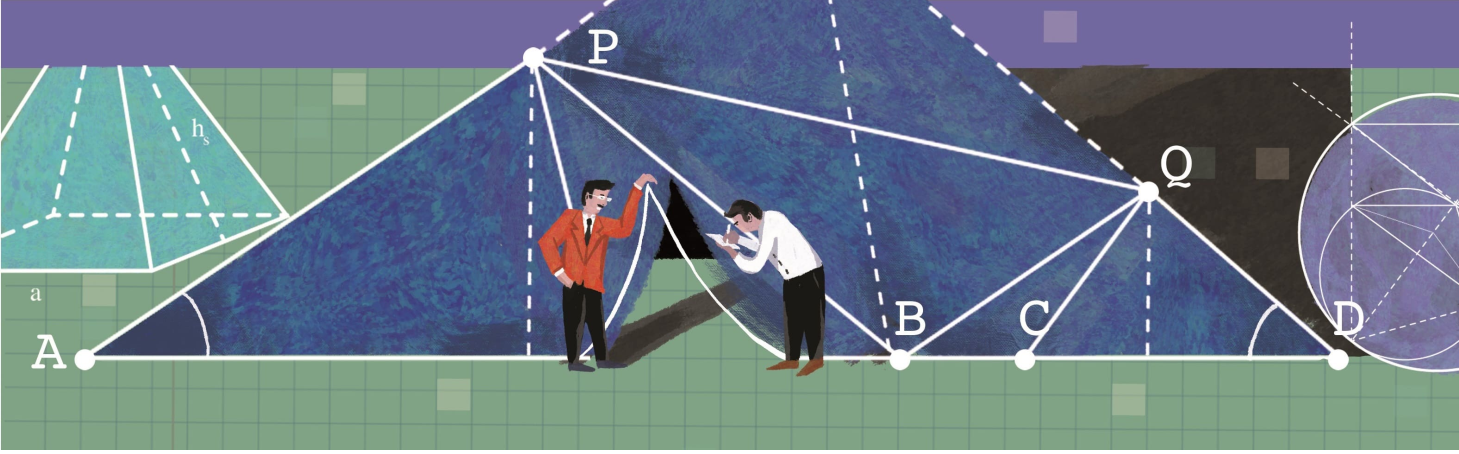

TÌM TÒI NHIỀU LỜI GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM

TRẦN NHẬT QUANG[1]

1. Giới thiệu

Những bài toán phương trình hàm trên tập hợp số thực dương đã không còn quá xa lạ đối với các bạn học sinh chuyên Toán và ngày càng xuất hiện nhiều hơn trong các đề thi Olympic dạo gần đây. Trong số đó, có thể kể đến bài toán nằm trong đề thi chọn đội tuyển Quảng Ninh tham dự kỳ thi học sinh giỏi cấp quốc gia môn Toán (VMO) năm học $2022-2023$ dưới đây:

Bài toán: [Quảng Ninh TST $2022-2023$]

Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(3f(x)+3y) = f(3x+y)+2y, \forall x,y\in\mathbb{R}^+. \quad (1)$$

Bài viết này, bàn về 7 lời giải cho bài toán trên. Qua đó nhằm mục đích giới thiệu cho bạn đọc những kỹ năng, kỹ thuật cơ bản để giải quyết những bài toán phương trình hàm trên tập hợp số thực dương nói riêng và những bài toán phương trình hàm nói chung. Trên tất thảy, tôi muốn nhắn nhủ đến bạn đọc rằng: việc giải được một bài toán đối với nhiều người đã là một chiến thắng, nhưng nếu chịu khó tìm tòi, phân tích kĩ bản chất, đào sâu hơn nữa bài toán đó để phát hiện ra những kết quả mới, những lời giải mới, hay xa hơn nữa là những bài toán mới thì chiến thắng ấy còn vẻ vang hơn gấp vạn lần.

