- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P651–P660: trước ngày 15/12/2022.

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P631. (Mức B) Các số tự nhiên, bắt đầu từ 20, được viết liên tiếp nhau thành một hàng ngang, như sau:

$$2021222324252627\ldots.$$

Hỏi chữ số ở vị trí thứ 2022, kể từ trái qua phải, là chữ số nào?

Lời giải (*của bạn Võ Trần Tiến, lớp* 8^5, *trường THCS Long Bình Điền, tỉnh Tiền Giang*).

Gọi a là chữ số ở vị trí thứ 2022, kể từ trái qua phải.

Nhận thấy:

– Từ 20 đến 99 có $(99-20+1)\cdot 2 = 160$ chữ số;

– Từ 100 đến 999 có $(999-100+1)\cdot 3 = 2700$ chữ số.

Vì $160 < 2022 < 160+2700$ nên a là chữ số của một số tự nhiên có ba chữ số.

Từ đó, do

$$2022-160 = 3\cdot 620+2$$

nên a là chữ số thứ hai (kể từ trái qua phải) của số tự nhiên có ba chữ số thứ 621.

Số tự nhiên có ba chữ số thứ 621 là: $100+621-1 = 720$.

Vì vậy, a là chữ số 2.

Ta có điều phải tìm theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Hà Thanh

P632. (Mức B) Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn

$$\frac{x^2}{(x+y)^2}+\frac{y^2}{(y+z)^2}+\frac{z}{z+x} = 1.$$

Chứng minh rằng $x=y=z$.

Lời giải. Do $x,y,z>0$ nên hệ thức của đề bài tương đương với

$$\frac{1}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{z}{y}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{z}{x}}. \qquad (1)$$

Đặt $a=\dfrac{y}{x}$ và $b=\dfrac{z}{y}$, ta có $a,b>0$, và (1) được viết lại dưới dạng:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2} = \frac{1}{1+ab}. \qquad (2)$$

Tiếp theo, có thể giải bài toán theo một trong hai cách sau:

• **Cách 1** (*của người đề xuất bài toán*).

Ta có:

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}\right)^2 \\
&\quad = \frac{1}{1+ab}-\frac{2}{(1+a)(1+b)} \\
&\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{(1+a)^2(1+b)^2} \\
&\quad = \frac{a+b-ab-1}{(1+ab)(1+a)(1+b)} \\
&\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{(1+a)(1+b)} = \frac{-(1-a)(1-b)}{1+ab} \\
&\Leftrightarrow (1+ab)(a-b)^2+\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow ab(a-b)^2+(ab-1)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (a-b)^2 = (ab-1)^2 = 0 \text{ (do } ab>0) \\
&\Leftrightarrow a=b=1.
\end{aligned}$$

Vì vậy

$$(1) \Leftrightarrow \frac{y}{x}=\frac{z}{y}=1 \Leftrightarrow x=y=z.$$

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

• Cách 2 (*của người chấm bài*).

Do $a,b>0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz cho hai bộ số $(1,\sqrt{ab})$ và $\left(1,\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$, ta được:

$$\frac{1}{(1+a)^2} = \frac{1}{\left(1\cdot 1+\sqrt{ab}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2} \geq \frac{1}{(1+ab)\left(1+\frac{a}{b}\right)} = \frac{b}{(1+ab)(b+a)};$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=1$.

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{a}{(1+ab)(a+b)};$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1$.

Do đó

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{b}{(1+ab)(b+a)}+\frac{a}{(1+ab)(a+b)} = \frac{1}{1+ab};$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=a=1$.

Vì thế, $(2) \Leftrightarrow b=a=1$; hay

$$(1) \Leftrightarrow \frac{z}{y}=\frac{y}{x}=1 \Leftrightarrow x=y=z.$$

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một số lời giải không được chấp nhận là lời giải đúng, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau:

– *Ngộ nhận* rằng, nếu $a,b,c>0$ và $abc=1$, thì

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{1+c}=1 \Leftrightarrow a=b=c.$$

– Mới chỉ chứng minh được rằng, nếu $x,y,z>0$ thì

$$\frac{x^2}{(x+y)^2}+\frac{y^2}{(y+z)^2}+\frac{z}{z+x} \geq 1.$$

– Đưa ra lời giải cho một bài toán, *khác với bài đã ra*: "Hệ thức ở bài đã ra xảy ra *khi* $x=y=z$".

2. Bên cạnh các lời giải không đúng nêu trên, có một số lời giải không được coi là hoàn chỉnh, do người giải bài đã mắc các lỗi "chính tả" không thể châm chước; chẳng hạn như:

$$\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=1 \Leftrightarrow x=y=z=1.$$

Lê Huy

P633. (Mức B) Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương n, số dư trong phép chia số $A=n^{2024}+n^{2025}$ cho số $B=n+n^2+n^3+\cdots+n^{2022}$ là một số chẵn.

