2\ldots a_ga_g$.

Ta bắt đầu chứng minh một nửa của định lý chính bằng cách chỉ ra rằng mọi mặt đóng đều đồng phôi với một trong các mặt $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}^{\#g}$ hoặc $\mathbb{P}^{\#g}$ (với $g \geq 1$). Xét X là một mặt đóng.

[1] *Université Paris-Saclay.*

Ta trải phẳng nó, đặt tên và định hướng các cạnh một cách thích hợp. Lúc này, đa giác cong thu được gồm các cặp cạnh (vì X không có biên). Chứng minh được chia thành 4 bước như sau.

Bước 1. Khử các cặp cạnh kề dạng $\{a, a^{-1}\}$. Ta có thể giả sử đa giác cong thu được có ít nhất 4 cạnh, vì nếu nó chỉ có một cặp cạnh thì $X \approx \mathbb{S}$ hoặc $X \approx \mathbb{P}$, tùy theo cách hai cặp cạnh này được dán với nhau (xem Hình 18). Giả sử có một cặp cạnh kề dạng $\{a, a^{-1}\}$. Ta có thể dán nó lại để khử nó khỏi phép trải phẳng, như trong Hình 25.

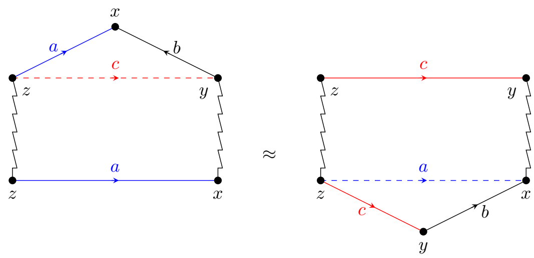


Hình 25: Khử các cặp cạnh kề dạng $\{a, a^{-1}\}$.

Ta lặp lại thao tác khử này cho đến khi X có chỉ còn 2 cạnh hoặc không còn cặp cạnh kề nào như trên.

Bước 2. Đưa về đa giác cong mà mọi đỉnh đều được dán lại thành một đỉnh. Đối với mặt xuyến cho bởi ký hiệu $aba^{-1}b^{-1}$, ta thấy rằng 4 đỉnh của trải phẳng trên được dán lại thành một đỉnh duy nhất. Ta sẽ làm điều này cho mặt đóng X tùy ý. Nếu x là một đỉnh của đa giác cong, ta ký hiệu bởi $[x]$ tập hợp các đỉnh được dán với x. Rõ ràng, $[x] = [y]$ nếu x và y được dán với nhau và $[x] \cap [y] = \varnothing$ nếu không.

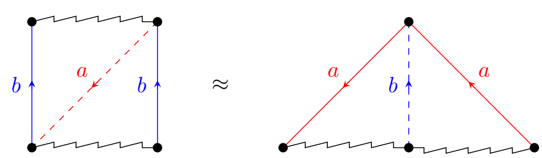
Giả sử x và y là hai đỉnh của đa giác cong không được dán với nhau. Ký hiệu bởi b cạnh với hai đầu mút x, y, và định hướng lại (nếu cần) sao cho x là điểm cuối của b. Ký hiệu bởi a cạnh kề với b tại đầu mút x và gọi z là đầu mút còn lại. Chú ý các cạnh a và b không được dán với nhau (vì nếu vậy thì x phải là điểm cuối của a, từ đó ta thu được một cặp cạnh kề nhau dạng $\{a, a^{-1}\}$, mâu thuẫn với giả sử rằng ta đã thực hiện triệt để Bước 1). Định hướng lại a nếu cần để x là điểm cuối. Ta cắt đa giác cong theo một cạnh c từ z đến y, và dán lại dọc theo cạnh a. Nếu $[x]$ có ít nhất hai đỉnh thì ở đa giác cong mới thu được, số đỉnh của $[x]$ giảm đi 1 và số đỉnh của $[y]$ tăng thêm 1 (xem Hình 26).



Hình 26: Giảm số đỉnh được dán với x đi 1 và tăng số đỉnh được dán với y thêm 1.

Ta lặp lại quá trình trên cho đến khi $[x] = \{x\}$. Lúc này, ta thu được một cặp cạnh kề dạng $\{a, a^{-1}\}$ với điểm cuối là x và ta quay lại Bước 1. Thực hiện phép giản ước ở Bước 1, ta xóa đỉnh x khỏi đa giác cong, làm giảm tổng số đỉnh (sau khi đã đồng nhất các đỉnh được dán với nhau) đi 1. Lặp lại toàn bộ quá trình trên (gồm cả Bước 1 và Bước 2), sau cùng ta thu được một đa giác cong mà mọi đỉnh đều được dán thành một đỉnh duy nhất.

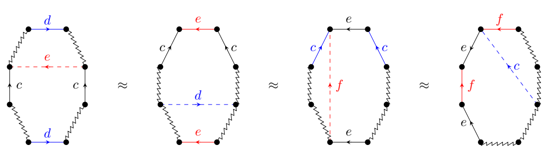
Bước 3. Thay các cặp cạnh không kề nhau dạng $\{b, b\}$ bởi các cặp cạnh kề nhau. Giả sử có một cặp cạnh không kề nhau dạng $\{b, b\}$ (dạng $\{b^{-1}, b^{-1}\}$ đưa được về dạng này bằng cách định hướng lại). Ta cắt đa giác cong theo một cạnh a nối 2 điểm cuối của hai cạnh b, rồi dán lại dọc theo cạnh b như trong Hình 27. Chú ý rằng các cặp cạnh kề dạng $\{c, c\}$ hoặc $\{c^{-1}, c^{-1}\}$ (với $c \neq b$) không bị ảnh hưởng bởi thao tác này. Đồng thời, mọi đỉnh vẫn được dán thành một đỉnh duy nhất.



Hình 27: Thay cặp cạnh $\{b, b\}$ bởi cặp cạnh kề nhau $\{a, a\}$.

Lặp lại Bước 3 cho đến khi mọi cặp cạnh dạng $\{b, b\}$ hoặc $\{b^{-1}, b^{-1}\}$ đều kề nhau.

Bước 4. Xử lý các cặp cạnh không kề nhau dạng $\{c,c^{-1}\}$. Giả sử rằng tồn tại một cặp cạnh không kề nhau dạng $\{c,c^{-1}\}$. Đương nhiên, ta có thể giả sử c là cạnh đầu tiên của đường đi đã chọn, nghĩa là X được cho bởi ký hiệu $cAc^{-1}B$ với A,B là các dãy ký tự khác rỗng. Giả sử phản chứng rằng không có cạnh nào trong A được dán với một cạnh khác trong B. Như vậy, các sự dán cạnh chỉ xảy ra trên A, trên B hoặc trên cặp $\{c,c^{-1}\}$. Nói riêng, hai đầu mút của c không được dán với nhau, mâu thuẫn với giả thiết rằng mọi đỉnh đã được dán thành một đỉnh duy nhất. Vậy giả sử phản chứng là sai, nghĩa là có một cạnh của A được dán với một cạnh khác trong B. Vì các cặp cạnh dạng $\{a,a\}$ đều đã đưa về kề nhau, nên có một cạnh d trong A được dán với cạnh d^{-1} trong B, nghĩa là X cho bởi ký hiệu dạng $c\ldots d\ldots c^{-1}\ldots d^{-1}$. Ta thực hiện cắt dán như ở Hình 28 để thay 2 cặp $\{c,c^{-1}\}$ và $\{d,d^{-1}\}$ bởi dãy $efe^{-1}f^{-1}$. Chú ý rằng các cặp cạnh kề nhau không bị ảnh hưởng bởi thao tác này. Đồng thời, mọi đỉnh vẫn được dán thành một đỉnh duy nhất.



Hình 28: Thay 2 cặp cạnh $\{c,c^{-1}\}$ và $\{d,d^{-1}\}$ bởi dãy $efe^{-1}f^{-1}$.

Lặp lại Bước 4 cho đến khi các cặp cạnh dạng $\{c,c^{-1}\}$ được phân hoạch vào cách dãy dạng $efe^{-1}f^{-1}$ (các cặp cạnh dạng $\{b,b\}$ vẫn luôn kề nhau). Ký hiệu thu được mô tả tổng liên thông của một số hữu hạn các mặt xuyến và các mặt phẳng xạ ảnh (mặt xuyến có ký hiệu là $aba^{-1}b^{-1}$ và mặt phẳng xạ ảnh có ký hiệu là aa. Vì tính giao hoán của tổng liên thông, ta có $X \approx \mathbb{T}^{\#m}\#\mathbb{P}^{\#n}$, với $m,n \in \mathbb{N}$. Nếu $m=0$ hoặc $n=0$ thì chứng minh kết thúc. Trong trường hợp $m,n>0$, ta áp dụng kết quả $\mathbb{T}\#\mathbb{P} \approx \mathbb{P}^3$ (ở cuối mục trước) m lần liên tiếp để thu được $X \approx \mathbb{P}^{\#(2m+n)}$.

Để chứng minh phần "duy nhất" của định lý chính, ta cần chỉ ra rằng các mặt đã liệt kê đôi một không đồng phôi. Một việc có thể làm ngay lúc này là chỉ ra rằng các mặt $\mathbb{P}^{\#g}$ (với $g>0$) không đồng phôi với các mặt $\mathbb{T}^{\#h}$ (với $h \geq 0$, nhắc lại rằng $\mathbb{T}^0 := \mathbb{S}$). Thật vậy, mặt cầu và mặt xuyến là mặt một phía là các mặt hai phía (vì thế, các mặt xuyến với h quai cầm, $h>0$, cũng vậy) nên ta chỉ cần chỉ ra rằng rằng $\mathbb{P}^{\#g}$ là mặt một phía với mọi $g>0$. Thật vậy

- với $g=1,2$, ta biết rằng $\mathbb{P}$ và $\mathbb{P}\#\mathbb{P} \approx \mathbb{K}$ (xem Hình 19) là các mặt một phía, vì chúng đều chứa băng Möbius (xem Hình 17);
- với $g \geq 3$ và chẵn thì $g=2n$ (với $n \geq 2$), áp dụng liên tiếp kết quả $\mathbb{P}^{\#3} \approx \mathbb{T}\#\mathbb{P}$, ta có $\mathbb{P}^{\#2n} \approx \mathbb{T}^{n-1}\#\mathbb{P}^{\#2} \approx \mathbb{T}^{n-1}\#\mathbb{K}$ là mặt một phía (vì $\mathbb{T}^{n-1}$ là mặt hai phía còn $\mathbb{K}$ là mặt một phía);
- với $g \geq 3$ và lẻ thì $g=2n+1$ (với $n \geq 1$), tương tự, ta có $\mathbb{P}^{\#(2n+1)} \approx \mathbb{T}^n\#\mathbb{P}$ là mặt một phía (vì $\mathbb{T}^n$ là mặt hai phía còn $\mathbb{P}$ là mặt một phía).

Phần còn lại của chứng minh cho tính duy nhất sẽ được hoãn lại tới mục sau, nơi ta giới thiệu thêm một bất biến tôpô quan trọng khác.

6. Đặc trưng Euler–Poincaré. Giống

Cho X là một mặt đóng và $\mathscr{T}$ là một phép tam giác phân hữu hạn của X. Lần lượt ký hiệu bởi $V(\mathscr{T})$, $E(\mathscr{T})$ và $F(\mathscr{T})$ số đỉnh, số cạnh và số tam giác cong trong $\mathscr{T}$. Số nguyên

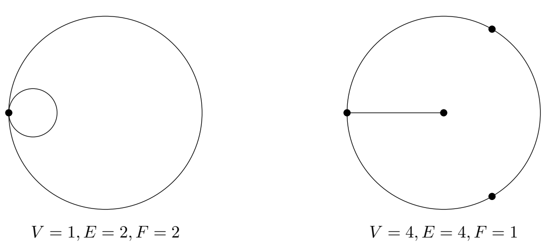
$$\chi(\mathscr{T}) = V(\mathscr{T}) - E(\mathscr{T}) + F(\mathscr{T})$$

là *đặc trưng Euler–Poincaré* của $\mathscr{T}$. Ta sẽ dùng giá trị này để chỉ ra rằng $\mathbb{S}$ không đồng phôi với $\mathbb{T}^m$ với $m>0$ và rằng $\mathbb{T}^m$ không đồng phôi với $\mathbb{T}^n$ cũng như $\mathbb{P}^m$ không đồng phôi với $\mathbb{P}^n$ với $m \neq n$. Trước hết, ta cần chỉ ra rằng giá trị χ là một bất biến tôpô chỉ phụ thuộc vào nội tại mặt X, không phụ vào phép tam giác phân $\mathscr{T}$. Trong tôpô đại số, điều này được chứng minh nhờ khái niệm *lý thuyết* *đồng điều* và một tính toán đơn giản trên các *số Betti*.

Ở mục này, chúng ta cố gắng phác thảo một chứng minh không chính thức cho sự kiện này. Ý tưởng như sau, cho $\mathscr{T}$ và $\mathscr{T}'$ là hai tam giác phân tùy ý, ta dùng một số hữu hạn các phép biến đổi bảo toàn đặc trưng Euler–Poincaré để đưa $\mathscr{T}$ về $\mathscr{T}'$. Để làm điều này một cách thuận tiện, ta đưa ra một khái niệm tổng quát hơn tam giác phân: Ta gọi một *cấu trúc phân ngăn* trên X là một họ $\mathscr{C}$ gồm một số hữu hạn các điểm, các đường và các đa giác cong trên X, thỏa mãn các tính chất sau.

- Phần trong của mỗi đa giác cong đều đồng phôi với đĩa mở $\mathbb{D}$ và đôi một không giao nhau.
- Biên của mỗi đa giác cong là hợp của một số hữu hạn các đường (ta gọi các đường này là các *cạnh* của đa giác cong, các đầu mút của chúng là các *đỉnh* của đa giác cong).
- Sau khi bỏ điểm đầu và điểm cuối, các đường đều đồng phôi với khoảng mở $(0,1)$ và đôi một không giao nhau.

Khái niệm trên cho phép sự xuất hiện của các đường với điểm đầu trùng với điểm cuối (các *khuyên*), các đa giác có thể có số cạnh tùy ý (thậm chí có thể bằng 1 hoặc 2), xem Hình 29.



Hình 29: Hai cấu trúc phân ngăn khác nhau của đĩa đóng.

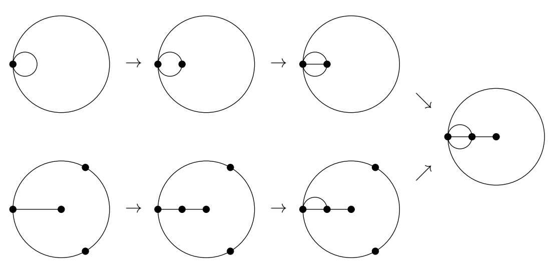
Lần lượt ký hiệu bởi $V(\mathscr{C})$, $E(\mathscr{C})$ và $F(\mathscr{C})$ số điểm, số đường và số đa giác cong trong $\mathscr{C}$. Gọi

$$\chi(\mathscr{C}) = V(\mathscr{C}) - E(\mathscr{C}) + F(\mathscr{C})$$

là đặc trưng Euler–Poincaré của $\mathscr{C}$. Dễ thấy các thao tác sau đây không làm thay đổi đặc trưng Euler–Poincaré của cấu trúc phân ngăn.

- Chia đôi một đường bằng cách thêm một điểm vào giữa đường (số điểm và số đường đều tăng thêm 1, số đa giác cong không đổi).
- Chia đôi một đa giác cong bằng cách thêm một đường nối hai đỉnh *không nhất thiết phân biệt* (số điểm không đổi, số đường và số đa giác cong đều tăng thêm 1).
- Thêm một điểm ở miền trong của một đa giác cong và một đường nối nó với một đỉnh của đa giác (số điểm và số đường đều tăng thêm 1, số đa giác cong không đổi).

Giả sử $\mathscr{C}$ và $\mathscr{C}'$ là hai cấu trúc phân ngăn sao sao cho giao của mỗi đường của $\mathscr{C}$ với mỗi đường của $\mathscr{C}'$ chỉ gồm một số hữu hạn các điểm và một số hữu hạn các đoạn đóng. Khi đó ta có thể dùng một số hữu hạn các phép biến đổi trên để đưa $\mathscr{C}$ và $\mathscr{C}'$ về cùng một cấu trúc phân ngăn $\mathscr{C}''$, chẳng hạn như trong Hình 30. Vì thế, ta có $\chi(\mathscr{C}) = \chi(\mathscr{C}'') = \chi(\mathscr{C}')$.



Hình 30: Đưa hai cấu trúc phân ngăn ở Hình 29 về cùng một cấu trúc phân ngăn.

Trường hợp xấu có thể xảy ra là khi giao của một đường trong $\mathscr{C}$ với một đường trong $\mathscr{C}'$ gồm một số vô hạn điểm hoặc một số vô hạn đoạn đóng. Lúc này, ta cần "xê dịch" hai đường này một chút để đưa về trường hợp trước. Đây là một bước rất kỹ thuật và cần dùng đến tính compact trong tôpô học, ta sẽ không đi sâu vào chi tiết.

Từ các phân tích ở trên, ta có thể định nghĩa đặc trưng Euler–Poincaré $\chi(X)$ của một mặt đóng X là đặc trưng Euler–Poincaré $\chi(\mathscr{T})$ của bất kỳ phép tam giác phân hữu hạn $\mathscr{T}$

(hoặc bất kỳ cấu trúc phân ngăn hữu hạn $\mathscr{C}$) nào của X. Chẳng hạn, mặt xuyến có một tam giác phân $\mathscr{T}$ cho bởi Hình 13, với $V(\mathscr{T})=9$, $E(\mathscr{T})=27$ và $F(\mathscr{T})=18$, nên $\chi(\mathbb{T})=9-27+18=0$. Một phép đồng phôi biến một tam giác phân của mặt này thành một tam giác phân của mặt kia, với số đỉnh, số cạnh và số tam giác cong được bảo toàn. Vì thế, hai mặt đồng phôi có cùng đặc trưng Euler–Poincaré, nghĩa là đặc trưng Euler–Poincaré là một bất biến tôpô.

Cho X và Y là các mặt đóng, ta tìm công thức liên hệ giữa $\chi(X\#Y)$ với $\chi(X)$ và $\chi(Y)$ như sau. Xét $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ lần lượt là các tam giác phân hữu hạn bất kỳ của X sao cho có ít nhất một tam giác cong $T\in\mathscr{T}$ nằm trong X° và ít nhất một tam giác cong $T'\in\mathscr{T}'$ nằm trong Y°. Ta khoét T° và T'° khỏi X và Y rồi dán $X\setminus T^\circ$ với $Y\setminus T'^\circ$ dọc theo $\partial T\approx\partial T'$ để thu được tổng liên thông $X\#Y$. Có 3 đỉnh được dán lại với nhau, 3 cạnh được dán lại với nhau, và 2 tam giác cong bị bỏ đi, do đó tam giác phân mới thu được trên $X\#Y$ gồm $V(\mathscr{T})+V(\mathscr{T}')-3$ đỉnh, $E(\mathscr{T})+E(\mathscr{T}')-3$ cạnh và $F(\mathscr{T})+F(\mathscr{T}')-2$ tam giác cong. Từ đó ta tính được

$$\chi(X\#Y)=\chi(X)+\chi(Y)-2.$$

Thay $Y=\mathbb{S}$ trong công thức trên (nhắc lại rằng $X\#\mathbb{S}\approx X$), ta thu được $\chi(\mathbb{S})=2$. Mặt khác, bằng quy nạp, ta dễ dàng tính được

$$\chi(X^{\#g})=g\cdot\chi(X)+2-2g$$

với $g\geq 1$. Từ đó ta có $\chi(\mathbb{T}^{\#g})=2-2g\leq 0$. Do đó, mặt $\mathbb{S}$ cùng các mặt $\mathbb{T}^g$, với $g\geq 1$, đôi một không đồng phôi (nhắc lại rằng tất cả các mặt này đều là mặt hai phía).

Ngoài ra, từ kết quả $\mathbb{P}\#\mathbb{T}\approx\mathbb{P}^{\#3}$, ta tính được $\chi(\mathbb{P})=1$, suy ra $\chi(\mathbb{T}^{\#g})=2-g$. Do đó, các mặt $\mathbb{P}^g$, với $g\geq 1$, đôi một không đồng phôi (nhắc lại rằng tất cả các mặt này đều là mặt một phía). Điều này kết thúc chứng minh của định lý phân loại tôpô cho các mặt đóng.

Ta kết thúc bài viết bằng việc nhắc đến khái niệm sau đây. Với X là một mặt đóng, nếu X là mặt hai phía thì tồn tại duy nhất số tự nhiên g sao cho $\chi(X)=2-2g$, hay $X\approx\mathbb{T}^{\#g}$ (nhắc lại quy ước $\mathbb{T}^{\#0}=\mathbb{S}$). Số tự nhiên g này được gọi là *giống* (genus) của mặt X, nó chính là "số quai cầm" của X (mặt cầu không có quai cầm, tổng liên thông $\mathbb{T}^{\#g}$ có g quai cầm). Theo tinh thần này, nếu X là mặt một phía thì tồn tại duy nhất số nguyên dương g sao cho $\chi(X)=2-g$ (ta có $X\approx\mathbb{P}^{\#g}$). Ta cũng gọi g là giống của X trong trường hợp này (một số nơi gọi số nguyên này là *á giống*). Định lý chính của bài viết này nói rằng, mặt đóng X được xác định duy nhất (sai khác đồng phôi) khi ta biết tính khả định hướng và giống của nó.

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Một bộ tộc kỳ lạ

Ta sẽ gọi chung những người Thật thà và những người Nói dối của bộ tộc đó là những người sống theo nguyên tắc. Tiếp theo ta có 2 cách lập luận.

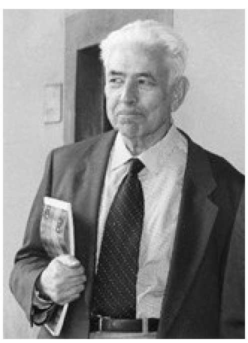
Cách 1: Có 250 câu trả lời "Có", 250 câu trả lời "Không". Mỗi một người Phụ hoạ không thể làm tăng số câu trả lời thiểu số trong số "Có" hoặc "Không" tính đến trước anh ta, trong khi người "nguyên tắc" mới tạo ra sự thay đổi của số số câu trả lời thiểu số này. Do số câu trả lời thiểu số tăng dần từ 0 tới 250, và với mỗi một câu trả lời mới, số câu trả lời thiểu số thay đổi không quá 1, nên số những người sống theo nguyên tắc của bộ tộc phải ít nhất là 250 người. Do đó số người Phụ hoạ tối đa là 250 người.

(Xem tiếp trang 56)

"TOÁN HỌC - TÌNH YÊU DÀNH CHO THÔNG THÁI"*

(Người dịch: Phạm Triều Dương[1])

Ennio de Giorgi (1928 – 1996) là một nhà toán học người Ý, người đã nghiên cứu các phương trình đạo hàm riêng và các nền tảng của toán học. Ennio theo học tại trường trung học "G. Palmieri' ở quê nhà và bộc lộ những tài năng đặc biệt. Tuy nhiên, lúc ban đầu, mối quan tâm của ông không hướng tới toán học [1]:



Ennio de Giorgi.

... khi còn nhỏ, tôi có sở thích đặc biệt trong việc mày mò tìm ra lời giải cho những bài toán nhỏ, nhưng tôi cũng có niềm đam mê nhất định với việc thử nghiệm các thiết bị nhỏ – các thí nghiệm, nếu không phải là của vật lý, thì là của thứ gọi là "tiền vật lý".

Sau khi tốt nghiệp trung học năm 1946, ông đến Rome để vào Đại học tại thủ đô, nhưng do đam mê các thiết bị, ông đã nhập học tại Khoa Kỹ thuật với ý định lấy bằng kỹ sư. Bất chấp việc quyết định chọn chủ đề nghiên cứu, De Giorgi đã khám phá ra niềm vui lúc đi học khi tìm ra cách chứng minh các định lý toán học khác với những chứng minh được viết trong sách giáo khoa. Đây chắc chắn là dấu hiệu ban đầu cho thấy tình yêu nghiên cứu của ông. Sau một năm học, Ennio quyết định rằng toán học chứ không phải kỹ thuật mới là môn học của mình [1]:

Vào thời đó, các khóa học về toán học, kỹ thuật và vật lý đều giống nhau trong hai năm đầu tiên. Chính trong năm đầu tiên đó, tôi đã nhận ra rằng năng khiếu bẩm sinh của mình, trên tất cả, là về toán học.

Trong môn toán, De Giorgi theo học với Mauro Picone, người đã ảnh hưởng mạnh mẽ đến mình [1]:

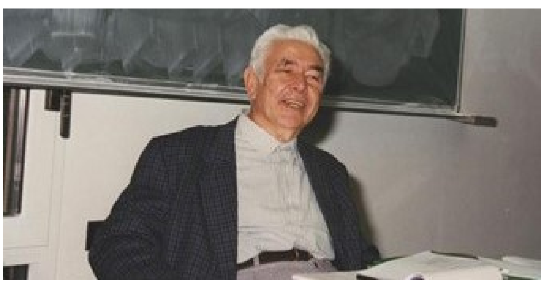
... tại Viện Toán học ở Rome, tôi đã học cùng và nhận bằng từ Giáo sư Picone, người với tư cách là một học giả, luôn trung thành với phong cách "quý tộc" của những ngày đó, nhưng đồng thời là cũng là một người, trong thảo luận về các vấn đề khoa học, đã luôn hoàn toàn cởi mở. Tôi nhớ ông đã nói: "Hãy nhớ rằng khi chúng ta nói về các vấn đề khoa học, bạn hoàn toàn có quyền nói với tôi rằng tôi đã nhầm, bởi vì chúng ta bình đẳng trước khoa học." Vì vậy, ông cực kỳ phóng khoáng trong đối thoại khoa học nhưng hoàn toàn tôn trọng kỷ luật và phong tục học thuật thời đó.

** Lược dịch theo: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Giorgi/ và Ennio de Giorgi – Wikipedia.*

[1] Đại học Sư phạm Hà Nội.

De Giorgi hoàn thành chương trình học đại học vào năm 1950 khi ông được nhận bằng tốt nghiệp. Sau đó, ông bắt đầu công việc nghiên cứu tại Viện Castelnuovo ở Rome, nơi ông là trợ lý cho Mauro Picone. Jacques–Louis Lions và François Murat viết trong [4] (xem thêm [3]):

Vị Giáo sư và anh sinh viên đó thực sự là một sự kết hợp kỳ lạ: một người là người theo chủ nghĩa cổ điển, ăn mặc nghiêm túc và sang trọng; người kia, không chính thống, luôn đội xùm xụp chiếc mũ nồi kỳ khôi của mình. Nhưng M. Picone, một nhà quan sát dày dạn kinh nghiệm về sự phát triển của khoa học, đã biết cách phát hiện tài năng; ông ấy sớm thừa nhận khả năng đặc biệt của E. De Giorgi. Người trợ lý trẻ được giải phóng khỏi mọi ràng buộc và làm việc theo ý mình một cách nhàn nhã, nhưng cuối cùng lại hiệu quả đến kinh ngạc.