2. Lời giải bài toán

Giả sử rằng tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu bài toán. Trước hết ta có các nhận xét sau:

Nhận xét 1. $f(x)\geq x, \forall x>0$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $x_0>0$ sao cho $f(x_0)<x_0$. Trong (1) cho $x=x_0$ và $y=\dfrac{3(x_0-f(x_0))}{2}$ ta được:

$$3(x_0-f(x_0))=0\Rightarrow f(x_0)=x_0, \text{ vô lý!}$$

Do đó $f(x)\geq x, \forall x>0$.

Bình luận. Lý do nào khiến ta nghĩ ra được đánh giá trên? Quan sát phương trình (1), ta mong muốn triệt tiêu f ở cả hai vế bằng cách lựa chọn $x,y>0$ sao cho:

$$3f(x)+3y=3x+y.$$

Chuyển vế, thu được $y=\dfrac{3(x-f(x))}{2}$. Ý đồ của ta sẽ thành công nếu ta tìm được $x>0$ sao cho $f(x)<x$. Tuy nhiên với x,y như vậy thì (1) trở thành: $2y=0$, vô lý! Do đó phép chọn này không thể thực hiện được, và vì thế điều ngược lại là $f(x)\geq x, \forall x>0$ ắt phải đúng!

Nhận xét 2. f là đơn ánh.

---

[1] *Sinh viên Trường ĐH Sư phạm TP.HCM.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại $a > b > 0$ sao cho $f(a) = f(b) = c$. Trong (1) lần lượt cho $x = a$ và $x = b$ thì được:

$$\begin{aligned} f(y+3a)+2y &= f(3y+3c) \\ &= f(y+3b)+2y, \forall y > 0. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$f(y+3a) = f(y+3b), \forall y > 0.$$

Từ đây thay y bởi $y-3b$ và đặt $T = 3a-3b > 0$ thì được:

$$f(y) = f(y+T), \forall y > 3b.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$f(y) = f(y+nT), \forall y > 3b, n \in \mathbb{N}^*.$$

Trong đẳng thức trên chọn $y = 3b+1$ và sử dụng **nhận xét 1** ta được:

$$\begin{aligned} f(3b+1) &= f(3b+1+nT) \\ &\geq 3b+1+nT, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Đến đây cho $n \to +\infty$ ta thu được điều vô lý. Do vậy f là đơn ánh.

Bình luận. Đối với những bài toán tìm hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ta thường chú ý đến tính đơn điệu, đơn ánh, tuần hoàn, bị chặn, cộng tính, ...của hàm f. Đặc biệt, kỹ thuật phản chứng, xây dựng hàm tuần hoàn nhằm chứng minh f đơn ánh đã trở thành ý tưởng quen thuộc khi giải quyết những bài toán dạng này.

Sau khi thu được hai nhận xét trên, tôi xin trình bày 7 lời giải cho bài toán gốc như sau:

Cách 1:

Trong (1) thay x bởi $3f(x)+3z$ thì được:

$$\begin{aligned} & f(3f(3f(x)+3z)+3y) \\ & \quad = f(9f(x)+9z+y)+2y, \forall x,y,z > 0 \\ \overset{(1.1)}{\Rightarrow} & f(3f(3x+z)+6z+3y) \\ & \quad = f(9f(x)+9z+y)+2y, \forall x,y,z > 0 \\ \overset{(1.1)}{\Rightarrow} & f(3(3x+z)+2z+y)+4z+2y \\ & \quad = f(9f(x)+9z+y)+2y, \forall x,y,z > 0 \\ \Rightarrow & f(9x+5z+y)+4z \\ & \quad = f(9f(x)+9z+y), \forall x,y,z > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Đến đây thay y và z bởi $\frac{z}{2}$ ta được:

$$\begin{aligned} & f(9x+3z)+2z \\ & \quad = f(9f(x)+5z), \forall x,z > 0 \\ \Rightarrow & f(3(3x+\frac{2z}{3})+z)+2z \\ & \quad = f(9f(x)+5z), \forall x,z > 0 \\ \overset{(1)}{\Rightarrow} & f(3f(3x+\frac{2z}{3})+3z) \\ & \quad = f(9f(x)+5z), \forall x,z > 0. \end{aligned}$$