Lời giải (*phỏng theo ý giải của bạn Ngô Quang Bình, lớp 11T1, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định*).

Từ giả thiết của bài ra, ta có:

$$A=n^{2024}(1+n), \quad (1)$$

$$B=n(1+n)+n^3(1+n)+\cdots+n^{2021}(1+n). \quad (2)$$

Gọi q và r tương ứng là thương và số dư trong phép chia A cho B, ta có:

$$A=Bq+r. \quad (3)$$

Vì với mọi số nguyên dương $n, n(n+1)$ là một số chẵn, nên từ (1) và (2) suy ra, với mọi số nguyên dương n, A và B là các số chẵn. Vì thế, từ (3) suy ra, với mọi số nguyên dương n, r là một số chẵn.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một số lời giải sai, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi dưới đây:

– *Xác định sai số dư* trong phép chia A cho B;

– *Ngộ nhận rằng,* $B=\frac{n^{2023}-1}{n-1}$ *với mọi* $n\in\mathbb{N}^*$ và đồng thời, *chưa đi đến điều phải chứng minh* theo yêu cầu đề bài.

(***Lưu ý***: *Với a, b, m là các số nguyên dương, $m>1$, đồng dư thức $a\equiv b \pmod m$* ***không*** *tương đương với "b là số dư trong phép chia a cho m".*)

2. Bên cạnh các lời giải sai nêu trên, có một lời giải không được coi là lời giải hoàn chỉnh, do người giải bài chứng minh thiếu chặt chẽ, thiếu chính xác sự kiện n^2+m^3 là số dư trong phép chia A cho B.

3. Với các giả thiết của bài ra, có thể chứng minh được rằng, thương số trong phép chia A cho B là một số tự nhiên chia hết cho 6.

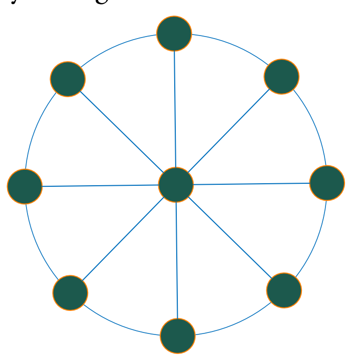
Lưu Thị Thanh Hà

P634. (Mức B) Bạn Pi ghi số 4 vào hình tròn nhỏ, nằm ở tâm của đường tròn lớn trong Hình dưới đây. Sau đó, Pi muốn ghi tiếp vào mỗi hình tròn nhỏ còn lại một số nguyên, sao cho hai điều kiện sau được đồng thời thoả mãn:

i) Tổng của tám số ở tám hình tròn nhỏ nằm trên đường tròn lớn bằng 66.

ii) Tổng của ba số ở ba hình tròn nhỏ, nằm trên cùng một đường kính của đường tròn lớn, đều bằng nhau.

Hỏi, Pi có thể thực hiện được ý muốn của mình hay không? Vì sao?



Lời giải (*dựa theo tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).

Giả sử Pi thực hiện được ý muốn của mình.

Xét một cách điền bất kì của Pi, thỏa mãn các điều kiện i) và ii).

Gọi S là tổng của tám số ở tám hình tròn nhỏ, nằm trên đường tròn lớn. Theo i), $S=66$. (1)

Gọi s là tổng của ba số ở ba hình tròn nhỏ, nằm trên cùng một đường kính tùy ý của đường tròn lớn. Do các số ở các hình tròn nhỏ là các số nguyên, nên s là một số nguyên. Theo ii), tổng của ba số ở ba hình tròn nhỏ, nằm trên mỗi đường kính, trong số ba đường kính còn lại của đường tròn lớn, cũng bằng s. Vì thế, từ quan sát hình đã cho ở đề bài, ta có:

$$4s=4\cdot 4+S. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $4s=82$. Từ đây, vì s là số nguyên nên 82 chia hết cho 4, là điều vô lý.

Điều vô lý nhận được ở trên cho thấy, giả sử ở đầu lời giải là sai; nghĩa là, Pi *không thể* thực hiện được ý muốn của mình.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Nguyễn Khắc Minh

P635. (Mức B) Chứng minh rằng, với mọi số nguyên $n\ge 2$, ta luôn có:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{2^{n-2}}{n!}\le\frac{3}{2}.$$

(Với mỗi số nguyên dương k, $k!$ (đọc là, "k giai thừa") ký hiệu tích của k số nguyên dương đầu tiên; tức là, $k!=1\cdot 2\cdots k$.)

