LỊCH SỬ CỦA GIẢ THUYẾT WEIL*

J. A. DIEUDONNÉ

(Người dịch: Phạm Khoa Bằng)

Câu chuyện của "các giả thuyết Weil" là một ví dụ kỳ diệu của trí tưởng tượng toán học, và là một trong những thí dụ đáng ngạc nhiên nhất biểu lộ sự thống nhất cơ bản của toán học. Những ý tưởng cốt lõi dẫn tới chứng minh của chúng tới từ sáu người: E. Artin, F. K. Schmidt, H. Hasse, A. Weil, A. Grothendieck, và P. Deligne, trong khoảng năm mươi năm (1923 – 1973).

1. Số nghiệm của phương trình đồng dư

Một cách đủ thích hợp, câu chuyện, như mọi vấn đề trong lý thuyết số, bắt đầu từ Gauss. Trong công trình về luật thuận nghịch bình phương của mình, ông đưa ra cái ngày nay được gọi là tổng Gauss (phổ biến nhất là tổng $\sum_{x=0}^{p-1}\exp(2\pi i x^2/p)$ với p nguyên tố); để tính các tổng này, bằng một số lập luận sơ cấp, ông suy ra cần tính số nghiệm của các phương trình đồng dư có các dạng

$$\begin{aligned} &ax^3 - by^3 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ p),\\ &ax^4 - by^4 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ p),\\ &y^2 \equiv ax^4 - 1 \ (\mathrm{mod}\ p) \end{aligned} \qquad (1)$$

trong đó a, b là các số nguyên cố định không chia hết cho p, nghiệm (x, y) được xét theo đồng dư modulo p (như vậy các phương trình đồng dư (1) được xem như các phương trình trong trường $\mathbb{F}_p$); và p *chạy* trong một tập vô hạn các số nguyên tố; chúng ta đi tìm những biểu diễn *tiệm cận* (dưới dạng những hàm đơn giản của p) của số lượng các nghiệm. Một thời gian ngắn sau, Jacobi nhận xét rằng, ngược lại, bằng cách sử dụng các tính chất cơ bản của tổng Gauss, ta có thể thu được một đánh giá tốt về số nghiệm trong các trường hợp tổng quát hơn, ở đó các phương pháp sơ cấp trở nên cồng kềnh. Sau Jacobi, gần như không có nhiều tiến triển trong chủ đề này cho tới khi Hardy và Littlewood, trong khi nghiên cứu bài toán Waring để đưa ra các tính chất của "chuỗi kỳ dị", thấy rằng cần phải đưa ra một đánh giá tiệm cận cho số nghiệm của phương trình đồng dư

$$x_1^k + \dots + x_r^k \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p), \qquad (2)$$

trong đó p là một số nguyên tố chạy tới $+\infty$. Hai ông đã sử dụng phương pháp của Jacobi cho mục đích này; tổng quát hơn, năm 1949, cả Hua-Vandier và A. Weil đã độc lập chứng minh rằng phương pháp này có thể đánh giá số nghiệm N của những phương trình

$$a_0x_0^{k_0} + \dots + a_rx_r^{k_r} = 0 \ (a_0, \dots, a_r \neq 0) \qquad (3)$$

Xuất bản lần đầu trong: The Mathematical Intelligencer 10, Springer, Berlin Heidelberg New York (1975) và được trích lại trong [1] trong mọi *trường hữu hạn* $\mathbb{F}_q$ với $q = p^m$ phần tử; kết quả được đưa ra

$$N = q^r + O(q^{(r+1)/2}). \qquad (4)$$

Kết quả tương tự được đưa ra bởi Davenport (1931) và Mordell (1933) cho các phương trình dạng $y^m = P_n(x)$ trên $\mathbb{F}_p$, trong đó P_n là một đa thức bậc n; với một số giá trị m,n nhỏ, họ thu được các đánh giá có dạng $N = p + O(p^{\phi(m,n)})$ trong đó $1/2 < \phi(m,n) < 1$.

2. Về hàm Zêta

Hãy để chúng tôi nhắc lại các tính chất cổ điển của hàm zêta Riemann: nó xác định với $\mathscr{R}(s) > 1$ bởi chuỗi $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, và thỏa mãn phương trình Euler

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \qquad (5)$$

trong đó tích chạy trên tập tất cả các số nguyên tố. Riemann chứng minh rằng ζ có thể thác triển thành một hàm phân hình trên mặt phẳng phức với một cực duy nhất tại $s = 1$, và nếu đặt

$$\xi = \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s),$$

thì ξ là một hàm chỉnh hình trên toàn bộ mặt phẳng phức và thỏa mãn phương trình hàm $\xi(s) = \xi(1-s)$. Hơn nữa ông đề xuất *giả thuyết Riemann* (vẫn chưa được chứng minh) rằng mọi nghiệm của ξ nằm trên đường thẳng $\mathscr{R}(s) = 1/2$.

Một thời gian ngắn sau, Dedekind mở rộng lý thuyết của Riemann lên một trường số K (mở rộng hữu hạn của $\mathbb{Q}$), bằng cách định nghĩa $\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} (N\mathfrak{a})^{-s}$, trong đó $\mathfrak{a}$ chạy trên tất cả các ideal của vành $\mathfrak{o}$ các số đại số nguyên trong K, *chuẩn* $N\mathfrak{a}$ là số phần tử của vành $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$. Ông mở rộng công thức Euler thành

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - (N\mathfrak{p})^{-s})^{-1}, \qquad (6)$$

trong đó tích chạy trên tất cả các ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$ của $\mathfrak{o}$; rất nhiều năm sau Hecke chứng minh rằng ζ_K có thể thác triển thành một hàm phân hình và thỏa mãn một phương trình hàm tương tự như phương trình hàm Riemann cho ξ.

Một cách hình thức, ta thấy rằng phương trình (6) chỉ dùng hai tính chất của vành $\mathfrak{o}$: 1) $\mathfrak{o}$ là một vành Dedekind: 2) trường $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ là hữu hạn với mọi ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$: thật vậy, nếu $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{\nu_1} \ldots \mathfrak{p}_r^{\nu_r}$ là một phân tích thành các ideal nguyên tố của ideal $\mathfrak{a}$ thì $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ đẳng cấu với tích trực tiếp của các $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i^{\nu_i}$, và với mọi ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$, mỗi $(\mathfrak{o}/\mathfrak{p})$–module $\mathfrak{p}^h/\mathfrak{p}^{h+1}$ đẳng cấu với $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$; điều đó chứng tỏ rằng chuẩn là nhân tính, từ đó suy ra (6) một cách hình thức (chứng minh tính hội tụ của tích vô hạn cần một số ước lượng đơn giản về số các ideal nguyên tố với chuẩn cho trước). Năm 1923, E. Artin nhận xét rằng các tính chất này đúng cho các vành định nghĩa theo cách sau: bắt đầu với một trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$, xét trường $K_0 = \mathbb{F}_q(T)$ các phân thức hữu tỷ, và một mở rộng toàn phương $K = K_0(v)$ với $v^2 = P(T)$, trong đó P là một đa thức không có nghiệm bội. Khi đó bao đóng nguyên $\mathfrak{o}$ của $\mathbb{F}_q[T]$ trong K thỏa mãn các tính chất 1) và 2), $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ là một *mở rộng hữu hạn* của $\mathbb{F}_q$ với mỗi ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$; rất dễ để chứng minh chuỗi và tích vô hạn trong định nghĩa của ζ_K hội tụ với $\mathscr{R}(s) > 1$. Hơn nữa Artin còn thấy rằng lý thuyết này đơn giản hơn của Dedekind rất nhiều, lý do là các hàm của ông có thể viết dưới dạng $Z(q^{-s})$ trong đó $Z(u)$ là một *hàm hữu tỷ* với hệ số trong $\mathbb{Q}$; phương trình hàm biểu diễn thương $Z(1/qu)/Z(u)$ bởi một hàm hữu tỷ với không điểm và cực cho trước; ông ấy sau đó giả thuyết rằng không điểm của $Z(u)$ tất cả đều nằm trên đường tròn $|u| = q^{1/2}$ và tự kiểm chứng giả thuyết này với rất nhiều đa thức P bậc nhỏ.

Bây giờ các ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$ sao cho $\mathfrak{o}/\mathfrak{p} \cong \mathbb{F}_q$ $(N\mathfrak{p} = q)$ tương ứng một-một với các đồng cấu $\mathfrak{o} \to \mathbb{F}_q$; mọi đồng cấu như vậy gửi (T, v) tới $(a, b) \in \mathbb{F}_q^2$ thỏa mãn $b^2 = P(a)$. Nói cách khác số nghiệm của phương trình $y^2 = P(x)$ trong $\mathbb{F}_q^2$ chính là số lượng N_1 các ideal nguyên tố kiểu này; tuy nhiên từ phương trình Euler (6) suy ra luôn rằng

$$\log Z(u) = N_1 u + \cdots$$

gần $u = 0$, như vậy nghiên cứu $Z(u)$ giúp ta hiểu về N_1. "Giả thuyết Riemann" của Artin sinh ra đánh giá

$$|N_1 - q| \leq c \cdot q^{1/2}, \tag{7}$$

và như vậy làm chặt hơn những kết quả trước đó của ông về bài toán đồng dư của Gauss.

3. Bước vào hình học đại số

Cho k là một trường giao hoán bất kỳ, người ta cố gắng hình dung tập nghiệm $(x_1, \ldots, x_r) \in k^r$ của một phương trình $P(x_1, \ldots, x_r) = 0$, với P là một đa thức bất khả quy trong $k[T_1, \ldots, T_r]$ xem như một "siêu mặt đại số affine" ("đường cong" với $r = 2$, "mặt" với $r = 3$) trong "không gian affine" k^r, Hơn nữa, với mọi mở rộng trường $K \supset k$, ta có thể xét các nghiệm của $P(y_1, \ldots, y_r)$ với giá trị y_i trong trường K *lớn hơn*, như vậy ta có một "siêu mặt đại số" V trong "không gian affine" K^r; việc các hệ số của P nằm trong k giờ được thay bởi việc nói V *xác định* trên k. Kinh nghiệm cho thấy việc chuyển đổi giữa ngôn ngữ hình học và trực giác sang những đa tạp "trừu tượng"chỉ có ích khi K là *đóng đại số* (hãy thử nghĩ về $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ khi $k = \mathbb{R}$). Ta sẽ hạn chế sự quan tâm xuống trường hợp $K = \overline{k}$, bao đóng đại số của k; hơn nữa, ta chỉ xét các siêu mặt V không kỳ dị trong $\overline{k}^r$, i.e. tại các điểm mà "siêu phẳng tiếp xúc" được định nghĩa duy nhất theo nghĩa thông thường (có nghĩa là tất cả các đạo hàm riêng không đồng thời triệt tiêu trong V). Với mọi điểm $x = (x_1, \ldots, x_r) \in V$, toạ độ x_i nằm trong $\overline{k}$, do đó có một mở rộng hữu hạn nhỏ nhất $k(x)$ của k chứa tất cả x_j và $[k(x) : k] = \deg(x)$ được gọi là *bậc* của điểm x. Nếu $\mathfrak{m}$ là hạt nhân của đồng cấu $k[T_1, \ldots, T_r] \to \overline{k}$ gửi mỗi T_i tới x_i thì $\mathfrak{m}$ là một ideal cực đại của $k[T_1, \ldots, T_r]$ và $k[T_1, \ldots, T_r]/\mathfrak{m}$ đẳng cấu với $k(x)$; ta viết $k(\mathfrak{m}) = k(x)$ và $\deg(\mathfrak{m}) = \deg(x)$; có thể chứng minh rằng mọi ideal cực đại $\mathfrak{m}$ của $k[T_1, \ldots, T_r]$ chứa $P(T_1, \ldots, T_r)$ ứng với một điểm x của V với bậc $\deg(\mathfrak{m})$.

Khi $k = \mathbb{F}_q$, đặt

$$Z_V(u) = \prod_{P \in \mathfrak{m}} (1 - u^{\deg(\mathfrak{m})})^{-1}; \tag{8}$$

hàm $Z(u)$ định nghĩa bởi E. Artin bằng với hàm $Z_C(u)$, trong đó C là "đường cong affine" $x_2^2 - P(x_1) = 0$ xác định trên $\mathbb{F}_q$. Một cách tổng quát ta gọi Z_V là *hàm zêta* của V. Các điểm của V trong $(\mathbb{F}_q)^r$ là các điểm mà $\deg(x)$ là ước của n; hiển nhiên số lượng các điểm như vậy $\leq q^{nr}$, như vậy số lượng các ideal cực đại $\mathfrak{m}$ mà $P \in \mathfrak{m}$, tương ứng với các điểm này, có ước lượng *tiên nghiệm* $\leq q^{nr}$, điều này chứng tỏ rằng (8) hội tụ với u nhỏ; hơn nữa, với u nhỏ ta có thể viết

$$\begin{aligned} uZ_V'(u)/Z_V(u) &= \sum_{P \in \mathfrak{m}} \frac{\deg(\mathfrak{m}) u^{\deg(\mathfrak{m})}}{1 - u^{\deg(\mathfrak{m})}} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{P \in \mathfrak{m}} \deg(\mathfrak{m}) u^{\nu \deg(\mathfrak{m})} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} N_\nu u^\nu \end{aligned} \tag{9}$$

trong đó N_ν là số điểm của V trong $(\mathbb{F}_{q^\nu})^r$.

Cách định nghĩa này có thể mở rộng cho các dạng đa tạp không kỳ dị khác, không nhất thiết phải bị nhúng trong "không gian affine" $\overline{k}^r$. Nói một cách theo lịch sử, ngôn ngữ của hình học đại số trong lý thuyết của các hàm zêta được giới thiệu vào năm 1931 bởi F. K. Schmidt, người nghiên cứu các *đường cong xạ ảnh* không kỳ dị trên trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$. Ông chứng minh rằng lý thuyết Dedekind–Weber của đường cong đại số trên $\mathbb{C}$ (bao gồm định nghĩa về giống và định lý

Riemann–Roch) có thể mở rộng cho đường cong xạ ảnh trên một trường đóng đại số $\overline{k}$ bất kỳ; điều này cho phép ông chứng minh rằng với mọi đường cong xạ ảnh không kỳ dị C với giống g định nghĩa trên $\mathbb{F}_q$, hàm zêta có thể biểu diễn dưới dạng

$$Z_C(u) = P_{2g}(u)/(1-u)(1-qu) \quad (10)$$

trong đó tử số là một đa thức bậc $2g$ với hệ số nguyên và ta có một phương trình hàm

$$Z_C(1/qu) = (qu^2)^{1-g} Z_C(u). \quad (11)$$

"Giả thuyết Riemann" cho C do đó nói rằng các không điểm của P_{2g} nằm trên đường tròn $|u| = q^{1/2}$; dễ thấy điều này tương đương với bất đẳng thức

$$|N_\nu - q^\nu - 1| \leq 2g \cdot q^{1/2} \text{ với mọi } \nu \geq 1. \quad (12)$$

4. Mơ mộng về Tôpô đại số

Quay lại trường hợp siêu mặt V trong $(\overline{\mathbb{F}}_q)^r$, nhận xét rằng các phần tử của $\overline{\mathbb{F}}_q$ thuộc $\mathbb{F}_{q^n}$ chính là những phần tử mà $t^{q^n} = t$. Xét ánh xạ

$$\Phi : (x_1, \ldots, x_r) \mapsto (x_1^q, \ldots, x_r^q)$$

từ $(\overline{\mathbb{F}}_q)^r$ vào chính nó. Do hệ số của P nằm trong $\mathbb{F}_q$, do đó thỏa mãn $t^q = t$, ta có

$$P(\Phi(x)) = (P(x))^q,$$

do đó Φ ánh xạ V lên chính nó; hạn chế của Φ lên V được gọi là cấu xạ Frobenius của V. Năm 1936, Hasse nhận thấy rằng với một đường cong C, số N_ν chính là số điểm $x \in C$ thỏa mãn $\Phi^\nu(x) = x$; i.e. x là một *điểm bất động* của Φ^ν. Bây giờ, chúng ta hãy bỏ qua chuỗi các sự kiện mang tính niên đại mà giả vờ rằng ta đang làm việc với các đa tạp đại số không kỳ dị "cổ điển" X trong một không gian xạ ảnh phức. Từ thời của Picard và Poincaré người ta đã nhận thấy rằng hầu hết các tính chất của các đa tạp đại số được liên hệ chặt chẽ với các tính chất *đồng điều*. Trong phiên bản hiện thời (chủ yếu từ các công trình của Lefschetz và Hodge), với một đa tạp xạ ảnh không kỳ dị bất khả quy X chiều d trên $\mathbb{C}$ (do đó là một đa tạp khả vi chiều $2d$), các tính chất này xoay quanh *đại số đối đồng điều* $H^\bullet(X) = \bigoplus_i H^i(X)$ của X trên trường K với *đặc số* 0; nó là một đại số phân bậc trên K, thỏa mãn các tính chất sau:

(A) 1. Mỗi $H^i(X)$ là một K–không gian vector hữu hạn chiều, bằng 0 ngoại trừ $0 \leq i \leq 2d$;

2. Tồn tại một đẳng cấu tự nhiên $H^{2d}(X) \xrightarrow{\sim} K$, và với mỗi i, phép nhân trên $H^\bullet(X)$ cho ta một phép ghép cặp không kỳ dị $H^i(X) \times H^{2d-i}(X) \to H^{2d}(X) \xrightarrow{\sim} K$ (đối ngẫu Poincaré) cho phép ta đồng nhất $H^{2d-i}(X)$ với

$$H_i(X) = \mathrm{Hom}_K(H^i(X), K),$$

đồng điều của K tại chiều i.

3. Với các đa tạp không kỳ dị X, Y, tồn tại một đẳng cấu tự nhiên của các đại số phân bậc

$$H^\bullet(X) \otimes H^\bullet(Y) \cong H^\bullet(X \times Y)$$

(công thức Kunneth).

(B) Mọi cấu xạ $f : X \to X$ định nghĩa tự nhiên, với mỗi i, một đồng cấu tuyến tính $f^{(i)} : H^i(X) \to H^i(X)$, sao cho các $f^{(i)}$ với $0 \leq i \leq 2d$ cảm sinh một đồng cấu $f^\bullet : H^\bullet(X) \to H^\bullet(X)$ của các đại số phân bậc. Các *điểm bất động* của f là phép chiếu lên X của giao của đồ thị Γ của f và đường chéo Δ của $X \times X$; nếu Γ giao *hoành* với Δ tại mỗi điểm (nghĩa là các không gian tiếp xúc của chúng có giao chỉ là một điểm), số lượng điểm bất động của f được tính bởi *công thức vết Lefschetz*

$$N = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \mathrm{Tr}(f^{(i)}). \quad (13)$$

(C) Nếu Y là một đa tạp con không kỳ dị của X với chiều $d-1$, các ánh xạ tuyến tính tự nhiên $H^i(X) \to H^i(Y)$ là song ánh với $i \leq d-2$ và đơn ánh với $i = d-1$.

(D) Lấy $h \in H^2(X)$ từ đối ngẫu Poincaré ứng với lớp đồng điều trong $H_{2d-2}(X)$ của một lát cắt siêu phẳng của X, và xét $L : a \to ha$ là phép nhân trái bởi h trong $H^\bullet(X)$; khi đó $L^{d-i} : H^i(X) \to H^{2d-i}(X)$ là một đẳng cấu với $i \leq d$.

Một lập luận đại số đơn giản cho thấy nếu một cấu xạ $f : X \to X$ thỏa mãn $f^{(2)}(h) = q \cdot h$ với $q > 0$ là một số hữu tỷ, và nếu $g_i = q^{-i/2} f^{(i)}$ (xem như một tự đồng cấu của $H^i(X) \otimes_K \overline{K}$), g_i là song ánh, và g_i^{-1} được đồng nhất với ${}^t g_{2d-i}$ bởi đối ngẫu Poincaré. Điều này suy ra rằng nếu α_{ij} là các giá trị riêng của $f^{(i)}$ trong $\overline{K}$, tập các phần tử $q^{i/2}\alpha_{ij}$ trùng với tập các phần tử $\alpha_{2d-i,j}/q^{d-(i/2)}$.

(E) Trong mỗi $H^i(X)$ với $i \leq d$ có một không gian con $A^i(X)$ ổn định dưới tác động của $f^{(i)}$ với mọi cấu xạ $f : X \to X$, và trên mỗi $A^i(X)$, ta có thể trang bị một cấu trúc không gian vector trên trường các số hữu tỷ cùng một *tích vô hướng* không kỳ dị, sao cho: với mỗi f thỏa mãn (D) thì mỗi g_i là ánh xạ *unita* với tích vô hướng này; điều này suy ra tất cả các giá trị riêng của $f^{(i)}$ (là các phần tử của $\overline{\mathbb{Q}}$) có giá trị tuyệt đối là $q^{1/2}$.

Quay lại với siêu mặt V xác định trên $\mathbb{F}_q$, *giả sử* ta có thể gán với nó một đại số phân bậc $H^\bullet(V)$ có tất cả các tính chất vừa nêu, hơn nữa $\Phi^{(2)}(h) = q \cdot h$ trong đó Φ là đồng cấu Frobenius. Dễ thấy đồ thị của Φ^ν giao hoành với Δ; do đó, nếu α_{ij} là các giá trị riêng của $(\Phi^\nu)^{(i)}$, số N_ν có thể cho bởi công thức

$$N_\nu = \sum_i (-1)^i \sum_j \alpha_{ij}^\nu; \qquad (14)$$

và do đó ta có (với $d = r - 1 = \dim(V)$)

$$Z_V(u) = \frac{P_1(u)P_3(u)\dots P_{2d-1}(u)}{P_0(u)P_2(u)\dots P_{2d}(u)} \qquad (15)$$

trong đó $P_i(u) = \deg(1 - u \cdot \Phi^{(i)})$ là một đa thức với hệ số nguyên. Nói riêng, $Z_V(u)$ là một hàm *hữu tỷ*; hơn nữa $Z_V(1/q^d u)$ nên có không điểm và cực giống với $Z_V(u)$ ngoại trừ khi $u = 0$, và ta nên có $|\alpha_{ij}| = q^{1/2}$. Cuối cùng, nếu tất cả hệ số của V là các lớp đồng dư mod p của các số nguyên, hệ số của một phương trình của một đa tạp không kỳ dị V_0 trong $\overline{\mathbb{Q}}^r$, bậc của mỗi P_i sẽ bằng số Betti thứ i của V_0.

Các phát biểu trên là *các giả thuyết Weil* cho Z_V.

5. Những "phương án thay thế" cho đối đồng điều của Hasse và Weil

Để hiểu tại sao Weil đã có thể đi tới những khái niệm táo bạo như vậy, ta phải quay lại những ý tưởng đầu tiên của Hasse trong việc chứng minh "giả thuyết Riemann" cho các đường cong *giống* 1 trên $\mathbb{F}_q$. Trong lý thuyết cổ điển của các đường cong không kỳ dị trên trường số phức, mỗi đường cong C được gán với *jacobian* $J = J(C)$, có thể xem như đối ngẫu Pontrjagin của nhóm đồng điều $H_1(C, \mathbb{Z})$; đối ngẫu này được dẫn ra từ dạng song tuyến tính $(\gamma, \omega) \mapsto \int_\gamma \omega$ định nghĩa trên các chu trình γ và các dạng vi phân abel chỉnh hình ω trên diện Riemann C ("chu kỳ" của ω trên γ). Nếu C có giống g thì $J(C)$ là một xuyến phức $\mathbb{C}^g/\Delta$ trong đó Δ là một nhóm con rời rạc với hạng $2g$, thỏa mãn các điều kiện song tuyến tính Riemann cổ điển. Ta có thể định nghĩa J một cách đại số, bằng cách xét các nhóm cộng G/G_i của các lớp của các ước bậc 0 trên C, modulo quan hệ tương đương tuyến tính: ta gắn mỗi ước D bậc 0, vốn có thể viết dưới dạng $\partial\gamma$ với 1-xích γ trên diện Riemann, một lớp $\phi(D)$ trong $\mathbb{C}^g/\Delta$ của vector $\left(\int_\gamma \omega_1, \dots \int_\gamma \omega_g\right)$, trong đó các ω_j lập thành một cơ sở của không gian các dạng vi phân chỉnh hình; định lý Abel-Jacobi nói rằng phép tương ứng này là toàn ánh và có hạt nhân G_i. Từ đó có thể trang bị cho J một cấu trúc *nhóm đại số* (một trường hợp cụ thể của nhóm đại số trên $\mathbb{C}$ được biết đến như *các đa tạp abel*) với sự giúp đỡ của các điều kiện (siêu việt) song tuyến tính Riemann. Cuối cùng, nếu x_0 là một điểm trên C,

$$x \mapsto \phi((x)-(x_0))$$

là một cấu xạ từ C vào J và là đẳng cấu nếu $g = 1$.

Phương pháp đầu tiên của Hasse để làm việc với các đường cong C giống 1 xác định trên $\mathbb{F}_q$ là "nâng" C thành một đường cong C_0 "cổ điển" giống 1 xác định trên trường các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$: nếu E là trường các hàm hữu tỷ trên C, ông chứng minh rằng ta có thể xác định C_0 sao cho, nếu ω_1, ω_2 là các hàm chu kỳ của các hàm elliptic ứng với C_0 (nên trường E_0 của các hàm này là trường các hàm hữu tỷ trên C_0), ω_1/ω_2 phải sinh ra một trường toàn phương ảo K trên $\mathbb{Q}$, và E sẽ là trường thặng dư của vành các số nguyên của K modulo một ideal nguyên tố khéo chọn nào đó. Hasse từ đó đã có thể dùng các kết quả cổ điển về "các phép nhân phức" của C_0 (i.e. tự đồng cấu của jacobian $J(C_0)$) để xác định số điểm của C với bậc 1, và chứng minh "giả thuyết Riemann" cho C.

Một thời gian ngắn sau, Hasse từ bỏ phương pháp trên và thay thế bằng một phương pháp có tính nội tại hơn: như đã nói ở trên, $J(C)$ có thể định nghĩa một cách đại số như một nhóm "trừu tượng", và cấu xạ Frobenius định nghĩa tự nhiên một tự đồng cấu của nhóm đó; Hasse chứng minh rằng tử số của hàm zêta Z_C trong (10) (trong trường hợp này là một đa thức bậc 2) được đồng nhất với đa thức đặc trưng của tự đồng cấu đó. Công cụ mà ông giới thiệu cho mục đích này là một số nguyên $v(\lambda)$ gắn với mỗi tự toàn cấu λ của $J(C)$: nếu E là trường các hàm hữu tỷ của C, λ định nghĩa một "đối cấu xạ" (comorphism) $R(\lambda)$, một tự đẳng cấu của E và $v(\lambda)$ là bậc $[E : R(\lambda)(E)]$, hữu hạn khi λ là toàn cấu. Hasse chứng minh rằng với mọi số nguyên a, b thì

$$v(a.1+b.\lambda) = a^2 + \sigma(\lambda)ab + v(\lambda)b^2$$

với mọi tự toàn cấu λ của $J(C)$, tính xác định dương của dạng toàn phương này cho ông chứng minh của "giả thuyết Riemann".

Việc mở rộng những ý tưởng này cho các đường cong C giống g bất kỳ trên $\mathbb{F}_q$ là không hề hiển nhiên: lý thuyết cổ điển chứng minh rằng $J(C)$ nên là một nhóm đại số g chiều (thay vì đẳng cấu với C như một đa tạp đại số trong trường hợp của Hasse), và cho tới tận năm 1940 không ai mở rộng lý thuyết của các nhóm đại số trên trường đặc số $p > 0$ sang hình học đại số, và nói riêng lý thuyết của các đa tạp abel. Điều này đã được thực hiện một mình bởi A. Weil, người đầu tiên phải phát triển, trong cuốn sách nổi tiếng *Foundations of algebraic geometry*, các tính chất cơ bản của các số giao một cách độc lập mà không viện tới tôpô đại số. Sau đó ông đã có thể nghiên cứu cấu trúc vành của các tự đồng cấu của một đa tạp abel A; với mọi tự toàn cấu λ của A, Weil định nghĩa số nguyên $v(\lambda)$ như Hasse, (bây giờ E là trường các hàm hữu tỷ trên A) và lần này chứng minh

$$\begin{aligned} &v(a\cdot 1 + b\cdot\lambda) \\ &= a^{2g} + \sigma(\lambda)a^{2g-1}b + \ldots + v(\lambda)b^{2g}. \end{aligned}$$

Bất biến $\sigma(\lambda)$ được xem như một "thay thế" đóng vai trò của $\mathrm{Tr}(f^{(1)})$ khi λ là tự đồng cấu của $J(C)$ ứng với một cấu xạ f của C. Một "thay thế" cho đối ngẫu Poincaré được phát hiện trong một đối ngẫu tổng quát cho các đa tạp abel mà có thể định nghĩa nghĩa hoàn toàn đại số (trong trường hợp cổ điển người ta định nghĩa nó bởi đối ngẫu Pontrjagin); cuối cùng, nếu λ' là "chuyển vị" của một tự đồng cấu λ trong đối ngẫu này thì ta có thể chứng minh $\sigma(\lambda\lambda') > 0$ với $\lambda \neq 0$, tính chất này (xem như một "thay thế" cho tính xác định dương của tích vô hướng Hodge) cho phép Weil đưa ra chứng minh của "giả thuyết Riemann" cho đường cong có giống bất kỳ.

Trong tất cả các công trình này, Weil đã không ngừng giữ trong trí óc ông lý thuyết cổ điển của các "tương ứng" phát triển bởi Hurwicz: một tương ứng trên C có thể xem như một cấu xạ "đa trị", mà cụ thể hơn như một đường cong Γ trên diện $C \times C$; tốt hơn nữa, nó được định nghĩa như một ước (tổ hợp tuyến tính của các đường cong) trên $C \times C$. Một tương ứng Γ gắn một cách tự nhiên (bắt chước phiên bản lý thuyết tập hợp) mỗi ước D trên C (tổ hợp tuyến tính của các điểm) một ước khác $\Gamma(D)$, một lần nữa điều này định nghĩa một tự đồng cấu của $J(C)$; ngược lại có thể chỉ ra rằng mọi tự đồng cấu của $J(C)$ đều thu được từ cách định nghĩa này. Trong trường hợp cổ điển, công thức Lefschetz (13) có thể được mở rộng để cho số giao của một tương ứng Γ với "tương ứng đồng nhất", i.e. đường chéo Δ của $C \times C$, và thực tế điều này đã được chứng minh bởi Hurwicz vào năm 1866, sử dụng lý thuyết tích phân abel; sự thật là Weil đã có thể chứng minh một công thức tương tự bằng các công cụ thuần túy đại số, điều đã dẫn ông đến chỗ đề xuất các giả thuyết mang tên mình.

6. Đối đồng điều étale và định lý của Deligne

Sử dụng kết quả của mình cho các đường cong, Weil đã chứng minh được các giả thuyết của chính ông với các siêu mặt dạng (3), cũng như cho những đa tạp khác như các đa tạp Grassman. Nhưng tại thời điểm đó không có một lý thuyết đối đồng điều nào đủ "tốt" đã được định nghĩa. Khoảng năm 1953, Cartan và Serre đã dùng đối đồng điều Leray với hệ số là các bó như một công cụ cực kỳ hữu hiệu để nghiên cứu các đa tạp phức, và Serre đã chỉ ra làm cách nào để chuyển các kỹ thuật này sang các đa tạp đại số trên một trường đóng đại số với đặc số p. Nhưng khi $p > 0$, những nhóm đối đồng điều mới đó được định nghĩa hiển nhiên không thể được sử dụng bởi công thức Lefschetz (13), trong đó vế trái bắt buộc phải là một số nguyên, mà không phải một phần tử của một trường có đặc số p. Chỉ sau khi Grothendieck xây dựng lý thuyết lược đồ mà, từ một lưu ý của Serre, thì cậu ấy đã có thể mở rộng ý tưởng ban đầu theo cả hai hướng "tôpô" và "bó", gắn mỗi đa tạp (hoặc lược đồ) X một đại số đối đồng điều $H^\bullet(X_{et}, \mathbb{Q}_l)$ trên trường l–adic $\mathbb{Q}_l$, trong đó l là một số nguyên tố khác với đặc số của trường ban đầu (sự can thiệp của các trường l–adic trong những câu hỏi này đã được nhận ra bởi Weil và Deuring).

