- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P671–P680: trước ngày 15/3/2023.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P651. (Mức B) Có hai chiếc hộp, mỗi hộp đều chứa các viên bi khác màu. Số viên bi đỏ ở hộp thứ nhất bằng $\frac{4}{15}$ số viên bi trong hộp đó. Tổng số viên bi đỏ ở hai hộp bằng $\frac{11}{25}$ tổng số viên bi của hai hộp. Hỏi, trong hai hộp có ít nhất bao nhiêu viên bi đỏ? Biết rằng, hộp thứ hai chứa 200 viên bi.

Lời giải (*của người chấm bài*)**.**

Gọi a (viên) là số viên bi đỏ có trong hộp thứ nhất, và gọi s (viên) là tổng số viên bi đỏ của cả hai hộp; ta có, $a, s \in \mathbb{N}^*$. Theo bài ra, ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của s.

Vì số viên bi đỏ ở hộp thứ nhất bằng $\frac{4}{15}$ số viên bi trong hộp đó, nên số viên bi có trong hộp thứ nhất bằng $d\frac{15a}{4}$. Do đó, theo giả thiết về tổng số viên bi đỏ của cả hai hộp, ta có:

$$s = \frac{11}{25}\left(\frac{15a}{4} + 200\right) = \frac{33a}{20} + 88. \quad (1)$$

Từ đó, do $s \in \mathbb{N}^*$ và $a > 0$, suy ra $\frac{33a}{20} \in \mathbb{N}^*$. Vì thế, $33a$ chia hết cho 20; mà $(33, 20) = 1$, nên a chia hết cho 20. Suy ra, $a \geq 20$ (do $a \in \mathbb{N}^*$). Vì vậy, từ (1) ta có:

$$s \geq \frac{33 \cdot 20}{20} + 88 = 121. \quad (2)$$

Tiếp theo, xét hai hộp bi, mà hộp thứ nhất chứa 75 viên, trong đó có 20 viên bi đỏ, và hộp thứ hai chứa 200 viên, trong đó có 101 viên bi đỏ, ta có:

$$20 = \frac{4}{15} \cdot 75 \text{ và } 20 + 101 = \frac{11}{25}(75 + 200).$$

Như vậy, hai hộp bi nói trên thỏa mãn tất cả các giả thiết của đề bài, và có tổng số viên bi đỏ ở cả hai hộp bằng 121 viên. (3)

Từ (2) và (3) suy ra, giá trị nhỏ nhất của s là 121. Nói một cách khác, trong hai hộp bi, thỏa mãn các giả thiết của đề bài, có ít nhất 121 viên bi đỏ.

Bình luận và Nhận xét

Rất tiếc, tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều không được coi là lời giải đúng, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau:

– Khẳng định giá trị nhỏ nhất của s (theo ký hiệu trong Lời giải trên) là 121 *ngay sau khi* chỉ mới chứng minh được $s \geq 121$;

(*Lỗi trên đây đã được nhắc nhở nhiều lần trong các số trước đây của Tạp chí!*)

– Giải một bài toán khác, thay vì giải bài đã ra. Cụ thể, các bạn mắc lỗi này đã giải một trong hai bài toán dưới đây:

+ Bài toán 1: Với hai hộp bi thỏa mãn các giả thiết của bài đã ra, hãy tìm số viên bi đỏ nhỏ nhất có thể trong mỗi hộp.

+ Bài toán 2: Là bài toán nhận được từ bài đã ra, bằng cách thay giả thiết "tổng số viên bi đỏ ở hai hộp bằng $\frac{11}{25}$ tổng số viên bi của hai hộp" bởi giả thiết "số viên bi đỏ ở hộp thứ hai bằng $\frac{11}{25}$ tổng số viên bi của hai hộp".

Lê Huy

P652. (Mức B) Chứng minh rằng, với hai số nguyên dương a, b, ta có thể tìm được số nguyên dương c, sao cho $a^2 + b^2 + c^2$ là một số chính phương, khi và chỉ khi ab là một số chẵn.

Lời giải (*dựa theo các lời giải đúng, mà Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*)**.**

1. *Chứng minh "khi".*

Giả sử a, b là hai số nguyên dương có tích là một số chẵn. Ta cần chứng minh có thể tìm được số nguyên dương c, sao cho $a^2 + b^2 + c^2$ là một số chính phương.

Vì ab là một số chẵn nên trong hai số nguyên dương a, b có ít nhất một số chẵn. Do đó, xảy ra một trong hai trường hợp sau:

◇ *Trường hợp* 1: Trong hai số a, b có đúng một số chẵn.

Khi đó, a^2+b^2 là một số nguyên dương lẻ. Vì thế, tồn tại số nguyên dương m, sao cho

$$a^2+b^2=2m+1.$$

Chọn $c=m$, ta có c là số nguyên dương, và

$$a^2+b^2+c^2=2m+1+m^2=(m+1)^2,$$

là một số chính phương.

◇ *Trường hợp* 2: Cả hai số a, b đều là số chẵn. Khi đó, a^2, b^2 là các số chẵn chia hết cho 4. Suy ra, a^2+b^2 là một số nguyên dương chẵn chia hết cho 4, và lớn hơn hoặc bằng 8. Vì thế, tồn tại số nguyên dương $k \geq 2$, sao cho

$$a^2+b^2=4k.$$

Chọn $c=k-1$, ta có c là số nguyên dương, và

$$a^2+b^2+c^2=4k+(k-1)^2=(k+1)^2,$$

là một số chính phương.

Hiển nhiên, kết quả xét hai trường hợp trên cho ta điều cần chứng minh.

2. *Chứng minh "chỉ khi".*

Giả sử a, b là hai số nguyên dương, sao cho có số nguyên dương c, để $a^2+b^2+c^2$ là một số chính phương. Ta cần chứng minh ab là một số chẵn.

Giả sử ab là một số lẻ. (1)

Khi đó, cả hai số a, b đều là số lẻ. Do đó, số dư trong các phép chia a^2, b^2 cho 4 đều là 1. Suy ra, số dư trong phép chia a^2+b^2 cho 4 là 2. Từ đây, do số dư trong phép chia c^2 cho 4 là 0 hoặc 1, nên số dư trong phép chia $a^2+b^2+c^2$ cho 4 sẽ là 2 hoặc 3. (2)

Mặt khác, do $a^2+b^2+c^2$ là một số chính phương, nên số dư trong phép chia $a^2+b^2+c^2$ cho 4 chỉ có thể là 0 hoặc 1, mâu thuẫn với (2).

Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ giả sử (1) là sai. Vì thế, ta có điều cần chứng minh.

Bình luận và Nhận xét

Rất tiếc, có hơn nửa số lời giải, trong số tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, là lời giải không đúng, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau:

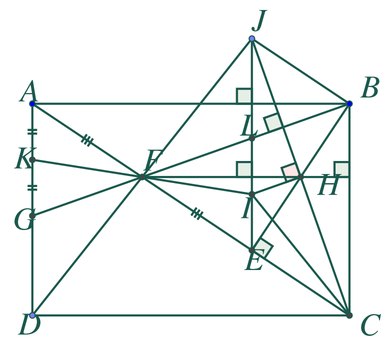
– Ở phần chứng minh "khi", chưa chứng minh số c được chọn là số dương;

– Chỉ mới chứng minh hoặc "khi", hoặc "chỉ khi".

Lưu Thị Thanh Hà

P653. (Mức B) Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E là hình chiếu vuông góc của điểm B trên đường thẳng AC; F là trung điểm của đoạn AE. Các đường thẳng BF, AD cắt nhau tại G. Gọi K là trung điểm của AG. Chứng minh rằng, $DK+KF>CF$.

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Minh Tuấn, lớp 9B, trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, Tp. Hà Nội*).



Gọi I, J tương ứng là điểm đối xứng với K, D qua F; ta có:

+ Đường thẳng JI đối xứng với đường thẳng DK qua F; (1)

+ $JI=DK$. (2)

Do (1) nên gọi L là giao điểm của các đường thẳng JI và GF, ta có L đối xứng với G qua F. Mà E đối xứng với A qua F (do giả thiết F là trung điểm của AE) nên đoạn thẳng EL đối xứng với đoạn thẳng AG qua F. Do đó, từ K là trung điểm của AG (giả thiết) suy ra I là trung điểm của EL. (3)

Do D, A tương ứng đối xứng với J, E qua F, nên $AD \parallel JE$ và $AD=JE$. Mà $BC \parallel AD$ và $BC=AD$ (do $ABCD$ là hình chữ nhật), nên $BC \parallel JE$ và $BC=JE$. Do đó, $JBCE$ là hình bình hành. Vì thế, gọi H là giao điểm của BE và JC, ta có H là trung điểm của BE và của CJ. Suy ra, IH là đường trung bình của tam giác LEB (do (3)), và FH là đường trung bình của tam giác AEB. Do đó

$$IH \parallel FB, \qquad (4)$$

và

$$FH \parallel AB. \qquad (5)$$

Từ (5), do $AB \perp BC$, suy ra $FH \perp BC$. Mà $BH \perp FC$ (do giả thiết E là hình chiếu vuông góc của B trên AC) nên H là trực tâm của tam giác BFC. Do đó, $CH \perp FB$, hay $CJ \perp FB$. (6)

Từ (4) và (6), suy ra $IH \perp CJ$. Mà H là trung điểm của CJ (theo chứng minh trên) nên JIC là tam giác cân tại I. Vì thế, $IJ = IC$. Kết hợp với (2), suy ra $DK = IC$. Do vậy, với lưu ý $KF = IF$, ta có:

$$DK + KF = IC + IF > CF.$$

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Lời giải của bạn *Nguyễn Minh Tuấn* là lời giải duy nhất Tạp chí nhận được từ bạn đọc.