Lời giải (*phỏng theo ý giải của bạn Nguyễn Công Minh Đức, lớp 11 Toán 1, trường THPT chuyên Hưng Yên, tỉnh Hưng Yên*).

Trước hết, ta chứng minh Nhận xét sau:

Nhận xét. Với mọi số nguyên $k\ge 3$, ta có:

$$\frac{2^{k-2}}{k!}\le 2\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right).$$

Chứng minh. Dễ thấy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức

$$2^{k-3}\le (k-2)!. \qquad (*)$$

Với $k=3$, hiển nhiên $(*)$ là một bất đẳng thức đúng.

Xét $k\ge 4$. Khi đó, $k-2\ge 2$. Do đó

$$\begin{aligned}(k-2)! &= (k-2)(k-3)\cdots 2\\ &\ge \underbrace{2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}_{k-3\text{ thừa số }2}=2^{k-3}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức $(*)$ được chứng minh, và do đó, bất đẳng thức của Nhận xét được chứng minh.

Trở lại bài toán.

Dễ thấy, với $n = 2$, bất đẳng thức của đề bài là một bất đẳng thức đúng.

Xét $n \geq 3$. Khi đó, theo Nhận xét trên, ta có:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{2^2}{4!}+\cdots+\frac{2^{n-2}}{n!}$$
$$\leq \frac{1}{2}+2\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{2}-\frac{2}{n}<\frac{3}{2}.$$

Vì vậy, bất đẳng thức của đề bài được chứng minh.

Bình luận và Nhận xét

Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có hai lời giải không được chấp nhận là lời giải hoàn chỉnh, do người giải bài không chứng minh các đánh giá mang tính "chìa khóa" trong lời giải.

Lê Huy

P636. (Mức B) Cho tam giác nhọn ABC, nội tiếp đường tròn (O). Xét lục giác lồi $MNPQRS$ có các đỉnh M, N thuộc cạnh BC, các đỉnh P, Q thuộc cạnh CA, các đỉnh R, S thuộc cạnh AB, sao cho

$$\angle ROQ = \angle BAC,\ \angle MOS = \angle CBA \text{ và } \angle NOP = \angle ACB.$$

Chứng minh rằng

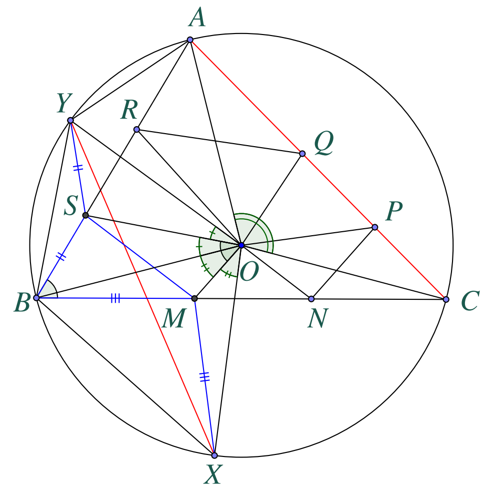
$$MN + PQ + RS \leq NP + QR + SM.$$

Lời giải (*của bạn Trần Minh Hoàng, lớp* 10T1, *trường THPT chuyên Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh*).

Gọi X và Y, tương ứng, là điểm đối xứng với B qua OM và qua OS; ta có:

$$OX = OB = OY; \quad (1)$$
$$\text{và } BM = XM, SB = SY. \quad (2)$$

Từ (1) suy ra, $X, Y \in (O)$.



Tiếp theo, ta có:

$$\angle XOY = \angle XOB + \angle BOY$$
$$= 2\angle MOB + 2\angle BOS$$
$$= 2\angle MOS = 2\angle CBA = \angle COA.$$

Mà $X, Y, A, C \in (O)$, nên $XY = CA$. (3)

Từ (2) suy ra

$$BM + MS + SB = XM + MS + SY \geq XS + SY \geq XY = CA \text{ (theo (3))}. \quad (4)$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$CP + PN + NC \geq AB, \quad (5)$$
$$AR + RQ + QA \geq BC. \quad (6)$$

Cộng các bất đẳng thức (4), (5), (6), vế theo vế, ta được:

$$(BM + MS + SB) + (CP + PN + NC) + (AR + RQ + QA) \geq CA + AB + BC.$$

Do đó

$$NP + QR + SM$$
$$\geq (BC - BM - NC) + (CA - CP - QA) + (AB - AR - SB)$$
$$= MN + PQ + RS.$$

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Lời giải của bạn *Trần Minh Hoàng* là lời giải duy nhất Tạp chí nhận được từ bạn đọc.