Độ sâu sắc và phức tạp của các kỹ thuật liên quan trong định nghĩa của "đối đồng điều étale" $H^\bullet(X_{et})$ như thể để loại trừ mọi khả năng trong việc đưa ra bất kỳ một chi tiết nào nữa trong định nghĩa của nó. Hãy để chúng tôi chỉ ra Grothendieck (với sự giúp đỡ của M. Artin (con trai của E. Artin) và J. L. Verdier) đã có thể chứng minh các tính chất (A), (B), (C) [1] ở trên và gần đây Deligne đã chứng minh (D) cũng đúng với mọi đa tạp trên một trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$; tuy nhiên không một tính chất nào tương tự như (E) đã được chứng minh cho đối đồng điều étale (hoặc bất kỳ một lý thuyết đối đồng điều nào được đưa ra gần đây). Các tính chất (A), (B), (C) là đủ để chứng minh (15), cũng như phương trình hàm

$$Z_V(1/q^d u) = \pm q^{n\chi/2} u^\chi Z_V(u)$$

trong đó

$$\chi = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \dim H^i(X_{et}, \mathbb{Q}_l).$$

Tuy nhiên, chỉ đến gần đây người ta mới biết rằng các hệ số của P_j trong (15) là độc lập với số nguyên tố l. Điều này cuối cùng cũng được chứng minh bởi Deligne năm 1973,

[1] *Trước khi đối đồng điều l–adic được định nghĩa, Dwork đã chứng minh, bằng cách khéo léo sử dụng các hàm giải tích p–adic, rằng hàm zêta $Z_V(u)$ là hữu tỷ.*

cùng với phần cuối và khó nhất của các giả thuyết Weil là $|\alpha_{ij}| = q^{1/2}$.

Ở đây lần nữa, cần nhớ rằng không thể mô tả một cách chi tiết các chứng minh cực kỳ khéo léo, điều này hơi khác với chứng minh của Hasse và Weil, do nó không thể dựa trên một lập luận "tính dương". Ta hạn chế bài toán xuống trường hợp $i = d$ (i.e. đối đồng điều "trung tâm" $H^d(X)$); việc chứng minh rằng $|\alpha_{dj}| = q^{d/2}$ thì tương đương với

$$q^{(d-1)/2} \le |\alpha_{dj}| \le q^{(d+1)/2} \qquad (18)$$

bởi vì nếu ta áp dụng kết quả này với tích X^k, và sử dụng công thức Kunneth, ta có

$$q^{(kd-1)/2} \le |\alpha_{dj}^k| \le q^{(kd+1)/2}$$

sau đó cho k tiến tới $+\infty$ và thu được kết quả. Thậm chí trong (18) ta có thể giả sử là d chẵn và sau đó có thể chứng minh bằng quy nạp theo số chẵn d; đây là một bước sâu sắc và khó trong chứng minh, dựa trên kỹ thuật "đơn đạo" cũ từ Picard và Lefschetz: kỹ thuật này hoàn toàn mang tính tôpô trong trường hợp cổ điển, nhưng nó cũng đã được chuyển sang đối đồng điều étale bởi Grothendieck và những người cùng trường phái của cậu ấy.

Như thường thấy trong toán học, sự đột phá này mở ra một con đường trong việc khai phá các vấn đề mới; nhưng chừng nào bài toán ban đầu của Gauss còn được quan tâm, nó là điểm cuối của vấn đề, vì định lý của Deligne suy ra rằng, số các điểm bậc 1 của một siêu mặt xạ ảnh không kỳ dị d chiều thỏa mãn đánh giá

$$\left|N - (1 + q + \ldots + q^d)\right| \le bq^{d/2}$$

trong đó thậm chí hằng số b có thể tính cụ thể: nó là số Betti thứ d của các siêu mặt trên $\mathbb{C}$ có cùng bậc với V.

Tài liệu tham khảo

[1] Eberhard Freitag and Reinhardt Kiehl. *Étale cohomology and the Weil conjecture*, volume 13 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer–Verlag, Berlin, 1988. Translated from the German by Betty S. Waterhouse and William C. Waterhouse, With an historical introduction by J. A. Dieudonné.

TRONG TOÁN HỌC CHỈ CÓ HAI LỰA CHỌN: ĐÚNG HOẶC SAI*

HELENE ESNAULT[1]

Một lựa chọn nhỏ các trích dẫn

Wolfgang Goethe: Các nhà toán học là một kiểu người Pháp: nếu bạn nói chuyện với họ, họ sẽ dịch nó sang ngôn ngữ của họ, và sau đó nó sẽ sớm trở thành một thứ gì đó hoàn toàn khác. Goether thực sự không thích tiếng Pháp cũng như các nhà toán học (!) vì ông đã viết: Nền văn hóa mà toán học mang lại cho trí tuệ là vô cùng phiến diện và hạn chế.

Leonardo da Vinci: Bất cứ ai chỉ trích trí tuệ siêu phàm của toán học đều nuôi dưỡng sự nhầm lẫn.

Cess Noteboom: Vì nghề nghiệp của mình, tôi đã quen với một số kiểu hoàn hảo nhất định. Một trong số đó là toán học. Toán học, nếu bạn tìm hiểu sâu hơn, có hình mái vòm của thơ ca, trong đó không có những điều không thể dự đoán trước, và nếu chúng ta thành thật mà nói, thì không có cả sự lầy lội của con người.

Albert Einstein: Toán học thuần túy, theo cách riêng của nó, là thi ca của những suy nghĩ logic.

Karl Weierstrass: Đúng là một nhà toán học không có chút gì là thơ sẽ không bao giờ là một nhà toán học hoàn hảo.

Tại sao chúng tôi làm toán?

Những con đường dẫn đến toán học có lẽ cũng nhiều như số người theo đuổi nó. Nhưng có một điều không đổi: toán học là tự do của chúng tôi. Một số người đến với toán học thông qua vật lý, một số người thông qua khoa học máy tính, một số người thông qua kỹ thuật, một số người thông qua sinh học. Sẽ có lúc trong đời sống trí tuệ ta muốn sắp xếp lại những suy nghĩ của mình trước khi áp dụng chúng, hay khi ta muốn hiểu được nền tảng của chúng. Đó là sự hấp dẫn của sự trừu tượng, dù nó thường xa rời thực tế của thế giới bên ngoài.

Những người khác đến với toán học thông qua nghệ thuật, thơ ca, triết học. Sẽ có thời điểm ta cố gắng vượt qua sự chủ quan trong

---

** Bài nói tại Viện hàn lâm Leopoldina của Berlin.*

[1] *Freie Universität, Berlin.*

thẩm mỹ. Đó là lúc ta cần tiêu chí "đúng hoặc sai" của tựa đề bài viết. Chúng tôi phân biệt hai động cơ: "trừu tượng" và "đúng hoặc sai".

Chúng tôi thực sự làm gì?

Chúng tôi thường bắt đầu khá trẻ. Với tôi, thời trẻ tôi đã bị lôi cuốn bởi sự trừu tượng, bao gồm cả điều "đúng hoặc sai" này. Toán học buộc bạn phải suy nghĩ với những lập luận được xây dựng rõ ràng. Đó là một sự bảo vệ khỏi chủ nghĩa giáo điều. Toán học có thể cứu chúng ta khỏi sự thờ ơ với xã hội, xóa bỏ nỗi sợ hãi về tương lai và giải phóng chúng ta khỏi kỳ vọng mình sẽ có ích trong xã hội. Tất nhiên, toán học được xã hội hoan nghênh vì nó có ứng dụng, lấy ví dụ ChatGPT.

Nhiều người trong chúng ta cũng nỗ lực để lao động của họ có ứng dụng trong xã hội. Nhưng những người khác, trong đó có tôi, thì không. Tôi lớn lên dưới ảnh hưởng của Hiroshima và không bao giờ muốn làm bất cứ điều gì trong đời mà có thể gây ra hậu quả tàn khốc. Đó là lý do tại sao tôi quyết định nghiên cứu một thứ không mang lại kết quả gì cả: nghiên cứu trong "lĩnh vực trừu tượng nhất" của toán học. Khi tôi nghĩ về toán học, thực tế của thế giới bên ngoài biến mất. Toán học hoạt động với các khái niệm khép kín. Một lý thuyết toán học dựa trên những ý tưởng phải tương thích với hàng nghìn ý tưởng đã được thêm vào cấu trúc toán học trước đó. Mỗi lý thuyết được ghi lại bằng một ngôn ngữ đặc biệt, thể hiện thông qua các định lý, mệnh đề, bổ đề, tất cả đều thuộc về các quy tắc chung của toán học và lý thuyết này được hỗ trợ bởi các chứng minh.

Điều bạn nhận được luôn là "đúng" hoặc "sai". Sai có thể là một lỗi logic, hoặc có thể được phát hiện từ sự không tương thích với một lý thuyết trước đó. Trong trường hợp sau, cũng có thể lý thuyết trước đó là sai. Đôi khi bạn tìm thấy lỗi trong những bài viết đã hơn 100 năm tuổi. Trong hầu hết các trường hợp, lỗi được phát hiện quá muộn là do lý thuyết cũ không còn quan trọng cho sự phát triển tiếp theo. Chúng tôi làm việc với những bài toán. Trong sự trừu tượng này, bản thân các bài toán đều xuất phát từ những suy nghĩ trừu tượng. Mỗi bước hiểu biết đều mang tới những bài toán mới, nó cứ tiếp diễn mãi. Các bài toán trong các lĩnh vực toán học thiên về ứng dụng hơn có thể đến từ toán học bên ngoài, nghĩa là, từ "thực tế"...

Tại sao chúng tôi không cảm thấy mệt mỏi?

Một người bạn đã hỏi tôi như vậy gần đây. Tôi có hai ý để trả lời câu hỏi này. Một mặt, khi ta hiểu được một điều gì đó, dù nó rất nhỏ, thì niềm vui cũng vô cùng lớn lao, không gì có thể so sánh được. Không ai có thể tước đoạt điều đó từ ta. Thứ hai, chúng tôi muốn biết. Chúng tôi thực sự muốn biết. Tôi đã nói rằng, với tư cách là một nhà toán học tôi gặp khó khăn với một khái niệm trừu tượng của thực tế. Nhưng nếu bạn hỏi với tôi, hay nhiều người trong chúng tôi, thực tế chủ quan là gì, thì tôi sẽ trả lời: Mong muốn biết vô điều kiện.

CÁCH DỰ ĐOÁN KẾT QUẢ TUNG ĐỒNG XU*

(Người dịch: Phạm Triều Dương[1])

Có một truyền thuyết kể rằng thành phố Portland, bang Oregon đã suýt được gọi là Boston. Cuối cùng thì vấn đề đã được quyết định nhờ một cuộc tung đồng xu được tổ chức ra vào năm 1845 giữa Francis Pettygrove, người đến từ một thành phố Portland khác, ở bang Maine, và Asa Lovejoy, đến từ Boston (người ở bang Massachusetts). Nhưng mọi chuyện có thể đã khác đi, theo Frantisek Bartos, một sinh viên tốt nghiệp tại Đại học Amsterdam, nếu con người chúng ta không phải là những người tung xu một cách lưỡng lự thiếu dứt khoát như vậy.

Bartos đã quan tâm đến một dự đoán hấp dẫn của Persi Diaconis, Susan Holmes và Richard Montgomery, một nhóm các nhà toán học người Mỹ. Trong một bài báo đăng vào năm 2007, bộ ba này đã phân tích tính chất vật lý của việc tung đồng xu và nhận thấy có một điều gì đó khá hấp dẫn. Bên cạnh việc khiến đồng xu quay lộn nhào, hầu hết mọi người đều có xu hướng tạo ra một sự xoay nhẹ cho đồng xu khi họ tung nó. Điều đó làm cho trục xoay mà đồng xu lật quanh đó sẽ bị trôi đẩy khi nó ở trên không trung, một hiện tượng gọi là tuế sai.

Kết quả cuối cùng, khi các con số được xử lý, là: một đồng xu do con người ném sẽ thể hiện một xu hướng thiên vị khá tinh tế nhưng bền vững. Tiến sĩ Diaconis và các đồng nghiệp của ông tính toán có khoảng 51% khả năng một đồng xu sẽ rơi theo hướng như trước khi được ném. Nói cách khác, nếu nó ngửa trong tay người ném, có nhiều khả năng hơn một chút là nó cũng sẽ chạm đất ngửa. Hoặc ít nhất, đó cũng là dự đoán.

Bartos cùng với sự nhiệt tình đáng ngưỡng mộ của mình bắt tay vào kiểm tra thực nghiệm. Anh đã tập hợp được 48 tình nguyện viên và thuyết phục họ thực hiện (và có quay phim) 350.707 lần tung đồng xu, sử dụng hàng chục đồng xu khác nhau, từ đồng hai rupee của Ấn Độ đến đồng xu hai franc Thụy Sĩ. Dĩ nhiên, dữ liệu của anh đã xác nhận những gì vật lý đã dự đoán. Các đồng

---

* *Theo The Economist.*

[1] *Đại học Sư phạm Hà Nội.*

xu đã chạm đất cùng với mặt khi tung lên tới tận $50,8\%$ số lần được ném.

Số liệu thống kê chỉ ra rằng bản thân các đồng xu không có sự thiên vị cụ thể nào. Yếu tố quyết định thực sự đó là con người chúng ta rõ ràng không có khả năng ném thẳng. Bartos không phải là người đầu tiên thu thập số liệu thống kê về việc tung đồng xu. Nhưng anh ta là người đầu tiên làm được điều đó ở quy mô đủ lớn để phát hiện ra sự thiên vị. (Một nỗ lực trước đó gồm 40.000 lần tung, do hai sinh viên tại Đại học California, Berkeley thực hiện, đã thiếu sức mạnh thống kê để xác nhận được lý thuyết.)

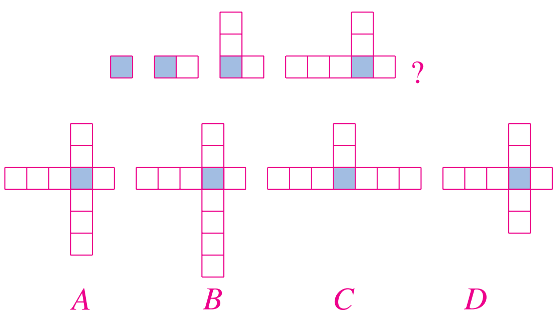
Cơ hội $50,8\%$ chỉ khác một chút so với mức công bằng hoàn hảo. Nhưng Bartos chỉ ra rằng cơ hội đó lớn hơn cả lợi thế mà một sòng bạc có được trong hầu hết các loại kiểu chơi Blackjack. Và trong một số tình huống cơ hội đó có thể có vai trò quan trọng. Vào năm 2019, Sue Cudilla trở thành thị trưởng của Araceli, một thị trấn ở Philippines, nhờ việc tung đồng xu sau khi cuộc bầu cử được tuyên bố là bất phân thắng bại. Quan trọng hơn nữa, việc tung đồng xu có thể xác định ai là người ném bóng hoặc đánh bóng trước trong môn cricket. Các vận động viên chuyên nghiệp luôn chi hàng nghìn đô la và hàng giờ tập luyện để tìm kiếm được những lợi thế cận biên. Có lẽ họ giờ sẽ phải nên chú ý nhìn vào đồng xu lẻ trong túi quần của trọng tài.

ĐỀ THI TUYỂN SINH NĂM 2023-2024 CÂU LẠC BỘ TOÁN HỌC UNICORN MATCH CIRCLE (Phần I)

THẦY CÔ UMC

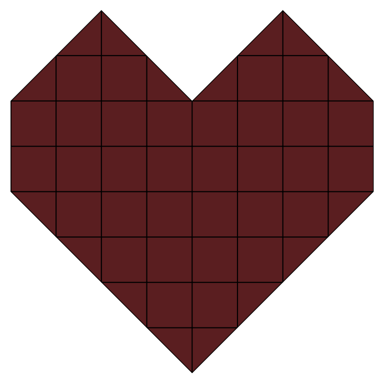
Câu lạc bộ toán học "Unicorn Math Circle" (UMC) dành cho học sinh Tiểu học và THCS được Tạp chí Pi tổ chức từ năm 2019, nhằm tìm kiếm và bồi dưỡng các học sinh có năng lực Toán học, tạo nguồn học sinh xuất sắc. Trong số này, tạp chí Pi giới thiệu đến bạn đọc đề thi tuyển sinh năm học 2023 – 2024 dành cho các bạn học sinh lớp 4.

Bài 1. Dựa vào quy luật, hỏi hình nào trong số các hình A, B, C, D là hình tiếp theo trong dãy sau:

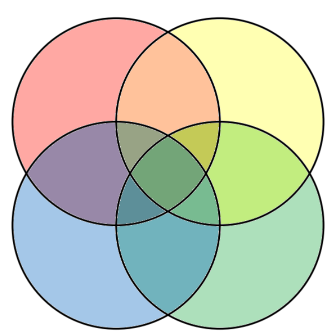


Bài 2. Một cặp số có hai chữ số như 18 và 81 được gọi là cặp *bạn thân* vì chúng có chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị đổi chỗ cho nhau. Hỏi có bao nhiêu cặp bạn thân mà tổng của chúng bằng 99?

Bài 3. Bạn Ngọc được tặng một thanh sô–cô–la hình trái tim. Mỗi ô vuông có trọng lượng 8g. Hỏi thanh sô–cô–la có khối lượng bằng bao nhiêu?

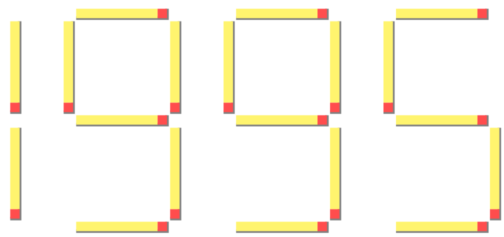


Bài 4. Trong hình vẽ sau, mỗi miền tô 1 màu, không có 2 miền nào cùng màu. Có bao nhiêu miền nằm trong ít nhất 3 hình tròn?

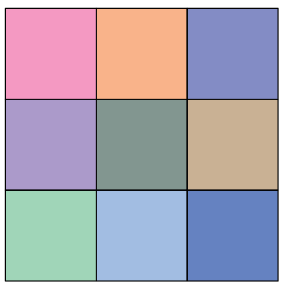


Bài 5. Số 1995 được xếp bằng các que diêm như hình dưới đây. An dịch chuyển đúng 1

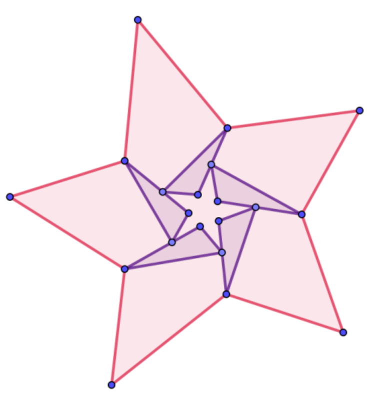
que diêm để nhận được số lớn nhất có thể. Hỏi số đó bằng bao nhiêu?



Bài 6. Như hình vẽ, có 9 ô vuông nhỏ, vẽ một đường thẳng, hỏi đường thẳng này đi qua nhiều nhất bao nhiêu ô vuông nhỏ?

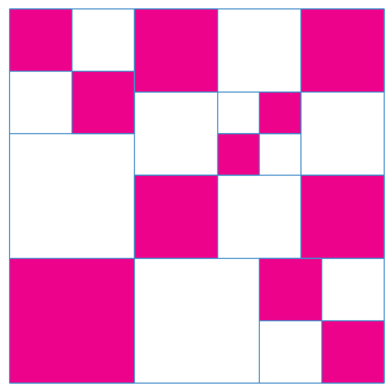


Bài 7. Trong hình vẽ bên dưới, hình ngôi sao lớn được chia thành các hình tam giác có chu vi bằng 7, các hình tứ giác có chu vi bằng 18 và một hình ngôi sao nhỏ có chu vi bằng 3. Tìm chu vi của hình ngôi sao lớn ban đầu.



Bài 8. Trong siêu thị có sự kiện ra mắt 1 loại kem mới, để quảng cáo loại kem này, họ cho phép cứ 2 cái vỏ que kem đổi được 1 cây kem, bạn Bảo Châu mua 10 que kem, vậy bạn ấy thực sự có thể ăn được nhiều nhất bao nhiêu que kem?

Bài 9. Một hình vuông to được chia thành các hình vuông nhỏ hơn với nhiều kích cỡ, trong đó một số được tô màu hồng như hình vẽ. Biết diện tích phần màu trắng của hình vuông là 180. Tìm diện tích phần màu đen của hình vuông.



Bài 10. Hai bạn Nam và Dương đi chợ sách và nhìn thấy cuốn tạp chí Pi. Nam muốn mua 1 cuốn nhưng thiếu 12 nghìn đồng. Dương muốn mua 1 cuốn nhưng thiếu 23 nghìn đồng. Nếu 2 bạn chung tiền mua thì vừa đủ mua 1 cuốn. Hỏi cuốn tạp chí Pi giá bao nhiêu tiền?

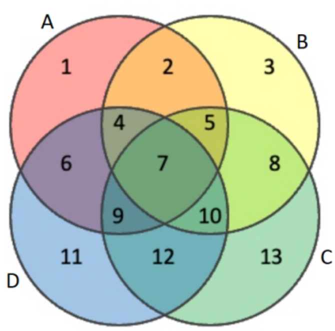
Lời giải.

Bài 1. Ta thấy nếu lấy ô vuông được tô màu làm tâm, thì theo ngược chiều kim đồng hồ số các ô vuông kề với tâm sẽ tăng dần: $1, 2, 3, 4$. Do đó hình B là hình tiếp theo trong dãy.

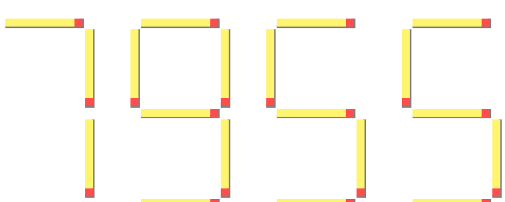
Bài 2. Ta có thể thấy ngay cặp số bạn thân có tổng bằng 99 thì mỗi số trong cặp có tổng chữ số hàng chục và hàng đơn vị bằng 9. Do $9 = 1+8 = 2+7 = 3+6 = 4+5$ nên ta có 4 cặp số số bạn thân thỏa mãn là: $18-81$, $27-72$, $26-63$, $45-54$.

Bài 3. Thanh sô–cô–la hình trái tim được ghép từ 32 miếng ô vuông diện tích và 16 miếng nửa ô vuông. Sau khi ghép các nửa ô vuông lại với nhau, thì ta thấy thanh sô–cô–la gồm 40 ô. Do đó khối lượng của thanh sô–cô–la là: $4 \times 80 = 320$ (g).

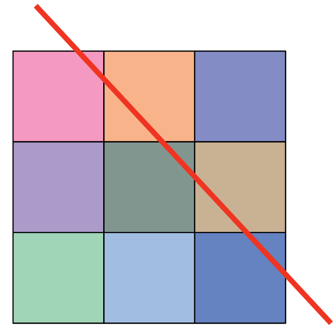
Bài 4. Đánh số các miền như trong hình dưới đây. Ta thấy các miền 4, 5, 10, 9 và 7 nằm trong ít nhất 3 hình tròn. Do đó có 5 miền thỏa mãn đề bài.



Bài 5. Bạn An di chuyển một que diêm từ chữ số 9 hàng chục sang chữ số 1 hàng nghìn và được số lớn nhất là:



Bài 6. Ta vẽ đường thẳng như hình dưới đây, khi đó đường thẳng đi qua nhiều nhất 5 hình vuông nhỏ.



Bài 7. Tổng các cạnh của các hình tứ giác mà không phải là cạnh của ngôi sao lớn là:

$$7 \times 5 - 3 = 32 \text{ (đơn vị)}.$$

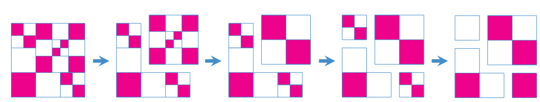
Vậy chu vi của ngôi sao lớn ban đầu là:

$$18 \times 5 - 32 = 58 \text{ (đơn vị)}.$$

Bài 8. Đầu tiên bạn Châu đổi được $10 : 2 = 5$ (que kem). Với 5 que kem mới này bạn đổi được $5 : 2 = 2$ que kem và dư 1 vỏ que kem. Với 2 vỏ que kem bạn Châu lại tiếp tục đổi được 1 que kem. Cuối cùng 1 vỏ que kem này và 1 vỏ que kem còn thừa trước đó, bạn lại đổi được 1 que kem nữa. Vậy tổng cộng bạn Châu được ăn số que kem là:

$$10 + 5 + 2 + 1 + 1 = 19 \text{ (que kem)}.$$

Bài 9. Bằng cách ghép các phần được tô hồng như trong các minh họa dưới đây, ta thấy phần tô hồng gồm 4 ô vuông nhỏ và phần màu trắng gồm 5 ô vuông nhỏ.



Như vậy diện tích một ô vuông nhỏ là:

$$180 : 5 = 36 \text{ (đơn vị)}.$$

Do đó diện tích phần được tô đen là:

$$36 \times 4 = 144 \text{ (đơn vị)}.$$

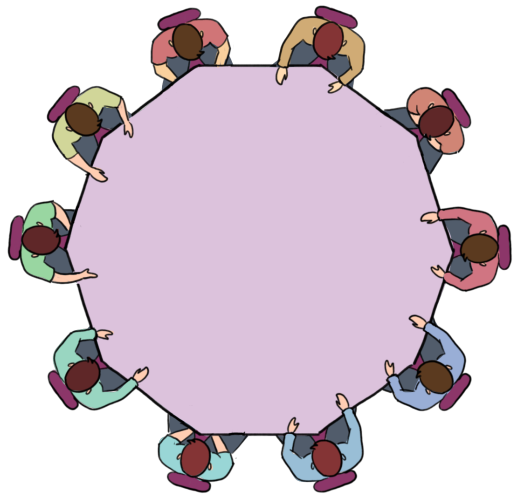
Bài 10. Vì hai bạn chung tiền mua thì vừa đủ 1 cuốn tạp chí Pi, nên số tiền mà Nam còn thiếu chính là số tiền mà Dương có, số tiền mà Dương thiếu chính là số tiền mà Nam có. Vậy Dương có 12 nghìn, Nam có 23 nghìn. Vậy cuốn tạp chí Pi giá $12 + 23 = 35$ (nghìn).

CĂN PHÒNG VỚI CHIẾC BÀN THẬP GIÁC

GIA DƯƠNG

Thám tử Xuân Phong đôi khi phải đột nhập vào những nơi hoang vắng, kỳ bí để tìm ra được dấu tích của những kẻ gây án. Một lần nọ, sau bao ngày cải trang để bám sát theo dõi manh mối, thám tử biết tên trùm tội phạm đang trốn tránh trong một ngôi nhà hẻo lánh ở ngoại ô. Vừa đến trước cửa của ngôi nhà gỗ cổ kính, Xuân Phong gặp một bà lão với đôi mắt tinh anh nhìn mình với vẻ bí mật "Thám tử đó phải không, tôi nhận ngay ra ngài, dù ngài đã cải trang rất kỹ. Phải chăng thám tử đang đi tìm tên trùm? Hắn đang ngồi dưới kia, trong căn phòng cùng những người trong hiệp hội Thương Gia, nhưng vô cùng nguy hiểm nếu ngài dùng vũ lực ở đây để bắt hắn. Tôi mách ngài nhé, ở dưới đó, có 10 người, có lão trùm và những kẻ đồng phạm cùng lão, là những kẻ luôn nói dối, nhưng cũng có thể có cả những người lương thiện, luôn nói thật, ở ngay bên cạnh. Ngài hãy dùng trí thông minh của mình, chỉ được hỏi rất hạn chế câu hỏi để phán đoán ra những kẻ phạm tội là ai. Ngài hỏi nhiều câu hơn sẽ nguy hiểm cho cả những Thương gia lương thiện có thể có mặt ở đó. Và ngài hãy hứa với bà lão này sẽ đảm bảo an toàn cho tôi và gia đình, vì tôi đã liều mình thông báo tin mật này với Thám tử".

Theo lời bà lão mách bảo, Xuân Phong lần theo một chiếc cầu thang cũ nát và đi xuống một căn phòng khuất dưới tầng hầm. Vừa mở cửa ra, thám tử đã thấy có 10 người ăn mặc chỉnh tề như nhau, ngồi nghiêm trang quanh một chiếc bàn hình thập giác đều, mỗi người ngồi tại đỉnh của hình thập giác. Ánh sáng lờ mờ trong phòng đủ chiếu rõ dòng chữ "Cuộc họp thường niên Hiệp hội Thương gia – Khu vực Duyên Hải". Thật khó để xác định ai là kẻ nói dối trong số họ, vì vẻ ngoài họ đều giống như những Thương Gia thường gặp: quyền lực, sắc sảo và oai vệ.



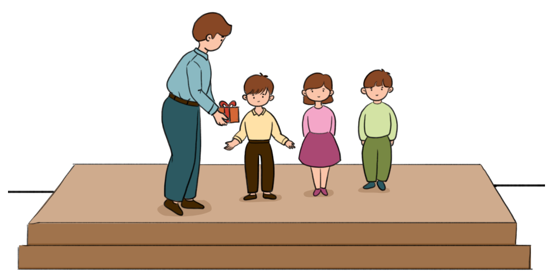
Theo quy định của Hiệp hội Thương gia dành cho những người ngoài, qua lời rỉ tai của bà lão, Thám tử có thể đứng dậy bước tới một nơi bất kỳ nào đó trong căn phòng và chỉ được hỏi câu hỏi "Khoảng cách từ chỗ tôi đứng đến người nói dối gần nhất trong số các anh là bao nhiêu?" cho tất cả những người trong phòng. Sau đó, mỗi người trong số 10 người ngồi xung quanh bàn sẽ trả lời Thám tử, lúc này đã cải trang thành một Thương gia muốn gia nhập Hiệp hội. Thám tử không được phép đứng lên mặt bàn và tất cả mọi người, kể cả Thám tử, đều được phép dùng thước để đo khoảng cách tuỳ ý. Ta cũng được biết rằng ngoài 10 người và Thám tử, trong phòng không còn có người lạ nào khác, hơn nữa 10 người đều biết rõ ai trong số họ là nói thật và ai trong số họ là nói dối. Em hãy cho biết Xuân Phong có thể sử dụng ít nhất bao nhiêu câu hỏi như trên để biết chắc chắn ai trong số những người ngồi quanh bàn là nói dối?

CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

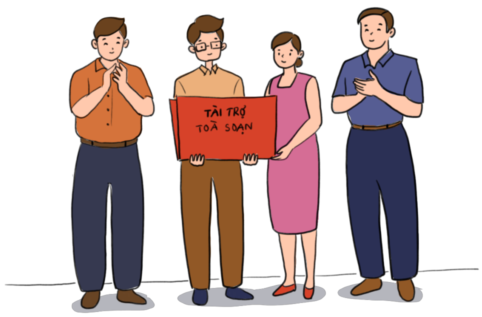
1. Tuấn và Tú cùng tham gia một giải thi đấu cờ vua cùng các bạn học sinh khác trong trường. Hai bạn tổng cộng ghi được 6.5 điểm, trong khi tất cả các bạn học sinh còn lại đều ghi được số điểm bằng nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu học sinh tham gia giải cờ vua đó? (Biết rằng trong giải thi đấu, mỗi người tham gia thi đấu đúng một ván với mỗi người còn lại, ghi được 1 điểm sau mỗi trận thắng, 0.5 điểm sau mỗi trận hoà và 0 điểm sau mỗi trận thua).

2. Lớp 6A gồm 22 bạn chia thành hai đội Xanh gồm các bạn nam và Đỏ gồm các bạn nữ để tổ chức thi tài đối đáp trả lời thông minh. Đầu tiên, bạn Hoa ở nhóm Đỏ đối đáp với 6 bạn nam ở nhóm Xanh và giành chiến thắng. Tiếp theo, bạn Mai ở nhóm Đỏ đối đáp với 7 bạn nam ở nhóm Xanh và cũng giành chiến thắng. Tiếp tục bạn Huệ ở nhóm Đỏ cũng chiến thắng 8 bạn nam ở nhóm Xanh. Cứ tiếp tục như vậy, cuối cùng bạn Hà ở nhóm Đỏ đã đối đáp thông minh với toàn bộ các bạn nam ở nhóm Xanh và giành chiến thắng chung cuộc. Hỏi trong lớp có tất cả bao nhiêu bạn nam?