De Giorgi tham dự các bài giảng của Caccioppoli về lý thuyết độ đo hình học, nhưng vào thời điểm này ông đã có những ý tưởng của riêng mình về cách giải quyết các vấn đề về mặt cực tiểu. Dưới ảnh hưởng của các phương pháp mà Caccioppoli đã phát triển, De Giorgi tiếp tục phát triển các kỹ thuật mới trong lý thuyết độ đo hình học và ông áp dụng kết quả của mình vào phép tính biến phân để chứng minh định lý chính của ông cho hầu hết các mặt cực tiểu. Công trình đầu tiên của De Giorgi trong lý thuyết độ đo hình học về chủ đề các tập có chu vi hữu hạn mà ông gọi vào năm 1958 là tập hợp Caccioppoli, theo tên người thầy và người bạn của mình. Định nghĩa của ông, áp dụng một số công cụ giải tích quan trọng và định lý De Giorgi cho các tập hợp, đã thiết lập một công cụ mới cho lý thuyết tập hợp cũng như các công trình của riêng ông. Thành tựu này không chỉ mang lại cho Ennio sự công nhận ngay lập tức mà còn thể hiện khả năng giải quyết các vấn đề bằng cách sử dụng hoàn toàn các phương pháp mới và hiệu quả, mặc dù đã được hình thành trước đó, nhưng có thể được sử dụng với độ chính xác cao hơn như đã được thể hiện trong các công trình nghiên cứu của ông. Công trình sớm nhất của ông nhằm mục đích phát triển một lý thuyết về tính chính quy cho các siêu mặt cực tiểu, đã vĩnh viễn thay đổi cách chúng ta nhìn nhận lý thuyết cao cấp về các bề mặt cực tiểu và phép tính biến phân. Cùng với Enrico Bombieri và Enrico Giusti, ông đưa ra lời giải cho bài toán Bernstein về mặt cực tiểu cho số chiều $n = 8$ vào năm 1969, nhờ đó Bombieri được trao Giải thưởng Fields vào năm 1974.

Năm 1955 De Giorgi đã đưa ra một ví dụ quan trọng cho thấy tính không duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy đối với các phương trình đạo hàm riêng dạng parabolic có các hệ số thỏa mãn các điều kiện chính quy nhất định. Trong năm tiếp theo, ông đã chứng minh được điều ngày nay mang tên “Định lý De Giorgi” liên quan đến tính liên tục Hölder của nghiệm của phương trình đạo hàm riêng dạng elliptic cấp hai. Những kết quả này cũng tương tự với những kết quả được Nash chứng minh vào cùng một thời điểm. De Giorgi nói:

Nash và tôi đã chứng minh cùng một định lý, hay nói đúng hơn là hai định lý rất gần nhau. Từ định lý Nash người ta có thể suy ra nhiều hay ít ngay lập tức định lý của tôi, theo một cách chứng minh hoàn toàn khác. Do đó, theo kinh nghiệm của tôi, việc khám phá một định lý có thể được thực hiện bởi những người khác nhau, như thể nó đã ở đó sẵn để chờ ai đó khám phá ra nó, và phát biểu của định lý đó sẽ luôn giống nhau. Tuy nhiên, phép chứng minh *được sáng tạo ra có thể sẽ khác nhau rất nhiều tùy theo nhà toán học tìm ra nó.*

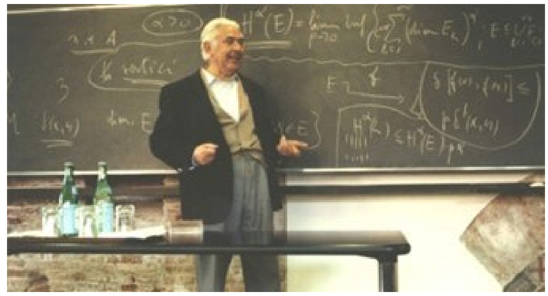
Năm 1958 De Giorgi được bổ nhiệm làm Trưởng khoa Giải tích Toán học tại Đại học Messina và ông đã nhận nhiệm vụ vào tháng 12 năm đó. Tuy nhiên, ông giữ chức vụ này chưa đầy một năm vì đã được Alessandro Faedo tiếp cận, người đã thuyết phục ông chuyển đến Scuola Normale Superiore tại Pisa. Vào mùa thu năm 1959 De Giorgi chuyển đến Pisa để đảm nhận chức vụ Trưởng khoa Giải tích Toán học.

Trong gần bốn mươi năm, ông sống ở đó, dạy học ở đó và luôn là nguồn cảm hứng thường xuyên cho ngôi trường toán học mà ông thành lập. Luôn vui vẻ, luôn sẵn sàng, ông thích những cuộc tranh luận kéo dài với các học trò của mình, trong đó ông sẽ đưa ra những ý tưởng độc đáo và đề xuất những phỏng đoán hoặc phác thảo những dòng chứng minh.

De Giorgi đã nhận được nhiều sự tôn vinh vì những đóng góp toán học xuất sắc của mình, trong đó có Giải Caccioppoli năm 1960, Giải thưởng Quốc gia của Viện Lincei (Accademia dei Lincei, Italia) năm 1973, và Giải thưởng Wolf (Israel) năm 1990, bằng tiến sỹ danh dự về Toán học của Đại học Paris năm 1983, và về Triết học của Đại học Lecce năm 1992. Ông được bầu vào nhiều Viện hàn lâm bao gồm: Viện Accademia dei Lincei, Viện Hàn lâm Khoa học Giáo hoàng (Pontifical Academy of Sciences), Viện Hàn lâm Khoa học Turin, Viện Khoa học và Văn học Lombard, Académie des Sciences ở Paris và Viện Hàn lâm Khoa học Quốc gia Hoa Kỳ.

Bên cạnh những thành công trong toán học của ông. Ennio là một người có tín ngưỡng và thường nói về niềm tin của mình [2]:

Sách Châm ngôn, một trong những cuốn sách cổ nhất của Kinh thánh, có nói rằng Thông thái đã ở cùng Thượng Đế khi Ngài tạo ra thế giới và rằng Thông thái sẽ được tìm thấy bởi những người tìm kiếm và yêu mến nó. Toán học là một trong những biểu hiện quan trọng nhất của tình yêu dành cho Thông thái.



Ông cũng là một người nhiệt tình ủng hộ hòa bình và hữu nghị giữa các dân tộc và thể hiện điều này bằng những hoạt động tích cực của mình, ông phát biểu [2]:

... bản Tuyên Ngôn Quốc Tế Nhân Quyền có Điều khoản nói về nền giáo dục khuyến khích không chỉ sự khoan dung mà còn cả sự hiểu biết và tình hữu nghị giữa các quốc gia khác nhau và các nhóm tôn giáo khác nhau. Hiểu biết và tình bạn là hai khái niệm thường bị lãng quên khi nói về lòng khoan dung. Sự khoan dung một cách trong sáng và đầy cảm tính là không đủ; chỉ khi được kết hợp với sự hiểu biết và tình bạn thì nó mới thực sự cho phép hoạt động của con người được phát triển. Đặc biệt, các ngành khoa học không thể tiến lên nếu không có sự hiểu biết và tình bạn giữa tất cả các nhà khoa học.

Tài liệu tham khảo

[1] L. Ambrosio, G. Dal Maso, M. Forti, M. Miranda and S. Spagnolo, Ennio De Giorgi (Italian), *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.* (8) 2 (1) (1999), 3 – 31.

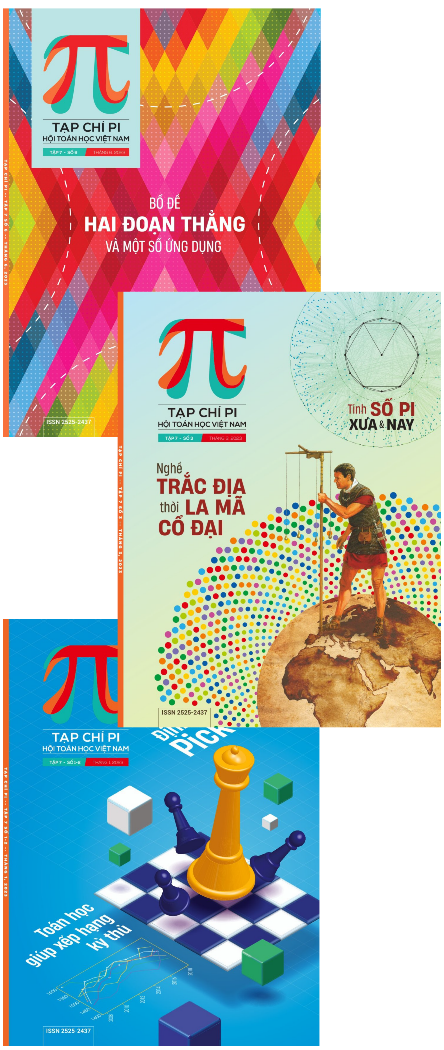
[2] M. Emmer (trs.), Interview with Ennio De Giorgi, *Notices Amer. Math. Soc.* 44 (9) (1997), 1097 – 1101. http://www.ams.org/notices/199709/emmer.pdf

[3] J–L. Lions and F. Murat, Ennio De Giorgi (1928 – 1996) (French), *Gaz. Math.* No. 71 (1997), 30 – 34.

[4] J–L. Lions and F. Murat, Ennio De Giorgi (1928 – 1996), *Notices Amer. Math. Soc.* 44 (9) (1997), 1095 – 1096. http://www.ams.org/notices/199709/murat.pdf

Hội Toán học Việt Nam

Tạp chí Toán học cho mọi người



Tạp chí *Pi* là một ấn phẩm của Hội Toán học Việt Nam, với mục đích quảng bá Toán học tới cộng đồng. *Pi* được xuất bản hàng tháng, và được in màu toàn bộ (kể từ tháng 1/2020). Tạp chí mang vẻ đẹp toán học, kiến thức toán học tới mọi người qua các chuyên mục đa dạng với các nội dung phong phú, thân thiện và nhiều màu sắc.

Chúng tôi hy vọng rằng mỗi độc giả, từ trẻ em tới người lớn tuổi, với các kiến thức về Toán học khác nhau, đều tìm được những điều lý thú về Toán học cùng những ích lợi của nó, qua các chuyên mục phù hợp trong *Pi*.

Pi.edu.vn

: Pi của bạn

CÙNG CHƠI VỚI CÁC HÌNH ĐỐI XỨNG (Phần IV)

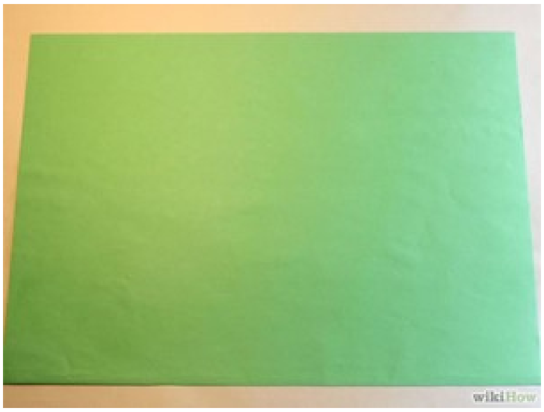
NGUYỄN THỤY VIỆT ANH[1]

Làm diều giấy

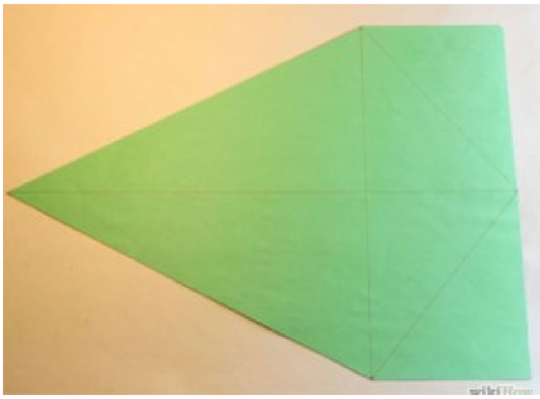
Còn gì tuyệt vời hơn khi được thả diều dưới bầu trời xanh và trong làn gió mát của những buổi chiều mùa hè oi ả. Bằng những kiến thức của bài "Hình có trục đối xứng" và trí tưởng tượng phong phú của mình, em hãy tự làm ra cho mình một con diều đẹp để với màu sắc rực rỡ nhé. Chúc em thành công!

Hình ảnh con diều (Ảnh: Internet).

Bước 1: Lấy một mảnh giấy để tạo thành thân diều. Nếu em mong muốn có một chiếc diều thật lớn, hãy ghép bốn mảnh giấy lại với nhau. Tuy nhiên phải dán bốn mảnh giấy lại sao cho thật khít, thật đều và phải dán băng dính ở cả hai mặt tại chỗ nối. Vết ghép phải cũng phải thật chắc chắn để bảo đảm diều không bị bung ra khi thả.

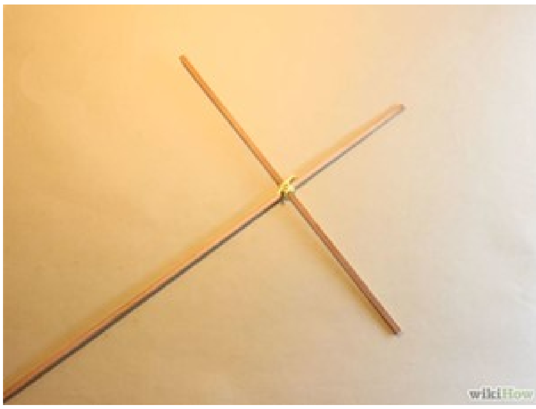


Bước 2: Chia mảnh giấy thành 4 phần, vẽ một hình kim cương trên giấy sao cho phần đáy chiếm 3/4, còn phần đầu chiếm 1/4 chiều dài tờ giấy. Sau đó, cắt bỏ những phần giấy thừa bên ngoài như hình.

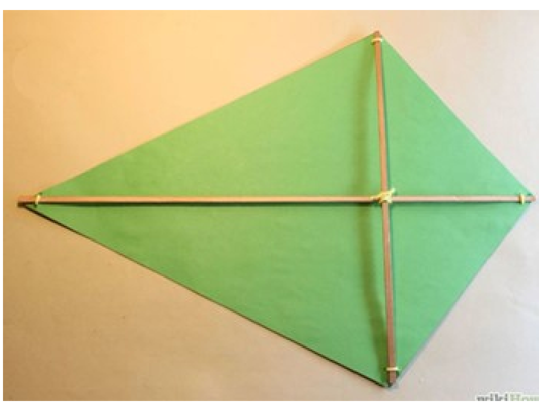


[1] *Trường Liên cấp Hội nhập Quốc tế iSchool Quảng Trị.*

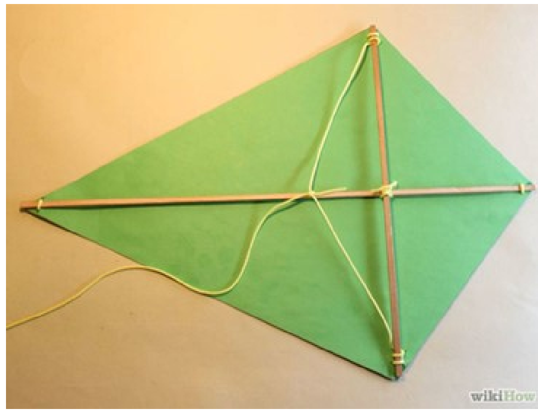
Bước 3: Buộc hai que tre với nhau theo hình thánh giá. Để chắc chắn rằng vết buộc nằm đúng vị trí chính giữa, hãy ướm thử lên giấy. Chú ý rằng không nên sử dụng dây thừng để buộc mối nối giữa hai que tre vì sẽ gây cộm, cũng không được sử dụng sợi cước vì quá trơn. Dây sử dụng để buộc mối nối cần mảnh, chắc và không trơn (ví dụ như sợi dây dù, chỉ may,...).



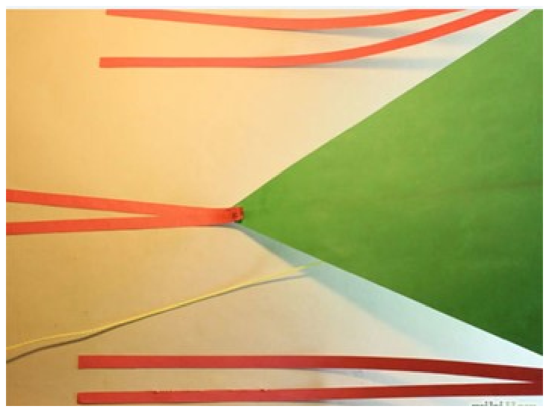
Bước 4: Đục lỗ ở 4 góc hình kim cương để luồn dây xuyên qua, cố định phần khung tre với phần thân giấy. Để vết buộc tránh bị xê dịch, em có thể khứa rãnh trên thanh tre và cố định sợi chỉ luồn trong rãnh đấy.



Bước 5: Buộc một sợi dây (dài hơn thanh nan ngang) vắt ngang diều (gọi là sợi dây số 1). Sau đó, lấy một sợi dây dài khác buộc vào chính giữa sợi dây số 1 để làm dây thả diều.



Bước 6: Dán thêm các dải giấy màu ở các góc của con diều (trừ góc đầu) để con diều thêm nổi bật.



Bước 7: Em hãy tìm một khu vực rộng rãi, thoáng mát và có gió để thả diều. Khi thả diều nên có hai người để phối hợp, một người cầm cuộn dây để giật diều còn một người chạy đà để thả diều. Chú ý phải chạy ngược chiều gió thì con diều mới có thể bay lên.

Tài liệu tham khảo

https://www.butsaigon.com/lam-do-handmade/huong-dan-cach-lam-dieu-giay.html

MỘT BỘ TỘC KỲ LẠ

GIA DƯƠNG

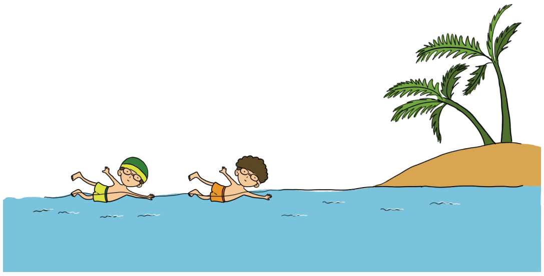
Thám tử Xuân Phong có một lần bị lạc trên một hòn đảo xa tít tắp giữa đại dương sau một vụ đắm tàu. Khi tỉnh dậy, thám tử biết mình đã được cứu sống bởi một bộ tộc khá kỳ lạ. Người dân của bộ tộc được chia thành 3 loại người – người Thật thà, người Nói dối và người Phụ hoạ, hơn nữa ai cũng biết rõ về tất cả những người còn lại, ai là thuộc loại người nào. Sau khi Xuân Phong được chiêu đãi no nê bởi vị thủ lĩnh bộ lạc và được thay quần áo tinh tươm, tất cả 500 thổ dân bộ tộc đứng thành hàng ngang trước mặt Xuân Phong để ra mắt chào mừng vị thám tử. Xuân Phong đưa ra câu hỏi sau cho họ: "Trên hòn đảo này có phải là số người Thật thà nhiều hơn số người Nói dối hay không?". Các thổ dân lần lượt trả lời một cách dõng dạc "Không" hoặc "Có" để tất cả mọi người còn lại đều nghe thấy. Người Thật thà thì luôn nói thật, người Nói dối thì luôn nói dối, còn một người Phụ hoạ thì trả lời như đa số những người đã trả lời trước anh ta, còn nếu như số câu trả lời "Có" và "Không" trước đó mà bằng nhau thì người Phụ hoạ sẽ trả lời "Có" hoặc "Không" tuỳ ý.

Sau khi cả 500 thổ dân đã trả lời xong, Xuân Phong thấy số câu trả lời "Có" là 250. Hỏi trong bộ tộc đó có nhiều nhất bao nhiêu người Phụ hoạ?

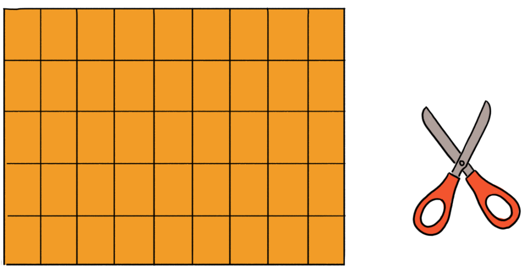
CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

1. Trong ngày sinh nhật của mình, An mời 5 người bạn tới nhà ăn bánh ga tô. An cắt cho người bạn thứ nhất $\frac{1}{6}$ chiếc bánh. Người bạn thứ hai được An cắt cho $\frac{1}{5}$ số bánh còn lại, người bạn thứ ba được An cắt cho $\frac{1}{4}$ số bánh còn lại sau khi đã lấy bánh cho người bạn thứ hai, người thứ tư được chia $\frac{1}{3}$ số bánh còn lại sau khi đã lấy bánh cho người bạn thứ ba. Phần bánh cuối cùng được An cắt làm đôi và chia đều với người bạn thứ năm. Hỏi ai đã được chia nhiều bánh nhất?

2. Tùng và Sơn cùng nhảy từ bờ xuống mặt nước và bơi về phía một hòn đảo. Khi Sơn bơi được 40 mét thì Tùng đã bơi đến được bờ của hòn đảo. Vừa chạm tới bờ, Tùng lại ngay lập tức bơi ngược lại và gặp lại Sơn vào thời điểm Sơn đã bơi thêm được 8 mét nữa. Hỏi khoảng cách từ điểm xuất phát của hai bạn tới bờ hòn đảo là bao nhiêu?



3. Một tấm bìa hình chữ nhật kích thước 5×9 được cắt ra thành 10 hình chữ nhật nhỏ với các cạnh là các số nguyên. Em hãy chỉ ra rằng trong số các hình được cắt ra này có hai hình kích thước giống hệt nhau.

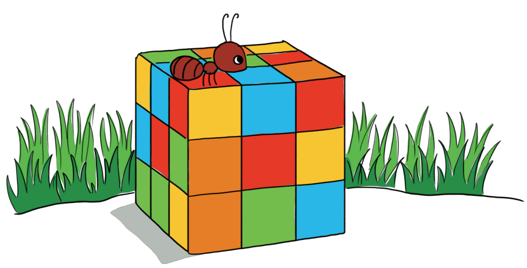


4. Một nàng tiên đi tới một con suối nguồn với hai chiếc bình trên tay. Một chiếc bình có thể tích 5 lít, còn chiếc kia có thể tích 4 lít. Nước chảy ra từ suối nước theo hai dòng, một dòng mạnh hơn, còn dòng kia yếu hơn. Nàng tiên đặt đồng thời hai chiếc bình mỗi chiếc dưới một dòng nước.

Khi đã hứng đầy được một nửa chiếc bình nhỏ, nàng tiên đổi vị trí hai bình cho nhau. Và vô cùng ngạc nhiên, hai chiếc bình được hứng đầy vào cùng một lúc. Hỏi dòng nước mạnh chảy mạnh hơn gấp mấy lần so với dòng nước còn lại?

5. Bây giờ tuổi của Dũng đúng bằng gấp đôi tuổi của Hùng vào năm khi số tuổi của Dũng bằng tuổi của Hùng bây giờ. Khi Hùng có số tuổi bằng tuổi của Dũng bây giờ thì tổng số tuổi của hai người lúc đó sẽ bằng 63. Hỏi bây giờ tuổi của Dũng và Hùng là bao nhiêu?

6. Một chú kiến bò theo các cạnh của một hình lập phương, chú chỉ quay đầu chuyển hướng tại các đỉnh của hình. Liệu có bao giờ xảy ra trường hợp khi chú đi qua một đỉnh nào đó của hình lập phương tận 25 lần, trong khi chú chỉ đi qua tất cả các đỉnh còn lại tại mỗi đỉnh đúng 20 lần?

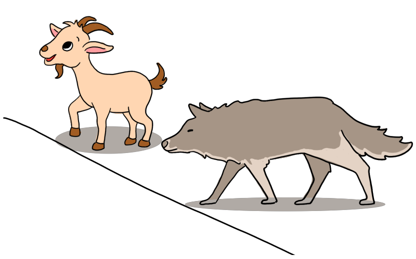


LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 6 năm 2023)

1. Ở nhà một mình, bé Hoa rót ra một cốc sữa đầy và uống hết một nửa. Sau đó Hoa rót thêm nước lọc vào cho đầy cốc, rồi lại uống hết một nửa. Cuối cùng, bé lại rót thêm nước lọc vào đầy cốc rồi uống hết sạch cả cốc. Hỏi bé Hoa đã uống thứ gì nhiều hơn: sữa hay nước lọc?

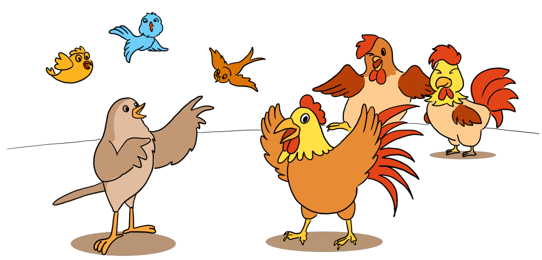
Lời giải. Bé Hoa đã rót và uống hết 1 cốc đầy sữa. Số lần uống của bé là 3, trong đó có 2 lần uống $\frac{1}{2}$ cốc và 1 lần uống hết cả cốc. Vậy bé đã uống hết 2 cốc đầy. Suy ra số nước lọc mà bé Hoa uống cũng là 1 cốc. Điều đó có nghĩa lượng sữa và nước mà bé Hoa uống là như nhau.

2. Dê con và Sói cùng thi xem ai chạy từ nhà tới bờ suối và quay ngược lại nhanh hơn. Biết rằng khoảng cách từ nhà tới bờ suối là 100 bước nhảy của Dê con. Một bước nhảy của Sói dài gấp 3 lần một bước nhảy của Dê con. Tuy nhiên trong khoảng thời gian Sói nhảy được một bước thì Dê con lại nhảy được 3 bước. Hỏi ai sẽ chiến thắng?



Lời giải. Dê con sẽ thắng. Cả Dê con và Sói cùng đến chỗ gần bờ suối cách nhà 99 bước nhảy của Dê con. Tuy nhiên Sói sẽ phải nhảy một bước thừa để đến được bờ suối, trong khi đó Dê con đã nhảy được 3 bước, trong đó có 2 bước theo chiều ngược lại. Vì vậy, theo chiều ngược lại, Dê con sẽ nhảy quãng đường dài 98 bước, nhanh hơn Sói phải nhảy quãng đường dài bằng 100 bước nhảy của Dê con.

3. Có tất cả 25 thí sinh gồm những chú chim cúc cu và gà trống cùng tham gia một cuộc thi hùng biện. Trong số 15 thí sinh bất kỳ luôn có ít nhất một chú gà trống, và trong số 12 thí sinh bất kỳ luôn có ít nhất một chú chim cúc cu. Hỏi trong cuộc thi đó có bao nhiêu chú gà trống và bao nhiêu chú chim cúc cu tham gia?



Lời giải. Số gà trống không thể lớn hơn hoặc bằng 12 (con), vì nếu không, sẽ có 12 chú gà trống mà trong số đó không có chú chim cúc cu nào. Suy ra số chim cúc cu lớn hơn hoặc bằng $25 - 11 = 14$ (con).