Mặt khác f là đơn ánh nên:

$$3f(3x+\frac{2z}{3})+3z = 9f(x)+5z, \forall x,z > 0.$$

Dẫn đến:

$$f(3x+\frac{2z}{3}) = 3f(x)+\frac{2z}{3}, \forall x,z > 0.$$

Đến đây thay z bởi $\frac{9z}{2}$ thì được:

$$f(3x+3z) = 3f(x)+3z, \forall x,z > 0.$$

Trong đẳng thức trên hoán đổi vị trí của x và z cho nhau ta được:

$$\begin{aligned} & 3f(z)+3x = 3f(x)+3z, \forall x,z > 0 \\ \Rightarrow & f(x)-x = f(z)-z, \forall x,z > 0. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$f(x) = x+C, \forall x > 0 \ (C \text{ là hằng số}).$$

Thay công thức trên vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} & 3x+3y+4C = 3x+3y+C, \forall x,y > 0 \\ \Rightarrow & C = 0. \end{aligned}$$

Vậy bài toán đã cho có duy nhất một nghiệm hàm là $f(x) = x, \forall x > 0$.

Cách 2: (tiếp nối từ (2))

Trong (2) cho $z = x$ thì được:

$$f(14x+y)+4x$$
$$= f(9f(x)+9x+y), \forall x, y > 0.$$

Đến đây thay y bởi $y-14x$ thì được:

$$f(y)+4x$$
$$= f(y+9f(x)-5x), \forall x > 0, y > 14x.$$

Với mọi $x > 0$, đặt $g(x) = 9f(x) - 5x \geq 4x > 0$. Lúc này đẳng thức trên trở thành:

$$f(y)+4x$$
$$= f(y+g(x)), \forall x > 0, y > 14x. \quad (3)$$

Đến đây thay x bởi $x+z$ thì được:

$$f(y+g(x+z))$$
$$= f(y)+4x+4z$$
$$\overset{(3)}{=} f(y+g(x))+4z$$
$$\overset{(3)}{=} f(y+g(x)+g(z)), \forall x, z > 0, y > 14(x+z).$$

Lại có f là đơn ánh nên:

$$y+g(x+z)$$
$$= y+g(x)+g(z), \forall x, z > 0, y > 14(x+z).$$

Dẫn đến:

$$g(x)+g(z) = g(x+z), \forall x, z > 0.$$

Như vậy $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ và g cộng tính trên $\mathbb{R}^+$ nên $g(x) = xg(1), \forall x > 0$. Nói cách khác,

$$9f(x)-5x = xg(1), \forall x > 0$$
$$\Rightarrow f(x) = \alpha x, \forall x > 0. (\alpha \text{ là hằng số})$$

Thay công thức trên vào (1) ta được:

$$\alpha(3\alpha x+3y) = \alpha(3x+y)+2y, \forall x, y > 0$$
$$\Rightarrow \alpha = 1.$$

Vậy bài toán đã cho có duy nhất nghiệm hàm $f(x) = x, \forall x > 0$.

Cách 3: (tiếp nối từ (3))

Trong (1) thay y bởi $2y$ thì được:

$$f(3f(x)+6y)$$
$$= f(3x+2y)+4y, \forall x, y > 0$$
$$\overset{(3)}{\Rightarrow} f(3f(x)+6y)$$
$$= f(3x+2y+g(y)), \forall y > 0, 3x+2y > 14y.$$

Lại có f là đơn ánh nên:

$$3f(x)+6y = 3x+2y+g(y), \forall y > 0, x > 4y.$$

Nói cách khác,

$$f(x)-x = 3(f(y)-y), \forall y > 0, x > 4y.$$

Với mọi $x > 0$, đặt $h(x) = f(x) - x$. Từ đẳng thức trên ta có ngay:

$$h(x) = 3h(y), \forall y > 0, x > 4y.$$

Giả sử ta cố định $y > 0$ thì lập tức h là hàm hằng trên khoảng $(4y, +\infty)$. Bằng cách cho $y \to 0^+$ ta sẽ thu được h là hàm hằng trên toàn bộ khoảng $(0, +\infty)$. Dựa trên phân tích này, ta có thể giải tiếp bài toán như sau:

Lấy $x > z > 0$ tùy ý. Ta sẽ chứng minh $h(x) = h(z)$.

