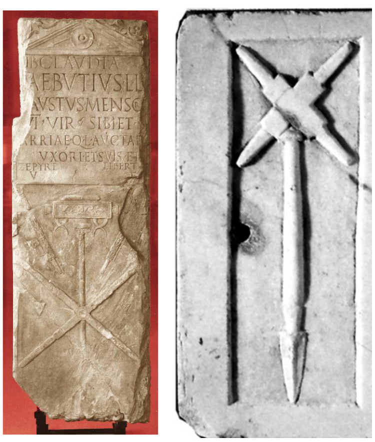
NGHỀ TRẮC ĐỊA THỜI LA MÃ CỔ ĐẠI

NGUYỄN HOÀNG VŨ[1]

Gắn liền với sự phát triển của hình học, nghề trắc địa cũng xuất hiện rất sớm trong lịch sử nhân loại, từ nhiều nghìn năm trước. Đặc biệt, đến thời La Mã cổ đại, nó đóng một vai trò quan trọng trong nhiều mặt của xã hội. Trong bài viết này, chúng ta hãy cùng tìm hiểu về các công cụ và phương pháp đo đạc cũng như những thành tựu còn lưu lại của trắc địa La Mã.

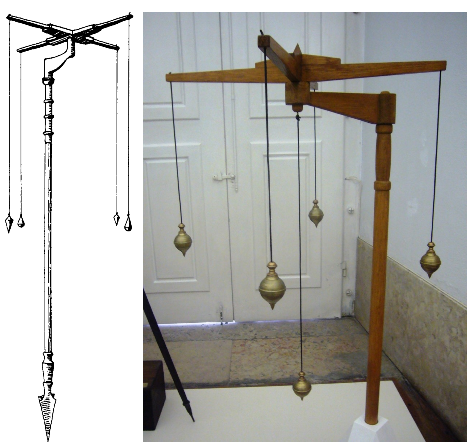
1. Các dụng cụ trắc địa



Hình 1. Hình khắc groma trên bia mộ của những người làm trắc địa thời La Mã.

Ngoài các dụng cụ cơ bản thường thấy như cọc và dây thừng, dụng cụ trắc địa mang tính biểu tượng nhất của người La Mã là một thiết bị mang tên *groma*. Nó xuất hiện phổ biến trong nhiều tài liệu trắc địa còn sót lại cũng như trên bia mộ của những nhà trắc địa La Mã. Từ hiện vật phát hiện được ở di chỉ Pompeii và các mô tả bằng lời trên văn bản, cấu tạo của thiết bị này gồm một số bộ phận chính như sau:

- Một thân chính dạng cọc;
- Một thanh chữ thập gắn lên thân chính;
- Bốn dây dọi gắn ở bốn đầu của thanh chữ thập.



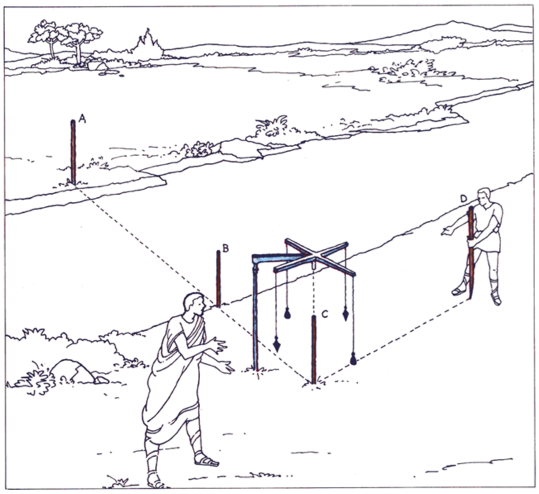
Hình 2. Sơ đồ cấu tạo của groma (trái) và một phiên bản phục dựng (phải).

Việc sử dụng *groma* để xác định góc vuông tương đối đơn giản. Thân chính được cắm sao cho hai dây dọi của một nhánh chữ thập

---

[1] *Hà Nội.*

thẳng hàng với các cọc đã được cắm sẵn. Sau đó người ta cắm thêm các cọc mới gióng hàng với hai dây dọi của nhánh chữ thập còn lại để xác định phương vuông góc.



Hình 3. Minh họa cách sử dụng groma để xác định phương vuông góc với một phương cho trước.

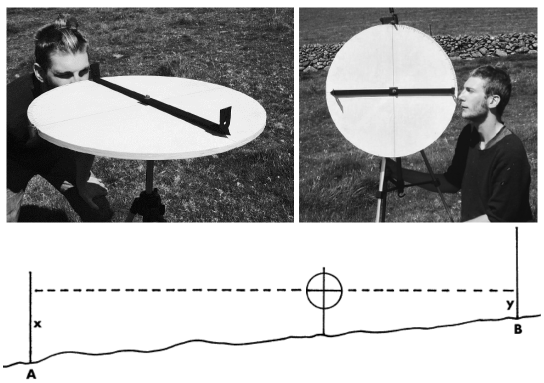
Về mặt lịch sử, người Ai Cập cổ đại cũng đã có một thiết bị trắc địa gần giống với *groma*. Một số giả thuyết cho rằng *groma* được du nhập vào xã hội La Mã từ người Etruria, những người sống ở khu vực phía bắc của Italy trước khi bị người La Mã sáp nhập, kèm theo đó là các nghi thức mang màu sắc tôn giáo khi sử dụng công cụ này. Do việc đo đạc xác định biên giới các công trình còn có ý nghĩa về mặt tâm linh (giống với "động thổ" của nước ta) nên trong giai đoạn ban đầu của đế quốc La Mã, những người làm trắc địa có vai trò giống với các giáo sỹ hơn là nhân viên kỹ thuật và *groma* là một biểu tượng nghi lễ gắn liền với công việc này. Dần dần, trắc địa trở thành nghề nghiệp mang tính dân sự và mất đi màu sắc huyền bí của nó.

Bản thân *groma* cũng có nhiều vấn đề về mặt kỹ thuật. Nó không thể sử dụng được khi có gió, ngay cả với gió nhẹ, do các dây dọi không còn thẳng đứng nữa. Nhà toán học Heron ở Alexandria cũng đã nhắc đến việc này. Ông đề xuất thêm các lá chắn gió cho các dây dọi nhưng cũng nhận định rằng việc này sẽ làm cho quá trình gióng hàng khó khăn hơn nhiều. Mặt khác, *groma* cũng cho độ chính xác không cao. Với khoảng cách 100 m, độ lệch của việc gióng hàng so với đường thẳng cần tìm có thể lên tới 1 m. Một số tác giả như Jean–Pierre Adam cho rằng các bước gióng hàng liên tiếp sử dụng *groma* sẽ triệt tiêu bớt sai số do ở mỗi bước do kết quả đo sẽ lệch sang trái hoặc phải một cách ngẫu nhiên. Trong khi đó, một số nhà nghiên cứu khác lại cho rằng *groma* chỉ mang tính biểu tượng còn các công cụ chính của người làm trắc địa La Mã là những thiết bị chính xác hơn.

Hình 4. Đầu ngắm từ thời La Mã được khai quật ở Pháp.

Năm 1997, cuộc khai quật một di chỉ La Mã ở Pháp phát hiện một đầu ngắm hình trụ với các khe cách nhau 1/16 đường tròn. Trước đó, người ta cũng đã phát hiện được ở Đức một dụng cụ có khe ngắm tương tự dạng bát giác (hiện vật này đã bị mất trong chiến tranh thế giới thứ hai). Điều đáng chú ý là đầu ngắm dạng này có thể cho phép xác định phương vuông góc hoặc các góc 1/4, 1/8 hay 1/16 đường tròn với độ chính xác cao hơn nhiều so với *groma*. Sau thời La Mã, chúng chỉ xuất hiện lại và phổ biến ở châu Âu vào thế kỷ 16. Vì sao dụng cụ này không được nhắc đến trong những tài liệu trắc địa La Mã còn sót lại vẫn là một vấn đề hiện chưa được giải đáp.

Một thiết bị đáng chú ý khác là *dioptra*, một công cụ có nguồn gốc từ Hy Lạp. Hiện tại chỉ còn những mô tả bằng lời nên người ta không biết chính xác nó trông như thế nào. *Dioptra* xuất hiện trong các phép đo thiên văn của cả Hipparchus lẫn Heron. Phiên bản của Heron có lẽ phức tạp hơn so với các phiên bản khác. Bản thân Heron cũng có một cuốn sách chuyên về trắc địa sử dụng *dioptra*.

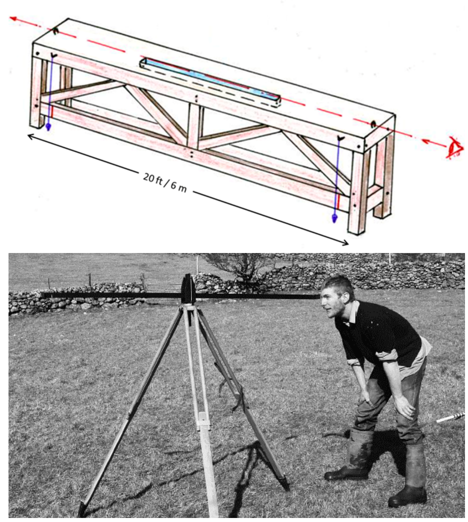


Hình 5. Trên: Dioptra trong mặt phẳng nằm ngang và mặt phẳng thẳng đứng. Dưới: Dùng dioptra xác định phương nằm ngang, qua đó đo được chênh lệch độ cao giữa hai điểm A và B.

Về cơ bản, *dioptra* gồm một thước ngắm trên một đĩa (gỗ hoặc kim loại). Thước ngắm có lỗ tròn hoặc khe hẹp giúp tăng độ chính xác so với chỉ ngắm bằng mắt thường qua các đầu cọc. Vạch trên đĩa vuông góc với thước cho phép xác định phương vuông góc. *Dioptra* có thể được sử dụng trong mặt phẳng ngang cũng như trong mặt phẳng thẳng đứng vuông góc với mặt đất.

Những tài liệu còn sót lại của Julius Africanus, một tác giả La Mã ở Jerusalem ở thế kỷ 3, và một tác giả khuyết danh vào thế kỷ 10 ở Byzantine (hậu duệ của đế quốc Đông La Mã) ghi chép về việc sử dụng *dioptra* để đo khoảng cách và chiều cao. Đặc biệt, Julius Africanus mô tả cách sử dụng dioptra trong quân sự để đo chiều cao của tường thành địch. Tuy vậy, những ứng dụng này của *dioptra* lại không xuất hiện trong các ghi chép có nguồn gốc ở phía Tây của đế quốc La Mã. Đây là một vấn đề hiện nay vẫn chưa thể giải thích rõ ràng. Một nguyên nhân có thể là do nguồn gốc Hy Lạp của *dioptra* không được tiếp nhận tích cực ở nửa Tây của La Mã trong khi ở phía Đông, ảnh hưởng của văn minh Hy Lạp mạnh hơn (sau khi Đông La Mã trở thành Byzantine, tiếng Hy Lạp thay thế tiếng Latin thành ngôn ngữ chính thức).

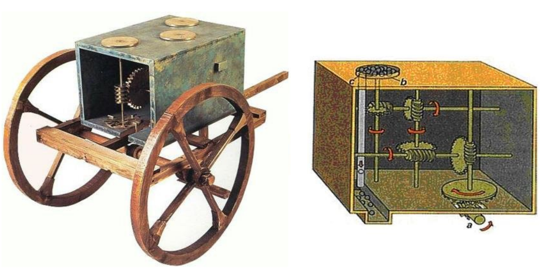
Nghiên cứu khảo cổ cũng cho thấy đồng hồ mặt trời xuất hiện trong bộ thiết bị của một nhà trắc địa La Mã cổ đại. Nó cho phép người ta xác định phương hướng vào ban ngày. Vào ban đêm, các chòm sao được dùng làm công cụ định hướng. Trong di tích nơi ở của một người làm trắc địa ở di chỉ Pompeii, có một ngôi nhà mà sàn của nó được khảm trang trí câu chuyện về Orion, nhân vật thần thoại sau khi chết trở thành một chòm sao trên bầu trời. Chòm sao này có tác dụng quan trọng dùng để định vị các chòm sao khác. Không những cần các kỹ năng đo đạc trên mặt đất, người làm trắc địa thời La Mã còn phải có hiểu biết về bầu trời nữa!



Hình 6. Trên: Mô hình phục dựng lại chorobates. Dưới: Libra có cấu tạo là một thước ngắm dạng đòn cân dài có giá đỡ.

Một vấn đề trắc địa quan trọng khác là việc xác định phương nằm ngang. Đây là một yêu cầu thiết yếu khi người La Mã xây dựng các hệ thống dẫn nước dài nhiều cây số. Nhiều tài liệu hiện nay cho rằng người ta đã sử dụng thiết bị mang tên *chorobates* có dạng một ghế băng dài với một máng khoét ở giữa có đổ nước. Khi mặt ghế hoàn toàn nằm ngang, mực nước sẽ ở đều cả hai bên máng. Tuy nhiên, về mặt kỹ thuật, độ chính xác của nó không cao và các thiết bị chính xác hơn nhiều như *dioptra* và *libra* có thể đã được sử dụng (Hình 6).

Về mặt đo khoảng cách, ngoài dây thừng và gậy, người La Mã có một thiết bị khá thú vị là *hodometer* có nguồn gốc Hy Lạp. Khi người sử dụng đẩy xe, trục bánh xe sẽ kéo theo các bánh răng bên trong xe chuyển động. Các bánh răng được tính toán sao cho khi xe đi được một dặm La Mã, một hòn sỏi sẽ chui qua lỗ ở trên xuống phía dưới và ta chỉ cần đếm số lượng hòn sỏi để biết đã đi được bao xa. Tuy khá phức tạp về mặt cơ khí, *hodometer* không có độ chính xác cao do quá trình di chuyển khi đẩy xe giữa hai điểm trong thực tế thường gấp khúc chứ không phải đường thẳng.



Hình 7. Hodometer.

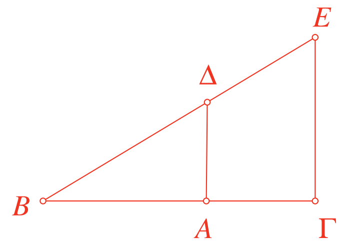
Bài tập

Trong các bài tập trắc địa dưới đây, phương vuông góc có thể được xác định bằng *groma* hoặc *dioptra*.

1. *Tìm khoảng cách giữa điểm A (ở gần) và điểm B (ở xa) mà không cần đi đến B.*

Phương pháp: Cắm cọc ở Γ thẳng hàng với A và B. Cắm cọc ở E sao cho ΓE vuông góc với $B\Gamma$. Trên BE, xác định Δ sao cho $A\Delta$ vuông góc với $B\Gamma$. Đo các khoảng cách $A\Delta$, $A\Gamma$, $E\Gamma$.

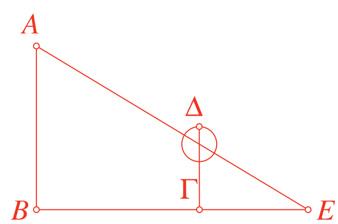
Hãy viết biểu thức của độ dài đoạn AB.



2. *Đo chiều cao của bức tường AB mà không đến B.*

Phương pháp: Cắm *dioptra* tại Γ và gióng thước ngắm đến A. Giữ nguyên thước ngắm và ngắm theo chiều ngược lại để xác định điểm E trên mặt đất. Đo ΓE và $\Gamma\Delta$ với Δ là tâm của đĩa tròn của *dioptra*. Đo EB theo phương pháp ở bài 1.

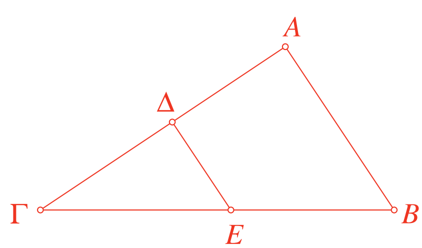
Hãy viết biểu thức cho độ cao AB.



3. *a) Đo khoảng cách giữa hai điểm A và B có thể nhìn thấy nhưng không thể đến được.*

Phương pháp: Sử dụng phương pháp ở bài 1 để đo các khoảng cách ΓA và ΓB khi đứng ở Γ. Gióng các cọc tại Δ và E sao cho $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B}$. Đo độ dài ΔE.

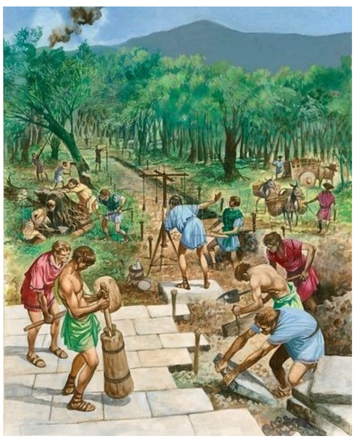
Hãy viết biểu thức cho độ dài AB.



b) Hãy chứng minh ΔE song song với AB để chỉ ra rằng phương pháp trên cũng cho phép xác định phương song song với với đường thẳng đi qua hai điểm ở xa.

2. Trắc địa trên khoảng cách lớn

Trong việc xây dựng các con đường nối hai địa điểm, trừ khi có chướng ngại vật, người ta luôn hướng đến việc đi theo đường thẳng thay vì đường cong. Việc xác định đường thẳng trên thực địa là một vấn đề quan trọng mà người làm trắc địa La Mã cần phải giải quyết. Các công cụ gióng hàng nêu ở phần trên có thể giúp gióng hàng ở khoảng cách ngắn từ vài trăm mét đến vài km. Với những khoảng cách lớn hơn, vấn đề bắt đầu trở nên phức tạp hơn.



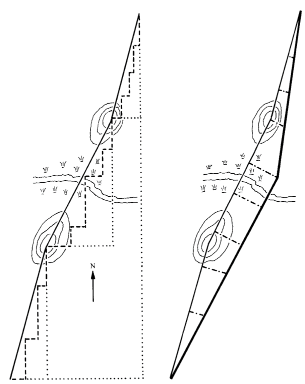
Hình 8. Minh họa về xây dựng đường thời La Mã (Peter Jackson). Kỹ thuật viên ở giữa đang gióng hàng với một người cầm cọc và một cột khói ở địa điểm ở phía xa.

Nếu không thể nhìn thấy điểm kết thúc từ điểm bắt đầu con đường, người ta có thể đốt lửa tạo cột khói để tiến hành gióng hàng. Tuy nhiên, với những khoảng cách lớn hơn nữa, công việc cũng trở nên phức tạp hơn nhiều.

Hình 9. Gióng hàng bằng xấp xỉ liên tiếp. Các cọc màu trắng sẽ được di chuyển đến lúc nào tất cả chúng đều thẳng hàng với hai vị trí đầu và cuối (hai cọc màu đen).

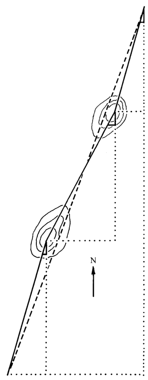
Một giả thuyết được đưa ra là đầu tiên người ta cắm một số cọc đánh dấu xấp xỉ, mỗi cọc chỉ có thể quan sát được một cọc phía trước và một cọc phía sau. Do không xác định chính xác được đường thẳng nối điểm đầu và điểm cuối trên thực địa, các cọc sẽ được di chuyển bằng cách thử dần cho đến khi nào tất cả các cọc đều thẳng hàng (kể cả cọc cố định ở điểm đầu và điểm cuối). Phương pháp xấp xỉ liên tiếp này tuy có thể thực hiện được nhưng sẽ mất rất nhiều thời gian và công sức lao động.

Một giả thuyết khác là các nhà trắc địa La Mã đã sử dụng cách đo khoảng cách của Heron. Chọn một phương làm phương cơ sở (ví dụ phương Đông Tây). Sau đó ta chỉ di chuyển theo phương này hoặc phương vuông góc với nó. Đến mỗi điểm đánh dấu (ví dụ ngọn đồi), người ta ghi lại tổng độ dài đã đi theo mỗi phương. Từ đó, một bản đồ giống với lưới tọa độ có thể được vẽ ra. Các vị trí trên đường đi sẽ được thiết lập theo độ lệch của nó so với đường gấp khúc nối các điểm đánh dấu.



Hình 10. Xác định vị trí bằng cách di chuyển theo hai phương vuông góc.

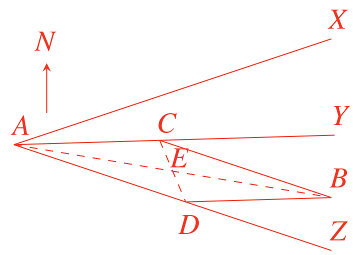
Trong một phiên bản khác của phương pháp này, việc trắc địa sẽ không có thao tác vẽ bản đồ mà được hoàn toàn tiến hành trên thực địa. Ứng với mỗi điểm đánh dấu, người ta đo khoảng cách đến điểm đánh dấu trước nó bằng các phương pháp đo trắc địa. Góc của đường nối cũng được xác định bằng góc so với phương Bắc – Nam. Góc ở giai đoạn lịch sử này không biểu diễn bằng độ mà được biểu diễn bằng tỷ lệ giữa hai cạnh góc vuông – tức là tan của góc. Khoảng cách và góc giữa điểm đầu và điểm cuối có thể được xác định bằng cách tính các cạnh của tam giác vuông theo định lý Pythagoras và tam giác đồng dạng. Nhờ đó, có thể tiến hành gióng hàng để xác định đường thẳng nối hai điểm đã cho.



Hình 11. Xác định vị trí theo khoảng cách và góc.

Một giả thuyết khác được nhà nghiên cứu M. Lewis đưa ra là việc gióng hàng trên khoảng cách lớn bằng dựng hình. Theo đó, người ta tiến hành gióng hàng theo một phương AX mang tính ước lượng và xác định xem B nằm ở nửa mặt phẳng nào so với AX, sau đó tiến hành gióng hàng theo hai phương AY và AZ sao cho B nằm trong góc tạo bởi hai tia này. Khi đến đủ gần để chắc chắn rằng B đúng là như vậy, các đường song song với AY và AZ được gióng từ B (bằng cách sử dụng góc tạo với phương Bắc – Nam theo dạng tỷ lệ hai cạnh góc vuông) để tạo hình bình hành $ACBD$. Sau khi đo khoảng cách CD, trung điểm E của đoạn thẳng này có thể được xác định. Điểm E đồng thời cũng là trung điểm của AB. Các trung điểm của AE và EB có thể được tìm ra một cách tương tự. Quá trình xác định các trung điểm được lặp lại cho đến khi tất cả vị trí có thể được gióng hàng bằng các cọc liên tiếp sử dụng *groma* hoặc *dioptra*.