Hạ Vũ Anh

P654. (Mức B) Cho đa thức

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5.$$

Tính tổng

$$S = f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + f\left(\frac{3}{2023}\right) + \cdots + f\left(\frac{2022}{2023}\right).$$

Lời giải.

• **Cách 1** (*dựa theo nhiều lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).

Trước hết, ta nhắc lại (không chứng minh) các công thức quen thuộc tính tổng bậc nhất, bậc hai và bậc ba của n số nguyên dương đầu tiên.

Với n là số nguyên dương tùy ý, ta có:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Tiếp theo, dễ thấy, ta có:

$$\begin{aligned} S &= f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + f\left(\frac{3}{2023}\right) \\ &\quad + \cdots + f\left(\frac{2022}{2023}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2023^3} \cdot \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 2022^3\right) \\ &\quad - 3 \cdot \frac{1}{2023^2} \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2022^2\right) \\ &\quad + 4 \cdot \frac{1}{2023} \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 2022) \\ &\quad - 5 \cdot 2022. \end{aligned}$$

Do đó, áp dụng các công thức nêu trên cho $n = 2022$, ta được:

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \frac{1}{2023^3} \cdot \frac{2022^2 \cdot 2023^2}{4} \\ &\quad - 3 \cdot \frac{1}{2023^2} \cdot \frac{2022 \cdot 2023 \cdot (2 \cdot 2022 + 1)}{6} \\ &\quad + 4 \cdot \frac{1}{2023} \cdot \frac{2022 \cdot 2023}{2} - 5 \cdot 2022 \\ &= \frac{1011 \cdot 2022}{2023} - \frac{1011 \cdot 4045}{2023} \\ &\quad + 2 \cdot 2022 - 5 \cdot 2022 \\ &= -1011 + 4 \cdot 1011 - 10 \cdot 1011 = -7077. \end{aligned}$$

• **Cách 2** (*dựa theo nhiều lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).

Trước hết, nhận thấy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2023} + \frac{2022}{2023} &= \frac{2}{2023} + \frac{2021}{2023} \\ &= \cdots = \frac{1011}{2023} + \frac{1012}{2023} = 1. \end{aligned}$$

Tiếp theo, với a, b là hai số thực tùy ý có tổng bằng 1, ta có:

$$\begin{aligned}
&f(a)+f(b)\\
&=2\left(a^3+b^3\right)-3\left(a^2+b^2\right)+4(a+b)-10\\
&=2\left((a+b)^3-3ab(a+b)\right)\\
&\quad-3\left((a+b)^2-2ab\right)+4(a+b)-10\\
&=2(1-3ab)-3(1-2ab)+4-10\\
&\quad(\text{ do } a+b=1)\\
&=-7.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{1}{2023}\right)+f\left(\frac{2022}{2023}\right)\\
&=f\left(\frac{2}{2023}\right)+f\left(\frac{2021}{2023}\right)\\
&=\cdots=f\left(\frac{1011}{2023}\right)+f\left(\frac{1012}{2023}\right)=-7.
\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}
S=&\left(f\left(\frac{1}{2023}\right)+f\left(\frac{2022}{2023}\right)\right)\\
&+\left(f\left(\frac{2}{2023}\right)+f\left(\frac{2021}{2023}\right)\right)\\
&+\cdots+\left(f\left(\frac{1011}{2023}\right)+f\left(\frac{1012}{2023}\right)\right)\\
=&(-7)\cdot 1011=-7077.
\end{aligned}$$

Bình luận và Nhận xét

1. Với các bạn đọc chưa biết các công thức tính tổng đã nêu ở Cách 1, các bạn có thể dễ dàng chứng minh các công thức đó bằng phương pháp qui nạp theo n.

2. Cách 1 là một cách giải rất tự nhiên, và các tính toán trên các số hoàn toàn đơn giản.

3. Tạp chí đã nhận được rất nhiều lời giải, từ bạn đọc; tất cả các lời giải này đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Lê Huy

P655. (Mức B) Tại mỗi đỉnh của một đa giác đều 2023 cạnh, người ta ghi một số thực, sao cho các số được ghi đôi một khác nhau. Chứng minh rằng, có thể tìm được một tam giác ABC cân tại A, với A, B, C là các đỉnh của đa giác đều đã cho, sao cho số được ghi tại đỉnh A nằm giữa hai số được ghi tại đỉnh B và đỉnh C.

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Phùng Việt Cường, lớp 11 Toán 2, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định*)**.**

Do các số được ghi đôi một khác nhau nên trong các số đó, có đúng một số lớn nhất và có đúng một số nhỏ nhất. Gọi hai đỉnh, mà tại đó được ghi hai số này, là B, C.

Vì đa giác đã cho là đa giác đều, nên có một đường tròn đi qua tất cả 2023 đỉnh của đa giác đó; gọi đường tròn này là (T).

Do 2023 là một số lẻ, nên trong hai cung tròn của (T), được tạo ra bởi hai đỉnh B, C, có một cung tròn chứa một số lẻ đỉnh. Giả sử số đỉnh thuộc cung tròn này (kể cả hai đỉnh B, C) là $2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$). Vì tất cả các cạnh của đa giác bằng nhau (do đa giác là đa giác đều), nên $2k+1$ đỉnh đó sẽ tạo ra $2k$ cung tròn (của (T)) nằm liên tiếp nhau, có độ dài bằng nhau, và mỗi cung tròn đều có hai đầu mút là hai đỉnh kề nhau. Vì thế, trong $2k+1$ đỉnh đó, có một đỉnh cách đều hai đỉnh B, C; gọi đỉnh này là A, ta có tam giác ABC thỏa mãn tất cả các yêu cầu của đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Lời giải trên cho thấy, bài đã ra là một dạng phát biểu khác của một kết quả kinh điển, liên quan đến đa giác đều: "*Với hai đỉnh phân biệt tùy ý của một đa giác đều có một số lẻ đỉnh, luôn có đúng một đỉnh của đa giác đó cách đều hai đỉnh ấy.*". Kết quả này là một hệ quả hiển nhiên của tính chất cơ bản dưới đây của đa giác đều:

"*Đường trung trực của đoạn thẳng nối hai đỉnh tùy ý của một đa giác đều là một trục đối xứng của đa giác ấy.*"

2. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, chỉ có hai lời giải đúng; các lời giải còn lại là lời giải sai, do người giải bài đã phủ định sai khẳng định cần chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Nguyễn Khắc Minh

P656. (Mức B) Xét 2022 số thực $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{2022}$, thỏa mãn: tổng các số dương bằng $\frac{1}{2}$ và tổng các số âm bằng $-\frac{1}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất có thể của $M = x_{999} - x_{32}$.

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Minh Tuấn, lớp 9B, trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, Tp. Hà Nội*).

Từ giả thiết "tổng các số dương bằng $\frac{1}{2}$ và tổng các số âm bằng $-\frac{1}{2}$", hiển nhiên suy ra, tổng của k số tùy ý ($1 \leq k \leq 2022$), trong 2022 số đã cho, không nhỏ hơn $-\frac{1}{2}$ và đồng thời, không vượt quá $\frac{1}{2}$.

Do đó, từ giả thiết $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{32}$, ta có

$$x_{32} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{32}}{32} \geq \frac{-\frac{1}{2}}{32} = -\frac{1}{64};$$

và từ giả thiết $x_{999} \leq x_{1000} \leq \cdots \leq x_{2022}$, ta có

$$x_{999} \leq \frac{x_{999} + x_{1000} + \cdots + x_{2022}}{1024} \leq \frac{\frac{1}{2}}{1024} = \frac{1}{2048}.$$

Suy ra

$$M = x_{999} - x_{32} \leq \frac{1}{2048} + \frac{1}{64} = \frac{33}{2048}.$$

Hơn nữa, dễ thấy, 2022 số thực

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{32} = -\frac{1}{64}$$

$$x_{33} = x_{34} = \cdots = x_{998} = 0$$

$$x_{999} = x_{1000} = \cdots = x_{2022} = \frac{1}{2048}$$

thỏa mãn tất cả các giả thiết của đề bài, và có

$$M = x_{999} - x_{32} = \frac{33}{2048}.$$

Vì vậy, giá trị lớn nhất của M bằng $\frac{33}{2048}$.

Bình luận và Nhận xét

Trong số tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, chỉ có lời giải của bạn *Nguyễn Minh Tuấn* là lời giải đúng. Ở các lời giải còn lại, người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau đây:

– Khẳng định giá trị lớn nhất của M bằng $\frac{33}{2048}$ *ngay sau khi* chỉ mới chứng minh được $M \leq \frac{33}{2048}$;

– Lập luận luẩn quẩn, dùng điều muốn chứng minh để chứng minh chính điều đó;

– Lập luận mang tính cảm tính.