Tương tự số chim cúc cu tham gia cuộc thi cũng không thể lớn hơn hoặc bằng 15 (con).

Vậy có đúng 14 chú chim cúc cu và $25 - 14 = 11$ chú gà trống tham gia cuộc thi.

4. Người ta trồng trong công viên hai loài cây gồm phượng vĩ và sấu. Trong đó phượng vĩ chiếm 60% tổng số hai loài. Vào mùa xuân cây sấu được trồng thêm trong công viên, do đó cây phượng vĩ chỉ còn chiếm 20% tổng số cây. Sang mùa thu người ta lại trồng thêm phượng vĩ, vì thế cây phượng vĩ lại chiếm 60% tổng số cây hai loài. Hỏi sau hai lần trồng thì số cây trong công viên tăng lên bao nhiêu lần?

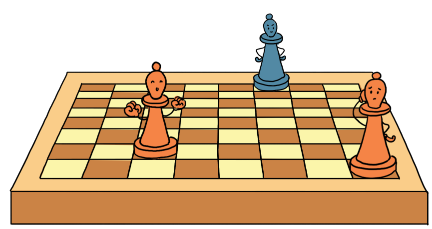
Lời giải. Lúc ban đầu, số cây phượng vĩ nhiều gấp rưỡi ($\frac{60}{40} = \frac{3}{2}$ lần) số cây sấu. Sau lần trồng vào mùa xuân, số cây phượng vĩ chỉ còn bằng $\frac{20}{80} = \frac{1}{4}$ số cây sấu. Vì số lượng cây phượng vĩ không thay đổi sau lần trồng cây mùa xuân, nên số lượng cây sấu đã tăng $4 : \frac{2}{3} = 6$ (lần).

Sau lần trồng cây mùa thu, tỷ lệ phượng vĩ so với tổng số cây hai loài lại trở về như lúc ban đầu. Do số lượng cây sấu không thay đổi vào mùa thu, suy ra số lượng cây của cả hai loài cũng đã tăng gấp 6 lần so với lúc ban đầu.

5. Alibaba đột nhập vào một hang động, trong đó có 100 chiếc bao vải đựng đầy những đồng tiền. Một chiếc bao vải trong số đó chỉ đựng toàn đồng tiền giả. Khối lượng của một đồng tiền thật là 10 gram, trong khi khối lượng của một đồng tiền giả là 9 gram. Hỏi Alibaba làm thế nào để chỉ cân một lần duy nhất (bằng một cái cân chính xác có hiển thị số) tìm ra được bao vải chứa các đồng tiền giả?

Lời giải. Alibaba lấy ở bao thứ nhất 1 đồng tiền, bao thứ hai 2 đồng tiền, bao thứ ba 3 đồng tiền,..., bao thứ một trăm 100 đồng tiền. Nếu không có đồng tiền giả, tổng khối lượng của bộ các đồng tiền phải là $1+2+3+\cdots+100 = 5050$ (gram). Tuy nhiên vì có tiền giả nên Alibaba sẽ nhận một khối lượng nhẹ hơn một số gram. Số biểu thị sự chênh lệch về khối lượng này sẽ chính là số thứ tự của bao vải có những đồng tiền giả.

6. Trên một bàn cờ 8×8 người ta xếp một số lớn nhất có thể các quân Tượng sao cho không có hai quân Tượng nào "ăn" lẫn nhau. Em hãy chứng minh rằng số các cách xếp khác nhau như vậy là một số chính phương (tức là bình phương của một số tự nhiên).



Lời giải. Giả sử trên các ô trắng có thể xếp tối đa k con tượng bằng n cách. Cách xếp các con tượng ở các ô trắng không làm ảnh hưởng gì tới cách xếp các con tượng ở các ô đen. Do "tập hợp" các ô đen nhận được từ "tập hợp" các ô trắng bằng cách xoay bàn cờ một góc 90°, nên số cách xếp tối đa các con tượng ở các ô đen cũng bằng n. Vì thế số cách xếp tối đa bằng n^2, có nghĩa là một số chính phương.

MAKING THE RIGHT STATEMENT

NGHIA DOAN[1]

Example (Angels and Demons)**.** On the Island of Knights and Liars, there are two types of people: the Knights, who always tell the truth, and the Liars, who always tell lies. On the day of the Festival of Life, some angels and demons visited the Island of Knights and Liars. It is known that the angels always tell the truth and the demons always lie.

It was a coincidence that Lan visited the island on that same day. She met someone who made a statement from which she could deduce that he was an angel (perhaps because he is really handsome).

What was the statement?

Solution. The statement is *I am not a Knight.* Neither a Liar, a Knight, nor a demon could make such statement. Thus the one who made the statement must be an angel.

Example (Three–word question)**.** Four brothers named An, Binh, Chi, and Danh are quadruplets indistinguishable in apperance.

- An is an *accurate truth–teller.*
- Binh is an *inaccurate truth–teller*, meaning he is totally deluded in all his beliefs but always states honestly what he does believe.
- Chi is an *accurate lier,* meaning all of his beliefs are correct, but he lies about every one of them.
- Danh is an *inaccurate lier*, he is both deluded and dishonest, meaning he will try to give you false information but is unable to.

An and Binh are both married; the other two brothers are not. An and Chi are both rich; the other two brothers are not. One day you meet one of the brothers.

Your task to find out whether he is married by asking a three–word question. *For example, "Are you married?" would be such a question.*

Solution. One of the solutions would be *Are you rich?* Note that An and Binh both answer it with *Yes*, while Chi and Danh would answer with *No*. So if the answer is *Yes*, then that brother is married, otherwise he is unmarried.

Now, let's modify the situation a little bit to make it more challenging. Let's assume that on the Island of Knights and Liars, there are exactly three types of people: the Knights, who always tell the truth, the Liars, who always lie, and normals, who sometimes lie and sometimes tell the truth.

Example (Marrying the right prince)**.** Mai visited the island and met three handsome princes. It is known that *one of them is a Knight*, *one of them is a normal*, and *one of them is a Liar.* It is known that the normal one is a *werewolf*, who used to devour people at full moon. It is also known that *the Liar is younger than the normal*, and *the normal is younger than the Knight.*

All three princes ask for Mai's hand. She would agree for the Knight or even the Liar, but she wants to avoid the normal one at any cost. She can **only ask a single question** from *only one of the princes* who

[1] *Ottawa, Canada.*

she can freely choose among the three, and the question can only be answered with *Yes* or *No*.

What would be her question?

Solution. First, let sort the princes by age,

Knight > normal > Liar.

Now, Mai can ask any of the princes, let say A, by pointing to the two princes, indicating them B and C,

Is B older then C?

Case 1*:* if A is a Knight. The answer is *Yes* if B is normal, C is a Liar; *No* if B is a Liar, C is normal.

Case 2*:* if A is a Liar. The answer is *Yes* if B is normal, C is a Knight; *No* if B is a Knight, C is normal.

From the analysis of the answers in the first two cases, Mai can safely marry C if the answer is *Yes*, and marry B if the answer is *No*.

Case 3*:* if A is a normal. It does not matter what she said. Mai can marry any of the other two.

Example (Vampires in Transylvania)**.** In Transylvania, about half of the inhabitants are humans and the other half are vampires. An ongoing infection made some of the inhabitants insane. The rest are still sane. All inhabitants look pretty much alike. The only difference is the distinct behavior in belief and truth–telling:

1. sane humans make only true statements,
2. insane humans uncontrollably lie,
3. sane vampires always lie, and
4. insane vampires always tell the truth.

For example, if you ask the inhabitants whether the earth is round, a sane human knows the earth is round and truthfully say so, an insane human believes the earth is not round and says it is not round, a sane *vampire knows the earth is round, but then lies and says it isn't, and an insane vampire believes the earth is not round and then lies and says it is round.*

Detective Benny goes to Transylvania. What question should he ask a Transylvanian to be answered with a *Yes* regardless of the type the inhabitant is?

Solution. The question *Do you believe you are a human?* will have *Yes* as an answer.

1. an insane human makes only true statements, so the answer must be *Yes*.

2. an insane human uncontrollably lies, he thought that he is not a human, so he lies, thus the answer must be *Yes*.

3. a sane vampire always lies, he knew that he is not a human, so he lies, thus the answer must be *Yes*.

4. an insane vampire always tells the truth, he thought that he is not a vampire, he tells the truth, hence the answer must be *Yes*.

Another cool solution is to ask *Are you truthful?*. It is interesting, but all of them will answer this question with a *Yes*.

Vocabulary

angel (n): thiên thần
demon (n): quỷ dữ
lie (n): lời nói dối
lie (v): nói dối
lier (n): kẻ nói dối
truth (n): sự thật
truthful (adj): trung thực
coincidence (n): sự trùng hợp
knight (n): hiệp sĩ
accurate (adj): chính xác
sane (adj): bình thường
insane (adj): điên rồ
werewolf (n): ma sói
vampire (n): ma cà rồng

- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P731–P740: trước ngày 15/10/2023.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P741. (Mức B) Có 6 tô phở giống hệt nhau được xếp thành hai chồng, như ở hình dưới đây:

Hỏi, nếu xếp cả 6 tô phở thành một chồng, thì chiều cao của chồng đó là bao nhiêu?

Bùi Văn Biên, Pháp

P742. (Mức B) Cho 10 số hữu tỷ $a_1, \ldots, a_{10}$ khác 0 và thoả mãn

$i/\ a_1 + \cdots + a_8 = a_1 a_2 \cdots a_8$.

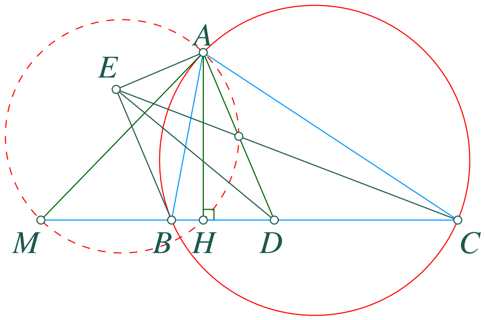
$ii/\ a_1 + \cdots + a_9 = a_1 a_2 \cdots a_9$.

$iii/\ a_1 + \cdots + a_{10} = a_1 a_2 \cdots a_{10}$.

Chứng minh rằng, $\dfrac{4 - 3a_{10}}{a_{10}}$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Lưu Bá Thắng, Hà Nội

P743. (Mức B) Cho tam giác ABC không cân, có đường cao AH và phân giác trong AD. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó cắt đường thẳng BC tại M. Gọi E là hình chiếu vuông góc của B trên đường phân giác ngoài của góc A. Chứng minh rằng, các đường thẳng CE, AD cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AMH.



Hoàng Việt Vương, Đà Nẵng

P744. (Mức B) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=2+\sqrt{xy(xy-3)} \\ xy(x-y)=2(2-x). \end{cases}$$

Nguyễn Viết Chương, Hà Tĩnh (st)

P745. (Mức B) Xét ba số nguyên dương x, y, z thoả mãn

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{2023}.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của tích ba số đó.

Nguyễn Hùng Cường, Bình Định

P746. (Mức B) Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 2$ thoả mãn: với mỗi bảng ô vuông kích thước $n \times n$, ta có thể tô mỗi ô vuông con của bảng bởi một trong hai màu đen, trắng, sao cho các điều kiện sau được đồng thời thoả mãn:

$i/$ Tất cả các ô vuông con nằm ở cạnh bảng có cùng màu;

$ii/$ Mỗi bảng con 2×2 của bảng đã cho đều có ít nhất hai ô cạnh nhau cùng màu.

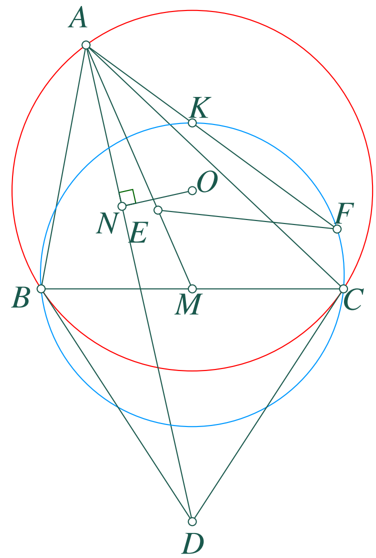
Tô Trung Hiếu, Nghệ An (st)

P747. (Mức A) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{9}{4(ab+bc+ca)} \leq \frac{9}{4}.$$

Hoàng Ngọc Minh, Hà Nội

P748. (Mức A) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có M là trung điểm BC. Các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại D. Gọi N là hình chiếu vuông góc của O trên AD. Trên đường trung trực của BC lấy điểm K, không nằm trên (O) và khác M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC cắt đường thẳng AK tại điểm thứ hai F. Đường thẳng NF và AM cắt nhau tại E. Chứng minh rằng tam giác AEF cân.



Trần Tú Anh, Hải Phòng

P749. (Mức A) Cho dãy số (a_n) với $a_1=a$ là một số nguyên và

$$a_{n+1}=a_n^3+2a_n^2-3a_n-8 \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Tìm tất cả các số nguyên a sao cho

$$a_{2023} \equiv 508 \pmod{2024}.$$

Nguyễn Tuấn Ngọc, Tiền Giang

P750. (Mức A) Một cuộc thi Olympic Toán học diễn ra hàng năm trong 2 ngày thi, mỗi ngày thi có 3 bài toán, mỗi bài toán có điểm tối đa là 7. Năm nay, cuộc thi này có sự tham gia của 40 đội tuyển (mỗi đội tuyển có ít nhất 1 học sinh). Thống kê điểm sau khi hoàn tất khâu chấm thi, ban giám khảo nhận thấy rằng số điểm các em đạt được là những số nguyên từ 14 đến 42. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra một nhóm có ít nhất 9 em học sinh, sao cho với mỗi em trong nhóm, số học sinh cùng điểm với em đó lớn hơn số học sinh cùng đội tuyển với em đó.

Trần Anh Tùng, Hà Nội

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P711. (Mức B) Bác An có 6 tấm thẻ A, B, C, D, E, F. Bác ghi các số nguyên dương 1, 2, 3, 4, 5, 6 lên mỗi tấm thẻ, sao cho mỗi thẻ được ghi một số và không có hai thẻ nào có số giống nhau. Biết rằng tổng các số ghi ở các tấm thẻ A, B, C bằng 14 và tổng các số được ghi ở các tấm thẻ A, D, E là 12. Hỏi bác An có bao nhiêu cách ghi số như vậy?

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Phạm Văn Đăng, lớp* 11*A, trường THPT Hà Đông, tỉnh Hải Dương*).

Xét một cách ghi số tùy ý, thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ký hiệu a, b, c, d, e, f, tương ứng, là các số được ghi trên các tấm thẻ A, B, C, D, E, F.

Theo bài ra, ta có:

$$\{a;b;c;d;e;f\} = \{1;2;3;4;5;6\}, \quad (1)$$

$$\text{và} \quad \begin{cases} a+b+c = 14 \\ a+d+e = 12. \end{cases} \quad (2)$$

Do đó

$$\begin{aligned} &14+12 = (a+b+c)+(a+d+e) \\ &= a+(a+b+c+d+e) \\ &= a+((1+2+3+4+5+6)-f)\ (\text{do}(1)) \\ &= a-f+21. \end{aligned}$$

Vì vậy, $a - f = 5$. $\quad (3)$

Suy ra, $a = 6$ và $f = 1$, vì nếu ngược lại, $a \neq 6$ hoặc $f \neq 1$, thì từ (1) ta có $a \le 5$ hoặc $f \ge 2$; dẫn tới

$$a - f \le 5 - 1 = 4 \ \ (\text{do } f \ge 1 \text{ (theo (1))},$$

hoặc

$$a - f \le 6 - 2 = 4 \ (\text{do } a \le 6 \text{ (theo (1))}),$$

mâu thuẫn với (3).

Vì $a = 6$ và $f = 1$, nên từ (1) và (2) ta có:

$$b, c, d, e \in \{2;3;4;5\}; \quad (4)$$

$$\begin{cases} b+c = 8 \\ d+e = 6. \end{cases} \quad (5)$$

Từ (5), do $8, 6$ là các số chẵn, suy ra b, c có cùng tính chẵn – lẻ, và d, e cũng có cùng tính chẵn – lẻ. $\quad (6)$

Từ (4), (5) và (6), suy ra $b, c \in \{3;5\}$ và $d, e \in \{2;4\}$.

Ngược lại, dễ thấy, ghi số 6 lên thẻ A, các số 3, 5, theo thứ tự tùy ý, lên các thẻ B, C, các số 2, 4, theo thứ tự tùy ý, lên các thẻ D, E, số 1 lên thẻ F là một cách ghi thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vì vậy, tất cả các cách ghi số lên thẻ, thỏa mãn yêu cầu đề bài, là:

- $A:6, B:3, C:5, D:2, E:4, F:1$;
- $A:6, B:3, C:5, D:4, E:2, F:1$;
- $A:6, B:5, C:3, D:2, E:4, F:1$;
- $A:6, B:5, C:3, D:4, E:2, F:1$.

Vậy, bác An có tất cả bốn cách ghi số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có:

– Hai lời giải sai, gồm một lời giải có kết quả sai (do người giải bài "quên" điều kiện các số trên 6 tấm thẻ phải đôi một khác nhau) và một lời giải tuy có kết quả đúng, nhưng cách tìm ra kết quả đó là sai (cụ thể, người giải bài đã lập luận rằng, vì có một cách ghi số lên hai thẻ A, F, hai cách ghi số lên hai thẻ B, C, và hai cách ghi số lên hai thẻ D, E, nên theo quy tắc cộng, số cách ghi số lên sáu tấm thẻ là $2+2=4$);

– Hai lời giải chưa hoàn chỉnh, gồm một lời giải được trình bày quá tắt (chỉ nêu các kết quả mà không trình bày các lập luận dẫn đến các kết quả đó), và một lời giải thiếu chính xác về logic.

Hà Thanh

P712. (Mức B) Tìm tất cả các số nguyên a sao cho a^2+a+1 chỉ có ước nguyên tố không vượt quá 5.

Lời giải (*dựa theo cách giải của đa số lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).

Xét số nguyên a tùy ý.

Đặt $A = a^2 + a + 1$; ta có $A > 0$.

Do $A = a(a+1) + 1$ và $a(a+1)$ chia hết cho 2, nên A không chia hết cho 2. (1)

Tiếp theo, ta có:

$$4A = (2a+1)^2 + 3. \tag{2}$$

Từ đó, do số dư trong phép chia một số chính phương cho 5 chỉ có thể là 0, hoặc 1, hoặc 4, suy ra $4A$ không chia hết cho 5. Do đó, A không chia hết cho 5. (3)

Vì tất cả các số nguyên tố không vượt quá 5 là $2, 3, 5$, nên từ (1) và (3) suy ra, nếu A chỉ có ước nguyên tố không vượt quá 5 thì A chỉ chia hết cho 3; nghĩa là, A có dạng

$$A = 3^n, \tag{4}$$

với n là một số nguyên dương.

Khi đó, $4A$ chia hết cho 3. Vì thế, $(2a+1)^2$ chia hết cho 3 (do (2)). Mà 3 là số nguyên tố nên $2a+1$ chia hết cho 3. Do đó, $(2a+1)^2$ chia hết cho 9. Từ đây và (2) suy ra, $4A$ không chia hết cho 9. Vì thế, A không chia hết cho 9. Suy ra, $A = 3$ (do (4)).

Ngược lại, với $A = 3$, ta có A là số chỉ có ước nguyên tố không vượt quá 5.

Như vậy, A chỉ có ước nguyên tố không vượt quá 5 khi và chỉ khi $A = 3$. Ta có:

$$\begin{aligned} A = 3 &\Leftrightarrow a^2 + a + 1 = 3 \\ &\Leftrightarrow (a-1)(a+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow a \in \{-2; 1\}. \end{aligned}$$

Vậy, tất cả các số nguyên a cần tìm, theo yêu cầu của đề bài, là: $a = -2$ và $a = 1$.

Bình luận và Nhận xét

Trong số tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải sai, do người giải bài đã mắc một số nhầm lẫn trong các tính toán.

Lưu Thị Thanh Hà

P713. (Mức B) Xác định tất cả các cặp số thực $(a; b)$ sao cho $a + b$ là số nguyên và $a^3 + b^3 = 2$.

Lời giải (*phỏng theo ý giải của bạn Phạm Quang Thắng, lớp 7C, trường THCS Hồ Xuân Hương, huyện Quỳnh Lưu, tỉnh Nghệ An*).

• Giả sử (a, b) là cặp số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Ta có:

$$\begin{aligned} 0 < 2 = a^3 + b^3 &= (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \\ &= (a+b)\left(\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Từ đó, do

$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0,$$

suy ra $a + b > 0$. (1)

Vì thế, do

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

nên

$$ab(a+b) \leq \frac{1}{4}(a+b)^3.$$

Do đó

$$\begin{aligned} 2 = a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ &\geq (a+b)^3 - \frac{3}{4}(a+b)^3 \\ &= \frac{1}{4}(a+b)^3. \end{aligned}$$

Suy ra, $(a+b)^3 \leq 8$. Từ đây và (1), ta được

$$0 < a + b \leq 2.$$

Mà $a + b$ là số nguyên, nên

$$a + b \in \{1; 2\}. \tag{2}$$

Như vậy, nếu (a, b) là cặp số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài thì a, b thỏa mãn (2) và $a^3 + b^3 = 2$.

• Ngược lại, nếu cặp số thực (a, b) thỏa mãn (2) và $a^3 + b^3 = 2$, thì nó là cặp số thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

• Vì vậy, (a, b) là cặp số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài khi và chỉ khi a, b thỏa mãn một trong các hệ sau:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a^3 + b^3 = 2 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} a + b = 2 \\ a^3 + b^3 = 2. \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^3+b^3=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ (a+b)^3-3ab(a+b)=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 1^3-3ab\cdot 1=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ ab=-\frac{1}{3}. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng có:

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a^3+b^3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ ab=1. \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Theo định lý Vi–et (thuận và đảo) cho phương trình bậc hai, ta có:

◇ a,b thỏa mãn hệ (I) khi và chỉ khi chúng là hai nghiệm của phương trình

$$x^2-x-\frac{1}{3}=0; \qquad (3)$$

◇ a,b thỏa mãn hệ (II) khi và chỉ khi chúng là hai nghiệm của phương trình

$$x^2-2x+1=0. \qquad (4)$$

Giải phương trình (3), ta được hai nghiệm của nó là:

$$x_1=\frac{3-\sqrt{21}}{6} \text{ và } x_2=\frac{3+\sqrt{21}}{6}.$$

Giải phương trình (4), ta được hai nghiệm của nó là: $x_1=x_2=1$.

Vì vậy, tất cả các cặp số thực (a,b) thỏa mãn các điều kiện của đề bài là:

$$(a,b)=\left(\frac{3-\sqrt{21}}{6},\frac{3+\sqrt{21}}{6}\right),$$

$$(a,b)=\left(\frac{3+\sqrt{21}}{6},\frac{3-\sqrt{21}}{6}\right)$$

và $(a,b)=(1,1)$.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải, mà Tạp chí nhận được từ bạn đọc, đều có kết quả đúng. Tuy nhiên, một số lời giải chưa đạt yêu cầu về logic, do người giải bài đã "quên" bước thử lại các cặp số (a,b), tìm được nhờ phép suy luận "suy ra".

Lê Huy

P714. (Mức B) Cho 2023 số nguyên dương $a_1,a_2,\ldots,a_{2023}$ thỏa mãn

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_{2023}^2}\geq 33.$$

Chứng minh rằng, trong 2023 số đó, luôn tìm được ít nhất 21 số bằng nhau.

Lời giải (*dựa theo cách giải của bạn Lê Nguyễn Hoàng Nhật Đình, lớp 8C, trường THCS Nguyễn Thái Bình, tỉnh Cà Mau*)**.**

Do tính bình đẳng của $a_1,a_2,\ldots,a_{2023}$ trong giả thiết của bài toán, nên không mất tính tổng quát, có thể giả sử

$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_{2021}\leq a_{2022}\leq a_{2023}. \qquad (1)$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh khẳng định của bài ra bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử, ngược lại, trong 2023 số đã cho, chỉ có thể tìm được không quá 20 số bằng nhau. (2)

Khi đó, do (1) và do $a_1,a_2,\ldots,a_{2023}$ là các số nguyên dương, ta có:

$$a_{1+k\cdot 20},a_{2+k\cdot 20},\ldots,a_{20+k\cdot 20}\geq k+1,$$

với mỗi $k=0,1,2,\ldots,100$; và

$$a_{2021},a_{2022},a_{2023}\geq 102.$$

Do đó

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_{2023}^2}$$
$$\leq 20\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{101^2}\right)+\frac{3}{102^2}$$
$$<20\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{102^2}\right). \qquad (3)$$

Do với mỗi số nguyên dương n ta có

$$\frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

nên

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{102^2}\\ &<1+\frac{1}{4}+2\left(\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)\right.\\ &\quad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{203}-\frac{1}{205}\right)\right)\\ &=\frac{5}{4}+2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{205}\right)<\frac{5}{4}+\frac{2}{5}=\frac{33}{20}.\qquad(4)\end{aligned}$$

Từ (3) và (4), suy ra

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_{2023}^2}<33,$$

mâu thuẫn với giả thiết của đề bài.

Mâu thuẫn nhận được cho thấy giả sử (2) là sai. Vì vậy, ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Theo người chấm bài, bài đã ra là một bài toán thú vị và không dễ, tuy định hướng giải bài rất rõ ràng và tự nhiên. Một trong những điểm khó trong việc giải bài toán, theo định hướng phản chứng, là biết sử dụng giả thiết phản chứng để nhìn ra đánh giá (3), trong Lời giải trên.

2. Với n là một số nguyên dương lớn hơn 1, một trong các đánh giá quen thuộc cho $\frac{1}{n^2}$ thường được sử dụng trong giải toán, là

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}.$$

Tuy nhiên, sử dụng đánh giá này để đánh giá tổng ở vế phải của (3) (trong Lời giải trên) sẽ không thu được kết quả mong muốn.

3. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải sai.

Võ Quốc Bá Cẩn

P715. (Mức B) Cho tam giác không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), có M là trung điểm BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMO cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Đường thẳng AM cắt (O) tại điểm thứ hai E. Chứng minh rằng $DE \parallel BC$.

Lời giải (*dựa theo cách giải của bạn Nguyễn Tuấn Kiệt, lớp 11T1, trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, tỉnh Vĩnh Long*).

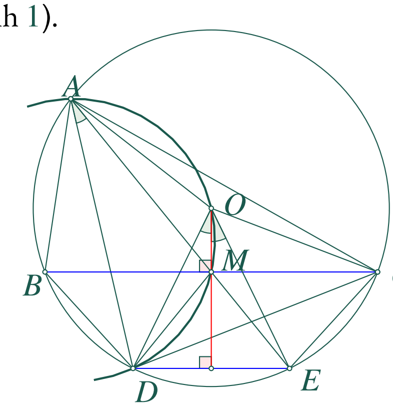
Do tồn tại tam giác AMO (theo giả thiết của bài toán) nên M không trùng O. Vì thế, từ giả thiết M là trung điểm của BC suy ra

$$OM \perp BC,$$

và tam giác ABC không vuông tại A. (1)

Xét hai trường hợp sau:

• *Trường hợp 1: góc BAC là góc nhọn* (xem Hình 1).