Một điểm đáng chú ý là một số con đường La Mã không được xây dựng hoàn toàn từ số không mà có mục đích nối các trung tâm dân cư đã có sẵn từ trước khi người La Mã đặt chân đến. Những con đường nối các địa điểm này dần hình thành theo lịch sử do hoạt động giao thông của con người cũng như việc chăn thả gia súc. Các đàn gia súc thường đi theo đường thẳng giữa các điểm có nhiều cỏ và nguồn nước – đây cũng là các điểm mà dân cư thường tụ tập. Do đó công việc trắc địa có những lúc được tiến hành một cách dễ dàng hơn dựa trên việc nắn thẳng lại các tuyến đường có sẵn.



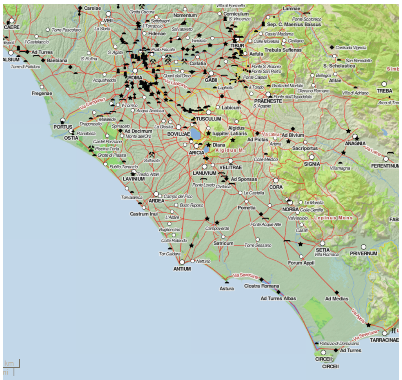
Hình 12. Trắc địa bằng dựng hình.

Có thể nói, phương pháp gióng hàng trên khoảng cách lớn mà người La Mã đã sử dụng vẫn là một vấn đề mở với các hướng nghiên cứu khác nhau và khó có thể kết luận được một cách dễ dàng với lượng chứng cứ ít ỏi còn lại.

3. Vai trò của trắc địa trong kinh tế xã hội La Mã

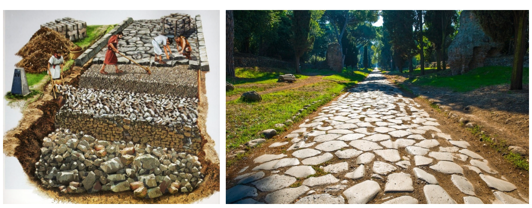
Hình 13. Lưới ô vuông của một di tích La Mã.

Trắc địa có dấu ấn quan trọng trong việc quy hoạch các khu vực đô thị cũng như đất nông nghiệp ở La Mã. Các khu vực này sẽ được chia theo các lưới ô vuông dọc theo các trục đường chính trước khi xây dựng. Những người làm trắc địa không chỉ tiến hành đo đạc mà còn phải có hiểu biết về pháp luật để tiến hành giải quyết các tranh chấp khiếu kiện về đất đai.



Hình 14. Hệ thống đường giao thông xung quanh Rome thời La Mã cổ đại.

Hệ thống đường giao thông La Mã cũng mang đậm dấu ấn của những nhà trắc địa. Mạng lưới đường bộ trải khắp đế quốc được thiết kế với mức độ thẳng nhất mà địa hình cho phép, giúp đảm bảo tốc độ vận chuyển nhanh chóng nhất cho các hoạt động kinh tế cũng như quân sự của một đế quốc khổng lồ. Nhiều đoạn đường trong hệ thống này có độ dài thẳng tắp từ vài chục đến hàng trăm km.



Hình 15. Trái: Đường bộ thời La Mã được xây dựng công phu với nhiều lớp vật liệu khác nhau. Phải: Một con đường thời La Mã vẫn tồn tại đến ngày nay.

Các con đường thời La Mã được xây dựng một cách công phu với nhiều lớp vật liệu khác nhau đảm bảo tính bền chắc cũng như thoát nước tốt. Nhiều đoạn vẫn còn tồn tại hàng nghìn năm cho đến ngày nay. Dọc theo các con đường là những cột mốc đánh dấu khoảng cách tính từ cột mốc số không, được đặt tại Rome – đầu não của toàn bộ đế quốc. Đây cũng là nguồn gốc của câu nói "Mọi con đường đều dẫn đến Rome".

Một thành tựu đáng chú ý khác của trắc địa thời La Mã là việc xây dựng các hệ thống đường ống dẫn nước (*aqueduct*). Để cung cấp nước sinh hoạt cho khu vực đô thị, người ta phải dẫn nguồn nước từ các vị trí cao như suối hay hồ trên núi theo hệ thống đường dẫn có thể lên đến hàng chục km. Do chưa biết đến hiện tượng bình thông nhau, toàn bộ hệ thống ống dẫn được xây dựng với độ dốc hướng xuống. Trên những quãng đường xa như vậy, độ dốc này phải rất nhỏ, trung bình khoảng một trên vài nghìn, ở một số đoạn độ dốc chỉ là $1/20000$. Có những đoạn phải được đào theo những đường hầm xuyên núi. Những hệ thống dẫn nước này cho thấy độ chính xác cao trong việc tiến hành trắc địa và đo đạc khi xây dựng. Đồng thời, chúng cũng là biểu tượng cho sự thịnh vượng và phồn vinh của đế quốc.

Hình 16. Hệ thống dẫn nước gần thành Rome

Có thể nói, tuy kế thừa nhiều công cụ và kiến thức trắc địa từ các nền văn minh khác nhau như Ai Cập, Babylon, Hy Lạp, người La Mã đã thể hiện sự vượt trội hơn hẳn trong việc ứng dụng vào thực tế xã hội, với nhiều thành quả đã được phát hiện và nghiên cứu.

Tài liệu tham khảo

[1] Jean–Pierre Adam. (1994). *Roman building : materials and techniques*. Batsford.

[2] Lewis, M. J. T. (2001). *Surveying instruments of Greece and Rome*. Cambridge University Press.

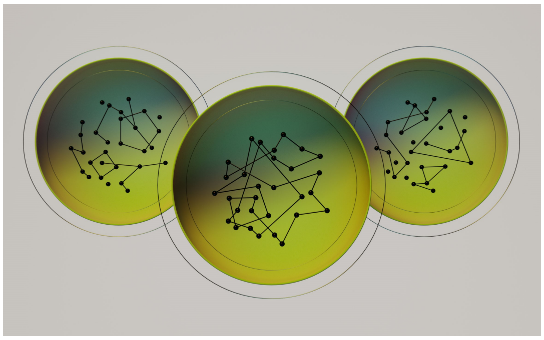
[3] Talbert, R. J. A. (2012). *Ancient perspectives : maps and their place in Mesopotamia, Egypt, Greece & Rome*. The University Of Chicago Press.

MỘT CHỨNG MINH ĐẸP 6 TRANG MỞ RA SỰ XUẤT HIỆN CỦA CẤU TRÚC NGẪU NHIÊN[1]

JORDANA CEPELEWICZ

(Người dịch: Ngô Trung Hiếu)

Hai nhà toán học trẻ đã khiến các đồng nghiệp kinh ngạc với một chứng minh hoàn chỉnh của giả thuyết Kahn–Kalai – một phát biểu bao quát về cách cấu trúc xuất hiện trong các tập hợp và đồ thị ngẫu nhiên.



Khi các nhà toán học Jeff Kahn và Gil Kalai lần đầu tiên đưa ra giả thuyết "ngưỡng kỳ vọng" năm 2006, chính họ không tin vào nó. Phát biểu của họ – một khẳng định rộng về các đối tượng toán học gọi là các đồ thị ngẫu nhiên – trông có vẻ quá mạnh, quá bao quát, quá táo bạo để có thể là đúng. Tưởng chừng như đó là suy nghĩ mơ mộng hơn là một chiêm nghiệm về sự thật toán học. Ngay cả như thế, chưa ai có thể chỉ ra nó sai, và giả thuyết đã nhanh chóng trở thành một trong những bài toán mở quan trọng nhất trong lĩnh vực.

Giờ đây, hơn 15 năm sau, hai nhà toán học trẻ ở Đại học Stanford (Stanford University) đã làm điều mà Kahn và Kalai cho rằng không thể: trong một tiền ấn phẩm ngắn đến ngạc nhiên đăng trên Internet mới chỉ một vài tuần trước, Jinyoung Park và Phạm Huy Tuấn đã đưa ra một chứng minh đầy đủ cho giả thuyết này.

"Nó đơn giản và mới mẻ đến kinh ngạc," Kalai nói. "Nó kỳ thú. Nó tuyệt vời."

Kết quả trên tự động chứng tỏ hàng trăm các phát biểu riêng biệt khác, mà mỗi phát biểu này đều rất khó để chứng minh – và nó có cả những hệ quả sâu hơn cho cái hiểu của chúng ta về các đồ thị ngẫu nhiên và các tập hợp toán học một cách rộng hơn.

"Tôi gọi chứng minh của họ là ảo diệu," Jacob Fox – một nhà toán học ở Stanford, đồng thời là thầy hướng dẫn PhD của Phạm – nói. "Điều này sẽ làm một phần chính của lĩnh vực tiến lên."

[1] *https://www.quantamagazine.org/elegant-six-page-proof-reveals-the-emergence-of-random-structure-20220425/*

Đóng băng một đồ thị

Giả thuyết Kahn–Kalai rất rộng – nó được viết theo ngôn ngữ trừu tượng của các tập hợp và các phần tử của chúng – nhưng nó có thể được hiểu bằng cách xét một trường hợp đơn giản. Đầu tiên, tưởng tượng một đồ thị: một tập hợp các điểm, hoặc đỉnh, nối với nhau bởi các đường, hay cạnh. Để làm đồ thị trở nên ngẫu nhiên, lấy một đồng xu không cân đối – đồng xu này lật ngửa với xác suất 1%, hay 30%, hay bất kì xác suất nào từ 0% đến 100% – và tung nó một lần với mỗi cặp đỉnh. Nếu đồng xu lật ngửa, nối cặp đỉnh này với một cạnh; nếu đồng xu lật sấp, không nối. Lặp lại quá trình này với mỗi cặp đỉnh có thể.

Các nhà toán học muốn biết khi nào một đồ thị như thế có lẽ sẽ chứa một cấu trúc thú vị nào đó. Có lẽ nó chứa một tam giác. Hoặc có lẽ nó chứa một chu trình Hamilton, một chuỗi các cạnh khép kín đi qua mỗi đỉnh đúng một lần. Ta có thể nghĩ về bất kì thuộc tính nào, miễn là nó "tăng" – nghĩa là, nghĩa là nếu ta bổ sung thêm các cạnh vào một đồ thị đã có thuộc tính đó thì ta sẽ không phá hỏng thuộc tính đó.

Nếu xác suất đồng xu lật ngửa là thấp, thì các cạnh sẽ hiếm, và các thuộc tính như các chu trình Hamilton có vẻ sẽ không xuất hiện. Nhưng nếu bạn làm tăng xác suất, một điều kì lạ sẽ xảy ra. Mỗi thuộc tính có một thứ gọi là ngưỡng: một xác suất mà khi đó cấu trúc hiện ra, thường rất đột ngột. Cũng giống như những tinh thể nước đá tạo thành khi nhiệt độ hạ xuống dưới o độ Celsius, sự xuất hiện đột nhiên của một thuộc tính cụ thể trở nên cực kì giống như nhiều cạnh được bổ sung vào đồ thị. Khi các cạnh được thêm vào một đồ thị ngẫu nhiên có N đỉnh với xác suất nhỏ hơn $\log(N)/N$, ví dụ, đồ thị có lẽ không chứa một chu trình Hamilton nào. Nhưng khi xác suất được điều chỉnh nhỉnh hơn $\log(N)/N$ chỉ một sợi tóc, một chu trình Hamilton trở nên cực kì có thể.

Các nhà toán học muốn xác định các ngưỡng này cho nhiều thuộc tính đáng quan tâm. "Các ngưỡng có lẽ là điều cơ bản nhất bạn muốn hiểu," Fox nói. "Tôi nhìn một đối tượng ngẫu nhiên; nó có thuộc tính mà tôi quan tâm không?" Trong khi ngưỡng đã được tính cho các chu trình Hamilton và một vài cấu trúc riêng biệt khác, trong hầu hết các trường hợp, việc xác định một ngưỡng chính xác, hoặc ngay cả một ước lượng tốt cho ngưỡng, cũng là rất khó.

Vì thế các nhà toán học thường dựa trên một tính toán dễ hơn, nhằm đưa ra một giá trị nhỏ nhất có thể, hoặc một chặn dưới, cho ngưỡng này. "Ngưỡng kỳ vọng" này được tính chủ yếu bằng các lấy một trung bình có trọng số. "Cái hay về ngưỡng kỳ vọng này là nó rất dễ tính," David Conlon – một nhà toán học tại Viện Kỹ thuật California (California Institute of Technology) – nói. "Nói nôm na, bạn có thể tính ngưỡng kỳ vọng này chỉ trong hai dòng cho hầu như bất kỳ thứ gì."

Nhưng các trung bình có thể sai lầm. Ví dụ, với các chu trình Hamilton, ngưỡng kỳ vọng là $1/N$, thấp hơn giá trị thực $\log(N)/N$ bởi một thừa số $\log(N)$.

Năm 2006, Kahn và Kalai cho rằng đây có thể là tình huống xấu nhất. Khẳng định cùng tên của họ phát biểu rằng khoảng cách giữa ngưỡng kỳ vọng và ngưỡng thực tế không bao giờ lớn hơn một thừa số logarithm. Giả thuyết này, theo Conlon, "về bản chất lấy câu hỏi trọng tâm về các đồ thị ngẫu nhiên và đưa ra một câu trả lời tổng quát cho nó."

Nhưng đó chỉ là một trường hợp đơn giản. Giả thuyết liên quan tới nhiều đồ thị ngẫu nhiên hơn. Nếu đúng, nó cũng đúng cho các dãy số ngẫu nhiên, cho các tổng quát hoá của các đồ thị gọi là các siêu đồ thị, và ngay cả những kiểu hệ thống rộng hơn. Đó là vì Kahn và Kalai viết phát biểu của họ dưới dạng các tập hợp trừu tượng. Các đồ thị ngẫu nhiên đóng vai trò một trường hợp riêng biệt – một đồ thị ngẫu nhiên có thể xem như một tập con ngẫu nhiên của tập hợp tất cả các cạnh – nhưng có nhiều đối tượng khác cũng nằm trong tầm nhìn của giả thuyết. "Thật lạ lùng, khi bạn đang làm việc với các đồ thị, chứng minh nó trong ngữ cảnh đó là rất khó," Conlon nói. "Nhưng một cách nào đó, nhảy sang ngữ cảnh trừu tượng này làm lộ ra cái rốn của nó."

Chính mức tổng quát này khiến phát biểu dường như không thể tin được. "Đó là một giả thuyết rất dũng cảm," Shachar Lovett – một nhà khoa học máy tính ở Đại học California, San Diego (University of California, San Diego) – nói. Vì một lẽ, nó sẽ ngay lập tức tựu trung một nỗ lực to lớn trong tổ hợp – cố gắng tính các ngưỡng cho các thuộc tính khác nhau. "Các câu hỏi nơi mà các chứng minh cần đến dường như rất dài và phức tạp đột ngột biến mất ngay," Alan Frieze – một nhà toán học tại Đại học Carnegie Mellon (Carnegie Mellon University) – nói. "Các chứng minh trở thành chỉ là các hệ quả tầm thường của giả thuyết này."

Điều mà nhiều bài toán có vẻ không liên quan có thể được giải quyết bằng một giả thuyết rộng như thế cảm giác như một cố gắng vươn xa đối với nhiều nhà toán học. "Nói thật, nó có vẻ hoàn toàn điên rồ," Conlon nói. Sau khi tạo ra giả thuyết này, Kahn và Kalai đã không cố gắng chứng minh nó. Họ đã nghiên cứu nhằm tìm ra phản ví dụ. Có rất nhiều ngữ cảnh để khám phá, nhưng họ đã thấy rằng cuối cùng họ buộc phải thất bại.

Nhưng như nó đã diễn ra, "câu chuyện tiến triển theo một cách rất khác" so với họ mong đợi, Kalai nói.

Con đường hoa hướng dương

Các phương pháp mà cuối cùng có thể sẽ dẫn đến một chứng minh mới cho giả thuyết Kahn–Kalai bắt đầu với một đột phá trong một bài toán khác tưởng chừng chẳng liên quan. Theo nhiều cách, câu chuyện bắt đầu với giả thuyết hoa hướng dương, một câu hỏi đưa ra bởi các nhà toán học Paul Erdős và Richard Rado năm 1960. Giả thuyết hoa hướng dương xem xét rằng liệu các bộ tập hợp (collections of sets) có thể được xây dựng theo các cách giống như các cánh hoa của một bông hoa hướng dương hay không.

Năm 2019, Lovett là một thành viên của một nhóm nghiên cứu đã tiến rất gần tới một lời giải hoàn chỉnh của bài toán hoa hướng dương. Tại thời điểm đấy, công trình đó tưởng chừng hoàn toàn tách biệt với giả thuyết Kahn–Kalai bao gồm các tìm hiểu về xác suất. "Tôi không thấy bất kì kết nối nào với giả thuyết của chúng tôi," Kalai nói. Lovett cũng thế, ông nói rằng "chúng tôi không hề biết về những câu hỏi đấy. Chúng tôi quan tâm tới các hoa hướng dương." Nhưng Kahn, Park (cô Park là học trò nghiên cứu sinh tiến sĩ của Kahn tại thời điểm đó) và các đồng nghiệp đã liên kết hai giả thuyết khi họ cố gắng chứng minh một phiên bản lỏng hơn của giả thuyết Kahn–Kalai một vài tháng sau đó. (Chứng minh của họ đã được công bố trên tạp chí Annals of Mathematics năm ngoái.) Giả thuyết yếu hơn này, phát biểu bởi nhà toán học Pháp Michel Talagrand, thay ngưỡng kỳ vọng Kahn–Kalai bởi một ngưỡng kỳ vọng "phân số" – về bản chất là một cách khác để lấy trung bình có trọng số. Định nghĩa tinh chế lại này "cho bạn thêm khoảng trống để làm việc," Lovett nói.

Nhóm của Kahn và Park nhận thấy rằng họ có thể trích xuất các kĩ thuật này từ kết quả hoa hướng dương năm 2019, tinh chỉnh chúng, và áp dụng vào giả thuyết Talagrand. "Đây chắc chắn là cái khiến chúng tôi bắt đầu," Kahn nói.

Các nhà toán học dùng một cách tiếp cận vòng lặp cho bài toán. Họ đặt ra mục tiêu chứng tỏ rằng nếu họ chọn một tập hợp ngẫu nhiên – ví dụ một đồ thị ngẫu nhiên – nó có thể chứa một cấu trúc ví dụ như một chu trình Hamilton. Nhưng thay vì chọn toàn bộ một tập hợp ngẫu nhiên ngay lập tức, họ chọn nó theo từng phần, một quá trình tương tự như cách mà Lovett và các đồng nghiệp tiếp cận giả thuyết hoa hướng dương. "Chúng tôi thực hiện lặp lại một loại quá trình ngẫu nhiên," Park nói. "Chúng tôi chọn một vài cạnh theo từng bước" cho tới khi chúng chứa đựng toàn bộ một chu trình Hamilton.

Để làm điều này, nhóm nghiên cứu quay sang một khái niệm về ngẫu nhiên gọi là trải. Nếu các chu trình Hamilton "trải ra" đẹp, nghĩa là không quá nhiều chu trình chứa cùng một cạnh hay một tập con các cạnh. "Một cách nào đó, bộ các tập hợp trải ra đẹp trong không gian," Phạm nói. "Nó không quá cô cụm hoặc tập trung trên bất kì phần nào." Nếu các chu trình được phân bố tốt theo cách này, nó đảm bảo rằng quá trình chứa đựng ngẫu nhiên theo từng phần – ngay cả khi nó thất bại cho nhiều chu trình Hamilton – sẽ thành công để nắm bắt được ít nhất một.

Cách tiếp cận này là khả thi chỉ bởi vì một tương đương quan trọng: ta có thể định lượng trải theo một cách liên quan trực tiếp tới ngưỡng kỳ vọng phân số. Vì điều này, các nhà toán học có thể viết lại giả thuyết Talagrand dưới dạng trải.

Thật hấp dẫn, chứng minh của giả thuyết yếu hơn này đủ để giải quyết một loạt các bài toán liên quan tới ngưỡng. "Mỗi hệ quả của giả thuyết đầy đủ mà chúng ta biết cũng là một hệ quả của giả thuyết yếu hơn," Kahn nói. Thực ra, với ông, Kalai và những người khác, điều này gợi ý rằng hai giả thuyết có thể hầu như là giống nhau – rằng các giá trị của các ngưỡng kỳ vọng phân số và ban đầu về mặt cơ bản là bằng nhau. Nếu ai đó có thể chứng minh đẳng thức này, họ có thể chứng minh giả thuyết Kahn–Kalai. "Tôi đã luôn nghĩ rằng cách duy nhất để chứng minh giả thuyết của chúng tôi là chứng minh điều này," Kahn nói.

Nhưng đó không phải là điều đã xảy ra. Trong khi các nhà toán học khác cố gắng đi theo bản đồ này để chứng minh hoàn toàn giả thuyết Kahn–Kalai, Park và Phạm tìm ra một cách tiếp cận hoàn toàn mới. "Jinyoung và Huy tìm thấy một lập luận trực tiếp đến kinh ngạc, ngắn đến kinh ngạc mà đấm xuyên thẳng mọi thứ," Conlon nói. "Thật là phi thường. Tôi không hề trông đợi điều này."

Kahn đồng ý. "Đây là một trong những cái hay trong toán học," ông nói.

"Những thứ mà mọi người nghĩ rằng vô vọng thực ra lại không chỉ không vô vọng, mà còn chẳng khó nữa."

Một tiếp cận ngạc nhiên

Thoạt tiên, cả Park và Phạm đều không có ý định tấn công giả thuyết ban đầu. Khi bắt đầu học về bài toán khi còn là nghiên cứu sinh, Park "có thể cảm nhận vẻ đẹp và sức mạnh của giả thuyết này," cô nói. "Nhưng tôi chưa bao giờ tưởng tượng ra rằng mình có thể chứng minh được nó."

"Điều đó chẳng hề có trong tâm trí của chúng tôi," Phạm nói thêm.

Thay vào đó, họ đang làm việc với một giả thuyết khác đưa ra bởi Talagrand khi họ bị "đánh thức bởi một phép màu," Phạm nói. Họ nhận ra rằng "bức tranh mà chúng ta có ở đây, các ý tưởng mà chúng ta có, nó theo một cách nào đó có vẻ như mạnh mẽ hơn dáng vẻ của nó." Các ý tưởng này, họ nghĩ, có thể đủ mạnh để đưa họ thẳng tới một chứng minh của bài toán Kahn–Kalai.

Trong suốt một đêm không ngủ vào tháng Ba, họ đã tìm ra cách chứng minh.