2. Một câu hỏi rất tự nhiên được đặt ra: *Dấu đẳng thức ở bất đẳng thức của đề bài có thể xảy ra hay không?* Mời các bạn đọc có quan tâm cùng tìm hiểu.

Hạ Vũ Anh

P637. (Mức A) Cho số thực $a \in (0;1)$. Cho dãy số (x_n), xác định bởi: $x_1 = a$ và

$$x_{n+1} = x_n\left(1 - \frac{x_n^3 + x_n^4}{2}\right) \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng, tồn tại vô số số nguyên dương m sao cho

$$\frac{1}{x_{m+1}} - \frac{1}{x_m} > \frac{1}{3\sqrt[3]{m^2}}.$$

Lời giải (*của người chấm bài*).

Bằng phương pháp quy nạp theo $n \in \mathbb{N}^*$ dễ dàng chứng minh được rằng $x_n \in (0;1)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Vì thế, từ hệ thức xác định dãy (x_n), suy ra $x_{n+1} < x_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Như vậy, (x_n) là một dãy số giảm, bị chặn dưới bởi 0; do đó, nó có giới hạn hữu hạn không âm, khi $n \to +\infty$.

Đặt $L = \lim x_n$. Khi đó, chuyển hệ thức xác định dãy (x_n) qua giới hạn, ta được:

$$L = L\left(1 - \frac{L^3 + L^4}{2}\right);$$

suy ra, $L = 0$ (do $L \geq 0$).

Vì thế, đặt $y_n = \frac{x_n^3 + x_n^4}{2}$, ta có $\lim y_n = 0$ và $\lim \frac{y_n}{x_n^3} = \frac{1}{2}$. (1)

Từ hệ thức xác định dãy (x_n) suy ra

$$\frac{1}{x_{n+1}^3} - \frac{1}{x_n^3} = \frac{1}{x_n^3}\left(\frac{1}{(1-y_n)^3} - 1\right) = \frac{y_n}{x_n^3} \cdot \frac{3 - 3y_n + y_n^2}{(1-y_n)^3} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

Vì thế, do (1) nên

$$\lim\left(\frac{1}{x_{n+1}^3} - \frac{1}{x_n^3}\right) = \frac{3}{2}.$$

Do đó, theo định lý trung bình Cesaro, ta có $\lim \frac{1}{nx_n^3} = \frac{3}{2}$; suy ra, $\lim nx_n^3 = \frac{2}{3}$. (2)

Tiếp theo, từ hệ thức xác định dãy (x_n) ta có:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right)\sqrt[3]{n^2} \\
&= \frac{1}{x_n} \cdot \left(\frac{1}{1 - y_n} - 1\right) \cdot \sqrt[3]{n^2} \\
&= \frac{1}{x_n} \cdot \frac{y_n}{1 - y_n} \cdot \sqrt[3]{n^2} \\
&= \frac{1}{1 - y_n} \cdot \frac{y_n}{x_n^3} \cdot \left(nx_n^3\right)^{\frac{2}{3}} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Vì thế, từ (1) và (2), suy ra

$$\lim\left(\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right)\sqrt[3]{n^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Mà $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$, nên theo định nghĩa giới hạn hữu hạn, tồn tại số nguyên dương n_0, sao cho với mọi $n \geq n_0$ ta có

$$\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right)\sqrt[3]{n^2} > \frac{1}{3}.$$

Do đó, có vô số số nguyên dương m, sao cho

$$\frac{1}{x_{m+1}} - \frac{1}{x_m} > \frac{1}{3\sqrt[3]{m^2}}.$$

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Bài đã ra là một bài tập khá cơ bản, thuộc chủ đề "Ứng dụng của định lí trung bình Cesaro trong việc nghiên cứu tiệm cận của các dãy số, được cho bởi hệ thức truy hồi dạng $x_{n+1} = x_n + a \cdot x_n^{\alpha}$.". Việc có thêm số hạng $-\frac{1}{2}x_n^5$ trong hệ thức truy hồi của dãy (x_n) ở đề bài chỉ gây thêm chút rắc rối về kĩ thuật. Trong lời giải trên, rắc rối này đã được xử lý bằng phép đặt $y_n = \frac{x_n^3 + x_n^4}{2}$.

2. Với việc hiểu định nghĩa giới hạn hữu hạn của một dãy số, ở mức tối thiểu cần thiết, dễ thấy, điều phải chứng minh theo yêu cầu của bài toán có thể rút ra được từ việc khảo sát tính hội tụ của dãy (u_n) xác định bởi

$$u_n = \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right)\sqrt[3]{n^2} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

Nhận xét nêu trên là một "chìa khóa", giúp xác định hướng giải bài đã ra.

3. Tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí mới chỉ nhận được đúng một lời giải từ bạn đọc. Đó là, lời giải của bạn *Trần Minh Hoàng* (lớp 10T1, trường THPT chuyên Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh). Ý tưởng giải của bạn Trần Minh Hoàng, về cơ bản, giống ý tưởng của lời giải trên đây; điểm khác biệt nằm ở kĩ thuật xử lí. Bạn Hoàng đã xử lý bằng cách chuyển dãy (x_n) về dãy $\left(\frac{1}{x_n}\right)$, rồi khảo sát tính hội tụ của dãy này. Lời giải của bạn Hoàng là một lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Trần Nam Dũng

P638. (Mức A) Tìm hai chữ số tận cùng của số $T = 22^{3^{2002}} + 22^{4^{2003}}$.

Lời giải (*dựa theo cách giải của bạn Võ Trần Hiền, lớp 12 Toán 1, trường THPT chuyên Tiền Giang, tỉnh Tiền Giang*).

Trước hết, dễ thấy, $T \equiv 0 \pmod 4$. (1)

Tiếp theo, do $22 \equiv -3 \pmod{25}$ nên

$$T \equiv (-3)^{3^{2002}} + (-3)^{4^{2003}} \equiv -3^{3^{2002}} + 3^{4^{2003}} \pmod{25}. \quad (2)$$

Do $3^3 \equiv 2 \pmod{25}$ nên

$$3^{20} = \left(3^3\right)^6 \cdot 3^2 \equiv 2^6 \cdot 9 \equiv 14 \cdot 9 \equiv 1 \pmod{25}. \quad (3)$$

Vì

$$3^{2002} \equiv (-1)^{2002} = 1 \equiv 9 \pmod 4,$$
$$3^{2002} = \left(3^2\right)^{1001} \equiv (-1)^{1001} = -1 \equiv 9 \pmod 5,$$

và $(4,5) = 1$, nên $3^{2002} \equiv 9 \pmod{20}$. Do đó, tồn tại số nguyên dương k, sao cho

$$3^{2002} = 20k + 9.$$

Vì thế, theo (3), ta có:

$$3^{4^{2003}} = \left(3^{20}\right)^m \cdot 3^4 \equiv 1 \cdot 6 = 6 \pmod{25}. \quad (4)$$

Do

$$4^{2003} \equiv 0 \equiv 4 \pmod 4,$$
$$4^{2003} \equiv (-1)^{2003} = -1 \equiv 4 \pmod 5,$$

và $(4,5) = 1$, nên $4^{2003} \equiv 4 \pmod{20}$. Do đó, tồn tại số nguyên dương m, sao cho

$$4^{2003} = 20m + 4.$$

Vì thế, theo (3), ta có:

$$3^{4^{2003}} = \left(3^{20}\right)^m \cdot 3^4 \equiv 1 \cdot 6 = 6 \pmod{25}. \quad (5)$$

Từ (2), (4), (5) suy ra

$$T \equiv -8 + 6 = -2 \equiv 48 \pmod{25}. \quad (6)$$

Từ (1) và (6), với lưu ý $0 \equiv 48 \pmod 4$ và $(4,25) = 1$, ta có $T \equiv 48 \pmod{100}$.

Vì vậy, hai chữ số tận cùng của số T là 48.

Bình luận và Nhận xét

1. Có thể phát hiện ra (3) (trong Lời giải trên) nhờ Định lý Euler. Định lí được phát biểu như sau:

Định lý Euler. *Nếu số nguyên a và số nguyên $m > 1$ nguyên tố cùng nhau thì $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$; trong đó, $\varphi(m)$ là giá trị của Phi – hàm Euler tại m.*

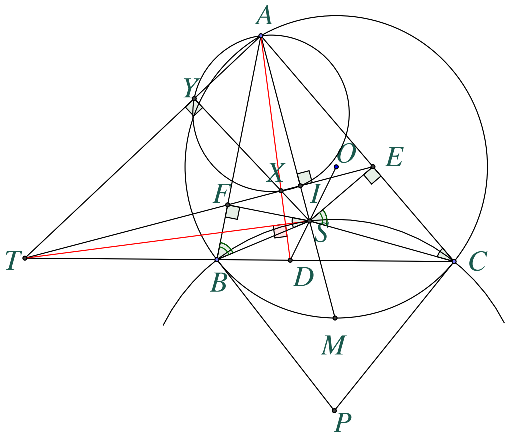
2. Bài đã ra là một bài toán cơ bản, có dạng quen thuộc, thích hợp cho việc luyện tập của các bạn học sinh, khi học về chủ đề "Đồng dư".

3. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có hai lời giải cho kết quả sai, tuy cách giải đúng, do người giải bài đã thực hiện sai một số tính toán.