Hình 1.

Dễ thấy, trong trường hợp này, tứ giác $AOMD$ là một tứ giác lồi. Vì thế, từ tính nội tiếp của tứ giác đó, ta có:

$$\angle DOM=\angle DAM=\angle DAE=\frac{1}{2}\angle DOE.$$

Suy ra, OM là phân giác trong của góc DOE. Mà tam giác DOE cân tại O nên OM cũng là đường cao của tam giác đó. Vì vậy,

$$OM \perp DE. \qquad (2)$$

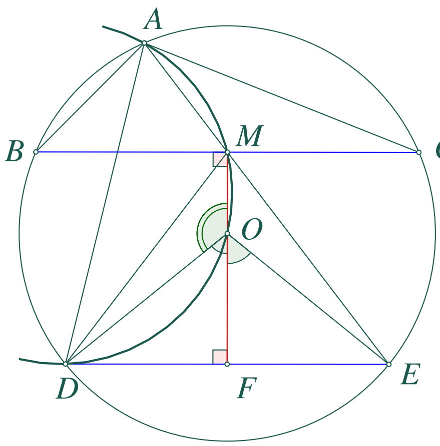
Từ (1) và (2), suy ra $DE \parallel BC$.

• *Trường hợp 2: góc BAC là góc tù* (xem Hình 2).

Trong trường hợp này, tứ giác $AMOD$ là một tứ giác lồi.

Do đó, gọi F là giao điểm của đường thẳng MO và DE, từ tính nội tiếp của tứ giác $AMOD$, ta có:

$$\begin{aligned}\angle DOF&=180^{\circ}-\angle DOM\\ &=\angle DAM=\angle DAE=\frac{1}{2}\angle DOE.\end{aligned}$$



Hình 2.

Suy ra, OF là phân giác trong của góc DOE. Mà tam giác DOE cân tại O nên OF cũng là đường cao của tam giác đó. Vì vậy,

$$OM \perp DE. \qquad (3)$$

Từ (1) và (3), suy ra $DE \parallel BC$.

Kết quả xét hai trường hợp nêu trên cho ta điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, chỉ có năm lời giải đúng và hoàn chỉnh; các lời giải còn lại đều mắc các sai sót, như nhầm lẫn giữa đường tròn (O) và đường tròn (AMO), hoặc chỉ xét trường hợp góc BAC là góc nhọn, ...

Hạ Vũ Anh

P716. (Mức B) Trong một lớp học có 33 học sinh. Mỗi bạn viết lên bảng số người trong lớp có cùng tên với mình và số người có cùng họ với mình (không tính bản thân người đó). Sau khi tất cả học sinh hoàn thành việc viết số, thì trên bảng mỗi số $0, 1, 2, \ldots, 10$ đều xuất hiện ít nhất một lần. Hỏi số 6 xuất hiện bao nhiêu lần?

Lời giải (*dựa theo lời giải của các bạn: Nguyễn Tuấn Kiệt, lớp 11T1, trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, tỉnh Vĩnh Long, và Phạm Hồng Thanh Thảo, lớp 11T1, trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, tỉnh Đồng Tháp*).

Ký hiệu s_n là số lần xuất hiện trên bảng của số tự nhiên n.

Theo giả thiết của bài ra, số tự nhiên n được viết lên bảng chỉ khi có ít nhất một nhóm gồm đúng $n+1$ học sinh có cùng tên, hoặc có cùng họ; và khi đó, mỗi học sinh trong mỗi nhóm như vậy đều viết lên bảng một số n. Do vậy, với mỗi số n được viết lên bảng, ta đều có:

$$s_n \geq n+1.$$

Từ đó, do lớp có 33 học sinh, mỗi học sinh đều viết lên bảng hai số tự nhiên, và do trong các số có mặt trên bảng có đầy đủ các số tự nhiên từ 0 đến 10, nên ta có:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 33 &\geq s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{10} \\ &\geq (0+1)+(1+1)+(2+1)+\cdots(10+1) \\ &= 1+2+3+\cdots+11 = 66. \end{aligned}$$

Suy ra, ở các bất đẳng thức vừa nêu trên đều phải xảy ra dấu "=".

Như vậy, ở trên bảng chỉ có các số tự nhiên $0, 1, 2, \ldots, 10$, và với mỗi $n \in \{0; 1; 2; \ldots; 10\}$, đều có

$$s_n = n+1.$$

Suy ra, $s_6 = 7$; nghĩa là, số 6 xuất hiện 7 lần trên bảng.

Bình luận và Nhận xét

1. Đánh giá cho s_n, được nêu ở Lời giải trên, là một đánh giá khá thô. Dùng đánh giá đó, bạn đọc sẽ không thể giải được, chẳng hạn, bài toán "cùng kiểu" (với bài đã ra) dưới đây:

Bài toán "cùng kiểu". *Một lớp học có 37 học sinh. Mỗi bạn đều viết lên bảng số người trong lớp có cùng tên với mình và số người trong lớp có cùng họ với mình (không tính bản thân người đó). Sau khi tất cả học sinh hoàn thành việc viết như vậy, người ta thấy, tất cả các số tự nhiên có mặt trên bảng là: $0, 1, 2, \ldots, 10$. Hỏi số 8 có mặt bao nhiêu lần?*

Để giải được bài toán vừa nêu trên, bạn đọc cần tới một đánh giá cho s_n, tinh hơn đánh giá đã nêu ở Lời giải trên. Mời các bạn đọc có quan tâm cùng thử sức.

2. Tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Nguyễn Khắc Minh

P717. (Mức A) Chứng minh rằng, với mọi bộ ba số thực $(a;b;c)$ thoả mãn $ac \neq 0$ và $b^2 \geq 4ac$, ta có

$$(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4 \geq \frac{81}{128}c^4.$$

Lời giải (*của người chấm bài*).

Do $ac \neq 0$, nên $c \neq 0$. Vì vậy, bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu đề bài tương đương với bất đẳng thức:

$$\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\right)^4+\left(\frac{b}{c}-1\right)^4+\left(1-\frac{a}{c}\right)^4 \geq \frac{81}{128}. \quad (1)$$

Đặt $x=\frac{b}{c}$ và $y=\frac{a}{c}$; khi đó, bất đẳng thức (1) trở thành:

$$(y-x)^4+(x-1)^4+(1-y)^4 \geq \frac{81}{128}. \quad (2)$$

Lại có: $ac \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0$, và

$$b^2 \geq 4ac \Leftrightarrow x^2 \geq 4y.$$

Vì vậy, theo bài ra, ta cần chứng minh bất đẳng thức (2), với x,y là các số thực thỏa mãn:

$$y \neq 0 \text{ và } 4y \leq x^2. \quad (3)$$

Xét các số thực x,y thỏa mãn (3).

Xảy ra hai trường hợp sau:

• *Trường hợp 1: Trong hai số x,y, có ít nhất một số không thuộc khoảng $(0;2)$.*

Khi đó, hiển nhiên có

$$(x-1)^4+(1-y)^4 \geq 1 > \frac{81}{128}.$$

Do đó, (2) là một bất đẳng thức đúng, trong trường hợp này.

• *Trường hợp 2: $x,y \in (0;2)$.*

Khi đó, ta có:

$$0<4y \leq x^2 < 2x < 2(x+1); \quad (4)$$

suy ra, $0<y<\frac{x+1}{2}$.

Xét số thực x tùy ý thuộc khoảng $(0;2)$.

Xét hàm số

$$f(y)=(y-x)^4+(1-y)^4+(x-1)^4,$$

xác định trên khoảng $\left(0;\frac{x+1}{2}\right)$.

Ta có:

$$f'(y)=4(y-x)^3-4(1-y)^3$$
$$=4(2y-x-1)$$
$$\times\left((y-x)^2+(y-x)(1-y)+(1-y)^2\right)$$
$$=8\left(y-\frac{x+1}{2}\right)$$
$$\times\left(\left((y-x)+\frac{1}{2}(1-y)\right)^2+\frac{3}{4}(1-y)^2\right) \leq 0,$$

với mọi $y \in \left(0;\frac{x+1}{2}\right)$.

Do đó, hàm số $f(y)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{x+1}{2}\right)$.

Vì thế, từ

$$0<\frac{x^2}{4}<\frac{x+1}{2} \quad (\text{theo } (4))$$

suy ra, $f(y) \geq f\left(\frac{x^2}{4}\right)$ với mọi y thỏa mãn $0<4y \leq x^2$; nghĩa là, ta có:

$$(y-x)^4+(1-y)^4+(x-1)^4$$
$$\geq \left(\frac{x^2}{4}-x\right)^4+\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^4+(x-1)^4, \quad (5)$$

với mọi y mà $0<4y \leq x^2$.

Do số thực x được xét là số tùy ý thuộc $(0;2)$ nên ta có (5) với mọi $x,y \in (0;2)$, mà

$$0<4y \leq x^2$$

(tức, với mọi x,y thỏa mãn (3) và thuộc $(0;2)$).

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\left(\frac{x^2}{4}-x\right)^4+\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^4+(x-1)^4 \geq \frac{81}{128}, \quad (6)$$

với mọi $x \in (0;2)$.

Trước hết, nhận thấy

$$\left(\frac{x^2}{4}-x\right)+\left(1-\frac{x^2}{4}\right)+(x-1)=0.$$

Do đó, theo một hằng đẳng thức quen thuộc, ta có:

$$\left(\frac{x^2}{4}-x\right)^4+\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^4+(x-1)^4$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2}{4}-x\right)^2+\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^2+(x-1)^2\right)^2.$$

Vì vậy

$$(6)\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{4}-x\right)^2+\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^2+(x-1)^2\geq\frac{9}{8}. \qquad (7)$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
&(7)\\
&\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{4}-x\right)^2-\frac{9}{16}\\
&\quad+\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+(x-1)^2\geq 0\\
&\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{4}-x-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{x^2}{4}-x+\frac{3}{4}\right)\\
&\quad+\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}+\frac{3}{4}\right)+(x-1)^2\geq 0\\
&\Leftrightarrow\frac{1}{16}\left(x^2-4x-3\right)\left(x^2-4x+3\right)\\
&\quad+\frac{1}{16}\left(1-x^2\right)\left(7-x^2\right)+(x-1)^2\geq 0\\
&\Leftrightarrow\frac{1}{16}(x-1)\left(\left(x^2-4x-3\right)(x-3)\right.\\
&\quad\left.+(x+1)\left(x^2-7\right)\right)+(x-1)^2\geq 0\\
&\Leftrightarrow\frac{1}{8}(x-1)\left(x^3-3x^2+x+1\right)+(x-1)^2\geq 0\\
&\Leftrightarrow\frac{1}{8}(x-1)^2\left(x^2-2x-1\right)+(x-1)^2\geq 0\\
&\Leftrightarrow(x-1)^2\left(x^2-2x+7\right)\geq 0. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Hiển nhiên, (8) là một bất đẳng thức đúng với mọi $x\in(0;2)$; do đó, (7) là một bất đẳng thức đúng với mọi $x\in(0;2)$. Vì vậy, (6) là một bất đẳng thức đúng với mọi $x\in(0;2)$.

Từ (5) và (6) suy ra, (2) là một bất đẳng thức đúng với mọi x, y thỏa mãn (3) và thuộc $(0;2)$.

Kết quả xét hai trường hợp nêu trên cho ta điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Ngoài phương pháp đại số đã trình bày ở Lời giải trên, còn có thể chứng minh bất đẳng thức (7) bằng phương pháp giải tích (khảo sát hàm số).

2. Theo ý kiến chủ quan của người chấm bài, bài đã ra là một bài toán đẹp, một ví dụ hay về việc vận dụng linh hoạt phương pháp đại số và phương pháp giải tích trong chứng minh bất đẳng thức.

3. Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có một lời giải không hoàn chỉnh, do người giải bài đã bỏ qua, không trình bày chứng minh của một bất đẳng thức then chốt được sử dụng trong lời giải.

4. Bài đã ra khiến người chấm bài liên tưởng đến một kết quả rất đẹp khác, đã được sử dụng làm một bài toán thi, trong Đề thi chọn Đội tuyển học sinh Việt Nam tham dự Olympic Toán học Quốc tế năm 1996 (IMO 1996). Bài toán đó như sau:

Bài 3 Đề thi chọn Đội tuyển học sinh VN tham dự IMO 1996. *Xét các số thực a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$f(a,b,c)=(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4-\frac{4}{7}\left(a^4+b^4+c^4\right).$$

Theo Đáp án của Đề thi, để giải bài toán trên, ta chứng minh bất đẳng thức

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4\geq\frac{4}{7}\left(a^4+b^4+c^4\right).$$

Bất đẳng thức trên được chứng minh bằng

cách chuẩn hóa, rồi dồn biến, đưa bất đẳng thức đó về một bất đẳng thức một biến; sau đó, chứng minh bất đẳng thức một biến thu được bằng phương pháp giải tích (khảo sát hàm số). Bên cạnh cách chứng minh này, bất đẳng thức trên còn có một cách chứng minh thuần túy đại số rất đẹp; tóm tắt như sau:

"Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn sau

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4 \geq \frac{4}{7}\left(a^4+b^4+c^4+(a+b+c)^4\right). \quad (*)$$

Đặt $x=a+b, y=b+c, z=c+a$; viết lại bất đẳng thức $(*)$ dưới dạng một bất đẳng thức của các biến x, y, z, gọi là bất đẳng thức $(**)$. Sau đó, sử dụng các phép biến đổi đại số, biến đổi tương đương bất đẳng thức $(**)$ về bất đẳng thức

$$x^4+y^4+z^4 \geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2.$$

Bất đẳng thức vừa nêu trên hiển nhiên đúng; do đó, bất đẳng thức $(*)$ được chứng minh."

Cách chứng minh thuần túy đại số này do thầy *Võ Quốc Bá Cẩn* tìm ra; và do đã gần 30 năm trôi qua, người chấm bài xin phép được "bật mí", tác giả của bài toán thi trên đây là thầy *Nguyễn Khắc Minh*.

5. Người chấm bài có linh cảm rằng, bài P717 có một lời giải đại số thuần túy. Mời các bạn đọc có quan tâm cùng tìm hiểu.

Trần Nam Dũng

P718. (Mức A) Cho tam giác ABC và P là một điểm cố định nằm trong tam giác đó. Một đường thẳng d quay quanh điểm P, cắt các đường thẳng BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F. Gọi Q là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (ADE) và (APF). Chứng minh rằng, Q luôn thuộc một đường tròn cố định.

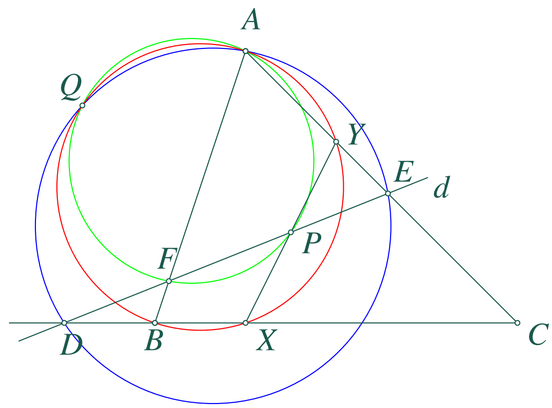
Lời giải (*dựa theo Đáp án của bài toán*).

Trước hết, ta nhắc lại (không chứng minh) Bổ đề sau:

Bổ đề (*về ba đường tròn đồng trục*)**.** Cho ba đường tròn đồng trục $(O_1), (O_2), (O_3)$. Khi đó, với mọi cặp điểm X, Y trên đường tròn (O_3) ta đều có

$$\frac{P_{X/(O_1)}}{P_{X/(O_2)}} = \frac{P_{Y/(O_1)}}{P_{Y/(O_2)}}.$$

Trở lại bài toán.



Do P nằm trong tam giác ABC nên d cắt hai trong ba đường thẳng BC, CA, AB tại điểm trong của hai cạnh và cắt đường thẳng còn lại tại điểm nằm ngoài cạnh thứ ba của tam giác đó.

Giả sử E, F, tương ứng, nằm trong các cạnh CA, AB, và D nằm trên tia đối của tia BC. (1)

(Các trường hợp còn lại được xét tương tự.)

Gọi X, Y, tương ứng, là giao điểm thứ hai của BC, CA và đường tròn (ABQ).

Do bốn điểm A, B, X, Y cùng thuộc một đường tròn, nên

$$(BC;XY) \equiv (XB;XY) \equiv (AB;AY) \equiv (AB;AC) \pmod{\pi}.$$

Do đó, đường thẳng XY có phương không đổi. (2)

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác CDE với cát tuyến BFA, ta được:

$$\frac{BD}{BC} \cdot \frac{AC}{AE} \cdot \frac{FE}{FD} = 1;$$

suy ra, $$\frac{FD}{FE} = \frac{DB}{EA} \cdot \frac{CA}{CB}. \quad (3)$$

Dễ thấy, hai tam giác CXY và CAB đồng dạng với nhau (trường hợp g.g). Do đó

$$\frac{CA}{CB}=\frac{CX}{CY}. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra

$$\frac{FD}{FE}=\frac{DB}{EA}\cdot\frac{CX}{CY}. \qquad (5)$$

Do ba đường tròn (APF), (ADE), $(ABXY)$ đồng trục, nên áp dụng Bổ đề nêu trên cho cặp điểm D,E của đường tròn (ADE), ta được:

$$\frac{DF\cdot DP}{DB\cdot DX}=\frac{P_{D/(APF)}}{P_{D/(ABXY)}}=\frac{P_{E/(APF)}}{P_{E/(ABXY)}}=\frac{EP\cdot EF}{EY\cdot EA}.$$

Suy ra

$$\frac{FD}{FE}=\frac{PE\cdot DB\cdot DX}{PD\cdot EY\cdot EA}. \qquad (6)$$

Từ (5) và (6), ta được:

$$\frac{CX}{CY}=\frac{PE\cdot DX}{PD\cdot EY};$$

suy ra

$$\frac{XC}{XD}\cdot\frac{PD}{PE}\cdot\frac{YE}{YC}=1.$$

Hơn nữa, do (1) nên X nằm giữa C và D; P nằm giữa E và F; Y thuộc tia đối của tia EC. Vì thế, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác CDE, ta được X,P,Y là ba điểm thẳng hàng. Từ đây và (2), do P là điểm cố định, suy ra X,Y là các điểm cố định. Vì vậy, (AXY) là đường tròn cố định; mà Q thuộc (AXY) nên ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Rất tiếc, tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải không đúng, do người giải bài mô tả không chính xác phép nghịch đảo, và chưa xét hết các trường hợp có thể xảy ra trong quan hệ tương đối giữa đường tròn (APE) và đường thẳng AB, giữa đường tròn (APF) và đường thẳng AC.

Hạ Vũ Anh

P719. (Mức A) Cho S là một tập hữu hạn các số nguyên lớn hơn 1 thoả mãn: với mỗi số nguyên dương n, tồn tại $x\in S$ sao cho hoặc x,n nguyên tố cùng nhau, hoặc n chia hết cho x. Chứng minh rằng, tồn tại $x,y\in S$ (có thể $x=y$) sao cho ước chung lớn nhất của x,y là một số nguyên tố.

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Tuấn Kiệt, lớp 11T1, trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, tỉnh Vĩnh Long*).

Trong phần trình bày dưới đây, (a,b) ký hiệu ước số chung lớn nhất của hai số nguyên a,b.

Xét hai trường hợp sau:

• *Trường hợp 1: Tập S có chứa số nguyên tố.*

Khi đó, chọn $x=y=p$, với p là một số nguyên tố thuộc S, ta sẽ có hai số x,y thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

• *Trường hợp 2: Tập S không chứa số nguyên tố.*

Khi đó, do S chỉ chứa các số nguyên lớn hơn 1, nên mọi số thuộc S đều là hợp số. (1)

Gọi P là tập gồm và chỉ gồm các số nguyên tố, mà mỗi số đều là ước nguyên tố bé nhất của ít nhất một số thuộc S.

Do S là tập hữu hạn khác rỗng, nên P là tập hữu hạn khác rỗng.

Dễ thấy, P có ít nhất hai phần tử, vì nếu ngược lại, P chỉ có đúng một phần tử, gọi là q, thì bằng cách chọn $n=q$, từ giả thiết của bài toán dễ dàng suy ra, $q\in S$, mâu thuẫn với (1) (do q là số nguyên tố).

Xét số nguyên dương m bằng tích của tất cả các số thuộc P.

Ta có $m>1$ và $(m,s)>1$ với mọi $s\in S$. Do đó, theo giả thiết của bài ra, tồn tại số $x\in S$ sao cho m chia hết cho x.

Từ định nghĩa số m, hiển nhiên suy ra:

– Tập các ước nguyên tố của x là một tập con của P; (2)

– Trong phân tích chuẩn của x, số mũ của mỗi ước nguyên tố đều bằng 1. (3)

Do x là hợp số, nên từ (3) suy ra, x có ít nhất hai ước nguyên tố. Gọi p là ước nguyên tố lớn nhất của x. Do (2), nên $p \in P$. Vì thế, tồn tại số $y \in S$ sao cho p là ước nguyên tố bé nhất của y.

Vì p là ước nguyên tố lớn nhất của x, và là ước nguyên tố bé nhất của y, nên p là ước nguyên tố chung duy nhất của x và y. Từ đây và (3), suy ra $(x,y) = p$. Vì thế, x, y là hai số thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Kết quả xét hai trường hợp trên đây cho ta điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Lời giải của bạn *Nguyễn Tuấn Kiệt* là lời giải đúng duy nhất, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc. Tất cả các lời giải còn lại đều là lời giải sai, do người giải bài đã khẳng định sai rằng, trong tập S phải có ít nhất một số nguyên tố. (*Bạn đọc có thể dễ dàng kiểm chứng rằng, tập* $S = \{6; 10; 15\}$ *là một tập chỉ chứa các hợp số và thỏa mãn giả thiết của đề bài.*)

Lưu Thị Thanh Hà

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI HOÀN CHỈNH

Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải hoàn chỉnh.

KHỐI THCS

• Trường **THCS Nguyễn Thái Bình**, tỉnh Cà Mau: *Lê Nguyễn Hoàng Nhật Đình* (lớp 8C; P711, P712, P713, P714, P715).

• Trường **THCS Lê Quý Đôn**, quận 3, Tp. Hồ Chí Minh: *Nguyễn Chánh Thiện* (lớp 8/14; P712).

• Trường **THCS Lê Hồng Phong**, huyện Hưng Nguyên, tỉnh Nghệ An: *Trịnh Bá Hiếu* (lớp 8A; P711, P712).

• Trường **THCS Hồ Xuân Hương**, huyện Quỳnh Lưu, tỉnh Nghệ An: *Phạm Quang Thắng* (lớp 7C; P712, P713, P714).

• Trường **THCS Phúc Yên**, Thành phố Phúc Yên, tỉnh Vĩnh Phúc: *Vũ Bảo Lân* (lớp 8A5; P715).

KHỐI THPT

• Trường **THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu**, tỉnh Đồng Tháp: *Đỗ Duy Quang* (lớp 11T1; P711, P712, P715), *Phạm Hồng Thanh Thảo* (lớp 11T1; P716).

• Trường **THPT Hà Đông**, tỉnh Hải Dương: *Phạm Văn Đăng* (lớp 11A; P711).

• Trường **THPT chuyên Lê Hồng Phong**, Tp. Hồ Chí Minh: *Hồ Hữu Trí* (lớp 10CT1; P715).

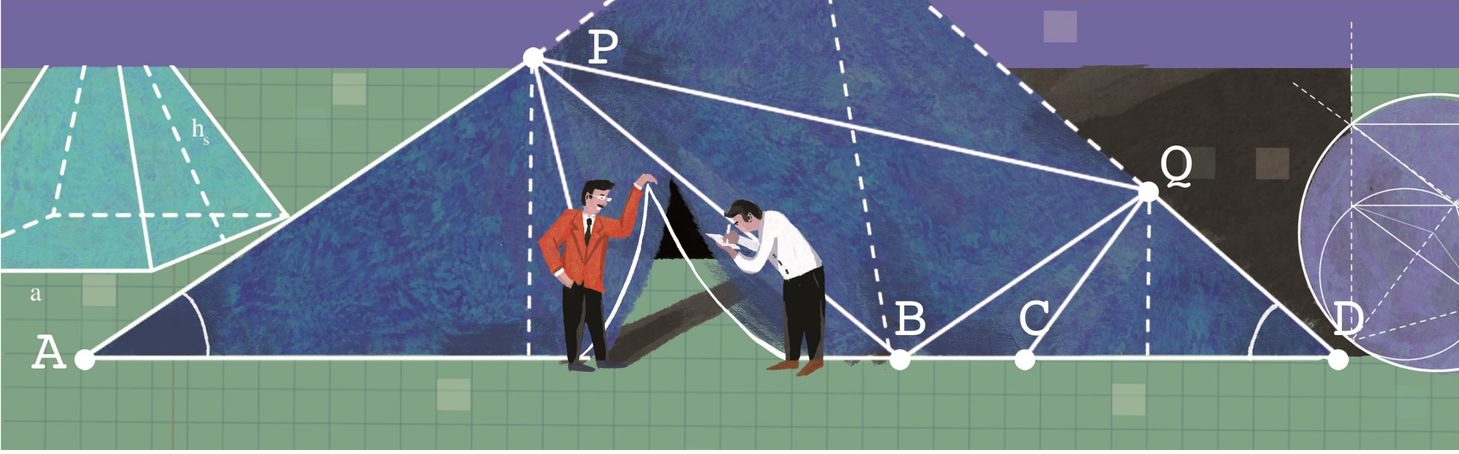
• Trường **THPT chuyên Quốc học Huế**, tỉnh Thừa Thiên – Huế: *Võ Minh Hiển* (lớp 11 Toán 1; P712).

• Trường **THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm**, tỉnh Vĩnh Long: *Nguyễn Tuấn Kiệt* (lớp 11T1; P711, P712, P713, P714, P715, P716, P719).

• Trường **THPT chuyên Tự nhiên**, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội: *Vương Khánh Toàn* (lớp 11A1 Toán; P717).

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

hơn thành 2 nhóm có số lượng bằng nhau và bỏ lên 2 đĩa cân (nếu số đồng xu là 5 hoặc 7 thì Buratino bổ sung 1 đồng xu thật trước khi chia đôi). Nếu ở lần cân thứ 2, cân thăng bằng thì nghĩa là tất cả các đồng xu của nhóm nặng hơn trong lần cân đầu tiên là đồng xu thật và do đó đồng xu giả nằm ở nhóm nhẹ hơn trong lần cân đầu tiên phải là đồng xu của Alice. Nếu ở lần cân thứ 2, cân không thăng bằng thì có nghĩa là nhóm nặng hơn ở lần cân đầu tiên chứa đồng xu giả và nhóm đồng xu nhẹ hơn ở lần cân đầu tiên chỉ có các đồng xu thật, nghĩa là đồng xu giả là của Basile.