Không giống như ngưỡng kỳ vọng phân số, ngưỡng kỳ vọng thông thường không liên quan tới trải. Trải "cho bạn một điểm khởi đầu. Và nếu bạn đi đến giả thuyết ban đầu, không phân số, điểm khởi đầu ấy biến mất," Kahn nói. "Vì thế nó có vẻ rất thử thách."

"Thế bạn làm gì?" Phạm nói. "Trong trường hợp này, chúng tôi thay đổi quan điểm của mình."

Cụ thể hơn, họ nghĩ về bài toán theo một đối tượng toán học gọi là một phủ. Một phủ là một bộ các tập hợp, mà mỗi đối tượng với một thuộc tính nào đó chứa một trong các tập hợp này. Ví dụ, một phủ của mọi chu trình Hamilton là bộ tất cả các cạnh. Mọi chu trình Hamilton sẽ chứa một trong các cạnh này.

Park và Phạm viết lại giả thuyết Kahn–Kalai theo cách mà họ có thể sử dụng các phủ. Giả thuyết ban đầu đặt hạn chế lên xác suất của một đồng xu có trọng số lật ngửa sao cho đảm bảo một đồ thị ngẫu nhiên hay tập hợp có một thuộc tính nào đó. Cụ thể, nó nói rằng xác suất phải là ít nhất ngưỡng kỳ vọng cho thuộc tính nhân với một thừa số logarithm. Park và Phạm xoay ngược vấn đề lại: Nếu một thuộc tính có lẽ không xuất hiện, thì xác suất gắn với đồng xu đặt trọng số là thấp hơn ngưỡng kỳ vọng nhân với một thừa số logarithm.

Đó là nơi mà các phủ xuất hiện: Khi một phủ nhỏ có thể được xây dựng cho một tập con các cấu trúc (như một bộ các chu trình Hamilton), nghĩa là đóng góp của một tập hợp vào ngưỡng kỳ vọng là nhỏ. (Nhớ rằng ngưỡng kỳ vọng được tính bằng cách lấy một loại trung bình có trọng số trên mọi cấu trúc có thể có một dạng cho trước.) Vì thế điều mà Park và Phạm cần chứng minh là nếu một tập hợp ngẫu nhiên có vẻ không chưa một cấu trúc đích, phải tồn tại một phủ nhỏ cho mọi cấu trúc đích ấy. Phần chính trong chứng minh của họ dành cho việc xây dựng phủ nhỏ ấy.

Họ làm điều này bằng cách sử dụng một quá trình lấy mẫu theo từng phần tương tự như cái mà họ đã dùng trong các kết quả trước, cùng lúc giới thiệu cái mày Fox gọi là "một lập luận đếm rất thông minh." Một tuần sau đêm tháng Ba không ngủ, họ đăng một bài báo đẹp 6 trang lên mạng.

"Chứng minh của họ là siêu đơn giản. Họ dùng ý tưởng cơ bản mà chúng tôi đã phát triển và [các ý tưởng khác từ] những bài báo kia và thêm một bước chuyển vào nó," Lovett nói. "Và với bước chuyển mới này, mọi thứ một cách nào đó trở nên dễ hơn rất, rất nhiều."

Frieze đồng ý. "Tôi không thể giải thích, nhưng thật ngạc nhiên là nó đúng," ông nói.

Cũng như kết quả phân số, giả thuyết Kahn–Kalai, giờ đây đã chứng minh là đúng, tự động dẫn đến một loạt các giả thuyết liên quan. Nhưng hơn thế, "đây là một kỹ thuật chứng minh mạnh có lẽ sẽ dẫn đến nhiều điều mới," Noga Alon – một nhà toán học tại Đại học Princeton (Princeton University) – nói. "Họ phải làm đúng cách."

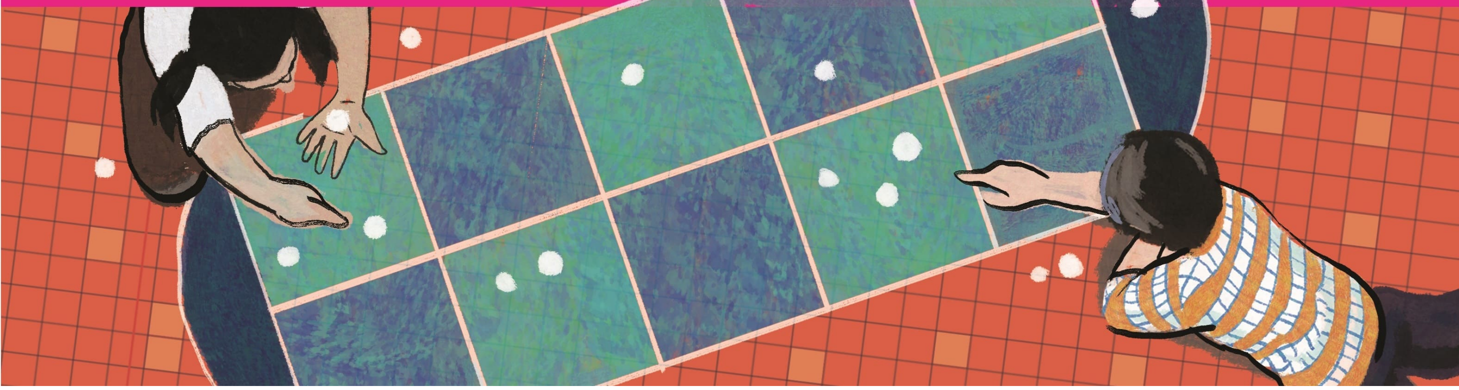
Park và Phạm đã bắt đầu áp dụng phương pháp của họ cho các bài toán khác. Họ đặc biệt quan tâm đến việc hiểu chính xác hơn khoảng cách giữa ngưỡng kỳ vọng và ngưỡng thực tế. Bằng cách chứng minh giả thuyết Kahn–Kalai, họ đã chỉ ra rằng khoảng cách này lớn nhất là một thừa số logarithm – nhưng đôi khi khoảng cách này là nhỏ hơn, hoặc không tồn tại. Hiện tại, không có một cơ chế rộng hơn để phân loại khi nào mỗi tình huống này có thể đúng; các nhà toán học phải tính ra theo từng trường hợp. Giờ đây, "chúng tôi nghĩ rằng với kỹ thuật hiệu quả mà chúng tôi có, chúng tôi hy vọng có thể ấn định các ngưỡng này chính xác hơn nhiều," Phạm nói.

Và chứng minh của họ có thể có các hệ quả khác nữa. "Giả thuyết Kahn–Kalai không hề là kết thúc của câu chuyện," Park nói.

Viện Toán học Clay (Clay Mathematics Institute) thông báo rằng Phạm Tuấn Huy đã được trao tặng Học bổng Nghiên cứu Clay (Clay Research Fellowship) năm 2023. Phạm Tuấn Huy sẽ nhận bằng tiến sĩ từ Đại học Stanford năm 2023, dưới sự hướng dẫn của Jacob Fox. Anh cũng được bổ nhiệm làm một Nghiên cứu viên Clay (Clay Research Fellow) trong 5 năm bắt đầu từ 01/07/2023.

Tiêu chí tuyển chọn chính của các Nghiên cứu viên Clay là chất lượng nghiên cứu vượt trội của ứng cử viên và lời hứa của ứng cử viên là sẽ trở thành một nhà toán học hàng đầu. Các Nghiên cứu viên Clay được tuyển dụng bởi Viện Toán học Clay, nhưng có thể làm việc ở bất kỳ nơi nào tại Mỹ, Châu Âu, hay một nơi khác trên thế giới.

Các Nghiên cứu viên Clay trước đây đã trở thành những nhà toán học hàng đầu, trong đó có nhiều nhà toán học được trao tặng Huy chương Fields như Akshay Venkatesh (2018), Artur Avila (2014), Elon Lindenstrauss (2010), Manjul Bhargava (2014), Maryam Mirzakhani (2014), Terence Tao (2006), June Huh (2022), James Maynard (2022), Peter Scholze (2018). Giáo sư Ngô Bảo Châu (Huy chương Fields 2010) được trao tặng Giải thưởng Nghiên cứu Clay (Clay Research Award) năm 2004.



DIỆN TÍCH TRÊN LƯỚI Ô VUÔNG
Phần II: Định lý Pick

NGÔ VĂN MINH, PHAN NGỌC MINH VÀ NGUYỄN THỊ NHUNG

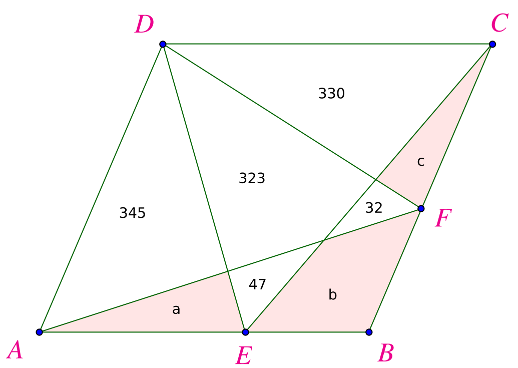
COUNTING IN TWO WAYS

NGHIA DOAN[1]

In this article, we show a few example problems that can be solved when using the counting in two ways method.

Example (Sum of areas). $ABCD$ is a parallelogram. E and F are points on AB and BC, respectively. Lines AF, CE, DE, and DF dissect the parallelogram into 8 regions, where some of them have known areas, as shown below in the diagram.

Find the sum of the areas $a+b+c$.



Solution. From the properties of the parallelogram $ABCD$, the following triangle pairs, with the same base and height, have the same area

$$\left.\begin{aligned}[AFB]&=[DFB]\\ [CEB]&=[DEB]\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}&[AFB]+[CEB]\\ &=[DFB]+[DEB]\\ &=[DEBF]\end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}&(a+47+b)+(c+32+b)\\ =&(323+47+b+32)\\ \Rightarrow &\, a+b+c=323.\end{aligned}$$

Example (How many knights are needed to protect King Anthony?). King Anthony went for hunting trip with his knights. At night, they stayed in one of the king's hunting lodges in the forest. In this house, there are nine rooms. The king slept in the central room. The knights stayed in the eight surrounding rooms such that in each direction north, south, east, west the total number of knights in the *three rooms* facing that direction should always be *nine*. *For example, the diagram below shows a possible case with each room has 3 knights. The letter K indicates the King staying in the central room.*

3	3	3
3	K	3
3	3	3

What would be the smallest number of knights were with the king? What would be the largest?

Solution. Let $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3$, and b_4 be the numbers of knights in each room as shown in the diagram. Let $S=a_1+a_2+a_3+a_4+b_1+b_2+b_3+b_4$, then

$$\begin{aligned}36=&(a_1+b_1+a_2)+(a_2+b_2+a_3)\\ &+(a_3+b_4+a_4)+(a_4+b_4+a_1)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S=36-(a_1+a_2+a_3+a_4)\\ S=\frac{1}{2}(36+(b_1+b_2+b_3+b_4))\end{cases}$$

a_1	b_1	a_2
b_4	K	b_2
a_4	b_3	a_3

With variables

[1] *Ottawa, Canada.*

Thus, the least value of S is 18, if $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0,$ and $a_1 = a_3 = 5, a_2 = a_4 = 4.$ The most value of S is 36, if $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0,$ and $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 9.$

Example (What are the family names of the sisters?). Four pairs of brother–sister share 32 cookies. For the sisters, Lan got one, Mai got two, Na got three, and Quynh got four cookies. Danny Tran took as many as his sister, Elvin Nguyen twice as many as his sister, Franklin Pham three times as his sister, and Williams Quach four times as many as his sister.

What are the family names of the girls?

Solution. Let $x, 2y, 3z,$ and $4w$ be the numbers of cookies that Danny Tran, Elvin Nguyen, Franklin Pham, and Williams Quach took. Their sisters took $x, y, z,$ and w cookies respectively. Therefore,

$$x + 2y + 3z + 4w + x + y + z + w = 32$$
$$\Rightarrow 2x + 3y + 4z + 5w = 32.$$

Note that x, y, z, w are a permutation of $1, 2, 3, 4,$ so $x + y + z + w = 10.$ Thus

$$-x + z + 2w = 32 - 3(x + y + z + w) = 2$$
$\Rightarrow x > z, x$ and z have the same parity
$\Rightarrow -x + z = -2 \Rightarrow w = 2$
$\Rightarrow x = 3, z = 1, y = 4.$

Now, Lan got one, Mai got two, Na got three, and Quynh got four cookies.

$x = 3,$ so the girl who took three cookies, Na, is the sister of Danny Tran, so she is Na Tran.

$y = 4,$ so the girl who took four cookies, Quynh, is the sister of Elvin Nguyen, so she is Quynh Nguyen.

$z = 1,$ so the girl who took one cookie, Lan, is the sister of Franklin Pham, so she is Lan Pham.

$w = 2,$ so the girl who took two cookies, Mai, is the sister of Williams Quach, so she is Mai Quach.

Hence, the girls's names are Na Tran, Quynh Nguyen, Lan Pham, and Mai Quach.

- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P681–P690: trước ngày 15/4/2023.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P681. (Mức B) Một số có bốn chữ số $\overline{abcd}$ được gọi là số "zig zag", nếu a, b, c, d đôi một khác nhau, và $a < b, b > c, c < d$ (chẳng hạn, 1204 là số "zig zag"). Hỏi có bao nhiêu số "zig zag" có chữ số hàng nghìn là 7?

Trích Đề thi VMTC 2022–Vòng 1–Khối lớp 6

P682. (Mức B) Cho 100 số hữu tỷ $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ thoả mãn $a_1 + a_4 = 4$ và

$$\frac{a_1 + a_2}{1} = \frac{a_2 + a_3}{2} = \dots = \frac{a_{100} + a_1}{100}$$

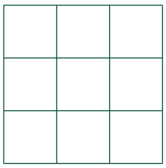
Tính tổng $a_1 + \dots + a_{100}$.

Trích Đề thi VMTC 2022–Vòng 1–Khối lớp 7

P683. (Mức B) Ký hiệu N là tích của 5 số nguyên tố đầu tiên. Hỏi, có bao nhiêu số nguyên dương d thoả mãn N^2 chia hết cho d, nhưng N không chia hết cho d?

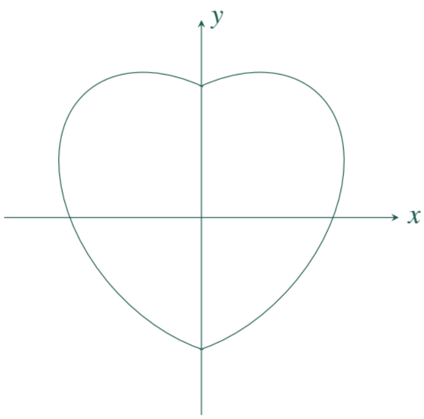
Trích Đề thi VMTC 2022–Vòng 1– Khối lớp 8

P684. (Mức B) Bạn Tùng muốn tô 9 ô vuông con của bảng ô vuông 3×3 bởi 5 màu xanh, đỏ, vàng, nâu, tím, sao cho mỗi ô được tô bởi một màu và hai ô có cạnh chung có màu khác nhau. Hỏi Tùng có tất cả bao nhiêu phương án tô?



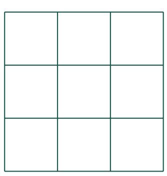
Trích Đề thi VMTC 2022–Vòng 1–Khối lớp 8

P685. (Mức B) Tập các điểm trong mặt phẳng toạ độ Oxy, có toạ độ thoả mãn phương trình $\left(x^2+y^2-4\right)^3=x^2y^3$ là một đường "trái tim" như dưới đây. Hãy xác định tất cả các điểm nguyên thuộc đường đó?
(*Điểm nguyên là điểm có cả hoành độ và tung độ đều là các số nguyên*).



Trích Đề thi VMTC 2022–Vòng 1–Khối lớp 9

P686. (Mức B) Một chiếc bánh được chia thành 9 miếng như hình vẽ và chú chuột lần lượt chọn từng miếng trong 9 miếng đó để ăn. Miếng thứ nhất chú chọn là một trong 4 miếng góc. Từ miếng thứ hai, miếng được chọn bao giờ cũng nằm kề (chung cạnh) với miếng vừa được chọn trước đó. Hỏi chú chuột có bao nhiêu cách chọn đủ 9 miếng?



Trích Đề thi VMTC 2022–Vòng 1–Khối lớp 9

P687. (Mức A) Tìm tất cả các cặp số thực $(p;q)$ thoả mãn: phương trình $x^3-px+q=0$ có ba nghiệm thực a,b,c thoả mãn $a<b<c$ và

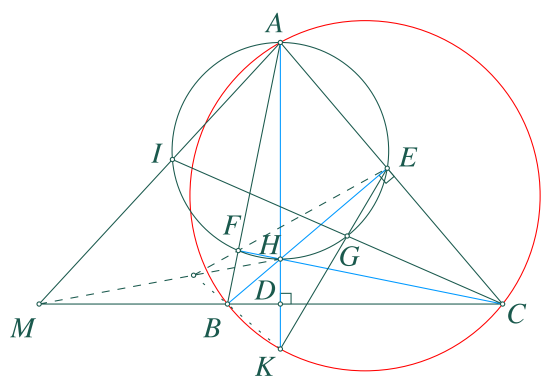
$$a^2-b=b^2-c=c^2-a.$$

Nguyễn Anh Vũ, Bình Định

P688. (Mức A) Cho số nguyên tố p. Người ta cho máy tính chạy một chương trình liệt kê các số nguyên tố theo quy tắc sau: Ban đầu máy tính hiển thị số p. Sau đó, cứ sau mỗi giây, máy tính hiển thị thêm một số nguyên tố mới, khác với các số đã có trước đó, và sao cho hai số được hiển thị ở hai giây liên tiếp sai khác nhau không vượt quá 2023. Chứng minh rằng, sau một thời gian nhất định, chương trình sẽ dừng lại.

Trần Nam Hải, Nam Định

P689. (Mức A) Cho tam giác nhọn ABC, với $AB<AC$, nội tiếp (O) và có hai đường cao BE,CF cắt nhau tại H. Đường thẳng AH cắt (O) tại điểm thứ hai K. Đường thẳng KE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm thứ hai G; đường thẳng CG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm thứ hai I. Các đường thẳng AI và BC cắt nhau tại M. Chứng minh rằng các đường thẳng BC,MH,BK đồng quy.



Nguyễn Khang, Cần Thơ

P690. (Mức A) Có 20 tấm bìa, đánh số từ 1 đến 20. Trên tấm bìa thứ m có viết một số thực a_m sao cho $[a_m]=m$. Chứng minh rằng có thể chọn ra 4 tấm bìa sao cho tổng các số trên hai tấm bìa đầu tiên và tổng các số trên hai tấm bìa còn lại có sai khác nhỏ hơn $\frac{1}{6}$.

Trần Nam Dũng, Tp. Hồ Chí Minh (st)

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P651. (Mức B) Có hai chiếc hộp, mỗi hộp đều chứa các viên bi khác màu. Số viên bi đỏ ở hộp thứ nhất bằng $\frac{4}{15}$ số viên bi trong hộp đó. Tổng số viên bi đỏ ở hai hộp bằng $\frac{11}{25}$ tổng số viên bi của hai hộp. Hỏi, trong hai hộp có ít nhất bao nhiêu viên bi đỏ? Biết rằng, hộp thứ hai chứa 200 viên bi.

Lời giải (*của người chấm bài*).

Gọi a (viên) là số viên bi đỏ có trong hộp thứ nhất, và gọi s (viên) là tổng số viên bi đỏ của cả hai hộp; ta có, $a, s \in \mathbb{N}^*$. Theo bài ra, ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của s.

Vì số viên bi đỏ ở hộp thứ nhất bằng $\frac{4}{15}$ số viên bi trong hộp đó, nên số viên bi có trong hộp thứ nhất bằng $\frac{15a}{4}$. Do đó, theo giả thiết về tổng số viên bi đỏ của cả hai hộp, ta có:

$$s = \frac{11}{25}\left(\frac{15a}{4} + 200\right) = \frac{33a}{20} + 88. \qquad (1)$$

Từ đó, do $s \in \mathbb{N}^*$ và $a > 0$, suy ra $\frac{33a}{20} \in \mathbb{N}^*$. Vì thế, $33a$ chia hết cho 20; mà $(33, 20) = 1$, nên a chia hết cho 20. Suy ra, $a \geq 20$ (do $a \in \mathbb{N}^*$). Vì vậy, từ (1) ta có:

$$s \geq \frac{33 \cdot 20}{20} + 88 = 121. \qquad (2)$$

Tiếp theo, xét hai hộp bi, mà hộp thứ nhất chứa 75 viên, trong đó có 20 viên bi đỏ, và hộp thứ hai chứa 200 viên, trong đó có 101 viên bi đỏ, ta có:

$$20 = \frac{4}{15} \cdot 75 \text{ và } 20 + 101 = \frac{11}{25}(75 + 200).$$

Như vậy, hai hộp bi nói trên thỏa mãn tất cả các giả thiết của đề bài, và có tổng số viên bi đỏ ở cả hai hộp bằng 121 viên. (3)

Từ (2) và (3) suy ra, giá trị nhỏ nhất của s là 121. Nói một cách khác, trong hai hộp bi, thỏa mãn các giả thiết của đề bài, có ít nhất 121 viên bi đỏ.

Bình luận và Nhận xét

Rất tiếc, tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều không được coi là lời giải đúng, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau:

– Khẳng định giá trị nhỏ nhất của s (theo ký hiệu trong Lời giải trên) là 121 *ngay sau khi* chỉ mới chứng minh được $s \geq 121$;

(*Lỗi trên đây đã được nhắc nhở nhiều lần trong các số trước đây của Tạp chí!*)

– Giải một bài toán khác, thay vì giải bài đã ra. Cụ thể, các bạn mắc lỗi này đã giải một trong hai bài toán dưới đây:

+ Bài toán 1: Với hai hộp bi thỏa mãn các giả thiết của bài đã ra, hãy tìm số viên bi đỏ nhỏ nhất có thể trong mỗi hộp.

+ Bài toán 2: Là bài toán nhận được từ bài đã ra, bằng cách thay giả thiết "tổng số viên bi đỏ ở hai hộp bằng $\frac{11}{25}$ tổng số viên bi của hai hộp" bởi giả thiết "số viên bi đỏ ở hộp thứ hai bằng $\frac{11}{25}$ tổng số viên bi của hai hộp".

Lê Huy

P652. (Mức B) Chứng minh rằng, với hai số nguyên dương a, b, ta có thể tìm được số nguyên dương c, sao cho $a^2 + b^2 + c^2$ là một số chính phương, khi và chỉ khi ab là một số chẵn.

Lời giải (*dựa theo các lời giải đúng, mà Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).

1. *Chứng minh "khi".*

Giả sử a, b là hai số nguyên dương có tích là một số chẵn. Ta cần chứng minh có thể tìm được số nguyên dương c, sao cho $a^2 + b^2 + c^2$ là một số chính phương.