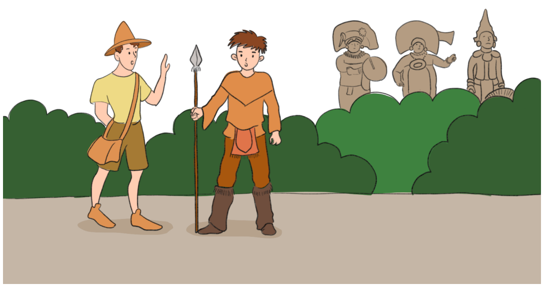
3. Có ba chủ doanh nghiệp tới thăm trường học cũ của mình, mang theo một số món quà với dự định sẽ trao tặng cho một nửa số học sinh đang học ở đó. Khi tất cả 252 em học sinh được mời xếp thành một hàng ngang, chủ doanh nghiệp thứ nhất tặng quà cho mỗi em đứng thứ tư trong hàng (các em ở số thứ tự $4, 8, 12$, v.v...). Chủ doanh nghiệp thứ hai lại tặng quà cho mỗi em đứng thứ bảy (các em ở số thứ tự $7, 14, 21$, v.v...). Chủ doanh nghiệp thứ ba lại trao tặng quà cho mỗi em đứng thứ 11 (các em ở số thứ tự $11, 22, 33$, v.v...). Hỏi có bao nhiêu em học sinh nhận được quà và bao nhiêu em không nhận được quà?



4. Có ba nhà tài trợ quyết định giúp đỡ một tạp chí khoa học thường thức với tên gọi là Phi. Nhà tài trợ Quốc trao tặng một khoản tiền tính bằng dollar gồm có 4 chữ số: 2 chữ số đứng trước dấu phẩy, và hai chữ số sau dấu phẩy, trong đó số cent lẻ (tức là hai chữ số đứng sau dấu phẩy) bằng với đúng số dollar chẵn (tức là hai chữ số đứng trước dấu phẩy; ta nhớ lại 100 cent $= 1$ dollar). Nhà tài trợ Minh tặng số tiền với số dollar chẵn lớn hơn 3 dollar so với số dollar chẵn mà nhà tài trợ Quốc đã tặng nhưng số cent lẻ lại ít hơn 8 lần số cent lẻ của nhà tài trợ Quốc. Nhà tài trợ Vũ hào phóng đem tặng số tiền bằng $1/7$ tổng số tiền của hai nhà tài trợ Quốc và Minh đã trao cộng lại. Hỏi số tiền ủng hộ của ba nhà tài trợ cho tạp chí Phi là bao nhiêu?



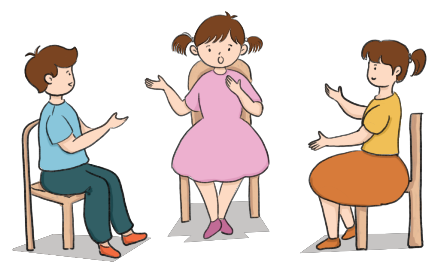
5. Trên hòn đảo Ngọc ở giữa một đại dương xanh ngắt nọ có 100 thổ dân sinh sống, một số người trong họ luôn nói dối, còn những người còn lại luôn nói thật. Mỗi một thổ dân thờ phụng đúng một trong ba loại thần: thần Mặt trời, thần Mặt trăng hoặc thần Đất. Người ta hỏi mỗi thổ dân ba câu hỏi sau đây:



1. Ông (bà) có thờ phụng thần Mặt trời hay không?
2. Ông (bà) có thờ phụng thần Mặt trăng hay không?
3. Ông (bà) có thờ phụng thần Đất hay không?

Có 60 người trả lời khẳng định "có" với câu hỏi thứ nhất, 40 người trả lời khẳng định "có" với câu hỏi thứ hai và 30 người trả lời khẳng định "có" với câu hỏi thứ ba. Hỏi trên đảo Ngọc có bao nhiêu thổ dân nói dối?

6. Có 100 em học sinh được mời tới buổi tổng kết cuối năm học của nhà trường. Các ghế trong phòng họp được xếp ngay ngắn thẳng hàng theo dạng một hình vuông với 10 dãy ghế, mỗi dãy có đúng 10 chiếc ghế. Buổi họp phải diễn ra muộn hơn do bị cắt điện, vì thế các em học sinh bắt đầu bàn luận trao đổi với các bạn bên cạnh về kết quả điểm trung bình của mình. Em học sinh nào thấy trong tất cả những bạn ngồi kề sát mình: bên trái, bên phải, đằng sau, đằng trước và theo các đường chéo, chỉ có tối đa một bạn có điểm trung bình cao hơn hoặc bằng điểm trung bình của mình, sẽ tự coi mình là "có thành tích".



Hỏi trong buổi họp đó có thể có tối đa bao nhiêu em học sinh đã tự coi mình là "có thành tích" trong học tập?

THE EXTREMAL PRINCIPLE

NGHIA DOAN[1]

In this article, we discuss the Extremal Principle and its applications. One of the simplest forms of the principle is as follow: "in a finite set of numbers, there is a number with minimal value, i.e. it is smaller than or equal to any other number in the set. Similarly there is a number with maximal value, i.e. it is larger than or equal to any other number in the set."

Proof by contradiction is an extremely useful tool when combining with the Extremal Principle, as you will see in below examples.

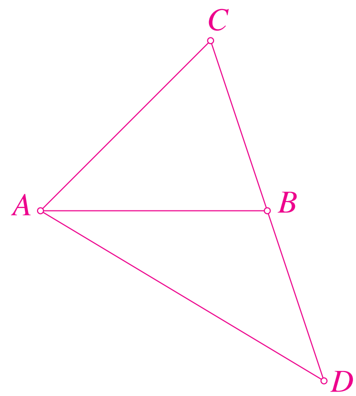
Example (Dancing at a party) At a party no boy danced with all the girls, but each girl dances with at least one boy. Prove that there are two pairs of girl–boy (g_1, b_1) and (g_2, b_2) who danced with each other but g_1 did not dance with b_2 and g_2 did not dance with b_1.

Solution. Let b_1 be *the boy who danced with the maximum number of girls.* Then there is a girl g_2 who he did not danced with. For g_2 there is a boy b_2 that (g_2, b_2) danced together. Among the girls who danced with b_1 there is at least one g_1 who did not danced with b_2, otherwise b_2 danced with g_2 and all the girls that b_1 danced with, meaning b_2 danced with more girls than b_1, contradicting with the choice of b_1.

Example (Infinity by contradiction) Ω is a set of points on the plane. Every point in Ω is a midpoint of two points in Ω. Show that Ω is infinite set.

Solution. Suppose that Ω is a finite set. According to the Extremal Principle, *there exists two points $A, B \in \Omega$, such that the distance AB is maximal.*

Now, since $B \in \Omega$, there exist two points $C, D \in \Omega$ so that B is the midpoint of CD.



Since one of the angles $\angle ABC$, $\angle ABD$, says $\angle ABD$ is at least 90°, thus in $\triangle ABD$, $AD > AB$. This contradicts the assumption that A, B are the two points in Ω, such that the distance AB is maximal.

Thus, there are no such two points A, B, so Ω is infinite set.

Example (How many olives did the knights eat?) At the dinner of King Anthony, several knights sits around a round table eating green olives. Minh, the Magician, made sure that each knight ate either twice as many olives or 10 olives less than his right neighbour. Is that possible that the knights could have eaten exactly 1001 olives?

Solution. Let assume that the knights have eaten exactly 1001 olives. Let choose the knight who *ate the smallest number of olives.* (If there are some of them, choose one.) His neighbour on the left, knight k, ate either 10 less or twice more. Since the knight we chose

[1]*Ottawa, Canada.*

ate the smallest number of olives, then knight k ate twice as many. Therefore, knight k ate an even number of olives.

The neighbour on the left of knight k ate either twice as many olives or 10 olives less, hence he ate an even number of olives as well. Making the full circle, we'll end us with the first knight, who must have eaten an even number of olives as well.

Therefore, the total number of olives must be an even number. The number of olives eaten cannot be 1001.

Example (Chop the flies) 25 flies are resting on the outdoor table in the garden, waiting for lunch to be served. It is known that for any three of them, two are at a distance less than 20 cm; and there are at least a pair of flies that are further than 20 cm from each other.

Minh's mother gave him a fly swatter, shown below, with a hoop of radius 20 cm, With a single strike he can swat the flies where the hoop landed. In *at least* how many strikes can he swat all of them? *Note that Minh is so fast that the flies do not have time for reaction during and between his lightning strikes.*

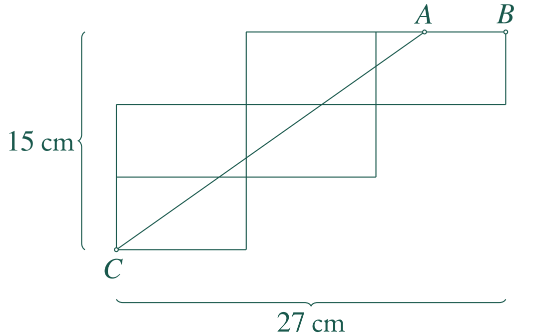
Solution. If no 2 flies are further than 20 cm from each other, Minh can strike them all in 1 strike by aiming the center of the swatter at any fly. But this is not the case, so let's assume there are 2 flies, A and B, that are more than 20 cm apart. Then, every other fly is either in a 20 cm radius of A or in a 20 cm radius of B. Out of the 23 remaining flies either at least 12 will be in the 20 cm radius of A or 12 will be in the 20 cm radius of B. Swatting that the A or B fly with the center of the swatter kills at least 13.

Thus, by 2 strikes, he can swat them all.

- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P751–P760: trước ngày 15/12/2023.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P751. (Mức B) Trong hình dưới đây: 5 hình chữ nhật bằng nhau được sắp xếp lại thành một hình có độ dài 27 cm và độ rộng 15 cm. Biết rằng đoạn thẳng AC chia hình đó thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính độ dài đoạn AB.



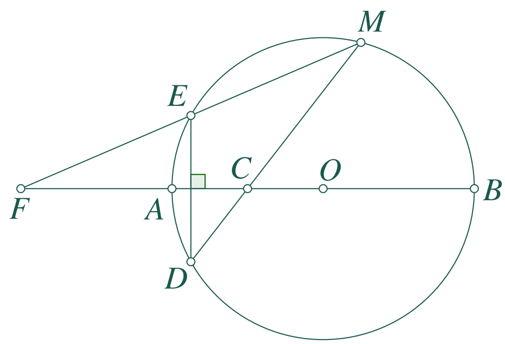
Đăng Hải, Hà Nội (st)

P752. (Mức B) Cho x, y, z là các số thực thoả mãn $x^2y + y^2z + z^2x = 1$ và $xy^2 + yz^2 + zx^2 = 2$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \left(x^2+xy+y^2\right)\left(y^2+yz+z^2\right)\left(z^2+zx+x^2\right).$$

Trần Quốc Luật, Tp. Hồ Chí Minh

P753. (Mức B) Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và C là trung điểm của OA. M là một điểm bất kì nằm trên (O). Đường thẳng MC cắt (O) tại điểm thứ hai D. Đường thẳng qua D và vuông góc với AB cắt (O) tại điểm thứ hai E. Đường thẳng ME cắt đường thẳng AB tại F. Tìm vị trí điểm M trên (O) sao cho tổng $EF + MC$ có giá trị nhỏ nhất.



Trần Thanh Hưng, Phú Yên

P754. (Mức B) Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{a(b+c)}}+\frac{c+a}{\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{b(c+a)}}+\frac{a+b}{\sqrt{c^2+ab}+\sqrt{c(a+b)}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Nguyễn Việt Hùng, Hà Nội

P755. (Mức B) Trong một hình chữ nhật có kích thước 5×10, lấy 1351 điểm. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính bằng $\frac{1}{4}$ và chứa ít nhất 4 điểm trong nó.

Phạm Nhật Nguyệt, Hải Phòng (st)

P756. (Mức B) Một số đẹp là một số nguyên dương n sao cho trong các số $5, n+5, 2n+5, \ldots, 21n+5$ luôn tìm được ít nhất một số có cùng số dư với tích tất cả các số đó khi chia cho 23. Tìm tất cả các số đẹp.

Hà Duy Hưng, Hà Nội

P757. (Mức A) Với mỗi số nguyên dương n, ta kí hiệu a_n là nghiệm thực lớn nhất của phương trình

$$x^{2023}-nx^{2022}-nx^{2021}-\cdots-nx+1=0$$

Xác định tất cả các số thực C, để

$$a_1+\cdots+a_n>C.n^2$$

với mọi số nguyên dương n.

Tô Trung Hiếu, Nghệ An

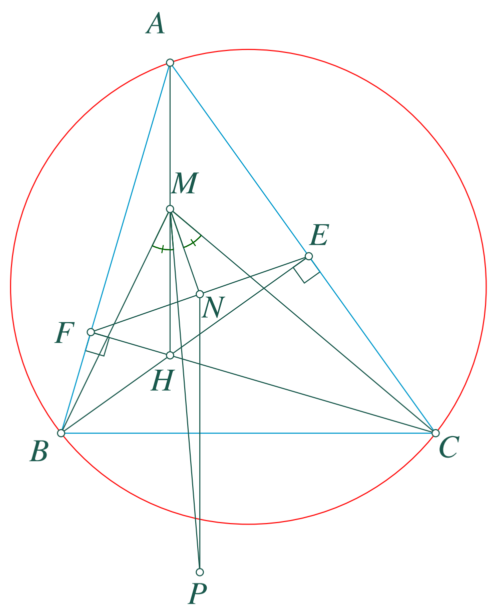
P758. (Mức A) Tìm số thực k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau:

$$a+b+c-3\geq k(a-b)(b-c)(c-a)$$

đúng với mọi số thực không âm a,b,c thoả mãn $ab+bc+ca=3$.

Đinh Bình Dương, Hà Nội

P759. (Mức A) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có H là giao điểm các đường cao BE, CF của tam giác. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH, EF. Gọi P là điểm đối xứng với N qua BC. Chứng minh rằng $\angle BMP=\angle NMC$.



Lưu Công Đông, Hà Nội

P760. (Mức A) Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1=4$ và

$$x_{n+1}=45x_n+\sqrt{2024x_n^2+16}$$

với mọi số nguyên dương n.

Tìm tất cả các số nguyên a sao cho: $a^n\left(\frac{x_{2n}}{x_n}+2\right)$ là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

Nguyễn Đức Khải, Nam Định

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P720. (Mức A) Một thành phố có 1332 căn nhà. Mỗi dịp Noel, Ông già Noel sẽ đến thăm các căn nhà đó theo thứ tự tùy ý. Chứng minh rằng, có thể tìm được 12 căn nhà trong thành phố đó, sao cho trong ba năm liên tiếp, có ít nhất hai năm mà Ông già Noel đến thăm 12 căn nhà đó theo cùng một thứ tự.

Lời giải (*dựa theo Đáp án của bài toán*).

Trước hết, ta nhắc lại kết quả nổi tiếng sau:

Định lý Erdos – Szekeres. Cho các số nguyên dương $p,q > 1$. Khi đó, mỗi dãy $(p-1)(q-1)+1$ số thực đôi một phân biệt sẽ chứa một dãy con tăng có p số hạng, hoặc chứa một dãy con giảm có q số hạng.

Chứng minh.

Đặt $N = (p-1)(q-1)+1$.

Xét dãy số thực $x_1, x_2, \ldots, x_N$ tùy ý, thỏa mãn $x_i \neq x_j$, với mọi $i, j \in \{1;2;\ldots;N\}$ và $i \neq j$. Với mỗi $i \in \{1;2;\ldots;N\}$, ký hiệu d_i là số các số hạng của dãy con tăng có nhiều số hạng nhất và có x_i là số hạng có giá trị lớn nhất; ký hiệu n_i là số các số hạng của dãy con giảm có nhiều số hạng nhất và có x_i là số hạng có giá trị bé nhất.

Xét các cặp số (d_i, n_i), $i = 1, 2, \ldots, N$.

Dễ thấy, với $1 \leq i < j \leq N$, ta có $d_i < d_j$ nếu $x_i < x_j$, và $n_i < n_j$ nếu $x_i > x_j$. Vì vậy, N cặp (d_i, n_i), $i = 1, 2, \ldots, N$, đôi một khác nhau. (1)

Nhận thấy, nếu với mọi $i \in \{1;2;\ldots;N\}$, $1 \leq d_i \leq p-1$ và $1 \leq n_i \leq q-1$, thì trong N cặp (d_i, n_i), $i = 1, 2, \ldots, N$, chỉ có tối đa $(p-1)(q-1)$ cặp đôi một khác nhau, mâu thuẫn với (1) (do $(p-1)(q-1) < N$). Vì vậy, phải tồn tại $i \in \{1;2;\ldots;N\}$ sao cho $d_i \geq p$, hoặc tồn tại $j \in \{1;2;\ldots;N\}$ sao cho $n_j \geq q$. Từ đây, hiển nhiên ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu của định lý.

Trở lại bài toán.

Xét ba năm liên tiếp tùy ý.

Ở năm thứ nhất, theo chân Ông già Noel, ta lần lượt đánh số các căn nhà mà Ông tới thăm, bởi $1, 2, \ldots, 1332$. Ta sẽ gọi căn nhà được đánh số i là căn nhà i.

Khi đó, ở năm thứ hai, liệt kê các căn nhà theo thứ tự mà Ông già Noel lần lượt tới thăm, ta sẽ thu được một hoán vị của $1, 2, \ldots, 1332$:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{1332}. \qquad (2)$$

Dễ thấy, nếu trong dãy (2) tồn tại một dãy con tăng có 12 số hạng thì 12 số hạng của dãy con đó sẽ là 12 số hạng nằm theo cùng một thứ tự trong dãy $1, 2, \ldots, 1332$ và trong dãy (2). Vì thế, ta có 12 căn nhà, mà Ông già Noel tới thăm ở năm thứ nhất và năm thứ hai theo cùng một thứ tự.

Xét trường hợp ngược lại, trong dãy (2) không tồn tại một dãy con tăng có 12 số hạng.

Khi đó, do

$$1332 = (12-1)(122-1)+1,$$

nên theo định lý Erdos – Szekeres, trong dãy (2) phải tồn tại một dãy con giảm có 122 số hạng. Giả sử dãy con đó là

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{122}}. \qquad (3)$$

Xét năm thứ ba. Giả sử trong năm này, Ông già Noel tới thăm các căn nhà thuộc dãy (3) theo thứ tự:

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{122}}. \qquad (4)$$

Dễ thấy, nếu trong dãy (4) tồn tại một dãy con tăng có 12 số hạng thì 12 số hạng của dãy con đó sẽ là 12 số hạng nằm trong dãy $1, 2, \ldots, 1332$ và dãy (4) theo cùng một thứ tự. Vì thế, ta có 12 căn nhà, mà Ông già Noel tới thăm ở năm thứ nhất và năm thứ ba theo cùng một thứ tự.

Xét trường hợp ngược lại, trong dãy (4) không tồn tại một dãy con tăng có 12 số hạng.

Khi đó, do

$$122 = (12-1)(12-1)+1,$$

nên theo định lý Erdos – Szekeres, trong dãy (4) phải tồn tại một dãy con giảm có 12 số hạng; ký hiệu dãy con này là (5).

Do tất cả 12 số hạng của dãy (5) đều là số hạng của dãy (3), và do cả hai dãy (3), (5) cùng là dãy giảm, nên tất cả 12 số hạng của dãy (5) nằm trong dãy (3) và dãy (4) theo cùng một thứ tự. Vì thế, ta có 12 căn nhà, mà Ông già Noel tới thăm ở năm thứ hai và năm thứ ba theo cùng một thứ tự.

Kết quả xét các trường hợp có thể xảy ra trên đây cho ta điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Cho tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí vẫn chưa nhận được lời giải nào từ bạn đọc.

Nguyễn Khắc Minh

P721. (Mức B) Trên mỗi cạnh của một hình vuông, bạn An viết một số nguyên dương. Sau đó, tại mỗi đỉnh của hình vuông đó, bạn An viết một số bằng tích của hai số đã được viết ở hai cạnh đi qua đỉnh đó. Biết rằng, tổng các số ở các đỉnh của hình vuông bằng 1333. Hỏi, tổng các số được viết ở các cạnh của hình vuông đó có thể bằng bao nhiêu?

Lời giải (*dựa theo ý giải của một bạn học sinh cấp THCS*).

Giả sử các số nguyên dương được viết ở các cạnh của hình vuông, tính theo chiều kim đồng hồ, lần lượt là a, b, c, d.

Khi đó, các số được viết ở bốn đỉnh của hình vuông đó sẽ là ab, bc, cd và da.

Theo giả thiết của bài ra, ta có:

$$\begin{aligned} 31\cdot 43 = 1333 &= ab+bc+cd+da \\ &= (a+c)(b+d). \qquad (*) \end{aligned}$$

Do $a+c, b+d$ là các số nguyên dương lớn hơn 1 (vì $a,b,c,d \in \mathbb{N}^*$) và 31, 43 là các số nguyên tố, nên

$$(*) \Leftrightarrow (a+c, b+d) \in \{(31,43);(43,31)\}.$$

Vì vậy, $a+b+c+d = 31+43 = 74$.

Vậy, tổng các số được viết ở các cạnh của hình vuông bằng 74.

Bình luận và Nhận xét

Tuy bài đã ra là một bài toán đơn giản, nhưng rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có một số lời giải thiếu chặt chẽ, thiếu chính xác, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi chuyên môn sau:

– Bỏ sót phân tích $1333 = 1\cdot 1333$, khi xét các phân tích số 1333 thành tích của hai số nguyên dương;

– Thiếu khẳng định 1333 chỉ có đúng hai cách phân tích thành tích của hai số nguyên dương, là

$$1333 = 1\cdot 1333 \text{ và } 1333 = 31\cdot 43.$$

Hà Thanh

P722. (Mức B) Cho a, b, c là các số thực khác 0, thỏa mãn:

$$\begin{cases} a+b+c = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ a^3+b^3+c^3 = \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$a^{2023}+b^{2023}+c^{2023} = \frac{1}{a^{2023}}+\frac{1}{b^{2023}}+\frac{1}{c^{2023}}.$$

Lời giải (*của người chấm bài*).

Đặt $x = a-\dfrac{1}{a}, y = b-\dfrac{1}{b}$ và $z = c-\dfrac{1}{c}$.

Theo giả thiết của bài ra, ta có:

$$x+y+z = (a+b+c)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 0, \quad (1)$$

và

$$\begin{aligned} &x^3+y^3+z^3 \\ &= \left(a-\frac{1}{a}\right)^3+\left(b-\frac{1}{b}\right)^3+\left(c-\frac{1}{c}\right)^3 \\ &= \left(a^3+b^3+c^3-\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}-\frac{1}{c^3}\right) \\ &\quad -3\left(a+b+c-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right) \\ &= 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) suy ra $x+y = -z$. Do đó, từ (2) ta được:

$$0 = x^3+y^3+z^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3$$
$$= (-z)^3 + 3xyz + z^3 = 3xyz.$$

Vì vậy, $x = 0$, hoặc $y = 0$, hoặc $z = 0$. Điều này cho thấy, trong ba số a, b, c, có ít nhất một số bằng nghịch đảo của nó.

Do vai trò của a, b, c trong bài toán hoàn toàn như nhau, nên không mất tính tổng quát, giả sử

$$a = \frac{1}{a}. \qquad (3)$$

Khi đó, từ giả thiết

$$a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

suy ra

$$b+c = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{bc}.$$

Do đó, $b+c = 0$ hoặc $bc = 1$.

– Nếu $b+c = 0$ thì $b = -c$. Từ đây và (3), suy ra

$$a^{2023} + b^{2023} + c^{2023}$$
$$= \frac{1}{a^{2023}} + (-c)^{2023} + c^{2023}$$
$$= \frac{1}{a^{2023}} = \frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{(-c)^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}}$$
$$= \frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}}.$$

– Nếu $bc = 1$ thì

$$\frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}}$$
$$= a^{2023} + \frac{b^{2023}+c^{2023}}{(bc)^{2023}} \quad (\text{do } (3))$$
$$= a^{2023} + b^{2023} + c^{2023}.$$

Vì vậy, ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Ở bài đã ra, nếu thay giả thiết

$$a^3 + b^3 + c^3 = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3},$$

bởi giả thiết "$|abc| = 1$", ta có thể dễ dàng chứng minh được rằng

$$a^n + b^n + c^n = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n},$$

với mọi số nguyên dương $n > 1$.

2. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có ba lời giải sai, do người giải bài đã mắc ít nhất một trong các lỗi chuyên môn sau:

– Chưa xét hết các trường hợp có thể xảy ra đối với a, b, c;

– Nhầm lẫn giữa "hoặc" và "đồng thời".

Hà Thanh

P723. (Mức B) Cho số nguyên dương k và cho A là số tự nhiên gồm k chữ số 9. Gọi m, n, p tương ứng là tổng các chữ số của A, A^2, A^3. Chứng minh rằng $p = 2m = 2n$.

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Chánh Thiện, lớp 9/12, trường THCS Lê Quý Đôn, Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh*).

Theo giả thiết của bài ra, $A = \underbrace{99\ldots9}_{k \text{ c/s } 9}$. (1)

Vì vậy, $m = 9k$. (2)

Từ (1), ta có:

$$A^2$$
$$= \left(10^k - 1\right)^2 = 10^{2k} - 2 \cdot 10^k + 1$$
$$= 1\underbrace{0\ldots0}_{2k \text{ c/s } 0} - 2\underbrace{0\ldots0}_{k \text{ c/s } 0} + 1 = \underbrace{9\ldots9}_{k-1 \text{ c/s } 9}\,8\,\underbrace{0\ldots0}_{k-1 \text{ c/s } 0}\,1.$$

$$A^3$$
$$= \left(10^k - 1\right)^3 = 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1$$
$$= 10^{2k+1}\left(10^{k-1} - 1\right) + 7 \cdot 10^{2k} + 2 \cdot 10^k$$
$$+ 10^k - 1$$
$$= \underbrace{9\ldots9}_{k-1 \text{ c/s } 9} \cdot 10^{2k+1} + 7 \cdot 10^{2k} + 2 \cdot 10^k + 10^k - 1$$
$$= \underbrace{9\ldots9}_{k-1 \text{ c/s } 9}\,\underbrace{0\ldots0}_{2k+1 \text{ c/s } 0} + 7\underbrace{0\ldots0}_{2k \text{ c/s } 0} + 2\underbrace{0\ldots0}_{k \text{ c/s } 0} + \underbrace{9\ldots9}_{k \text{ c/s } 9}$$
$$= \underbrace{9\ldots9}_{k-1 \text{ c/s } 9}\,7\,\underbrace{0\ldots0}_{k-1 \text{ c/s } 0}\,2\underbrace{9\ldots9}_{k \text{ c/s } 9}.$$

Vì vậy

$$n = 9(k-1)+8+1 = 9k, \qquad (3)$$
$$p = 9(k-1)+7+2+9k = 18k. \qquad (4)$$

Từ (2), (3) và (4), suy ra $p = 2m = 2n$, là điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Lưu Thị Thanh Hà

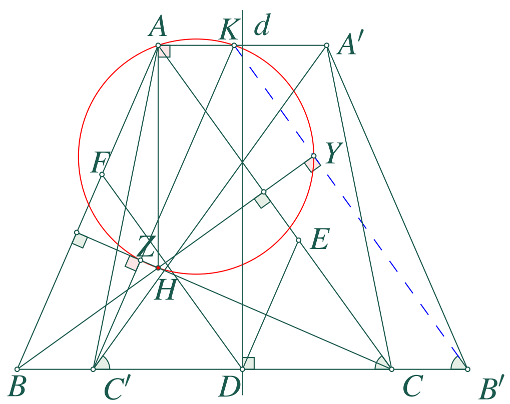
P724. (Mức B) Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB, tương ứng, lấy các điểm D, E, F, sao cho $AEDF$ là hình bình hành (D, E, F không trùng với các đỉnh của tam giác). Gọi Y là điểm đối xứng với B qua DF; Z là điểm đối xứng với C qua DE. Chứng minh rằng, đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ đi qua trực tâm của tam giác ABC.

Lời giải (*dựa theo Đáp án của BBT Tạp chí*).

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

Xét hai trường hợp sau:

• *Trường hợp 1: D không là trung điểm của BC.*



Gọi d là đường thẳng vuông góc với BC tại D. Gọi A', B', C' tương ứng là điểm đối xứng với A, B, C qua d. Gọi K là giao điểm của $C'Z$ và AA'.

Do Z đối xứng với C qua DE (giả thiết) nên DE là đường trung trực của CZ. Từ đây và định nghĩa điểm C', suy ra $DZ = DC = DC'$. Do đó

$$\angle C'ZC = 90^\circ; \qquad (1)$$

suy ra, $C'Z \parallel DE$ (vì cùng vuông góc với CZ). Mà $DE \parallel BA$ (do tứ giác $AEDF$ là hình bình hành), nên $C'Z \parallel BA$. (2)

Xét các điểm Y, B, B' một cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được

$$\angle B'YB = 90^\circ; \qquad (3)$$
$$\text{và } B'Y \parallel CA. \qquad (4)$$

Từ (1) và (2) suy ra $CZ \perp BA$; mà CH cũng vuông góc BA (do H là trực tâm tam giác ABC), nên ba điểm C, H, Z thẳng hàng. Do đó, theo (1), ta có $\angle HZC; = 90^\circ$; suy ra $\angle HZK = 90^\circ$ (5)

Một cách hoàn toàn tương tự, từ (3) và (4) suy ra $\angle HYB; = 90^\circ$. (6)

Do cùng vuông góc với d nên $AK \parallel BC'$ (7)

Từ (2) và (7) suy ra tứ giác $AKC'B$ là một hình bình hành. Do đó, $AB = KC'$. (8)

Do phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách, nên $AB = A'B'$. Kết hợp với (8), ta được $KC' = A'B'$. Mà $KA' \parallel C'B'$ (vì cùng vuông góc với d), nên $KA'B'C'$ là một hình thang cân. Suy ra

$$\angle KB'C' = \angle A'C'B'. \qquad (9)$$

Do phép đối xứng trục bảo toàn góc, nên $\angle A'C'B' = \angle ACB$. Kết hợp với (9), ta được

$$\angle KB'C' = \angle ACB.$$

Do đó, Kết hợp với (4), suy ra ba điểm B', Y, K thẳng hàng. Vì thế, từ (6) suy ra

$$\angle HYK = 90^\circ. \qquad (10)$$

Do $AK \parallel BC$ (vì cùng vuông góc với d) và $AH \perp BC$ (vì H là trực tâm tam giác ABC), nên

$$\angle HAK = 90^\circ. \qquad (11)$$

Từ (5), (10) và (11) suy ra, các điểm A, Y, Z, H, K cùng nằm trên đường tròn đường kính HK.

• *Trường hợp 2: D là trung điểm của BC.*

Trong trường hợp này, DE và DF là các đường trung bình của tam giác ABC. Do đó, Y là chân đường cao kẻ từ B, và Z là chân đường cao kẻ từ C, của tam giác ABC. Vì thế, các điểm A, Y, Z, H cùng nằm trên đường tròn đường kính AH.

Kết quả xét hai trường hợp trên đây cho ta điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Theo đánh giá chủ quan của người chấm bài, bài đã ra là một bài toán hay, và không quá khó đối với học sinh khá, giỏi toán cấp THCS.

2. Với các giả thiết của bài đã ra, có thể chứng minh được rằng, tỷ số không thay đổi, khi điểm D di động trên cạnh BC sao cho D không trùng với B, C và trung điểm của BC. Mời các độc giả có quan tâm cùng chứng minh điều vừa nêu.

3. Hầu hết các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều có nhược điểm: lời giải chỉ đúng cho thế hình mà người giải bài đã vẽ. Tất cả những lời giải như vậy, hiển nhiên, không là lời giải hoàn chỉnh.

Hạ Vũ Anh

P725. (Mức B) Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}.$$

Lời giải (*dựa theo lời giải của các bạn: Lê Nguyễn Hoàng Nhật Đình, lớp 9C, trường THCS Nguyễn Thái Bình, tỉnh Cà Mau, và Nguyễn Chánh Thiện, lớp 9/12, trường THCS Lê Quý Đôn, Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh*).

Ký hiệu P là biểu thức ở vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có:

$$P=\frac{a^6}{a^4(b+c)}+\frac{b^6}{b^4(c+a)}+\frac{c^6}{c^4(a+b)}$$
$$\geq\frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{a^4(b+c)+b^4(c+a)+c^4(a+b)}. \quad (1)$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{a^4(b+c)+b^4(c+a)+c^4(a+b)}\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}. \quad (2)$$

Thật vậy, ta có:

$$(2)$$
$$\Leftrightarrow 2\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 3\left(a^4(b+c)+b^4(c+a)+c^4(a+b)\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(a^5-3a^4b+2a^3b^2+2a^2b^3-3ab^4+b^5\right)+\left(b^5-3b^4c+2b^3c^2+2b^2c^3-3bc^4+c^5\right)+\left(c^5-3c^4a+2c^3a^2+2c^2a^3-3ca^4+a^5\right)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow(a+b)(a-b)^4+(b+c)(b-c)^4+(c+a)(c-a)^4\geq 0. \quad (3)$$

Vì $a,b,c>0$ (giả thiết), nên (3) là bất đẳng thức đúng. Vì vậy, (2) được chứng minh.