Hà Thanh

P657. (Mức A) Cho a, b là các số thực phân biệt thuộc đoạn $[0; \pi]$, thỏa mãn: $e^a \cdot \sin a = e^b \cdot \sin b$. Chứng minh rằng, $\pi \leq a + b \leq \frac{3\pi}{2}$.

Lời giải (*dựa theo ý giải của một bạn học sinh lớp 9 THCS*).

Không mất tính tổng quát, giả sử $0 \leq a < b \leq \pi$.

1. *Chứng minh* $a + b \geq \pi$. (1)

◇ Nếu $a \geq \frac{\pi}{2}$ thì $b > \frac{\pi}{2}$; do đó, $a + b > \pi$.

◇ Nếu $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ thì $\sin a \geq 0$. Do đó, từ $e^a < b^b$ (vì $a < b$) và hệ thức của đề bài, ta có:

$$e^b \cdot \sin b = e^a \cdot \sin a \leq e^b \cdot \sin a.$$

Suy ra, $\sin b \leq \sin a$ (do $e^b > 0$). (2)

Vì $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ và $\pi \geq b > a$, nên từ (2) ta có $\pi \geq b \geq \pi - a$; do đó, Bất đẳng thức (2) được chứng minh.

2. Chứng minh $a + b \leq \frac{3\pi}{2}$. (3)

◇ Nếu $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ thì $a + b \leq \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$.

◇ Xét $\frac{\pi}{2} < a < \pi$.

Từ hệ thức của đề bài, ta có:

$$\frac{\sin a}{e^b} = \frac{\sin b}{e^a} = -\frac{\sin a - \sin b}{e^a - e^b}. \qquad (4)$$

Vì các hàm số $y=\sin x, y=3^x$ liên tục trên $[a;b]$, có đạo hàm trên $(a;b)$ và $e^a \neq e^b$, nên theo định lý trung bình Cauchy, tồn tại số thực $c \in (a;b)$ sao cho

$$\frac{\cos c}{e^c}=\frac{\sin a-\sin b}{e^a-e^b}. \qquad (5)$$

Từ (4) và (5), suy ra

$$\frac{\sin a}{e^b}=\frac{\sin b}{e^a}=-\frac{\cos c}{e^c}. \qquad (6)$$

Xét hàm số $f(x)=-\dfrac{\cos x}{e^x}$ trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$. Ta có:

$$\begin{aligned} f'(x)&=e^{-x}(\sin x+\cos x)\\ &=\sqrt{2}\cdot e^{-x}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Do $\dfrac{\pi}{2}<x\le\pi$, nên $\dfrac{3\pi}{4}<x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{5\pi}{4}$. Vì thế, từ (7) suy ra, trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, ta có:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4},$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4}<x\le\pi,$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}$$

Do đó, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right]$, và nghịch biến trên $\left[\dfrac{3\pi}{4};\pi\right]$. (8)

Xảy ra một trong hai trường hợp sau:

• *Trường hợp* 1: $\dfrac{\pi}{2}<a<c\le\dfrac{3\pi}{4}$.

Khi đó, theo (8), ta có:

$$-\frac{\cos c}{e^c}>-\frac{\cos a}{e^a}.$$

Từ bất đẳng thức vừa nêu trên và (6), suy ra $\sin b>-\cos a$; do đó

$$\sin(\pi-b)>\sin\left(a-\frac{\pi}{2}\right).$$

Vì $\dfrac{\pi}{2}<a<b\le\pi$ nên $0\le\pi-b<\dfrac{\pi}{2}$ và $0<a-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}$. Do đó, từ (9) suy ra

$$\pi-b>a-\frac{\pi}{2};$$

vì thế, $a+b<\dfrac{3\pi}{2}$.

• *Trường hợp* 2: $\dfrac{3\pi}{4}<c<b\le\pi$.

Khi đó, theo (8), ta có:

$$-\frac{\cos c}{e^c}>-\frac{\cos b}{e^b}.$$

Từ bất đẳng thức vừa nêu trên và (6), suy ra $\sin a>-\cos b$; do đó

$$\sin(\pi-a)>\sin\left(b-\frac{\pi}{2}\right). \qquad (10)$$

Vì $\dfrac{\pi}{2}<a<b\le\pi$ nên $0<\pi-a<\dfrac{\pi}{2}$ và $0<b-\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{\pi}{2}$. Do đó, từ (10) suy ra

$$\pi-a>b-\frac{\pi}{2};$$

vì thế, $a+b<\dfrac{3\pi}{2}$.

Bất đẳng thức (4) được chứng minh.

Vậy, ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Để thuận tiện cho việc theo dõi Lời giải trên của đông đảo đối tượng bạn đọc, chúng tôi nhắc lại dưới đây định lí trung bình Cauchy.

Định lys trung bình Cauchy. Cho a, b là hai số thực tùy ý, với $a<b$. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định trên $[a;b]$. Khi đó, nếu $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a;b]$, có đạo hàm trên $(a;b)$ thì tồn tại số thực $c\in(a;b)$, sao cho

$$f'(c)\cdot(g(a)-g(b))=g'(c)\cdot(f(a)-f(b)).$$

2. Qua lời giải trên, dễ thấy, không thể xảy ra dấu đẳng thức (dấu "=") ở các bất đẳng thức của đề bài.

3. Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có hai lời giải sai, và một lời giải không được coi là lời giải hoàn chỉnh, do trong lời giải có những lỗi "chính tả" không thể châm chước.

Trần Nam Dũng

P658. (Mức A) Cho số nguyên dương n. Giả sử $P(x)$ là một đa thức hệ số thực, có bậc nhỏ hơn n, sao cho đa thức $Q(x) = x^n \cdot P(x) + 1$ nhận $x = 2022$ làm một nghiệm, với bội không nhỏ hơn n. Tính giá trị $P(1011)$.

Lời giải (*dựa theo ý giải của tác giả bài toán*).

Do $\deg P < n$ nên từ hệ thức của đề bài suy ra $\deg Q < 2n$. (1)

Do $Q(x)$ nhận $x = 2022$ làm một nghiệm, với bội không nhỏ hơn n, nên

$$Q(x) = (x - 2022)^n \cdot R(x), \quad (2)$$

trong đó, $R(x)$ là một đa thức với hệ số thực. Do (1) nên $\deg R < n$. (3)

Từ (2) và hệ thức của đề bài, suy ra

$$x^n \cdot P(x) + 1 = (x - 2022)^n \cdot R(x). \quad (4)$$

Do đó

$$(-x + 2022)^n \cdot P(-x + 2022) + 1$$
$$= (-1)^n \cdot x^n \cdot R(-x + 2022). \quad (5)$$

Từ (4) và (5), suy ra

$$x^n \cdot P(x) - (-x + 2022)^n \cdot P(-x + 2022)$$
$$= (x - 2022)^n \cdot R(x) - (-1)^n \cdot x^n \cdot R(-x + 2022).$$

Do đó

$$x^n \cdot (P(x) + (-1)^n \cdot R(-x + 2022))$$
$$= (x - 2022)^n$$
$$\times (R(x) + (-1)^n \cdot P(-x + 2022)). \quad (6)$$

Vì $R(x) + (-1)^n \cdot P(-x + 2022)$ là một đa thức với hệ số thực, nên từ (6) suy ra

$$x^n \cdot (P(x) + (-1)^n \cdot R(-x + 2022)) \,\vdots\, (x - 2022)^n.$$

Mà $(x^n, (x - 2022)^n) = 1$ nên

$$P(x) + (-1)^n \cdot R(-x + 2022) \,\vdots\, (x - 2022)^n.$$

Do đó, $x = 2022$ là nghiệm, với bội không nhỏ hơn n, của đa thức

$$T(x) = P(x) + (-1)^n \cdot R(-x + 2022).$$

Mà $\deg T < n$ (suy ra từ (3) và giả thiết $\deg P < n$), nên $T(x) \equiv 0$, hay

$$P(x) = (-1)^{n+1} \cdot R(-x + 2022).$$

Do đó, $P(1011) = (-1)^{n+1} \cdot R(1011)$. (7)

Trong (4), cho $x = 1011$, ta được:

$$1011^n \cdot P(1011) + 1$$
$$= (-1)^n \cdot 1011^n \cdot R(1011)$$
$$= -1011^n \cdot P(1011) \quad (\text{do } (7)).$$

Vì vậy, $P(1011) = -\dfrac{1}{2 \cdot 1011^n}$.

Bình luận và Nhận xét

1. Bài đã ra là một bài toán nhẹ nhàng, cơ bản về đa thức một biến.

2. Rất tiếc, cho tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí vẫn chưa nhận được lời giải nào từ bạn đọc.

Lưu Thị Thanh Hà

P659. (Mức A) Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC, lấy điểm P tùy ý, khác B, C, và trung điểm của BC. Qua P, kẻ hai đường thẳng m, n, đối xứng với nhau qua đường thẳng BC. Đường thẳng m cắt các đường thẳng AB, AC, tương ứng, tại E, N. Đường thẳng n cắt các đường thẳng AB, AC, tương ứng, tại M, F. Chứng minh rằng, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi ba đường thẳng đôi một cắt nhau BC, MN, EF.