Vì ab là một số chẵn nên trong hai số nguyên dương a, b có ít nhất một số chẵn. Do đó, xảy ra một trong hai trường hợp sau:

◇ *Trường hợp* 1: Trong hai số a, b có đúng một số chẵn.

Khi đó, $a^2 + b^2$ là một số nguyên dương lẻ.

Vì thế, tồn tại số nguyên dương m, sao cho

$$a^2+b^2=2m+1.$$

Chọn $c=m$, ta có c là số nguyên dương, và

$$a^2+b^2+c^2=2m+1+m^2=(m+1)^2,$$

là một số chính phương.

⋄ *Trường hợp* 2: Cả hai số a, b đều là số chẵn. Khi đó, a^2, b^2 là các số chẵn chia hết cho 4. Suy ra, a^2+b^2 là một số nguyên dương chẵn chia hết cho 4, và lớn hơn hoặc bằng 8. Vì thế, tồn tại số nguyên dương $k \geq 2$, sao cho

$$a^2+b^2=4k.$$

Chọn $c=k-1$, ta có c là số nguyên dương, và

$$a^2+b^2+c^2=4k+(k-1)^2=(k+1)^2,$$

là một số chính phương.

Hiển nhiên, kết quả xét hai trường hợp trên cho ta điều cần chứng minh.

2. *Chứng minh "chỉ khi".*

Giả sử a, b là hai số nguyên dương, sao cho có số nguyên dương c, để $a^2+b^2+c^2$ là một số chính phương. Ta cần chứng minh ab là một số chẵn.

Giả sử ab là một số lẻ. (1)

Khi đó, cả hai số a, b đều là số lẻ. Do đó, số dư trong các phép chia a^2, b^2 cho 4 đều là 1. Suy ra, số dư trong phép chia a^2+b^2 cho 4 là 2. Từ đây, do số dư trong phép chia c^2 cho 4 là 0 hoặc 1, nên số dư trong phép chia $a^2+b^2+c^2$ cho 4 sẽ là 2 hoặc 3. (2)

Mặt khác, do $a^2+b^2+c^2$ là một số chính phương, nên số dư trong phép chia $a^2+b^2+c^2$ cho 4 chỉ có thể là 0 hoặc 1, mâu thuẫn với (2).

Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ giả sử (1) là sai. Vì thế, ta có điều cần chứng minh.

Bình luận và Nhận xét

Rất tiếc, có hơn nửa số lời giải, trong số tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, là lời giải không đúng, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau:

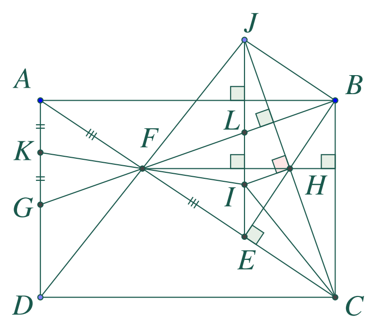
– Ở phần chứng minh "khi", chưa chứng minh số c được chọn là số dương;

– Chỉ mới chứng minh hoặc "khi", hoặc "chỉ khi".

Lưu Thị Thanh Hà

P653. (Mức B) Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E là hình chiếu vuông góc của điểm B trên đường thẳng AC; F là trung điểm của đoạn AE. Các đường thẳng BF, AD cắt nhau tại G. Gọi K là trung điểm của AG. Chứng minh rằng, $DK+KF>CF$.

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Minh Tuấn, lớp 9B, trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, Tp. Hà Nội*)**.**



Gọi I, J tương ứng là điểm đối xứng với K, D qua F; ta có:

+ Đường thẳng JI đối xứng với đường thẳng DK qua F; (1)

+ $JI=DK$. (2)

Do (1) nên gọi L là giao điểm của các đường thẳng JI và GF, ta có L đối xứng với G qua F. Mà E đối xứng với A qua F (do giả thiết F là trung điểm của AE) nên đoạn thẳng EL đối xứng với đoạn thẳng AG qua F. Do đó, từ K là trung điểm của AG (giả thiết) suy ra I là trung điểm của EL. (3)

Do D, A tương ứng đối xứng với J, E qua F, nên $AD \parallel JE$ và $AD=JE$. Mà $BC \parallel AD$ và $BC=AD$ (do $ABCD$ là hình chữ nhật), nên $BC \parallel JE$ và $BC=JE$. Do đó, $JBCE$ là hình bình hành. Vì thế, gọi H là giao điểm của BE và JC, ta có H là trung điểm của BE và của CJ. Suy ra, IH là đường trung bình của tam giác LEB (do (3)), và FH là đường trung bình của tam giác AEB. Do đó

$$IH \parallel FB, \tag{4}$$

và

$$FH \parallel AB. \tag{5}$$

Từ (5), do $AB \perp BC$, suy ra $FH \perp BC$. Mà $BH \perp FC$ (do giả thiết E là hình chiếu vuông góc của B trên AC) nên H là trực tâm của tam giác BFC. Do đó, $CH \perp FB$, hay $CJ \perp FB$. (6)

Từ (4) và (6), suy ra $IH \perp CJ$. Mà H là trung điểm của CJ (theo chứng minh trên) nên JIC là tam giác cân tại I. Vì thế, $IJ = IC$. Kết hợp với (2), suy ra $DK = IC$. Do vậy, với lưu ý $KF = IF$, ta có:

$$DK + KF = IC + IF > CF.$$

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Lời giải của bạn *Nguyễn Minh Tuấn* là lời giải duy nhất Tạp chí nhận được từ bạn đọc.

Hạ Vũ Anh

P654. (Mức B) Cho đa thức

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5.$$

Tính tổng

$$S = f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + f\left(\frac{3}{2023}\right) + \cdots + f\left(\frac{2022}{2023}\right).$$

Lời giải.

• **Cách 1** (*dựa theo nhiều lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).

Trước hết, ta nhắc lại (không chứng minh) các công thức quen thuộc tính tổng bậc nhất, bậc hai và bậc ba của n số nguyên dương đầu tiên.

Với n là số nguyên dương tùy ý, ta có:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Tiếp theo, dễ thấy, ta có:

$$\begin{aligned} S &= f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + f\left(\frac{3}{2023}\right) \\ &\quad + \cdots + f\left(\frac{2022}{2023}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2023^3} \cdot \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 2022^3\right) \\ &\quad - 3 \cdot \frac{1}{2023^2} \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2022^2\right) \\ &\quad + 4 \cdot \frac{1}{2023} \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 2022) \\ &\quad - 5 \cdot 2022. \end{aligned}$$

Do đó, áp dụng các công thức nêu trên cho $n = 2022$, ta được:

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \frac{1}{2023^3} \cdot \frac{2022^2 \cdot 2023^2}{4} \\ &\quad - 3 \cdot \frac{1}{2023^2} \cdot \frac{2022 \cdot 2023 \cdot (2 \cdot 2022 + 1)}{6} \\ &\quad + 4 \cdot \frac{1}{2023} \cdot \frac{2022 \cdot 2023}{2} - 5 \cdot 2022 \\ &= \frac{1011 \cdot 2022}{2023} - \frac{1011 \cdot 4045}{2023} \\ &\quad + 2 \cdot 2022 - 5 \cdot 2022 \\ &= -1011 + 4 \cdot 1011 - 10 \cdot 1011 = -7077. \end{aligned}$$

• **Cách 2** (*dựa theo nhiều lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).

Trước hết, nhận thấy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2023} + \frac{2022}{2023} &= \frac{2}{2023} + \frac{2021}{2023} \\ &= \cdots = \frac{1011}{2023} + \frac{1012}{2023} = 1. \end{aligned}$$

Tiếp theo, với a, b là hai số thực tùy ý có tổng bằng 1, ta có:

$$\begin{aligned} & f(a) + f(b) \\ &= 2\left(a^3 + b^3\right) - 3\left(a^2 + b^2\right) + 4(a+b) - 10 \\ &= 2\left((a+b)^3 - 3ab(a+b)\right) \\ &\quad - 3\left((a+b)^2 - 2ab\right) + 4(a+b) - 10 \\ &= 2(1 - 3ab) - 3(1 - 2ab) + 4 - 10 \\ &\quad (\text{do } a + b = 1) \\ &= -7. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{1}{2023}\right)+f\left(\frac{2022}{2023}\right)\\&=f\left(\frac{2}{2023}\right)+f\left(\frac{2021}{2023}\right)\\&=\cdots=f\left(\frac{1011}{2023}\right)+f\left(\frac{1012}{2023}\right)=-7.\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}S=&\left(f\left(\frac{1}{2023}\right)+f\left(\frac{2022}{2023}\right)\right)\\&+\left(f\left(\frac{2}{2023}\right)+f\left(\frac{2021}{2023}\right)\right)\\&+\cdots+\left(f\left(\frac{1011}{2023}\right)+f\left(\frac{1012}{2023}\right)\right)\\=&(-7)\cdot 1011=-7077.\end{aligned}$$

Bình luận và Nhận xét

1. Với các bạn đọc chưa biết các công thức tính tổng đã nêu ở Cách 1, các bạn có thể dễ dàng chứng minh các công thức đó bằng phương pháp quy nạp theo n.

2. Cách 1 là một cách giải rất tự nhiên, và các tính toán trên các số hoàn toàn đơn giản.

3. Tạp chí đã nhận được rất nhiều lời giải, từ bạn đọc; tất cả các lời giải này đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Lê Huy

P655. (Mức B) Tại mỗi đỉnh của một đa giác đều 2023 cạnh, người ta ghi một số thực, sao cho các số được ghi đôi một khác nhau. Chứng minh rằng, có thể tìm được một tam giác ABC cân tại A, với A, B, C là các đỉnh của đa giác đều đã cho, sao cho số được ghi tại đỉnh A nằm giữa hai số được ghi tại đỉnh B và đỉnh C.

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Phùng Việt Cường, lớp 11 Toán 2, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định*).

Do các số được ghi đôi một khác nhau nên trong các số đó, có đúng một số lớn nhất và có đúng một số nhỏ nhất. Gọi hai đỉnh, mà tại đó được ghi hai số này, là B, C.

Vì đa giác đã cho là đa giác đều, nên có một đường tròn đi qua tất cả 2023 đỉnh của đa giác đó; gọi đường tròn này là (T).

Do 2023 là một số lẻ, nên trong hai cung tròn của (T), được tạo ra bởi hai đỉnh B, C, có một cung tròn chứa một số lẻ đỉnh. Giả sử số đỉnh thuộc cung tròn này (kể cả hai đỉnh B, C) là $2k+1$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Vì tất cả các cạnh của đa giác bằng nhau (do đa giác là đa giác đều), nên $2k+1$ đỉnh đó sẽ tạo ra $2k$ cung tròn (của (T)) nằm liên tiếp nhau, có độ dài bằng nhau, và mỗi cung tròn đều có hai đầu mút là hai đỉnh kề nhau. Vì thế, trong $2k+1$ đỉnh đó, có một đỉnh cách đều hai đỉnh B, C; gọi đỉnh này là A, ta có tam giác ABC thỏa mãn tất cả các yêu cầu của đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Lời giải trên cho thấy, bài đã ra là một dạng phát biểu khác của một kết quả kinh điển, liên quan đến đa giác đều: "*Với hai đỉnh phân biệt tùy ý của một đa giác đều có một số lẻ đỉnh, luôn có đúng một đỉnh của đa giác đó cách đều hai đỉnh ấy.*". Kết quả này là một hệ quả hiển nhiên của tính chất cơ bản dưới đây của đa giác đều:

"*Đường trung trực của đoạn thẳng nối hai đỉnh tùy ý của một đa giác đều là một trục đối xứng của đa giác ấy.*"

2. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, chỉ có hai lời giải đúng; các lời giải còn lại là lời giải sai, do người giải bài đã phủ định sai khẳng định cần chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Nguyễn Khắc Minh

P656. (Mức B) Xét 2022 số thực $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{2022}$, thỏa mãn: tổng các số dương bằng $\frac{1}{2}$ và tổng các số âm bằng $-\frac{1}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất có thể của $M = x_{999} - x_{32}$.

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Minh Tuấn, lớp 9B, trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, Tp. Hà Nội*).

Từ giả thiết "tổng các số dương bằng $\frac{1}{2}$ và tổng các số âm bằng $-\frac{1}{2}$", hiển nhiên suy ra, tổng của k số tùy ý ($1 \leq k \leq 2022$), trong 2022 số đã cho, không nhỏ hơn $-\frac{1}{2}$ và đồng thời, không vượt quá $\frac{1}{2}$.

Do đó, từ giả thiết $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{32}$, ta có

$$x_{32} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{32}}{32} \geq \frac{-\frac{1}{2}}{32} = -\frac{1}{64};$$

và từ giả thiết $x_{999} \leq x_{1000} \leq \cdots \leq x_{2022}$, ta có

$$x_{999} \leq \frac{x_{999} + x_{1000} + \cdots + x_{2022}}{1024} \leq \frac{\frac{1}{2}}{1024} = \frac{1}{2048}.$$

Suy ra

$$M = x_{999} - x_{32} \leq \frac{1}{2048} + \frac{1}{64} = \frac{33}{2048}.$$

Hơn nữa, dễ thấy, 2022 số thực

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{32} = -\frac{1}{64}$$

$$x_{33} = x_{34} = \cdots = x_{998} = 0$$

$$x_{999} = x_{1000} = \cdots = x_{2022} = \frac{1}{2048}$$

thỏa mãn tất cả các giả thiết của đề bài, và có

$$M = x_{999} - x_{32} = \frac{33}{2048}.$$

Vì vậy, giá trị lớn nhất của M bằng $\frac{33}{2048}$.

Bình luận và Nhận xét

Trong số tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, chỉ có lời giải của bạn *Nguyễn Minh Tuấn* là lời giải đúng. Ở các lời giải còn lại, người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau đây:

– Khẳng định giá trị lớn nhất của M bằng $\frac{33}{2048}$ *ngay sau khi* chỉ mới chứng minh được $M \leq \frac{33}{2048}$;

– Lập luận luẩn quẩn, dùng điều muốn chứng minh để chứng minh chính điều đó;

– Lập luận mang tính cảm tính.

Hà Thanh

P657. (Mức *A*) Cho a, b là các số thực phân biệt thuộc đoạn $[0;\pi]$, thỏa mãn:

$$e^a \cdot \sin a = e^b \cdot \sin b.$$

Chứng minh rằng, $\pi \leq a + b \leq \frac{3\pi}{2}$.

Lời giải (*dựa theo ý giải của một bạn học sinh lớp* 9 *THCS*).

Không mất tính tổng quát, giả sử

$$0 \leq a < b \leq \pi.$$

1. *Chứng minh* $a + b \geq \pi$. (1)

◇ Nếu $a \geq \frac{\pi}{2}$ thì $b > \frac{\pi}{2}$; do đó, $a + b > \pi$.

◇ Nếu $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ thì $\sin a \geq 0$. Do đó, từ $e^a < b^b$ (vì $a < b$) và hệ thức của đề bài, ta có:

$$e^b \cdot \sin b = e^a \cdot \sin a \leq e^b \cdot \sin a.$$

Suy ra, $\sin b \leq \sin a$ (do $e^b > 0$). (2)

Vì $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ và $\pi \geq b > a$, nên từ (2) ta có $\pi \geq b \geq \pi - a$; do đó, $a + b \geq \pi$.

Bất đẳng thức (1) được chứng minh.

2. Chứng minh $a + b \leq \frac{3\pi}{2}$. (3)

◇ Nếu $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ thì $a + b \leq \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$.

◇ Xét $\frac{\pi}{2} < a < \pi$.

Từ hệ thức của đề bài, ta có:

$$\frac{\sin a}{e^b} = \frac{\sin b}{e^a} = -\frac{\sin a - \sin b}{e^a - e^b}. \quad (4)$$

Vì các hàm số $y = \sin x, y = e^x$ liên tục trên $[a;b]$, có đạo hàm trên $(a;b)$ và $e^a \neq e^b$, nên theo định lý trung bình Cauchy, tồn tại số thực $c \in (a;b)$ sao cho

$$\frac{\cos c}{e^c} = \frac{\sin a - \sin b}{e^a - e^b}. \quad (5)$$

Từ (4) và (5), suy ra

$$\frac{\sin a}{e^b} = \frac{\sin b}{e^a} = -\frac{\cos c}{e^c}. \quad (6)$$

Xét hàm số $f(x) = -\frac{\cos x}{e^x}$ trên $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$. Ta có:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x}(\sin x + \cos x) \\ &= \sqrt{2}\cdot e^{-x}\cdot \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right). \quad (7) \end{aligned}$$

Do $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$, nên $\frac{3\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$. Vì thế, từ (7) suy ra, trên $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$, ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4},$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} < x \leq \pi,$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$$

Do đó, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$, và nghịch biến trên $\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$. (8)

Xảy ra một trong hai trường hợp sau:

• *Trường hợp* 1: $\frac{\pi}{2} < a < c \leq \frac{3\pi}{4}$.

Khi đó, theo (8), ta có:

$$-\frac{\cos c}{e^c} > -\frac{\cos a}{e^a}.$$

Từ bất đẳng thức vừa nêu trên và (6), suy ra $\sin b > -\cos a$; do đó

$$\sin(\pi - b) > \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right). \quad (9)$$

Vì $\frac{\pi}{2} < a < b \leq \pi$ nên $0 \leq \pi - b < \frac{\pi}{2}$ và $0 < a - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$. Do đó, từ (9) suy ra

$$\pi - b > a - \frac{\pi}{2};$$

vì thế, $a + b < \frac{3\pi}{2}$.

• *Trường hợp* 2: $\frac{3\pi}{4} < c < b \leq \pi$.

Khi đó, theo (8), ta có:

$$-\frac{\cos c}{e^c} > -\frac{\cos b}{e^b}.$$

Từ bất đẳng thức vừa nêu trên và (6), suy ra $\sin a > -\cos b$; do đó

$$\sin(\pi - a) > \sin\left(b - \frac{\pi}{2}\right). \quad (10)$$

Vì $\frac{\pi}{2} < a < b \leq \pi$ nên $0 < \pi - a < \frac{\pi}{2}$ và $0 < b - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$. Do đó, từ (10) suy ra

$$\pi - a > b - \frac{\pi}{2};$$

vì thế, $a + b < \frac{3\pi}{2}$.

Bất đẳng thức (3) được chứng minh.

Vậy, ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Để thuận tiện cho việc theo dõi Lời giải trên của đông đảo đối tượng bạn đọc, chúng tôi nhắc lại dưới đây định lý trung bình Cauchy.

Định lý trung bình Cauchy. Cho a, b là hai số thực tùy ý, với $a < b$. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định trên $[a;b]$. Khi đó, nếu $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a;b]$, có đạo hàm trên $(a;b)$ thì tồn tại số thực $c \in (a;b)$, sao cho

$$f'(c)\cdot(g(a) - g(b)) = g'(c)\cdot(f(a) - f(b)).$$

2. Qua lời giải trên, dễ thấy, không thể xảy ra dấu đẳng thức (dấu "$=$") ở các bất đẳng thức của đề bài.

3. Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có hai lời giải sai, và một lời giải không được coi là lời giải hoàn chỉnh, do trong lời giải có những lỗi "chính tả" không thể châm chước.

Trần Nam Dũng

P658. (Mức A) Cho số nguyên dương n. Giả sử $P(x)$ là một đa thức hệ số thực, có bậc nhỏ hơn n, sao cho đa thức $Q(x) = x^n \cdot P(x) + 1$ nhận $x = 2022$ làm một nghiệm, với bội không nhỏ hơn n. Tính giá trị $P(1011)$.

Lời giải (*dựa theo ý giải của tác giả bài toán*).

Do $\deg P < n$ nên từ hệ thức của đề bài suy ra $\deg Q < 2n$. (1)

Do $Q(x)$ nhận $x = 2022$ làm một nghiệm, với bội không nhỏ hơn n, nên

$$Q(x) = (x - 2022)^n \cdot R(x), \quad (2)$$

trong đó, $R(x)$ là một đa thức với hệ số thực.

Do (1) nên $\deg R < n$. (3)

Từ (2) và hệ thức của đề bài, suy ra

$$x^n \cdot P(x) + 1 = (x-2022)^n \cdot R(x). \quad (4)$$

Do đó

$$(-x+2022)^n \cdot P(-x+2022) + 1 = (-1)^n \cdot x^n \cdot R(-x+2022). \quad (5)$$

Từ (4) và (5), suy ra

$$x^n \cdot P(x) - (-x+2022)^n \cdot P(-x+2022) = (x-2022)^n \cdot R(x) - (-1)^n \cdot x^n \cdot R(-x+2022).$$

Do đó

$$x^n \cdot (P(x) + (-1)^n \cdot R(-x+2022)) = (x-2022)^n \times (R(x) + (-1)^n \cdot P(-x+2022)). \quad (6)$$

Vì $R(x) + (-1)^n \cdot P(-x+2022)$ là một đa thức với hệ số thực, nên từ (6) suy ra

$$x^n \cdot (P(x) + (-1)^n \cdot R(-x+2022)) \vdots (x-2022)^n.$$

Mà $(x^n, (x-2022)^n) = 1$ nên

$$P(x) + (-1)^n \cdot R(-x+2022) \vdots (x-2022)^n.$$

Do đó, $x = 2022$ là nghiệm, với bội không nhỏ hơn n, của đa thức

$$T(x) = P(x) + (-1)^n \cdot R(-x+2022).$$

Mà $\deg T < n$ (suy ra từ (3) và giả thiết $\deg P < n$), nên $T(x) \equiv 0$, hay

$$P(x) = (-1)^{n+1} \cdot R(-x+2022).$$

Do đó, $P(1011) = (-1)^{n+1} \cdot R(1011)$. (7)

Trong (4), cho $x = 1011$, ta được:

$$1011^n \cdot P(1011) + 1 = (-1)^n \cdot 1011^n \cdot R(1011) = -1011^n \cdot P(1011) \quad (\text{do } (7)).$$

Vì vậy, $P(1011) = -\dfrac{1}{2 \cdot 1011^n}$.

Bình luận và Nhận xét

1. Bài đã ra là một bài toán nhẹ nhàng, cơ bản về đa thức một biến.

2. Rất tiếc, cho tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí vẫn chưa nhận được lời giải nào từ bạn đọc.

Lưu Thị Thanh Hà

P659. (Mức *A*) Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC, lấy điểm P tùy ý, khác B, C, và trung điểm của BC. Qua P, kẻ hai đường thẳng m, n, đối xứng với nhau qua đường thẳng BC. Đường thẳng m cắt các đường thẳng AB, AC, tương ứng, tại E, N. Đường thẳng n cắt các đường thẳng AB, AC, tương ứng, tại M, F. Chứng minh rằng, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi ba đường thẳng đôi một cắt nhau BC, MN, EF.