Từ (1) và (2), hiển nhiên suy ra bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Dễ thấy, dấu "=" ở bất đẳng thức của đề bài xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

2. Trong số các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải sai, do người giải bài đã ngộ nhận rằng, có thể nhân hai bất đẳng thức trái chiều, $A\geq B>0$ và $0<C\leq D$, để suy ra bất đẳng thức $AC\leq BD$.

3. Trong Đề thi chọn Đội tuyển học sinh Việt Nam tham dự Olympic Toán học Quốc tế năm 1982 (IMO 1982) có bài toán sau:

Bài toán thi chọn Đội tuyển học sinh VN tham dự IMO 1982. *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}.$$

Với a,b,c là các số thực dương, theo bất đẳng thức hoán vị, ta có:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{a+b+c}{2}.$$

Vì thế, có thể nói, bất đẳng thức ở bài đã ra là một phương án làm chặt bất đẳng thức trong Đề thi chọn Đội tuyển học sinh VN tham dự IMO 1982.

4. Có thể dễ dàng chứng minh được rằng, $k=3$ là số thực dương lớn nhất, sao cho

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{a^k+b^k+c^k}{a^{k-1}+b^{k-1}+c^{k-1}},$$

với mọi $a,b,c>0$.

Trần Nam Dũng

P726. (Mức A) Cho bảng ô vuông kích thước 2023×2023, mà ở mỗi ô vuông con được đặt ít nhất một viên bi. Cho phép thay đổi số bi trong bảng, theo quy tắc: Mỗi lần, thêm bi vào mỗi ô vuông con của một cột tùy ý, sao cho số bi ở mỗi ô của cột đó tăng lên gấp đôi; hoặc bớt một viên bi ở mỗi ô vuông con của một hàng tùy ý, mà ở tất cả các ô của hàng đó đều đang có bi. Chứng minh rằng, ta có thể thực hiện một số lần phép thay đổi bi nói trên, để trong bảng không còn viên bi nào.

Lời giải (*của người chấm bài*).

Để thuận tiện cho việc diễn đạt, ta quy ước:

– Gọi phép thay đổi số bi ở một cột, theo quy tắc của đề bài, là phép "*nhân đôi*";

– Gọi phép thay đổi số bi ở một hàng, theo quy tắc của đề bài, là phép "*giảm bớt*".

Ta có Nhận xét sau:

Nhận xét. Nhờ việc thực hiện một số hữu hạn lần liên tiếp phép thay đổi bi đã cho trong đề bài, có thể làm cho một hàng tùy ý của bảng không còn viên bi nào.

Chứng minh.

Xét một hàng tùy ý của bảng; gọi là hàng H. Có thể xảy ra các trường hợp sau:

• *Trường hợp* 1*:* Tất cả các ô của hàng H đều có số bi như nhau.

Giả sử tất cả các ô đều có k viên bi.

Khi đó, bằng cách thực hiện liên tiếp k lần phép "giảm bớt" đối với hàng H, ta sẽ làm cho hàng này không còn viên bi nào.

• *Trường hợp* 2*:* Tất cả các ô của hàng H không có số bi như nhau.

Có thể xảy ra hai trường hợp nhỏ sau:

◇ *Trường hợp* 2.1*:* Tồn tại ô có đúng 1 viên bi.

Xét phương án thực hiện phép thay đổi bi, gồm hai bước liên tiếp sau:

– Bước 1: Lần lượt, thực hiện phép "nhân đôi" đối với từng cột chứa ô có 1 viên bi của hàng H;

– Bước 2: Thực hiện phép "giảm bớt" đối với hàng H.

Ta gọi mỗi phương án nêu trên là một "*tổ hợp tăng – giảm*".

Dễ thấy:

– Ô có đúng 1 viên bi, tại thời điểm ngay trước khi thực hiện "tổ hợp tăng – giảm", vẫn sẽ có đúng 1 viên bi tại thời điểm ngay sau khi thực hiện "tổ hợp tăng – giảm" đó;

– Ô có nhiều bi nhất trong hàng, tại thời điểm ngay trước khi thực hiện "tổ hợp tăng – giảm", vẫn sẽ là ô có nhiều bi nhất trong hàng tại thời điểm ngay sau khi thực hiện "tổ hợp tăng - giảm" đó, nhưng số bi trong ô này bị giảm đi 1.

Từ đó suy ra, nếu gọi M là số viên bi của ô có nhiều bi nhất trong hàng H tại thời điểm ban đầu (tức, thời điểm bắt đầu "dọn" bi trong hàng đó), thì bằng cách thực hiện liên tiếp $M-1$ lần "tổ hợp tăng – giảm", ta sẽ làm cho mỗi ô trong hàng H đều có đúng 1 viên bi. Lúc này, bằng cách thực hiện phép "giảm bớt", ta sẽ làm cho trong hàng H không còn viên bi nào.

◇ *Trường hợp* 2.2*:* Mỗi ô đều có ít nhất 2 viên bi.

Gọi m là số viên bi của ô có ít bi nhất trong hàng H, tại thời điểm ban đầu; ta có $m\geq2$.

Dễ thấy, bằng cách thực hiện liên tiếp $m-1$

lần phép "giảm bớt" đối với hàng H, ta sẽ làm cho hàng đó có những ô có đúng 1 viên bi. Lúc này, trạng thái bi ở hàng H là trường hợp 2.1. Vì thế, ta có thể làm cho trong hàng đó không còn viên bi nào.

Nhận xét được chứng minh.

Dễ thấy, khi làm cho một hàng nào đó không còn bi, theo cách đã trình bày trong chứng minh của Nhận xét trên, ta không làm xuất hiện bi ở những ô không có bi của các hàng khác. Vì vậy, theo Nhận xét trên, bằng cách lần lượt "dọn" bi ở từng hàng, ta sẽ làm cho trong bảng không còn viên bi nào.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, đều là lời giải không hoàn chỉnh, do các lập luận trong lời giải không chặt chẽ, thiếu chính xác.

Nguyễn Khắc Minh

P728. (Mức A) Tìm tất cả các cặp số hữu tỷ (a,b) sao cho tồn tại duy nhất hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$, thỏa mãn:

$$f(x+f(y)) = a\cdot f(x)+f(by)-y,$$

với mọi $x,y\in\mathbb{Q}$.

Lời giải (*của người chấm bài*).

Giả sử $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn

$$f(x+f(y)) = a\cdot f(x)+f(by)-y, \quad (1)$$

với mọi $x,y\in\mathbb{Q}$; trong đó, a,b là các hằng số hữu tỷ.

Do f xác định trên $\mathbb{Q}$ và thỏa mãn (1) với mọi $x,y\in\mathbb{Q}$, nên phải có

$$x+f(y)\in\mathbb{Q}$$

với mọi $x,y\in\mathbb{Q}$.

Suy ra, $f(x)\in\mathbb{Q}$ với mọi $x\in\mathbb{Q}$ (2)

Trong (1), cho $y=0$, ta được:

$$f(x+f(0)) = a\cdot f(x)+f(0), \quad (3)$$

với mọi $x\in\mathbb{Q}$.

Với mỗi $x\in\mathbb{Q}$, đặt $g(x)=f(x)-f(0)$; ta có $g(0)=0$.

Do f là hàm số xác định trên $\mathbb{Q}$ và lấy giá trị trong $\mathbb{Q}$ (theo (2)), nên g là một hàm số xác định trên $\mathbb{Q}$ và lấy giá trị trong $\mathbb{Q}$.

Với x,y tùy ý thuộc $\mathbb{Q}$, theo (1) và (3), ta có:

$$\begin{aligned} & g(x+g(y)) \\ &= f(x+f(y)-f(0))-f(0) \\ &= a\cdot f(x-f(0))+f(by)-y-f(0) \\ &= f(x)-f(0)+f(by)-y-f(0) \\ &= g(x)+g(by)-y. \end{aligned}$$

Như vậy, ta đã chứng minh được:

$$g(x+g(y)) = g(x)+g(by)-y, \quad (4)$$

với mọi $x,y\in\mathbb{Q}$.

Trong (4), cho $x=0$, với lưu ý $g(0)=0$ ta được:

$$g(g(y)) = g(by)-y, \quad (5)$$

với mọi $y\in\mathbb{Q}$. Suy ra

$$g(g(g(y))) = g(g(by)-y), \quad (6)$$

với mọi $y\in\mathbb{Q}$.

Trong (5), thay y bởi $g(y)$ ta được:

$$g(g(g(y))) = g(b\cdot g(y))-g(y), \quad (7)$$

với mọi $y\in\mathbb{Q}$.

Trong (4), thay đồng thời x bởi $-y$ và y bởi by, ta được:

$$g(g(by)-y) = g(-y)+g\left(b^2y\right)-by, \quad (8)$$

với mọi $y\in\mathbb{Q}$.

Từ (6), (7) và (8), suy ra

$$g(b\cdot g(y))-g(y) = g(-y)+g\left(b^2y\right)-by,$$

với mọi $y\in\mathbb{Q}$.

Do đó

$$\begin{aligned} & g\left(b^2y\right)-by \\ &= g(b\cdot g(y))-g(y)-g(-y), \quad (9) \end{aligned}$$

với mọi $y\in\mathbb{Q}$.

Trong (4), thay y bởi $g(y)$ và sử dụng (5), ta được:

$$\begin{aligned} & g(x+g(by)-y) \\ &= g(x)+g(b\cdot g(y))-g(y), \quad (10) \end{aligned}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$.

Trong (4), thay đồng thời x bởi $x-y$ và y bởi by, ta được:

$$g(x+g(by)-y) = g(x-y)+g\left(b^2y\right)-by, \quad (11)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$.

Từ (11), (9) và (10), suy ra

$$g(x-y) = g(x)+g(-y), \quad (12)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$.

Trong (12), thay y bởi $(-y)$ ta được:

$$g(x+y) = g(x)+g(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$.

Sử dụng hệ thức vừa thu được ở trên, bằng phương pháp quy nạp theo $n \in \mathbb{N}^*$, dễ dàng chứng minh được

$$g(nx) = n \cdot g(x),$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và với mọi $x \in \mathbb{Q}$.

Từ đó, dễ dàng chứng minh được

$$g\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} \cdot g(1),$$

với mọi $m \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Vì vậy, $g(x) = \alpha x$ với α là một hằng số hữu tỷ.

Suy ra

$$f(x) = \alpha x+\beta, \quad (13)$$

với α, β là các hằng số hữu tỷ.

Ngược lại, thay (13) vào (1), ta được:

$$\alpha(1-a)x+\left(\alpha^2-\alpha b+1\right)y+\alpha\beta-a\beta=0,$$

với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$.

Điều này tương đương với

$$\begin{cases} (1-a)\alpha = 0 \\ \alpha^2 - b\alpha + 1 = 0 \\ (\alpha - a)\beta = 0 \end{cases}. \quad (\mathrm{I})$$

Như vậy, $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn (1) khi và chỉ khi f là hàm số được xác định bởi (13); trong đó, α, β là nghiệm của hệ phương trình (I) (ẩn α, β).

Do đó, (a, b) là cặp số hữu tỷ thỏa mãn yêu cầu đề bài khi và chỉ khi a, b là các số hữu tỷ sao cho hệ phương trình (I) (ẩn α, β) có nghiệm duy nhất.

Do phương trình thứ hai của hệ (I) không có nghiệm $\alpha = 0$ nên hệ đó có nghiệm chỉ khi phương trình thứ nhất của nó có nghiệm $\alpha \neq 0$. Điều vừa nêu xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$.

Với $a = 1$, dễ thấy, hệ (I) sẽ có vô số nghiệm, nếu phương trình thứ hai của nó có nghiệm $\alpha = 1$.

Vì vậy, hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a = 1$ và phương trình thứ hai của hệ đó có nghiệm duy nhất, khác 1. Điều vừa nêu xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b^2 - 4 = 0 \\ b \neq 2. \end{cases} \quad (\mathrm{II})$$

Giải hệ (II), ta được $b = -2$.

Vậy, $(a, b) = (1, -2)$ là cặp số hữu tỷ duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

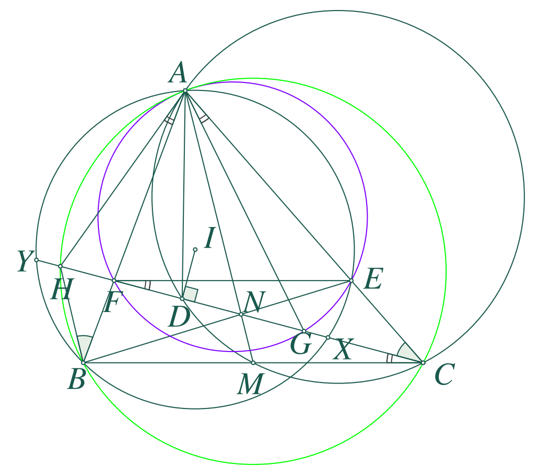
1. Từ Lời giải trên, hiển nhiên thấy, hàm số $f(x) = -x$ xác định trên $\mathbb{Q}$, là nghiệm hàm duy nhất của phương trình hàm đã nêu trong đề bài, ứng với $(a, b) = (1, -2)$.

2. Tạp chí chỉ nhận được duy nhất lời giải cho bài đã ra, và rất tiếc, lời giải đó lại là một lời giải sai, do người giải bài dã biến đổi sai một số phương trình hàm được đề cập trong lời giải.

Trần Nam Dũng – Nguyễn Khắc Minh

P729. (Mức A) Cho tam giác nhọn ABC, có M là trung điểm BC. Trên cạnh AC, lấy một điểm E tùy ý, khác A và C. Gọi N là giao điểm của các đường thẳng BE và AM. Đường thẳng CN cắt đường tròn (ACM) tại điểm thứ hai D. Chứng minh rằng, đường thẳng đi qua D, vuông góc với CD, cũng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE.

Lời giải (*dựa theo Đáp án của BBT Tạp chí*).



Đường thẳng CN cắt đường tròn (ABE) tại hai điểm X, Y, cắt AB tại F, cắt đường tròn (AEF) tại điểm thứ hai G, và cắt đường tròn (ABC) tại điểm thứ hai H.

Áp dụng định lý Ceva cho tam giác ABC với ba đường đồng quy AM, BE, CF, ta được:

$$-1 = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}$$

(do M là trung điểm BC).

Suy ra, $\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}$. Do đó, theo định lý Thales đảo, $EF \parallel BC$. (1)

Xét phương tích của F đối với các đường tròn (ABE) và (ABC), ta được:

$$\overline{FX} \cdot \overline{FY} = P_{F/(ABE)} = \overline{FA} \cdot \overline{FB} = P_{F/(ABC)} = \overline{FH} \cdot \overline{FC}.$$

Suy ra, $\frac{\overline{FY}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{FX}}$. (2)

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\overline{FY}}{\overline{FH}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{FX}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\overline{HY} - \overline{HF}}{\overline{FH}} = \frac{\overline{XC} - \overline{XF}}{\overline{FX}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\overline{HY}}{\overline{FH}} = \frac{\overline{XC}}{\overline{FX}} \Leftrightarrow \frac{\overline{FH}}{\overline{FX}} = \frac{\overline{HY}}{\overline{XC}}. \qquad (3)$$

Xét phương tích của C đối với các đường tròn (AEF) và (ABE), ta được:

$$\overline{CG} \cdot \overline{CF} = P_{C/(AEF)} = \overline{CE} \cdot \overline{CA} = P_{C/(ABE)} = \overline{CX} \cdot \overline{CY}.$$

Suy ra

$$\frac{\overline{XG} - \overline{XC}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{CY}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{FY} - \overline{FC}}{\overline{CF}}.$$

Do đó

$$\frac{\overline{XG}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{FY}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{XF}} \quad \text{do (2).} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra $\overline{XG} = \overline{HY}$.

Vì vậy, XY và GH có cùng trung điểm. (5)

Do A, B, C, H cùng thuộc một đường tròn, nên

$$(BH;BA) \equiv (CH;CA) \equiv (CG;CA) \pmod{\pi}. \qquad (6)$$

Do (1) và do A, E, F, G cùng thuộc một đường tròn, nên

$$(AH;AB) \equiv (CH;CB) \equiv (FG;FE) \equiv (AG;AE) \equiv (AG;AC) \pmod{\pi}.$$

Từ (6) và (7), suy ra $\Delta AHB \sim \Delta AGC$.

Do đó, $\frac{AH}{AG} = \frac{AB}{AC}$ và

$$(AH;AG) \equiv (AH;AB) + (AB;AC) + (AC;AG) \equiv (AB;AC) \pmod{\pi}. \qquad (7)$$

Suy ra, $\Delta AHG \sim \Delta ABC$.

Vì vậy, gọi D' là trung điểm HG, ta có $\Delta AGD' \sim \Delta ACM$. Do đó

$$(D'A;D'C) \equiv (D'A;D'G) \equiv (MA;MC) \pmod{\pi}.$$

Suy ra, D' thuộc đường tròn (AMC). Mà C, D, D' thẳng hàng và D thuộc đường tròn (AMC), nên $D' \equiv D$. Điều này cho thấy, D là trung điểm của HG; vì thế, theo (5), D là trung điểm của XY. Do đó, đường thẳng vuông góc với CD tại D là đường trung trực của dây cung XY của đường tròn (ABE). Vì vậy, nó đi qua tâm của đường tròn đó. Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Lời giải của bạn *Nguyễn Gia Khánh* (lớp 12 Toán, trường THPT chuyên Hưng Yên, tỉnh Hưng Yên) là lời giải duy nhất Tạp chí nhận được từ bạn đọc, và là một lời giải đúng.

Hạ Vũ Anh

P730. (Mức A) Với mỗi số nguyên $m > 1$, ký hiệu $f(m), g(m)$ tương ứng là tổng tất cả các ước nguyên tố của m, và số các ước nguyên tố của m. Cho n là một số nguyên lẻ, lớn hơn 1, và không chia hết cho 3. Chứng minh rằng

$$f\left(2^n+1\right) \geq 2f(n) + g(n) + 3.$$

Lời giải (*của người chấm bài*).

Trong phần trình bày dưới đây, (a,b) ký hiệu ước số chung lớn nhất của hai số nguyên dương a, b.

Giả sử n có tất cả k ước nguyên tố, ký hiệu là $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

Khi đó, $g(n) = k$ và

$$f(n) = p_1 + p_2 + \cdots + p_k. \qquad (1)$$

Do n là số nguyên dương lẻ lớn hơn 1, không chia hết cho 3, nên $k \geq 1$ và với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$, ta có:

$$p_i > 3, \qquad (2)$$

$$2^{p_i} + 1 \,|\, 2^n + 1\,. \qquad (3)$$

Do (3) nên mọi ước nguyên tố của $2^{p_i} + 1, i = 1, 2, \ldots, k,$ cũng là ước nguyên tố của $2^n + 1$ (4)

Xét số i tùy ý thuộc $\{1; 2; \ldots; k\}$.

Do (2) nên tồn tại $s \in \mathbb{N}^*$ và $r \in \{1; 2\}$, sao cho $p_i = 3s + r$. Do đó

$$2^{p_i} + 1 = 2^{3s+r} + 1 = 8^s \cdot 2^r + 1$$
$$\equiv (-1)^s \cdot 2^r + 1 \not\equiv 0 \pmod 9.$$

Mà $2^{p_i} + 1$ là số nguyên dương lẻ lớn hơn 9 (do (2)), nên nó phải có ước nguyên tố lớn hơn 3. Vì thế, gọi q_i là ước nguyên tố lớn nhất của $2^{p_i} + 1$, ta có $q_i > 3$. (5)

Do $q_i \,|\, 2^{p_i} + 1$ nên $2^{p_i} \equiv -1 \pmod{q_i}$; suy ra

$$2^{2p_i} \equiv 1 \pmod{q_i}.$$

Do tính "tùy ý" của i, nên ta có (5) và (6) với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$.

Từ đó dễ dàng suy ra

$$q_i \neq q_j \text{ với mọi } i, j \in \{1; 2; \ldots; k\}, i \neq j. \qquad (7)$$

Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại $i, j \in \{1; 2; \ldots; k\}, i \neq j$, sao cho $q_i = q_j$.

Đặt $q = q_i = q_j$; theo (5) và (6), ta có q là số nguyên tố lớn hơn 3, và

$$2^{2p_i} \equiv 2^{2p_j} \equiv 1 \pmod q. \qquad (8)$$

Dễ thấy, $(2, q) = 1$ và $\left(2p_i, 2p_j\right) = 2$.. Vì thế, từ (8) suy ra

$$2^2 = 2^{\left(2p_i, 2p_j\right)} \equiv 1 \pmod q,$$

là điều vô lý (do $q > 3$). Vì vậy, (7) được chứng minh.

Do n là số nguyên dương lẻ nên $3 \,|\, 2^n + 1$. Kết hợp điều này với (4), (5) và (7), ta được $3, q_1, q_2, \ldots, q_k$ là các ước nguyên tố đôi một phân biệt của $2^n + 1$. Vì vậy

$$f\left(2^n+1\right) \geq q_1 + q_2 + \cdots + q_k + 3. \qquad (9)$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$q_i \geq 2p_i + 1, \text{ với mọi } i = 1, 2, \ldots, k. \qquad (1)$$

Thật vậy, do $(2, q_i) = 1$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$, nên theo định lý Fermat nhỏ, ta có:

$$2^{q_i - 1} \equiv 1 \pmod{q_i}, \qquad (11)$$

với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$.

Lại do $(2, q_i) = 1$, nên từ (6) và (11) suy ra

$$2^{(2p_i, q_i - 1)} \equiv 1 \pmod{q_i}, \qquad (12)$$

với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$.

Do với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$, p_i là số nguyên tố lẻ và $q_i - 1$ là số nguyên dương chẵn, nên

$$(2p_i, q_i - 1) \in \{2; 2p_i\}$$

với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$.

Nếu tồn tại $i \in \{1; 2; \ldots; k\}$ sao cho $(2p_i, q_i - 1) = 2$, thì

$$2^{(2p_i, q_i - 1)} = 2^2 \not\equiv 1 \pmod{q_i} \text{ (do (5))},$$

mâu thuẫn với (12). Vì vậy

$$(2p_i, q_i - 1) = 2p_i$$

với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$.

Suy ra, $q_i - 1 \geq 2p_i$, hay $q_i \geq 2p_i + 1$, với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$.

(10) được chứng minh.

Từ (9), (10) và (1), suy ra

$$\begin{aligned} f(2^n+1) &\geq 2(p_1+p_2+\cdots+p_k)+k+3 \\ &= 2f(n)+g(n)+3. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Trong Lời giải trên, có sử dụng (không chứng minh) kết quả quen biết sau:

"*Cho p là một số nguyên tố, và cho a, m, n là các số nguyên dương, Khi đó, nếu*

$$a^m \equiv a^n \equiv 1 \pmod{p}$$

thì $a^{(m,n)} \equiv 1 \pmod{p}$."

Với các bạn đọc chưa biết kết quả nêu trên, các bạn hãy tự chứng minh, xem như một "bài tập về nhà".

2. Cho tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí vẫn chưa nhận được lời giải nào từ bạn đọc.

Lưu Thị Thanh Hà

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI HOÀN CHỈNH

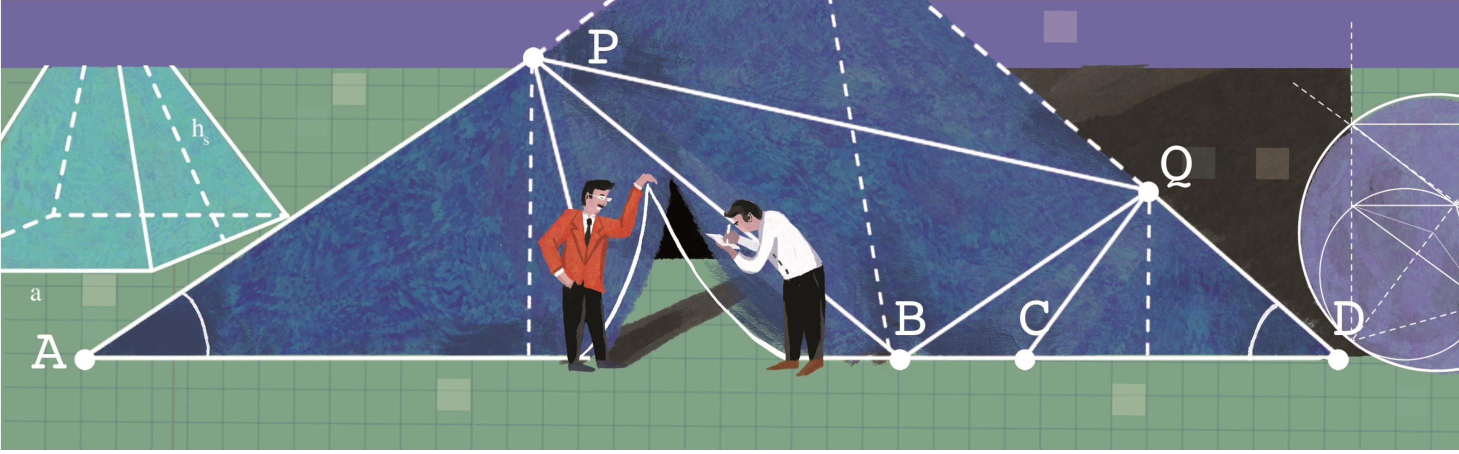
Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải hoàn chỉnh.

KHỐI THCS

- Trường **THCS Nguyễn Thái Bình**, tỉnh Cà Mau: *Lê Nguyễn Hoàng Nhật Đình* (lớp 9C; P725).
- Trường **THCS Lê Quý Đôn**, Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh: *Nguyễn Chánh Thiện* (lớp 9/12; P723, P725).
- Trường **THCS Lý Tự Trọng**, Thành phố Tam Kỳ, tỉnh Quảng Nam: *Phan Minh Huy* (P725).

KHỐI THPT

- Trường **THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu**, tỉnh Đồng Tháp: *Đỗ Duy Quang* (lớp 11T1; P722, P723, P724, P725).
- Trường **THPT chuyên Hưng Yên**, tỉnh Hưng Yên: *Nguyễn Gia Khánh* (lớp 12 Toán 1; P729).
- Trường **THPT chuyên Tiền Giang**, tỉnh Tiền Giang: *Nguyễn Hữu Trí* (lớp 11 Toán; P721).



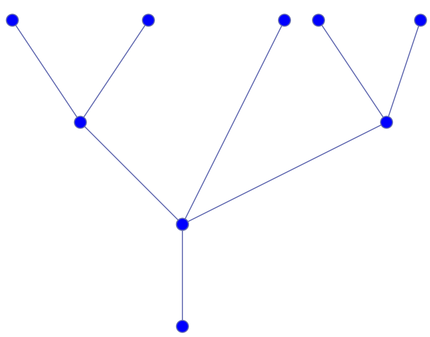
LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ VÀ CÁC CẤU TRÚC ĐÁNG CHÚ Ý (Phần II)

HÀ TRUNG[1]

4. Đồ thị cây

Trong một số tình huống, ta có thể gặp những đồ thị mà số cạnh rất ít (còn gọi là đồ thị thưa). Khi đó, cấu trúc *đồ thị cây* thường sẽ xuất hiện. Ta có định nghĩa về đồ thị cây như sau.

Định nghĩa 4.1 (Cây). Một đồ thị được gọi là một *cây* nếu nó liên thông và không chứa một chu trình nào.



Hình 5. Minh họa đồ thị cây.

Lưu ý rằng, một đồ thị cây không chứa chu trình, do đó nó không thể chứa một chu trình lẻ cạnh, hay một đồ thị cây cũng đồng thời là một đồ thị lưỡng phân. Nếu đồ thị $\mathcal{G}$ gồm một số thành phần liên thông, mà mỗi thành phần liên thông là một cây, thì $\mathcal{G}$ còn được gọi là một *rừng*. Ta có định lý sau:

Định lý 4.1 (Các đặc trưng tương đương của cây). Cho $\mathcal{G}$ là một đồ thị có n đỉnh. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:

1. $\mathcal{G}$ là một cây;
2. $\mathcal{G}$ không có chu trình và có $n-1$ cạnh;
3. $\mathcal{G}$ liên thông và có $n-1$ cạnh;
4. $\mathcal{G}$ không có chu trình và nếu bổ sung vào một cạnh nối hai đỉnh không kề nhau thì xuất hiện một chu trình duy nhất;
5. $\mathcal{G}$ liên thông và nếu bỏ đi một cạnh bất kỳ thì $\mathcal{G}$ mất tính liên thông;
6. Mỗi cặp đỉnh trong $\mathcal{G}$ được nối với nhau bằng một đường đi duy nhất.

Việc chứng minh định lý trên không khó. Bạn đọc quan tâm có thể tìm hiểu chi tiết chứng minh trong [4]. Để minh họa, chúng ta hãy cùng xét hai ví dụ sau.

Ví dụ 4.1 (Bài toán dự tuyển thi IMO năm 2019, Croatia đề xuất). Trong một mạng xã hội, có 2019 người dùng, một số họ là bạn của nhau (quan hệ bạn bè là quan hệ 2 chiều). Ban đầu, có 1010 người mà mỗi người có đúng 1009 bạn và có 1009 người mà mỗi người có đúng 1010 bạn. Tuy nhiên, quan hệ bạn bè trong mạng này không bền vững, những sự kiện tương tự như sự kiện sau có thể lần lượt xảy ra (mỗi thời điểm chỉ có đúng

[1] *Giáo viên Toán trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định.*

một sự kiện xảy ra):

Ký hiệu A, B, C là ba người dùng sao cho A là bạn của cả B và C, nhưng B và C không phải là bạn của nhau. Khi đó B và C sẽ trở thành bạn, đồng thời A không còn là bạn của cả B và C.

Chứng minh rằng, với mọi cấu hình ban đầu, tồn tại một dãy các sự kiện như sự kiện trên mà sau đó, mỗi người dùng chỉ còn tối đa một người bạn.

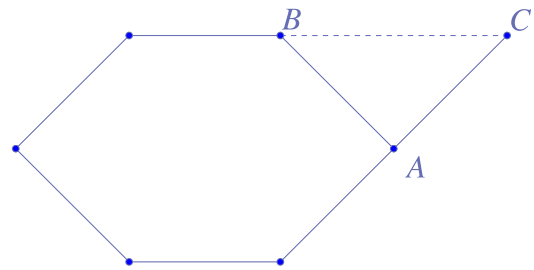
Nhận xét. Bài toán trên rõ ràng có thể phát biểu lại bằng ngôn ngữ của lý thuyết đồ thị như sau. Cho một đồ thị $\mathcal{G}$ có 2019 đỉnh. Trong đó, 1010 đỉnh có bậc 1009 và 1009 đỉnh có bậc 1010. Ở mỗi bước, ta có thể: *"Chọn ra ba đỉnh A, B, C mà A nối với cả B và C; còn B, C không nối với nhau. Sau đó, xóa hai cạnh AB, AC và thêm cạnh BC vào đồ thị $\mathcal{G}$."*

Gọi mỗi thao tác trên là một thao tác *đảo cạnh*. Ta cần chứng minh rằng, thông qua một dãy các thao tác đảo cạnh, ta có thể tạo ra một đồ thị mà mỗi đỉnh của đồ thị có bậc không vượt quá 1. Không khó để nhận ra, đây chính là một đồ thị rừng.

Lời giải. Chú ý rằng một thao tác đảo cạnh bảo toàn tính chất: đồ thị $\mathcal{G}$ có ít nhất một đỉnh bậc lẻ và không phải là một đồ thị đầy đủ (tính chất này là hiển nhiên). Ta cũng chú ý rằng, đồ thị ban đầu là liên thông (chứng minh được dành cho bạn đọc như một bài tập). Bây giờ, ta mô tả một thuật toán gồm hai bước để chuyển đồ thị ban đầu về một đồ thị mà bậc của mỗi đỉnh không vượt quá 1.

Bước 1: Tồn tại một dãy các thao tác đảo cạnh để chuyển đồ thị ban đầu về một đồ thị dạng cây.