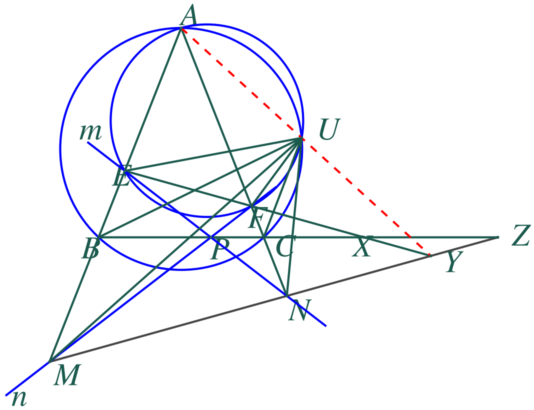
Lời giải (*của người chấm bài*).

Trước hết, ta nhắc lại (không chứng minh) hai kết quả quen biết sau:

Bổ đề 1. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Qua B, kẻ một đường thẳng tùy ý, cắt lại (O_1) ở M, và cắt lại (O_2) ở N. Khi đó, AMN và AO_1O_2 là hai tam giác đồng dạng cùng hướng.

Bổ đề 2 (Định lý Miquel). Cho tam giác ABC. Trên các đường thẳng BC, CA, AB, tương ứng, lấy các điểm D, E, F, không trùng với các đỉnh của tam giác đã cho. Khi đó, ba đường tròn (AEF), (BFD), (CDE) cùng đi qua một điểm. Hơn nữa, nếu D, E, F thẳng hàng thì điểm đó nằm trên đường tròn (ABC).

Trở lại bài toán.



Hình 1.

Do tam giác ABC cân tại A, và hai đường thẳng m, n đối xứng với nhau qua BC, nên

$$\begin{aligned}(EM;EN) &\equiv (AB;BC)+(BC;EN)\\ &\equiv (BC;AC)+(MF;BC)\\ &\equiv (MF;AC)\\ &\equiv (FM;FN)\,(\mathrm{mod}\pi)\,, \quad (1)\end{aligned}$$

$$\Delta PBE \sim \Delta PCF \text{ và } \Delta PBM \sim \Delta PCN. \quad (2)$$

Từ (1) suy ra, bốn điểm E, F, M, N cùng thuộc một đường tròn. (3)

Từ (2) suy ra

$$\frac{PE}{PB}=\frac{PF}{PC} \text{ và } \frac{PB}{PM}=\frac{PC}{PN};$$

do đó

$$\frac{PE}{PM}=\frac{PE}{PB}\cdot\frac{PB}{PM}=\frac{PF}{PC}\cdot\frac{PC}{PN}=\frac{PF}{PN}. \quad (4)$$

Do m, n đối xứng với nhau qua BC, nên PB là phân giác của góc EPM và PC là phân giác của góc FPN. Do đó

$$\frac{BE}{BM}=\frac{PE}{PM} \text{ và } \frac{CF}{CN}=\frac{PF}{PN}. \quad (5)$$

Từ (4) và (5), suy ra

$$\frac{BE}{BM}=\frac{CF}{CN};$$

do đó, $\dfrac{BE}{CF}=\dfrac{BM}{CN}$. (6)

Gọi Z là giao điểm của hai đường thẳng BC, MN; gọi X, Y, tương ứng, là giao điểm của đường thẳng EF và các đường thẳng BC, MN. Gọi U là giao điểm thứ hai, khác A, của hai đường tròn (ABC) và (AEF). (Xem Hình 1.)

Từ (1) và tính đối xứng qua BC của hai đường thẳng EN, MF, ta có:

$$\begin{aligned}(XY;XZ) &\equiv (EF;BC)\\ &\equiv (EF;EN)+(EN;BC)\\ &\equiv (MF;MN)+(BC;MF)\\ &\equiv (BC;MN)\equiv (XZ;YZ)\,(\mathrm{mod}\ \pi)\,.\end{aligned}$$

Do đó, tam giác XYZ cân tại Y. (7)

Áp dụng Bổ đề 1 cho hai đường tròn (ABC), (AEF), ta được, UBE và UCF là hai tam giác đồng dạng cùng hướng. Do đó

$$\begin{aligned}(BU;BM) &\equiv (BU;BE)\equiv (CU;CF)\\ &\equiv (CU;CN)\,(\mathrm{mod}\ \pi)\,, \quad (8)\end{aligned}$$

$$\frac{UB}{UC}=\frac{BE}{CF}. \quad (9)$$

Từ (6) và (9), suy ra

$$\frac{UB}{UC}=\frac{BM}{CN}. \quad (10)$$

Do (8) và (10), nên tam giác UBM đồng dạng cùng hướng với tam giác UCN. Suy ra

$$\begin{aligned}(UM;UN) &\equiv (UM;UB)+(UB;UN)\\ &\equiv (UN;UC)+(UB;UN)\\ &\equiv (UB;UC)\equiv (AB;AC)\\ &\equiv (AM;AN)\,(\,\mathrm{mod}\ \pi)\,.\end{aligned}$$

Do đó, U thuộc đường tròn (AMN).

Áp dụng Bổ đề 2 cho tam giác AMN với ba điểm thẳng hàng $Y\in MN, F\in NA, E\in AM$, ta được: ba đường tròn (AEF), (MYE), (NFY) cùng đi qua một điểm, và điểm này nằm trên đường tròn (AMN). Từ đây, do (AEF) và (AMN) chỉ có hai điểm chung, là A và U, mà (MYE), (NFY) không thể đi qua A, nên (MYE), (NFY) cùng đi qua U. (11)

Áp dụng Bổ đề 2 cho tam giác ABC với ba điểm thẳng hàng $X\in BC$, $F\in CA$, $E\in AB$, và bằng các lập luận tương tự trên, ta được: hai đường tròn (BXE), (CXF) cùng đi qua U. (12)

Từ (3) và (11), suy ra

$$\begin{aligned}(UA;UY) &\equiv (UA;UF)+(UF;UY)\\ &\equiv (EA;EF)+(NF;NY)\\ &\equiv (NM;NF)+(NF;NY)\\ &\equiv (MN;NY)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \pi).\end{aligned}$$

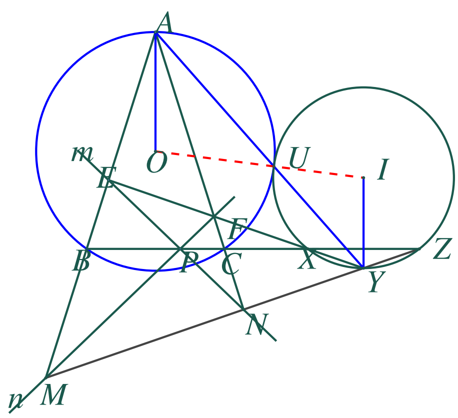
Do đó, A, U, Y thẳng hàng. (13)

Từ (11), (12), (13), suy ra

$$\begin{aligned}(XU;XZ) &\equiv (XU;XB)\equiv (EU;EB)\\ &\equiv (EU;EA)\equiv (FU;FA)\\ &\equiv (FU;FN)\equiv (YU;YN)\\ &\equiv (YU;YZ)\,(\mathrm{mod}\ \pi).\end{aligned}$$

Do đó, U thuộc đường tròn (XYZ); vì thế, U là điểm chung của (ABC) và (XYZ). (14)

Gọi O và I tương ứng là tâm của các đường tròn (ABC) và (XYZ). (Xem hình 2.)



Hình 2.

Do (7) và do tam giác ABC cân tại A, nên $AO\perp BC$ và $YI\perp BC$; suy ra, $AO \parallel YI$. Vì thế, với lưu ý OAU và IYU là các tam giác cân, tương ứng, tại O và I, ta có:

$$\begin{aligned}(UA;UO) &\equiv (AU;AO)\equiv (YU;YI)\\ &\equiv (UY;UI)\,(\mathrm{mod}\ \pi). \qquad (15)\end{aligned}$$

Từ (13) và (15), suy ra O, U, I thẳng hàng. Từ đây và (14), suy ra (ABC) và (XYZ) tiếp xúc với nhau (tại U). Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Các Bổ đề 1 và 2 đã được đề cập trong rất nhiều tài liệu về Hình học sơ cấp.

2. Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có một lời giải sai, do người giải bài đã tính tỉ số độ dài đại số của hai vectơ không đồng trục.

Hạ Vũ Anh

P660. (Mức A) Cho số nguyên $n \geq 2$. Một giải bóng đá có n đội tham dự, đá theo thể thức vòng tròn một lượt (tức là, hai đội bất kỳ sẽ gặp nhau đúng một lần), tính điểm. Mỗi trận đấu, nếu hòa, hai đội đều được 1 điểm; nếu không hòa, đội thắng sẽ được 3 điểm, đội thua được 0 điểm. Sau khi kết thúc giải đấu, người ta nhận thấy điểm số của các đội không đồng thời bằng nhau. Các đội được xếp hạng theo điểm, từ cao xuống thấp (các đội bằng điểm nhau được xếp cùng một hạng). Xét số điểm chênh lệch nhỏ nhất của hai đội xếp thứ hạng liền nhau. Hỏi số điểm này tối đa có thể bằng bao nhiêu?

Lời giải (*của người chấm bài*).

Quy ước, gọi điểm số của các đội cùng hạng là điểm số của hạng đó.

Do điểm số của các đội không đồng thời bằng nhau, nên số hạng của giải đấu không nhỏ hơn 2.