Lời giải (*của người chấm bài*).

Trước hết, ta nhắc lại (không chứng minh) hai kết quả quen biết sau:

Bổ đề 1. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Qua B, kẻ một đường thẳng tùy ý, cắt lại (O_1) ở M, và cắt lại (O_2) ở N. Khi đó, AMN và AO_1O_2 là hai tam giác đồng dạng cùng hướng.

Bổ đề 2 (Định lý Miquel). Cho tam giác ABC. Trên các đường thẳng BC, CA, AB, tương ứng, lấy các điểm D, E, F, không trùng với các đỉnh của tam giác đã cho. Khi đó, ba đường tròn (AEF), (BFD), (CDE) cùng đi qua một điểm. Hơn nữa, nếu D, E, F thẳng hàng thì điểm đó nằm trên đường tròn (ABC).

Trở lại bài toán.

Do tam giác ABC cân tại A, và hai đường thẳng m, n đối xứng với nhau qua BC, nên

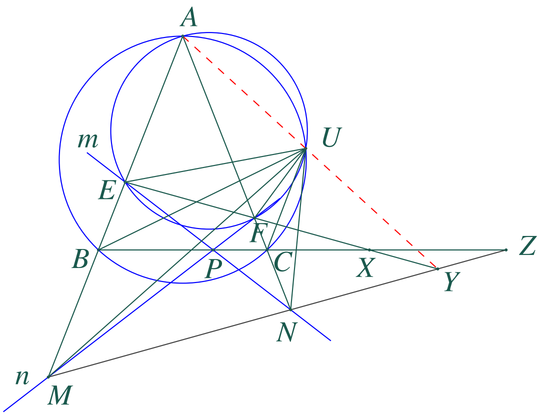
$$\begin{aligned}(EM;EN) &\equiv (AB;BC) + (BC;EN)\\ &\equiv (BC;AC) + (MF;BC)\\ &\equiv (MF;AC)\\ &\equiv (FM;FN) \pmod{\pi}, \quad (1)\end{aligned}$$

$$\Delta PBE \sim \Delta PCF \text{ và } \Delta PBM \sim \Delta PCN. \quad (2)$$

Từ (1) suy ra, bốn điểm E, F, M, N cùng thuộc một đường tròn. (3)

Từ (2) suy ra

$$\frac{PE}{PB} = \frac{PF}{PC} \text{ và } \frac{PB}{PM} = \frac{PC}{PN};$$



Hình 1.

do đó

$$\frac{PE}{PM} = \frac{PE}{PB} \cdot \frac{PB}{PM} = \frac{PF}{PC} \cdot \frac{PC}{PN} = \frac{PF}{PN}. \quad (4)$$

Do m, n đối xứng với nhau qua BC, nên PB là phân giác của góc EPM và PC là phân giác của góc FPN. Do đó

$$\frac{BE}{BM} = \frac{PE}{PM} \text{ và } \frac{CF}{CN} = \frac{PF}{PN}. \quad (5)$$

Từ (4) và (5), suy ra

$$\frac{BE}{BM} = \frac{CF}{CN};$$

do đó, $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{BM}{CN}$. (6)

Gọi Z là giao điểm của hai đường thẳng BC, MN; gọi X, Y, tương ứng, là giao điểm của đường thẳng EF và các đường thẳng BC, MN. Gọi U là giao điểm thứ hai, khác A, của hai đường tròn (ABC) và (AEF). (Xem Hình 1.)

Từ (1) và tính đối xứng qua BC của hai đường thẳng EN, MF, ta có:

$$\begin{aligned}(XY;XZ) &\equiv (EF;BC) \equiv (EF;EN) + (EN;BC)\\ &\equiv (MF;MN) + (BC;MF)\\ &\equiv (BC;MN) \equiv (XZ;YZ) \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Do đó, tam giác XYZ cân tại Y. (7)

Áp dụng Bổ đề 1 cho hai đường tròn (ABC), (AEF), ta được, UBE và UCF là hai tam giác đồng dạng cùng hướng. Do đó

$$\begin{aligned}(BU;BM) &\equiv (BU;BE) \equiv (CU;CF)\\ &\equiv (CU;CN) \pmod{\pi}, \quad (8)\end{aligned}$$

$$\frac{UB}{UC} = \frac{BE}{CF}. \quad (9)$$

Từ (6) và (9), suy ra

$$\frac{UB}{UC} = \frac{BM}{CN}. \quad (10)$$

Do (8) và (10), nên tam giác UBM đồng dạng cùng hướng với tam giác UCN. Suy ra

$$\begin{aligned}(UM;UN) &\equiv (UM;UB) + (UB;UN)\\ &\equiv (UN;UC) + (UB;UN)\\ &\equiv (UB;UC) \equiv (AB;AC)\\ &\equiv (AM;AN) \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Do đó, U thuộc đường tròn (AMN).

Áp dụng Bổ đề 2 cho tam giác AMN với ba điểm thẳng hàng $Y \in MN, F \in NA, E \in AM$, ta được: ba đường tròn (AEF), (MYE), (NFY) cùng đi qua một điểm, và điểm này nằm trên đường tròn (AMN). Từ đây, do (AEF) và (AMN) chỉ có hai điểm chung, là A và U, mà (MYE), (NFY) không thể đi qua A, nên (MYE), (NFY) cùng đi qua U. (11)

Áp dụng Bổ đề 2 cho tam giác ABC với ba điểm thẳng hàng $X \in BC, F \in CA, E \in AB$, và bằng các lập luận tương tự trên, ta được: hai đường tròn (BXE), (CXF) cùng đi qua U. (12)

Từ (3) và (11), suy ra

$$\begin{aligned}(UA;UY) &\equiv (UA;UF) + (UF;UY)\\ &\equiv (EA;EF) + (NF;NY)\\ &\equiv (NM;NF) + (NF;NY)\\ &\equiv (MN;NY) \equiv 0 \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

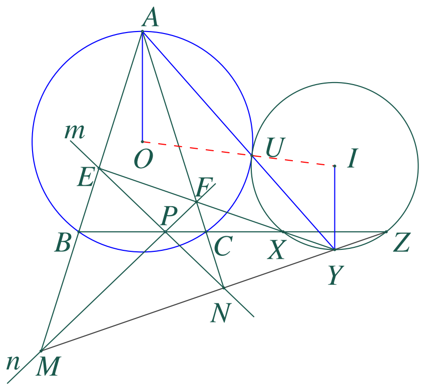
Do đó, A, U, Y thẳng hàng. (13)

Từ (11), (12), (13), suy ra

$$\begin{aligned}(XU;XZ) &\equiv (XU;XB) \equiv (EU;EB)\\ &\equiv (EU;EA) \equiv (FU;FA)\\ &\equiv (FU;FN) \equiv (YU;YN)\\ &\equiv (YU;YZ) \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Do đó, U thuộc đường tròn (XYZ); vì thế, U là điểm chung của (ABC) và (XYZ). (14)

Gọi O và I tương ứng là tâm của các đường tròn (ABC) và (XYZ). (Xem hình 2.)



Hình 2.

Do (7) và do tam giác ABC cân tại A, nên $AO \perp BC$ và $YI \perp BC$; suy ra, $AO \parallel YI$. Vì thế, với lưu ý OAU và IYU là các tam giác cân, tương ứng, tại O và I, ta có:

$$(UA;UO) \equiv (AU;AO) \equiv (YU;YI) \equiv (UY;UI) \pmod{\pi}. \quad (15)$$

Từ (13) và (15), suy ra O, U, I thẳng hàng. Từ đây và (14), suy ra (ABC) và (XYZ) tiếp xúc với nhau (tại U). Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Các Bổ đề 1 và 2 đã được đề cập trong rất nhiều tài liệu về Hình học sơ cấp.

2. Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có một lời giải sai, do người giải bài đã tính tỷ số độ dài đại số của hai vectơ không đồng trục.

Hạ Vũ Anh

P660. (Mức A) Cho số nguyên $n \geq 2$. Một giải bóng đá có n đội tham dự, đá theo thể thức vòng tròn một lượt (tức là, hai đội bất kỳ sẽ gặp nhau đúng một lần), tính điểm. Mỗi trận đấu, nếu hòa, hai đội đều được 1 điểm; nếu không hòa, đội thắng sẽ được 3 điểm, đội thua được 0 điểm. Sau khi kết thúc giải đấu, người ta nhận thấy điểm số của các đội không đồng thời bằng nhau. Các đội được xếp hạng theo điểm, từ cao xuống thấp (các đội bằng điểm nhau được xếp cùng một hạng). Xét số điểm chênh lệch nhỏ nhất của hai đội xếp thứ hạng liền nhau. Hỏi số điểm này tối đa có thể bằng bao nhiêu?

Lời giải (*của người chấm bài*).

Quy ước, gọi điểm số của các đội cùng hạng là điểm số của hạng đó.

Do điểm số của các đội không đồng thời bằng nhau, nên số hạng của giải đấu không nhỏ hơn 2.

Xét hai hạng liền nhau tùy ý, và giả sử hai hạng này có điểm số là p, q, với $p > q$.

Phân chia n đội bóng thành hai nhóm: Nhóm 1 gồm tất cả các đội có điểm số không nhỏ hơn p, và Nhóm 2 gồm tất cả các đội còn lại.

Giả sử nhóm 1 có k đội ($k \in \mathbb{N}^*$); khi đó, nhóm 2 sẽ có $n-k$ đội.

Gọi S_1 là tổng điểm của tất cả các đội thuộc nhóm 1, và S_2 là tổng điểm của tất cả các đội thuộc nhóm 2.

Hiển nhiên có $S_1 \geq kp$. (1)

Do hai hạng được xét là hai hạng liền nhau, nên số điểm của mỗi đội thuộc nhóm 2 đều không vượt quá q; do đó, $S_2 \leq (n-k)q$. (2)

Từ cách tính điểm của giải đấu suy ra, tổng điểm ở mỗi trận đấu tối thiểu là 2, và tối đa là 3.

Vì thế, do hai đội tùy ý chỉ thi đấu với nhau đúng một trận, nên:

– Tổng số điểm mà tất cả các đội thuộc nhóm 1 thu được từ các trận thi đấu với nhau không vượt quá $3 \cdot \dfrac{k(k-1)}{2}$;

– Tổng số điểm mà tất cả các đội thuộc nhóm 1 thu được từ các trận thi đấu với các đội thuộc nhóm 2 không vượt quá $3 \cdot k(n-k)$;

– Tổng số điểm mà tất cả các đội thuộc nhóm 2 thu được từ các trận thi đấu với nhau không ít hơn

$$2 \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = (n-k)(n-k-1).$$

Do đó

$$S_1 \leq 3 \cdot \frac{k(k-1)}{2} + 3 \cdot k(n-k) = \frac{3}{2}k(2n-k-1); \quad (3)$$

$$S_2 \geq (n-k)(n-k-1). \qquad (4)$$

Từ (1) và (3), suy ra

$$kp \leq \frac{3}{2}k(2n-k-1);$$

do đó, $p \leq \frac{3}{2}(2n-k-1)$. (5)

Từ (2) và (4), suy ra

$$(n-k)q \geq (n-k)(n-k-1);$$

do đó, $q \geq n-k-1$. (6)

Từ (5) và (6), suy ra

$$\begin{aligned} p-q &\leq \frac{3}{2}(2n-k-1)-(n-k-1) \\ &= 2n-\frac{1}{2}(k+1) \leq 2n-1 \end{aligned}$$

(do $k \geq 1$).

Do hai hạng được xét là hai hạng liền nhau tùy ý, nên gọi m là số điểm chênh lệch nhỏ nhất của hai đội xếp thứ hạng liền nhau, ta cũng có $m \leq 2n-1$.

Hơn nữa, ở tình huống có một đội thắng tất cả $n-1$ đội còn lại, và đồng thời, $n-1$ đội này đôi một hòa nhau, giải đấu sẽ chỉ có hai hạng, một hạng có điểm số bằng $3(n-1)$ (là điểm số của đội thắng) và hạng còn lại có điểm số bằng $n-2$ (là điểm số của mỗi đội còn lại). Do đó, ở tình huống này, ta có:

$$m = 3(n-1)-(n-2) = 2n-1.$$

Vì vậy, số điểm chênh lệch nhỏ nhất của hai đội xếp thứ hạng liền nhau tối đa có thể bằng $2n-1$.

Bình luận và Nhận xét

1. Qua lời giải trên, bạn đọc hãy tự rút ra cho mình các kết luận về ý nghĩa (bao gồm cả ý nghĩa toán học và ý nghĩa thực tiễn) của câu hỏi đã đặt ra ở bài toán.

2. Trong Đề thi của Olympic Toán học Thành phố Moskva (Liên Bang Nga) năm 1975, có bài toán sau, là một "họ hàng" gần gũi với bài đã ra:

Bài toán thi (*dành cho học sinh lớp 9, hệ 10 năm, của Tp. Moskva*). Một giải bóng đá có n đội bóng tham dự, mỗi đội đều thi đấu đúng một trận với mỗi đội khác. Mỗi trận đấu, đội thắng được 2 điểm, đội thua được 0 điểm; nếu hòa nhau, mỗi đội được 1 điểm. Sau giải đấu, các đội được xếp thứ tự, theo điểm số từ cao xuống thấp. Hãy tìm giá trị lớn nhất có thể của chênh lệch điểm giữa hai đội được xếp thứ tự liền nhau.

3. Cho tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí mới chỉ nhận được một lời giải từ bạn đọc, và rất tiếc, lời giải này lại là một lời giải sai.

Nguyễn Khắc Minh

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI HOÀN CHỈNH

Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải hoàn chỉnh.

KHỐI THCS

• Trường **THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam**, Tp. Hà Nội: *Trần Hữu Đức Hiếu* (lớp 8A; P654), *Nguyễn Minh Tuấn* (lớp 9B; P652, P653, P654, P655, P656).

• **Archimedes Academy Trung Yên**, Quận Cầu Giấy, Tp. Hà Nội: *Trần Việt Anh* (lớp 9A7; P652, P654).

• Trường **THCS Lê Quý Đôn**, Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh: *Nguyễn Chánh Thiện* (lớp 8/14; P652, P654).

• Trường **THCS Phúc Yên**, Tp. Phúc Yên, tỉnh Vĩnh Phúc: *Vũ Bảo Lân* (lớp 8A5; P652, P654).

KHỐI THPT

• Trường **THPT số 2 Phù Cát**, tỉnh Bình Định: *Nguyễn Hữu Trí* (lớp 11A1; P654).

• Trường **THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu**, tỉnh Đồng Tháp: *Đỗ Duy Quang* (lớp 11T1; P654).

• Trường **THPT Chi Lăng**, tỉnh Gia Lai:

Phan Trịnh Nguyên (lớp 10A1; P654).

• Trường **THPT chuyên Hưng Yên**, tỉnh Hưng Yên: *Trần Hữu Dương* (lớp 11 Toán 1; P654).

• Trường **THPT chuyên Lê Hồng Phong**, tỉnh Nam Định: *Ngô Quang Bình* (lớp 11 Toán 1; P654), *Phùng Việt Cường* (lớp 11 Toán 2; P654, P655), *Phạm Tuấn Khôi* (lớp 10 Toán 1; P652, P654), *Bùi Khánh Linh* (lớp 10 Toán 2; P654).

• Trường **THPT chuyên Lương Văn Chánh**, tỉnh Phú Yên: *Nguyễn Thị Bảo Tiên* (lớp 11 Toán 1; P654).

• Trường **THPT chuyên Lê Thánh Tông**, tỉnh Quảng Nam: *Trần Phạm Minh Đạt* (lớp 10/1; P654, P659).

• Trường **THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm**, tỉnh Quảng Nam: *Trịnh Quốc Khánh* (lớp 11/1; P659).

• Trường **THPT chuyên Tiền Giang**, tỉnh Tiền Giang: *Trần Phúc Thịnh* (lớp 10 Toán; P654), *Nguyễn Hữu Trí* (lớp 10 Toán; P654).

• Trường **THPT chuyên Quốc học Huế**, tỉnh Thừa Thiên – Huế: *Nguyễn Thị Nhật Thảo* (lớp 11 Toán 2; P654), *Trần Thị Thanh Thư* (lớp 12 Toán 1; P654), *Đặng Quỳnh Bảo Uyên* (lớp 11 Toán 2; P654).

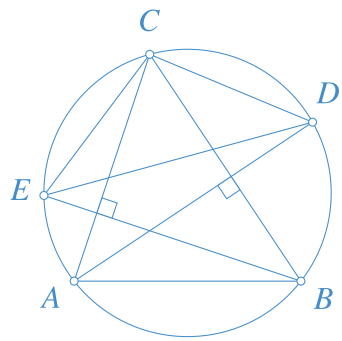
• Trường **THPT chuyên Sư phạm**, ĐH Sư phạm Hà Nội: *Hồ Trần Khánh Linh* (lớp 12 Toán 2; P657, P659).

GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày lời giải của các bài toán trong kỳ thi Olympic Toán học Trẻ của Canada năm học 2022 đăng trong số báo 11/2022.

OC25. Cho ABC là tam giác nhọn nội tiếp đường tròn Γ. Đường thẳng qua A vuông góc với BC cắt Γ tại D, và đường thẳng qua B vuông góc với AC cắt Γ tại E. Chứng minh rằng nếu $AB = DE$, thì $\angle ACB = 60^\circ$.

Lời giải.



Do ABC là tam giác nhọn nên các điểm D và E lần lượt nằm ở bên trong cung nhỏ BC và AC như trong hình vẽ. Như vậy $\angle ECD$ lớn hơn $\angle ACB$. Từ giả thiết $AB = DE$, ta có

$$\angle ECD = 180^\circ - \angle ACB. \qquad (1)$$

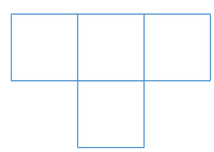
Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}\angle ECD &= \angle ECA + \angle ACB + \angle BCD\\ &= \angle EBA + \angle ACB + \angle BAD\\ &= 90^\circ - \angle BAC + \angle ACB + 90^\circ - \angle ABC\\ &= (180^\circ - \angle BAC - \angle ABC) + \angle ACB\\ &= 2\angle ACB \qquad (2)\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta nhận được điều cần chứng minh.

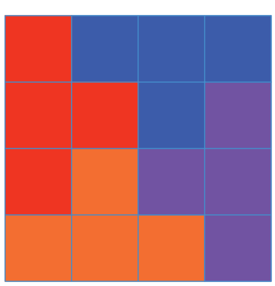
OC26. Giả sử bạn có vô hạn các hình chữ T (bao gồm bốn hình vuông cạnh 1) như trong hình vẽ, và một bảng ô vuông cỡ $n \times n$. Bạn được phép đặt một số hình trên bảng (có thể xoay chúng), miễn là không có hai hình nào chồng lên nhau và không có hình nào vượt ra khỏi bảng.

Với những giá trị nào của n thì bạn có thể phủ toàn bộ bảng?



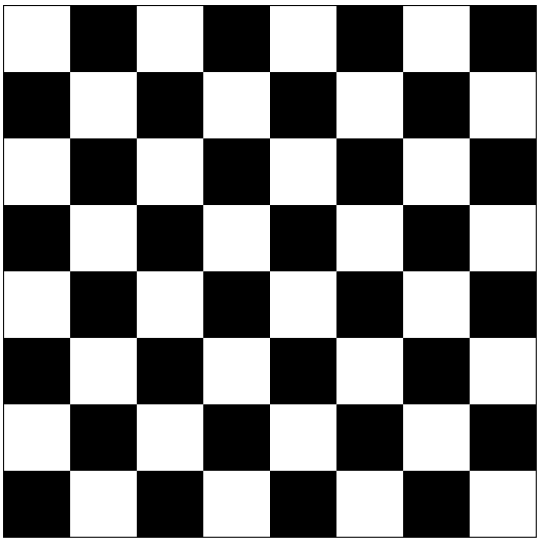
Lời giải. Trước tiên ta nhận thấy mỗi hình chữ T gồm 4 ô, do đó nếu phủ kín được bảng thì diện tích của bảng phải chia hết cho 4, tức là n chẵn.

Với n chia hết cho 4 ta có thể chia bảng thành các bảng con cỡ 4×4 và phủ kín mỗi bảng con bằng 4 hình chữ T như sau:



Với $n = 4k + 2$, ta tô màu đen, trắng các ô trong bảng như bàn cờ vua. Để lát kín bảng cần tất cả $\frac{n^2}{4} = (2k+1)^2$ hình chữ T. Như vậy có một số lẻ hình chữ T và mỗi hình phủ 1 hoặc 3 ô đen, tức là tổng số ô đen phải là lẻ.

Nhưng thực tế có $\frac{n^2}{2} = 2(2k+1)^2$ ô đen. Do đó trường hợp này không thể phủ kín bảng như yêu cầu.



Tóm lại ta phủ kín được bảng bằng các hình chữ T khi và chỉ khi n chia hết cho 4.

OC27. Giả sử rằng các số thực a và b thỏa mãn

$$ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b}\,\sqrt{b^2+a} = 0.$$

Tìm giá trị của biểu thức

$$S = a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b}.$$

Lời giải. Từ đẳng thức trong bài, chuyển vế và bình phương hai vế ta có

$$\begin{aligned}
&ab + \sqrt{a^2+b}\sqrt{b^2+a} = \sqrt{ab+1}\\
\Rightarrow\ & a^2b^2 + 2ab\sqrt{a^2+b}\sqrt{b^2+a}\\
&\quad + (a^2+b)(b^2+a) = ab+1\\
\Leftrightarrow\ & (a^2b^2+a^3) + 2ab\sqrt{a^2+b}\sqrt{b^2+a}\\
&\quad + (b^3+a^2b^2) = 1\\
\Leftrightarrow\ & (a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b})^2 = 1.
\end{aligned}$$

Ta nhận được $S = \pm 1$. Ta sẽ chứng minh S luôn dương. Thực vậy, từ giả thiết ta có

$$ab = -\sqrt{ab+1} - \sqrt{a^2+b}\sqrt{b^2+a} < 0.$$

Không mất tổng quát, ta có thể giả sử $a > 0 > b$. Khi đó, do $a > \sqrt{a^2+b}$, ta có

$$S = a(\sqrt{b^2+a} + b) - b(a - \sqrt{a^2+b}) > 0.$$

Do đó $S = 1$.