Thật vậy, chọn $y = \dfrac{z}{5}$ thì $x > 4y$ và $z > 4y$. Khi đó $h(x) = 3h(y) = h(z)$. Do đó h là hàm hằng trên $\mathbb{R}^+$. Nói cách khác,

$$f(x)-x = C, \forall x > 0. C \text{ là hằng số}$$

Thay công thức trên vào (1) ta tìm được: $C = 0$.

Vậy bài toán đã cho có duy nhất nghiệm hàm $f(x) = x, \forall x > 0$.

Cách 4: (tiếp nối từ (3))

Điểm mấu chốt của **cách** 2 và **cách** 3 là dựa vào phương trình (3) và tìm cách vận dụng tính đơn ánh của hàm f. Tuy nhiên trong một số trường hợp, nếu ta không chỉ ra được hàm f đơn ánh thì liệu có cách nào giải quyết được phương trình (3) hay không? Bổ đề sau đây sẽ giúp chúng ta trả lời câu hỏi đó.

Bổ đề. Cho các hàm $f,g,h,q:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(y+g(x))=f(y)+h(x),\quad \forall x>0, y>q(x). \tag{4}$$

Khi đó $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ là hàm hằng.

Chứng minh. Trong (4) thay y bởi $y-g(x)$ thì được:

$$f(y-g(x))=f(y)-h(x),\quad \forall x>0, y>q(x)+g(x).$$

Bằng quy nạp ta thu được:

$$f(y-ng(x))=f(y)-nh(x),\quad \forall n\in\mathbb{N}^*, x>0, y>q(x)+ng(x). \tag{5}$$

Từ (4) bằng quy nạp ta cũng có:

$$f(y+mg(x))=f(y)+mh(x),\quad \forall m\in\mathbb{N}^*, x>0, y>q(x). \tag{6}$$

Lấy $x,y>0$ tùy ý, ta hoàn toàn chọn được $m,n\in\mathbb{N}^*$ sao cho $mg(x)>ng(y)$. Đặt $z=q(x)+q(y)$, khi đó với mọi $k\in\mathbb{N}^*$ thì:

$$\begin{aligned}
&f(z+kmg(x)-kng(y))\\
\overset{(5)}{=}&f(z+kmg(x))-knh(y)\\
&(\text{do } z+kmg(x)>q(y)+kng(y))\\
\overset{(6)}{=}&f(z)+kmh(x)-knh(y)(\text{do } z>q(x))\\
=&f(z)+k[mh(x)-nh(y)].
\end{aligned}$$

Nếu $mh(x)-nh(y)<0$ thì $\lim\limits_{k\to+\infty}k[mh(x)-nh(y)]=-\infty$. Vì thế khi k đủ lớn thì $f(z+kmg(x)-kng(y))<0$, vô lý! Do đó $mh(x)\geq nh(y)$.

Nói tóm lại, ta thu được kết luận sau:

"Nếu $\frac{g(x)}{g(y)}>\frac{n}{m}$ thì $\frac{h(x)}{h(y)}\geq\frac{n}{m}$."

Bây giờ giả sử $\frac{g(x)}{h(x)}$ không phải hàm hằng, tức là tồn tại $x,y>0$ sao cho $\frac{g(x)}{h(x)}>\frac{g(y)}{h(y)}$. Suy ra $\frac{g(x)}{g(y)}>\frac{h(x)}{h(y)}$.

Mặt khác do $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$ nên tồn tại số hữu tỷ dương $\dfrac{m}{n}$ sao cho:

$$\frac{g(x)}{g(y)}>\frac{n}{m}>\frac{h(x)}{h(y)}.$$

Điều này mâu thuẫn với kết luận ở trên. Vậy $\frac{g(x)}{h(x)}$ phải là hàm hằng.