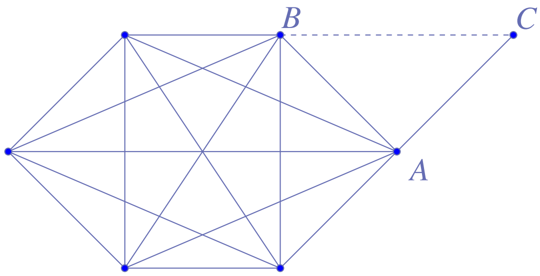
Chứng minh. Vì số cạnh của đồ thị giảm đi 1 sau mỗi thao tác đảo cạnh, ta chỉ cần chứng minh: chừng nào đồ thị $\mathcal{G}$ còn chứa một chu trình, thì tồn tại một thao tác đảo cạnh sao cho đồ thị mới được tạo ra vẫn liên thông. Ta đi chứng minh đồ thị chứa một chu trình $\mathcal{Z}$ và các đỉnh A, B, C sao cho hai đỉnh A và B kề nhau trong chu trình $\mathcal{Z}$, đỉnh C không nằm trong chu trình $\mathcal{Z}$ và kề với đỉnh A nhưng không kề với đỉnh B. Bỏ hai cạnh AB, AC và thêm cạnh BC sẽ bảo toàn tính liên thông của đồ thị và khẳng định được chứng minh.



Hình 6. Nếu đồ thị $\mathcal{G}$ chứa chu trình $\mathcal{Z}$, thì ta vẫn có thể giảm số cạnh của nó.

Để tìm chu trình $\mathcal{Z}$ và các đỉnh A, B, C; ta sử dụng hai chiến lược sau. Nếu đồ thị $\mathcal{G}$ chứa một tam giác, ta xét một đồ thị con đầy đủ lớn nhất K. Rõ ràng K chứa ít nhất ba đỉnh. Vì đồ thị $\mathcal{G}$ không là đồ thị đầy đủ, tồn tại một đỉnh C không thuộc K và kề với một đỉnh A thuộc K. Do tính lớn nhất của K, có một đỉnh B thuộc K không kề với đỉnh C, và do đó ta có thể chọn chu trình $\mathcal{Z}$ trong K và đi qua cạnh AB.

Nếu đồ thị $\mathcal{G}$ không chứa tam giác, ta xét một chu trình ngắn nhất $\mathcal{Z}$ trong đồ thị $\mathcal{G}$. Chu trình này không thể là một chu trình Hamilton (tức là chu trình đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần). Thật vậy, nếu không, do tính nhỏ nhất của $\mathcal{Z}$, đồ thị $\mathcal{G}$ sẽ không chứa thêm một cạnh nào nữa, dẫn đến mỗi đỉnh của đồ thị $\mathcal{G}$ đều có bậc bằng 2, mâu thuẫn với việc đồ thị luôn có đỉnh bậc lẻ. Như vậy, $\mathcal{Z}$ không là một chu trình Hamilton và vì thế có thể tìm được một đỉnh C không thuộc $\mathcal{Z}$ và kề với một đỉnh A thuộc $\mathcal{Z}$. Do đồ thị $\mathcal{G}$ không chứa tam giác, đỉnh C sẽ không kề với bất kỳ đỉnh B nào kề với A trong $\mathcal{Z}$ và ta chọn được chu trình $\mathcal{Z}$ và ba đỉnh A, B, C.



Hình 7. Minh họa cách tìm chu trình $\mathcal{Z}$ và ba điểm A, B, C.

Bước 2: Mọi đồ thị dạng cây đều có thể chuyển về một đồ thị có bậc mỗi đỉnh không vượt quá 1 thông qua một dãy các thao tác đảo cạnh.

Chứng minh. Để ý rằng thao tác đảo cạnh bảo toàn tính chất không chứa chu trình. Do đó, kể từ một cây, sau các thao tác đảo cạnh, ta luôn có một đồ thị không chứa chu trình. Ngoài ra, mỗi thao tác đảo cạnh sẽ giảm số cạnh của đồ thị đi 1 nên đến một lúc nào đó ta không thể thực hiện thêm một thao tác đảo cạnh nào nữa. Khi này bậc của mỗi đỉnh của đồ thị này không vượt quá 1. Thật vậy, nếu có một đỉnh A với kề với hai đỉnh B, C nào đó (khi đó B, C không kề nhau vì đồ thị đang xét không chứa chu trình) thì ta có thể thực hiện thêm một thao tác đảo cạnh.

Ví dụ 4.2 (Kỳ thi chọn đội tuyển Mỹ tham dự Egmo 2020). Cho $\mathcal{G} = (V, E)$ là một đồ thị đơn có n đỉnh. Một cạnh e của của nó được gọi là một *cạnh cổ chai* nếu có thể phân hoạch V thành hai tập A, B thỏa mãn:

1. Có tối đa 100 cạnh của $\mathcal{G}$ có một đầu mút thuộc A và đầu mút còn lại thuộc B;
2. Cạnh e là một trong số các cạnh như vậy.

Chứng minh rằng đồ thị $\mathcal{G}$ có tối đa $100(n-1)$ cạnh cổ chai.

Nhận xét. Con số $100(n-1)$ ít nhiều gợi ý cho ta 100 cấu trúc cây trong đồ thị $\mathcal{G}$.

Lời giải. Gọi F_1 là một rừng lớn nhất trong $\mathcal{G}$ (nếu $\mathcal{G}$ liên thông thì F_1 chính là một cây). Xóa đi các cạnh của F_1 và gọi F_2 là rừng lớn nhất trong đồ thị mới nhận được (vẫn có n đỉnh). Cứ tiếp tục như vậy, cho đến F_{100} là rừng lớn nhất trong đồ thị nhận được khi xóa đi các cạnh của $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_{99}$. Giả sử ngược lại, $\mathcal{G}$ có nhiều hơn $100(n-1)$ cạnh cổ chai. Mỗi rừng F_i (với $i = 1, \ldots, 100$) (có n đỉnh) có tối đa $n-1$ cạnh. Do vậy, tổng số các cạnh trong $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_{100}$ không vượt quá $100(n-1)$. Vì vậy, vẫn tồn tại một cạnh cổ chai không nằm trong bất kỳ $F_i, i = 1, 2, \ldots, 100$ nào. Gọi $x - y$ là một cạnh như vậy (x, y là hai đỉnh của đồ thị). Rõ ràng, trong mỗi F_i, có một đường đi từ x đến y vì nếu không, thêm cạnh $x - y$ vào F_i ta vẫn có một rừng (mâu thuẫn với cách chọn F_i lớn nhất). Vì vậy, trong $\mathcal{G}$ có ít nhất 101 đường đi từ x đến y, hơn nữa hai đường đi bất kỳ đều không có cạnh chung. Tuy nhiên, khi đó cạnh $x - y$ không thể là cạnh cổ chai. Thật vậy, gọi A, B là phân hoạch của V tương ứng với cạnh cổ chai $x - y$. Với mỗi i, đường đi trong F_i từ x đến y phải chứa một cạnh nối một đỉnh thuộc A và một đỉnh thuộc B. Tóm tại, ta tìm được 101 cạnh của G mà một đầu mút thuộc A và đầu mút còn lại thuộc B (mâu thuẫn với điều kiện (1)).

Hy vọng rằng qua một số lý thuyết và bài tập minh họa, bạn đọc đã ít nhiều thấy được tiềm năng, sự phong phú và mối liên hệ của lý thuyết đồ thị với nhiều mảng kiến thức khác. Rõ ràng, khi mô hình hóa được một bài toán dưới dạng ngôn ngữ đồ thị, ta có thể tìm ra định hướng tốt trong việc tìm kiếm lời giải. Cụ thể hơn, khi gặp một mô hình đồ thị có nhiều cạnh, ta có thể liên tưởng đến cấu trúc đồ thị lưỡng phân; ngược lại, một mô hình đồ thị ít cạnh làm chúng ta liên tưởng đến đồ thị dạng cây, rừng. Phần cuối của bài viết này là một số bài tập giúp rèn luyện thêm kỹ năng phát hiện và sử dụng các cấu trúc đồ thị lưỡng phân và cây.

5. Một số bài toán tự rèn luyện

Bài 1. *(Olympic Canada năm 2020)* Cho đồ thị $\mathcal{G}$ có 19998 đỉnh. Mỗi đồ thị con gồm 9999 đỉnh của $\mathcal{G}$ đều chứa ít nhất 9999 cạnh. Hỏi $\mathcal{G}$ có ít nhất bao nhiêu cạnh?

Bài 2._(Mở rộng Bài 2)_ Cho đồ thị $\mathcal{G}$ có $2n$ đỉnh. Mỗi đồ thị con n đỉnh của $\mathcal{G}$ đều có ít nhất n cạnh. Chứng minh rằng $\mathcal{G}$ có ít nhất $5n$ cạnh.

Bài 3. _(Olympic Liên bang Nga năm 2004)_ Một quốc gia có 1001 thành phố. Hai thành phố bất kỳ được nối với nhau bằng một con đường một chiều. Mỗi thành phố có 500 con đường đi ra và 500 con đường đi vào. Có một tổ chức ly khai xuất hiện và chiếm đóng 668 thành phố. Chứng minh rằng, trong khu vực ly khai này, từ mỗi thành phố đều có có thể đi đến một thành phố khác.

Bài 4. Cho đồ thị $\mathcal{G} = (V, E)$ thỏa mãn $|E| = |V| + 4$. Chứng minh rằng, trong $\mathcal{G}$ có hai chu trình không có cạnh chung.

Tài liệu

[1] Đỗ Đức Thái, _Chuyên đề học tập toán 11_. NXB Đại học Sư phạm Hà Nội.

[2] Hà Huy Khoái, _Chuyên đề học tập toán 11_. NXB Giáo dục Việt Nam.

[3] Asratian, Armen S.; Denley, Tristan M. J.; Häggkvist, Roland, _Bipartite Graphs and their Applications_. Cambridge University Press, 1998.

[4] Bender, Edward A.; Williamson, S. Gill , _Lists, Decisions and Graphs With an Introduction to Probability_, 2010.

[5] Titu Andreescu, Bogdan Enescu, _Mathematical Olympiad Treasures_. Springer, 2011.

[6] Website https://artofproblemsolving.com.

LỜI GIẢI VÒNG HAI KỲ THI TOÁN HỌC LIÊN BANG ĐỨC 2023

NGUYỄN MẠNH TOÀN[1]

Trong chuyên mục này, chúng tôi sẽ trình bày Lời giải của các bài toán trong vòng hai kỳ thi toán học liên bang Đức năm 2023, đăng trong số báo 9/2023.

Câu 1: Tìm ước chung lớn nhất của tất cả các số có dạng $p^6 - 7p^2 + 6$ với p chạy trên tập tất cả các số nguyên tố và $p \geq 11$.

Lời giải. Đặt $f(p) := p^6 - 7p^2 + 6$. Gọi a là ước chung lớn nhất (ƯCLN) của tất cả các $f(p)$ với p nguyên tố và $p \geq 11$. Ta sẽ chứng minh rằng $a = 2^5 \times 3 \times 7$.

Thật vậy, theo định lý Fermat nhỏ thì $7 | p^6 - 1$ với mọi số nguyên $7 \nmid p$. Do đó, $7 | p^6 - 1 - 7p^2 + 7 = f(p)$ với mọi p như trên và ta có $7 | a$.

Mặt khác, $f(p) = (p^2 - 1)(p^2 - 2)(p^2 + 3) \equiv (p^2 - 1)(p^2 - 2)p^2 \mod 3 \equiv 0 \mod 3$ do $p^2, p^2 - 1, p^2 - 2$ là ba số nguyên liên tiếp. Như vậy, $3 | f(p)$ với mọi p và ta thu được $3 | a$.

Hơn nữa, do p nguyên tố và $p \geq 11$ nên p là số lẻ. Đặt $p = 2k + 1$, ta có

$$\begin{aligned} f(p) &= (p^2 - 1)(p^2 - 2)(p^2 + 3) \\ &= (4k^2 + 4k)(4k^2 + 4k - 1)(4k^2 + 4k + 4) \\ &= 16k(k+1)(4k^2 + 4k - 1)(k^2 + k + 1). \end{aligned}$$

Vì $2 | k(k+1)$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$ nên $2 \times 16 = 32 = 2^5 | f(p)$. Bởi vậy $2^5 | a$.

Do $2^5, 3$ và 7 đôi một nguyên tố cùng nhau nên

$$2^5 \times 3 \times 7 | a. \qquad (1)$$

Mặt khác, vì $f(11) = 1770720 = 2^5 \times 3 \times 5 \times 7 \times 17 \times 31$ và $f(13) = 4825632 = 2^5 \times 3 \times 7 \times 43 \times 167$ nên

$$a | \text{ƯCLN}(f(11), f(13)) = 2^5 \times 3 \times 7. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thu được $a = 2^5 \times 3 \times 7$.

Câu 2: Trên một hòn đảo địa hình đồi núi có 2023 điểm quan sát. Từ mỗi điểm quan sát có thể nhìn thấy ít nhất 42 điểm quan sát khác. Với hai điểm quan sát bất kỳ X và Y, luôn tồn tại một số nguyên dương n và các điểm quan sát $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ sao cho $A_1 = X$, $A_{n+1} = Y$ và mỗi cặp điểm liền kề A_i với A_{i+1} có thể quan sát được lẫn nhau với $i = 1, 2, \ldots, n$. Số n nhỏ nhất như vậy được gọi là khoảng cách quan sát (Sichtabstand).

Xác định khoảng cách quan sát lớn nhất có thể có giữa hai cặp điểm quan sát thỏa mãn những điều kiện ở trên.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng khoảng cách quan sát lớn nhất có thể là 140.

Với hai điểm quan sát X, Y trong bài, ta nói $A_1, \ldots, A_{n+1}$ là các điểm thuộc *chuỗi quan*

---

[1] *Khoa Toán Đại học Osnabrueck, CHLB Đức.*

sát độ dài n nối X và Y. Để tìm một chuỗi quan sát có độ dài nhỏ nhất, ta chỉ cần xét trường hợp mỗi điểm quan sát trong chuỗi xuất hiện đúng một lần. Vì chỉ có hữu hạn điểm quan sát nên độ dài các chuỗi quan sát là hữu hạn (bị chặn trên bởi 2022). Như vậy giữa tất cả các chuỗi quan sát nối X và Y luôn tồn tại chuỗi quan sát có độ dài ngắn nhất, và độ dài này chính là khoảng cách quan sát được định nghĩa ở trên. Do chỉ có hữu hạn các cặp điểm quan sát, tồn tại một cặp điểm có khoảng cách quan sát lớn nhất.

Cho trước một hệ thống tùy ý M gồm 2023 điểm quan sát thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Chọn $X \in M$ bất kỳ và gọi M_i tập các điểm quan sát có khoảng cách quan sát i tới X. Ta cũng sẽ đặt $M_0 = \{X\}$. Do với bất kỳ $Y \in M$ luôn tồn tại một chuỗi quan sát nối X và Y nên các tập M_i lập nên một phân hoạch của M. Nói cách khác, $M = \cup_i M_i$ và $M_i \cap M_j = \emptyset$ nếu $i \neq j$.

Gọi $n(X)$ là chỉ số sao cho $M_{n(X)} \neq \emptyset$ và $M_i = \emptyset$ với mọi $i \geq n(X)$. Bằng định nghĩa, với mỗi $Y \in M_{n(X)}$ luôn tồn tại chuỗi quan sát ngắn nhất $A_1, \ldots A_{n(X)+1}$ với $A_1 = X$ và $A_{n(X)+1} = Y$. Rõ ràng $A_i, A_{i+1}, \ldots, A_j$ cũng là chuỗi quan sát ngắn nhất giữa A_i và A_j với mọi $1 \leq i < j \leq n(X) + 1$. Nói riêng, $A_i \in M_{i-1}$ và ta có $M_i \neq \emptyset$ với mọi $i \leq n(X)$.

Hơn nữa, từ mỗi điểm trong M_i chỉ có thể quan sát được các điểm trong M_{i-1}, M_i và M_{i+1}. Thật vậy, nếu từ $V \in M_i$ quan sát được $W \in M_j$ với $j \leq i-2$ thì $V \in M_{j+1}$. Do đó, $V \in M_i \cap M_{j+1}$. Điều này vô lý vì $M_i \cap M_{j+1} = \emptyset$ do $j+1 \neq i$. Tương tự, từ $V \in M_i$ quan sát được $W \in M_j$ với $j \geq i+2$ cũng dẫn đến mâu thuẫn. Vì từ mỗi $V \in M_i$ có thể quan sát được ít nhất 42 điểm khác và các điểm này nằm trong M_{i-1}, M_i, M_{i+1} nên

$$|M_{i-1} \cup M_i \cup M_{i+1}| \geq 43.$$

Từ $X \in M_0$ chỉ quan sát được các điểm trong M_1 và từ $Y \in M_{n(X)}$ chỉ quan sát được các điểm từ $M_{n(X)}$ và $M_{n(X)-1}$ nên

$$|M_0 \cup M_1| \geq 43 \text{ và } |M_{n(X)-1} \cup M_{n(X)}| \geq 43.$$

Khẳng định 1: *Khoảng cách quan sát lớn nhất không thể lớn hơn* 140.

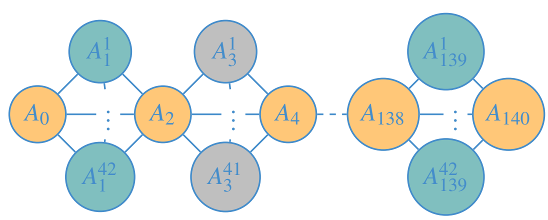
Thật vậy, nếu $M_{141} \neq \emptyset$ thì

$$\begin{aligned} &|M_0 \cup M_1| + |M_2 \cup M_3 \cup M_4| \\ &+ |M_5 \cup M_6 \cup M7| + \ldots \\ &+ |M_{137} \cup M_{138} \cup M_{139}| + |M_{140} \cup M_{141}| \\ \geq\, & 43 + 46.43 + 43 = 2064 > 2023 \end{aligned}$$

dẫn đến mâu thuẫn.

Khẳng định 2: *Tồn tại một hệ thống điểm quan sát sao cho khoảng cách quan sát lớn nhất là* 140.

Thật vậy, xây dựng 141 tập không rỗng M_i với $i = 0, \ldots, 140$ như trong Hình 1, trong đó:



Hình 1. Hệ thống điểm quan sát với khoảng cách quan sát lớn nhất 140. Mỗi điểm $A_i^\bullet$ thuộc tập M_i có thể quan sát được tất cả điểm trong M_{i-1}, M_{i+1} cũng như các điểm còn lại trong M_i.

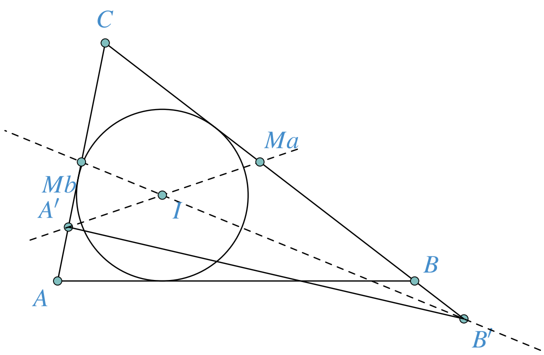
- Mỗi tập M_{3k} và M_{3k+2} với $k = 0, \ldots, 46$ chỉ chứa một điểm quan sát.
- Mỗi tập M_1 và M_{139} có 42 điểm quan sát.
- Mỗi tập M_{3k+1} với $k = 1, \ldots, 45$ có 41 điểm quan sát.

Độc giả có thể kiểm tra rằng hệ thống này có 2023 điểm quan sát và thỏa mãn điều kiện của bài toán. Ở đó, điểm quan sát duy nhất trong M_{140} có khoảng cách quan sát 140 tới điểm quan sát duy nhất trong M_0.

Câu 3: Cho tam giác ABC với tâm đường tròn nội tiếp I. Gọi trung điểm của các cạnh

AC và BC lần lượt là M_b và M_a. Gọi giao điểm của đường thẳng M_bI với đường thẳng BC là B' và giao điểm của đường thẳng M_aI với đường thẳng AC là A'. Biết rằng hai tam giác ABC và $A'B'C$ có cùng diện tích.

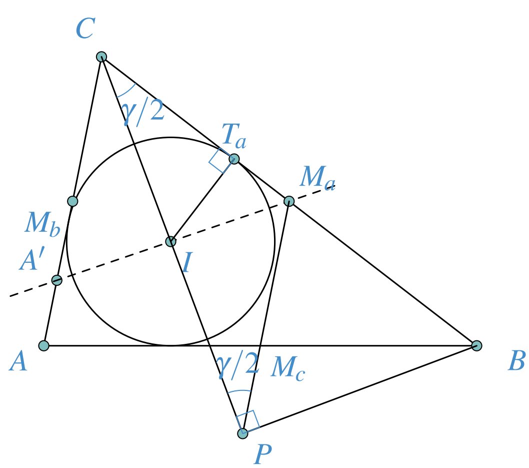
Tìm giá trị có thể của góc ACB.[1]



Lời giải. Gọi độ dài các cạnh AB, BC và CA lần lượt là c, a, b. Đặt $\gamma := \angle ACB$. Ta sẽ chứng minh rằng $\gamma = 60^\circ$.

Thật vậy, từ M_a vẽ đường thẳng song song với AC và cắt CI tại P. Vì $\angle CPM_a = \angle A'CI = \gamma/2$ nên tam giác CM_aP cân tại M_a và ta có $M_aP = M_aC = a/2 = M_aB$. Như vậy P nằm trên đường tròn tâm M_a bán kính $a/2$. Từ đó suy ra tam giác BPC vuông tại P và ta thu được

$$CP = CB\cos(\gamma/2) = a\cos(\gamma/2).$$



Gọi T_a là điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với cạnh BC thì $CT_a = (a+b-c)/2$. Do đó

$$CI = \frac{CT_a}{\cos(\gamma/2)} = \frac{a+b-c}{2\cos(\gamma/2)}$$

và ta có

$$\begin{aligned} IP = CP - CI &= a\cos(\gamma/2) - \frac{a+b-c}{2\cos(\gamma/2)} \\ &= \frac{2a\cos^2(\gamma/2) - a - b + c}{2\cos(\gamma/2)} \\ &= \frac{a[2\cos^2(\gamma/2) - 1] - b + c}{2\cos(\gamma/2)} \\ &= \frac{a\cos(\gamma) - b + c}{2\cos(\gamma/2)}. \end{aligned}$$

Vì $A'C \parallel M_aP$ nên theo định lý Thales

$$\begin{aligned} \frac{CA'}{M_aP} = \frac{CI}{IP} &= \frac{a+b-c}{a\cos(\gamma) - b + c} \\ &= \frac{a+b-c}{a\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - b + c} \\ &= \frac{2b(a+b-c)}{a^2+b^2-c^2-2b^2+2bc} \\ &= \frac{2b(a+b-c)}{a^2-b^2-c^2+2bc} \\ &= \frac{2b(a+b-c)}{(a+c-b)(a+b-c)} \\ &= \frac{2b}{a+c-b} \end{aligned}$$

và do đó

$$\frac{CA'}{CB} = \frac{CA'}{2M_aP} = \frac{b}{a+c-b}. \tag{3}$$

Hoán đổi vai trò của A với B (do đó M_a với M_b, a với b, A' với B') ta thu được

$$\frac{CB'}{CA} = \frac{a}{b+c-a}. \tag{4}$$

[1] *Trong số 09/2023 chúng tôi đã sai sót khi yêu cầu tìm giá trị **lớn nhất** có thể của góc ACB. Thành thật xin lỗi các độc giả của Pi.*

Từ giả thiết hai tam giác ABC và $A'B'C$ có cùng diện tích ta có

$$\frac{CA'}{CB} = \frac{CA}{CB'}.$$

Kết hợp với (3) và (4) ta nhận được

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{a+c-b} = \frac{b+c-a}{a}\\
&\Leftrightarrow ab = (a+c-b)(b+c-a)\\
&\Leftrightarrow ab = c^2-(a-b)^2\\
&\Leftrightarrow c^2 = a^2+b^2-ab.
\end{aligned}$$

Từ hệ thức $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$ suy ra $\cos(\gamma) = \frac{1}{2}$. Do đó $\gamma = 60^\circ$.

Câu 4: Cho một đa giác đều $2n$ cạnh. Trong các đoạn thẳng nối các đỉnh của đa giác (cạnh biên hoặc đường chéo) ta tô n đoạn màu đỏ sao cho:

1. Các điểm cuối của các đoạn màu đỏ chính là $2n$ đỉnh của đa giác.

2. Không có 2 đoạn màu đỏ nào có độ dài bằng nhau.

Tìm tất cả các số tự nhiên $n \geq 2$ sao cho tồn tại một phép tô màu thỏa mãn yêu cầu bên trên.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng một cách tô màu như vậy tồn tại khi và chỉ khi $n \equiv 0 \mod 4$ hoặc $n \equiv 1 \mod 4$.

"$\Rightarrow$" : Giả sử tồn tại cách tô màu như vậy. Gọi $2n$ đỉnh của đa giác là $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$, được sắp xếp theo chiều kim đồng hồ. Ta định nghĩa *khoảng cách* $d(i,j)$ *giữa hai đỉnh* A_i, A_j là số cạnh nằm trên đường đi ngắn nhất dọc theo các cạnh biên của đa giác nối hai đỉnh này. Khoảng cách này sẽ lấy một trong các giá trị trong tập $\{1,2\ldots,n\}$. Chẳng hạn, với $n=4$ như trong Hình 2 thì $d(1,4)=3$ và $d(1,7)=2$.

Dễ thấy

$$A_iA_j = 2r\sin\frac{d(i,j)\pi}{2n}$$

với r là khoảng cách từ đỉnh đến tâm của đa giác. Do đó, $A_iA_j > A_rA_s \iff d(i,j) > d(r,s)$. Bởi vậy ta có thể thay yêu cầu rằng không có hai đoạn màu đỏ nào có cùng độ dài bằng yêu cầu không có hai cặp đỉnh nào có cùng khoảng cách.

Biểu diễn mỗi cặp đỉnh (A_i, A_j) bởi cặp chỉ số (i,j). Ta có thể giả sử $i < j$. Bài toán đã cho tương đương với việc phân hoạch tập $2n$ số tự nhiên $\{1,2,\ldots,2n\}$ thành n cặp $\{(i_k,j_k)\}_{k=1}^n$ với $i_k < j_k$ sao cho tập các khoảng cách $\{d(i_k,j_k)\}_{k=1}^n$ là $\{1,\ldots,n\}$. Ta có

$$d(i_k,j_k) = \begin{cases} j_k-i_k, \text{ nếu } j_k-i_k \leq n\\ 2n-j_k+i_k, \text{ nếu } j_k-i_k > n.\end{cases} \qquad (5)$$

Bằng cách hoán đổi i_k với j_k trong trường hợp $j_k - i_k > n$ ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n j_k - \sum_{k=1}^n i_k &= \sum_{k=1}^n d(i_k,j_k) + 2ns\\
&= \sum_{k=1}^n i + 2ns\\
&= n(n+1)/2 + 2ns. \qquad (6)
\end{aligned}$$

với s là số trường hợp $j_k - i_k > n$. Mặt khác,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n j_k + \sum_{k=1}^n i_k &= \sum_{k=1}^{2n} i\\
&= 2n(2n+1)/2. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Từ các phương trình (6) và (7) ta thu được

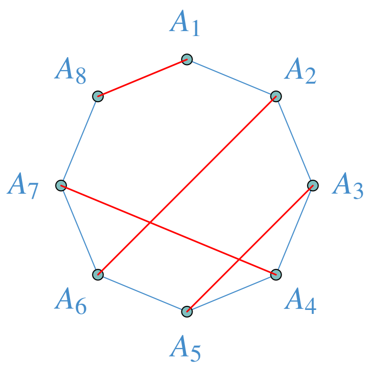
$$\sum_{k=1}^n j_k = \frac{n(5n+3)}{4} + ns.$$

Vì $\sum_{k=1}^n j_k \in \mathbb{N}$ nên $\frac{n(5n+3)}{4} \in \mathbb{Z}$. Từ đó suy ra $n \equiv 0 \mod 4$ hoặc $n \equiv 1 \mod 4$.

"$\Leftarrow$" :

Trường hợp $n \equiv 0 \mod 4$. Đặt $n = 4k$.

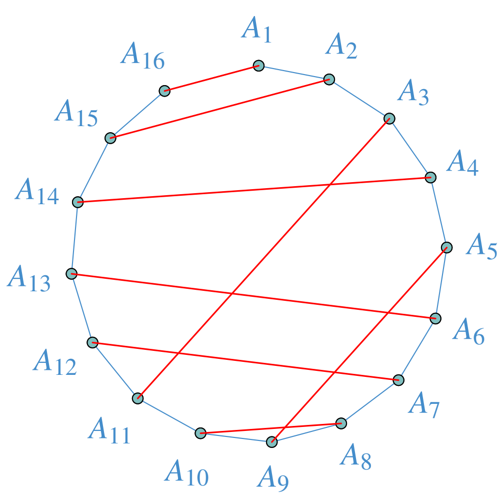
- Với $k = 1$ ta có thể tô màu như Hình 2.



Hình 2. Đa giác đều 8 cạnh.

• Với $k \geq 2$ thì danh sách các đoạn màu đỏ cùng với khoảng cách giữa các đỉnh (phương trình (5) với $2n = 8k$) được cho trong bảng dưới đây:

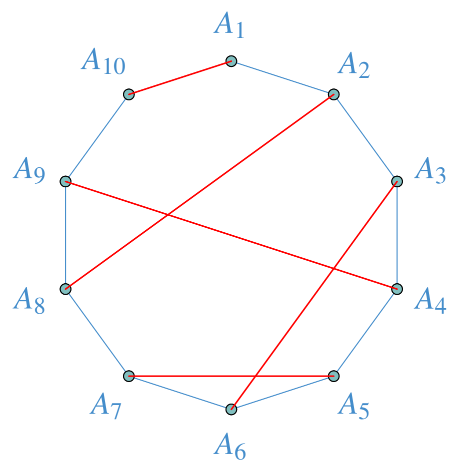
Chỉ số	Cạnh	Khoảng cách
$1 \leq i \leq k$	$(i, 8k+1-i)$	$1, 3, \dots, 2k-1$
$i = k+1$	$(k+1, 5k+1)$	$4k$
$k+2 \leq i \leq 2k$	$(i, 8k+2-i)$	$2k+2, 2k+4, \dots, 4k-2$
$i = 2k+1$	$(2k+1, 4k+1)$	$2k$
$2k+2 \leq i \leq 3k+1$	$(i, 8k+3-i)$	$4k-1, 4k-3, \dots, 2k+1$
$3k+2 \leq i \leq 4k$	$(i, 8k+2-i)$	$2k-2, \dots, 2$



Hình 3. Đa giác đều 16 cạnh.

Trường hợp $n \equiv 1 \mod 4$. Đặt $n = 4k+1$.

• Với $k = 1$ ta có thể tô màu như Hình 4.



Hình 4. Đa giác đều 10 cạnh.

• Với $k \geq 2$ thì danh sách các đoạn màu đỏ cùng với khoảng cách giữa các đỉnh (phương trình (5) với $2n = 8k+2$) được cho trong bảng dưới đây:

Chỉ số	Cạnh	Khoảng cách
$1 \leq i \leq k$	$(i, 8k+3-i)$	$1, 3, \dots, 2k-1$
$i = k+1$	$(k+1, 5k+3)$	$4k$
$k+2 \leq i \leq 2k$	$(i, 8k+4-i)$	$2k+2, 2k+4, \dots, 4k-2$
$i = 2k+1$	$(2k+1, 4k+2)$	$2k+1$
$2k+2 \leq i \leq 3k+1$	$(i, 8k+5-i)$	$4k+1, 4k-1, \dots, 2k+3$
$3k+2 \leq i \leq 4k+1$	$(i, 8k+4-i)$	$2k, \dots, 2$

GÓC TOÁN OLYMPIC

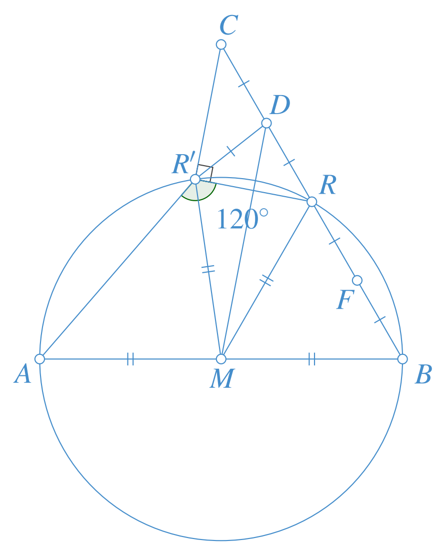
Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày với các bạn lời giải các bài toán trong kỳ thi Olympic toán Tuymaada năm 2022 của nước cộng hòa Sakha (Yakutia), thuộc Liên bang Nga đăng trong số tháng 5/2023.