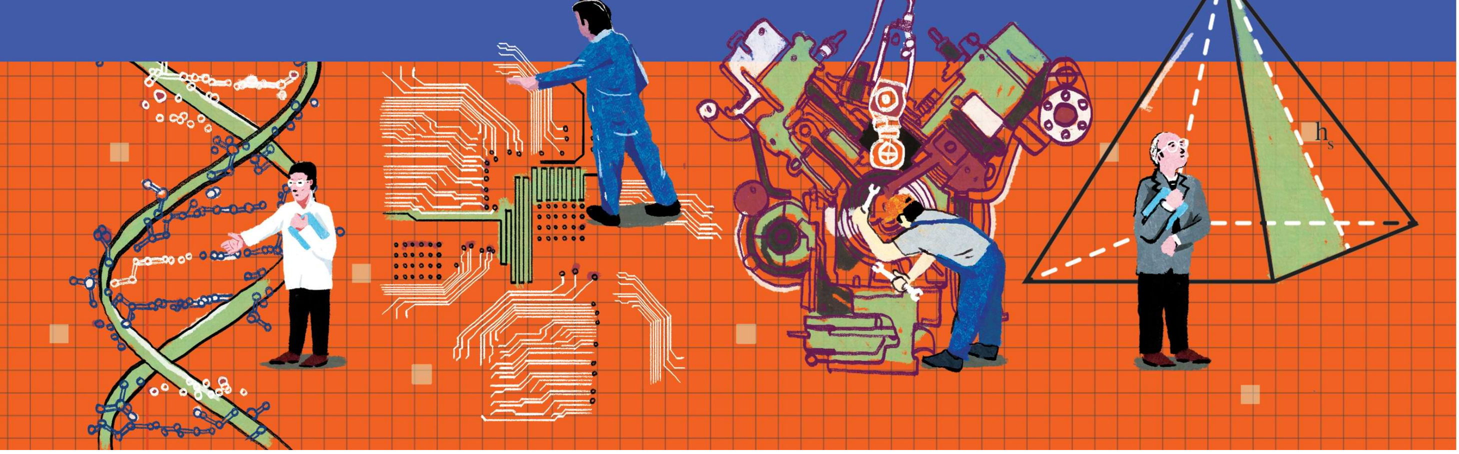
Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc ba bài toán trong kỳ thi Olympic Toán học trẻ khối Pháp ngữ năm 2022. Các bài toán này phù hợp với trình độ học sinh năm cuối cấp Trung học cơ sở.

OC34. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ là ước của n.

Chú ý: $\lfloor x \rfloor$ ký hiệu phần nguyên của một số thực x, được định nghĩa là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x. Ví dụ: $\lfloor 1.4 \rfloor = 1$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, và $\lfloor 2.9 \rfloor = 2$.

OC35. Cho một bảng ô vuông cỡ $n \times n$ với $n \geq 1$. Aya muốn tô màu k ô của bảng sao cho chỉ có duy nhất một cách để đặt n đồng xu trên các ô vuông được tô màu sao cho không có hai đồng xu nào nằm trên cùng một hàng hoặc cột. Hỏi giá trị tối đa có thể của k là bao nhiêu?

OC36. Cho tam giác ABC và D là giao điểm của đường phân giác của góc $\angle BAC$ và đường trung trực của cạnh AC. Đường thẳng đi qua B và song song với AC, cắt đường thẳng AD tại X. Đường thẳng đi qua B và song song với CX, cắt đường thẳng AC tại Y. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABY cắt đường thẳng BX tại E. Chứng minh rằng ba điểm C, D và E thẳng hàng.



NOBEL Y HỌC 2022[1]
Phần II: Tại sao loài người sống sót

Vườn thú Leipzig nằm ở bên kia rìa thành phố so với Viện Nhân chủng học Tiến hóa. Nhưng viện này có phòng thí nghiệm riêng trong khuôn viên, cũng như các phòng thử nghiệm được thiết kế đặc biệt bên trong ngôi nhà nghiên cứu về vượn, được gọi là Pongoland. Vì không ai trong số họ hàng Neanderthal gần nhất của chúng ta sống sót (ngoại trừ những mảnh DNA nhỏ trong chúng ta), các nhà nghiên cứu phải dựa vào họ hàng gần nhất của chúng ta là tinh tinh và bonobos, hay họ hàng xa hơn là khỉ đột và đười ươi – để thực hiện các thí nghiệm sống. Một buổi sáng, tôi đến sở thú hy vọng sẽ xem một thí nghiệm đang được tiến hành.

Nhiều dữ liệu khảo cổ học đã hé lộ phần nào đời sống thường ngày của người Neanderthal hàng chục nghìn năm trước. Ảnh: mpg.de

Để lên hình cho đẹp, một nhà nghiên cứu tên là Héctor Marín Manrique chuẩn bị thực hiện lại một loạt các thí nghiệm khoa học mà ông đã làm. Một con đười ươi cái tên là Dokana được dẫn vào một trong những phòng thử nghiệm. Giống như hầu hết các con đười ươi khác, nó có bộ lông màu đồng và vẻ ngoài khinh khỉnh. Trong thí nghiệm đầu tiên liên quan đến nước trái cây màu đỏ và các ống nhựa nhỏ, Dokana có thể phân biệt ống hút nào thì dùng được và ống hút nào thì không. Trong phần thứ hai, có nhiều nước màu đỏ hơn và nhiều nhựa hơn, nó hiểu ý tưởng về ống hút bằng cách ngắt một đoạn của đường ống và dùng ống đó để hút nước. Cuối cùng, trong một màn thể hiện tài khéo léo ở cấp độ IQ cao thể hiện trí thông minh của loài vượn lớn, Dokana đã lấy được một hạt đậu phộng mà Manrique đã đặt ở đáy của một ống trụ dài. (Hình trụ được gắn cố định vào tường nên không thể dốc ngược ra). Nó đi đến chỗ uống nước, ngậm một ít nước trong miệng, trở lại và nhổ vào hình trụ, lặp lại quá trình cho đến khi hạt đậu phộng nổi đến tầm với của mình. Về sau, tôi thấy thí nghiệm này được dàn dựng lại với một số trẻ em năm tuổi sử dụng các hộp nhựa nhỏ hơn, những hạt đậu phộng được thay bằng kẹo. Mặc dù một bình đầy nước đã cố tình được để gần đó nhưng chỉ có một đứa trẻ – một bé gái – nghĩ ra phương án làm nó nổi lên và cũng phải sau một hồi gợi ý đủ kiểu (có bé trai còn hỏi “Nước thì giúp con kiểu gì?”, ngay trước khi bỏ cuộc).

[1] *Nguồn: Tia Sáng https://tiasang.com.vn/khoa-hoc-cong-nghe/nobel-y-hoc-2022-ky-cuoi-tai-sao-loai-nguoi-song-sot/.*

Một cách để cố gắng trả lời câu hỏi "Điều gì làm nên con người chúng ta?" là hỏi "Điều gì khiến chúng ta khác với loài vượn?" hoặc, nói chính xác hơn, với loài vượn khác (vì con người cũng thuộc nhóm vượn). Như tất cả mọi người giờ đây đã biết – và như các thí nghiệm với Dokana một lần nữa khẳng định – loài vượn khác cực kỳ thông minh. Chúng có khả năng suy luận, giải các câu đố phức tạp và hiểu những gì người khác có thể biết và không biết. Khi các nhà nghiên cứu từ Leipzig thực hiện một loạt các thử nghiệm trên tinh tinh, đười ươi và những đứa trẻ hai tuổi rưỡi, họ phát hiện ra rằng tinh tinh, đười ươi và những đứa trẻ khá tương đồng với nhau trong một loạt các hoạt động liên quan đến việc tìm hiểu về thế giới vật chất. Ví dụ: nếu một người thử nghiệm đặt phần thưởng vào một trong ba chiếc cốc, rồi tráo vị trí ba cốc này, thì loài vượn tìm ra phần thưởng cũng giỏi như lũ trẻ – thậm chí, trong trường hợp của tinh tinh, còn giỏi hơn. Những con vượn dường như nắm bắt được khái niệm về số lượng tốt như lũ trẻ – chúng luôn chọn chiếc đĩa chứa nhiều món hơn, thậm chí việc lựa chọn này cần dựa trên kỹ năng mà ta có thể tạm gọi là toán học – và dường như loài vượn cũng nắm bắt tốt không kém bọn trẻ về quan hệ nhân quả. (Ví dụ, loài vượn hiểu rằng khi lắc một chiếc cốc mà chúng kêu lạo xạo thì khả năng cốc đó có thức ăn là cao hơn những chiếc cốc không phát ra tiếng động nào.) Và chúng cũng khôn khéo không thua gì trẻ em trong việc tận dụng các công cụ đơn giản.

Tuy nhiên, những đứa trẻ vượt trội hơn những con vượn ở điểm đọc các tín hiệu xã hội. Khi bọn trẻ được gợi ý về nơi tìm phần thưởng – ai đó chỉ vào hoặc nhìn vào đúng hộp đựng – lũ trẻ sẽ nhanh chóng bắt lấy cơ hội. Những con vượn thì hoặc là không hiểu chúng đang được giúp đỡ một tay, hoặc là không thể làm theo gợi ý. Tương tự, khi bọn trẻ được chỉ cách lấy phần thưởng, chẳng hạn như bằng cách xé toang hộp, chúng hiểu ý ngay và làm theo. Lũ vượn, một lần nữa, hết sức lúng túng. Phải thừa nhận rằng bọn trẻ có lợi thế lớn trong các hành động liên quan đến tương tác xã hội, vì chính những người thiết kế thí nghiệm cũng cùng giống loài với các em. Nhưng, nói chung, vượn dường như không có nhiều động lực để đạt được kỹ năng hợp tác cùng giải quyết vấn đề, vốn là trọng tâm của xã hội loài người.

Michael Tomasello, người đứng đầu bộ phận tâm lý học so sánh và phát triển của viện, nói với tôi: "Tinh tinh làm nhiều điều cực kỳ thông minh. Nhưng sự khác biệt chính [giữa con người và chúng] mà chúng tôi thấy là kỹ năng 'ba cây chụm lại nên hòn núi cao'. Giờ đây nếu bạn quan sát ở sở thú, bạn sẽ không bao giờ thấy hai con tinh tinh cùng nhau khiêng vật nặng. Chúng không có kiểu hoạt động hợp tác như vậy".

Hang động Grotte des Combarelles trên vách tràn ngập các bức vẽ của người tối cổ. Điều gì thôi thúc con người len lỏi trong bóng tối mịt mù và chật hẹp để tạo nên những tác phẩm chưa chắc đã có người đồng cảm? Ảnh: National Geographic.

Trở về từ sở thú, tôi hỏi Pääbo về một thí nghiệm giả định. Nếu ông có cơ hội khiến người Neanderthal phải trải qua các loại bài kiểm tra mà tôi đã thấy ở Pongoland, ông sẽ làm gì? Ông ấy có nghĩ rằng mình có thể nói chuyện với họ không? Ông ngả người ra sau ghế và khoanh tay trước ngực.

"Ai cũng không kìm được sự tò mò," ông nói. "Vì vậy, tôi cố gắng kiềm chế điều đó bằng cách từ chối các câu hỏi như: 'Họ có biết nói không?' Bởi vì, thực sự thì tôi không biết trả lời thế nào, và theo một cách nào đó, tôi cũng chỉ biết suy đoán như bạn mà thôi".

Cho đến nay, rất nhiều địa điểm của người Neanderthal đã được khai quật, từ miền Tây Tây Ban Nha đến miền Trung nước Nga và từ Israel đến xứ Wales. Chúng cung cấp nhiều manh mối về người Neanderthal trông ra sao, ít nhất là với những người thích suy đoán. Người Neanderthal cực kỳ mạnh mẽ – điều này được chứng thực bởi độ dày của xương họ – và có thể đánh chúng ta nhừ tử cũng nên. Họ rất thành thạo trong việc chế tạo công cụ bằng đá, mặc dù có vẻ họ dành ra hàng chục nghìn năm chỉ để làm đi làm lại một vài công cụ, với những thay đổi không đáng kể. Ít nhất là trong một số trường hợp, họ chôn cất người đã khuất. Nhưng cũng trong một số trường hợp khác, họ có vẻ còn giết và ăn thịt lẫn nhau. Những vết nứt vỡ trên răng cửa của họ cho thấy họ đã rất mất công để dùng răng ngoạm da động vật, và điều này cũng gợi ý rằng họ đã xử lý da đó thành một loại da thuộc. Bộ xương của người Neanderthal thường để lại nhiều dấu vết của bệnh tật hoặc biến dạng. Ví dụ như người Neanderthal ban đầu của Mettmann, dường như đã phải trải qua và hồi phục từ hai vết thương nghiêm trọng, một ở đầu và một ở cánh tay trái. Người Neanderthal có bộ xương gần như hoàn chỉnh được tìm thấy ở La Chapelle đã phải chịu đựng ngoài việc bị viêm khớp còn bị gãy xương sườn và xương bánh chè ở đầu gối. Cả hai cá nhân này đều sống qua tuổi năm mươi, điều này cho thấy rằng người Neanderthal có khả năng hành động tập thể, hay nói cách khác mĩ miều hơn là có sự thấu cảm. Họ phải – ít nhất là cũng có khi – chăm sóc vết thương của đồng loại.

Từ các nghiên cứu khảo cổ học, người ta suy ra rằng người Neanderthal tiến hóa ở châu Âu hoặc tây Á và tỏa đi từ đó, chỉ dừng chân ở thủy vực hoặc gặp phải những trở ngại đáng kể nào đó khác. (Trong thời kỳ băng hà, mực nước biển thấp hơn rất nhiều so với hiện tại, vì vậy không có eo biển Anh để vượt qua). Đây là một trong những điểm cơ bản nhất mà con người hiện đại khác với người Neanderthal và, theo quan điểm của Pääbo, cũng là một trong những điều lý thú nhất. Vào khoảng bốn mươi lăm nghìn năm trước, con người hiện đại đã đặt chân đến Úc, một cuộc hành trình, kể cả ở giữa kỷ băng hà, cũng có nghĩa là băng qua vùng nước mở. Những con người cổ đại như Homo erectus "chỉ đi loanh quanh như rất nhiều loài động vật có vú khác ở thời Cựu Thế giới," Pääbo nói với tôi. "Họ không bao giờ đến Madagascar, không bao giờ đến Úc. Người Neanderthal cũng vậy. Chỉ có những con người hoàn toàn hiện đại mới bắt đầu hành trình mạo hiểm trên đại dương, nơi người ta không nhìn thấy đất liền. Tất nhiên, một phần là nhờ công nghệ; bạn phải có tàu để làm điều đó. Nhưng tôi thích nghĩ và nói rằng, còn cần một chút "điên rồ" nữa. Bạn biết không, biết bao nhiêu người hẳn đã ra khơi và biến mất trên Thái Bình Dương trước khi đặt chân được đến đảo Phục Sinh? Ý tôi là, điều đó thật nực cười. Và tại sao người ta lại dám làm thế? Có phải vì vinh quang? Vì sự bất tử? Vì tò mò? Giờ đây chúng ta còn đòi lên sao Hỏa nữa. Đúng là không biết điểm dừng". Nếu đặc tính của con người hiện đại là sự thao thức, "không bao giờ bằng lòng với hiện tại" của nhân vật Faust trong vở kịch của Geothe, hẳn phải có một loại gene Faust nào đó trong chúng ta, theo quan điểm của Pääbo. Rất nhiều lần, ông nói với tôi rằng có thể xác định được nguyên nhân của sự "điên rồ" này bằng cách so sánh DNA của Neanderthal và con người.

"Nếu một ngày nào đó chúng ta biết được rằng một số đột biến kỳ lạ đã làm nên sự điên rồ và thích khám phá mọi thứ của con người, thì sẽ thật ảo diệu khi nghĩ rằng chỉ một chút xáo trộn này trên nhiễm sắc thể kia mà đã tạo nên ngày hôm nay, đã thay đổi toàn bộ hệ sinh thái trên hành tinh này và khiến chúng ta thống trị tất cả".

Nếu đặc tính của con người hiện đại là sự thao thức, "không bao giờ bằng lòng với hiện tại" của nhân vật Faust trong vở kịch của Geothe, hẳn phải có một loại gene Faust nào đó trong chúng ta, theo quan điểm của Pääbo.

Theo những ước tính gần đây nhất, người Neanderthal và người hiện đại có chung một tổ tiên sống cách đây khoảng bốn trăm nghìn năm. (Không rõ tổ tiên đó là ai, mặc dù có một khả năng là loài hominid nào đó mới được biết đến một cách mơ hồ, sau khi người ta tìm thấy một xương hàm ở gần Heidelberg, với tên gọi Homo heidelbergensi). Còn tổ tiên chung của tinh tinh và người, sống cách đây năm đến bảy triệu năm trước. Điều này có nghĩa là người Neanderthal và con người có ít hơn 1/10 thời gian đó để tích lũy sự khác biệt về gene.

Người ta cần khoảng 400 mg bột xương để thực hiện một phân tích gene. Nhưng nhiều khi kết quả không chỉ gồm gene của người Neanderthal mà còn tạp nhiễm cả của vi sinh vật. Ảnh: mpg.de

Về nguyên tắc, việc lập bản đồ những khác biệt này khá đơn giản về lý thuyết. Còn trong thực tế, nó phức tạp hơn một chút. Để bắt đầu, thực sự không có cái gọi là bộ gene chung của con người; ai cũng có bộ gene của riêng mình và chúng khác nhau đáng kể – giữa bạn và người ngồi cạnh bạn trên tàu điện ngầm, sự khác biệt rất có thể là đâu đó khoảng ba triệu cặp cơ bản. Một số biến thể này tương ứng với những khác biệt sinh lý có thể nhìn thấy – chẳng hạn như màu mắt, hoặc khả năng mắc bệnh liên quan đến tim mạch – và một số khác không có ý nghĩa đáng kể. Theo ước tính đầu tiên, một người và một người Neanderthal bất kỳ cũng sẽ khác nhau ba triệu cặp cơ sở. Cái khó là xác định chắc chắn cái nào trong số hàng triệu biến thể này đã tách chúng ta khỏi họ. Pääbo ước tính rằng khi Dự án bộ gene người Neanderthal hoàn thành, danh sách các cặp cơ bản độc nhất của con người với người Neanderthal sẽ đâu đó khoảng một trăm nghìn cặp. Đâu đó trong danh sách này sẽ ẩn giấu sự thay đổi – hay những thay đổi – đã khởi tạo nên chúng ta. Để xác định những đột biến gene này, ông cần phải nhờ đến những con chuột chuyển gene.

Từ quan điểm thực nghiệm, cách tốt nhất để kiểm tra xem thay đổi gene nào mới đáng kể là tạo ra một con người với trình tự gene của người Neanderthal. Điều này sẽ liên quan đến việc chỉnh sửa tế bào gốc của người, cấy phôi đã biến đổi gene đó vào một phụ nữ mang thai hộ và rồi quan sát đứa trẻ của thí nghiệm đó lớn lên. Vì những lý do quá rõ ràng, không ai cho phép một thí nghiệm trên người như vậy, đó còn chưa kể là nó còn bất khả. Vì những lý do tương tự, thí nghiệm kiểu này cũng không được phép áp dụng trên tinh tinh. Nhưng trên chuột thì được. Hàng chục giống chuột đã được chỉnh sửa gene để mang các trình tự gene của người, và người ta vẫn tạo ra các giống mới liên tục, đặt hàng khá dễ dàng.

Vài năm trước, Pääbo và một đồng nghiệp, Wolfgang Enard, bắt đầu quan tâm đến một gene được gọi là FOXP2, gene này ở người có liên quan đến ngôn ngữ. (Những người có một bản sao gene bị lỗi – một trường hợp cực kỳ hiếm xảy ra – có khả năng nói, nhưng những gì họ nói, đối với người lạ, hầu như không thể hiểu được.) Pääbo và Enard đã nuôi một số con chuột với một phiên bản gene này, và sau đó nghiên cứu chúng từ mọi góc độ có thể. Những con chuột bị biến đổi, có giọng kêu trầm hơn so với các đồng loại chưa được "nhân hóa" của chúng. Những con chuột này cũng thể hiện sự khác biệt đáng kể về phát triển thần kinh. Gene FOXP2 của người Neanderthal, hóa ra, gần như giống hệt loài người, khác có mỗi một cặp base. Khi ông phát hiện ra sự khác biệt này, ông đặt hàng ngay một lô chuột chuyển gene mới mà lúc tôi tới thăm phòng thí nghiệm của ông, vừa mới sinh ra và đang được nuôi trong điều kiện tiệt trùng dưới tầng hầm.

Các gene liên quan đến kỹ năng nói của chúng ta là địa chỉ hiển nhiên để tìm kiếm những thay đổi khiến chúng ta là con người. Nhưng lý do của việc phải giải trình tự toàn bộ hệ gene của người Neanderthal là bởi địa chỉ hiển nhiên nhất chưa chắc đã là địa chỉ đúng nhất.

Pääbo nói với tôi: "Ưu điểm tuyệt vời của nghiên cứu gene theo phương thức này là nó không có thiên kiến. Nếu bạn chỉ chạy theo những gene ứng cử viên, bạn sẽ dễ phát biểu cảm tính rằng gene này hay gene kia mới là quan trọng nhất. Nhiều người sẽ bảo là gene ngôn ngữ. Nhưng có khi chúng ta sẽ ngạc nhiên vì gene khác mới là cốt yếu". Gần đây, Pääbo trở nên hứng thú với một gene có tên là RUNX2, liên quan đến quá trình hình thành xương. Khi các thành viên trong nhóm của ông phân tích toán học bộ gene người và người Neanderthal, RUNX2 bỗng nổi lên như một vị trí đánh dấu sự rẽ nhánh của những dòng dõi người.

Những người có bản sao bị lỗi của gene RUNX2 thường phát triển một tình trạng, được gọi là chứng loạn sản xương sọ, có các triệu chứng bao gồm các đặc điểm bề ngoài giống người Neanderthal như khung xương sườn loe ra. Hai gene có liên quan đến chứng tự kỷ, CADPS2 và AUTS2, dường như có sự khác biệt đáng kể giữa người Neanderthal và người. Điều này rất thú vị vì một trong những triệu chứng của chứng tự kỷ là không có khả năng đọc các tín hiệu xã hội.

Vào một buổi chiều nọ, khi tôi đi lang thang trong văn phòng của ông, Pääbo cho tôi xem một bức ảnh chụp nắp sọ mới được một nhà sưu tập nghiệp dư phát hiện cách Leipzig khoảng nửa giờ. Từ bức ảnh đã được gửi qua email, Pääbo nhận định rằng chiếc xương sọ có thể là đồ cổ – từ thời sơ khai của người Neanderthal, hoặc thậm chí là người Homo heidelbergensis. Ông cũng quyết định phải có nó bằng được. Chiếc nắp sọ đã được tìm thấy tại một mỏ đá trong một hố nước – ông giả thiết rằng có lẽ những điều kiện này đã bảo quản nó, và nếu ông nhanh chóng kịp đưa nó về, ông có thể trích xuất một số DNA. Nhưng hộp sọ đã được hứa đưa tới một giáo sư nhân chủng học ở Mainz trước. Làm thế nào mà Pääbo thuyết phục người giáo sư để lại cho ông đủ xương để kiểm nghiệm bây giờ?