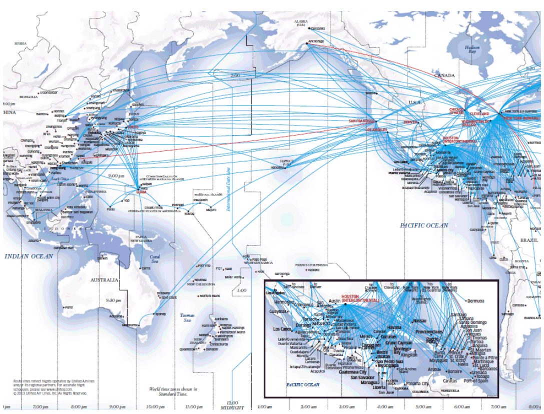


LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ VÀ CÁC CẤU TRÚC ĐÁNG CHÚ Ý (Phần I)

HÀ TRUNG[1]

Có thể nói rằng, sự ra đời của lý thuyết đồ thị được đánh dấu bằng bài báo bảy cây cầu ở thành phố Königsberg của Leonhard Euler. Trải qua hàng trăm năm, lý thuyết đồ thị đã trở thành một mảng kiến thức đồ sộ, là một trong những công cụ mạnh, được sử dụng nhiều trong cả hai phân môn Toán lý thuyết và Toán ứng dụng. Trong bài viết này, chúng tôi trình bày ngắn gọn một số kiến thức cơ sở của lý thuyết đồ thị, và một số ví dụ trong việc xây dựng mô hình đồ thị. Sau đó, chúng tôi giới thiệu hai cấu trúc đồ thị đặc biệt và một số bài tập liên quan.

Sơ lược về lý thuyết đồ thị



Hình 1. Bản đồ các đường bay ở Châu Á – Thái Bình Dương của hãng hàng không United Airlines.

Lý thuyết đồ thị có lịch sử phát triển lâu dài từ thế kỷ 18. Càng ngày, người ta càng thấy nhiều ứng dụng của lý thuyết đồ thị trong nhiều lĩnh vực của cuộc sống như giao thông, y sinh, tin học, thiên văn.... Hình 1[2] là bản đồ các tuyến đường bay của hãng hàng không United Airlines ở khu vực Châu Á – Thái Bình Dương.

Trong hình này, nếu ta coi mỗi sân bay như một điểm, và mỗi đường bay như một cạnh nối hai điểm, thì đây chính là một mô hình bao gồm hai tập hợp: tập hợp điểm, và tập hợp cạnh thể hiện mối liên hệ giữa các điểm. Trong cả lý thuyết và thực tế, đôi khi ta gặp những mô hình có thể biểu diễn thông qua mô hình hai tập hợp này. Những mô hình như vậy đều có thể coi là một mô hình đồ thị. Ta đi đến định nghĩa sau về đồ thị (vô hướng):

Định nghĩa 1.1 (Đồ thị). Một *đồ thị* là một tập hợp các điểm (gọi là các *đỉnh* của đồ thị), và một tập hợp các đoạn (gọi là *cạnh* của đồ thị), sao cho mỗi đoạn này đều có hai đầu mút là hai đỉnh của đồ thị.

Theo định nghĩa 1.1, ta thấy rằng mỗi đồ thị $\mathcal{G}$ là một bộ (V, E) gồm hai tập hợp: tập đỉnh V và tập cạnh E. Vì vậy, ta thường ký hiệu đồ thị $\mathcal{G} = (V, E)$. Ta có một số lưu ý sau:

---

[1] *Giáo viên Toán trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định.*

[2] *https://www.airlineroutemaps.com/maps*

• Mỗi đồ thị không có khuyên (cạnh tự nối), và hai đỉnh bất kỳ được nối với nhau bằng nhiều nhất một cạnh gọi là một đồ thị đơn giản, hay ngắn gọn là *đồ thị đơn*. Ngược lại, đồ thị mà giữa hai đỉnh có thể có nhiều hơn một cạnh được gọi là đa đồ thị.

• Trong bài viết này, khi nói đến "đồ thị", nếu không có lưu ý gì, ta hiểu đó là một đồ thị đơn và hữu hạn (nghĩa là tập đỉnh và tập cạnh là các tập hữu hạn).

Ta kết thúc phần này với một số định nghĩa, và một kết quả quen thuộc[3].

Định nghĩa 1.2 (Một số định nghĩa quan trọng)**.**

1. Một đỉnh của đồ thị có *bậc* n nếu nó là đầu mút của n cạnh trong đồ thị. Ký hiệu bậc của đỉnh v là deg(v).

2. Một *đường đi* trên đồ thị là một dãy các đỉnh $u_1, u_2, \ldots, u_k$ sao cho giữa hai đỉnh liên tiếp u_i, u_{i+1} trong dãy đều có một cạnh của đồ thị nối chúng. Đường đi trong đó mỗi đỉnh chỉ được đi qua nhiều nhất một lần gọi là *đường đi đơn*.

3. Đồ thị $\mathcal{G}$ được gọi là *liên thông* nếu với hai đỉnh u, v tùy ý, tồn tại một đường đi từ u đến v.

4. Một *chu trình* là một đường đi mà đỉnh xuất phát trùng với đỉnh kết thúc. Chu trình đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần được gọi là *chu trình Hamilton*. Chu trình đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh đúng một lần được gọi là *chu trình Euler*.

5. *Đồ thị đầy đủ* là đồ thị mà giữa hai đỉnh bất kỳ đều có một cạnh nối.

6. Đồ thị G gọi là một *đồ thị con* của đồ thị $\mathcal{G}$ nếu tập đỉnh và tập cạnh của đồ thị G lần lượt là tập con của tập đỉnh và tập cạnh của đồ thị $\mathcal{G}$.

7. Một *thành phần liên thông* của một đồ thị là một đồ thị con trong đó giữa bất kỳ hai đỉnh nào đều có đường đi đến nhau, và không thể nhận thêm bất kỳ một đỉnh hoặc một cạnh nào mà vẫn duy trì tính chất trên.

Ta thấy ngay rằng một đồ thị bất kỳ có thể được phân tích một cách duy nhất thành hợp rời của các thành phần liên thông.

Bổ đề 1.1 (Bổ đề bắt tay)**.** Cho đồ thị $\mathcal{G} = (V, E)$. Khi đó:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|.$$

Việc chứng minh bổ đề không có gì là khó khăn và ta thu được ngay một hệ quả là: số đỉnh bậc lẻ trong mọi đồ thị luôn là một số chẵn.

2. Phát hiện và sử dụng mô hình đồ thị

Kỹ năng đầu tiên cần rèn luyện khi sử dụng lý thuyết đồ thị là phát hiện được mô hình. Trong rất nhiều bài toán, ý tưởng về một mô hình đồ thị được ẩn đi một cách khéo léo. Chúng ta cùng xét một số ví dụ.

Ví dụ 2.1 (Olympic Ấn Độ năm 2023)**.** Cho $\mathcal{S}$ là một tập hợp gồm hữu hạn số nguyên dương. Giả sử rằng có đúng 2023 cặp (x, y) trong $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$, sao cho tích xy là số chính phương. Chứng minh rằng có thể tìm được ít nhất bốn số phân biệt trong $\mathcal{S}$ sao cho tích của hai số bất kỳ trong bốn số này không là số chính phương.

Lời giải. Ta xây dựng đồ thị $\mathcal{G}$ với tập đỉnh chính là tập $\mathcal{S}$, hai đỉnh x, y của nó được nối với nhau bằng một cạnh nếu xy là số chính phương. Ta có nhận xét quan trọng sau: nếu $x - y$ và $y - z$ là hai cạnh của đồ thị thì $x - z$ cũng là cạnh của đồ thị. Thật vậy, nếu $xy = a^2, yz = b^2$ thì $xz = (ab)^2/y^2$. Bạn đọc có thể chứng minh được rằng vế phải là một số chính phương, do đó xz cũng là số chính phương.

Từ nhận xét trên, ta thấy ngay cấu trúc của đồ thị $\mathcal{G}$ là như sau: nó gồm các thành phần

[3] *Một số khái niệm như đường đi có thể được định nghĩa hơi khác nhau giữa các tài liệu khác nhau (chú thích của BBT).*

liên thông mà mỗi thành phần liên thông là một đồ thị đầy đủ. Từ đây, bài toán quy về chứng minh đồ thị $\mathcal{G}$ có ít nhất bốn thành phần liên thông. Thật vậy, giả sử $\mathcal{G}$ có ít hơn bốn thành phần liên thông, ta gọi số đỉnh của các thành phần liên thông này là a_1, a_2, a_3 (các a_i có thể bằng 0). Mỗi đồ thị (đơn) đầy đủ trên a đỉnh có $\frac{a(a-1)}{2}$ cạnh, và mỗi cạnh đóng góp 2 đơn vị vào số cặp (x, y) để xy là một số chính phương. Tuy nhiên, ta chú ý rằng mỗi đỉnh tương ứng với số $s \in S$, mặc dù không nối với chính nó do tính đơn của đồ thị, nhưng thỏa mãn ss là một số chính phương, nên cũng đóng góp 1 đơn vị vào số cặp (x, y) để xy là một số chính phương. Chính vì vậy, mỗi thành phần liên thông trên a đỉnh có $a(a-1) + a = a^2$ cặp (x, y) như vậy. Suy ra số cặp (x, y) trong $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$, sao cho tích xy là một số chính phương bằng

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 2023.$$

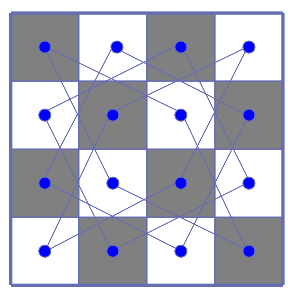
Mặt khác, một số chính phương khi chia cho 8 có số dư thuộc tập hợp $\{0; 1; 4\}$. Do đó, vế trái là tổng của ba số chính phương, nên không thể chia 8 dư 7, trong khi đó 2023 chia 8 dư 7. Điều này là mâu thuẫn!

Ví dụ 2.2 (Bài toán dự tuyển thi IMO năm 2018, Armenia đề xuất)**.** Queenie và Horst chơi một trò chơi trên một bàn cờ kích thước 20×20. Ban đầu, bàn cờ chưa có quân cờ nào. Ở mỗi lượt đi, Horst đặt một quân mã đen vào một ô còn trống sao cho quân mã này không thể ăn được bất cứ quân mã nào đã đặt trước đó; sau đó, Queenie đặt một quân hậu vào một ô trống tùy ý. Trò chơi kết thúc khi một trong hai người không thể đặt thêm quân lên bàn cờ. Tìm số nguyên dương K lớn nhất sao cho với mọi chiến thuật chơi của Queenie, Horst có thể đặt được ít nhất K quân mã lên bàn cờ.

Lời giải. Ta chỉ ra giá trị lớn nhất của K là $K = 100$ qua hai bước. Đầu tiên, ta chỉ ra một chiến lược mà Host có thể đặt được ít nhất 100 quân mã lên bàn cờ. Sau đó, ta chỉ ra một chiến lược của Queenie mà Horst không thể đặt quá 100 quân mã lên bàn cờ.

Chiến lược của Horst. Ta tô màu đen, trắng các ô của bàn cờ một cách đan xen như bàn cờ vua thông thường. Horst chỉ cần lần lượt đặt các quân mã lên một ô đen còn trống. Để ý rằng bàn cờ có $20 \cdot 20/2 = 200$ ô đen và hai con mã ở hai ô cùng màu không thể ăn nhau. Do sau mỗi lượt đi, số ô đen còn trống giảm đi không quá 2 nên trò chơi chỉ kết thúc sau ít nhất 100 lượt đi và vì thế Horst có thể đặt được 100 quân mã.

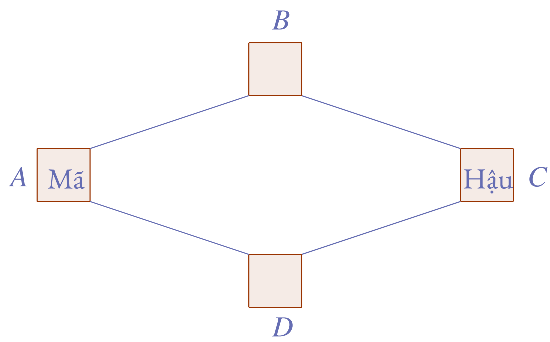
Chiến lược của Queenie. Xét một bảng con 4×4 của bảng 20×20 ban đầu. Coi mỗi ô vuông đơn vị như một đỉnh đồ thị, hai đỉnh được nối với nhau khi và chỉ khi con mã có thể đi từ ô nọ đến ô kia sau một nước đi. Khi đó, trong bảng 4×4, ta xây dựng được 4 chu trình có độ dài 4 như hình minh họa. Chú ý rằng mỗi ô trong bảng 4×4 nằm trên đúng một chu trình. Chia bảng 20×20 thành 25 bảng 4×4 và xây dựng các chu trình như trên. Như vậy, ta thu được 100 chu trình có độ dài 4.



Với mỗi chu trình $A - B - C - D - A$, Quennie có thể chơi như sau. Mỗi khi Horst đặt một quân mã vào ô A trong một chu trình, Queenie lập tức đặt một quân hậu vào ô C đối diện ô A trong chu trình.

Rõ ràng, sau đó Horst không thể đặt một quân mã vào ba ô B, C, D. Do đó, nếu Queenie chơi theo chiến lược này thì Horst chỉ đặt được tối đa 100 quân mã lên bàn cờ.

Tóm lại, số quân mã nhiều nhất mà Horst có thể đặt được lên bàn cờ là $K = 100$.

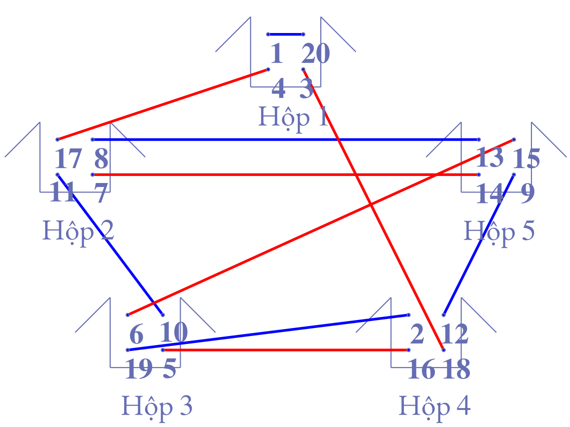


Ví dụ 2.3 (Bài toán dự tuyển thi IMO năm 2020, Hungary đề xuất). Có $4n$ viên sỏi có khối lượng lần lượt là $1, 2, \ldots, 4n$. Mỗi viên sỏi có một trong n màu và mỗi màu có đúng 4 viên. Chứng minh rằng có thể phân hoạch các viên sỏi thành hai tập có tổng khối lượng bằng nhau, sao cho trong mỗi tập, mỗi màu đều có đúng hai viên sỏi.

Lời giải. (Dựa theo lời giải của Evan Chen.) Để ý rằng

$$1 + 4n = 2 + (4n - 1) = 3 + (4n - 2) = \ldots$$

Ta đặt các viên sỏi vào n hộp, mỗi hộp chứa 4 viên sỏi cùng màu. Với mỗi số nguyên $k = 1, 2, \ldots, 2n$, ta nối một cạnh giữa viên sỏi có khối lượng k với viên sỏi có khối lượng $4n + 1 - k$.



Hình 2. Minh họa trường hợp có $n = 5$ hộp.

Để giải quyết bài toán, ta chỉ cần tô màu các cạnh trên, mỗi cạnh bằng màu xanh hoặc màu đỏ, sao cho mỗi hộp chứa hai viên sỏi là đầu mút của hai cạnh xanh và hai viên sỏi là đầu mút hai cạnh đỏ. *Chú ý rằng, nếu các viên sỏi có khối lượng k và $4n + 1 - k$ nằm trong cùng một hộp thì cạnh nối chúng sẽ được tính hai lần*. Cách xây dựng này đem lại một mô hình đồ thị không nhất thiết đơn. Cụ thể, đồ thị của chúng ta có n đỉnh, mỗi đỉnh là một chiếc hộp, và bậc của mỗi đỉnh đúng bằng 4.

Vậy, để kết thúc bài toán chỉ cần chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. Cho đồ thị (có thể không đơn) n đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc bằng 4. Khi đó, ta có thể tô màu các cạnh của nó bằng hai màu xanh và đỏ, sao cho mỗi đỉnh là đầu mút của của đúng hai cạnh màu xanh và đúng hai cạnh màu đỏ.

Chứng minh. Ta nhắc lại một kết quả nổi tiếng sau đây: một đồ thị có chu trình Euler khi và chỉ khi nó liên thông và mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.

Mỗi thành phần liên thông của đồ thị sẽ chứa một chu trình Euler vì 4 là một số chẵn. Hơn nữa, dựa theo bổ đề bắt tay, mỗi thành phần liên thông có k đỉnh sẽ có $4k/2 = 2k$ cạnh. Do đó, ta có thể tô màu các cạnh trong chu trình này xanh, đỏ một cách đan xen. Bổ đề được chứng minh.

Ví dụ 2.4 (Bài toán dự tuyển thi IMO năm 2015, Liên bang Nga đề xuất). Trong một công ty, có một số người là kẻ thù của nhau. Một nhóm người được gọi là *không hòa đồng* nếu số thành viên của nhóm này là một số lẻ lớn hơn 2 và có thể sắp xếp những thành viên của nhóm này quanh một bàn tròn sao cho hai người ngồi kề nhau bất kỳ là kẻ thù của nhau. Biết rằng có không quá 2015 nhóm người không hòa đồng. Chứng minh rằng, có thể chia những người trong công ty này thành 11 nhóm sao cho không có hai người nào trong cùng một nhóm là kẻ thù của nhau.

Lời giải. Xét đồ thị $G = (V, E)$ với tập đỉnh V là những người trong công ty và 2 người là kẻ thù của nhau được nối với nhau bằng một cạnh. Như vậy, kết luận của bài toán tương đương với việc có thể tô màu các đỉnh của đồ thị bởi 11 màu sao cho hai đỉnh kề nhau bất kỳ không cùng màu. Ta sẽ đi chứng minh một kết quả tổng quát hơn.

Bổ đề 1. *Cho đồ thị* G *có sắc số* $k \geq 3$. *Khi đó, đồ thị* G *chứa ít nhất* $2^{k-1} - k$ *nhóm không hòa đồng.*

Trước hết, nhắc lại rằng *sắc số* của đồ thị G là số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho có thể tô màu các đỉnh của G bằng k màu sao cho 2 đỉnh kề nhau bất kỳ không cùng màu. Một cách tô màu như vậy tương ứng với một cách phân hoạch tập đỉnh sao cho hai đỉnh bất kỳ trong cùng một tập con không kề nhau. Cụ thể, ta phân hoạch tập đỉnh

$$V = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k, \qquad (1)$$

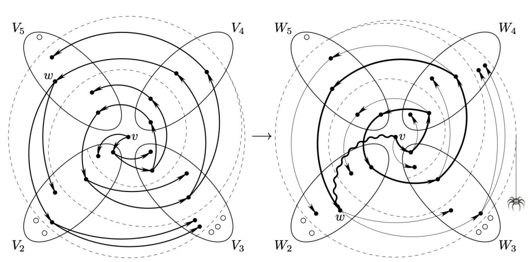
trong đó V_i gồm các đỉnh được tô màu i. Nếu Bổ đề 1 được chứng minh, kết hợp với $2^{11} - 12 > 2015$ ta có ngay kết luận của bài toán.

Chứng minh Bổ đề 1. Giả sử sắc số của đồ thị G là k. Ta biết rằng, với một đồ thị có sắc số k, có thể có nhiều hơn 1 cách tô màu các đỉnh của nó sao cho hai đỉnh cùng màu bất kỳ không kề nhau. Chúng ta sẽ xét một cách tô màu đặc biệt. Ta nói rằng cách tô màu (1) của G là *theo thứ tự* nếu số $n_1 = |V_1|$ là nhỏ nhất có thể; số $n_2 = |V_2|$ là nhỏ nhất có thể với điều kiện $|V_1| = n_1$, ..., tương tự như vậy, số $n_k = |V_k|$ là nhỏ nhất có thể với điều kiện $|V_1| = n_1, |V_2| = n_2, \ldots, |V_{k-1}| = n_{k-1}$. Ta nhận xét rằng trong một cách tô màu theo thứ tự, mọi đỉnh $u \in V_i$ phải kề với ít nhất một đỉnh trong V_{i+1} (thật vậy, nếu có một đỉnh $u \in V_i$ không kề với đỉnh nào trong V_{i+1}, ta đổi màu u từ i thành $i+1$ và nhận được một cách tô màu mới với $|V_i'| = n_i - 1$). Ta có bổ đề sau:

Bổ đề 2. *Giả sử* $G = (V, E)$ *là một đồ thị với sắc số* $k \geq 3$ *và lẻ. Giả sử* (1) *là một cách tô theo thứ tự. Khi đó* G *chứa một chu trình đi qua một số lẻ đỉnh và tất cả* k *màu đều xuất hiện ở các đỉnh của chu trình này.*

Chứng minh. Xét cách tô màu theo thứ tự (1) (các đỉnh của V_i được tô màu i). Ta gọi một chu trình là *đẹp* nếu nó có đủ k màu. Lấy $v \in V_1$. Ta sẽ xây dựng một chu trình có đúng một đỉnh trong V_1 là v.

Trước hết, ta xây dựng một đồ thị con của G như sau. Lấy đỉnh v làm tâm, sắp xếp các tập $V_2, \ldots, V_k$ trên một đường tròn tâm v theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Để thuận tiện, ta coi $V_{k+1} = V_2$. Ta sẽ kẻ thêm một số mũi tên trên một số cạnh của G để định hướng chúng. (Ví dụ, với một cạnh AB nào đó, ta có thể định hướng nó từ A đến B bằng cách kẻ mũi tên trên cạnh AB hướng vào B). Đầu tiên, ta kẻ các mũi tên từ v đến tất cả các đỉnh kề nó trong V_2 và đánh dấu các đỉnh trong V_2 này. Giả sử một đỉnh $u \in V_i$ với $i = 2, 3, \ldots, k$ đã được đánh dấu. Ta vẽ mũi tên từ đỉnh u này đến những đỉnh kề với u mà chưa được đánh dấu trong tập V_{i+1}, đồng thời đánh dấu tất cả những đỉnh trong V_{i+1} này. Ta cứ tiếp tục quá trình trên chừng nào còn có thể. Rõ ràng, vì tập đỉnh là hữu hạn và sau mỗi lần, số đỉnh được đánh dấu tăng lên nên quá trình sẽ dừng sau một số bước. Quy trình này được minh họa trong hình sau.



Hình 3. Quy trình xây dựng chu trình.

Chú ý rằng, với cách đánh dấu các đỉnh, sau khi quy kết thúc; các đỉnh đã đánh dấu ở V_i sẽ không có đỉnh kề trong V_{i+1} mà đỉnh kề này lại chưa được đánh dấu. Hơn nữa, v sẽ liên thông với tất cả các đỉnh được đánh dấu bởi một đường đi có hướng (đi theo chiều các mũi tên).

Bây giờ, ta chuyển mỗi đỉnh được đánh dấu thuộc tập V_i sang tập V_{i+1} (các đỉnh từ V_i sang V_{i+1} bây giờ sẽ được tô lại màu $i+1$ thay vì i). Theo nhận xét ở trên, ta thu được một cách tô màu mới vẫn thỏa mãn 2 đỉnh kề nhau không cùng màu. Ký hiệu cách tô này là

$$V_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_k.$$

Quan sát rằng v kề với một đỉnh $w \in W_2$ nào đó vì nếu không

$$(V_1 \setminus \{v\}) \cup (W_2 \cup \{v\}) \cup W_3 \cup \cdots \cup W_k$$

sẽ là một cách tô màu mới mà rõ ràng $|V_1 \setminus \{v\}| < |V_1|$, mâu thuẫn với cách chọn để (1) là một cách tô màu theo thứ tự. Nếu w không được đánh dấu thì nghĩa là ban đầu $w \in V_2$. Nhưng khi đó ở bước đầu tiên của quy trình, đỉnh w phải được đánh dấu và như vậy nó sẽ phải được chuyển sang V_3, nhưng điều này không xảy ra. Vì vậy w là một đỉnh được đánh dấu và như vậy nó được chuyển từ V_k sang V_2, nghĩa là ban đầu $w \in V_k$.

Cũng do w được đánh dấu, tồn tại một đường đi có hướng từ v đến w, ta thấy đường đi này đi xoay vòng qua tất cả các đỉnh thuộc $V_2, \ldots, V_k$, vì thế có số cạnh chia hết cho $k-1$, vì nói riêng là một số chẵn. Chỉ cần nối thêm cạnh từ w đến v; ta có ngay một chu trình có một số lẻ cạnh. Vậy ta đã xây dựng được một chu trình lẻ cạnh và có đủ k màu và Bổ đề 2 được chứng minh.

Quay trở lại việc chứng minh Bổ đề 1. Ta chọn một cách tô có thứ tự của G như (1). Tương tự như trong Bổ đề 2, ta đánh số các màu từ 1 đến k. Với mọi tập con $C \subset \{1; 2; \ldots; k\}$ sao cho $|C|$ là số lẻ lớn hơn 1, ta sẽ chỉ ra một chu trình đi qua một số lẻ đỉnh và có đủ tất cả các màu trong C. Tính chất này sẽ đảm bảo rằng: hai tập C khác nhau cho hai chu trình khác nhau. Điều đó kéo theo Bổ đề 1 được chứng minh, vì có đúng $2^{k-1} - k$ tập C có lực lượng là số lẻ lớn hơn 1.

Ký hiệu $V_C = \bigcup\limits_{c \in C} V_c$ và G_C là đồ thị con của G *cảm sinh* từ V_C, nghĩa là đồ thị có có tập đỉnh là V_C và hai đỉnh bất kỳ của V_C kề nhau trong G_C khi và chỉ khi chúng kề nhau trong G. Rõ ràng, cách tô màu G bằng k màu cảm sinh một cách tô màu G_C bằng $|C|$ màu. Hơn nữa, cách tô màu này cũng là một cách tô màu tối ưu và theo thứ tự của G_C, vì nếu có một cách tô màu $(W_c)_{c \in C}$ khác dùng ít màu hơn, hoặc dùng đúng $|C|$ màu và là một cách tô màu theo thứ tự của G_C; thì kết hợp cách tô $(W_c)_{c \in C}$ và cách tô các V_i mà $i \notin C$, ta sẽ thu được một cách tô màu tốt hơn, hoặc là một cách tô có thứ tự khác với cách tô (1), vô lý!

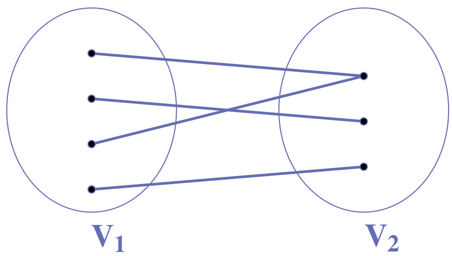
Từ đó, áp dụng Bổ đề 2 cho đồ thị G_C và cách tô màu theo thứ tự tương ứng là $(V_c)_{c \in C}$, ta thu được một chu trình lẻ và có đủ các màu trong C. Vậy Bổ đề 1 được chứng minh và do đó bài toán được giải quyết.