OC46. Arnim và Brentano có một chiếc bình nhỏ đựng 1500 viên kẹo trên bàn và một túi lớn đựng kẹo dự phòng dưới gầm bàn. Họ thay phiên nhau chơi một trò chơi với Arnim bắt đầu trước. Ở mỗi lượt đi, người chơi có thể ăn 7 viên kẹo trong bình hoặc lấy 6 viên kẹo từ túi bên dưới và thêm chúng vào bình. Người chơi không được lấy kẹo trong túi dưới gầm bàn hai lần liên tiếp. Người chơi được tuyên bố là người chiến thắng nếu làm cho chiếc bình rỗng sau lượt chơi của mình. Trong mọi trường hợp khác, nếu một người chơi không thể thực hiện được nước đi trong lượt của mình, trò chơi được tuyên bố là hòa. Liệu người nào có chiến lược để luôn chiến thắng?

Lời giải. Ban đầu trong bình có 1500 viên kẹo. Brentano có chiến lược để luôn thắng bằng cánh đảm bảo rằng nếu trước lượt đi của Arnim trong bình có $15k$ viên kẹo, thì sau khi mỗi người đi 2 lượt, trong bình sẽ còn lại $15(k-1)$ viên kẹo.

Cụ thể là nếu trong lượt đi thứ nhất của mình Arnim thêm 6 viên kẹo vào bình thì ở lượt đi sau anh ta phải ăn 7 viên. Do đó Brentano sẽ ăn 7 viên kẹo trong cả 2 lượt đi của mình và số kẹo trong bình sau đó là $15k+6-7-7-7=15(k-1)$. Nếu trong lượt đi thứ nhất của mình Arnim ăn 7 viên thì Brentano cũng ăn 7 viên trong lượt thứ nhất. Đến lượt đi thứ 2 nếu Arnim ăn 7 viên thì sau đó Brentano thêm vào 6 viên và số kẹo trong bình còn lại là $15k-7-7-7+6=15(k-1)$. Còn nếu đến lượt thứ 2 Arnim thêm vào 6 viên thì sau đó Brentano sẽ ăn 7 viên và số kẹo trong bình còn lại là $15k-7-7+6-7=15(k-1)$. Như vậy sao khi mỗi người đi 200 lượt thì Brentano là người chiến thắng.

OC47. Cho M là trung điểm của cạnh AB trong tam giác đều ABC. điểm D thuộc cạnh BC sao cho $BD:DC=3:1$. Giả sử T là điểm trên đường thẳng đi qua C và song song với MD sao cho $\angle CTA=150^\circ$. Tìm số đo $\angle MTD$.



Lời giải. Gọi ℓ là đường thẳng đi qua C song song với MD. Giả sử đường tròn đường kính AB cắt BC tại R và cắt ℓ tại R'. Ta sẽ chứng minh R' trùng với T.

Dễ thấy tam giác cân MBR có góc $\angle MBR=60^\circ$ nên nó là tam giác đều. Do đó R là trung điểm BC và D là trung điểm RC. Trong tam giác CRR', MD đi qua trung điểm của CR và song song CR' nên nó phải đi qua trung điểm của RR'. Do MD là đường kính, ta suy ra $MD \perp RR'$. Do CR' song song với MD, ta suy ra $\angle CR'R = 90^\circ$.

Mặt khác, do $\angle AR'R = 180^\circ - \angle ABR = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, ta có

$$\begin{aligned}\angle AR'C &= 360^\circ - \angle AR'R - \angle CR'R \\ &= 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ = 150^\circ.\end{aligned}$$

Như vậy R' trùng với T. Do R và R' đối xứng nhau qua MD ta có $\angle MR'D = \angle MRD = 120^\circ$. Như vậy $\angle MTD = 120^\circ$.

OC48. Cho các số nguyên a, b, c và số nguyên tố lẻ p. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên x và y sao cho p là ước của $x^2 + y^2 + ax + by + c$.

Lời giải. Khi tính giá trị $f(x) = x^2 + ax + c$ modulo p, với $x \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ ta được ít nhất $\frac{p+1}{2}$ số phân biệt. Thật vậy, nếu x_1 và x_2 là hai số nguyên phân biệt nằm giữa 0 và $p-1$, và p là ước của $f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 + ax_1 + c - (x_2^2 + ax_2 + c) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + a)$, thì p cũng là ước của $x_1 + x_2 + a$, nghĩa là với mỗi $x_1 \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ có nhiều nhất một $x_2 \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ sao cho $f(x_2) \equiv f(x_1) \mod p$.

Lập luận tương tự cho thấy các giá trị của đa thức $g(y) = -y^2 - by$ với $y \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ ta cũng nhận được ít nhất $\frac{p+1}{2}$ số phân biệt modulo p. Như vậy, ta có hai tập các số dư modulo p, mỗi tập có nhiều hơn $\frac{p}{2}$ số dư, do đó hai tập này phải có ít nhất một phần tử chung. Ta suy ra p là ước của $f(x) - g(y)$ với các số nguyên x và y nào đó. Ta được điều cần chứng minh.

Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc ba bài toán chọn lọc trong kỳ thi Olympic toán vùng Trung Mỹ và Caribê năm 2023. Các bài toán này phù hợp với trình độ học sinh lớp $8-10$.

OC55. Tìm tất cả các cách tô màu các số nguyên dương sao cho điều kiện sau thỏa mãn:

- Mỗi số có màu xanh hoặc đỏ;
- Tổng của hai số (không nhất thiết phân biệt) cùng màu bất kỳ có màu xanh.

OC56. Octavio viết một số nguyên dương n lên bảng và sau đó anh bắt đầu một quá trình trong đó, ở mỗi bước, anh xóa số nguyên k được viết trên bảng và thay thế nó bằng một trong các số sau:

$$3k-1, \quad 2k+1, \quad \frac{k}{2},$$

với điều kiện số mới viết là số nguyên.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, Octavio có thể viết lên bảng số 3^{2023} sau hữu hạn bước.

OC57. Trong một cái ao có $n (n \geq 3)$ hòn đá xếp thành vòng tròn. Một công chúa muốn đánh số những hòn đá với các số $1, 2, \ldots, n$ theo thứ tự nào đó rồi đặt một số con cóc lên những hòn đá. Sau khi đặt tất cả các con cóc vào vị trí, chúng bắt đầu nhảy theo quy tắc sau: khi một con cóc đến hòn đá có đánh số k, nó đợi k phút rồi nhảy sang hòn đá liền kề theo chiều kim đồng hồ.

Hỏi số lượng cóc nhiều nhất là bao nhiêu để công chúa có thể đánh số các hòn đá và đặt các con cóc sao cho không bao giờ có hai con cóc ở trên cùng một hòn đá trong thời gian từ một phút trở lên?

SỰ HẤP DẪN CỦA TRỪU TƯỢNG*

(Người dịch: Phạm Triều Dương[1])

"Phương pháp của tôi, quả thật là phương pháp của làm việc và suy nghĩ, đó chính là lý do vì sao chúng len lỏi vào mọi nơi trong cuộc sống một cách ẩn danh."

Emmy Amalie Noether (1882 – 1935).

Cha của Emmy Noether, Max Noether, là một nhà toán học nổi tiếng và là giáo sư tại Erlangen nhưng ông xuất thân từ một gia đình buôn bán đồ sắt thép. Mẹ cô là Ida Amalia Kaufmann (1852 – 1915), xuất thân từ một gia đình giàu có ở Cologne. Cha mẹ của Emmy đều có nguồn gốc Do Thái và người đọc có thể ngạc nhiên về điều này vì Noether không phải là tên Do Thái. Do đó, chúng ta nên giải thích điều này đã xảy ra như thế nào, đồng thời đưa ra một số thông tin về tổ tiên của Emmy Noether. Ông nội của Max Noether là Elias Samuel, người sáng lập một doanh nghiệp ở Bruchsal. Elias có chín người con, một người là con trai Hertz Samuel. Năm 1809, Bang Baden ban hành Sắc lệnh Khoan dung yêu cầu người Do Thái lấy tên tiếng Đức. Elias Samuel chọn họ Nöther, trở thành Elias Nöther, nhưng cũng đổi tên các con mình, đặt cho Hertz cái tên Hermann. Khi được mười tám tuổi, Hermann Nöther rời quê hương Bruchsal và theo học thần học tại Đại học Mannheim. Sau đó vào năm 1837, cùng với anh trai Joseph, ông thành lập một cơ sở kinh doanh bán buôn đồ sắt. Hermann Nöther và vợ Amalia có năm người con, người thứ ba là Max. Hai đứa trẻ lớn hơn Max là Sarah (sinh ngày 6 tháng 11 năm 1839) và Emil. Điều đáng lưu ý ở điểm này là doanh nghiệp bán buôn sắt Nöther vẫn là một công ty gia đình trong đúng một trăm năm, cho đến khi Đức Quốc xã loại bỏ các gia đình Do Thái khỏi hoạt động kinh doanh của chính họ vào năm 1937. Ta có một lưu ý cần thiết ở điểm này. Mặc dù họ của Max được ông nội của Max chọn là Nöther nhưng Max và gia đình ông luôn sử dụng dạng Noether (ngoại trừ trên giấy chứng nhận đám cưới của Max có xuất hiện dạng Nöther).

Emmy là con cả trong gia đình có 4 người con của bố mẹ cô, 3 người em nhỏ hơn là đều là con trai. Alfred Noether (1883 – 1918)

** Dịch theo https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Noether_Emmy/*

[1] *Đại học Sư phạm Hà Nội.*

nghiên cứu hóa học và nhận bằng tiến sĩ tại Erlangen năm 1909. Tuy nhiên, sự nghiệp của ông rất ngắn ngủi vì ông qua đời 9 năm sau đó. Fritz Noether (1884 – 1941) trở thành nhà toán học ứng dụng. Tuy nhiên, là một người Do Thái, ông không thể làm việc và phải rời nước Đức vào năm 1937. Ông được bổ nhiệm làm giáo sư tại Đại học Tomsk ở Liên Xô nhưng bị buộc tội có hành động chống nhà nước Xô Viết, ông bị kết án tử hình và bị xử bắn. Ông được Tòa án Tối cao Liên Xô tuyên vô tội vào năm 1988. Gustav Robert Noether (1889 – 1928) suốt đời có sức khỏe kém. Ông bị thiểu năng trí tuệ, dành phần lớn cuộc đời trong viện dưỡng lão và chết trẻ. Ngôi trường đầu tiên Emmy theo học là ở Fahrstrasse. Auguste Dick viết trong [2]

Emmy không có vẻ gì đặc biệt khi còn nhỏ. Chơi đùa cùng các bạn trong sân trường ở Fahrstrasse, có lẽ cô ấy không đặc biệt đáng chú ý – một cô bé cận thị, có vẻ ngoài giản dị, mặc dù không phải là không có duyên. Các giáo viên và bạn cùng lớp của cô biết đến Emmy như một đứa trẻ thông minh, thân thiện và dễ mến. Cô ấy nói hơi ngọng và là một trong số ít người tham gia các lớp học về đạo Do Thái.

Sau khi học tiểu học, Emmy Noether theo học tại Städtische Höhere Töchter Schule trên Friedrichstrasse ở Erlangen từ năm 1889 đến năm 1897. Cô sinh ra trong ngôi nhà gia đình ở Hauptstrasse 23 và sống ở đó cho đến giữa thời gian học trung học, vào năm 1892, gia đình chuyển đến một căn hộ lớn hơn ở Nürnberger Strasse 32. Ở trường trung học, cô học tiếng Đức, tiếng Anh, tiếng Pháp, số học và được học piano. Cô thích khiêu vũ và mong chờ những bữa tiệc cùng con cái của các đồng nghiệp đại học của cha cô. Ở giai đoạn này, mục tiêu của cô là trở thành một giáo viên ngôn ngữ và sau khi học thêm tiếng Anh và tiếng Pháp, cô đã tham gia các kỳ thi của bang Bavaria và vào năm 1900, cô trở thành giáo viên được cấp chứng chỉ dạy tiếng Anh và tiếng Pháp tại các trường nữ sinh ở Bavaria. Cô được điểm "rất giỏi" trong các kỳ thi, mảng yếu nhất lại là việc giảng dạy trên lớp của cô.

Tuy nhiên Noether chưa bao giờ trở thành giáo viên ngôn ngữ. Thay vào đó, cô quyết định đi theo con đường khó khăn đối với một phụ nữ thời đó và học toán ở trường đại học. Phụ nữ được phép học tại các trường đại học Đức một cách không chính thức và mỗi giáo sư phải cấp phép cho khóa học của mình. Noether được phép tham gia các khóa học tại Đại học Erlangen trong thời gian từ 1900 đến 1902. Cô là một trong hai sinh viên nữ duy nhất tham gia các khóa học tại Erlangen và, ngoài các khóa học toán, cô tiếp tục quan tâm đến các ngôn ngữ được dạy bởi một giáo sư về La Mã học và bởi một nhà sử học. Đồng thời, cô cũng chuẩn bị tham gia một kỳ thi cho phép sinh viên vào bất kỳ trường đại học nào. Sau khi vượt qua kỳ thi trúng tuyển ở Nürnberg vào ngày 14 tháng 7 năm 1903, cô đã đến Đại học Göttingen. Trong thời gian 1903 – 04, cô đã tham dự các bài giảng của Karl Schwarzschild, Otto Blumenthal, David Hilbert, Felix Klein và Hermann Minkowski. Một lần nữa, cô không được phép trở thành một sinh viên trúng tuyển chính thức mà chỉ được phép ngồi giảng bài. Sau một học kỳ tại Göttingen cô trở lại Erlangen.

Tại thời điểm này, các quy tắc đã được thay đổi và học sinh nữ được phép trúng tuyển trên cơ sở bình đẳng với nam giới. Ngày 24 tháng 10 năm 1904 Noether trúng tuyển tại Erlangen, nơi bây giờ cô chỉ học toán. Năm 1907, cô được cấp bằng tiến sĩ sau khi làm việc dưới sự hướng dẫn của Paul Gordan. Bài kiểm tra miệng diễn ra vào thứ Sáu ngày 13 tháng 12 và cô đã được trao bằng "summa cum laude". Định lý cơ bản của Hilbert năm 1888 đã đưa ra kết quả tồn tại tính hữu hạn của các bất biến trong n biến. Tuy nhiên, Gordan đã áp dụng cách tiếp cận mang tính xây dựng và xem xét các phương pháp mang tính xây dựng để đạt được kết quả tương tự. Luận án tiến sĩ của Noether tuân theo cách tiếp cận mang tính xây dựng này của Gordan và liệt kê các hệ thống gồm 331 dạng hiệp biến. Colin McLarty viết trong [4] rằng

Luận án của cô năm 1908 với Gordan theo đuổi một phép tính khổng lồ đã từng làm Gordan bối rối bốn mươi năm trước và ngay cả Noether cũng không thể hoàn thành được. Theo như tôi biết thì chưa có ai từng hoàn thành nó hoặc thậm chí đã từng kiểm tra nó như cô ấy đã làm. Vào thời điểm đó, nó đã lỗi thời, là một nhân chứng cho sự cô lập dễ chịu của Erlangen và nó đã không tận dụng được công trình của chính Gordan xây dựng dựa trên ý tưởng của Hilbert.

Sau khi hoàn thành bằng tiến sĩ, quá trình bình thường để đạt được một vị trí học thuật sẽ là luận án tiến sĩ khoa học. Tuy nhiên con đường này không dành cho phụ nữ nên Noether vẫn ở lại Erlangen, giúp đỡ cha cô, một người đặc biệt vì sự ốm yếu bệnh tật của mình nên rất biết ơn sự giúp đỡ của con gái ông. Noether cũng thực hiện nghiên cứu của riêng mình, đặc biệt là cô chịu ảnh hưởng của Ernst Fischer, người kế nhiệm Gordan làm trưởng khoa toán học khi ông nghỉ hưu năm 1911. Noether viết về ảnh hưởng của Fischer:

Trên hết, tôi mang ơn ông E. Fischer, người đã thúc đẩy tôi nghiên cứu đại số trừu tượng từ quan điểm số học, và đây vẫn là ý tưởng chủ đạo cho tất cả công việc sau này của tôi.

Ảnh hưởng của Fischer đã đưa Noether hướng tới cách tiếp cận trừu tượng của Hilbert đối với chủ đề này và tránh xa cách tiếp cận mang tính xây dựng của Gordan. Điều này rất quan trọng đối với sự phát triển của cô với tư cách là một nhà toán học bởi Gordan, mặc dù có những thành tựu đáng chú ý nhưng cũng có những hạn chế của ông. Cha của Noether, Max Noether, nói về Gordan (xem [1]):

Gordan không bao giờ có thể đánh giá đúng sự phát triển của các khái niệm cơ bản; ngay cả trong các bài giảng của mình, ông ấy đã hoàn toàn tránh xa mọi định nghĩa cơ bản về bản chất khái niệm, thậm chí cả định nghĩa về giới hạn.

Danh tiếng của Noether tăng lên nhanh chóng khi các ấn phẩm của cô xuất hiện. Năm 1908, cô được bầu vào Circolo Matematico di Palermo, sau đó vào năm 1909, cô được mời trở thành thành viên của Deutsche Mathematiker–Vereinigung và cùng năm đó, cô được mời phát biểu tại cuộc họp thường niên của Hiệp hội ở Salzburg. Cô đã giảng bài Zur Invariantentheorie der Formen von n Variabeln. Năm 1913, cô giảng dạy ở Vienna, một lần nữa tại một cuộc họp của Deutsche Mathematiker–Vereinigung. Bài giảng của cô trong dịp này là Über Reasone Funktionenkörper. Khi ở Vienna cô đã đến thăm Franz Mertens và trao đổi thảo luận về toán học với ông. Một trong những người cháu trai của Merten nhớ lại chuyến viếng thăm của Noether (xem [2]):

...mặc dù là một phụ nữ, nhưng đối với tôi [cô ấy] có vẻ giống như một tuyên úy Công giáo đến từ một giáo xứ nông thôn – mặc một chiếc áo khoác màu đen, dài gần đến mắt cá chân và trông không có gì đặc biệt, một chiếc mũ đàn ông được đội trên mái tóc ngắn của cô ấy ...và với một chiếc túi đeo chéo qua vai giống như túi của những người soát vé đường sắt thời phong kiến, cô ấy là một nhân vật khá kỳ quặc.

Trong những năm ở Erlangen, cô đã hướng dẫn cho hai nghiên cứu sinh bậc tiến sĩ, cả hai đều được cha cô hướng dẫn chính thức. Đó là Hans Falckenberg (bằng tiến sĩ 1911) và Fritz Seidelmann (bằng tiến sĩ 1916).

Năm 1915 Hilbert và Klein mời Noether trở lại Göttingen. Lý do cho điều này là vì Hilbert đang nghiên cứu vật lý, đặc biệt là những ý tưởng về thuyết tương đối gần với lý thuyết của Albert Einstein. Ông quyết định rằng mình cần tới sự giúp đỡ của một chuyên gia về lý thuyết bất biến và sau khi thảo luận với Klein, họ đã đưa ra lời mời. Van der Waerden viết trong [6]:

Cô ấy đến và giải quyết ngay được hai bài toán quan trọng. Thứ nhất: Làm thế nào người ta có thể thu được tất cả các hiệp biến vi phân của bất kỳ trường vectơ hoặc trường tenxơ nào trong không gian Riemann? ...Bài toán thứ hai mà Emmy nghiên cứu là một vấn đề từ thuyết tương đối đặc biệt. Cô đã chứng minh: Với mọi phép biến đổi vô cùng nhỏ của nhóm Lorentz đều có Định lý Bảo toàn tương ứng.

Kết quả này trong vật lý lý thuyết đôi khi được gọi là Định lý Noether, và chứng minh mối quan hệ giữa tính đối xứng trong vật lý và các nguyên lý bảo toàn. Kết quả cơ bản này của thuyết tương đối đã được Einstein ca ngợi trong một bức thư gửi cho Hilbert khi ông đề cập đến tư duy toán học sâu sắc của Noether. Tất nhiên, cô ấy đến Göttingen trong thời gian của Thế chiến thứ nhất. Đây là thời điểm vô cùng khó khăn và cô ấy sống trong cảnh nghèo khó trong suốt những năm này, và về mặt chính trị, cô ấy đã trở thành một nhà xã hội chủ nghĩa cấp tiến. Tuy nhiên, đó là những năm cực kỳ phong phú đối với cô về mặt toán học. Hermann Weyl, trong [7] viết về quan điểm chính trị của Noether:

Trong thời kỳ bão táp sau Cách mạng 1918, cô không tránh khỏi sự sôi động chính trị, cô ít nhiều đứng về phía Đảng Dân chủ Xã hội; dù không thực sự tham gia vào đời sống đảng phái, cô ấy đã tham gia tích cực vào các cuộc thảo luận về các vấn đề chính trị và xã hội thời đó. ...Trong những năm sau đó Emmy Noether không tham gia vào các vấn đề chính trị. Tuy nhiên, cô ấy vẫn luôn là một người theo chủ nghĩa hòa bình đầy thuyết phục, một lập trường mà cô ấy coi là rất quan trọng và nghiêm túc.

Hilbert và Klein đã thuyết phục cô ở lại Göttingen trong khi họ đấu tranh để có được cô chính thức vào Khoa. Trong một cuộc chiến lâu dài với chính quyền trường đại học để cho phép Noether có được học vị tiến sĩ khoa học của mình, đã có rất nhiều trở ngại và phải đến năm 1919, sự cho phép đó mới được cấp và cô được trao vị trí Privatdozent. Trong thời gian này Hilbert đã cho phép Noether giảng dạy bằng cách quảng cáo các khóa học của cô dưới tên riêng của ông. Ví dụ: một khóa học được đưa ra trong học kỳ Đông năm 1916 – 1917 xuất hiện trong danh mục dưới dạng:

Seminar Vật lý Toán: Giáo sư Hilbert, với sự trợ giảng của Tiến sĩ E. Noether, Thứ Hai từ 4 – 6, miễn học phí.

Tại Göttingen, sau năm 1919, Noether rời xa lý thuyết bất biến để nghiên cứu lý thuyết iđêan, tạo ra một lý thuyết trừu tượng giúp phát triển lý thuyết vành thành một chủ đề toán học lớn. Lý thuyết về iđêan trong Ringbereichen (1921) có tầm quan trọng cơ bản trong sự phát triển của đại số hiện đại. Trong bài báo này, cô đã đưa ra cách phân tích các iđêan thành giao của các iđêan sơ cấp trong bất kỳ vành giao hoán nào có điều kiện xích tăng dần. Emanuel Lasker (người đã trở thành nhà vô địch cờ vua thế giới) đã chứng minh kết quả này cho một vành đa thức trên một trường. Noether xuất bản Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahlkorpern vào năm 1924. Trong bài báo này, bà đưa ra năm điều kiện về một vành cho phép bà suy ra rằng trong các vành giao hoán như vậy mọi iđêan đều là tích duy nhất của các iđêan nguyên tố.

Cùng năm 1924 B L van der Waerden đến Göttingen và dành một năm nghiên cứu với Noether. Sau khi trở về Amsterdam van der Waerden đã viết cuốn sách Đại số hiện đại gồm hai tập. Phần chính của tập thứ hai bao gồm công trình của Noether. Từ năm 1927 trở đi Noether cộng tác với Helmut Hasse và Richard Brauer trong nghiên cứu về đại số không giao hoán. Họ đã viết một bài báo chung rất đẹp tựa đề Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren được xuất bản vào năm 1932. Ngoài việc giảng dạy và nghiên cứu, Noether còn giúp biên tập Mathematische Annalen. Phần lớn công việc của bà xuất hiện trên các bài báo do đồng nghiệp và sinh viên viết chứ không phải dưới tên của chính bà.

Sự ghi nhận sâu hơn về những đóng góp toán học xuất sắc của bà đi kèm với lời mời phát biểu tại Đại hội các nhà toán học quốc tế tại Bologna vào tháng 9 năm 1928 và một lần nữa tại Zürich vào tháng 9 năm 1932. Bài phát biểu của bà tại Đại hội năm 1932 có tựa đề Hyperkomplex Systeme in ihren Beziehungen zur kommutativen Algebra und zur Zahlentheorie. Năm 1932, bà cũng nhận được, cùng với Emil Artin, Giải tưởng niệm Alfred Ackermann–Teubner vì sự tiến bộ của kiến thức toán học. Vào tháng 4 năm 1933, những thành tựu toán học của bà chẳng còn có giá trị gì khi Đức Quốc xã khiến bà bị đuổi khỏi Đại học Göttingen vì bà là người Do Thái. Bà không nhận được trợ cấp hay bất kỳ hình thức bồi thường nào khác, tuy nhiên, bà luôn cho rằng mình còn may mắn hơn những người khác. Bà viết cho Helmut Hasse vào ngày 10 tháng 5 năm 1933 (xem ví dụ trong [2]):

Cảm ơn rất nhiều vì lá thư đầy cảm thông thân yêu của bạn! Tuy nhiên, tôi phải nói rằng điều này đối với tôi ít khủng khiếp hơn nhiều so với nhiều người khác. Ít nhất thì tôi cũng có một khoản thừa kế nhỏ (dù sao thì tôi cũng chưa bao giờ được hưởng lương hưu) cho phép tôi ngồi lại một thời gian và xem xét.

Weyl nói về phản ứng của Noether trước những sự kiện thảm khốc đang diễn ra xung quanh bà trong bài phát biểu tại tang lễ của bà:

Bạn không tin vào cái ác, thực sự bạn chưa bao giờ nghĩ rằng nó có thể đóng một vai trò nào đó trong công việc của con người. Điều này chưa bao giờ khiến tôi thấy rõ ràng hơn mùa hè năm ngoái chúng tôi cùng nhau trải qua ở Göttingen, mùa hè giông bão năm 1933. Giữa cuộc đấu tranh, hủy diệt và biến động khủng khiếp đang diễn ra xung quanh chúng tôi ở mọi phe phái, trên một vùng biển. của hận thù và bạo lực, của sợ hãi, tuyệt vọng và chán nản – bạn đã đi theo con đường riêng của mình, cân nhắc những thách thức của toán học với sự cần cù như trước. Khi không được phép sử dụng giảng đường của viện, bạn tập trung học sinh tại nhà riêng của mình. Ngay cả những người mặc áo nâu cũng được chào đón; bạn chưa bao giờ nghi ngờ tính chính trực của họ dù chỉ một giây. Không quan tâm đến số phận của mình, cởi mở và không sợ hãi, luôn hòa giải, bạn đã đi theo con đường riêng của mình. Nhiều người trong chúng tôi tin rằng một mối thù hận đã nổ ra và không thể nào tha thứ được; nhưng bạn vẫn không bị ảnh hưởng bởi tất cả.

Bà nhận chức giáo sư thỉnh giảng kéo dài một năm tại Cao đẳng Bryn Mawr ở Hoa Kỳ và vào tháng 10 năm 1933 bà lên đường đến Hoa Kỳ trên con tàu Bremen để nhận sự bổ nhiệm. Bà đã hy vọng trì hoãn được việc nhận lời mời vì bà mong muốn đến được Oxford ở Anh, nhưng rõ ràng là bà phải nhanh chóng rời đi. Tại Bryn Mawr, bà được Anna Johnson Pell Wheeler, người đứng đầu bộ phận toán học, chào đón nồng nhiệt. Noether tổ chức một buổi hội thảo trong học kỳ mùa đông năm 1933 – 34 cho ba sinh viên và một nhân viên. Họ đã nghiên cứu tập đầu tiên của Đại số hiện đại của van der Waerden. Vào tháng 2 năm 1934, bà bắt đầu giảng bài hàng tuần tại Viện Nghiên cứu Cao cấp, Princeton. Trong một bức thư gửi Hasse, ngày 6 tháng 3 năm 1934, bà viết:

Tôi đã bắt đầu với các mô-đun biểu diễn, các nhóm có toán tử ...; trường Princeton sẽ nhận được phương pháp nghiên cứu đại số đầu tiên vào mùa đông này và đó là một phương pháp nghiên cứu kỹ lưỡng. Khán giả của tôi chủ yếu bao gồm các nghiên cứu sinh, ngoài Albert và Vandiver, nhưng tôi bắt đầu nhận ra rằng mình phải cẩn thận; xét cho cùng, về cơ bản *họ đã chủ yếu quen với việc tính toán tường minh và tôi đã loại bỏ một số ít trong số những nghiên cứu sinh bằng cách tiếp cận của mình.*

Noether trở lại Đức vào mùa hè năm 1934. Ở đó, bà gặp anh trai Fritz lần cuối cùng, và đến thăm Artin ở Hamburg trước khi đi tiếp tới Göttingen. Năm 1980 vợ Artin nhớ lại chuyến thăm của Noether [3]:

Bây giờ điều tôi nhớ rõ nhất là chuyến đi trên Hamburg Untergrund, tức là tàu điện ngầm ở Hamburg. Chúng tôi đón Emmy tại Viện, cô ấy và Artin ngay lập tức bắt đầu nói chuyện về toán học. Lúc đó câu chuyện xoay quanh Idealtheorie, và họ bắt đầu nói về Ideal, Führer, Gruppe và Untergruppe, và cả mọi hành khách trong toa đột nhiên bỗng dỏng hết tai lên. [Mỗi danh từ tiếng Đức đều có cả ý nghĩa toán học và chính trị.] Và tôi sợ chết khiếp – tôi nghĩ, Chúa ơi, điều tiếp theo sắp xảy ra, ai đó sẽ bắt giữ chúng ta. Tất nhiên, đó là vào năm 1934, và bạn cũng biết mọi thứ xung quanh lúc đó thế nào rồi đấy. Nhưng Emmy hoàn toàn không biết gì, cô ấy nói rất to và rất hào hứng, ngày càng to hơn, và liên tục "Quốc trưởng (Führer)" vang lên, và "Lý tưởng (Ideal)" nữa chứ. Cô ấy rất tràn đầy sức sống và thường xuyên nói rất nhanh và rất to.

Bà trở về Hoa Kỳ, nơi chức vụ giáo sư thỉnh giảng của bà tại Bryn Mawr đã được gia hạn thêm một năm. Bà tiếp tục các bài giảng hàng tuần của mình tại Princeton, nơi Richard Brauer hiện cũng đã đến giảng dạy. Sau những bài giảng, bà thích nói chuyện về toán cùng với Weyl, Veblen và Brauer.

Cái chết của Noether thật đột ngột và bất ngờ. Vào tháng 4 năm 1935, các bác sĩ phát hiện ra rằng bà có một khối u. Hai ngày sau, họ phẫu thuật, phát hiện thêm những khối u mà họ cho là lành tính và không cắt bỏ. Ca phẫu thuật có vẻ thành công và trong ba ngày, tình trạng của bà đã được cải thiện. Tuy nhiên, vào ngày thứ tư, bà đột ngột suy sụp và sốt rất cao. Bà đã mất sau ngày hôm đó.

Weyl trong Diễn văn Tưởng niệm [7] đã nói:

Tầm quan trọng của bà đối với môn đại số không thể được đọc thấy hoàn toàn chỉ từ các bài báo của chính bà, bà có khả năng khơi dậy sự hào hứng rất lớn đối với người khác và nhiều đề xuất của bà chỉ hình thành trong tác phẩm của các học trò và đồng nghiệp của bà.

Trong [5] van der Waerden viết:

Đối với Emmy Noether, các mối quan hệ giữa các con số, hàm số và các phép tính trở nên minh bạch, có thể khái quát hóa và hiệu quả chỉ sau khi chúng được tách rời khỏi bất kỳ đối tượng cụ thể nào và được quy giản thành các mối quan hệ khái niệm tổng quát.

Mặc dù trong đời bà ít được công nhận nếu xét đến những thăng tiến đáng kể mà bà đã đạt được, bà vẫn được vinh danh về nhiều mặt sau khi qua đời. Một miệng núi lửa trên mặt trăng được đặt theo tên của bà. Một con phố ở quê hương Noether được đặt theo tên bà và ngôi trường bà từng theo học hiện được đặt tên là Trường Emmy Noether. Nhiều tổ chức khác nhau đã đặt tên học bổng và bài giảng theo tên Emmy Noether.

Tài liệu tham khảo

[1] M. Bohn, *Emmy Noether, a woman of greatness* (AuthorHouse, 2005).

[2] A. Dick, *Emmy Noether*, 1882 – 1935 (Birkhäuser, Boston, Mass., 1981).

[3] C. H. Kimberling, Emmy Noether, greatest woman mathematician, *The Mathematics Teacher* 75 (3) (1982), 246 – 249.

[4] C. McLarty, Emmy Noether's first great mathematics and the culmination of first–phase logicism, formalism, and intuitionism, *Arch. Hist. Exact Sci.* 65 (1) (2011), 99 – 117.

[5] B. L. van der Waerden, Nachruf auf Emmy Noether, *Mathematische Annalen* 111 (1935), 469 – 476.

[6] B. L. van der Waerden, The school of Hilbert and Emmy Noether, *Bull. London Math. Soc.* 15 (1) (1983), 1 – 7.