Trở lại bài toán: Áp dụng bổ đề trên cho phương trình (3) ta được:

$$\begin{aligned}
&\frac{g(x)}{4x}=C,\forall x>0 (C \text{ là hằng số})\\
\Rightarrow&\frac{9f(x)-5x}{4x}=C,\forall x>0\\
\Rightarrow&f(x)=\alpha x,\forall x>0 (\alpha \text{ là hằng số}).
\end{aligned}$$

Thay công thức trên vào (1) ta tìm được $\alpha=1$.

Vậy bài toán đã cho có duy nhất nghiệm hàm $f(x)=x,\forall x>0$.

Cách 5:

Giả sử tồn tại $x_0>0$ để mà $f(x_0)>x_0$. Trong (1) cho $x=x_0$ ta được:

$$f(3f(x_0)+3y)=f(3x_0+y)+2y,\forall y>0. \tag{7}$$

Đặt $A=3f(x_0)-3x_0>0$. Bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau:

$$f(y)\geq y+nA,\forall y>3x_0,\forall n\in\mathbb{N}$$

Theo **nhận xét 1** thì bất đẳng thức (8) đúng với $n=0$. Giả sử ta đã có $f(y)\geq y+kA$ với mọi $y>3x_0$ và k là một số tự nhiên nào đó. Nhiệm vụ của ta bây giờ là chứng minh:

$$f(y)\geq y+(k+1)A,\forall y>3x_0.$$

Rõ ràng $3f(x_0)+3y>3x_0$ với mọi $y>0$ nên theo giả thiết quy nạp thì:

$$\begin{aligned}
&f(3f(x_0)+3y)\geq 3f(x_0)+3y+kA,\forall y>0\\
\overset{(7)}{\Rightarrow}&f(3x_0+y)+2y\geq 3f(x_0)+3y+kA,\forall y>0\\
\Rightarrow&f(y+3x_0)\geq y+3f(x_0)+kA,\forall y>0.
\end{aligned}$$

Đến đây thay y bởi $y-3x_0$ ta được:

$$\begin{aligned}&f(y)\geq y+A+kA, \forall y>3x_0\\ \Rightarrow &f(y)\geq y+(k+1)A, \forall y>3x_0.\end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức (8) được chứng minh xong. Trong (8) chọn $y=3x_0+1$ và cho $n\to+\infty$ ta có ngay điều vô lý.

Nói cách khác, không tồn tại $x_0>0$ sao cho $f(x_0)>x_0$. Kết hợp với **nhận xét 1** ta có ngay $f(x)=x$ với mọi $x>0$. Thử lại thấy đây là nghiệm hàm của bài toán.

Bình luận. Bất đẳng thức (8) được tìm ra như sau: Sử dụng **nhận xét 1** trong (7) ta suy ra:

$$\begin{aligned}&f(3x_0+y)+2y\geq 3f(x_0)+3y, \forall y>0\\ \Rightarrow &f(3x_0+y)\geq 3f(x_0)+y, \forall y>0.\end{aligned}$$

Đến đây thay y bởi $y-3x_0$, ta được:

$$f(y)\geq y+A, \forall y>3x_0.$$

Lặp lại quá trình trên, ta sẽ thu được bất đẳng thức (8).

Cách 6:

Trước hết ta chứng minh f đồng biến (tăng ngặt) trên $\mathbb{R}^+$.

Sử dụng **nhận xét 1** ở (1) ta được:

$$\begin{aligned}&f(3x+y)+2y\geq 3f(x)+3y, \forall x,y>0\\ \Rightarrow &f(3y+x)\geq 2(f(x)-x)+f(x)+3f(y),\\ &\forall x,y>0.\end{aligned}$$

Đến đây thay y bởi $3f(y)$ rồi sử dụng (1) ta được:

$$\begin{aligned}&f(3y+x)+2x\geq 3f(x)+3f(y), \forall x,y>0\\ \Rightarrow &f(3y+x)\geq 2(f(x)-x)+f(x)+3f(y),\\ &\forall x,y>0.\end{aligned}$$

Lại có $f(x)\geq x$ với mọi $x>0$ nên:

$$f(3y+x)\geq f(x)+3f(y), \forall x,y>0. \quad (9)$$

Do đó với mọi $a,b>0$ mà $a>b$ thì:

$$\begin{aligned}f(a)&=f\left(3\cdot\frac{a-b}{3}+b\right)\overset{(9)}{\geq} f(b)+3f\left(\frac{a-b}{3}\right)\\ &>f(b).\end{aligned}$$

Như vậy f đồng biến trên $\mathbb{R}^+$.