Nói chung, những lời giải sử dụng mô hình đồ thị, đặc biệt là với những bài toán mà mô hình đồ thị được ẩn đi luôn đem lại hứng thú và sự phấn khích lớn. Đào sâu thêm, ta thấy rằng, dù mô hình đồ thị có thể giúp ta diễn đạt và hình dung bài toán trực quan hơn, nhưng trong một số trường hợp, điều đó là chưa đủ. Đôi khi, sau khi có được một mô hình đồ thị, ta còn cần phải phát hiện thêm các tính chất đặc biệt của đồ thị này. Tiếp theo, chúng ta cùng tìm hiểu hai loại đồ thị với cấu trúc đặc biệt.

3. Đồ thị lưỡng phân

Khi gặp một đồ thị có rất nhiều cạnh và đỉnh, để nhìn thấy cấu trúc của đồ thị, thường ta sẽ phân hoạch tập đỉnh thành các tập con, sao cho mỗi cạnh của đồ thị có hai đầu thuộc hai tập con khác nhau. Một đồ thị mà tập đỉnh có thể được phân hoạch thành hai tập con có tính chất như vậy được gọi là một đồ thị lưỡng phân, hay còn gọi là đồ thị hai phần.

Định nghĩa 3.1 (Đồ thị lưỡng phân). Đồ thị $\mathcal{G} = (V, E)$ gọi là *lưỡng phân* (hay *hai phần*) nếu tập đỉnh V có thể phân hoạch thành hai tập hợp V_1, V_2, sao cho mỗi cạnh của đồ thị $\mathcal{G}$ đều có một đầu mút thuộc V_1 và đầu mút còn lại thuộc V_2.



Hình 4. Minh họa đồ thị lưỡng phân.

Đồ thị lưỡng phân có những tính chất tương đối dễ thấy. Ví dụ, nếu tập đỉnh V được phân hoạch thành hai tập hợp V_1, V_2, thì $\sum_{v \in V_1} \deg(v) = \sum_{v \in V_2} \deg(v) = |E|$. Ngoài ra, số cạnh của đồ thị lưỡng phân $\mathcal{G}$ không vượt quá $|V_1||V_2|$. Khi dấu bằng xảy ra, ta còn gọi đồ thị $\mathcal{G}$ là một đồ thị lưỡng phân đầy đủ và ký hiệu là $K_{a,b}$, với a, b lần lượt là số phần tử của V_1, V_2. Tiếp theo, ta có một định lý để kiểm tra một đồ thị có là đồ thị lưỡng phân hay không.

Định lý 3.1 (Dấu hiệu nhận biết). Cho $\mathcal{G} = (V, E)$ là một đồ thị liên thông. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:

1. Đồ thị $\mathcal{G}$ lưỡng phân.

2. Các đỉnh của đồ thị $\mathcal{G}$ có thể tô bằng hai màu, sao cho hai đỉnh kề nhau không cùng màu.

3. Đồ thị $\mathcal{G}$ không chứa chu trình có số cạnh là lẻ.

Chứng minh. Ta dễ thấy rằng phát biểu (1) tương đương với phát biểu (2) vì $\mathcal{G}$ lưỡng phân tương đương với việc tập đỉnh của nó được phân hoạch thành hai tập A, B mà mọi cạnh của $\mathcal{G}$ đều có một đầu mút thuộc A, một đầu thuộc B; và ta có thể tô các đỉnh thuộc A bằng màu đen và các đỉnh thuộc B màu trắng.

Tiếp theo, ta chứng minh từ (2) suy ra (3). Nếu các đỉnh của $\mathcal{G}$ có thể được tô bằng hai màu sao cho hai đỉnh kề nhau bất kỳ khác màu mà có một chu trình lẻ cạnh thì dọc theo chu trình này, các đỉnh có màu đan xen nhau, vì thế đỉnh đầu và đỉnh cuối cùng màu, vô lý!

Đảo lại, nếu $\mathcal{G}$ không chứa chu trình có số lẻ cạnh, ta có thể tô màu các đỉnh của nó như sau. Chọn một đỉnh gốc u và tô đen, với mỗi đỉnh v, lấy tùy ý một đường đi từ u đến v (đường đi này luôn tồn tại vì $\mathcal{G}$ liên thông). Nếu đường đi này độ dài chẵn thì tô v màu đen, nếu lẻ thì tô v màu trắng. Cách tô này không phụ thuộc vào việc lựa chọn đường đi nào, vì mọi đường đi từ u đến v phải cùng tính chẵn lẻ, nếu không bằng cách ghép một đường đi độ dài chẵn với một đường đi độ dài lẻ, ta thu được một chu trình độ dài lẻ. Hơn nữa, có thể thấy ngay cách tô này đảm bảo hai đỉnh kề nhau không cùng màu.

Lưu ý. Giả thiết đồ thị $\mathcal{G}$ liên thông chỉ giúp ta dễ dàng hơn trong việc trình bày chứng minh trên. Kết quả của định lý trên vẫn đúng nếu ta bỏ đi giả thiết $\mathcal{G}$ liên thông. Tiếp theo, ta cùng xét một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 3.1 (Olympic Canada năm 2019). Cho $n \geq 3$ điểm trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Hai người chơi một trò chơi như sau. Họ luân phiên chơi. Ở mỗi lượt chơi, người đến lượt chọn hai điểm chưa được nối và nối chúng lại với nhau. Người đầu tiên tạo ra một chu trình có số cạnh là lẻ thua cuộc. Tìm tất cả các giá trị của n sao cho người chơi đầu tiên có chiến lược thắng cuộc.

Nhận xét. Mô hình đồ thị là rất rõ trong bài toán này. Do bài toán đề cập đến chu trình lẻ cạnh, nên ta nghĩ đến cấu trúc đồ thị lưỡng phân.

Lời giải. Gọi hai người chơi là A, B và giả sử A là người chơi đầu tiên.

Ở mọi thời điểm, khi người chơi vẫn có thể nối thêm một đường, thì đồ thị $\mathcal{G}$ vẫn chưa chứa chu trình lẻ cạnh. Do đó, nó vẫn là đồ thị lưỡng phân. Vì vậy, nếu người chơi P thua, nghĩa là ở lượt chơi tiếp theo, với mọi cách nối hai điểm chưa được nối với nhau, anh ta đều tạo ra một đồ thị không còn là đồ thị lưỡng phân. Nói cách khác, đồ thị $\mathcal{G}$ ở thời điểm đó phải là đồ thị lưỡng phân đầy đủ $K_{a,b}$; với a, b là các số nguyên không âm thỏa mãn $a + b = n$. Vì vậy, số cạnh của $\mathcal{G}$ khi đó là ab.

Để A giành chiến thắng, rõ ràng ab phải là số lẻ. Nếu n lẻ, thì chắc chắn một trong hai số a, b chẵn. Suy ra ab chẵn, và A sẽ thua.

Nếu n chẵn, chúng ta dự đoán trạng thái cuối cùng của đồ thị $\mathcal{G}$ sẽ là $K_{n/2,n/2}$ nếu cả A và B đều chơi một cách tối ưu. Vì vậy, nếu $n \equiv 0 \pmod 4$ thì $a = b = n/2$ đều chẵn và A thua. Nếu $n \equiv 2 \pmod 4$ thì $a = b = n/2$ đều lẻ và A thắng. Bây giờ, chúng ta sẽ chứng minh dự đoán trên.

Chúng ta sẽ gọi một đồ thị lưỡng phân liên thông là *cân bằng* nếu các tập đỉnh đen và trắng của nó (như trong Định lý 3.1) của nó có lực lượng bằng nhau. (Điều kiện liên thông đảm bảo rằng cách tô màu là duy nhất, sai khác hoán vị các màu.) Tổng quát, một đồ thị hai phần được gọi là cân bằng nếu mỗi thành phần liên thông có nhiều hơn 1 đỉnh của nó là cân bằng.

Chiến lược chơi của người thắng cuộc là đảm bảo rằng sau mỗi lần anh ta chơi, đồ thị luôn là cân bằng và nói riêng số các đỉnh độc lập luôn là số chẵn.

Trường hợp 1: $n \equiv 2 \pmod 4$. Người chơi A có thể sử dụng chiến lược sau đây để đưa $\mathcal{G}$ về dạng $K_{n/2,n/2}$, và giành chiến thắng. Nhắc lại rằng, khi trò chơi chưa kết thúc, đồ thị là lưỡng phân. Hiển nhiên rằng ở nước đi đầu tiên A sẽ nối 2 đỉnh nào đó lại với nhau và do đó sau nước đi này thì đồ thị là cân bằng và số đỉnh cô lập là số chẵn. Ở mỗi lượt chơi sau đó của mình, tùy theo cách chơi của B mà A sẽ có cách chơi tương ứng:

- Nếu B nối một đỉnh cô lập với một đỉnh S nào đó thuộc một thành phần liên thông không tầm thường (của đồ thị cân bằng đang có sau nước đi của A) thì A sẽ nối một đỉnh cô lập khác với một đỉnh T thuộc thành phần liên thông đó sao cho S và T có màu khác nhau.
- Nếu B nối 2 đỉnh cô lập với nhau, hoặc nối 2 đỉnh khác màu của một thành phần liên thông, hoặc nối 1 đỉnh của một thành phần liên thông với 1 đỉnh của một thành phần liên thông khác thì sau nước đi của B, đồ thị vẫn là cân bằng (và có số đỉnh cô lập là số chẵn). Khi này, A chỉ cần nối 2 đỉnh cô lập (nếu có) hoặc 2 đỉnh không cô lập bất kỳ miễn là chúng không cùng màu.

Ta dễ dàng kiểm tra được rằng cách chơi của A đảm bảo rằng đồ thị luôn là cân bằng và đồ thị cuối cùng mà anh ta nhận được là $K_{n/2,n/2}$.

Trường hợp 2: $n \equiv 0 \pmod 4$. Người chơi B có thể sử dụng chiến lược giống hệt người chơi A để đưa $\mathcal{G}$ về dạng $K_{n/2,n/2}$, và giành chiến thắng.

Vậy người chơi A có chiến lược thắng khi và chỉ khi n chia 4 dư 2.

Ví dụ 3.2 (Olympic Trung Quốc năm 2021). Một hội nghị có $n > 3$ nhà khoa học, một số họ là bạn của nhau (quan hệ bạn bè là hai chiều và không có ai là bạn của chính bản thân mình). Người ta nhận thấy rằng, với mọi cách phân hoạch các nhà khoa học thành hai tập hợp khác rỗng, luôn tồn tại hai người cùng thuộc một tập là bạn của nhau và hai người không cùng thuộc một tập là bạn của nhau.

Trong ngày đầu tiên, mỗi nhà khoa học đưa ra một số nguyên không âm. Ở ngày thứ k, mỗi nhà khoa học thay đổi con số của mình bằng phần nguyên của trung bình cộng của các số của tất cả các bạn của mình trong ngày $k - 1$. Chứng minh rằng, sau một số hữu hạn ngày, tất cả các nhà khoa học sẽ cùng đưa ra một con số.

Lời giải. Chúng ta sẽ sử dụng mô hình đồ thị $\mathcal{G} = (V, E)$, trong đó mỗi nhà khoa học là một đỉnh và hai đỉnh nối với nhau nếu hai nhà khoa học này là bạn của nhau. Ta có 7 nhận xét nhỏ như sau:

1. Đồ thị $\mathcal{G}$ liên thông. Thật vậy, giả sử $\mathcal{G}$ có ít nhất hai thành phần liên thông; gọi S là một trong các thành phần liên thông. Xét phân hoạch $(V, V \setminus S)$: phân hoạch này không chứa hai người khác tập nhưng là bạn của nhau, mâu thuẫn.

2. Đồ thị $\mathcal{G}$ không là đồ thị lưỡng phân, vì nếu nó là đồ thị lưỡng phân thì ta phân hoạch tập đỉnh thành hai phía tương ứng. Khi đó, sẽ không tồn tại hai người là bạn của nhau cùng thuộc một tập. Điều này kéo theo đồ thị $\mathcal{G}$ phải chứa chu trình có số lẻ cạnh. Gọi một chu trình như vậy là (P).

3. Nhận xét trên kéo theo, giữa hai đỉnh bất kỳ u, v, tồn tại một đường đi từ u đến v có một số chẵn cạnh. Thật vậy, lấy một đỉnh w thuộc chu trình (P). Xét một đường đi có dạng $u - w - v$. Nếu đường đi này có một số chẵn cạnh thì ta có điều phải chứng minh; nếu nó có một số lẻ cạnh thì ta xét đường đi $u - w(P)w - v$, nghĩa là đường đi như trên, bổ sung thêm đường đi quanh w bằng chu trình (P): vì (P) có một số lẻ cạnh nên nên đường đi này có một số chẵn cạnh.

4. Xét dãy (a_n), trong đó a_n là số lớn nhất ở ngày thứ n. Dãy này không tăng. Thật vậy, giả sử các nhà khoa học ở ngày thứ n có số lớn nhất là a_n. Khi đó ở ngày $n+1$, mỗi nhà khoa học có số mới là trung bình cộng của các bạn của mình nên nó nhỏ hơn hoặc bằng a_n.

5. Mặt khác, dãy số nguyên (a_n) bị chặn dưới bởi 0, nên nó có giới hạn bằng M. Điều này có nghĩa là kể từ ngày thứ N đủ lớn nào đó, ta luôn có $a_n = M$ với mọi $n \geq N$.

6. *Kể từ ngày thứ N, tất cả các nhà khoa học đều có số là M.* Để chỉ ra điều đó, ta sử dụng phương pháp phản chứng. Giả sử tồn tại nhà khoa học v có số nhỏ hơn M ở ngày thứ $k > N$, khi đó ở ngày thứ $k+1$, số của tất cả các bạn của v sẽ nhỏ hơn M. Gọi khoảng cách giữa 2 đỉnh (của một đồ thị liên thông) là số cạnh của đường đi ngắn nhất (sử dụng ít cạnh nhất) giữa chúng, ta sẽ có một dãy các sự kiện ở các ngày tiếp theo như sau:

• Ở ngày $k+1$, tất cả các đỉnh có khoảng cách bằng 1 đến v đều có số nhỏ hơn M.

• Ở ngày $k+2$, tất cả các đỉnh có khoảng cách bằng $0, 2$ đến v đều có số nhỏ hơn M.

• Ở ngày $k+3$, tất cả các đỉnh có khoảng cách bằng $1, 3$ đến v đều có số nhỏ hơn M.

...

Ở ngày $k+2l$, tất cả các đỉnh có khoảng cách bằng $0, 2, \ldots, 2l$ đến v đều có số nhỏ hơn M.

7. Tuy nhiên, vì giữa hai đỉnh u, v bất kỳ đều tồn tại một đường đi có số chẵn cạnh, nên với l đủ lớn, ở ngày $k+2l$, tất cả các nhà khoa học đều có số nhỏ hơn M, mâu thuẫn!!!

Như vậy, ta có điều cần chứng minh.

Trong các đồ thị lưỡng phân, có một loại đồ thị đặc biệt. Ở phần tiếp theo, ta sẽ cùng tìm hiểu loại đồ thị này.

Tài liệu

[1] Đỗ Đức Thái, *Chuyên đề học tập toán* 11. NXB Đại học Sư phạm Hà Nội.

[2] Hà Huy Khoái, *Chuyên đề học tập toán* 11. NXB Giáo dục Việt Nam.

[3] Asratian, Armen S.; Denley, Tristan M. J.; Häggkvist, Roland, *Bipartite Graphs and their Applications*. Cambridge University Press, 1998.

[4] Bender, Edward A.; Williamson, S. Gill , *Lists, Decisions and Graphs With an Introduction to Probability*, 2010.

[5] Titu Andreescu, Bogdan Enescu, *Mathematical Olympiad Treasures*. Springer, 2011.

[6] Website https://artofproblemsolving.com.

MINH VIỆT
SCHOOL OF MATH

MVSM
NƠI ƯƠM MẦM TOÁN HỌC TRẺ

Trong bối cảnh cách mạng công nghệ phát triển như vũ bão, thị trường lao động thế giới ngày càng thêm "khát" nhân sự giỏi Toán và tiếng Anh.

Trường Toán Minh Việt - Minh Việt School of Math (MVSM) đã kết hợp với The Arts of Problem Solving (AoPS) - Chương trình giáo dục Toán học nâng cao số 1 tại Hoa Kỳ và hàng đầu thế giới, để mở ra mô hình học tập Toán ưu việt nhất.

SỨ MỆNH MVSM

- Khơi dậy Tình yêu Toán học
- Khả năng Sáng tạo
- Tư duy Logic
- Nghệ thuật giải quyết các vấn đề

CHƯƠNG TRÌNH ĐÀO TẠO

- **Đối tượng:** Học sinh tiểu học từ lớp 1 tới lớp 5
- **Giáo trình học:** Beast Academy của AoPS
- **Phương thức:** Học sinh học Online cùng giáo viên Mỹ
- **Thời gian học:**
  - **Lớp Toán:** 1 buổi/ tuần, chỉ với 5 triệu đồng/năm
  - **Lớp Tiếng Anh bổ trợ:** 4 buổi/tuần, 6 triệu đồng/năm.
  (Phụ huynh có thể đăng ký cho con chỉ học Toán, chỉ học tiếng Anh hoặc học cả Toán và tiếng Anh.)
- **Khai giảng năm học 2023-2024:** 18/6/2023

Những học sinh xuất sắc của MVSM sẽ được tặng học bổng một phần hoặc toàn phần và được giới thiệu học Câu lạc bộ Toán Kỳ Lân với những Giáo sư Toán học hàng đầu Việt Nam.

Beast ACADEMY
By Art of Problem Solving

ĐỌC THÊM

LỜI GIẢI VÒNG MỘT KỲ THI TOÁN HỌC LIÊN BANG ĐỨC 2023

NGUYỄN MẠNH TOÀN[1]

Trong chuyên mục này, chúng tôi sẽ trình bày Lời giải của các bài toán trong vòng một kỳ thi toán học liên bang Đức năm 2023, đăng trong số báo $9/2023$.

Câu 1: Ba bạn Tick, Trick và Track có 20, 23 và 25 vé để đi vòng quay ngựa gỗ tại hội chợ hàng năm. Họ thống nhất rằng sẽ chỉ đi vòng quay nếu cả ba cùng đi và mỗi người nộp một vé của mình. Ngoài ra, trước mỗi lần đi, nếu muốn, họ có thể chia lại vé cho nhau bao nhiêu lần tùy thích theo quy tắc sau: Người nào có số vé chẵn thì có thể chia một nửa số vé của mình cho một trong hai người còn lại. Hỏi có thể xảy ra rằng sau một lần đi nào đó:

- Đúng một người hết vé.
- Đúng hai người hết vé.
- Cả ba cùng hết vé.

Lời giải. Để đơn giản ta sẽ biểu diễn phân bố vé bằng bộ ba số nguyên không âm, chẳng hạn ban đầu Tick, Trick và Track có $(20,23,25)$ vé.

a. Có thể xảy ra trường hợp đúng một người hết vé. Chẳng hạn, nếu không bạn nào đưa vé cho bạn khác thì sau 20 lượt đi Tick hết vé, Trick còn 3 vé và Track còn 5 vé.

b. Có thể xảy ra trường hợp đúng hai bạn hết vé. Chẳng hạn, sau 17 lần đi thì số vé còn lại sẽ là $(3,6,8)$. Khi đó, Trick sẽ đưa một nửa số vé của mình, tức 3 vé, cho Track và phân bố vé trở thành $(3,3,11)$. Sau 3 lần đi tiếp thì Tick và Trick cùng hết vé còn Track còn 8 vé.

c. Không thể xảy ra trường hợp cả ba bạn hết vé đồng thời. Sau khi chuyển vé cho nhau thì tổng số vé của Tick, Trick và Track vẫn không đổi; tổng này chỉ giảm nếu cả ba đi cùng nhau và giảm đúng 3 vé. Do vậy, để ba bạn cùng hết vé thì tổng số vé ban đầu phải là bội số của 3. Tuy nhiên $20+23+25=68$ không chia hết cho 3.

Câu 2: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên (x,y,z) thỏa mãn phương trình

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=3. \quad (1)$$

Lời giải. Nếu (x,y,z) thỏa mãn phương trình (1) thì mọi hoán vị của bộ ba này cũng vậy. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp $x \geq y \geq z$. Ta có

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=3 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=6 \\ \Leftrightarrow\ & (x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2=6. \quad (2) \end{aligned}$$

Với ba số nguyên không âm $a \geq b \geq c \geq 0$, phương trình $a^2+b^2+c^2=6$ có nghiệm khi và chỉ khi $a=2$, $b=c=1$. Từ giả sử

[1] *Khoa Toán Đại học Osnabrueck, CHLB Đức.*

ban đầu rằng $x \geq y \geq z$ ta có

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ y-z=1 \\ x-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z+1 \\ x=z+2. \end{cases}$$

Do vậy, các bộ ba số nguyên liền nhau $(x,y,z)=(k+2,k+1,k)$ và các hoán vị của chúng, với $k \in \mathbb{Z}$, là tất cả nghiệm nguyên của phương trình (1).

Câu 3: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AECF$ có chung đường chéo AC, trong đó E và F nằm bên trong $ABCD$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác AEB, BFC, CED và DFA giao nhau tại một điểm.

Chứng minh. Gọi đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEB, BFC, CED và DFA lần lượt là k_1, k_2, k_3 và k_4. Hai đường tròn k_1 và k_3 giao nhau tại E. Gọi giao điểm còn lại là G. Ta sẽ chứng minh rằng $G \in k_2$ và $G \in k_4$.

Gọi S là trung điểm của đường chéo chung AC. Vì các hình bình hành đối xứng qua trung điểm của các đường chéo, điều kiện của bài toán có thể được mô tả đầy đủ thông qua các điểm A, B, E và S.

Giả sử có một đỉnh nào đó của $ABCD$ thuộc ba trong bốn đường tròn đã cho, chẳng hạn B thuộc k_1, k_2 và k_3. Khi đó $G=B$. Vì B nằm trên đường tròn CED nên từ tính đối xứng tâm qua S thì D thuộc đường tròn AFB. Nói cách khác, $B \in k_4$ và bốn đường tròn k_1, k_2, k_3, k_4 đều đi qua B. Bởi vậy trong phần chứng minh dưới đây ta có thể giả sử rằng G không trùng với đỉnh nào của $ABCD$.

Trường hợp 1: G nằm ở phần trong hình bình hành $ABCD$. Khi đó G và E nằm cùng một phía với đường thẳng AB cũng như cùng một phía với đường thẳng CD. Đặt

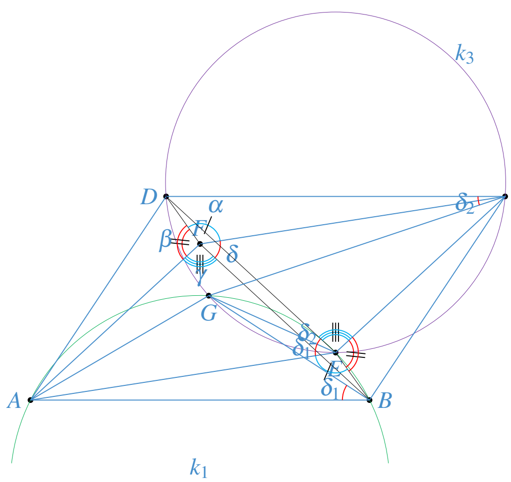
$$\begin{aligned} \alpha &: = \angle AEB = \angle CFD, \\ \beta &: = \angle BEC = \angle DFA, \\ \gamma &: = \angle CED = \angle AFB, \\ \delta &: = \angle DEA = \angle BFC. \end{aligned}$$

Do E và F nằm trong $ABCD$ nên $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ$.

Từ định lý về góc nội tiếp cho đường tròn k_1 với cung AB ta có $\angle AGB=\angle AEB=\alpha$. Tương tự với đường tròn k_3 và cung CD ta có $\angle CGD=\angle CED=\gamma$. Ta sẽ chứng minh rằng $\angle BGC=\delta=\angle BFC$. Vì $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\angle AGB+\angle DGA+\angle CGD+\angle BGC=360^\circ$ nên từ đó suy ra $\angle DGA=\beta=\angle DFA$. Từ định lý về góc nội tiếp đường tròn k_2 với cung BC và k_4 với cung DA ta thu được $G \in k_2$ và $G \in k_4$.

Xét ba trường hợp con có thể xảy ra:

Trường hợp 1a: Các điểm A, G, E, B khác nhau đôi một và nằm trên đường tròn k_1 theo thứ tự kể trên. Khi đó, các điểm D, G, E, C cũng nằm trên đường tròn k_3 theo thứ tự này và đoạn thẳng GE nằm trong góc $\angle DEA$. Do đó, $\angle GED+\angle GEA=\angle DEA=\delta$.



Hình 1: Trường hợp 1a.

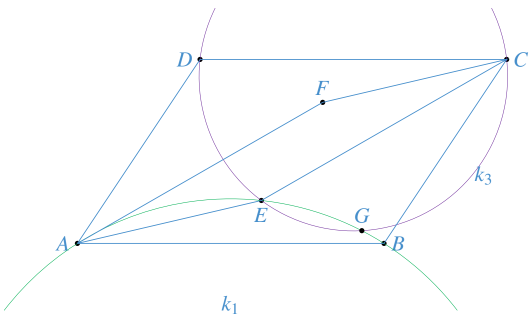
Từ định lý góc nội tiếp cho đường tròn k_1 với cung AG và k_3 với cung DG ta có $\angle GEA=\angle GBA$ và $\angle GED=\angle GCD$. Do đó, $\angle GCD+\angle GBA=\delta$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\angle GCB+\angle GCD+\angle GBA+\angle GBC=\angle DCB+\angle ABC=180^\circ$. Do đó $\angle GCB+\angle GBC=180^\circ-(\angle GCD+\angle GBA)=180^\circ-\delta$.

Mặt khác, vì BGC là tam giác nên $\angle BGC+$

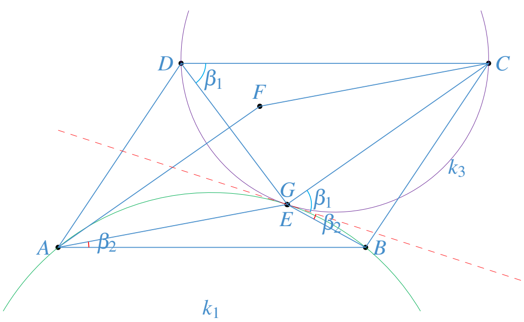
$\angle GCB + \angle GBC = 180^\circ$. Do đó $\angle BGC = 180^\circ - (\angle GCB + \angle GBC) = 180^\circ - (180^\circ - \delta) = \delta$ và ta có điều phải chứng minh.

Trường hợp $1b$: Các điểm A, E, G, B khác nhau đôi một và nằm trên đường tròn k_1 theo đúng thứ tự kể trên. Khi đó lặp lại lý luận trong trường hợp 1a nhưng hoán đổi vị trí A với B, C với D (do đó hoán đổi β với δ, k_2 với k_4, v.v...) ta thu được kết quả tương tự.