Xét hai hạng liền nhau tùy ý, và giả sử hai hạng này có điểm số là p, q, với $p > q$.

Phân chia n đội bóng thành hai nhóm: Nhóm 1 gồm tất cả các đội có điểm số không nhỏ hơn p, và Nhóm 2 gồm tất cả các đội còn lại.

Giả sử nhóm 1 có k đội ($k \in \mathbb{N}^*$). khi đó, nhóm 2 sẽ có $n-k$ đội.

Gọi S_1 là tổng điểm của tất cả các đội thuộc nhóm 1, và S_2 là tổng điểm của tất cả các đội thuộc nhóm 2.

Hiển nhiên có $S_1 \geq kp$. (1)

Do hai hạng được xét là hai hạng liền nhau, nên số điểm của mỗi đội thuộc nhóm 2 đều không vượt quá q; do đó, $S_2 \leq (n-k)q$ (2)

Từ cách tính điểm của giải đấu suy ra, tổng điểm ở mỗi trận đấu tối thiểu là 2, và tối đa là 3.

Vì thế, do hai đội tùy ý chỉ thi đấu với nhau đúng một trận, nên:

– Tổng số điểm mà tất cả các đội thuộc nhóm 1 thu được từ các trận thi đấu với nhau không vượt quá $3\cdot\dfrac{k(k-1)}{2}$;

– Tổng số điểm mà tất cả các đội thuộc nhóm 1 thu được từ các trận thi đấu với các đội thuộc nhóm 2 không vượt quá $3\cdot k(n-k)$;

– Tổng số điểm mà tất cả các đội thuộc nhóm 2 thu được từ các trận thi đấu với nhau không ít hơn

$$2\cdot\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}=(n-k)(n-k-1).$$

Do đó

$$S_1\le 3\cdot\frac{k(k-1)}{2}+3\cdot k(n-k)$$
$$=\frac{3}{2}k(2n-k-1); \qquad (3)$$
$$S_2\ge(n-k)(n-k-1). \qquad (4)$$

Từ (1) và (3), suy ra

$$kp\le\frac{3}{2}k(2n-k-1);$$

do đó, $p\le\dfrac{3}{2}(2n-k-1)$. $\qquad (5)$

Từ (2) và (4), suy ra

$$(n-k)q\ge(n-k)(n-k-1);$$

do đó, $q\ge n-k-1$. $\qquad (6)$

Từ (5) và (6), suy ra

$$p-q\le\frac{3}{2}(2n-k-1)-(n-k-1)$$
$$=2n-\frac{1}{2}(k+1)\le 2n-1$$

(do $k\ge 1$).

Do hai hạng được xét là hai hạng liền nhau tùy ý, nên gọi m là số điểm chênh lệch nhỏ nhất của hai đội xếp thứ hạng liền nhau, ta cũng có$m\le 2n-1$.

Hơn nữa, ở tình huống giải đấu có một đội thắng tất cả $n-1$ đội còn lại, và đồng thời, $n-1$ đội này đôi một hòa nhau, giải đấu sẽ chỉ có hai hạng, một hạng có điểm số bằng $3(n-1)$ (là điểm số của đội thắng) và hạng còn lại có điểm số bằng $n-2$ (là điểm số của mỗi đội còn lại). Do đó, ở tình huống này, ta có:

$$m=3(n-1)-(n-2)=2n-1.$$

Vì vậy, số điểm chênh lệch nhỏ nhất của hai đội xếp thứ hạng liền nhau tối đa có thể bằng $2n-1$.

Bình luận và Nhận xét

1. Qua lời giải trên, bạn đọc hãy tự rút ra cho mình kết luận về ý nghĩa (bao gồm cả ý nghĩa toán học và ý nghĩa thực tiễn) của câu hỏi đã đặt ra ở bài toán.

2. Trong Đề thi của Olympic Toán học Thành phố Matxcva (Liên Bang Nga) năm 1975, có bài toán sau, là một "họ hàng" gần gũi với bài đã ra:

Bài toán thi (*dành cho học sinh lớp 9, hệ 10 năm, của Tp. Matxcva*). Một giải bóng đá có n đội bóng tham dự, mỗi đội đều thi đấu đúng một trận với mỗi đội khác. Mỗi trận đấu, đội thắng được 2 điểm, đội thua được 0 điểm; nếu hòa nhau, mỗi đội được 1 điểm. Sau giải đấu, các đội được xếp thứ tự, theo điểm số từ cao xuống thấp. Hãy tìm giá trị lớn nhất có thể của chênh lệch điểm giữa hai đội được xếp thứ tự liền nhau.

3. Cho tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí mới chỉ nhận được một lời giải từ bạn đọc, và rất tiếc, lời giải này lại là một lời giải sai.

Nguyễn Khắc Minh

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI HOÀN CHỈNH

Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải hoàn chỉnh.

KHỐI THCS

• Trường **THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam**, Tp. Hà Nội: *Trần Hữu Đức*

Hiếu (lớp 8A; P654), *Nguyễn Minh Tuấn* (lớp 9B; P652, P653, P654, P655, P656).

• **Archimedes Academy Trung Yên**, Quận Cầu Giấy, Tp. Hà Nội: *Trần Việt Anh* (lớp 9A7; P652, P654).

• Trường **THCS Lê Quý Đôn**, Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh: *Nguyễn Chánh Thiện* (lớp 8/14; P652, P654).

• Trường **THCS Phúc Yên**, Tp. Phúc Yên, tỉnh Vĩnh Phúc: *Vũ Bảo Lân* (lớp 8A5; P652, P654).

KHỐI THPT

• Trường **THPT số 2 Phù Cát**, tỉnh Bình Định: *Nguyễn Hữu Trí* (lớp 11A1; P654).

• Trường **THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu**, tỉnh Đồng Tháp: *Đỗ Duy Quang* (lớp 11T1; P654).

• Trường **THPT Chi Lăng**, tỉnh Gia Lai: *Phan Trịnh Nguyên* (lớp 10A1; P654).

• Trường **THPT chuyên Hưng Yên**, tỉnh Hưng Yên: *Trần Hữu Dương* (lớp 11 Toán 1; P654).

• Trường **THPT chuyên Lê Hồng Phong**, tỉnh Nam Định: *Ngô Quang Bình* (lớp 11 Toán 1; P654), *Phùng Việt Cường* (lớp 11 Toán 2; P654, P655), *Phạm Tuấn Khôi* (lớp 10 Toán 1; P652, P654), *Bùi Khánh Linh* (lớp 10 Toán 2; P654).

• Trường **THPT chuyên Lương Văn Chánh**, tỉnh Phú Yên: *Nguyễn Thị Bảo Tiên* (lớp 11 Toán 1; P654).

• Trường **THPT chuyên Lê Thánh Tông**, tỉnh Quảng Nam: *Trần Phạm Minh Đạt* (lớp 10/1; P654, P659).

• Trường **THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm**, tỉnh Quảng Nam: *Trịnh Quốc Khánh* (lớp 11/1; P659).

• Trường **THPT chuyên Tiền Giang**, tỉnh Tiền Giang: *Trần Phúc Thịnh* (lớp 10 Toán; P654), *Nguyễn Hữu Trí* (lớp 10 Toán; P654).

• Trường **THPT chuyên Quốc học Huế**, tỉnh Thừa Thiên – Huế: *Nguyễn Thị Nhật Thảo* (lớp 11 Toán 2; P654), *Trần Thị Thanh Thư* (lớp 12 Toán 1; P654), *Đặng Quỳnh Bảo Uyên* (lớp 11 Toán 2; P654). /VSK • Trường **THPT chuyên Sư phạm**, ĐH Sư phạm Hà Nội: *Hồ Trần Khánh Linh* (lớp 12 Toán 2; P657, P659).

TÍNH SỐ PI: XƯA VÀ NAY
Phần I: Tính số Pi - Xưa

TẠ DUY PHƯỢNG, ĐOÀN THỊ LỆ, CUNG THỊ KIM THÀNH, MAI VĂN THU, NGUYỄN HOÀNG VŨ

Một số vô tỷ rất quen thuộc và có nhiều ý nghĩa thực tế là tỷ số giữa chu vi đường tròn và đường kính của nó, lần đầu tiên được nhà toán học Anh William Jones (16751749) ký hiệu bằng chữ π năm 1706 trong cuốn sách *Synopsis Palmariorum Matheseos* (*Nhập môn Toán học mới*). π là chữ cái đầu tiên trong chữ Hy Lạp *περιφέρεια* (*periphery–viền ngoài–chu vi*). Năm 1748, trong cuốn sách rất phổ biến, *Introductio in analysin infinitorum* (*Nhập môn Giải tích vô hạn*), Euler viết: "*để ngắn gọn, ta sẽ ký hiệu π bằng một nửa chu vi của đường tròn bán kính bằng* 1". Từ đó π được phổ biến ở châu Âu và ngày nay đã trở thành ký hiệu toán học quen thuộc với tất cả mọi người.

Số Pi trước toán học Hy Lạp

Người Babylon (khoảng $1800 - 1600$ trước Công nguyên) tính chu vi một vòng tròn bằng ba lần đường kính của nó. Hơn nữa, họ còn chính xác hơn khi chọn diện tích hình tròn theo công thức $S = \frac{2}{25}L^2$, trong đó L là chu vi hình tròn. Như vậy, so với công thức chính xác $S = \pi R^2 = \frac{1}{4\pi}(2\pi R)^2$ thì số khá chính xác so với $\pi \approx 3.1416$.