Trong (9) thay x bởi $3f(x)$ rồi sử dụng (1) thì được:

$$\begin{aligned}&f(3x+y)+2y\\ &\geq f(3f(x))+3f(y), \forall x,y>0. \quad (10)\end{aligned}$$

Chú ý rằng $3f(x)\geq 3x$ với mọi $x>0$ và f đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ nên $f(3f(x))\geq f(3x), \forall x>0$. Vì thế từ (10) ta có ngay:

$$\begin{aligned}&f(3x+y)+2y\geq f(3x)+3f(y), \forall x,y>0\\ \Rightarrow\ &f(3x+y)\geq f(3x)+2(f(y)-y)+f(y)\\ &\qquad\geq f(3x)+f(y), \forall x,y>0.\end{aligned}$$

Nói tóm lại,

$$f(x+y)\geq f(x)+f(y), \forall x,y>0.$$

Sử dụng đánh giá trên, ta có:

$$\begin{aligned}&f(3f(x)+3y)=f(3f(x)+y+2y)\\ &\geq f(3f(x)+y)+f(2y)\\ &\geq f(3f(x)+y)+2y, \forall x,y>0\\ \overset{(1)}{\Rightarrow}&f(3x+y)+2y\geq f(3f(x)+y)+2y,\\ &\forall x,y>0\\ \Rightarrow &f(3x+y)\geq f(3f(x)+y), \forall x,y>0.\end{aligned}$$

Mặt khác f đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ nên từ bất đẳng thức trên ta có ngay:

$$\begin{aligned}&3x+y\geq 3f(x)+y, \forall x,y>0\\ \Rightarrow &x\geq f(x), \forall x>0.\end{aligned}$$

Kết hợp với **nhận xét 1** ta thu được $f(x)=x$ với mọi $x>0$. Thử lại thấy đây là nghiệm hàm của bài toán.

Cách 7:

Ta sẽ chứng minh f đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ bằng phản chứng.

Giả sử tồn tại hai số dương $a > b$ sao cho $f(a) \le f(b)$. Đặt $\varepsilon = f(b) - f(a) \ge 0$.
Trong (1) cho $x = b$ thì được:

$$f(3f(b)+3y) = f(3b+y)+2y, \forall y > 0$$
$$\Rightarrow f(3f(a)+3(y+\varepsilon)) = f(3b+y)+2y, \forall y > 0$$
$$\overset{(1)}{\Rightarrow} f(3a+y+\varepsilon)+2(y+\varepsilon) = f(3b+y)+2y, \forall y > 0$$
$$\Rightarrow f(y+3b) = f(y+3a+\varepsilon)+2\varepsilon, \forall y > 0.$$

Đến đây thay y bởi $y - 3b$ và đặt $T = 3a - 3b + \varepsilon$ thì được:

$$f(y) = f(y+T)+2\varepsilon \ge f(y+T), \forall y > 3b.$$

Sử dụng đánh giá trên liên tiếp ta được:

$$f(y) \ge f(y+nT), \forall y > 3b, n \in \mathbb{N}^*.$$

Áp dụng **nhận xét 1** vào bất đẳng thức trên ta có ngay:

$$f(y) \ge y+nT, \forall y > 3b, n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đây chọn $y = 3b+1$ và cho $n \to +\infty$ ta có ngay điều vô lý. Do vậy f đồng biến trên $\mathbb{R}^+$.
Sử dụng **nhận xét 1** trong (1) ta được:

$$f(3x+y)+2y \ge 3f(x)+3y, \forall x, y > 0$$
$$\Rightarrow f(3x+y) \ge 3f(x)+y, \forall x, y > 0. \quad (11)$$