Hình 2: Trường hợp 1b.

Trường hợp $1c$: $E = G$. Khi đó hai đường tròn k_1 và k_3 sẽ tiếp xúc tại tại G. Đường tiếp tuyến chung của k_1 và k_3 đi qua G sẽ chia góc BGC thành hai phần, ký hiệu là β_1 và β_2 như trong hình. Ta có $\beta_1 + \beta_2 = \beta = \angle BGC$.

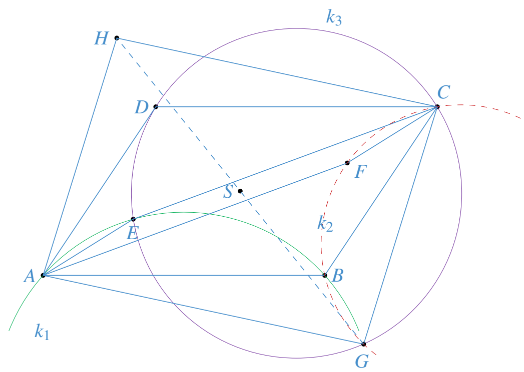


Hình 3: Trường hợp 1c.

Bằng định lý về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung ta có $\beta_1 = \angle EDC$ và $\beta_2 = \angle EAB$. Do $\angle EDC + \angle EAD + \angle EAB + \angle EDA = \angle CDA + \angle DAB = 180^\circ$ nên $\angle EDA + \angle EAD = 180^\circ - (\angle EDC + \angle EAB) = 180^\circ - (\beta_1 + \beta_2) = 180^\circ - \beta$.

Mặt khác, do $\angle DEA + \angle EDA + \angle EAD = 180^\circ$ nên $\delta = \angle DEA = 180^\circ - (\angle EDA + \angle EAD) = 180^\circ - (180^\circ - \beta) = \beta$. Như vậy $\angle BGC = \beta = \delta$ và ta có điều phải chứng minh.

Trường hợp 2: G nằm ngoài $ABCD$. Có thể thấy rằng G không nằm trong vùng tạo bởi hai đường thẳng AB và CD, cũng như không nằm trong vùng tạo bởi hai đường thẳng AD và BC. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử G nằm gần B như trong hình. Gọi H là điểm đối xứng với G qua tâm S. Khi đó hai hình bình hành $AGCH$ và $ABCD$ có chung đường chéo AC với B, D nằm bên trong $AGCH$. Hơn nữa, đường tròn ngoại tiếp của GBA và GDC giao nhau tại điểm E nằm phần trong của $AGCH$.



Hình 4: Trường hợp 2.

Sử dụng kết quả của trường hợp 1 với $AGCH$ thay cho $ABCD$, $ABCD$ cho $AECF$, GBA cho k_1, GDC cho k_2 ta chứng minh được rằng E thuộc đường tròn CBH và HDA. Do tính đối xứng tâm qua S nên F thuộc đường tròn DAG và GBC. Do đó, G cũng thuộc đường tròn DFA và BCF. Nói cách khác, bốn đường tròn AFD, BFC, CED và DFA giao nhau tại G.

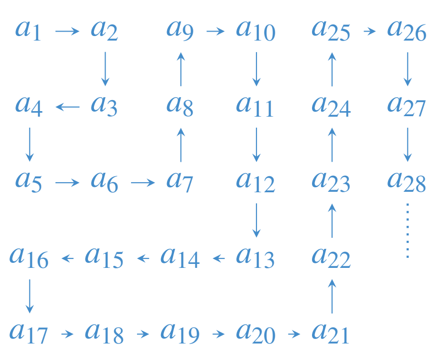
Câu 4: Cho số thực α với biểu diễn thập phân $\alpha = 0, a_1a_2a_3\ldots$ trong đó mỗi chữ số a_i là một số nguyên tố. Các chữ số sau dấu phẩy được sắp xếp dọc theo đường được tạo ra bởi các mũi tên như trong hình bên, được tưởng tượng là tiếp tục vô tận về bên phải và xuống dưới.

Với mỗi $m \geq 1$, biểu diễn thập phân của số thực z_m được cho bằng cách viết chữ số 0 trước dấu phẩy và sau dấu phẩy là các chữ số của dòng thứ m (tính từ trên xuống) theo thứ tự từ trái sang phải. Tương tự, với mọi $n \geq 1$, số thực s_n được thiết lập với các chữ số của cột thứ n (tính từ bên trái sang) theo thự tự từ trên xuống dưới. Chẳng hạn $z_3 = 0, a_5a_6a_7a_{12}a_{23}a_{28}\ldots$ và $s_2 = 0, a_2a_3a_6a_{15}a_{18}a_{35}\ldots$. Chứng minh rằng:

(a) Nếu α là số hữu tỷ, thì tất cả các số z_m và s_n đều hữu tỷ.

(b) Chiều ngược lại của khẳng định (a) là sai.

Chứng minh.

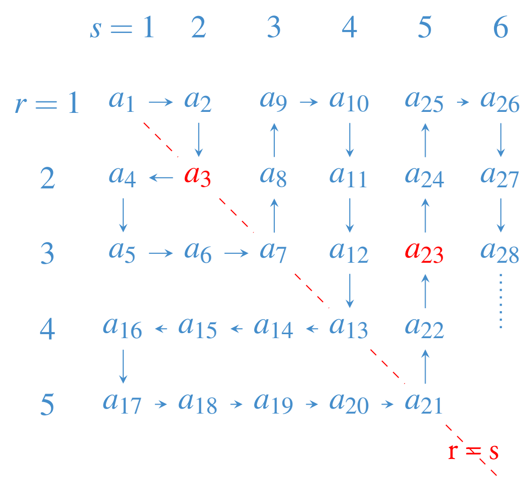


Hình 5:Biểu diễn thập phân của α.

Một số thực với biểu diễn thập phân $\alpha = 0, a_1a_2a_3\ldots$ là hữu tỷ khi và chỉ khi biểu diễn này hữu hạn hoặc tuần hoàn, nghĩa là tồn tại các số nguyên dương N, p sao cho với mọi $i \geq N$ thì $a_{i+p} = a_i$. Số p nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện trên được gọi là độ dài của chu kỳ. Mọi số p thỏa mãn điều kiện trên đều là bội số của độ dài chu kỳ. Số a_i với $i \geq N$ được gọi là nằm trong phần tuần hoàn (trong biểu diễn thập phân) của α. Chẳng hạn, số $\frac{2}{9} = 0,22222\ldots$ có độ dài chu kỳ là 1 và phần tuần hoàn bắt đầu ngay sau dấu phẩy, trong khi đó $\frac{3227}{5550} = 0,58144144144\ldots$ có độ dài chu kỳ 2 và phần tuần hoàn bắt đầu từ vị trí thứ ba sau dấu phẩy. Vì 0 và 9 không xuất hiện trong các biểu diễn thập phân nên các số α, z_m và s_n là vô tỷ hoặc tuần hoàn.

Gọi chỉ số của chữ số trong biểu diễn thập phân của α tại dòng r cột s như trong hình là $b(r,s)$, chẳng hạn $b(2,2) = 3$ và $b(3,5) = 23$. Như vậy,

$$z_m = 0, a_{b(m,1)}a_{b(m,2)}a_{b(m,3)}a_{b(m,4)}\cdots$$
$$s_n = 0, a_{b(1,n)}a_{b(2,n)}a_{b(3,n)}a_{b(4,n)}\cdots$$



Hình 6: Hàng và cột trong biểu diễn của α.

Không khó để thấy

$$b(1,s) = \begin{cases} s^2 & \text{nếu } s \text{ lẻ,} \\ (s-1)^2+1 & \text{nếu } s \text{ chẵn.} \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$b(r,s) = \begin{cases} s^2-(r-1) & \text{nếu } s \text{ lẻ và } s \geq r, \\ (s-1)^2+r & \text{nếu } s \text{ chẵn và } s \geq r. \end{cases} \quad (3)$$

Tương tự,

$$b(r,1) = \begin{cases} (r-1)^2+1 & \text{nếu } r \text{ lẻ,} \\ r^2 & \text{nếu } r \text{ chẵn} \end{cases}$$

và

$$b(r,s) = \begin{cases} (r-1)^2+s & \text{nếu } r \text{ lẻ và } r \geq s, \\ r^2-(s-1) & \text{nếu } r \text{ chẵn và } r \geq s. \end{cases} \quad (4)$$

Như vậy, nếu cố định r thì $b(r,s)$ là hàm tăng chặt theo s khi $s \geq r$. Tương tự, nếu s cố định thì $b(r,s)$ là hàm tăng chặt theo r khi $r \geq s$.

a. Giả sử rằng α là số hữu tỷ. Khi đó, tồn tại cặp số (N,p) sao cho với mọi $i \geq N$ và $K \in \mathbb{N}$ ta có $a_{i+K.p} = a_i$. Ta sẽ chứng minh rằng z_m và s_n là các số tuần hoàn với độ dài chu kỳ là ước số của $2p$.

Thật vậy, với dòng thứ m, gọi $s(m)$ là chỉ số của cột nằm bên phải cột thứ m (do đó $s(m) \geq m$) sao cho $a_{b(m,s(m))}$ nằm trong phần tuần hoàn của α. Số $s(m)$ như vậy tồn tại bởi tính tăng chặt của hàm $b(r,s)$ theo s khi r cố định và $s \geq r$. Vì s và $s+2p$ có cùng tính chẵn lẻ nên từ (3) ta có với mọi $s \geq s(m)$:

$$
\begin{aligned}
&b(m,s+2p) - b(m,s)\\
&= \begin{cases} (s+2p)^2 - s^2 & \text{nếu } s \text{ lẻ,}\\ (s+2p-1)^2 - (s-1)^2 & \text{nếu } s \text{ chẵn.}\end{cases}\\
&= \begin{cases} 2p.(2s+2p) & \text{nếu } s \text{ lẻ,}\\ 2p.(2s+2p-2) & \text{nếu } s \text{ chẵn.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

Hiệu số này luôn dương và là bội của p, do đó $a_{b(m,s+2p)} = a_{b(m,s)}$ với mọi $s \geq s(m)$. Vậy ta đã chứng minh rằng tồn tại cặp số nguyên dương $(s(m), 2p)$ sao cho $a_{b(m,s+2p)} = a_{b(m,s)}$ với mọi $s \geq s(m)$. Nói cách khác, z_m là số tuần hoàn với độ dài chu kỳ là ước của $2p$ với mọi số nguyên dương m.

Bằng lập luận tương tự, với mỗi n, tồn tại số nguyên dương $r(n) \geq n$ sao cho với mọi $r \geq r(n)$ thì hiệu số $b(r+2p,n) - b(r,n)$ luôn là một bội số dương của $2p$. Do đó, $a_{b(r+2p,n)} = a_{b(r,n)}$. Vậy s_n là số hữu tỷ với chu kỳ tuần hoàn có độ dài là một ước của $2p$ với mọi số nguyên dương n.

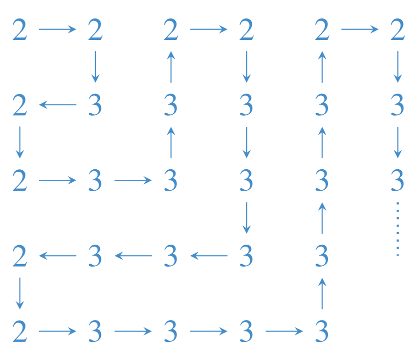
b. Để chứng minh chiều ngược lại của khẳng định (a) là sai, ta chỉ cần chỉ ra một số vô tỷ α sao cho tất cả các số z_m và s_n là hữu tỷ. Thật vậy, chọn

$$
\begin{aligned}
&\alpha = \alpha_0\\
&= 0,22\,3\,22\,333\,22\,33333\,22\,3333333\,22\,\ldots
\end{aligned}
$$

với số 2 nằm trên hàng và cột đầu tiên còn số 3 nằm ở các vị trí còn lại như trong Hình 7. Nói cách khác,

$$
a_i = \begin{cases} 2 & \text{khi } i = k^2, k^2+1, \text{ với } k \in \mathbb{N},\\ 3 & \text{ở các vị trí còn lại.}\end{cases}
$$

Dễ thấy rằng $z_1 = s_1 = 0,222222\ldots = \frac{2}{9}$ và $z_m = s_n = 0,233333\ldots = \frac{7}{30}$ là các số hữu tỷ với mọi $m,n \geq 2$. Mặt khác, nằm giữa $a_{k^2+1} = 2$ và $a_{(k+1)^2} = 2$ có đúng $2k-1$ số 3. Vì k có thể lớn tùy ý, không tồn tại cặp (N,p) sao cho $a_{i+p} = a_i$ với mọi $i \geq N$. Do đó α là số vô tỷ.



Hình 7: Biểu diễn thập phân của α_0.

GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày lời giải của các bài toán trong kỳ thi Olympic Toán học trẻ của Áo năm 2022 đăng trong số báo 6/2022.

OC43. Người ta muốn lát kín một bảng ô vuông kích thước 2×13 (2 hàng, 13 cột) bằng các tấm bìa kích thước 1×2 và 1×3 sao cho các tấm bìa không được chồng lên nhau hay phủ ra ngoài bảng. Có bao nhiêu cách lát nếu ta được phép xoay các tấm bìa nhưng cạnh dài của tất cả các tấm đều phải song song với nhau? (số lượng mỗi tấm không hạn chế).

Lời giải. Theo giả thiết trong đầu bài, ta chỉ cần xét 2 trường hợp:

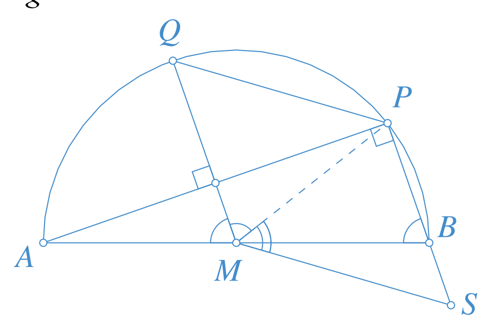
Trường hợp 1: các tấm bìa đều xếp thẳng đứng. Như vậy chỉ có thể dùng các tấm 1×2 và trường hợp này chỉ có đúng 1 cách lát.

Trường hợp 2: các tấm bìa đều xếp nằm ngang. Trước tiên ta đếm số cách lát một hàng ngang gồm 13 ô vuông. Gọi x là số tấm độ dài 2 và y là số tấm độ dài 3 thì $2x + 3y = 13$. Ta dễ dàng thấy phương trình có 2 nghiệm nguyên không âm là $(x, y) = (2, 3)$ và $(x, y) = (5, 1)$. Với trường hợp $(x, y) = (2, 3)$ ta có 5 tấm và một cách lát sẽ được xác định duy nhất bởi thứ tự các tấm trên hàng ngang. Như vậy trong trường hợp này, số cách lát bằng số cách chọn ra 2 vị trí đặt các tấm 1×2 trong số 5 vị trí và bằng $\binom{5}{2} = 10$. Lý luận tương tự, trường hợp $(x, y) = (5, 1)$ có $\binom{6}{5} = 6$ cách lát. Tổng cộng ta có 16 cách lát một hàng ngang. Do đó, theo quy tắc nhân, trong trường hợp 2 ta có $16^2 = 256$ cách lát.

Tổng cộng cả hai trường hợp, ta nhận được đáp số là 257 cách lát thỏa mãn yêu cầu trong bài.

OC44. Cho đoạn thẳng AB với trung điểm M. Dựng nửa đường tròn tâm M, đường kính AB. Cho P là một điểm trên nửa đường tròn (P khác với A, B) và Q là trung điểm của cung AP. Gọi giao điểm của đường thẳng BP với đường thẳng đi qua M song song PQ là S. Chứng minh rằng $PM = PS$.

Lời giải.



Vì Q là trung điểm của cung AP nên MQ vuông góc với AP. Vì đường thẳng BP cũng vuông góc với AP, nên suy ra rằng hai đường thẳng MQ và BP song song với nhau. Hơn nữa, theo giả thiết MS và PQ song song với nhau nên tứ giác là $MSPQ$ là hình bình hành. Do đó $PS = QM = PM$, vì QM, PM là bán kính đường tròn. Ta nhận được điều phải chứng minh.

OC45. Tìm tất các các số nguyên tố p, q và r thỏa mãn $p + q^2 = r^4$.

Lời giải. Ta có thể viết lại đẳng thức trong đầu bài dưới dạng $p = r^4 - q^2 = (r^2 - q)(r^2 + q)$. Vì p là số nguyên tố nên từ đẳng thức trên ta suy ra $r^2 - q = 1$ và $r^2 + q = p$. Từ $r^2 - q = 1$ ta có $q = r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$. Vì q là số nguyên tố nên ta lại có $r - 1 = 1$ hay $r = 2$ và $q = 3$. Do $r^2 + q = p$ ta có $p = 7$.

Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc ba bài toán trong cuộc thi Cúp Toán học Châu Âu năm 2022. Đây là một cuộc thi toán dành cho học sinh THPT và cuối cấp THCS được tổ chức bởi Hiệp hội Tài năng Toán học Trẻ mang tên Marin Getaldić của Croatia.

OC52. Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn: tồn tại ba ước dương a, b, c của n, với $a > b > c$, sao cho ba số $a^2 - b^2, b^2 - c^2, a^2 - c^2$ cũng là các ước của n.

OC53. Cho tam giác nhọn ABC với $BC < AC$. Giả sử đường tròn τ nội tiếp tam giác ABC có tâm I và tiếp xúc với BC, AC lần lượt tại D, E. Lấy điểm M nằm trên đường tròn τ sao cho BM song song với DE và hai điểm M, B nằm về cùng một phía của đường phân giác góc BCA. Gọi F và H lần lượt là giao điểm (khác M) của τ với BM và CM. Gọi J là một điểm trên đường thẳng AC sao cho JM song song với EH. Gọi K là giao điểm (khác F) của JF với τ. Chứng minh hai đường thẳng ME và KH song song.

OC54. Cho $n \geq 3$ là số nguyên dương. Alice và Bob chơi một trò chơi trong đó họ thay phiên nhau tô màu các đỉnh của đa giác đều n cạnh. Alice đi đầu tiên. Cả hai người chơi bắt đầu trò chơi với 0 điểm. Trong mỗi lượt, người chơi chọn một đỉnh V chưa được tô màu và tô màu nó. Sau đó, họ cộng k điểm vào tổng số điểm của mình, trong đó k là số đỉnh nằm cạnh V đã được tô màu. (Như vậy, k sẽ có giá trị 0, 1 hoặc 2.) Trò chơi kết thúc khi tất cả các đỉnh đã được tô màu và người chơi nào có nhiều điểm hơn sẽ thắng. Xác định người chơi nào có chiến lược để luôn chiến thắng

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Cách 2: Ta sẽ dõi theo các Đối trọng – đó là hiệu số giữa số lượng câu trả lời "Có" và "Không" tại từng thời điểm. Quy ước tại thời điểm $t = 0$ là khi chưa có ai trả lời, $T = 1$ khi người đứng đầu dãy trả lời, ...$t = 500$ là thời điểm người cuối dãy trả lời.

Do tổng cộng có 250 câu trả lời "Có", 250 câu trả lời "Không", tại thời điểm ban đầu và thời điểm cuối, các Đối trọng này đều bằng 0. Với mỗi câu trả lời mới, Đối trọng sẽ thay đổi thêm hoặc bớt đúng 1 đơn vị. Các Đối trọng bằng 0 sẽ chia dãy 500 thổ dân thành các nhóm. Trong mỗi nhóm các Đối trọng có dấu không đổi.

$$0++++0--0\underbrace{------}_{\text{một nhóm}}0\ldots0$$

Những người Phụ hoạ luôn làm tăng giá trị tuyệt đối của các Đối trọng. Như vậy, để làm Đối trọng quay về 0, số các thổ dân sống theo nguyên tắc ở trong mỗi nhóm phải nhiều hơn hoặc bằng số những người Phụ hoạ. Điều này đúng cho mỗi nhóm, do đó cũng đúng cho toàn bộ cả 500 thổ dân của bộ lạc.

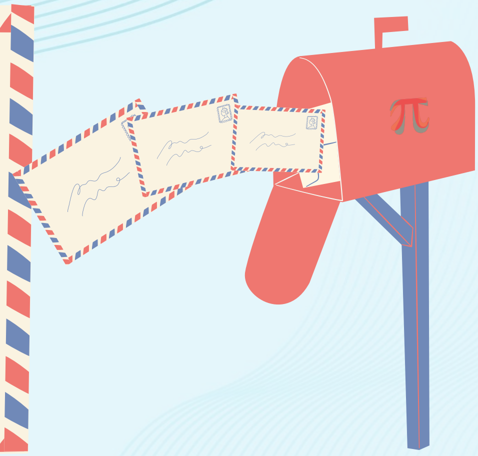
Sau đây ta đưa ra tình huống mà có đúng 250 người Phụ hoạ. Giả sử bộ lạc có 250 người theo nguyên tắc, gồm k người Thật thà và $250 - k$ người Nói dối (k tuỳ ý sao cho $125 < k < 250$), còn lại là 250 người Phụ hoạ.

Ta xếp k người Phụ hoạ đứng đầu tiên, với giả sử người đầu tiên trả lời "Không", cả k người này sẽ trả lời như nhau là "Không". Tiếp theo ta xếp k người Thật thà, họ đều trả lời là "Có". Bây giờ số trả lời "Không" và "Có" bằng nhau, nên $250 - k$ người Phụ hoạ sẽ được xếp tiếp theo đó với câu trả lời "Có" như nhau (giả sử người đầu tiên trong số $250 - k$ người này trả lời có). Còn lại là $250 - k$ người Nói dối với trả lời "Không" được xếp cuối hàng.

Đáp số: 250 người Phụ hoạ.

MỜI BẠN ĐỌC RA ĐỀ CHO PI

Chuyên mục Thách thức Toán học trân trọng mời các thầy cô giáo, các bạn học sinh, sinh viên đóng góp các bài toán hay do mình sáng tác hoặc sưu tầm.



YÊU CẦU ĐỐI VỚI BÀI TOÁN GỬI ĐĂNG

- Dành cho đối tượng là học sinh THCS hoặc THPT
- Có ý tưởng hay độc đáo trong lời giải.
- Đề bài sáng tác hoặc sưu tầm, được gửi kèm cùng lời giải. Đề bài chưa được công bố hay gửi công bố trên các tạp chí, báo toán bằng tiếng Việt.
- Với những bài toán khó, khuyến khích tác giả gửi thêm các bài phân tích về ý tưởng, phương pháp tư duy, mối liên hệ với các bài toán khác để đăng trong chuyên mục Học cùng Pi.
- Đối với đề sưu tầm cần ghi rõ nguồn gốc (trên các sách báo, tạp chí hay trong các kỳ thi). Đối với các bài toán được phát triển từ một bài toán khác, cũng khuyến khích tác giả giới thiệu bài toán gốc.

Các bạn học sinh, sinh viên có đề bài trên chuyên mục Thách thức Toán học sẽ nhận được giấy khen từ Tạp chí Pi.

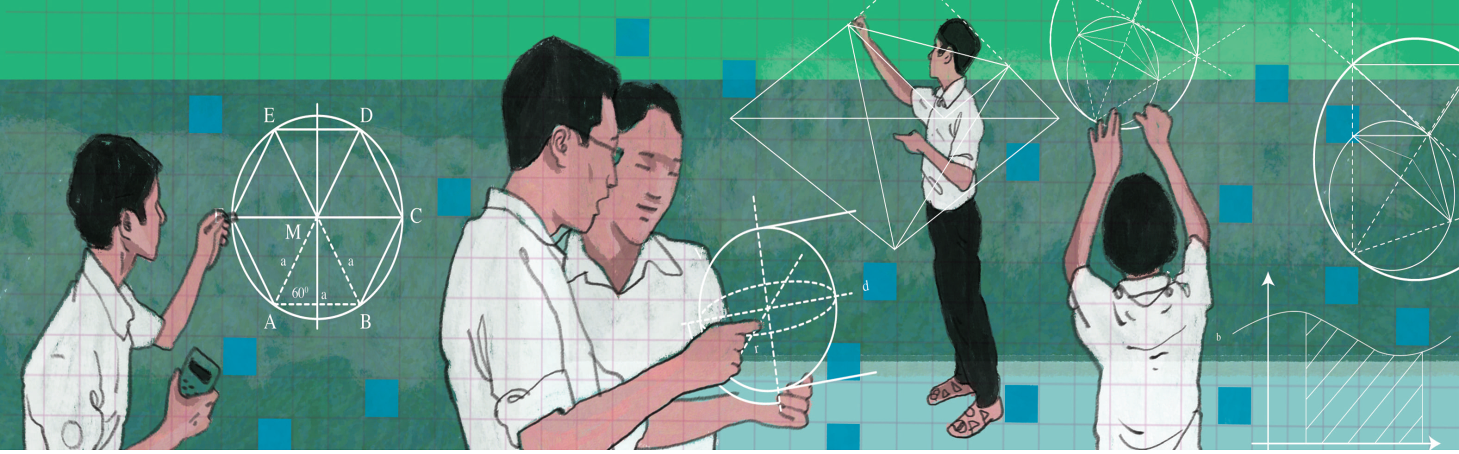
Thông tin Tòa soạn

Gửi bài: bbt@pi.edu.vn

Giao dịch: vanphong01.pi@gmail.com

Hotline: 024.3215.1407

Website: www.pi.edu.vn



GIẢI CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ VỚI PHƯƠNG THỨC THỪA VÀ THIẾU

NGUYỄN HOÀNG VŨ[1]

Lưu Huy là một nhà toán học Trung Quốc nổi tiếng với cuốn sách *Cửu chương toán thuật*. Trong đó, chương số 7 mang tên "*Thừa và thiếu*" trình bày một phương pháp thú vị để giải các bài toán thực tế với nhiều ví dụ từ dễ đến khó. Bài viết này giới thiệu toàn bộ các bài tập trong chương này, trừ một số bài cuối là các bài toán tìm lời giải dạng gần đúng.

Lưu Huy (220 – 280.)

Bài toán số 1. Một nhóm người góp tiền mua hàng. Nếu mỗi người bỏ ra 8 đồng thì thừa 3 đồng. Nếu mỗi người bỏ ra 7 đồng thì thiếu 4 đồng. Hỏi có bao nhiêu người và họ bỏ ra bao nhiêu tiền?

Phương pháp: Để giải bài toán này, trước hết ta cần thiết lập công thức cho bài toán tổng quát:

Mỗi người bỏ ra A đồng thì mua được toàn bộ lượng hàng và thừa ra a đồng.

Mỗi người bỏ ra B đồng thì khi mua toàn bộ lượng hàng sẽ thiếu b đồng.

Phương pháp giải được tiến hành sao cho lượng tiền thừa và lượng tiền thiếu ở hai phát biểu bằng nhau. Ta lập luận như sau:

Mỗi người bỏ ra Ab đồng thì mua được b lần lượng hàng và thừa ra ab đồng.

Mỗi người bỏ ra aB đồng thì khi mua a lần lượng hàng và thiếu ab đồng.

Khi cộng vào, lượng thừa và thiếu bằng nhau sẽ triệt tiêu hết, ta được:

Mỗi người bỏ ra $Ab+aB$ đồng thì mua được vừa đủ $(a+b)$ lần lượng hàng.