Lưu Thị Thanh Hà

P639. (Mức A) Cho tam giác nhọn, không cân ABC, nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại P. Gọi M là điểm chính giữa của cung BC không chứa A của đường tròn (O). Đoạn thẳng AM cắt đường tròn tâm P, bán kính PB tại điểm S. Gọi E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của S trên AC, AB; T, D tương ứng là giao điểm của BC với các đường thẳng EF, SO. Chứng minh rằng $ST \perp AD$.

Lời giải (*dựa theo đa số lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).



Vì S nằm trong góc nhọn BAC nên từ các giả thiết $SE\perp AC$, $SF\perp AB$, suy ra $AFSE$ là tứ giác nội tiếp. Do đó

$$\angle FSE = 180^\circ - \angle BAC. \qquad (1)$$

Do PB, PC tiếp xúc với (O), tương ứng, tại B, C nên $PB = PC$. Do đó, $C \in (P; PB)$; suy ra

$$\begin{aligned}\angle BSC &= \frac{1}{2}(360^\circ - \angle BPC) = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BPC\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BOC)\\ &\quad \text{(do } PBOC \text{ là tứ giác nội tiếp)}\\ &= 90^\circ + \angle BAC. \qquad (2)\end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$\angle FSE + \angle BSC = 270^\circ;$$

do đó

$$\angle BSF + \angle CSE = 90^\circ.$$

Suy ra, $\angle BSF = \angle SCE$. Vì vậy, tam giác vuông (tại F) BFS đồng dạng với tam giác vuông (tại E) SEC. Suy ra

$$\frac{SB}{CS} = \frac{SF}{CE} = \frac{FB}{ES}. \qquad (3)$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với cát tuyến EFT, ta được:

$$\frac{TB}{TC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1;$$

suy ra

$$\frac{TB}{TC} = \frac{EA}{EC} \cdot \frac{FB}{FA}. \qquad (4)$$

Vì M là điểm chính giữa của cung BC không chứa A của (O), nên AM là tia phân giác của góc BAC. Do đó, từ các giả thiết $S \in AM$ và $SE\perp AC$, $SF\perp AB$, suy ra

$$SE = SF \text{ và } EA = FA. \qquad (5)$$

Từ (4), (5) và (3), ta được:

$$\frac{TB}{TC} = \frac{FA}{EC} \cdot \frac{FB}{FA} = \frac{FB}{EC} = \frac{FB}{ES} \cdot \frac{FS}{EC} = \left(\frac{SB}{SC}\right)^2.$$

Do đó, ST là đường đối trung ngoài của tam giác SBC. (6)

Do P là tâm đường tròn (SBC) và $OB\perp PB$, $OC\perp PC$, nên OB, OC là các tiếp tuyến tại B, C của (SBC). Vì thế, SD là đường đối trung của tam giác SBC. (7)

Từ (6) và (7), suy ra $(TDBC) = -1$. (8)

Gọi I là giao điểm của AS và EF. Do (5) nên AS là trung trực của EF; vì thế, $AI\perp EF$, hay $AS\perp TI$, và I là trung điểm của EF. (9)

Gọi X là giao điểm của AD và EF.

Do phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỷ số kép, nên từ (8) suy ra $(TXFE) = -1$. Vì thế, do (9) nên theo hệ thức Maclaurin, ta có:

$$\overline{TX} \cdot \overline{TI} = \overline{TF} \cdot \overline{TE} = P_{T/(AFSE)}. \qquad (10)$$

Gọi Y là hình chiếu vuông góc của S trên TA; ta có, Y thuộc đường tròn $(AFSE)$. Do đó

$$\overline{TY} \cdot \overline{TA} = P_{T/(AFSE)}. \qquad (11)$$

Từ (10) và (11), suy ra

$$\overline{TX} \cdot \overline{TI} = \overline{TY} \cdot \overline{TA}.$$

Do đó, $AYXI$ là tứ giác nội tiếp. Mà $\angle AIX = 90^\circ$ (theo (9)), nên $\angle XYA = 90^\circ$. Suy ra, ba điểm S, X, Y thẳng hàng. Do đó, từ định nghĩa điểm Y và (9) suy ra, X là trực tâm tam giác ATS. Vì vậy, $AX\perp ST$; mà $X \in AD$, nên $AD\perp ST$.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Hạ Vũ Anh

P640. (Mức A) Ký hiệu S là tập hợp 2022 số nguyên dương đầu tiên. Hỏi, có tất cả bao nhiêu tập con khác rỗng của S mà tổng tất cả các số thuộc mỗi tập con đều chia hết cho 1024?

Lời giải (*của người chấm bài*).