Bài toán 48 trong bản giấy cói Ahmes (Ahmes Rhind Papyrus, 1850 trước Công nguyên) phát biểu như sau. *Đường tròn có đường kính 9 khet* (đơn vị độ dài). *Diện tích của nó là bao nhiêu?*

Giải: Bỏ đi $\frac{1}{9}$ trong đường kính, cụ thể là 1, còn 8. Nhân 8 với 8, diện tích của nó là 64.

Bài toán này cho thấy, người Ai Cập cổ đại đã tính diện tích S của hình tròn có đường kính d bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng $\frac{8}{9}d$:

$$S = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{64}{81}d^2.$$

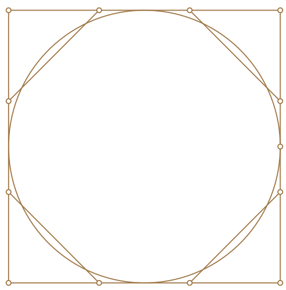
Từ đây ta có $S = \frac{64}{81}d^2 = \pi\frac{d^2}{4}$. Suy ra

$$\pi = \frac{64 \times 4}{81} = \frac{256}{81} \approx 3.16049.$$

Sai số của số này so với $\pi \approx 3.14156$ là gần 2% và có phân số xấp xỉ là $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7} \approx 3.14286$.

Giả sử cắt bốn góc của hình vuông cạnh 9 *khet* (đơn vị dài) bốn tam giác vuông cân có cạnh bằng 3 *khet*. Khi ấy diện tích bát giác còn lại gần bằng diện tích hình tròn (hình tròn có phần nằm trong, cũng có phần nằm ngoài bát giác, Hình 1). Ta có $S_{\text{bát giác}} = 9^2 - 4.\frac{3^2}{2} = 63.$ Giá trị này gần với giá trị $S =$

$\left(\frac{8}{9}d\right)^2 = 64$ khi cho $d = 9$ là cơ sở để giải thích công thức tính diện tích hình tròn $S = \frac{64}{81}d^2$ của người Babylon.



Hình 1.

Trong bài toán khắc trên bảng đồng của người Babylon, số π được chọn bằng $\frac{25}{8} = 3.125$.

Khi đo đạc tháp Gira vĩ đại (2500 trước Công nguyên), các nhà khảo cổ học đã nhận thấy người Ai Cập chọn số π bằng $\frac{22}{7} \approx 3.14$.

Người Hebrews cũng lấy $\pi = 3$. Điều này được thấy trong kinh Cựu ước, khi nói về bồn tắm tròn trong lâu đài của nhà vua Salomon.

Số Pi trong toán học Hy Lạp

Thuật toán đầu tiên tính gần đúng số π được nhà toán học Hy Lạp Archimedes (khoảng $287 - 212$ trước Công nguyên) được trình bày trong cuốn sách *Measurement of the Circle* (*Đo hình tròn*). Ông đã tính được

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70} \qquad (1)$$

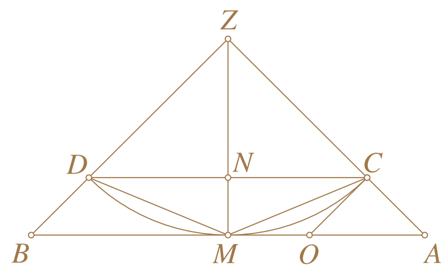
bằng cách xét các đa giác đều 96 cạnh nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn như sau.

Giả sử p_n và P_n là chu vi các đa giác đều n cạnh nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn chu vi C. Khi ấy ta có

$$\begin{aligned} &p_6 < p_{12} < p_{24} < p_{48} < p_{96} < \ldots < p_n \\ &\quad < \ldots < C < \ldots < P_n < \ldots < P_{96} < P_{48} \\ &\quad < P_{24} < P_{12} < P_6. \end{aligned}$$

Dãy số $\{p_n\}$ là dãy số tăng, bị chặn trên bởi C và $\{P_n\}$ là dãy số giảm bị chặn dưới bởi C. Do đó chúng có giới hạn và có thể chứng minh giới hạn chung của chúng là C.

Giả sử Z là tâm hình tròn, và $AB = 2t$ và $CD = 2s$ tương ứng là độ dài một cạnh của đa giác đều n cạnh ngoại tiếp và nội tiếp hình tròn. Gọi M là điểm giữa của AB, N là điểm giữa của CD và O là giao điểm của tiếp tuyến tại điểm C với MA (Hình 2). Tương ứng $OM = OC = t'$ là nửa cạnh của đa giác đều $2n$ cạnh ngoại tiếp và $MC = MD = 2s'$ là cạnh của đa giác đều $2n$ cạnh nội tiếp đường tròn.



Hình 2.

Vì ACO và AMZ là các tam giác vuông đồng dạng nên $\frac{t'}{t - t'} = \frac{OC}{OA} = \frac{ZM}{ZA}$.

Theo Định lý Thales ta có $\frac{s}{t} = \frac{NC}{MA} = \frac{CZ}{AZ}$.

Vì $MZ \in CZ$ nên ta có

$$\frac{t'}{t - t'} = \frac{s}{t} \quad \text{hay } t' = \frac{ts}{t + s}.$$

Vì các tam giác cân CMD và COM là đồng dạng, nên ta có $\frac{2s'}{2s} = \frac{t'}{2s'}$, nghĩa là $2s'^2 = st'$.

Vì P_n và p_n là chu vi đa giác đều n cạnh, P_{2n} và p_{2n} là chu vi đa giác đều $2n$ cạnh ngoại và nội tiếp hình tròn nên $p_n = 2ns$, $P_n = 2nt$, $p_{2n} = 2ns'$, $P_{2n} = 2nt'$.

Vậy P_{2n} là trung bình điều hòa của p_n và P_n:

$$\begin{aligned} P_{2n} = 2nt' &= \frac{2nts}{t + s} = \frac{2nt \cdot 2ns}{2nt + 2ns} \\ &= \frac{p_n \cdot P_n}{p_n + P_n}. \qquad (2) \end{aligned}$$

Và p_{2n} là trung bình nhân của p_n và P_{2n}:

$$p_{2n} = 2ns' = 2n\sqrt{s \cdot t'} = \sqrt{2ns \cdot 2nt'} = \sqrt{p_n \cdot P_{2n}}. \tag{3}$$

Bắt đầu từ $n = 6$: $p_6 = 3d$ và $P_6 = 2\sqrt{3}d$, trong đó d là đường kính hình tròn, nhờ các công thức truy hồi (2) và (3), ta tìm được p_{96} và P_{96}. Sử dụng đánh giá $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$, Archimetdes tìm được tỷ số giữa chu vi đa giác đều 96 cạnh và đường kính của hình tròn nội tiếp là

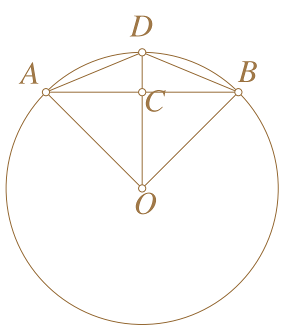
$$14688 : 4673\frac{1}{2} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7} = 3\frac{10}{70}.$$

Và tỷ số giữa chu vi đa giác đều 96 cạnh và đường kính của hình tròn ngoại tiếp là

$$6336 : 2077\frac{1}{4} > 3\frac{10}{71}.$$

Vậy (1) được chứng minh.

Ta cũng có thể tính toán cách khác như sau. Giả sử đường tròn tâm O có bán kính bằng 1. AB là một cạnh của hình đa giác đều n cạnh nội tiếp đường tròn, có độ dài là s_n. Trong tam giác OAB, kẻ OC vuông góc với AB cắt đường tròn tại D. Suy ra AD và BD là hai cạnh của đa giác đều $2n$ cạnh, có độ dài là s_{2n} (Hình 3).



Hình 3.

Áp dụng định lý Pythagoras vào tam giác vuông ACD ta có

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = AC^2 + (OD - OC)^2).$$

Lại áp dụng định lý Pythagoras vào tam giác vuông ACO ta được

$$OC = \sqrt{OA^2 - AC^2}.$$

Suy ra

$$AD^2 = AC^2 + \left(OD - \sqrt{OA^2 - AC^2}\right)^2$$

Với $OA = OD = 1$, $AC = \frac{s_n}{2}$, $AD = s_{2n}$, ta có

$$s_{2n}^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2}.$$

Suy ra

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}. \tag{6}$$

Sử dụng công thức (4), với hình lục giác đều có cạnh bằng bán kính và bằng 1 (Hình 4) ta được

$$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Gấp đôi số cạnh được $n = 12$ thì

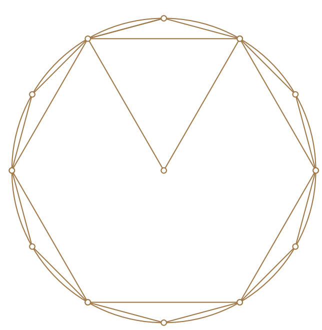
$$s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{3})}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

Tiếp tục với $n = 24$ thì

$$s_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}.$$

Và với $n = 96$ thì ta được

$$s_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}.$$



Hình 4.