Do đó số tiền thực tế mỗi người bỏ ra khi mua hàng là: $\dfrac{Ab+aB}{a+b}$ (1).

Ta nhận thấy khi số tiền mỗi người bỏ ra thay đổi từ A thành B thì tổng số tiền tất cả mọi người bỏ ra sẽ thay đổi từ thừa a thành thiếu b, tức là giảm đi một lượng $a+b$. Do đó, số

[1] *Hà Nội.*

người là:

$$m = \frac{a+b}{A-B}.$$

Giá trị của lượng hàng sẽ bằng số tiền mỗi người bỏ ra nhân với số người, tức là:

$$\frac{Ab+aB}{a+b} \cdot \frac{a+b}{A-B} = \frac{Ab+aB}{A-B}.$$

Lưu Huy cũng trình bày một cách giải thứ hai cho dạng toán này. Trong đó, số người được tính theo lập luận như trên còn giá trị hàng hóa được tính trực tiếp theo $n \cdot A - a$ hoặc $n \cdot B - b$.

Cách giải thứ hai này ngắn hơn nhưng cách giải thứ nhất sẽ trợ giúp chúng ta giải được những bài toán phức tạp hơn tiếp theo.

Việc cân bằng giữa đại lượng thừa và đại lượng thiếu là đặc trưng cơ bản của phương pháp này. Tên gọi đầy đủ của nó trong sách là "doanh bất túc thuật" (doanh: tràn đầy, bất túc: không đủ, thuật: phương pháp).

Đáp số: Với dữ liệu của bài toán số 1, ta có $A = 8, a = 3, B = 7, b = 4$. Thay vào công thức ta được số tiền mỗi người bỏ ra là $\frac{53}{7}$, số người là 7, giá trị hàng hóa là 53.

Bài toán số 2. Cùng mua gà, mỗi người trả 9 thì thừa 11, mỗi người trả 6 thì thiếu 16. Hỏi có bao nhiêu người và gà giá bao nhiêu.

Đáp số: Làm tương tự bài số 1, ta được đáp án là 9 người và giá trị số gà là 70.

Bài số 3 và bài số 4 tương tự bài số 1 và bài số 2 nhưng có sự xuất hiện của phân số. Bạn đọc có thể tự giải. Lưu Huy còn đưa ra phương pháp kết hợp việc quy đồng mẫu số vào trong quá trình giải, nhưng cách làm này phức tạp hơn và không quá cần thiết do học sinh đã quen thuộc với tính toán phân số nên sẽ không trình bày ở đây.

Bài toán số 3. Mỗi người bỏ ra $\frac{1}{2}$ đồng thì thừa 4. Mỗi người bỏ ra $\frac{1}{3}$ đồng thì thiếu 3. Hỏi có bao nhiêu người và giá mua là bao nhiêu?

Bài toán số 4. Hôm nay người ta cùng mua bò. Nếu cứ mỗi 7 hộ trả chung 190 thì thiếu 330. Nếu mỗi 9 hộ trả chung 270 thì thừa 30. Hỏi có bao nhiêu hộ và giá bò là bao nhiêu?

Bài toán số 5. Hôm nay người ta cùng mua vàng. Mỗi người bỏ ra 400 thì thừa 3400. Mỗi người bỏ 300 thì thừa 100. Hỏi có bao nhiêu người và giá vàng là bao nhiêu?

Phương pháp:

Bắt đầu từ bài toán:

Mỗi người bỏ ra A đồng thì mua được toàn bộ lượng hàng và thừa ra a đồng.

Mỗi người bỏ ra B đồng thì khi mua toàn bộ lượng hàng sẽ thừa b đồng.

Lập luận như sau:

Mỗi người bỏ ra Ab đồng thì mua được b lần lượng hàng và thừa ra ab đồng.

Mỗi người bỏ ra aB đồng thì khi mua a lần lượng hàng và thừa ab đồng.

Thay vì cộng như trong bài số 1 thì ta tiến hành trừ để hai lượng tiền thừa ra triệt tiêu nhau. Bạn đọc có thể tự hoàn thiện các công thức còn thiếu để cho ra đáp số.

Đáp số: 33 người, giá vàng là 3800.

Bài toán số 6. Hôm nay người ta cùng mua cừu. Nếu mỗi người trả 5 thì thiếu 45. Nếu mỗi người trả 7 thì thiếu 3. Hỏi có bao nhiêu người và giá cừu là bao nhiêu.

Phương pháp: Bài toán thiếu và thiếu này tương tự như bài toán thừa và thừa, bạn đọc có thể tự giải.

Bài toán số 7. Hôm nay người ta cùng mua chó. Nếu mỗi người trả 5 thì thiếu 90. Nếu mỗi người trả 50 thì vừa đủ. Hỏi có bao nhiêu người và giá chó là bao nhiêu?

Phương pháp: Bài toán thiếu và đủ này có thể được giải tương tự bài toán thừa thiếu theo cách 2 của bài số 1, với $a = 0$. Giá trị của số hàng có thể được tính trực tiếp theo công thức: $n \cdot B$.

Đáp số: Số người là $\dfrac{90}{50-5} = 2$. Giá chó là $2 \cdot 50 = 100$.

Bài toán số 8. Hôm nay người ta cùng mua lợn. Nếu mỗi người trả 100 thì thừa 100. Nếu mỗi người trả 90 thì vừa đủ. Hỏi có bao nhiêu người và giá lợn là bao nhiêu?

Phương pháp: Bài toán thừa và đủ cũng tương tự bài toán thiếu và đủ, khi giải ta cho $b = 0$.

Đáp số: Số người là $\dfrac{100}{100-90}$. Giá lợn là $10 \cdot 90 = 900$.

Bài toán số 9. Giả sử có một lượng gạo đã xát trong một cái thùng 10 đấu, không rõ là có bao nhiêu gạo. Đổ đầy thùng bằng kê chưa xát. Sau khi xát được 7 đấu cả gạo lẫn kê đã xát. Biết mỗi đấu kê chưa xát sau khi xát được 6 thăng (đơn vị đo thể tích: 1 đấu = 10 thăng). Hỏi ban đầu có bao nhiêu đấu gạo.

Phương pháp: Tuy phát biểu bài toán tương đối phức tạp, nhưng bài toán này có thể đưa về dạng thừa và thiếu, thừa và thừa hoặc thiếu và thiếu. Ta cần chọn hai giá trị bất kỳ cho số gạo ban đầu trong thùng để tiến hành thiết lập các giả định.

Giả sử ban đầu có 1 đấu gạo xát rồi trong thùng, vậy có 9 đấu kê chưa xát. Sau khi xát được 1 đấu gạo và 5 đấu 4 thăng kê. Tức là thiếu 6 thăng so với thực tế.

Giả sử ban đầu có 3 đấu gạo xát rồi trong thùng, vậy có 7 đấu kê chưa xát. Sau khi xát được 3 đấu gạo và 4 đấu 2 thăng kê. Tức là thừa 2 thăng so với thực tế.

Quy tất cả về thăng, ta được bài toán thừa và thiếu với $A = 30, a = 2, B = 10, b = 6$.

Đáp số: Dùng công thức để tính số tiền mỗi người phải đóng trong bài số 1, ta được số gạo ban đầu là: $\dfrac{30 \times 6 + 10 \times 2}{2+6}$ thăng tức 2 đấu rưỡi.

Nhận xét: Trong bài toán số 1, cách giải đầu tiên sử dụng công thức (1) có vẻ phức tạp hơn nhưng nó cho phép chúng ta tìm nhanh đáp án cho những bài toán phức tạp như bài toán số 9 này. Tùy vào các giá trị giả định mà ta thu được một trong ba dạng bài toán thừa và thiếu, thừa và thừa hoặc thiếu và thiếu.

Mở rộng: Thuật toán của Lưu Huy trong bài toán này thực tế là phương pháp nội suy cho hàm số tuyến tính $y = ax + b$. Trong một số trường hợp, a và b không xuất hiện trong đầu bài nhưng ta có thể tính được y khi biết x theo một phương thức khác nào đó như trên. Ta có thể chọn hai giá trị bất kỳ x_1, x_2 của x, tính các giá trị y_1, y_2 tương ứng rồi dùng nội suy để xác định giá trị x sao cho $y = 0$ mà không cần tính trực tiếp a và b. Ví dụ trong bài số 9 trên, x là số đấu gạo ban đầu còn y là mức độ chênh lệch giữa số đấu lương thực còn lại sau khi xát của trường hợp giả định so với thực tế. Trong khi đó, phương pháp giả thiết tạm mà nhiều sách tham khảo cho học sinh giỏi giới thiệu để giải các bài toán như bài *vừa gà vừa chó* dựa trên việc tìm một nghiệm thỏa mãn phương trình thứ nhất rồi thay đổi các biến nhưng vẫn giữ cho điều kiện này không đổi cho đến khi thỏa mãn điều kiện thứ hai. Với những trường hợp phức tạp hơn như bài số 9, việc suy luận tìm ra áp dụng phương pháp giả thiết tạm là tương đối khó trong khi phương pháp thừa và thiếu có thể được áp dụng một cách trực tiếp. Việc chọn hai giá trị nào để sử dụng cho phương pháp thừa và thiếu là bất kỳ. Ta cũng có thể sử dụng cách chọn giá trị của phương pháp giả thiết tạm (tất cả 36 con vật toàn là gà hoặc toàn là chó trong bài *vừa gà vừa chó*): giả sử ban đầu 10 đấu toàn là gạo, sau khi xát vẫn có 10 đấu, thừa 3 đấu so với thực tế; lại giả sử ban đầu tất cả là kê, sau khi xát được 6 đấu, thiếu 1 đấu so với thực tế. Khi đó: $A = 100, a = 30, B = 0, b = 10$. Cần chú ý rằng vào thời kỳ của Lưu Huy, toán học cổ Trung Quốc chưa có số 0 đứng riêng biệt nên cách chọn như trên không xuất hiện trong chương 7 của *Cửu chương toán thuật*.

> Về mặt lịch sử, phương pháp sử dụng hai dự đoán không chính xác để từ đó tìm kết quả đúng cũng xuất hiện trong các tài liệu Arab thời Trung Cổ, với tên gọi al–khatā'ayn (sai kép). Qua các công trình của Fibonacci, phương pháp này cũng xuất hiện ở châu Âu thế kỷ 13 cũng với tên gọi này.

Bài toán chuyển động cũng có thể quy về dạng toán thừa và thiếu bằng cách giả định như bài số 9. Những bài toán này có công thức giải trực tiếp thuận tiện hơn nhiều nhưng vẫn được trình bày ở đây làm tài liệu tham khảo cho bạn đọc (bài số 10 và bài số 11).

Bài toán số 10. Bức tường cao 9 thước. Từ nóc tường, cây dưa mọc xuống dưới mỗi ngày 7 tấc (đơn vị đo độ dài: 1 thước = 10 tấc). Từ chân tường, cây mướp mọc lên mỗi ngày 1 thước. Hỏi sau bao nhiêu ngày chúng gặp nhau, và khi đó mỗi dây dài (cao) bao nhiêu?

Phương pháp: Ta cũng chọn hai giá trị thời gian bất kỳ để xét tính thừa thiếu.

Giả sử thời gian hai cây đã mọc là 1 ngày. Mỗi cây lần lượt mọc được 7 tấc và 1 thước, tổng cộng là 17 tấc, thiếu 73 tấc so với chiều cao của tường.

Giả sử thời gian hai cây đã mọc là 10 ngày. Mỗi cây lần lượt mọc được 70 tấc và 10 thước, tổng cộng là 170 tấc, thừa 80 tấc so với chiều cao của tường.

Ta được bài toán thừa và thiếu với $A = 1, a = 73, B = 10, b = 80$.

Đáp số: Thời gian gặp nhau của hai cây là $\dfrac{1 \times 80 + 10 \times 73}{73 + 80} = 5\dfrac{5}{17}$ ngày.

Bài toán số 11. Cây thứ nhất ngày đầu tiên mọc được 3 thước. Cây thứ hai ngày đầu tiên mọc được một thước. Sau đó, mỗi ngày cây thứ nhất mọc một nửa so với ngày đầu còn cây thứ hai mọc gấp đôi ngày đầu. Hỏi sau bao lâu hai cây cao bằng nhau?

Phương pháp: Tương tự bài số 10 nhưng ta đem so khoảng cách đã mọc của cây thứ hai với cây thứ nhất. Nếu nhỏ hơn thì là thiếu, nếu dài hơn thì là thừa. Bạn đọc có thể tự giải theo hướng này.

Đáp số: $2\dfrac{6}{13}$ ngày.

Bài số 12. Giả sử rằng một đấu rượu tốt có giá 50 đồng còn một đấu rượu thường có giá 10 đồng. Một người mua tổng cộng hai đấu rượu với giá 30 đồng. Hỏi có bao nhiêu rượu tốt và rượu thường đã được mua.

Phương pháp: Bài này tương tự bài số 9. Ta chọn hai giá trị cho lượng rượu tốt trong tổng số 2 đấu rượu (ví dụ 1 đấu và 2 đấu) rồi so tổng số tiền với số tiền rượu trong thực tế (30 đồng).

Đáp số: 2 thăng rưỡi rượu tốt, 1 đấu 7 thăng rưỡi rượu thường.

Bài số 13. Giả sử rằng 5 cái bình lớn và 1 cái bình nhỏ chứa được 3 hộc, 1 cái bình lớn và 5 cái bình nhỏ chứa được 2 hộc. Hỏi mỗi bình lớn hoặc bình nhỏ chứa được bao nhiêu. (Chú thích: 1 hộc = 10 đấu).

Phương pháp: Lưu Huy đưa bài toán này về dạng thừa và thiếu như sau:

Giả sử bình lớn chứa được 5 đấu, bình nhỏ cũng sẽ là 5 đấu (do 5 lớn + 1 nhỏ chứa được 3 hộc). Khi đó 1 nhỏ + 5 lớn sẽ chứa được 3 hộc, nhiều hơn 10 đấu so với thực tế (2 hộc).

Tương tự, nếu bình lớn chứa được 5 đấu rưỡi (tức 5 đấu 5 thăng) thì 1 nhỏ + 5 lớn sẽ bị thiếu 2 đấu so với thực tế (2 hộc).

Bạn đọc có thể tự giải tiếp phần sau.

Đáp số: Bình lớn chứa được $\dfrac{13}{24}$ hộc. Bình nhỏ chứa được $\dfrac{7}{24}$ hộc.

Bài số 14. Giả sử có 3 đấu sơn. Cứ 3 thăng sơn đổi được 4 thăng dầu, cứ 4 thăng dầu trộn được với 5 thăng sơn. Từ lượng sơn ban đầu, lấy ra một phần để đổi dầu đủ để trộn hết với lượng sơn còn lại. Hỏi phải lấy bao nhiêu sơn để đổi, thu được bao nhiêu dầu và trộn với bao nhiêu sơn?

Phương pháp: Tương tự bài số 9, giả sử hai giá trị khác nhau cho lượng sơn đem đi đổi dầu rồi xét khi trộn thì sơn bị thừa hay thiếu.

Đáp số: Lấy 1 đấu $\frac{11}{4}$ thăng sơn đi đổi.

Các bài số 15, 16, 17, việc quy về dạng thừa và thiếu có thể tiến hành tương tự các bài trước, bạn đọc có thể tiến hành tự giải.

Bài số 15. Giả sử một khối ngọc hình lập phương có cạnh 1 tấc thì nặng 7 lượng, một khối đá hình lập phương có cạnh 1 tấc thì nặng 6 lượng. Giả sử ta có một khối đá lập phương cạnh 3 tấc, bên trong có ngọc. Tổng khối lượng là 11 cân (1 cân bằng 16 lượng). Hỏi ngọc nặng bao nhiêu, đá nặng bao nhiêu?

Bài số 16. Một mẫu ruộng tốt giá 300, 7 mẫu ruộng xấu giá 500. Người ta mua một khoảnh 100 mẫu với giá 1 vạn đồng. Hỏi có bao nhiêu ruộng tốt và bao nhiêu ruộng xấu?

Bài số 17. Giả sử 9 thanh vàng nặng bằng 11 thanh bạc. Sau khi đổi 1 thanh vàng thành 1 thanh bạc, bạc nặng hơn vàng là 13 lượng. Hỏi ban đầu mỗi loại nặng bao nhiêu?

Các bài toán thừa và thiếu cũng xuất hiện nhiều trong các tài liệu Hán Nôm cổ của Việt Nam. Nhiều bài toán từ các nguồn này đã được PGS. TS. Tạ Duy Phượng giới thiệu trong các số $188+189$, $192+193$, và $209+210$ của tạp chí Toán Tuổi thơ 2. Bạn đọc có thể tìm những số này để tham khảo thêm. Các bài toán trong bài viết cũng đã được tác giả giảng dạy cho lớp K3 của câu lạc bộ Toán học UMC do Pi và Viện Toán học phối hợp tổ chức. Hiện nay, *Cửu chương toán thuật* đã có các bản dịch ra nhiều ngôn ngữ nhưng chưa có bản tiếng Việt. Những nội dung khác có giá trị cho việc dạy và học toán từ cuốn sách này sẽ tiếp tục được Pi giới thiệu với độc giả khi có điều kiện.

Tài liệu tham khảo

[1] Boman, E. C. (2009). False Position, Double False Position and Cramer's Rule. *The College Mathematics Journal*, 40(4), 279 – 283. https://doi.org/10.4169/193113409x458732

[2] Schwartz, R. K. (2004). *Issues in the Origin and Development of Hisāb al-Khatā'ayn (Calculation by Double False Position)*. Presented at the Eighth Maghrebian Colloquium on the History of Arab Mathematics (COMHISMA8), Radès, Tunisia.

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Đố vui

Buratino có thể chia 15 đồng xu của mình thành 3 nhóm với số lượng xu tương ứng là $7,4,4$; $5,5,5$; $3,6,6$ hoặc $1,7,7$.

Ở lần cân thứ nhất, Buratino đặt 2 nhóm xu có số lượng bằng nhau lên 2 đĩa cân. Xét trường hợp cân thăng bằng. Khi này tất cả các đồng xu trong 2 nhóm đó là các đồng xu thật và đồng xu giả nằm ở nhóm còn lại. Sau đó, ở lần cân thứ hai, Buratino đặt nhóm đồng xu chứa đồng xu giả lại lên 1 chiếc đĩa và đặt lên chiếc đĩa còn lại một số đồng xu (lấy từ 2 nhóm chỉ đã cân) bằng với số đồng xu của nhóm chứa đồng xu giả. Như vậy, nếu nhóm chứa đồng xu giả nặng hơn thì đồng xu giả là của Basile còn nếu nhẹ hơn thì là của Alice. Xét trường hợp cân không thăng bằng ở lần cân đầu tiên. Khi này tất cả các đồng xu ở nhóm còn lại là thật. Ở lần cân thứ 2, Buratino bỏ các đồng xu ở bên nhẹ hơn ra khỏi đĩa và chia các đồng xu ở bên nặng hơn

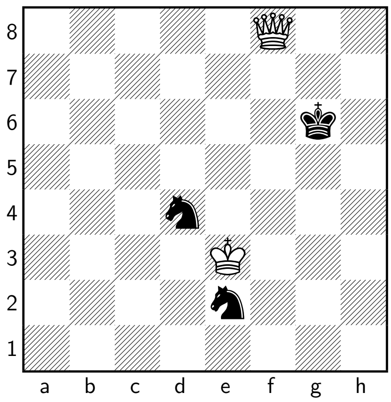
(Xem tiếp trang 39)

HẬU CHỐNG CÁC QUÂN NHẸ (Phần III)

BÙI VINH[1]

3. *Hậu chống hai mã*

Ví dụ 3: F Dedrie



Hình 7.

Khác với cặp Tượng, Hậu chống cặp mã thường dễ dàng giành chiến thắng. Tuy nhiên bên có Hậu cần phải thận trọng đối với các nước bắt đôi của Mã **1.Hf1! Vg7 2.Hf2 Vg6 3.Hf8!** [Cặp mã đen đang giữ nhau khá chắc, trắng chủ động nhường nước đi để buộc đen phải di chuyển một trong hai con mã]

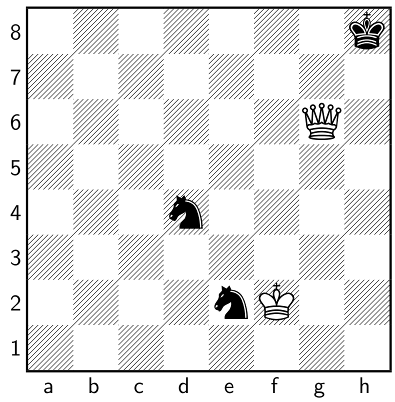
3...Vg5 [3...Vh7 4.Hf6 Vg8 5.Vf2 Vh7 6.Hg5 Vh8 7.Hg6!

Đen bắt buộc phải di chuyển mã và tất cả các nước đi đều dẫn đến mất mã; 3...Vh5 4.Hg8 Vh6 5.Vf2 Vh5 6.Hg7 Vh4 7.Hg6

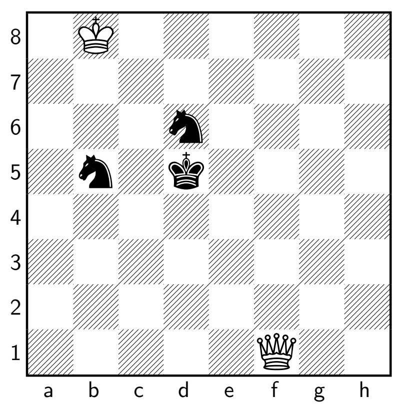
Đen lại không có nước đi nào tránh khỏi mất mã 7...Vh3? 8.Hh5#]

4.Hf7 Vh6 5.Hg8 Vh5 6.Vf2 Vh6 7.Hg4! Vh7 8.Hg5 Vh8 9.Hg6

NN 1945,



Hình 8.



Hình 9.

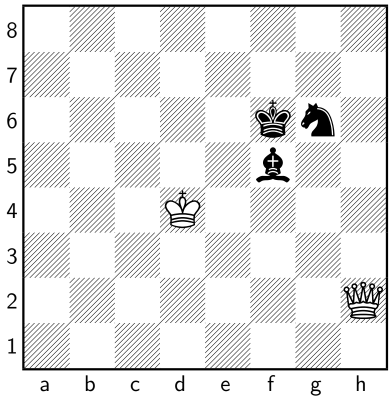
Trong một vài trường hợp đặc biệt khi mà cặp Mã liên kết với nhau nếu tạo ra một hàng rào để nhốt vua đối phương trong góc, bên có Hậu sẽ không thể giành chiến thắng.

[1] *Đại kiện tướng quốc tế.*

1.Hd3+ [1.Hf4 Vc5]

1...Vc5 2.He3+ Vd5 3.Hg5+ Vd4 4.Hf4+ Vd5 5.Hd2+ Vc5 6.Hg2 Vc4

Bài tập về nhà



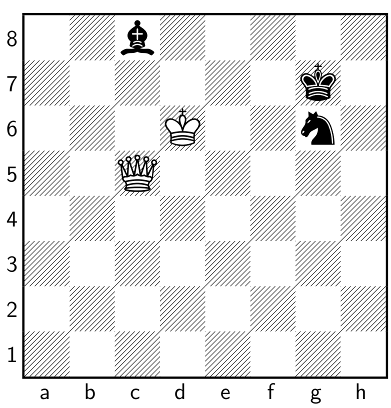
Hình 10.

Kế hoạch giành chiến thắng của Trắng là kiểm soát các ô màu đen, màu ô chỉ mã đen có thể kiểm soát.

1.Hd6+ Vg5 [Nếu 1...Te6 2.Ve4 Vf7 3.Hd4 Tc8 4.Hf2+ Vg7 5.Vd5 Vh6 6.Vd6 Tg4 7.Hc5 Vh7 8.Hg5 Tc8 9.Hh5+ Vg7 10.Hc5

Đen buộc phải di chuyển mã 10...Tb7 (*10...Ta6 11.Ha7+; 10...Tg4 11.Hd4+; 10...Th3 11.Hc3+*) 11.Hc7+]

2.Ve3! [Trắng tìm mọi cách để bắt buộc mã đen phải di chuyển]



Hình 11.

2...Vg4 [Nếu 2...Tg4 3.Ve4; 2...Tc2 3.Hc7 (*3.Hd8+ Vg4 4.Hd6 Vg5*) 3...Tf5 4.Hd8+ Vg4 5.Hf6 Tc2 (*5...Mh4 6.Hd4+ Vg5 7.Hf4+ Vh5 8.Hh2 Vg5 9.Hg3+ Tg4 10.Hf4+ Vh5 11.Hf6 Mg6 12.Vf2! Vh6 13.Vg3 Tc8 14.Hf3 Td7 15.Hd5 Tc8 16.Hd3 Tb7 17.Hd2+*) 6.Hf3+ Vg5 7.Hg2+]

3.Hf6 Mh4 [3...Tb1 4.Hf3+ Vg5 5.Hg2+ Vf6 (*5...Vh6 6.Hh1+*) 6.Hb2+]

4.Hd4+ Vg5 5.Hf4+ Vh5 6.Vd4 Tg4 7.Hc1 [Trắng đe dọa Ve5–f6]

7...Mg6 8.Ve4 [Bây giờ thì chỉ còn Tượng đen có thể di chuyển]

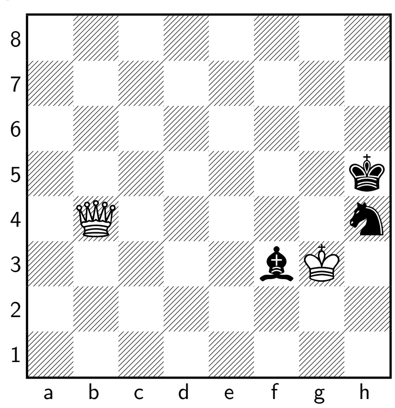
8...Te6 [Các phương án khác cũng không tốt cho đen 8...Td7 9.Hd1+ Tg4 10.Hd2 Te6 11.Hd6 Th3 12.Hc5+ Vh4 13.He3 Đen rất kho tránh khỏi mất quân 13...Vg4 14.He2+ Vh4 Đen cố gắng phối hợp giữa tượng và mã để tạo ra hàng rào ngăn vua trắng tiếp cận gần với vua đen. Tuy nhiên, đen khó tránh khỏi mất quân 15.Hd2 Tg4 16.Hh6+ Th5 17.Vf5 Me7+ 18.Ve5 Mg6+ 19.Vf6 + ; 8...Mh4 9.Ve5; 8...Vh4 9.Hh6+ Th5 10.Vf5 Me7+ 11.Ve6 Mg6 12.Vf6]

9.Hd2 Th3 10.Hh2 Vg4 11.Ve3! Đen lại bị "xung xoang"]

11...Mh4 12.Hg1+ Tg2 13.Vf2 Vh3 14.Hb1! Tf3 15.Hb8 [Trắng dọa chiếu hết ở g3]

15...Vg4 16.Hb4+ Vh5 [16...Vh3 17.Hf4]

17.Vg3!



Hình 12.

Đen mất quân và thua cờ.

1 – 0