• Xét bài toán khái quát sau của bài đã ra:

Bài toán khái quát. *Cho các số nguyên dương k, n, thỏa mãn $2^k < n$. Ký hiệu S là tập hợp n số nguyên dương đầu tiên. Hỏi, có tất cả bao nhiêu tập con khác rỗng của S, mà tổng tất cả các số thuộc mỗi tập con đều chia hết cho 2^k?*

Lời giải bài toán khái quát.

Ở lời giải này, ta quy ước:

$1/$ Coi 0 là tổng các số thuộc tập rỗng.

$2/$ Coi phép chia hết cho 2^k là phép chia có số dư bằng 2^k.

Ta biết rằng, mỗi số nguyên dương m đều được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng:

$$m = a_s \cdot 2^s + a_{s-1} \cdot 2^{s-1} + a_{s-2} \cdot 2^{s-2} + \cdots + a_0 \cdot 2^0,$$

trong đó, s là một số tự nhiên, và $a_i \in \{0;1\}$ với mọi $i = 0, 1, \ldots, s$, $a_s \neq 0$.

Do đó, mỗi số nguyên dương $m \leq 2^k - 1$ đều được biểu diễn một cách *duy nhất* dưới dạng:

$$m = a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + a_{k-2} \cdot 2^{k-2} + \cdots + a_0 \cdot 2^0,$$

trong đó, $a_i \in \{0;1\}$ với mọi $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Vì thế, với qui ước $1/$, ta có:

Nhận xét 1. Với mỗi số tự nhiên $m \leq 2^k - 1$, có *đúng một* tập con của tập

$$S_1 = \left\{2^0, 2^1, \ldots, 2^{k-1}\right\},$$

mà tổng tất cả các số thuộc tập con đó bằng m.

Ký hiệu $S_2 = S/S_1$. Ta có:

Nhận xét 2. Mỗi tập con X của S đều biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng:

$$X = X_1 \cup X_2,$$

trong đó, X_1 là một tập con của S_1, và X_2 là một tập con của S_2.

Vì

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

nên tổng tất cả các số thuộc một tập con khác rỗng tùy ý của S_1 là một số nguyên dương không vượt quá $2^k - 1$. Do đó, với các qui ước $1/$ và $2/$, từ Nhận xét 2 suy ra:

Nhận xét 3. Tập con T khác rỗng của S có tính chất đề bài yêu cầu khi và chỉ khi nó có dạng:

$$T = T_1 \cup T_2,$$

trong đó, T_2 là một tập con *khác rỗng* của S_2, và T_1 là một tập con của S_1, mà tổng các số thuộc tập con đó bằng $2^k - r$ với r là số dư trong phép chia tổng các số thuộc T_2 cho 2^k.

Với qui ước $2/$, nếu r là số dư trong phép chia cho 2^k thì $2^k - r$ là một số tự nhiên không vượt quá $2^k - 1$. Do đó, từ Nhận xét 1 suy ra, số tập con khác rỗng của S có dạng nêu ở Nhận xét 3 chính bằng số tập con khác rỗng của S_2. Do đó, theo Nhận xét 3, số tập con khác rỗng, có tính chất đề bài yêu cầu, của S bằng số tập con khác rỗng của S_2.

Vì $S_1 \subset S$ và $S_2 = S/S_1$ nên

$$|S_2| = |S| - |S_1| = n - k.$$

Do đó, số tập con khác rỗng của S_2 bằng $2^{n-k} - 1$.

Vì vậy, số tập con khác rỗng, có tính chất đề bài yêu cầu, của S bằng $2^{n-k} - 1$.

• *Bài đã ra* là một trường hợp đặc biệt của Bài toán khái quát, khi $k = 10$ và $n = 2022$. Vì thế, theo kết quả của Bài toán khái quát, đáp số của bài đã ra là $2^{2012} - 1$.

Bình luận và Nhận xét

1. Cách đơn giản nhất, tự nhiên nhất, và cũng là "thô" nhất, để tạo ra một tập con khác rỗng của S có tính chất đề bài yêu cầu là: Lấy một tập con khác rỗng X của S ($X \neq S$); sau đó, kiểm tra tổng các số thuộc X. Nếu tổng này chia hết cho 1024 thì ta có một tập con thỏa mãn yêu cầu đề bài. Trường hợp ngược lại, nếu tổng đó không chia hết cho

1024, thì bổ sung vào X các số (thuộc S) có tổng bằng $1024 - r$, với r là số dư trong phép chia tổng các số thuộc X cho 1024.