Pääbo gọi cho tất cả những người mà ông nghĩ biết đâu có thể quen với giáo sư kia. Ông còn yêu cầu thư ký của mình liên hệ với thư ký của giáo sư kia để xin số điện thoại cá nhân và nói đùa – có khi nửa đùa nửa thật cũng nên – rằng nếu cần thiết thì Pääbo sẵn sàng "bán thân" cho giáo sư luôn. Cuộc gọi điện thoại qua lại điên cuồng trên khắp nước Đức kéo dài hơn một tiếng rưỡi đến khi cuối cùng Pääbo quay ra nói chuyện với một nhà nghiên cứu cùng lab với mình. Nhà nghiên cứu này hóa ra đã tận mắt nhìn thấy chiếc nắp sọ thực sự và kết luận miếng xương này khả năng cao là không phải đồ cổ gì cho lắm. Pääbo ngay lập tức không còn hứng thú gì với nó nữa.

Với những bộ xương cổ, không ai thực sự biết trước có thể thu được thông tin gì từ nó. Cách đây vài năm, Pääbo lấy được một phần răng từ một trong những bộ xương được gọi là "người Hobbit" được tìm thấy trên đảo Flores, Indonesia. ("Người Hobbit", được phát hiện vào năm 2004, thường được cho là loài người cổ đại thấp bé – Homo floresiensis – mặc dù một số nhà khoa học đã lập luận rằng đó chỉ là người hiện đại bị chứng teo não.) Chiếc răng, khoảng 17 nghìn tuổi, không chứa một chút DNA nào.

Sau đó, khoảng một năm rưỡi trước, Pääbo đã lấy được một mảnh xương ngón tay được khai quật trong một hang động ở miền Nam Siberia cùng với một chiếc răng hàm kỳ dị, trông có vẻ giống người. Xương ngón tay – có kích thước bằng cục tẩy bút chì – được cho là đã hơn bốn vạn năm tuổi. Pääbo cho rằng nó đến từ người hiện đại hoặc từ người Neanderthal. Nếu điều này là đúng, thì địa điểm đó sẽ là nơi xa nhất về phía Đông mà người ta tìm thấy hài cốt người Neanderthal.

Trái ngược với chiếc răng của người Hobbit, đoạn ngón tay mang lại một lượng DNA lớn đáng kinh ngạc. Khi việc phân tích các mẩu thông tin đầu tiên được hoàn thành, Pääbo tình cờ lúc đó đang ở Hoa Kỳ. Ông gọi điện đến văn phòng và một trong những đồng nghiệp của ông trả lời: "Ông đang ngồi chắc chắn trên ghế chứ?" DNA cho thấy dữ liệu không thể thuộc về người Neanderthal hoặc của người hiện đại. Thay vào đó, chủ nhân của nó phải thuộc về một loài hominid hoàn toàn khác và chưa từng được phát hiện ra trước đó. Trong một bài báo được xuất bản vào tháng 12/2010, trên tạp chí Nature, Pääbo và nhóm của ông đã đặt tên cho nhóm này là người Denisovan, theo tên của hang Denisova, nơi xương đã được tìm thấy. Tờ *Sydney Morning Herald* chạy tít: "Một ngón tay đóng dấu lịch sử cổ đại của con người". Thật đáng kinh ngạc – hay có lẽ, giờ đây, người ta cũng đã đoán được – con người hiện đại hẳn đã phối ngẫu với cả người Denisovan bởi vì những người New Guinean ngày nay mang tới 6% DNA của người Denisovan. (Tại sao điều này đúng với người New Guinea nhưng không phải với người Siberia bản địa hoặc người châu Á thì chưa rõ, nhưng có lẽ liên quan đến các mẫu hình di cư của con người).

Từ lâu, người ta đã hiểu rằng con người hiện đại và người Neanderthal là những người sống cùng thời với nhau. Việc phát hiện ra người Hobbit và bây giờ là người Denisovan cho thấy con người đã chia sẻ hành tinh với ít nhất hai sinh vật khác giống như chúng ta. Và có vẻ như càng phân tích DNA từ các bộ hài cốt cổ đại thì sẽ càng thấy những loài khác có họ hàng với người; như Chris Stringer, một nhà cổ sinh vật học nổi tiếng người Anh, đã nói với tôi, "Tôi chắc chắn rằng chúng ta sẽ có thêm nhiều điều bất ngờ nữa đang đến."

"Nếu những dạng người khác này tồn tại được hơn hai nghìn thế hệ nữa, tức là không quá lâu, thì điều đó sẽ ảnh hưởng như thế nào đến quan điểm của chúng ta về thế giới sinh vật?" Pääbo nói, khi sự phấn khích với câu chuyện về xương nắp sọ đã chùng xuống và chúng tôi ngồi uống cà phê với nhau. "Chúng ta từng đặt ra một ranh giới rõ ràng giữa con người và động vật. Nhưng có thể ranh giới đó không rõ ràng đến thế. Đó là một điều thú vị để triết lý." Cũng thật thú vị khi nghĩ về lý do tại sao chúng ta là những người sống sót.

Trong nhiều thập kỷ, nhiều giả thuyết đã được đưa ra để giải thích nguyên nhân gây ra sự diệt vong của người Neanderthal, từ biến đổi khí hậu cho đến vận rủi đơn thuần. Tuy nhiên, trong những năm gần đây, ngày càng rõ ràng rằng, như Pääbo đã nói với tôi, "vận rủi của họ là chính chúng ta". Hết lần này đến lần khác, bằng chứng khảo cổ học ở châu Âu chỉ ra rằng, mỗi khi con người hiện đại xuất hiện ở nơi nào người Neanderthal đang sinh sống, thì người Neanderthal ở vùng đó sẽ biến mất. Có thể người Neanderthal đã bị truy đuổi ráo riết, hoặc có lẽ họ đã bị thua trong cuộc cạnh tranh sinh tồn. "Vận rủi" của người Neanderthal có lẽ giống với bất hạnh mà người Hobbit và người Denisovan gặp phải, và tương tự như thảm kịch mà các loài thú có túi khổng lồ từng thống trị khắp Australia, và một loạt các loài thú lớn từng sinh sống ở Bắc Mỹ, những con chim Moa từng sống ở New Zealand. Và chính sự xui xẻo đó đã đưa rất nhiều loài – trong đó có tất cả các loài vượn lớn – đến bờ vực của sự lãng quên ngày nay.

Hai thành viên trong phòng thí nghiệm của Svante Pääbo đang chạy máy phân tích genome. Nó có thể phân tích cùng lúc nhiều mẫu. Ảnh: mpg.de

“Đối với tôi, sự tuyệt chủng của người Neanderthal không phải là điều bí ẩn”, Jean–Jacques Hublin, giám đốc bộ phận tiến hóa của con người thuộc Viện Nhân chủng học Tiến hóa, nói với tôi. “Đối với tôi, bí ẩn là điều gì khiến loài người hiện đại trở thành một nhóm thành công đến mức họ đã thay thế không chỉ người Neanderthal mà còn tất cả mọi thứ. Chúng tôi không có mấy bằng chứng cho thấy người Neanderthal hoặc những con người cổ xưa khác đã đẩy một loài thú có vú hoặc bất cứ thứ gì khác đến bờ vực tuyệt chủng. Còn với con người hiện đại thì có hàng trăm ví dụ, và chúng ta đã làm điều đó hết sức thành thục”.

Một trong số những tập hợp xương người Neanderthal lớn nhất từng được tìm thấy – hài cốt của bảy cá thể – được phát hiện cách đây khoảng một thế kỷ tại một địa điểm được gọi là La Ferrassie, Tây Nam nước Pháp. La Ferrassie nằm ở Dordogne, không xa La Chapelle và cách hàng chục địa điểm khảo cổ quan trọng khác trong vòng nửa giờ lái xe, bao gồm cả các hang động được sơn ở Lascaux. Trong mùa hè, một nhóm bao gồm một trong những đồng nghiệp của Pääbo đang khai quật tại La Ferrassie, và tôi quyết định xuống đó để quan sát. Tôi đến trụ sở của nhóm khai quật – một kho thuốc lá đã được chuyển đổi mục đích – đúng lúc đang họ dùng bữa tối với món bò hầm rượu vang, được phục vụ trên những chiếc bàn tạm ở sân sau.

Ngày hôm sau, tôi lái xe đến La Ferrassie cùng với một số nhà khảo cổ học của nhóm. Địa điểm này nằm trong một khu vực nông thôn yên bình, ngay bên đường. Nhiều nghìn năm trước, La Ferrassie là một hang động đá vôi khổng lồ, nhưng một trong những vách hang bị đổ sập xuống, và có tới hai lối vào. Một phiến đá khổng lồ nhô lên khỏi mặt đất khoảng 20 feet, hình vòng cung. Người ta rào dây quanh khu vực đào bới trông nó có dáng dấp như hiện trường của một vụ án mạng.

Ngày hôm đó nắng nóng và bụi bặm. Nửa tá sinh viên chui rúc trong rãnh dài, dùng bay bới đất. Dọc theo thành rãnh, tôi có thể nhìn thấy những mảnh xương nhô ra từ đất đỏ. Người ta nói với tôi, những mẩu xương ở gần đáy là do người Neanderthal ném xuống. Phần xương gần đỉnh là những gì người hiện đại để lại, những người đã chiếm đóng La Ferrassie sau khi người Neanderthal biến mất. Các bộ xương của người Neanderthal ở đây đã bị mang đi từ lâu, nhưng người ta vẫn hy vọng rằng biết đâu vẫn tìm được một số mảnh vụt còn sót lại, chẳng hạn như một chiếc răng. Mỗi mảnh xương được khai quật cùng với mảnh đá lửa và bất cứ thứ gì khác có tiềm năng quan tâm sẽ được đặt sang một bên, đưa về trụ sở chính để phân loại và gắn thẻ.

Sau khi thấy các sinh viên trở nên thấm mệt, tôi lui vào bóng râm. Tôi cố tưởng tượng cuộc sống của người Neanderthal ở La Ferrassie sẽ như thế nào. Mặc dù khu vực này giờ đây tràn ngập cây cỏ, nhưng trước đấy nó hẳn là lãnh nguyên. Sẽ có nai sừng tấm đi lang thang trong thung lũng, tuần lộc, gia súc hoang dã và voi ma mút. Ngoài những chi tiết rời rạc này, tôi không thể nghĩ được điều gì khác. Tôi đem điều đó tới hỏi những nhà khảo cổ đi cùng.

"Rất lạnh," Shannon McPherron, thuộc Viện Max Planck, phát biểu đầu tiên.

"Và hôi hám", Dennis Sandgathe, thuộc Đại học Simon Fraser của Canada, cho biết.

"Có lẽ là họ phải chịu đói," Harold Dibble, Đại học Pennsylvania, nói thêm.

Sandgathe nói: "Không ai sống nổi đến già cả".

Sau đó, trở lại nhà kho, tôi nhặt lên xem những gì đã đào được trong vài ngày qua. Có hàng trăm mảnh xương động vật, mỗi mảnh đều được làm sạch và đánh số thứ tự rồi được đặt trong túi nhựa nhỏ của riêng nó, và hàng trăm mảnh đá lửa. Hầu hết các mảnh này có lẽ là sản phẩm phụ của quá trình chế tạo công cụ – tạm gọi là dăm bào thời kỳ Đồ đá – nhưng một số mảnh, tôi biết được, chính là công cụ. Từng được hướng dẫn cách nhìn những thứ đồ này, tôi có thể thấy các cạnh vát mà người Neanderthal đã chế tác. Một công cụ đặc biệt nổi bật: một viên đá lửa cỡ lòng bàn tay có hình giọt nước. Theo thuật ngữ khảo cổ học, nó là một cái rìu cầm tay, mặc dù nó có lẽ không được dùng như một cái rìu theo nghĩa hiện nay. Nó đã được tìm thấy gần đáy của rãnh, vì vậy nó được ước tính là khoảng 70 nghìn năm tuổi. Tôi lấy nó ra khỏi túi nhựa và lật đi lật lại. Nó gần như đối xứng hoàn hảo và – ít nhất là đối với mắt thường – khá đẹp. Tôi nói rằng tôi nghĩ người Neanderthal đã tạo ra nó hẳn là người có khiếu thiết kế tốt. McPherron phản đối.

"Chúng ta biết câu chuyện kết thúc thế nào", anh ấy nói với tôi. "Chúng ta biết về văn hóa hiện đại ngày nay và chúng ta tò mò tại sao chúng ta trở nên như vậy. Và ta có xu hướng phóng đại những gì ở quá khứ bằng cách nhìn nó với con mắt người hiện đại. Vì vậy, khi bạn nhìn thấy một chiếc rìu cầm tay đẹp và bạn nói, 'Ôi nhìn trình độ chế tác của nó này, thực sự là một tác phẩm nghệ thuật". Đó là quan điểm của người ngày nay. Bạn không thể đưa ra kết luận về thứ mà bạn đang cố gắng chứng minh".

Trong số hàng trăm nghìn đồ tạo tác của người Neanderthal đã được khai quật, hầu như không có đồ vật nào đại diện cho những ý đồ rõ ràng về mục đích nghệ thuật hoặc trang trí, và những đồ vật được giải thích theo cách này – ví dụ, mặt dây chuyền bằng ngà voi được phát hiện trong một hang động ở miền Trung nước Pháp – chỉ khơi mào cho những cuộc tranh cãi mơ hồ và không đi đến đâu. (Nhiều nhà khảo cổ học tin rằng mặt dây chuyền được tạo ra bởi người Neanderthal, những người đã tiếp xúc với người hiện đại và cố gắng bắt chước họ, nhưng, dựa trên các kỹ thuật xác định niên đại gần đây nhất, một số người cho rằng mặt dây chuyền thực tế là do người hiện đại tạo ra.) Sự thiếu bằng chứng này đã khiến một số người cho rằng người Neanderthal không có khả năng nghệ thuật hoặc không quan tâm đến nó. Đơn giản là họ không sở hữu thứ, về mặt di truyền học, có thể được gọi là đột biến thẩm mỹ.

Vào ngày cuối cùng của tôi ở Dordogne, Pháp, tôi quyết định đến thăm một địa điểm gần đó về con người được biết đến với những hình ảnh phi thường. Địa điểm, Grotte des Combarelles, là một hang động dài, rất hẹp, ngoằn ngoèo xuyên qua một vách núi đá vôi. Sâu trong đó vài trăm feet, các bức tường của hang động được bao phủ bởi các hình chạm khắc – một con voi ma mút đang thu vòi lại, một con ngựa hoang đang vươn cao đầu, một con tuần lộc đang rướn người về phía trước, dường như để uống nước. Mới gần đây thôi, người ta đào sàn của Grotte des Combarelles thành rãnh, vừa đủ để một người có thể đi bộ trong đó và đường hầm được được chiếu sáng lờ mờ bởi đèn điện. Nhưng khi các bản khắc ban đầu được tạo ra, khoảng mười hai hoặc mười ba nghìn năm trước, cách duy nhất để vào được đây là phải bò và cách duy nhất để nhìn trong bóng tối đen như mực là phải mang theo đuốc. Khi tôi quờ quạng trong bóng tối, lướt qua những bản khắc của về rừng wisent và bò rừng aurochs và tê giác lông mượt, tôi bỗng nhận ra rằng mình hoàn toàn không tưởng tượng được điều gì đã thôi thúc ai đó phải luồn lách qua một đường hầm tối tăm để bao phủ vách hang bằng những bức tranh mà chỉ ai cũng phải đồng cảm và mạo hiểm tương tự mới chiêm ngưỡng được. Và một xúc cảm dội vào tôi khi chứng kiến những gì là đặc trưng của con người đang hiển hiện – sự sáng tạo, sự táo bạo, "sự điên rồ". Và tôi nghĩ về cả những con vật được vẽ trên vách hang – những con bò rừng, voi ma mút và tê giác. Những con quái thú khổng lồ này phải chạy trốn khỏi sự săn bắn truy đuổi của những người châu Âu thời kỳ Đồ đá cũ, và rồi, từng con một, cùng với những người Neanderthals, bị tận diệt.

Nguyễn Quang *dịch*[2]

[2] *Nguyên tác: https://www.newyorker.com/magazine/2011/08/15/sleeping-with-the-enemy*

TÍNH SỐ PI: XƯA VÀ NAY
Phần I: Tính số Pi - Xưa

TẠ DUY PHƯỢNG, ĐOÀN THỊ LỆ, CUNG THỊ KIM THÀNH, MAI VĂN THU, NGUYỄN HOÀNG VŨ

Một số vô tỷ rất quen thuộc và có nhiều ý nghĩa thực tế là tỷ số giữa chu vi đường tròn và đường kính của nó, lần đầu tiên được nhà toán học Anh William Jones (16751749) ký hiệu bằng chữ π năm 1706 trong cuốn sách *Synopsis Palmariorum Matheseos* (*Nhập môn Toán học mới*). π là chữ cái đầu tiên trong chữ Hy Lạp *περιφέρεια* (*periphery–viền ngoài–chu vi*). Năm 1748, trong cuốn sách rất phổ biến, *Introductio in analysin infinitorum* (*Nhập môn Giải tích vô hạn*), Euler viết: "*để ngắn gọn, ta sẽ ký hiệu π bằng một nửa chu vi của đường tròn bán kính bằng* 1". Từ đó π được phổ biến ở châu Âu và ngày nay đã trở thành ký hiệu toán học quen thuộc với tất cả mọi người.

Số Pi trước toán học Hy Lạp

Người Babylon (khoảng $1800-1600$ trước Công nguyên) tính chu vi một vòng tròn bằng ba lần đường kính của nó. Hơn nữa, họ còn chính xác hơn khi chọn diện tích hình tròn theo công thức $S=\frac{2}{25}L^2$, trong đó L là chu vi hình tròn. Như vậy, so với công thức chính xác $S=\pi R^2=\frac{1}{4\pi}(2\pi R)^2$ thì số khá chính xác so với $\pi\approx 3.1416$.

Bài toán 48 trong bản giấy cói Ahmes (Ahmes Rhind Papyrus, 1850 trước Công nguyên) phát biểu như sau. *Đường tròn có đường kính* 9 *khet* (đơn vị độ dài). *Diện tích của nó là bao nhiêu?*

Giải: Bỏ đi $\frac{1}{9}$ trong đường kính, cụ thể là 1, còn 8. Nhân 8 với 8, diện tích của nó là 64.

Bài toán này cho thấy, người Ai Cập cổ đại đã tính diện tích S của hình tròn có đường kính d bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng $\frac{8}{9}d$:

$$S=\left(d-\frac{1}{9}d\right)^2=\left(\frac{8}{9}d\right)^2=\frac{64}{81}d^2.$$

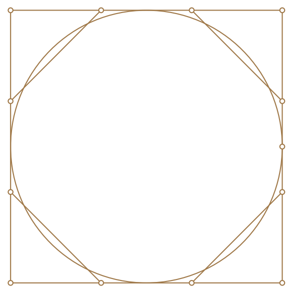
Từ đây ta có $S=\frac{64}{81}d^2=\pi\frac{d^2}{4}$. Suy ra

$$\pi=\frac{64\times 4}{81}=\frac{256}{81}\approx 3.16049.$$

Sai số của số này so với $\pi\approx 3.14156$ là gần 2% và có phân số xấp xỉ là $3\frac{1}{7}=\frac{22}{7}\approx 3.14286$.

Giả sử cắt bốn góc của hình vuông cạnh 9 *khet* (đơn vị dài) bốn tam giác vuông cân có cạnh bằng 3 *khet*. Khi ấy diện tích bát giác còn lại gần bằng diện tích hình tròn (hình tròn có phần nằm trong, cũng có phần nằm ngoài bát giác, Hình 1). Ta có $S_{\text{bát giác}}=9^2-4.\frac{3^2}{2}=63.$ Giá trị này gần với giá trị $S=$

$\left(\frac{8}{9}d\right)^2 = 64$ khi cho $d = 9$ là cơ sở để giải thích công thức tính diện tích hình tròn $S = \frac{64}{81}d^2$ của người Babylon.



Hình 1.

Trong bài toán khắc trên bảng đồng của người Babylon, số π được chọn bằng $\frac{25}{8} = 3.125$.

Khi đo đạc tháp Gira vĩ đại (2500 trước Công nguyên), các nhà khảo cổ học đã nhận thấy người Ai Cập chọn số π bằng $\frac{22}{7} \approx 3.14$.

Người Hebrews cũng lấy $\pi = 3$. Điều này được thấy trong kinh Cựu ước, khi nói về bồn tắm tròn trong lâu đài của nhà vua Salomon.

Số Pi trong toán học Hy Lạp

Thuật toán đầu tiên tính gần đúng số π được nhà toán học Hy Lạp Archimedes (khoảng 287 – 212 trước Công nguyên) được trình bày trong cuốn sách *Measurement of the Circle* (*Đo hình tròn*). Ông đã tính được

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70} \qquad (1)$$

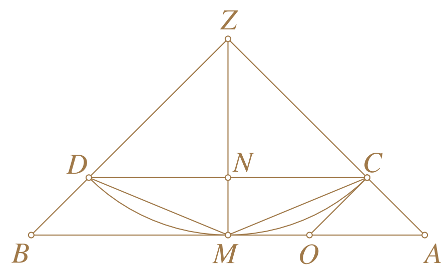
bằng cách xét các đa giác đều 96 cạnh nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn như sau.

Giả sử p_n và P_n là chu vi các đa giác đều n cạnh nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn chu vi C. Khi ấy ta có

$$\begin{aligned} p_6 &< p_{12} < p_{24} < p_{48} < p_{96} < \ldots < p_n \\ &< \ldots < C < \ldots < P_n < \ldots < P_{96} < P_{48} \\ &< P_{24} < P_{12} < P_6. \end{aligned}$$

Dãy số $\{p_n\}$ là dãy số tăng, bị chặn trên bởi C và $\{P_n\}$ là dãy số giảm bị chặn dưới bởi C. Do đó chúng có giới hạn và có thể chứng minh giới hạn chung của chúng là C.

Giả sử Z là tâm hình tròn, và $AB = 2t$ và $CD = 2s$ tương ứng là độ dài một cạnh của đa giác đều n cạnh ngoại tiếp và nội tiếp hình tròn. Gọi M là điểm giữa của AB, N là điểm giữa của CD và O là giao điểm của tiếp tuyến tại điểm C với MA (Hình 2). Tương ứng $OM = OC = t'$ là nửa cạnh của đa giác đều $2n$ cạnh ngoại tiếp và $MC = MD = 2s'$ là cạnh của đa giác đều $2n$ cạnh nội tiếp đường tròn.