Ta có $3f(x)+3y \ge 3x+3y, \forall x, y > 0$ và f đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ nên:

$$f(3f(x)+3y) \ge f(3x+3y), \forall x, y > 0$$
$$\overset{(1)}{\Rightarrow} f(3x+y)+2y \ge f(3x+3y), \forall x, y > 0.$$

Đến đây thay x bởi $\frac{x}{3}$ thì được:

$$f(x+y)+2y \ge f(x+3y) \overset{(11)}{\ge} 3f(y)+x, \forall x, y > 0.$$

Trong đánh giá trên cho $x = 2y$ ta được:

$$f(3y) \ge 3f(y), \forall y > 0. \quad (12)$$

Trong (1) thay y bởi $3f(y)$ rồi sử dụng (1) ta được:

$$f(3f(x)+9f(y)) = f(3y+x)+6f(y)+2x, \forall x, y > 0. \quad (13)$$

Mặt khác $3f(x)+9f(y) \ge 3(x+3y), \forall x, y > 0$ và f đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ nên:

$$f(3f(x)+9f(y)) \ge f(3(x+3y)) \overset{(12)}{\ge} 3f(x+3y), \forall x, y > 0.$$

Sử dụng đánh giá này ở (13) ta được:

$$f(3y+x)+6f(y)+2x \ge 3f(x+3y), \forall x, y > 0$$
$$\Rightarrow x+3f(y) \ge f(3y+x), \forall x, y > 0.$$

Mặt khác theo (11) ta lại có $f(3y+x) \ge x+3f(y), \forall x, y > 0$. Do đó:

$$f(3y+x) = x+3f(y), \forall x, y > 0.$$

Đến đây thay x bởi $3x$ ta được:

$$f(3y+3x) = 3x+3f(y), \forall x, y > 0.$$

Trong đẳng thức trên hoán đổi vị trí của x và y cho nhau ta được:

$$3x+3f(y) = 3y+3f(x), \forall x, y > 0$$
$$\Rightarrow f(x)-x = f(y)-y, \forall x, y > 0.$$

Nói cách khác,

$$f(x) = x+C, \forall x > 0. (C \text{ là hằng số})$$

Thay công thức trên vào (1) ta tìm được: $C = 0$.
Vậy bài toán đã cho có duy nhất nghiệm hàm $f(x) = x, \forall x > 0$.

3. Lời kết

Vậy là chúng ta đã cùng nhau đi qua 7 lời giải cho bài toán phương trình hàm trên.

Trong số các lời giải này, có 3 cách sử dụng **nhận xét 2** và cũng có 3 cách lấy **nhận xét 1** làm ý tưởng chủ đạo, xen vào giữa là lời giải sử dụng một bổ đề rất mạnh thường dùng để giải quyết những bài toán phương trình hàm trên tập hợp số thực dương. Sẽ là tuyệt vời hơn nữa nếu số lượng lời giải cho bài toán này không chỉ dừng lại ở con số 7. Nói đến đây, tôi chợt nhớ đến lời khuyên từ một người thầy của tôi: "Làm toán không nhất thiết phải chạy theo số lượng bài tập, mà đôi khi chỉ cần hiểu sâu sắc một bài và dành thời gian đào sâu bản chất của bài toán đó." Hy vọng rằng với những gì tôi chia sẻ trên đây sẽ góp phần giúp bạn đọc tìm ra phương pháp học tập tốt nhất cho bản thân, đồng thời luôn nuôi giữ được niềm say mê Toán học của mình. Mọi góp ý cho bài viết này xin vui lòng gửi về email quangchv1234@gmail.com.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Tài Chung, Lê Hoành Phò, *Chuyên khảo Phương trình hàm*. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội: Hà Nội, 2016.

[2] Nguyễn Nhất Huy, Phạm Hoàng Sơn, "Khai thác một lớp các hệ thức đặc biệt khi giải phương trình hàm" trong *Các phương pháp giải toán qua các kỳ thi Olympic* 2023, Trần Nam Dũng. Vũng Tàu, 2023, tr.93 – 116.

[3] Group Facebook: *Hướng tới Olympic Toán VN*.