Lẽ dĩ nhiên, cách làm trên chỉ khả thi, nếu các số cần "trưng dụng" để bổ sung vào X không thuộc X. Nhận xét này dẫn ta tới ý nghĩ, có thể tạo ra tập con thỏa mãn yêu cầu đề bài, trên "nền tảng" một phân hoạch tập S thành hai tập con, mà một trong hai tập con đó có tính chất: mỗi số nguyên dương không vượt quá 1023 đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của một số số thuộc tập con ấy. Tới đây, việc nhận ra $1024 = 2^{10}$ sẽ là một gợi ý mạnh cho việc sử dụng biểu diễn nhị phân của một số nguyên dương để tạo ra phân hoạch vừa nêu.

Những điều trình bày trên đây là cách tiếp cận, đã "dẫn" người chấm bài tới Lời giải nêu trên.

2. Lời giải trên cho thấy, ràng buộc các phần tử thuộc S phải là 2022 số nguyên dương đầu tiên không có đóng góp toán học nào cho việc giải bài toán, ngoại trừ việc trong chúng có các số $2^0, 2^1, \ldots, 2^9$. Từ đó, có thể suy đoán rằng, ràng buộc đó chỉ nhằm mục đích "giấu" "chìa khóa" mở "cửa" vào Lời giải?

3. Bài đã ra cho thấy một khai thác thú vị đối với biểu diễn nhị phân của một số nguyên dương. Theo đánh giá của người chấm bài, đây là một bài toán khá khó, vì việc "giấu" "chìa khóa" rất có thể đã "đẩy" người giải bài ra xa hướng tiếp cận mộc mạc, đã nêu ở mục 1 trên đây, và "hút" họ vào hướng tìm ra một điều kiện cần và đủ, để các số nguyên dương trong phạm vi từ 1 đến 2022 có tổng là một bội của 1024. Phải chăng, do đang bị "hút" vào hướng này, nên tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí vẫn chưa nhận được một lời giải nào, từ bạn đọc?

Nguyễn Khắc Minh

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI HOÀN CHỈNH

Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải hoàn chỉnh.

KHỐI THCS

• Trường **THCS xã Pom Lót**, huyện Điện Biên, tỉnh Điện Biên: *Nguyễn Ngọc Diệp* (lớp 9D3; P631).

• Trường **THCS Archimedes Academy Trung Yên**, Tp. Hà Nội: *Nguyễn Thanh Bình* (lớp 7C1; P631).

• Trường **THCS Lê Quý Đôn**, Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh: *Nguyễn Chánh Thiện* (lớp 8/14; P631, P632).

• Trường **THCS Long Bình Điền**, tỉnh Tiền Giang: *Võ Trần Tiến* (lớp 8^5; P631).

KHỐI THPT

• Trường **THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu**, tỉnh Đồng Tháp: *Lư Gia Hưng* (lớp 11T1; P634, P635), *Đỗ Duy Quang* (lớp 11T1; P634).

• Trường **THCS & THPT Nguyễn Tất Thành**, Tp. Hà Nội: *Nguyễn Gia Huy* (lớp 10A2; P634).

• Trường **THPT chuyên Hà Tĩnh**, tỉnh Hà Tĩnh: *Trần Minh Hoàng* (lớp 10T1; P636, P637, P639).

• Trường **THPT Gia Định**, Tp. Hồ Chí Minh: *Lê Nam Khánh* (lớp 11CT; P639).

• Trường **THPT chuyên Hưng Yên**, tỉnh Hưng Yên: *Trần Hữu Dương* (lớp 11 Toán 1; P631, P632, P634, P638), *Nguyễn Công Minh Đức* (lớp 11 Toán 1; P635, P639), *Nguyễn Gia Khánh* (lớp 10 Toán 1; P639).

• Trường **THPT chuyên Lê Hồng Phong**, tỉnh Nam Định: *Ngô Quang Bình* (lớp 11 Toán 1; P633), *Phạm Danh Thái* (lớp 11 Toán 1; P632).

• Trường **THPT chuyên Tiền Giang**, tỉnh Tiền Giang: *Võ Trần Hiền* (lớp 12 Toán 1;

P638).

- Trường **THPT chuyên Quốc học Huế**, tỉnh Thừa Thiên – Huế: *Nguyễn Đình Khải Nguyên* (lớp 11 Toán 2; P638), *Nguyễn Thị Nhật Thảo* (lớp 11 Toán 2; P631, P634), *Đặng Quỳnh Bảo Uyên* (lớp 11 Toán 2; P634).
- Trường **THPT chuyên Khoa học tự nhiên**, ĐH Khoa học tự nhiên – ĐHQG Hà Nội: *Vương Khánh Toàn* (lớp 10A1 Toán; P631, P633, P634, P635).
- Trường **THPT chuyên Sư phạm**, ĐH Sư phạm Hà Nội: *Hồ Trần Khánh Linh* (lớp 12 Toán 2; P639).