Chu vi của đa giác đều 96 cạnh bằng

$$96\cdot\frac{s_{96}}{2}$$

$$=48\cdot s_{96}=48\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

$$\approx 3,14103\approx 3\frac{10}{71}.$$

Tương tự cho đa giác đều ngoại tiếp, ta có

$$S_{2n}=\frac{2\sqrt{4+S_n^2}-4}{S_n}. \qquad (5)$$

Bắt đầu với một lục giác đều ngoại tiếp một đường tròn (Hình 5). Do tam giác OAB đều nên

$$OA=OB=AB=S_6;\ AC=\frac{S_6}{2};\ OC=1.$$

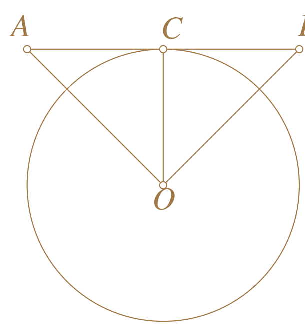
Áp dụng định lý Pythagoras cho tam giác vuông OAC ta có

$$OA^2=OC^2+AC^2\Leftrightarrow S_6^2=1^2+(\frac{S_6}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow S_6=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Theo (5) ta sẽ tính được $S_{12},S_{24},S_{48},S_{96}$.. Chu vi của đa giác đều 96 cạnh là

$$96.\frac{S_{96}}{2}\approx 3,14271\approx 3\frac{10}{70}.$$



Hình 5.

Vì hình tròn bị giới hạn bởi các đa giác đều nội tiếp và ngoại tiếp, nên (1) được chứng minh. Trong *Plinthides and Cylinders*, Archimedes còn tính số Pi:

$$\frac{195888}{62351}>\pi>\frac{211875}{67441}$$

hay

$$3.14697>\pi>3.1463911.$$

Đánh giá này không chính xác vì $\pi\approx 3.141592654$ nằm ngoài khoảng trên. Một đánh giá tinh tế hơn được làm bởi Tannery

$$\frac{195882}{62351}>\pi>\frac{211872}{67441}$$

hay

$$3.141601578>\pi>3.141590427.$$

Một đánh giá khác là

$$\frac{195888}{62351}>\pi>\frac{211875}{67444}$$

hay

$$3.141697808>\pi>3.141495166.$$

Khoảng năm 150 Công nguyên, nhà bác học Ptolemy, trong tác phẩm Almagest, dựa trên bảng tính các cung (Table of Chords), đã dùng biểu diễn gần đúng số Pi dưới dạng phân số trong hệ đếm cơ số 60 là

$$\pi\approx 3+\frac{8}{60}+\frac{30}{60^2}=\frac{377}{120}\approx 3.141666667.$$

Ông cũng nhận xét rằng, số này nằm giữa $3\frac{10}{71}$ và $3\frac{10}{70}$.

Số Pi trong toán học Trung Quốc

Lúc đầu, người Trung Quốc chấp nhận xấp xỉ số $\pi\approx 3$. Đầu thế kỷ II, Trương Hành (張衡, khoảng 78 – 139) tìm được $\pi\approx\sqrt{10}\approx 3.162$. Bằng cách nội tiếp hình tròn bởi các hình lục giác đều và gấp đôi số cạnh, Liu Hui (劉徽, 220 – 280) năm 263 trong cuốn sách Cửu chương toán thuật (九章算術) đã tìm được $\pi\approx 3.14$ và sau đó Ông tìm được $\pi\approx 3.14159$. Tổ Xung Chi (祖沖之, 429 – 500), sử dụng thuật toán của Liu Hui với đa giác $12288=3\cdot 2^{12}$ cạnh, đã tính số π chính xác đến 8 chữ số:

$$3.1415926<\pi<3.1415927$$

Và Ông chọn $\pi\approx\dfrac{355}{113}\approx 3.1415929$ hoặc

$\pi \approx \frac{22}{7} \approx 3.145927.$

Số Pi trong toán học Việt Nam

Lương Thế Vinh ($1441 - 1497$, [4]) và các nhà toán học sau Ông, cho đến thế kỉ XVIII, chọn $\pi = 3$. Nguyễn Hữu Thận ($1757 - 1831$, [3]) đã sử dụng giá trị của số π gần đúng đến 8 chữ số thập phân. Ông đã sử dụng số $\pi \approx 3.14159265$, trong khi sách *Bút toán chỉ nam* của Nguyễn Cẩn in năm 1909 [1], sau Nguyễn Hữu Thận 80 năm vẫn dùng số π bằng 3.14 hoặc 3.1416. Tương tự, Phạm Gia Kỉ, trong *Đại thành toán học chỉ minh* [2] viết khoảng 1840 cũng chỉ dùng π bằng 3.14 hoặc 3.1416. Nguyễn Hữu Thận và Nguyễn Cẩn cũng nhắc đến *cách tính của Tây phương* (phương pháp gấp đôi số cạnh của Arsimetdes). Quan hệ giữa đường kính và chu vi (thông qua số π) được Nguyễn Hữu Thận gọi là *định luật chu vi đường kính*. Nguyễn Hữu Thận phát biểu:

Định luật chu vi đường kính

Đường kính 100000000, chu vi 314159265

Lại có chu vi $p = 100000000$, đường kính $d = 31830988$.

Giải thích Nếu lấy $\pi = 3,14159265$, đường kính $= 100000000$ thì chu vi đường tròn là $p = d.\pi = 314159265$ (chính xác đến 8 chữ số).

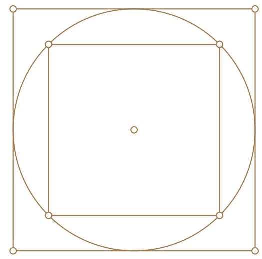
Nếu biết chu vi $p = 100000000$, thì

$$d = \frac{p}{\pi} = \frac{1000000}{3.14159265} \approx 31830988$$

(chính xác đến 8 chữ số).

Nguyễn Hữu Thận viết: *Phương pháp là cho bên trong hình tròn bao chứa hình vuông, lại từ bên ngoài hình tròn cắt hình vuông. Phép toán đến ức, vạn lần, tập trung tìm sẽ được vô số đầu mối. Trong ngoài đến tập hợp, trong là cạnh huyền chính, ngoài là đường thẳng được cắt. Cho đến vô số đường bao quanh hình tròn, gần giống như trực tuyến mà được số chu vi này, vốn xuất phát từ phép Tây là kỹ lưỡng nhất.*

Giải thích. Đây là phép tính chu vi đường tròn bắt đầu bằng hình vuông nội và ngoại tiếp, sau đó gấp đôi số cạnh (phương pháp của Liu Hui). Gọi d là đường kính hình tròn, bán kính $r = \frac{d}{2}$. Chu vi hình vuông ngoại tiếp bằng $4d > \pi d = 3,14d$ (cạnh hình vuông bằng đường kính).



Hình 6.

Hình vuông nội tiếp đường tròn có đường chéo bằng cạnh hình vuông bằng $\frac{d}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}$. Do đó chu vi hình vuông nội tiếp bằng (Hình 6): $4r = 2d \approx 2d \times 1,4142 \approx 2,8284 < d\pi \approx d.3,14 < 4d$. Gấp đôi số cạnh đa giác nội ngoại tiếp và tính giới hạn ta được chu vi hình tròn. Nguyễn Hữu Thận cũng phát biểu

Phép rút gọn chu vi, đường kính

Đường kính: 113 Chu vi: 355

Suy luận ban đầu là: Phép tính chu vi, đường kính, cách làm tốt dùng đường kính là 7, đường bao quanh (chu vi) là 22 thì thừa. Cách tỷ mỉ dùng đường kính là 50, chu vi là 157 thì thiếu. Chỉ có sắp đặt đường kính gộp lại là 113, chu vi là 355, phù hợp với định luật hơn. Cho nên chọn dùng nó.

Giải thích. Chu vi hình tròn bằng:

$$\begin{aligned} p = d\pi &\approx 7 \times 3.14159265 \\ &\approx 21.99114855 < 22; \\ p = d\pi &\approx 50 \times 3.14159265 \\ &\approx 157.0796325 > 157. \\ d\pi &\approx 113 \times 3.14159265 \\ &\approx 354.99996945 < 355. \end{aligned}$$

Sai số:

1) $22 - 21.99114855 = 0.00885415$;

2) $157.0796325 - 157 = 0.0796325$;

3) $355 - 354.99996 = 0,00004$ ($\frac{355}{113}$ chính xác nhất, đến 4 chữ số).

Vậy chọn $\pi \approx \frac{355}{113}$ là phân số chính xác hơn cả.

Nguyễn Hữu Thận viết: *Cạnh hình vuông với đường kính hình tròn bằng nhau nhưng diện tích hình vuông và diện tích hình tròn không có cùng định luật.*

Diện tích hình vuông: 100000000.

Diện tích hình tròn: 78539816.

Mặt khác:

Diện tích hình tròn: 100000000.

Diện tích hình vuông: 127323954.