[7] H. Weyl, Emmy Noether, *Scripta mathematica* 3 (3) (1935), 201 – 220.

THIẾT BỊ ANTIKYTHERA: CỖ MÁY TÍNH TOÁN THỜI HY LẠP CỔ ĐẠI

HOÀNG VĂN LONG[1]

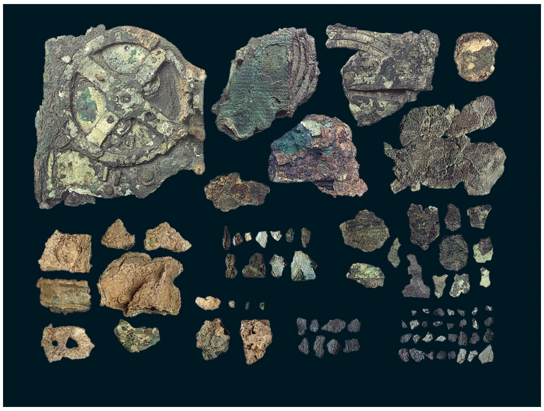
Hình 1. Áp phích cho bộ phim Indiana Jones and the Dial of Destiny (2023).

Bộ phim mới nhất trong loạt phim khảo cổ Indiana Jones mang tên "Indiana Jones and the Dial of Destiny" vừa ra mắt trong năm 2023. Nội dung phim xoay quanh một thiết bị cổ đại được Archimedes thiết kế (bề mặt của nó là nền của áp phích quảng cáo phim) có thể dự đoán các đứt gãy thời gian cho phép con người du hành ngược về quá khứ. Thiết bị này được dựa trên nguyên bản là một thiết bị được các nhà khảo cổ phát hiện từ đầu thế kỷ 20. Tuy không có khả năng giúp chúng ta di chuyển xuyên thời gian, câu chuyện thực tế về nó cũng vẫn có nhiều điều thú vị và độc đáo mà chúng ta sẽ cùng tìm hiểu trong bài viết này.

1. Quá trình phát hiện và những nghiên cứu ban đầu

Năm 1900, các thợ lặn mò bọt biển ở gần đảo Antikythera, Hy Lạp phát hiện một con tàu đắm từ thời Hy Lạp cổ đại. Các nhà khảo cổ học đã tiến hành trục vớt và mang lên bờ nhiều hiện vật. Trông số đó, có một khối bằng đồng kích cỡ ngang với một quyển từ điển lớn nhưng không được ai để ý đến. Vài tháng sau, khối này vỡ ra cho thấy nhiều thiết bị dạng bánh răng chính xác chỉ to bằng cỡ đồng xu. Tổng cộng có tất cả 82 mảnh vỡ và đến nay vẫn chưa có câu trả lời hoàn thiện về việc chúng khớp với nhau như thế nào. Được đặt tên là thiết bị Antikythera, theo tên của hòn đảo nơi nó được phát hiện, cấu tạo và chức năng của nó vẫn là một câu hỏi lớn cho khoa học ngày nay.

[1] *Hà Nội.*



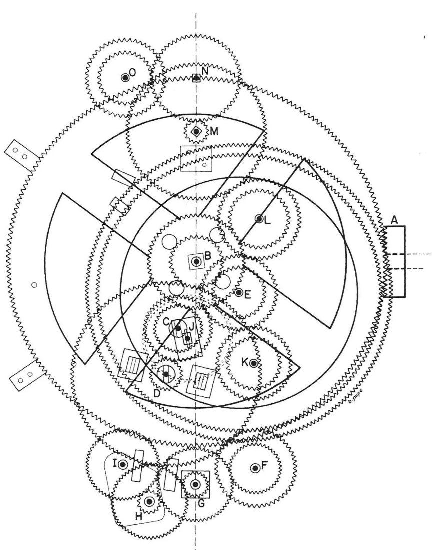
Hình 2. Các mảnh vỡ của thiết bị Antikythera được lưu trữ tại bảo tàng Athens.

Nỗ lực đầu tiên để khám phá bí ẩn của thiết bị Antikythera được nhà nghiên cứu ngôn ngữ cổ đại Albert Rehm tiến hành. Trong khoảng những năm 1905 và 1906, ông đã phát hiện các con số xuất hiện trên cùng một mảnh vỡ: 19, 76 và 223. Đây là các con số đặc biệt có liên quan đến thiên văn học. Chu kỳ Meton (đặt tên theo một nhà thiên văn học Hy Lạp cổ đại) bao gồm 19 năm, tức là 235 chu kỳ giao hội của Mặt trăng (chu kỳ giao hội là khoảng thời gian mà Mặt trăng xuất hiện lại ở cùng vị trí so với Trái đất, xấp xỉ bằng 27,32166 ngày). Sau mỗi chu kỳ Meton, pha (tròn/khuyết) của Mặt trăng lại xuất hiện lại ở cùng vị trí vào đúng một ngày cố định trong lịch Mặt trời. Do năm dương lịch gần với $365\frac{1}{4}$ ngày, một giá trị không nguyên nên nhà toán học Hy Lạp Callippus đã đưa ra chu kỳ 76 năm (gấp 4 chu kỳ của Meton). Trong khi đó, chu kỳ saros (theo cách gọi của người Babylon cổ đại) kéo dài 223 tháng là chu kỳ mà nguyệt thực lặp lại ở cùng thời điểm trong năm và cùng vị trí so với Trái đất. Dựa trên các con số này, Rehm đã đề xuất rằng thiết bị Antikythera có chức năng tính toán thiên văn nhưng mô hình ông đưa ra không đúng do thiếu các dữ liệu.

Đến những năm 1950, Derek de Solla Price, một nhà vật lý chuyển sang nghiên cứu lịch sử khoa học, bắt đầu tiến hành nghiên cứu sâu hơn về các mảnh vỡ và sử dụng các phương pháp mới như chụp ảnh X–quang. Từ các dữ liệu này, Price cho rằng thiết bị Antikythera có đến ít nhất 27 bánh răng bên trong (con số ngày nay là > 30). Do sự ăn mòn vì nằm hàng nghìn năm dưới đáy biển, số lượng răng của mỗi bánh khó có thể xác định được một cách chính xác. Đồng thời, trong các hình ảnh X–quang 2 chiều mà Price thu được, hình ảnh các bánh răng cũng chồng lấn lên nhau một cách phức tạp. Theo quan sát của ông, bánh răng lớn nhất có thể có 223 hoặc 225 răng. Price cũng phát hiện được một bánh răng với 127 răng mà ông cho là có liên quan đến chu kỳ Meton 19 năm (19 năm có 235 chu kỳ tròn khuyết của Mặt trăng nhưng nếu tính chu kỳ Mặt trăng theo sự lặp lại vị trí trên bầu trời của nó thì 19 năm có $254 = 2 \times 127$ chu kỳ dạng này, sự khác biệt là do quỹ đạo dạng ellipse của Mặt trăng quanh Trái Đất). Bánh răng này hoạt động trong một tổ hợp các bánh răng liên kết với nhau và được điều khiển bằng một bánh răng có 38 răng thông qua các bánh răng trung gian (cần nhớ rằng $38 = 19 \times 2$). Theo mô hình của Price, thiết bị Antikythera có thể đã được sử dụng để xác định vị trí của Mặt trời, Mặt trăng và các hành tinh cho một ngày cụ thể trong quá khứ cũng như tương lai.

Derek de Solla Price (1922 – 1983)

Người sử dụng chỉ cần quay một tay quay để vận hành thiết bị và các bánh răng sẽ vận hành các kim trên một bề mặt tương tự với mặt la bàn. Price đã đạt một bước tiến lớn khi xác định được vị trí tương đối giữa các khối lớn cũng như cấu tạo tổng quát với các mặt la bàn ở trước và sau. Quá trình nghiên cứu miệt mài suốt 16 năm của Price được ông tổng kết trong cuốn sách năm 1974 mang tên "Các bánh răng từ người Hy Lạp". Theo Price, thiết bị Antikythera có thể coi là một trong những hiện vật quan trọng nhất để hiểu về khoa học kỹ thuật Hy Lạp cổ đại, mang lại nhiều thông tin hơn những di vật bằng đá hay gốm trong các bảo tàng. Nhiều khía cạnh đời sống của nền văn minh này vẫn chưa sáng tỏ, đặc biệt là các công cụ cơ khí và kim loại được sử dụng trong các lĩnh vực đời sống khác nhau, từ nông nghiệp đến xây dựng. Price mất năm 1983 khi mà các câu hỏi về lịch sử khoa học ông đặt ra vẫn chưa có lời giải đáp.



Hình 3. Đề xuất của Price về cấu tạo các bánh răng của thiết bị Antikythera

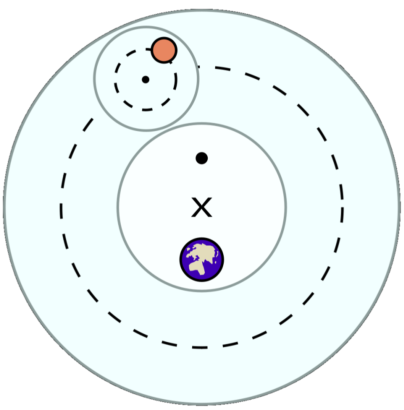
Sau Price, Michael Wright, một nhà nghiên cứu ở Bảo tàng Khoa học London lại tiến hành chụp X–quang các mảnh vỡ lần nữa với sự cộng tác của nhà lịch sử máy tính Allan Bromley nhằm mục đích cho ra một mô hình chính xác hơn. Wright đã chỉ ra nhiều điểm không đúng với thực tế trong mô hình của Price. Ông cũng đã tiến hành phục dựng lại thiết bị Antikythera với các bánh răng bằng đồng thau có độ dày chỉ từ 1 đến 2 mm giống như các hiện vật đã được phát hiện. Wright đã phát hiện được số răng chính xác cho một số bánh răng mới cũng như làm rõ hơn một số chức năng của thiết bị. Thiết bị phục dựng của ông cũng cho thấy tính khả thi của việc chế tạo một thiết bị thiên văn như vậy ở thời cổ đại.

Hình 4. Wright và mô hình thiết bị Antikythera do ông chế tạo.

2. Giả thiết mới về cấu tạo chi tiết và vận hành

Năm 2005, thiết bị Antikythera lại được chụp X–quang lần thứ 3, sử dụng công nghệ chụp cắt lớp CT với một máy chụp đặc biệt còn đang được thí nghiệm. Các kết quả chụp được cải thiện nhờ một thuật toán xử lý hình ảnh mới của Hewlett–Packard (HP) để tăng cường các chi tiết trên bề mặt trong ảnh. Những dữ liệu mới này cho phép nhà toán học người Anh Tony Freeth và nhà nghiên cứu lịch sử khoa học Alexander Jones (Viện nghiên cứu thế giới cổ đại, Đại học New York) tiến hành các nghiên cứu sâu hơn về các chi tiết vận hành của thiết bị Antikythera.

Hình chụp mới cho thấy bánh răng chính trong thiết bị có 223 răng, ứng với chu kỳ *saros*. Việc này khẳng định rằng thiết bị cổ đại của chúng ta không chỉ dự đoán chuyển động của các thiên thể mà còn có thể dự đoán nhật thực và nguyệt thực. Bánh răng chính sẽ quay một kim đồng hồ trên một đĩa xoắn ốc với 4 vòng xoáy được chia làm tổng cộng 223 phần theo 223 tháng của chu kỳ *saros*. Đồng thời, Freeth và Jones cũng phát hiện ra chức năng của 4 bánh răng khác nằm trong phạm vi của bánh răng chính: chúng cho phép tính các chuyển động biến thiên của Mặt trăng. Trong thực tế, Mặt trăng có quỹ đạo hình ellipse quanh Trái đất chứ không phải quỹ đạo tròn. Người Hy Lạp cổ đại không biết đến dạng quỹ đạo này nên đã mô phỏng nó bằng một dạng quỹ đạo kết hợp hai chuyển động tròn gọi là epicycle.



Hình 5. Dạng quỹ đạo epicycle theo mô tả của nhà toán học Hy Lạp cổ đại Ptolemy. Một hành tinh sẽ chuyển động tròn trên một đường tròn mà tâm của nó cũng chuyển động tròn trên một quỹ đạo có tâm ở điểm đánh dấu X gần với Trái đất. Nếu nhìn từ điểm (.) thì hành tinh có vận tốc góc không đổi. Mô hình phức tạp này được sinh ra nhằm khớp chuyển động tròn với các số liệu thiên văn quan sát được thời đó. Nó chỉ rời khỏi lịch sử khi các định luật Kepler được phát hiện rất nhiều thế kỷ sau đó.

Dạng quỹ đạo này được điều khiển trong thiết bị Antikythera nhờ một cơ chế mà Wright đã phát hiện ra. Các bánh răng nhỏ hơn có một kim trên bề mặt gắn vào một lỗ trên bánh răng chính. Tuy nhiên, do trục của chúng hơi lệch nhau chỉ khoảng 1 mm, hệ thống sẽ cho ra các chuyển động biến thiên so với chuyển động tròn. Các hình ảnh chụp X–quang CT thể hiện rõ cơ chế này. Các bánh răng xung quanh sẽ không có trục cố định mà trục của chúng được gắn vào vành của bánh 223 răng. Công bố của Freeth và nhóm của ông năm 2006 đã cho thấy kết cấu này cùng với lý thuyết về chuyển động dạng epicycle được sử dụng để hiển thị chuyển động của Mặt trăng trên mặt sau của thiết bị Antikythera.

Quá trình giải thích mặt trước của thiết bị khó khăn hơn nhiều. Mảnh vỡ lớn nhất là bánh răng chính có chu kỳ quay ứng với một năm khi hoạt động. Nó không phải là một đĩa phẳng như các bánh răng chính mà có 4 nan hoa cùng nhiều kết nối với các phần khác thông qua các trục.

Trước đó, dựa trên ý tưởng của Price, Wright đã đề xuất rằng hệ thống bánh răng ở mặt trước được sử dụng để tính các chu kỳ của các hành tinh xung quanh Mặt trời, bao gồm 5 hành tinh đã biết từ thời Hy Lạp cổ đại: sao Thủy, sao Kim, sao Hỏa, sao Mộc và sao Thổ, theo dạng chu kỳ epicycle. Ông đã tự chế tạo một mô hình bằng đồng thau từ thiết kế của mình. Tuy nhiên, mô hình của Wright rất phức tạp với tám đầu ra đồng trục trong khi phần mặt trước của thiết bị Antikythera không có mức độ phức tạp như vậy. Dữ liệu chụp CT năm 2005 còn cho biết thêm nhiều đoạn văn bản trên các mảnh vỡ mà trước đó chưa được phát hiện. Năm 2016, Alexander Jones, một giáo sư lịch sử thiên văn ở Đại học New York đã tìm ra mô tả về việc chuyển động của Mặt trời và các hành tinh được biểu diễn bằng các vành với viên bi chuyển động từ những văn tự này. Câu hỏi đặt ra là nếu phần mặt trước của thiết bị không hoạt động theo những gì mà Wright đã nghĩ thì cơ chế tính toán chu kỳ thực sự của nó là như thế nào?

Trong những phần văn bản còn sót lại từ thiết bị, người ta phát hiện ra các con số 462 cho sao Kim và 442 cho sao Thổ. Những con số này không khớp với các chu kỳ được biết đến cho các hành tinh này trong thiên văn học cổ đại. Trong một nghiên cứu mới gần đây, Freeth và nhóm nghiên cứu của mình đã đề xuất rằng các con số này xuất phát từ hai chu kỳ: 289 chu kỳ giao hội trong 462 năm cho sao Kim và 427 chu kỳ giao hội trong 442 năm cho sao Thổ. Theo đó, những chu kỳ này được tính toán từ các chu kỳ đã biết cho những hành tinh trên sử dụng công thức của Parmenides, một nhà toán học Hy Lạp cổ đại sống vào thế kỷ thứ 6 đến thứ 5 trước Công nguyên. Giả sử có một đại lượng θ mà ta đã biết các giá trị gần đúng của nó là $\frac{p}{q}$ và $\frac{r}{s}$. Khi đó, một số giá trị xấp xỉ khác của nó có thể được thiết lập dưới dạng $\frac{p+kr}{q+ks}$ hoặc $\frac{kp+r}{kq+s}$.

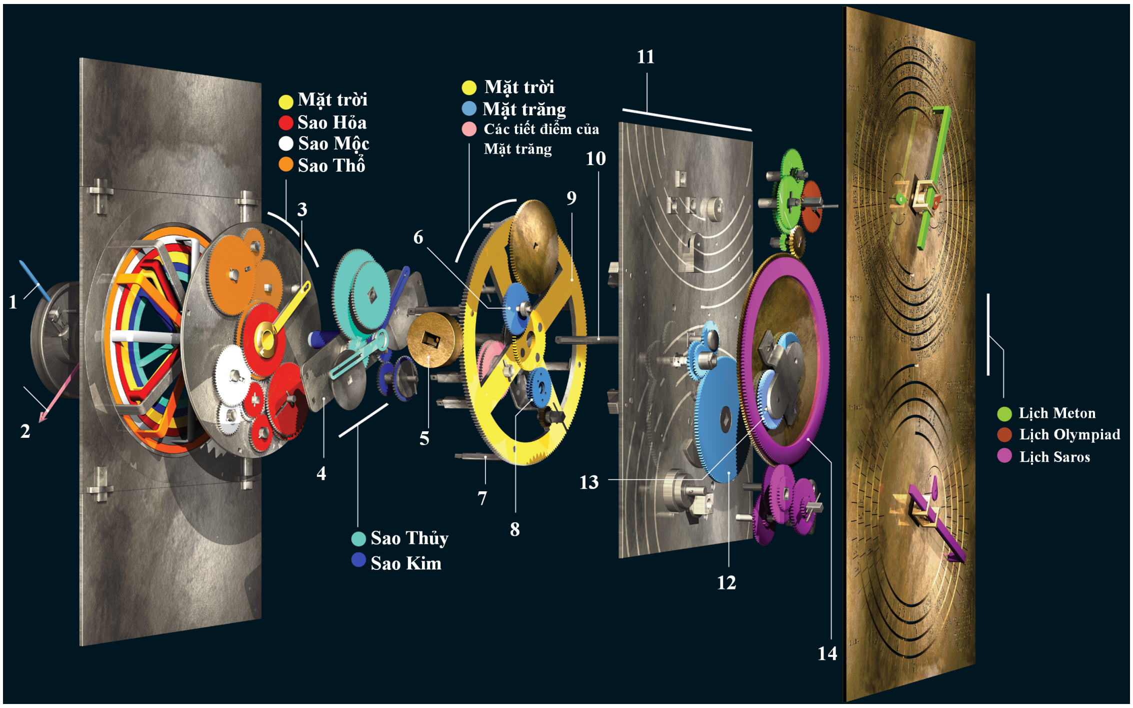
p	q	r	s
5	8	720	1151
p+r	q+s		
725	1159		
2p+r	2q+s	p+2r	q+2s
730	1167	1445	2310
3p+r	3q+s	p+3r	q+3s
735	1175	2165	3461

Hình 6. Các chu kỳ được sinh từ hai chu kỳ $(5,8)$ và $(720,1151)$ cho sao Kim. Các chu kỳ có thể phân tích thành các thừa số nguyên tố nhỏ hơn 100 được tô màu.

Việc lựa chọn chu kỳ nào để sử dụng trong các chu kỳ được sinh ra phụ thuộc vào các yếu tố như tính chính xác, khả năng phân tích ra thừa số nguyên tố và tính tối ưu khi thiết kế cơ khí. Chu kỳ được chọn cần phải đủ chính xác để khớp với các giá trị đã biết cho các hành tinh như sao Kim hay sao Thổ. Đồng thời, nó cũng phải cho phép việc phân tích ra thừa số nguyên tố dễ dàng để đảm bảo rằng số răng của các bánh răng trong hệ thống không quá lớn gây khó khăn trong chế tạo. Ví dụ, với sao Kim, chu kỳ $(5,8)$ tuy đơn giản nhưng lại có độ chính xác không cao. Trong khi đó, chu kỳ $(720,1151)$ chính xác hơn đã được biết đến từ thời Babylon cổ đại lại chứa số 1151 không phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố nhỏ. Mặt khác, để tối ưu thiết kế, các hành tinh khác nhau cần phải chia sẻ một số bánh răng nếu chúng có cùng các thừa số nguyên tố, làm giảm số lượng bánh răng giúp việc chế tạo dễ dàng hơn. Trong khi chu kỳ $(289,462)=(17^2,2\times3\times7\times11)$ được sử dụng cho sao Kim thì chu kỳ $(427,442)=(7\times61,2\times13\times17)$ được chọn cho sao Thổ. Sự xuất hiện của các thừa số nguyên tố chung ví dụ như 17 giúp cho một số bánh răng có thể được sử dụng chung giữa các hành tinh làm giảm mức độ phức tạp của việc thiết kế và chế tạo.

Hình 7. Hình ảnh phục dựng phía ngoài thiết bị Antikythera. Mặt trước (bên trái trong hình) biểu diễn chuyển động của Mặt trời và các hành tinh. Mặt sau (bên phải trong hình) biểu diễn chuyển động của Mặt trăng cùng chu kỳ nguyệt thực.

Dựa trên các giả thuyết này cũng như các đặc điểm của một số mảnh vỡ, nhóm nghiên cứu



Hình 8. Mô hình cấu tạo bên trong của thiết bị Antikythera theo Tony Freeth. 1) Kim chỉ cho Mặt trăng. 2) Kim chỉ cho các tiết điểm của Mặt trăng (điểm quỹ đạo Mặt trăng cắt Hoàng đạo). 3) Cơ chế cho chuyển động của Mặt trời. 4) Bản hình chữ nhật. 5) Bánh răng đầu vào, gắn với tay quay. 6) Bánh răng 53 răng cho chuyển động của Mặt trăng. 7) Cột đỡ. 8) Bánh răng 38 răng. 9) Bánh răng chính. 10) Trục đầu ra cho chuyển động biến thiên của Mặt trăng. 11) Bảng chữ nhật chính. 12) Bánh răng 127 răng cho chuyển động trung bình của Mặt trăng. 13) Cơ chế trục và lỗ để điều khiển chuyển động biến thiên của Mặt trăng. 14) Bánh răng 188 răng (hàn vào bánh răng 233 răng).

của Jones cũng đã đề xuất các chu kỳ được sử dụng cho các hành tinh còn lại cùng một thiết kế của phần mặt trước theo các chu kỳ này. Tuy chưa thể hoàn toàn khẳng định do nhiều mảnh vỡ vẫn đang thất lạc, mô hình mới này có thể được coi là gần nhất với thiết kế thật của thiết bị trong số các giả thuyết hiện có.

3. Bí ẩn về nguồn gốc

Thiết bị cổ đại trong bộ phim Indiana Jones được chính Archimedes chế tạo, còn với thiết bị Antikythera trong thực tế, chúng ta vẫn chưa thể có kết luận chắc chắn với nhiều giả thuyết khác nhau. Trong các ghi chép của học giả Cicero thời La Mã, Archimedes đã chế tạo một thiết bị hình cầu mô phỏng chuyển động của Mặt trời, Mặt trăng và các hành tinh. Bản thân Wright từ các mô tả còn sót lại đã phục dựng một thiết bị như vậy. Có rất nhiều khả năng, thiết bị Antikythera được ra đời sau đó là kết quả của một quá trình phát triển từ thiết bị của Archimedes.

Hình 9. Quả cầu của Archimedes do Wright dựng lại.

Hình 10. Tượng Posidonius ở Bảo tàng khảo cổ học Naples (Italy).

Mặt khác, Cicero cũng nhắc đến một thiết bị có chức năng tương tự thiết bị Antikythera khi ông ở đảo Rhodes. Nó được nhà toán học Hy Lạp Posidonius chế tạo. Do con tàu chở thiết bị Antikythera bị đắm khi đang trên tuyến đường từ Rhodes về đất liền, việc thiết bị này liên quan đến Posidonius là rất có khả năng. Đồng thời, đảo Rhodes còn là nơi mà nhà toán học và thiên văn học Hipparchus, cha đẻ của lượng giác, từng sinh sống vài thập kỷ trước Posidonius nên mối liên hệ đến Hipparchus cũng là một khả năng có thể xảy ra. Nếu không có thêm những dữ kiện khảo cổ mới (hiện vật hoặc văn bản), nguồn gốc chính xác của thiết bị Antikythera vẫn là một vấn đề còn bỏ ngỏ.

4. Lời kết

Thiết bị Antikythera. Tranh của Dionysios Kriaris, một nhà toán học ở Athens, Hy Lạp.

Thiết bị Antikythera và những nghiên cứu xung quanh nó cho thấy một khía cạnh hoàn toàn mới về toán học và khoa học thời Hy Lạp cổ đại với các thiết bị cơ khí chính xác ở mức độ đáng kinh ngạc. Trước đó, thiết bị cơ khí chính xác sử dụng bánh răng sớm nhất được biết đến là một đồng hồ Mặt trời và lịch có nguồn gốc Byzantine từ thế kỷ thứ 6 sau Công nguyên, với cấu tạo đơn giản hơn nhiều so với thiết bị Antikythera. Những nội dung trong bài viết này chỉ mang tính giới thiệu sơ lược, các độc giả muốn tìm hiểu nhiều hơn các chi tiết liên quan đến thiết bị Antikythera có thể xem thêm ở các tài liệu trong phần tài liệu tham khảo. Các nghiên cứu khảo cổ học trong tương lai sẽ còn tiếp tục mang đến những phát hiện mới xung quanh thế giới cổ đại, đặc biệt về toán học và khoa học của nhân loại trong giai đoạn này.

Tài liệu tham khảo

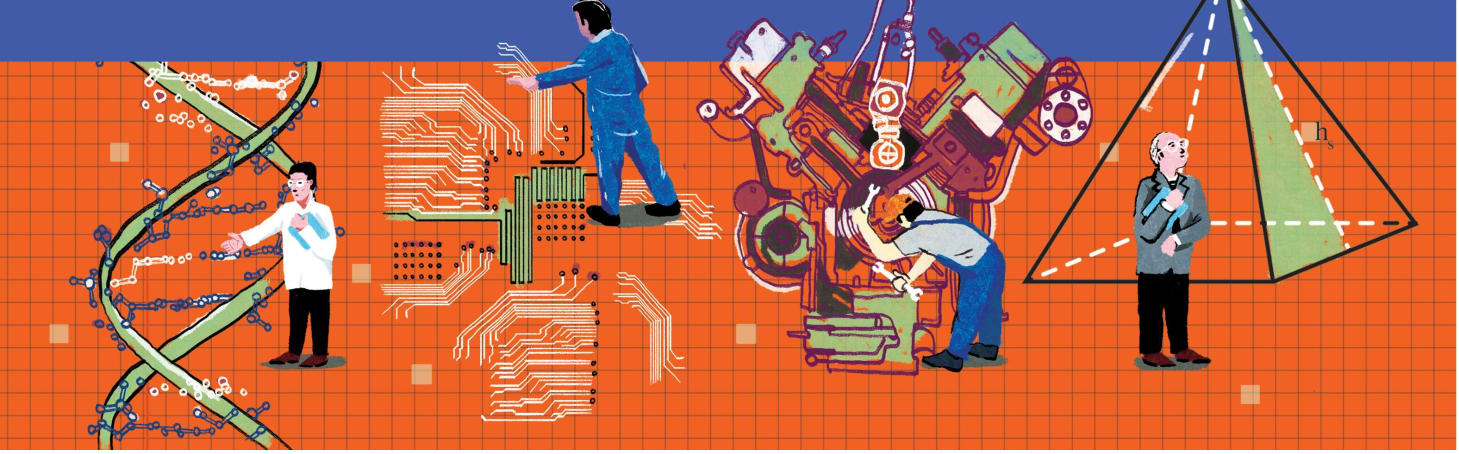
[1] Freeth, T. An Ancient Greek Astronomical Calculation Machine Reveals New Secrets. *Scientific American*, 326(1), 24 – 33 (2022).

[2] Freeth, T., Bitsakis, Y., Moussas, X., Seiradakis, J. H., Tselikas, A., Mangou, H., ... Edmunds, M. G. Decoding the ancient Greek astronomical calculator known as the Antikythera Mechanism. *Nature*, 444(7119), 587 – 591 (2006). https://doi.org/10.1038/nature05357

[3] Freeth, T., Higgon, D., Dacanalis, A., MacDonald, L., Georgakopoulou, M., & Wojcik, A. A Model of the Cosmos in the ancient Greek Antikythera Mechanism. *Scientific Reports*, 11(1), (2021). https://doi.org/10.1038/s41598-021-84310-w

[4] Jones, A. *A portable cosmos : revealing the Antikythera Mechanism, scientific wonder of the ancient world*. New York, Ny: Oxford University Press (2017).

[5] Lin, J.–L., & Yan, H.–S. *Decoding the Mechanisms of Antikythera Astronomical Device*. Springer (2015).



THẾ GIỚI QUAY TÍT CỦA ELECTRON

DAVID KEYTON VÀ MIKE CORDER[1]

(Người dịch: Nguyễn Hoàng Thạch[2])

Hôm thứ ba ngày 3 tháng 10 vừa qua, ba nhà khoa học đã giành được Giải Nobel Vật lý 2023 nhờ mang đến cho chúng ta cái nhìn đầu tiên về thế giới siêu tốc độ của các electron quay tít, một lĩnh vực có thể sẽ giúp cải tiến các thiết bị điện tử hoặc chẩn đoán bệnh.

Ảnh: Viện Hàn lâm Khoa học Hoàng gia Thụy Điển.

Giải thưởng được trao cho nhà vật lý Pháp – Thụy Điển Anne L'Huillier, nhà vật lý người Pháp Pierre Agostini và nhà vật lý gốc Hungary Ferenc Krausz, vì công trình của họ về thành phần tí hon chạy quanh hạt nhân của nguyên tử và là cái cơ bản của hầu như mọi thứ: hóa học, vật lý, cơ thể và vật dụng của chúng ta.

Theo các chuyên gia, electron di chuyển nhanh đến nỗi con người không thể cô lập được chúng, nhưng bằng cách quan sát trong những tích tắc nhỏ nhất có thể, các nhà khoa học hiện đã có cái nhìn thoáng qua "mờ mờ" về chúng, qua đó mở ra nhiều ngành khoa học hoàn toàn mới.

"Electron di chuyển rất nhanh, và chúng thực sự là lực lượng lao động ở mọi nơi," Mats Larsson, thành viên Ủy ban Giải thưởng Nobel, cho biết. "Một khi có thể điều khiển và hiểu được electron, bạn đã tiến được một bước lớn."

L'Huillier, giáo sư tại Đại học Lund, Thụy Điển, là người phụ nữ thứ năm được Nobel Vật lý.

"Gửi đến tất cả phụ nữ, tôi muốn nói rằng nếu bạn thích, nếu bạn có một chút đam mê với những thách thức kiểu này, hãy theo đuổi nó," bà nói với hãng tin AP.

Khám phá được trao Giải Nobel Vật lý

Ba nhà khoa học, độc lập với nhau, đã sử dụng xung laser ngày càng nhanh để bắt lại hoạt động của nguyên tử xảy ra ở tốc độ chóng mặt – một phần tỷ tỷ giây, hay một *atto* giây[3] – giống như cách các nhiếp ảnh gia sửa dụng cửa trập tốc độ cao để chụp ảnh chim ruồi đang hút mật hoa.

---

[1] *https://phys.org/news/2023-10-scientists-nobel-prize-physics-electrons.html*

[2] *Viện Toán học.*

[3] 1 *atto giây* = 10^{-18} *giây – Pi.*

Nhà vật lý Pháp–Thụy Điển Anne L'Huillier

Khoảng thời gian đó ngắn đến mức nào?

"Hãy lấy một giây, là khoảng thời gian của một nhịp tim," chủ tịch Ủy ban Giải thưởng Nobel, Eva Olsson nói. Để đạt đến cỡ atto giây, cần chia nó cho 1000 sáu lần.

Nhà vật lý Mark Pearce, thành viên Ủy ban Giải thưởng Nobel, nói rằng "số atto giây trong một giây bằng số giây đã trôi qua kể từ Big Bang, khoảng 13,8 tỷ năm trước."

Nhưng ngay cả khi "thấy" được electron, các nhà khoa học cũng không thấy được hết.

"Bạn có thể thấy nó ở phía bên này hay phía bên kia của một phân tử," L'Huillier, năm nay 65 tuổi, nói. "Nó vẫn rất mờ."

"Electron giống sóng, như sóng trên mặt nước, nhiều hơn là giống hạt, và cái chúng tôi đo với kỹ thuật của mình là vị trí của ngọn sóng," bà nói thêm.

Vì sao electron quan trọng?