Hình 2.

Vì ACO và AMZ là các tam giác vuông đồng dạng nên $\frac{t'}{t-t'} = \frac{OC}{OA} = \frac{ZM}{ZA}$.

Theo Định lý Thales ta có $\frac{s}{t} = \frac{NC}{MA} = \frac{CZ}{AZ}$.

Vì $MZ \in CZ$ nên ta có

$$\frac{t'}{t-t'} = \frac{s}{t} \quad \text{hay } t' = \frac{ts}{t+s}.$$

Vì các tam giác cân CMD và COM là đồng dạng, nên ta có $\frac{2s'}{2s} = \frac{t'}{2s'}$, nghĩa là $2s'^2 = st'$.

Vì P_n và p_n là chu vi đa giác đều n cạnh, P_{2n} và p_{2n} là chu vi đa giác đều $2n$ cạnh ngoại và nội tiếp hình tròn nên $p_n = 2ns$, $P_n = 2nt$, $p_{2n} = 2ns'$, $P_{2n} = 2nt'$.

Vậy P_{2n} là trung bình điều hòa của p_n và P_n:

$$\begin{aligned} P_{2n} = 2nt' &= \frac{2nts}{t+s} = \frac{2nt \cdot 2ns}{2nt + 2ns} \\ &= \frac{p_n \cdot P_n}{p_n + P_n}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Và p_{2n} là trung bình nhân của p_n và P_{2n}:

$$p_{2n} = 2ns' = 2n\sqrt{s \cdot t'} = \sqrt{2ns \cdot 2nt'}$$
$$= \sqrt{p_n \cdot P_{2n}}. \qquad (3)$$

Bắt đầu từ $n = 6$: $p_6 = 3d$ và $P_6 = 2\sqrt{3}d$, trong đó d là đường kính hình tròn, nhờ các công thức truy hồi (2) và (3), ta tìm được p_{96} và P_{96}. Sử dụng đánh giá $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$, Archimetdes tìm được tỷ số giữa chu vi đa giác đều 96 cạnh và đường kính của hình tròn nội tiếp là

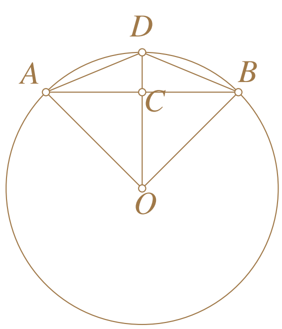
$$14688 : 4673\frac{1}{2} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7} = 3\frac{10}{70}.$$

Và tỷ số giữa chu vi đa giác đều 96 cạnh và đường kính của hình tròn ngoại tiếp là

$$6336 : 2077\frac{1}{4} > 3\frac{10}{71}.$$

Vậy (1) được chứng minh.

Ta cũng có thể tính toán cách khác như sau. Giả sử đường tròn tâm O có bán kính bằng 1. AB là một cạnh của hình đa giác đều n cạnh nội tiếp đường tròn, có độ dài là s_n. Trong tam giác OAB, kẻ OC vuông góc với AB cắt đường tròn tại D. Suy ra AD và BD là hai cạnh của đa giác đều $2n$ cạnh, có độ dài là s_{2n} (Hình 3).



Hình 3.

Áp dụng định lý Pythagoras vào tam giác vuông ACD ta có

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = AC^2 + (OD - OC)^2).$$

Lại áp dụng định lý Pythagoras vào tam giác vuông ACO ta được

$$OC = \sqrt{OA^2 - AC^2}.$$

Suy ra

$$AD^2 = AC^2 + \left(OD - \sqrt{OA^2 - AC^2}\right)^2$$

Với $OA = OD = 1$, $AC = \frac{s_n}{2}$, $AD = s_{2n}$, ta có

$$s_{2n}^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2}.$$

Suy ra

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}. \qquad (6)$$

Sử dụng công thức (4), với hình lục giác đều có cạnh bằng bán kính và bằng 1 (Hình 4) ta được

$$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Gấp đôi số cạnh được $n = 12$ thì

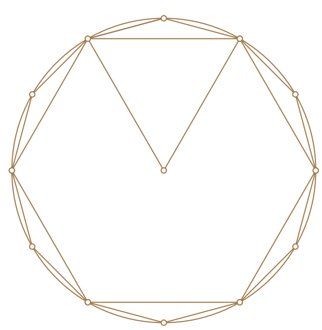
$$s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{3})}}$$
$$= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

Tiếp tục với $n = 24$ thì

$$s_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}.$$

Và với $n = 96$ thì ta được

$$s_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}.$$



Hình 4.

Chu vi của đa giác đều 96 cạnh bằng

$$96 \cdot \frac{s_{96}}{2}$$

$$= 48 \cdot s_{96} = 48\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

$$\approx 3,14103 \approx 3\frac{10}{71}.$$

Tương tự cho đa giác đều ngoại tiếp, ta có

$$S_{2n} = \frac{2\sqrt{4+S_n^2}-4}{S_n}. \qquad (5)$$

Bắt đầu với một lục giác đều ngoại tiếp một đường tròn (Hình 5). Do tam giác OAB đều nên

$$OA = OB = AB = S_6; \;\; AC = \frac{S_6}{2}; \;\; OC = 1.$$

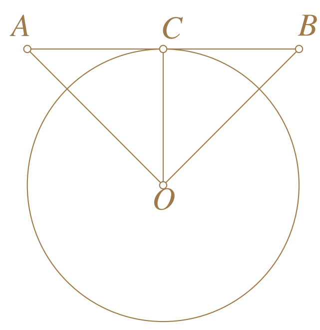
Áp dụng định lý Pythagoras cho tam giác vuông OAC ta có

$$OA^2 = OC^2 + AC^2 \Leftrightarrow S_6^2 = 1^2 + (\frac{S_6}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow S_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Theo (5) ta sẽ tính được $S_{12}, S_{24}, S_{48}, S_{96.}$. Chu vi của đa giác đều 96 cạnh là

$$96.\frac{S_{96}}{2} \approx 3,14271 \approx 3\frac{10}{70}.$$



Hình 5.

Vì hình tròn bị giới hạn bởi các đa giác đều nội tiếp và ngoại tiếp, nên (1) được chứng minh. Trong *Plinthides and Cylinders*, Archimedes còn tính số Pi:

$$\frac{195888}{62351} > \pi > \frac{211875}{67441}$$

hay

$$3.14697 > \pi > 3.1463911.$$

Đánh giá này không chính xác vì $\pi \approx 3.141592654$ nằm ngoài khoảng trên. Một đánh giá tinh tế hơn được làm bởi Tannery

$$\frac{195882}{62351} > \pi > \frac{211872}{67441}$$

hay

$$3.141601578 > \pi > 3.141590427.$$

Một đánh giá khác là

$$\frac{195888}{62351} > \pi > \frac{211875}{67444}$$

hay

$$3.141697808 > \pi > 3.141495166.$$

Khoảng năm 150 Công nguyên, nhà bác học Ptolemy, trong tác phẩm Almagest, dựa trên bảng tính các cung (Table of Chords), đã dùng biểu diễn gần đúng số Pi dưới dạng phân số trong hệ đếm cơ số 60 là

$$\pi \approx 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = \frac{377}{120} \approx 3.141666667.$$

Ông cũng nhận xét rằng, số này nằm giữa $3\frac{10}{71}$ và $3\frac{10}{70}$.

Số Pi trong toán học Trung Quốc

Lúc đầu, người Trung Quốc chấp nhận xấp xỉ số $\pi \approx 3$. Đầu thế kỷ II, Trương Hành (張衡, khoảng 78 – 139) tìm được $\pi \approx \sqrt{10} \approx 3.162$. Bằng cách nội tiếp hình tròn bởi các hình lục giác đều và gấp đôi số cạnh, Liu Hui (劉徽, 220 – 280) năm 263 trong cuốn sách Cửu chương toán thuật (九章算術) đã tìm được $\pi \approx 3.14$ và sau đó Ông tìm được $\pi \approx 3.14159$. Tổ Xung Chi (祖沖之, 429 – 500), sử dụng thuật toán của Liu Hui với đa giác $12288 = 3 \cdot 2^{12}$ cạnh, đã tính số π chính xác đến 8 chữ số:

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

Và Ông chọn $\pi \approx \dfrac{355}{113} \approx 3.1415929$ hoặc

$\pi \approx \dfrac{22}{7} \approx 3.145927.$

Số Pi trong toán học Việt Nam

Lương Thế Vinh ($1441 - 1497$, [4]) và các nhà toán học sau Ông, cho đến thế kỉ XVIII, chọn $\pi = 3$. Nguyễn Hữu Thận ($1757 - 1831$, [3]) đã sử dụng giá trị của số π gần đúng đến 8 chữ số thập phân. Ông đã sử dụng số $\pi \approx 3.14159265$, trong khi sách *Bút toán chỉ nam* của Nguyễn Cẩn in năm 1909 [1], sau Nguyễn Hữu Thận 80 năm vẫn dùng số π bằng 3.14 hoặc 3.1416. Tương tự, Phạm Gia Kỉ, trong *Đại thành toán học chỉ minh* [2] viết khoảng 1840 cũng chỉ dùng π bằng 3.14 hoặc 3.1416. Nguyễn Hữu Thận và Nguyễn Cẩn cũng nhắc đến *cách tính của Tây phương* (phương pháp gấp đôi số cạnh của Arsimetdes). Quan hệ giữa đường kính và chu vi (thông qua số π) được Nguyễn Hữu Thận gọi là *định luật chu vi đường kính*. Nguyễn Hữu Thận phát biểu:

Định luật chu vi đường kính

Đường kính 100000000, chu vi 314159265

Lại có chu vi $p = 100000000$, đường kính $d = 31830988$.

Giải thích Nếu lấy $\pi = 3,14159265$, đường kính $= 100000000$ thì chu vi đường tròn là $p = d.\pi = 314159265$ (chính xác đến 8 chữ số).

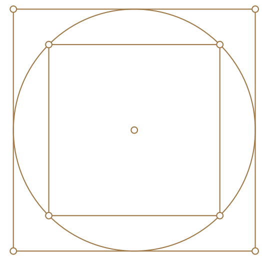
Nếu biết chu vi $p = 100000000$, thì

$$d = \frac{p}{\pi} = \frac{1000000}{3.14159265} \approx 31830988$$

(chính xác đến 8 chữ số).

Nguyễn Hữu Thận viết: *Phương pháp là cho bên trong hình tròn bao chứa hình vuông, lại từ bên ngoài hình tròn cắt hình vuông. Phép toán đến ức, vạn lần, tập trung tìm sẽ được vô số đầu mối. Trong ngoài đến tập hợp, trong là cạnh huyền chính, ngoài là đường thẳng được cắt. Cho đến vô số đường bao quanh hình tròn, gần giống như trực tuyến mà được số chu vi này, vốn xuất phát từ phép Tây là kỹ lưỡng nhất.*

Giải thích. Đây là phép tính chu vi đường tròn bắt đầu bằng hình vuông nội và ngoại tiếp, sau đó gấp đôi số cạnh (phương pháp của Liu Hui). Gọi d là đường kính hình tròn, bán kính $r = \dfrac{d}{2}$. Chu vi hình vuông ngoại tiếp bằng $4d > \pi d = 3,14d$ (cạnh hình vuông bằng đường kính).



Hình 6.

Hình vuông nội tiếp đường tròn có đường chéo bằng cạnh hình vuông bằng $\dfrac{d}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}$. Do đó chu vi hình vuông nội tiếp bằng (Hình 6): $4r = 2d \approx 2d \times 1,4142 \approx 2,8284 < d\pi \approx d.3,14 < 4d$. Gấp đôi số cạnh đa giác nội ngoại tiếp và tính giới hạn ta được chu vi hình tròn. Nguyễn Hữu Thận cũng phát biểu

Phép rút gọn chu vi, đường kính

Đường kính: 113 Chu vi: 355

Suy luận ban đầu là: Phép tính chu vi, đường kính, cách làm tốt dùng đường kính là 7, đường bao quanh (chu vi) là 22 thì thừa. Cách tỷ mỉ dùng đường kính là 50, chu vi là 157 thì thiếu. Chỉ có sắp đặt đường kính gộp lại là 113, chu vi là 355, phù hợp với định luật hơn. Cho nên chọn dùng nó.

Giải thích. Chu vi hình tròn bằng:

$$\begin{aligned} p = d\pi &\approx 7 \times 3.14159265 \\ &\approx 21.99114855 < 22; \\ p = d\pi &\approx 50 \times 3.14159265 \\ &\approx 157.0796325 > 157. \\ d\pi &\approx 113 \times 3.14159265 \\ &\approx 354.99996945 < 355. \end{aligned}$$

Sai số:

1) $22 - 21.99114855 = 0.00885415$;

2) $157.0796325 - 157 = 0.0796325$;

3) $355 - 354.99996 = 0,00004$ ($\frac{355}{113}$ chính xác nhất, đến 4 chữ số).

Vậy chọn $\pi \approx \frac{355}{113}$ là phân số chính xác hơn cả.

Nguyễn Hữu Thận viết: *Cạnh hình vuông với đường kính hình tròn bằng nhau nhưng diện tích hình vuông và diện tích hình tròn không có cùng định luật.*

Diện tích hình vuông: 100000000.

Diện tích hình tròn: 78539816.

Mặt khác:

Diện tích hình tròn: 100000000.

Diện tích hình vuông: 127323954.

Giải thích Với cạnh $a = 10000$ thì diện tích hình vuông $a^2 = 1.0000.0000$. Diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông có đường kính bằng cạnh hình vuông, do đó

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi a^2}{4}$$
$$\approx 3.14159265 \times 1.0000.0000 : 4$$
$$\approx 78539816.$$

Nếu diện tích hình tròn là 100000000 thì diện tích hình vuông là

$$a^2 = \frac{4S}{\pi} = \frac{4 \times 100000000}{3.14159265}$$
$$= 127323954.$$

Nguyễn Hữu Thận viết: *Diện tích hình vuông và diện tích hình tròn bằng nhau, cạnh hình vuông và đường kính hình tròn không cùng định luật.*

Đường kính hình tròn: 100000000.

Cạnh hình vuông: 88622692.

Lại có:

Cạnh hình vuông: 100000000.

Đường kính hình tròn: 112837916.

Giải thích. Diện tích hình vuông bằng diện tích hình tròn và bằng

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$
$$\approx 3.14159265 \times 1.0000.0000^2 : 4$$
$$\approx 7853981633974483.$$

Cạnh a của hình vuông bằng

$$a = \sqrt{S} \approx 88622692.$$

Tương tự, nếu có cạnh hình vuông bằng 100000000 thì

$$d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4a^2}{\pi}} = \frac{2a}{\sqrt{\pi}}$$
$$\approx \frac{2 \times 100000000}{\sqrt{3.14159265}}$$
$$\approx 112837916.$$

Như vậy, có thể khẳng định, Nguyễn Hữu Thận ($1757 - 1831$) là người Việt Nam đầu tiên có cảm nhận toán học về số vô tỷ và giới hạn thông qua quan hệ giữa số π và diện tích các đa giác đều nội ngoại tiếp hình tròn khi gấp đôi số cạnh.

Tiếp tục tính gần đúng số Pi

Tính toán thiên văn trong *Shatapatha Brahmana* (Ấn Độ, thế kỉ IV trước Công nguyên) dùng xấp xỉ $\pi \approx \frac{339}{108} \approx 3.139$. Một số tư liệu cổ của Ấn Độ chọn $\pi \approx \sqrt{10} \approx 3.162$. Trong tác phẩm *Āryabhaṭīya*, nhà thiên văn Ấn Độ Aryabhata ($476 - 550$) đã sử dụng giá trị $\pi = 3.1416$.

Fibonacci vào năm 1220 đã tính được $\pi = 3.1418$ độc lập với Archimedes.

Tác giả người Ý Dante đã sử dụng giá trị $\pi = 3 + \frac{\sqrt{2}}{10} \approx 3.14142$.

Mãi 8 thế kỷ sau, kỷ lục của Tổ Xung Chi mới bị phá bởi nhà toán học Ba Tư Al–Kāshānī ($1370 - 1450$). Ông dùng phương pháp của Archimedes và xét các đa giác đều 3.2^{28} cạnh nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn và tìm được số π đúng với 17 chữ số là 3.1415926535897932. Al–Kāshānī còn dự đoán π là số vô tỷ. Điều này chỉ được chứng minh bởi nhà toán học Thụy Sĩ Johann Heinrich Lambert ($1728-1777$).

Cũng gấp đôi số cạnh như Archimedes, nhưng xuất phát từ hình vuông, nhà toán học Pháp François Viète vào năm 1578 đã tính chính xác số π đến 9 chữ số nhờ sử dụng đa giác 3×2^{17} cạnh dựa trên công thức

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\ldots$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}$$
$$\times\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\ldots \quad (6)$$

Giải thích: Sử dụng công thức $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$ và $\cos\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$, ta dễ dàng tính được

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)};$$
$$\cos\frac{\pi}{16}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}.$$

Công lao của François Viète là phát hiện ra công thức biểu diễn (6).

Gọi $A(n)$ là diện tích đa giác đều n cạnh nội tiếp hình tròn bán kính r và β là góc ở tâm. Ta có (Hình 2):

$$A(n)=n\frac{1}{2}r^2\sin 2\beta=nr^2\sin\beta\cos\beta.$$

Tương tự,

$$A(2n)=2n\frac{1}{2}r^2\sin\beta=nr^2\sin\beta.$$

Suy ra

$$\frac{A(n)}{A(4n)}=\frac{A(n)}{A(2n)}\cdot\frac{A(2n)}{A(4n)}=\cos\beta\cos\frac{\beta}{2}.$$

Do đó,

$$\frac{A(n)}{A(2^kn)}=\frac{A(n)}{A(2n)}\cdot\frac{A(2n)}{A(4n)}\cdots\frac{A\left(2^{k-1}n\right)}{A(2^kn)}$$
$$=\cos\beta\cos\frac{\beta}{2}\ldots\cos\frac{\beta}{2^k}.$$

Khi k tiến tới ∞ thì $A(2^kn)$ tiến tới diện tích hình tròn, nghĩa là $\lim\limits_{n\to\infty}A(2^kn)=\pi r^2$. Suy ra

$$\pi r^2=\frac{A(n)}{\cos\beta\cos\frac{\beta}{2}\ldots\cos\frac{\beta}{2^k}\ldots}=\frac{\frac{1}{2}nr^2\sin 2\beta}{\cos\beta\cos\frac{\beta}{2}\ldots\cos\frac{\beta}{2^k}\ldots}.$$

Vậy

$$\pi=\frac{n\sin 2\beta}{2\cos\beta\cos\frac{\beta}{2}\ldots\cos\frac{\beta}{2^k}\ldots}.$$

Để được công thức (6), Viète đã chọn $n=4$. Khi ấy $\beta=\dfrac{\pi}{4}$ và

$$\sin 2\beta=\sin\frac{\pi}{2}=1,\cos\beta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nhà toán học Đức Adriaan van Roomen ($1561-1615$) nhận được xấp xỉ số π đến 15 chữ số vào năm 1593.

Năm 1596, nhà toán học người Hà Lan Ludolph van Ceulen ($1540-1610$) đã dành 50 năm trong hơn 70 năm của đời mình để tính số π xấp xỉ đến 35 chữ số.

Năm 1621, nhà khoa học Đức Willebrord Snellius đã đạt được xấp xỉ số π đến 34 chữ số.

Năm 1630, nhà thiên văn người Áo Christoph Grienberger ($1561-1636$) đã tìm được số π xấp xỉ đến 38 chữ số bằng cách sử dụng đa giác đều 10^{40} cạnh.

Năm 1654, Christiaan Huygens đã nhận được xấp xỉ đên 10 chữ số thập phân nhờ sử dụng phương pháp ngoại suy Richardson.

Kỉ lục Christoph Grienberger chỉ bị vượt qua và thuật toán Archimedes đi vào lịch sử khi năm 1699, số π được tính gần đúng đến 71 chữ số nhờ phân tích số π dưới dạng chuỗi lũy thừa. Từ đó, số π được tính gần đúng nhờ công cụ giải tích. Điều này sẽ được trình bày chi tiết trong Phần 2.

Biểu diễn số π dưới dạng phân số liên tục

Số π có thể biểu diễn dưới dạng phân số liên tục như sau:

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}}$$

Cắt cụt phân số này ta lần lượt được $\pi \approx 3$; $\pi \approx 3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$; $\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}} = 3+\frac{15}{106}=\frac{333}{106}$; $\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+1}} = 3+\frac{16}{113}=\frac{355}{113}$, là các phân số xấp xỉ số π thường gặp trong lịch sử các dân tộc Tây–Đông.

Thông tin tác giả

• Tạ Duy Phượng (PGS Toán học)

• Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành (Thạc sĩ Hán Nôm)

• Mai Văn Thu, Nguyễn Hoàng Vũ (Thạc sĩ Toán học)

Tài liệu trich dẫn

[1] 阮董 Nguyễn Cẩn (1909), *Bút toán chỉ nam*, Thư viện viện nghiên cứu Hán Nôm, Viện nghiên cứu Hán Nôm, VHv. 282 và A.1031. Bản thảo bản dịch của Đoàn Thị Lệ, 2015.

[2] 范嘉紀 Phạm Gia Kỷ, 大成算學指明 *Đại thành toán học chỉ minh*, Thư viện viện nghiên cứu Hán Nôm, Viện nghiên cứu Hán Nôm, A.1555. Bản thảo bản dịch của Phạm Hữu Lộc, 2019.

[3] 阮有慎 Nguyễn Hữu Thận, 意齋算法一得錄 *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* (1829), Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm, Vhv.1184, A.1336, A. 982, A.1336/a. Bản thảo bản dịch của Đoàn Thị Lệ và Cung Thị Kim Thành, 2015 – 2016.

[4] 梁世榮 Lương Thế Vinh, 算法大成 *Toán pháp đại thành*, Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm, Ký hiệu: A.2931 và VHv. 1152. Bản thảo bản dịch của Cung Thị Kim Thành, 2017.

[5] David M. Burton, *The History of Mathematics, An Introduction*, Seventh Edition, McGraw Hill, 2011, 819 p.

[6] Heinrich Dörrie, *The 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, New York, Dover Publications, INC., 1965.

[7] Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1921, Volume 1, 232 – 235.

[8] Lam Lay–Yong and Ang Tian–Se, Circle Measurements in Ancient China, *Historia Mathematica*, 13, (1986), 325 – 340.

[9] A. Volkov, Calculation of π in ancient China: From Liu Hui to Zu Chongzhi, *Historia Scientiarum*, Vol. 4 (1994), No 2, 139 – 157.

(*Còn tiếp*)