Giải thích Với cạnh $a = 10000$ thì diện tích hình vuông $a^2 = 1.0000.0000$. Diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông có đường kính bằng cạnh hình vuông, do đó

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi a^2}{4}$$
$$\approx 3.14159265 \times 1.0000.0000 : 4$$
$$\approx 78539816.$$

Nếu diện tích hình tròn là 100000000 thì diện tích hình vuông là

$$a^2 = \frac{4S}{\pi} = \frac{4 \times 100000000}{3.14159265}$$
$$= 127323954.$$

Nguyễn Hữu Thận viết: *Diện tích hình vuông và diện tích hình tròn bằng nhau, cạnh hình vuông và đường kính hình tròn không cùng định luật.*

Đường kính hình tròn: 100000000.

Cạnh hình vuông: 88622692.

Lại có:

Cạnh hình vuông: 100000000.

Đường kính hình tròn: 112837916.

Giải thích. Diện tích hình vuông bằng diện tích hình tròn và bằng

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$
$$\approx 3.14159265 \times 1.0000.0000^2 : 4$$
$$\approx 7853981633974483.$$

Cạnh a của hình vuông bằng

$$a = \sqrt{S} \approx 88622692.$$

Tương tự, nếu có cạnh hình vuông bằng 100000000 thì

$$d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4a^2}{\pi}} = \frac{2a}{\sqrt{\pi}}$$
$$\approx \frac{2 \times 100000000}{\sqrt{3.14159265}}$$
$$\approx 112837916.$$

Như vậy, có thể khẳng định, Nguyễn Hữu Thận ($1757 - 1831$) là người Việt Nam đầu tiên có cảm nhận toán học về số vô tỷ và giới hạn thông qua quan hệ giữa số π và diện tích các đa giác đều nội ngoại tiếp hình tròn khi gấp đôi số cạnh.

Tiếp tục tính gần đúng số Pi

Tính toán thiên văn trong *Shatapatha Brahmana* (Ấn Độ, thế kỉ IV trước Công nguyên) dùng xấp xỉ $\pi \approx \frac{339}{108} \approx 3.139$. Một số tư liệu cổ của Ấn Độ chọn $\pi \approx \sqrt{10} \approx 3.162$. Trong tác phẩm *Āryabhaṭīya*, nhà thiên văn Ấn Độ Aryabhata ($476 - 550$) đã sử dụng giá trị $\pi = 3.1416$.

Fibonacci vào năm 1220 đã tính được $\pi = 3.1418$ độc lập với Archimedes.

Tác giả người Ý Dante đã sử dụng giá trị $\pi = 3 + \frac{\sqrt{2}}{10} \approx 3.14142$.

Mãi 8 thế kỷ sau, kỷ lục của Tổ Xung Chi mới bị phá bởi nhà toán học Ba Tư Al–Kāshānī ($1370 - 1450$). Ông dùng phương pháp của Archimedes và xét các đa giác đều 3.2^{28} cạnh nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn và tìm được số π đúng với 17 chữ số là $3.14159265358979 32$. Al–Kāshānī còn dự đoán π là số vô tỷ. Điều này chỉ được chứng minh bởi nhà toán học Thụy Sĩ Johann Heinrich Lambert ($1728-1777$).

Cũng gấp đôi số cạnh như Archimedes, nhưng xuất phát từ hình vuông, nhà toán học Pháp François Viète vào năm 1578 đã tính chính xác số π đến 9 chữ số nhờ sử dụng đa giác 3×2^{17} cạnh dựa trên công thức

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} &= \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\dots\\ &= \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\\ &\quad\times\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\dots \qquad (6)\end{aligned}$$

Giải thích: Sử dụng công thức $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$ và $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$, ta dễ dàng tính được

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)};$$

$$\cos\frac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}.$$

Công lao của François Viète là phát hiện ra công thức biểu diễn (6).

Gọi $A(n)$ là diện tích đa giác đều n cạnh nội tiếp hình tròn bán kính r và β là góc ở tâm. Ta có (Hình 2):

$$A(n) = n\frac{1}{2}r^2\sin 2\beta = nr^2\sin\beta\cos\beta.$$

Tương tự,

$$A(2n) = 2n\frac{1}{2}r^2\sin\beta = nr^2\sin\beta.$$

Suy ra

$$\frac{A(n)}{A(4n)} = \frac{A(n)}{A(2n)}\cdot\frac{A(2n)}{A(4n)} = \cos\beta\cos\frac{\beta}{2}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}\frac{A(n)}{A(2^k n)} &= \frac{A(n)}{A(2n)}\cdot\frac{A(2n)}{A(4n)}\cdots\frac{A\left(2^{k-1}n\right)}{A(2^k n)}\\ &= \cos\beta\cos\frac{\beta}{2}\dots\cos\frac{\beta}{2^k}.\end{aligned}$$

Khi k tiến tới ∞ thì $A(2^k n)$ tiến tới diện tích hình tròn, nghĩa là $\lim\limits_{n\to\infty} A(2^k n) = \pi r^2$. Suy ra

$$\begin{aligned}\pi r^2 &= \frac{A(n)}{\cos\beta\cos\frac{\beta}{2}\dots\cos\frac{\beta}{2^k}\dots}\\ &= \frac{\frac{1}{2}nr^2\sin 2\beta}{\cos\beta\cos\frac{\beta}{2}\dots\cos\frac{\beta}{2^k}\dots}.\end{aligned}$$

Vậy

$$\pi = \frac{n\sin 2\beta}{2\cos\beta\cos\frac{\beta}{2}\dots\cos\frac{\beta}{2^k}\dots}.$$

Để được công thức (6), Viète đã chọn $n=4$. Khi ấy $\beta = \dfrac{\pi}{4}$ và

$$\sin 2\beta = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \cos\beta = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nhà toán học Đức Adriaan van Roomen ($1561-1615$) nhận được xấp xỉ số π đến 15 chữ số vào năm 1593.

Năm 1596, nhà toán học người Hà Lan Ludolph van Ceulen ($1540-1610$) đã dành 50 năm trong hơn 70 năm của đời mình để tính số π xấp xỉ đến 35 chữ số.

Năm 1621, nhà khoa học Đức Willebrord Snellius đã đạt được xấp xỉ số π đến 34 chữ số.

Năm 1630, nhà thiên văn người Áo Christoph Grienberger ($1561-1636$) đã tìm được số π xấp xỉ đến 38 chữ số bằng cách sử dụng đa giác đều 10^{40} cạnh.

Năm 1654, Christiaan Huygens đã nhận được xấp xỉ đên 10 chữ số thập phân nhờ sử dụng phương pháp ngoại suy Richardson.

Kỉ lục Christoph Grienberger chỉ bị vượt qua và thuật toán Archimedes đi vào lịch sử khi năm 1699, số π được tính gần đúng đến 71 chữ số nhờ phân tích số π dưới dạng chuỗi lũy thừa. Từ đó, số π được tính gần đúng nhờ công cụ giải tích. Điều này sẽ được trình bày chi tiết trong Phần 2.

Biểu diễn số π dưới dạng phân số liên tục

Số π có thể biểu diễn dưới dạng phân số liên tục như sau:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}}$$

Cắt cụt phân số này ta lần lượt được $\pi \approx 3$; $\pi \approx 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$; $\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = 3 + \frac{15}{106} = \frac{333}{106}$; $\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + 1}} = 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113}$, là các phân số xấp xỉ số π thường gặp trong lịch sử các dân tộc Tây–Đông.

Thông tin tác giả

- Tạ Duy Phượng (PGS Toán học)
- Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành (Thạc sĩ Hán Nôm)
- Mai Văn Thu, Nguyễn Hoàng Vũ (Thạc sĩ Toán học)

Tài liệu trich dẫn

[1] 阮堇 Nguyễn Cẩn (1909), *Bút toán chỉ nam*, Thư viện viện nghiên cứu Hán Nôm, Viện nghiên cứu Hán Nôm, VHv. 282 và A.1031. Bản thảo bản dịch của Đoàn Thị Lệ, 2015.

[2] 范嘉紀 Phạm Gia Kỷ, 大成算學指明 *Đại thành toán học chỉ minh*, Thư viện viện nghiên cứu Hán Nôm, Viện nghiên cứu Hán Nôm, A.1555. Bản thảo bản dịch của Phạm Hữu Lộc, 2019.

[3] 阮有慎 Nguyễn Hữu Thận, 意齋算法一得錄 *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* (1829), Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm, Vhv.1184, A.1336, A. 982, A.1336/a. Bản thảo bản dịch của Đoàn Thị Lệ và Cung Thị Kim Thành, 2015 – 2016.

[4] 梁世榮 Lương Thế Vinh, 算法大成 *Toán pháp đại thành*, Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm, Ký hiệu: A.2931 và VHv. 1152. Bản thảo bản dịch của Cung Thị Kim Thành, 2017.

[5] David M. Burton, *The History of Mathematics, An Introduction*, Seventh Edition, McGraw Hill, 2011, 819 p.

[6] Heinrich Dörrie, *The 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, New York, Dover Publications, INC., 1965.

[7] Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1921, Volume 1, 232 – 235.

[8] Lam Lay–Yong and Ang Tian–Se, Circle Measurements in Ancient China, *Historia Mathematica*, 13, (1986), 325 – 340.

[9] A. Volkov, Calculation of π in ancient China: From Liu Hui to Zu Chongzhi, *Historia Scientiarum*, Vol. 4 (1994), No 2, 139 – 157.

(*Còn tiếp*)