Electron có vai trò then chốt vì chúng chính là "cách các nguyên tử liên kết với nhau," L'Huillier nói. Đó là nơi diễn ra các phản ứng hóa học.

"Dù ta không thể thấy chúng, electron hiện diện khắp mọi nơi trong cuộc sống của chúng ta, theo cả nghĩa cuộc sống sinh học lẫn cuộc sống kỹ thuật, cuộc sống hàng ngày," Krausz nói tại một buổi họp báo. "Trong cuộc sống sinh học, electron tạo nên chất keo giữa các nguyên tử, từ đó các nguyên tử tạo thành phân tử, và các phân tử này là những viên gạch nhỏ nhất để xây dựng nên mọi cơ thể sống."

Và nếu muốn hiểu cách chúng làm việc, bạn cần biết cách chúng di chuyển, Krausz nói.

Hiện tại, khoa học này phục vụ cho việc tìm hiểu vũ trụ của chúng ta, nhưng người ta hy vọng nó cuối cùng sẽ có ứng dụng thực tế trong điện tử, chẩn đoán bệnh và hóa học cơ bản.

L'Huillier nói rằng công trình của bà cho thấy tầm quan trọng của việc tiến hành nghiên cứu cơ bản mà không cần biết có ứng dụng trong tương lai hay không: bà đã làm việc với nó 30 năm trước khi những ứng dụng thực tế trở nên rõ ràng hơn.

Anne L'Huillier trả lời phỏng vấn tại Đại học Lund, Lund, Thụy Điển hôm thứ ba 3/10/2023.

Phản ứng của ba nhà khoa học

Khi nhận được cuộc gọi báo tin được giải thưởng, L'Huillier đang dạy vật lý cơ bản dành cho kỹ sư cho khoảng 100 sinh viên tại Lund; điện thoại của bà để ở chế độ im lặng và bà không nghe máy. Bà kiểm tra điện thoại trong giờ giải lao và gọi lại cho Ủy ban Giải thưởng Nobel.

Sau đó bà quay lại dạy tiếp.

"Lúc ấy tôi đang rất tập trung, tôi quên đi Giải Nobel và cố kết thúc bài giảng của mình," bà nói với AP. Bà kết thúc bài giảng sớm một chút để có thể trả lời họp báo công bố giải thưởng tại Viện Hàn lâm Khoa học Hoàng gia Thụy Điển ở Stockholm.

"Đây là giải thưởng cao quý nhất và tôi thật hạnh phúc được nhận nó. Thật không thể tin được," bà nói ở buổi họp báo. "Các bạn biết đấy, không có nhiều phụ nữ được giải này, bởi thế nó rất đặc biệt."

Ban tổ chức giải Nobel đăng trên tài khoản mạng xã hội của mình một bức ảnh L'Huillier đang nghe điện thoại.

Nhà vật lý người Hungary Ferenc Krausz.

"Cảnh báo: nhà giáo tận tâm!" bài đăng trên Twitter, nay là X, viết. "Đến cả giải Nobel Vật lý 2023 cũng không thể kéo Anne L'Huillier khỏi sinh viên của bà."

Và L'Huillier cho biết khi đó vẫn phải giữ bí mật về giải thưởng nên bà không được phép giải thích với sinh viên, nhưng họ đoán được.

Agostini, giáo sư danh dự tại Đại học Bang Ohio, khi đó đang ở Paris; Ủy ban Giải thưởng Nobel không liên lạc được với ông trước khi công bố việc ông được giải với cả thế giới.

"Tôi không nhận được cuộc gọi nào từ ủy ban giải thưởng. Có lẽ không đúng. Tôi không biết," ông cười khi trả lời AP. "Tôi nghĩ họ tìm tôi ở Columbus[4]."

"Chắc chắn có nhiều người trẻ hơn đánh giá cao giải thưởng này hơn tôi," vị giáo sư 82 tuổi nói đùa. "Nó cũng tốt đấy, nhưng với tôi thì hơi muộn."

Nhưng, ông nói thêm: "Tôi không nghĩ mình sẽ xứng đáng nếu được trao giải sớm hơn!"

Krausz, thuộc Viện Quang học Lượng tử Max Planck và Đại học Ludwig Maximilian tại Munich, nói với các phóng viên rằng ông bị choáng ngợp.

"Từ 11 giờ sáng đến giờ tôi vẫn đang nghĩ xem mình đang ở trong hiện thực hay trong một giấc mơ dài," nhà vật lý 61 tuổi nói.

Cuộc gọi từ ủy ban giải thưởng được hiển thị "không có ID người gọi" và thường thì Krausz không nghe những cuộc gọi như vậy, nhưng lần này, ông "nghĩ rằng mình sẽ thử nghe, và rõ ràng không thể dập máy ngay."

Năm ngoái, cùng với nhà khoa học Paul Corkum của Đại học Ottawa, Krausz và L'Huillier được trao giải thưởng vật lý cao quý Wolf vì những công trình của họ. Giải Nobel chỉ được trao cho không quá ba người, và Krausz nói rằng thật đáng tiếc khi nó không thể được trao cho Corkum.

Corkum là chìa khóa đối với cách đo các xung laser xảy ra trong tích tắc, và điều này mang tính cốt yếu, Krausz nói.

Ferenc Krausz trong một buổi thuyết trình tại Viện Quang học Lượng tử Max Planck, Munich, Đức hôm thứ ba 3/10/2023.

Giải Nobel có giá trị tiền thưởng khoảng 1 triệu đô–la Mỹ, được trao theo di chúc của người sáng lập ra nó, nhà phát minh người Thụy Điển Alfred Nobel.

Giải Nobel Vật lý được công bố hai ngày sau khi hai nhà khoa học được giải Nobel Y học

[4] *Thủ phủ bang Ohio – Pi.*

– Sinh lý học vì những khám phá giúp tạo ra vaccine mRNA cho COVID–19.

Thông báo của Ủy ban Giải thưởng Nobel:

Viện Hàn lâm Khoa học Hoàng gia Thụy Điển quyết định trao giải Nobel Vật lý 2023 cho

Pierre Agostini, Đại học Bang Ohio, Columbus, Mỹ

Ferenc Krausz, Viện Quang học Lượng tử Max Planck, Garching và Đại học Ludwig Maximilian tại Munich, Đức

Anne L'Huillier, Đại học Lund, Thụy Điển

"vì các phương pháp thực nghiệm tạo ra các xung ánh sáng atto giây nhằm nghiên cứu động lực học của electron trong vật chất".

Thí nghiệm với ánh sáng bắt được những khoảnh khắc ngắn nhất

Ba nhà khoa học được giải Nobel Vật lý 2023 được vinh danh vì những thí nghiệm cung cấp cho nhân loại những công cụ mới để khám phá thế giới của electron bên trong nguyên tử và phân tử. Pierre Agostini, Ferenc Krausz và Anne L'Huillier đã trình bày một cách tạo ra những xung ánh sáng cực ngắn có thể được dùng để đo các quá trình rất nhanh, trong đó electron di chuyển hoặc thay đổi năng lượng.

Các sự kiện tốc độ cao chảy vào với nhau khi được quan sát bởi con người, giống như một đoạn phim gồm những hình ảnh tĩnh được nhìn thấy như chuyển động liên tục. Nếu muốn tìm hiểu về những sự kiện thực sự ngắn ngủi, chúng ta cần những công nghệ đặc biệt. Trong thế giới của electron, những thay đổi xảy ra chỉ trong vài chục atto giây – một atto giây là một khoảng thời gian rất ngắn, ngắn đến nỗi số atto giây trong một giây bằng số giây tính từ khi vũ trụ ra đời.

Những thí nghiệm của các nhà khoa học được giải đã tạo ra các xung ánh sáng ngắn đến cỡ atto giây, từ đó cho thấy các xung này có thể được sử dụng để cung cấp những hình ảnh về các quá trình bên trong nguyên tử và phân tử.

Năm 1987, Anne L'Huillier phát hiện thấy nhiều sóng hài bậc cao khác nhau xuất hiện khi bà truyền laser hồng ngoại qua một khí hiếm. Mỗi sóng hài bậc cao là một sóng ánh sáng mà mỗi chu kỳ của ánh sáng laser bằng một bội của chu kỳ của sóng hài. Chúng được sinh ra do laser tương tác với các phân tử khí; nó cung cấp năng lượng cho một số electron, và năng lượng dư thừa này được phát lại dưới dạng ánh sáng. Anne L'Huillier tiếp tục tìm hiểu hiện tượng này, đặt nền móng cho những đột phá tiếp theo.

Năm 2001, Pierre Agostini thành công trong việc tạo ra và nghiên cứu một chuỗi các xung ánh sáng liên tiếp, trong đó mỗi xung chỉ dài 250 atto giây. Cùng lúc đó, Ferenc Krausz đang tiến hành một loại thí nghiệm khác, cho phép tách riêng một xung ánh sáng dài 650 atto giây.

Đóng góp của các nhà khoa học được giải cho phép nghiên cứu các quá trình diễn ra rất nhanh, mà trước đó không thể theo kịp.

"Giờ chúng ta có thể mở cánh cửa vào thế giới của electron. Vật lý atto giây cho chúng ta cơ hội hiểu được các cơ chế do electron chi phối. Bước tiếp theo sẽ là sử dụng chúng," Eva Olsson, chủ tịch Ủy ban Giải thưởng Nobel về Vật lý, nói.

Có nhiều ứng dụng tiềm năng trong những lĩnh vực khác nhau. Chẳng hạn, trong điện tử, việc hiểu và điều khiển được hành vi của electron trong vật liệu là rất quan trọng. Các xung atto giây cũng có thể được dùng để nhận dạng các phân tử khác nhau, thí dụ trong chẩn đoán y tế.

Pierre Agostini, ảnh tại trang web khoa Vật lý, Đại học Bang Ohio.

Electron trong xung ánh sáng

Qua các thí nghiệm của mình, ba nhà khoa học được giải năm nay đã tạo được những chớp sáng đủ ngắn để chụp được chuyển động vô cùng nhanh của electron. Anne L'Huillier phát hiện ra một hiệu ứng mới từ tương tác của ánh sáng laser với các nguyên tử khí. Pierre Agostini và Ferenc Krausz cho thấy hiệu ứng này có thể được dùng để tạo ra những xung ánh sáng ngắn hơn những cái có thể được tạo ra trước đó.

Một con chim ruồi có thể đập cánh 80 lần mỗi giây. Chúng ta chỉ có thể nhận thấy tiếng vù vù và chuyển động mờ mờ. Với giác quan của con người, chuyển động nhanh bị mờ vào với nhau, và những sự kiện cực ngắn là không thể quan sát. Chúng ta cần đến những biện pháp công nghệ để chụp hoặc mô tả được những khoảnh khắc rất ngắn đó.

Kỹ thuật chụp ảnh tốc độ cao và ánh sáng nhấp nháy cho phép chụp được hình ảnh chi tiết của những hiện tượng thoáng qua. Một bức ảnh rõ nét chụp một con chim ruồi đang bay đòi hỏi thời gian phơi sáng ngắn hơn nhiều so với một nhịp đập cánh của nó.

Sự kiện càng nhanh, thời gian chụp ảnh phải càng ngắn để chụp được đúng khoảnh khắc.

Nguyên lý tương tự được áp dụng cho tất cả các phương pháp để đo hoặc mô tả các quá trình nhanh; mọi phép đo phải được thực hiện nhanh hơn khoảng thời gian để hệ thống được quan sát trải qua một thay đổi nhận biết được, bằng không kết quả sẽ không rõ. Các nhà khoa học được giải năm nay đã tiến hành các thí nghiệm chỉ ra một phương pháp tạo ra các xung ánh sáng đủ ngắn để chụp được hình ảnh về các quá trình bên trong nguyên tử và phân tử.

Thang thời gian tự nhiên của nguyên tử là cực kỳ nhỏ. Trong một phân tử, các nguyên tử có thể di chuyển và quay trong một phần triệu tỷ giây, hay femto giây[5] . Những chuyển động này có thể được nghiên cứu với những xung ngắn nhất mà một tia laser có thể tạo ra – tuy nhiên, khi cả nguyên tử di chuyển, thang thời gian được xác định bởi hạt nhân to và nặng, vốn cực kỳ chậm so với ánh sáng và các electron nhanh nhẹn.

Khi electron di chuyển trong nguyên tử và phân tử, chúng nhanh đến nỗi các thay đổi bị mờ sau chỉ một femto giây. Trong thế giới của electron, vị trí và năng lượng thay đổi với tốc độ từ khoảng một đến một vài trăm atto giây, tức một phần tỷ tỷ giây.

Một atto giây ngắn đến nỗi số atto giây trong một giây bằng số giây từ khi vũ trụ sinh ra, 13,8 tỷ năm trước, đến hiện tại. Để dễ hình dung, ta có thể tưởng tượng một chớp sáng

[5] *1 femto giây = 10^{-15} giây – Pi.*

đi từ một đầu căn phòng đến bức tường đối diện: nó mất mười tỷ atto giây.

Trong một thời gian dài, một femto giây được coi là giới hạn của những chớp sáng tạo ra được.

Việc cải tiến công nghệ sẵn có không đủ để thấy được các quá trình diễn ra trong thang thời gian ngắn đến kinh ngạc của electron; cần có một cái gì đó hoàn toàn mới. Các nhà khoa học được giải năm nay đã thực hiện những thí nghiệm mở ra lĩnh vực vật lý atto giây mới mẻ.

Xung ngắn hơn nhờ các sóng hài bậc cao

Ánh sáng gồm những sóng – dao động trong trường điện từ – di chuyển trong chân không nhanh hơn mọi thứ. Sóng ánh sáng có các bước sóng khác nhau, tương đương với màu sắc khác nhau. Thí dụ, bước sóng của ánh sáng đỏ dài khoảng 700 nm, tức khoảng một phần trăm bề rộng của một sợi tóc, và nó lặp đi lặp lại khoảng bốn trăm ba mươi nghìn tỷ lần mỗi giây. Chúng ta có thể nghĩ về xung ánh sáng ngắn nhất có thể như độ dài một chu kỳ của sóng ánh sáng, tính từ khi nó ở trên đỉnh, đi xuống đáy, rồi quay lại điểm bắt đầu. Trong trường hợp này, bước sóng dùng trong một hệ laser thông thường không thể nào đạt dưới femto giây, vì vậy trong những năm 1980, đây được xem là một giới hạn cứng cho độ ngắn của một xung ánh sáng.

Về mặt toán học, có thể chứng minh được rằng có thể tạo được mọi dạng sóng nếu có đủ những sóng có bước sóng và biên độ thích hợp. Bí quyết tạo ra xung atto giây là có thể tạo ra những xung ngày càng ngắn bằng cách kết hợp các bước sóng ngày càng ngắn.

Để quan sát chuyển động của electron ở thang nguyên tử, cần các xung ánh sáng đủ ngắn, nghĩa là cần kết hợp nhiều sóng ngắn với bước sóng khác nhau.

Để thêm bước sóng mới cho ánh sáng, cần nhiều hơn là một laser; chìa khóa dẫn đến khoảnh khắc ngắn nhất quan sát được từ trước đến nay là một hiện tượng xảy ra khi laser đi qua một chất khí. Ánh sáng tương tác với các nguyên tử khí và gây ra sóng hài bậc cao – những sóng hoàn thành nhiều chu kỳ tương ứng với mỗi chu kỳ của sóng ban đầu. Chúng ta có thể so sánh hiện tượng này với âm bội tạo ra đặc tính của một âm thanh, giúp ta nghe được sự khác biệt của cùng một nốt khi được chơi trên ghi–ta và khi được chơi trên pi–a–nô.

Năm 1987, Anne L'Huillier và các đồng nghiệp tại một phòng thí nghiệm ở Pháp đã tạo được sóng hài bậc cao bằng cách sử dụng một laser hồng ngoại chiếu qua một khí hiếm. Laser hồng ngoại này tạo ra các sóng hài bậc cao ngày càng mạnh hơn so với những laser bước sóng ngắn được dùng trong các thí nghiệm trước đó. Trong thí nghiệm này, họ đã quan sát được nhiều sóng hài bậc cao với cường độ tương tự nhau.

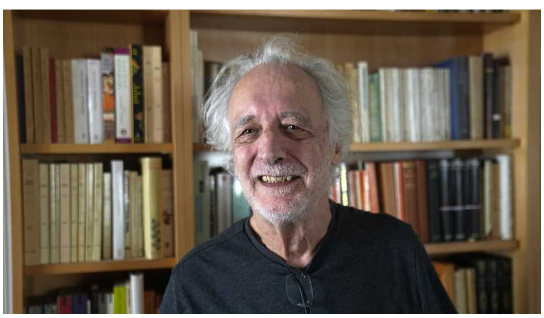
Trong một loạt các bài báo trong những năm 1990, L'Huillier tiếp tục tìm hiểu hiệu ứng này, cả khi bà đã chuyển đến Đại học Lund. Những kết quả của bà đóng góp cho hiểu biết lý thuyết về hiện tượng này, đặt nền móng cho thí nghiệm đột phá tiếp theo.

Electron thoát ly tạo sóng hài bậc cao

Khi ánh sáng laser đi qua chất khí và tác động lên các nguyên tử khí, nó tạo ra những dao động điện từ làm biến dạng điện trường giữ các electron quanh hạt nhân nguyên tử. Do đó, electron có thể thoát khỏi nguyên tử. Tuy nhiên, điện trường của ánh sáng dao động liên tục và khi nó đổi hướng, một electron đã thoát ra có thể chạy ngược về hạt nhân nguyên tử của nó. Trong chuyến du hành của mình, electron nhận thêm nhiều năng lượng từ điện trường của ánh sáng laser, và để liên kết lại với hạt nhân, nó cần giải phóng năng lượng dư thừa dưới dạng xung ánh sáng. Những xung phát ra từ electron này chính là thứ tạo ra sóng hài bậc cao được quan sát trong thí nghiệm.

Năng lượng của ánh sáng gắn liền với bước sóng của nó. Năng lượng trong sóng hài bậc cao được phát ra tương đương với ánh sáng cực tím, vốn có bước sóng ngắn hơn ánh sáng nhìn thấy bằng mắt thường. Vì năng lượng đến từ dao động của laser, dao động của sóng hài bậc cao tỷ lệ một cách đẹp đẽ với bước sóng của xung laser ban đầu. Tương tác của ánh sáng với nhiều nguyên tử khác nhau cho kết quả là nhiều sóng ánh sáng khác nhau với những bộ bước sóng riêng.

Khi đã được tạo ra, những sóng hài bậc cao này tương tác với nhau. Ánh sáng mạnh hơn khi các đỉnh sóng trùng nhau, và yếu hơn khi đỉnh của sóng này trùng với đáy của sóng khác. Trong những điều kiện thích hợp, các sóng hài bậc cao trùng khít với nhau, tạo ra một chuỗi các xung cực tím, mỗi xung dài vài trăm atto giây. Các nhà vật lý hiểu được lý thuyết đằng sau hiện tượng này từ những năm 1990, nhưng đột phá trong việc xác định và kiểm nghiệm các xung này đến vào năm 2001.



Nhà vật lý Pháp Pierre Agostini.

Pierre Agostini và nhóm nghiên cứu của ông tại Pháp đã thành công trong việc tạo ra và nghiên cứu một chuỗi các xung ánh sáng liên tiếp, như một đoàn tàu có nhiều toa. Họ sử dụng một kỹ thuật đặc biệt, đặt "đoàn tàu xung" cùng với một phần bị lùi lại của xung laser ban đầu, để thấy được cách các sóng hài bậc cao đồng pha với nhau. Quá trình này cũng cho phép họ đo độ dài của các xung trong đoàn tàu, và họ nhận thấy mỗi xung chỉ dài 250 atto giây.

Cùng lúc đó, Ferenc Krausz và nhóm nghiên cứu của mình tại Áo đang nghiên cứu một kỹ thuật để chọn ra một xung riêng lẻ, như một toa được tách khỏi đoàn tàu và đặt sang một đường ray khác. Xung mà họ tách thành công dài 650 atto giây và nhóm dùng nó để theo dõi và nghiên cứu một quá trình trong đó electron bị kéo ra khỏi nguyên tử.

Những thí nghiệm này cho thấy các xung atto giây có thể được quan sát và đo, và chúng cũng có thể được sử dụng trong những thí nghiệm mới.

Giờ thì thế giới atto giây đã mở ra, những xung ánh sáng ngắn này có thể được dùng để nghiên cứu chuyển động của electron. Hiện nay, người ta đã có thể tạo ra các xung chỉ dài vài chục atto giây, và những kỹ thuật này vẫn liên tục phát triển.

Tiếp cận với chuyển động của electron

Các xung atto giây cho phép đo khoảng thời gian để kéo một electron khỏi nguyên tử, và xem xét sự phụ thuộc của khoảng thời gian này vào độ chặt chẽ của liên kết giữa electron với hạt nhân nguyên tử của nó. Ngày nay, có thể xây dựng lại cách mà phân bố electron dao động từ bên này sang bên kia hoặc từ nơi này đến nơi khác trong phân tử và vật chất; trước đây vị trí của chúng chỉ có thể được đo bằng một giá trị trung bình.

Xung atto giây có thể được dùng để kiểm tra các quá trình nội tại của vật chất, và để nhận dạng các sự kiện khác nhau. Những xung này đã được dùng để tìm hiểu vật lý chi tiết của nguyên tử và phân tử, và chúng có những ứng dụng tiềm năng trong nhiều lĩnh vực, từ điện tử đến y học.

Chẳng hạn, xung atto giây có thể được dùng để đẩy các phân tử, khiến chúng phát ra những tín hiệu đo được. Tín hiệu phát ra từ các phân tử có cấu trúc đặc biệt, một dạng "vân tay" giúp nhận dạng phân tử, điều này có những ứng dụng tiềm năng, bao gồm chẩn đoán y tế.

CHIẾN THUẬT THÍ QUÂN

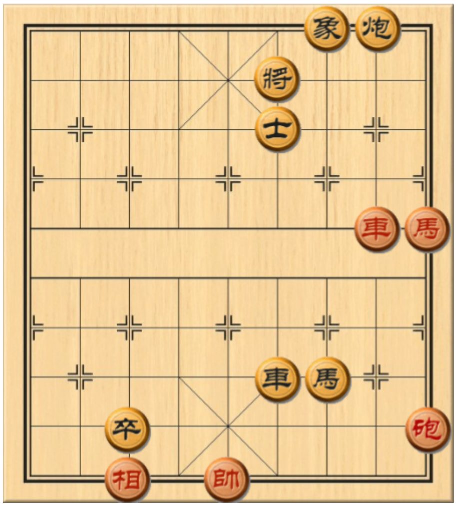
TRẦN VĂN DŨNG[1]

Trong những diễn biến phức tạp của ván đấu, việc một bên chủ động bỏ một hoặc nhiều quân chủ lực để đạt được những mục đích khác nhau như: tranh tiên, đoạt thế, công sát, giải vây ...từ đó giành lấy kết quả có lợi sau cùng, được gọi là *Chiến thuật thí quân*. Thí quân có thể diễn ra bất cứ giai đoạn nào, nhưng phổ biến nhất là ở giai đoạn Trung Cuộc. Một khi chiến thuật này được vận dụng, ván đấu sẽ phát sinh những tình huống khó lường, tạo ra những bất ngờ cho đối thủ cũng như xoay chuyển kết quả thắng – thua của toàn bộ cuộc chiến.

Chiến thuật thí quân cũng phản ánh một cách rõ mối liên hệ giữa 2 yếu tố *Quân* và *Thế*: Bên thí quân chịu thiệt thòi là bị mất đi quân chiến nhưng bù lại sẽ có được một hình thế có lợi hơn. Do vậy trước khi tiến hành vận dụng chiến thuật này trong thực chiến, đòi hỏi người cầm quân phải có sự tính toán cực kỳ tỉ mỉ và chuẩn xác về những nước đi cũng như những tình huống sẽ diễn ra tiếp theo, từ đó việc thực hiện có thể được diễn ra liền mạch để có thể đạt được mục tiêu đề ra.

Để cảm nhận rõ hơn về chiến thuật thú vị này, tác giả sẽ gửi tới bạn đọc của Pi vài ví dụ để có thể áp dụng trong những ván đấu thực chiến:

1. Hình 1, thoạt nhìn có vẻ như bên Đen đang nắm lợi thế lớn với 3 quân tấn công đang áp sát Tướng Đỏ và chỉ cần đi X6.2 là tạo sát ngay lập tức. Bên Đỏ mặc dù chưa có thế tấn công rõ ràng, nhưng với lợi thế đi tiên, Đỏ đã áp dụng chiến thuật thí quân để xoay chuyển cục diện như sau:



Hình 1.

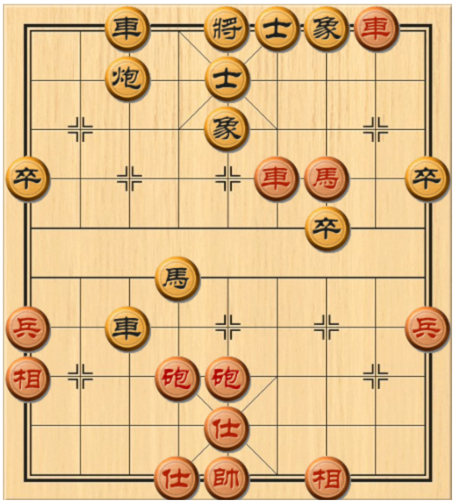
1) X2.3 Tg6/1 **2)** X2 – 4 Tg6.1 **3)** M1.3 Tg6/1 (∗) **4)** M3.2 Tg6.1 **5)** P1.7 (∗∗) (1 – 0)

(∗): Với việc có mặt Tướng hỗ trợ ở Trung lộ Đỏ liên tục tấn Xe rồi Phế Xe ép Đen phải đưa ra lựa chọn duy nhất là dùng Tướng ăn Xe đối phương.

(∗∗): Sau khi dùng đòn hi sinh, Đỏ tiếp tục điều Mã tới vị trí thuận lợi, tạo điều kiện cho Pháo tấn lên tạo đòn sát cục Tiền Mã Hậu

[1] *Trung tâm Ứng dụng Công nghệ Vũ trụ Tp. Hồ Chí Minh.*

Pháo kinh điển, Đen không thể làm gì hơn, đành chấp nhận thất bại.



Hình 2.

2. Hình 2, tình huống cờ Trung cuộc đang khá phức tạp. Mặc dù Đen kém quân nhưng có vẻ vẫn còn có thể chống đỡ lâu dài. Tuy nhiên, Đỏ đi trước và đã nhìn ra được điểm yếu cánh trái không có quân phòng thủ của Đen, ngay lập tức Đỏ tung ra đòn thí quân tạo thế sát như sau:

1) X4.3 (∗) Tg5 – 6 **2)** M3.5 P3.1 **3)** M5/3 P3 – 7 **4)** X2 – 3 Tg6.1 **5)** X3/2 (∗∗) (1 – 0)

(∗): Một nước đi bất ngờ và đầy quyết đoán của Đỏ, buộc Tướng Đen phải ăn ra, mở đường cho quân Mã nhảy lên chém Tượng ở lộ 5 ở nước kế tiếp;

(∗∗): Mặc dù đã nhìn thấy trước nhưng Đen không cũng có cách nào chống lại nước X3.2 sát cục của Đỏ. Đen thua cuộc.

3. Hình 3, Xe Đen đang bắt Mã Đỏ nhưng lại có cánh trái khá trống trải. Được quyền đi trước, Đỏ biết thời cơ đã tới, không chạy Mã mà có những nước tấn công đầy dứt khoát như sau:

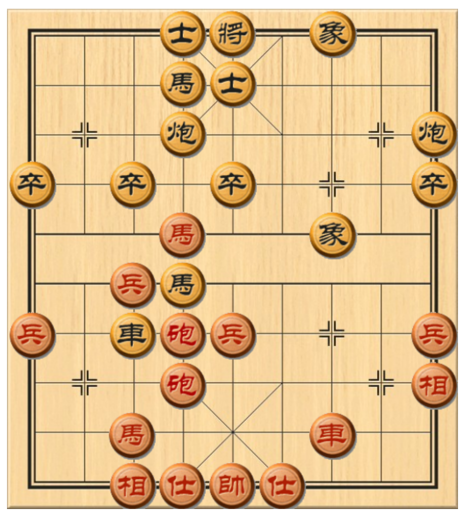
1) X3.4 X3.2 (∗) **2)** M6.4 P9 – 6 **3)** X3.4 S5/6 **4)** Pt.4 (∗∗) X3.1 **5)** S4.5 X3/4 **6)** Pt–7 X3 – 2 **7)** P6.6 (∗ ∗ ∗) X2/4 **8)** P6/3 X2 – 3 **9)** P7 – 6 M4.3 **10)** X3/2 P6/1 **11)** Ps–2 P6 – 8 **12)** X3 – 5 (1 – 0)

*(∗): Lúc này nếu Đen không ăn lại Mã Đỏ cũng khó tìm ra giải pháp nào tốt hơn. Nếu thay vào đó, Đen đi T7.5, diễn biến tiếp theo có thể như sau: **2)** M6.5 P9 – 6 **3)** Pt.4 P6 – 4 **4)** X3.4 S5/6 **5)** M5.3 Tg5.1 **6)** P6.5 (Đỏ có thể công mạnh mẽ, nắm chắc phần thắng)*

(∗∗): Đỏ tiếp tục tăng cường sức ép lên trận hình đối thủ, trước nhảy Mã tới dọa chiếu ở vị trí ngọa tào, sau đánh Tượng chiếu rồi ăn lại Pháo, chính thức xác lập ưu thế tuyệt đối.

(∗ ∗ ∗): Đỏ tiếp tục đoạt thêm 1 Mã của Đen, chiến thắng dành cho Đỏ chỉ còn là vấn đề thời gian.

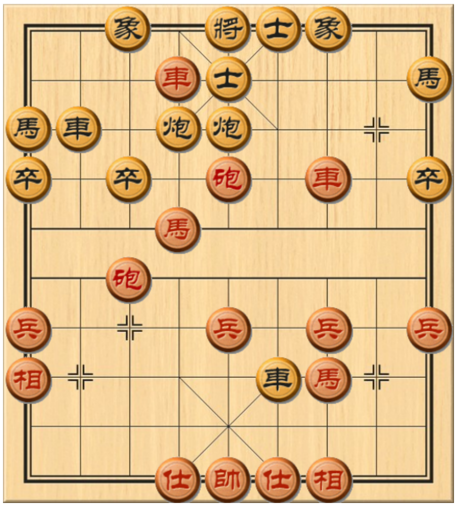
(∗∗∗∗): Lúc này Đen có chống Sỹ bên nào cũng đều bị Đỏ nhảy M3.4 và phối hợp Xe và 2 Pháo chiếu bí. Đen đành chấp nhận thất bại.



Hình 3

Chú thích: C: Chốt, X: Xe, M: Mã, P: Pháo, Tg: Tướng, S: Sĩ, T: Tượng, t: trước, s: Sau.

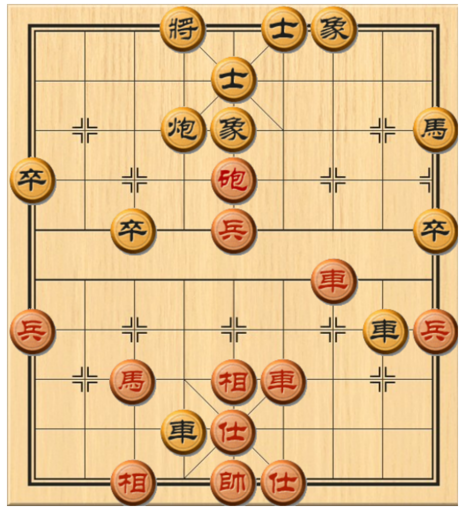
Câu đố kỳ này: Đỏ được quyền đi trước, sẽ áp dụng chiến thuật thí quân như thế nào để giành lấy thắng lợi trong những hình cờ dưới đây?



Hình 4.

Đáp án tham khảo:

1) X3.3 M9/7 **2)** M6.5 X6/5 **3)** P7 – 6 P4.7 **4)** X6.1 Tg5 – 4 **5)** P5 – 6 Tg4 – 5 **6)** M5.7 (1 – 0)



Hình 5.

Đáp án tham khảo:

1) P5.2 S6.5 **2)** X4.6 X8/6 **3)** X4 – 5 P4 – 3 **4)** X3 – 8 M9.7 **5)** X5 – 7 Tg4 – 5 **6)** M7.6 P3 – 2 **7)** X8.3 X4/3 **8)** X7 – 3 M7/9 **9)** X3 – 9 M9.7 **10)** X8/1 M7.5 **11)** X8.2 T5/3 **12)** X8 – 5 Tg5 – 4 **13)** X9 – 7 T3.1 **14)** X7 – 8 (1 – 0)