TÍNH SỐ PI: XƯA VÀ NAY
Phần II: Tính số Pi - từ thế kỷ XVII đến nay

TẠ DUY PHƯỢNG[1], NGUYỄN HOÀNG VŨ[2]

Lời dẫn

Số π chắc chắn là hằng số nổi tiếng và hấp dẫn nhất trong Toán học.

Cái tên "Pi Day–Ngày π" lần đầu tiên được đề nghị bởi nhà Vật lý Larry Shaw, vào ngày 14 tháng Ba năm 1988 ở Bảo tàng Exploratorium, trung tâm San Francisco, vì 3.14 là giá trị gần đúng của số π, nó cũng trùng với ngày sinh của Albert Einstein ($14-3-1879$). Kể từ đó, rất nhiều người yêu toán trên thế giới cứ đến 14 tháng 3 lại tập trung kỷ niệm hằng số này và qua đó thể hiện tình yêu với toán học.

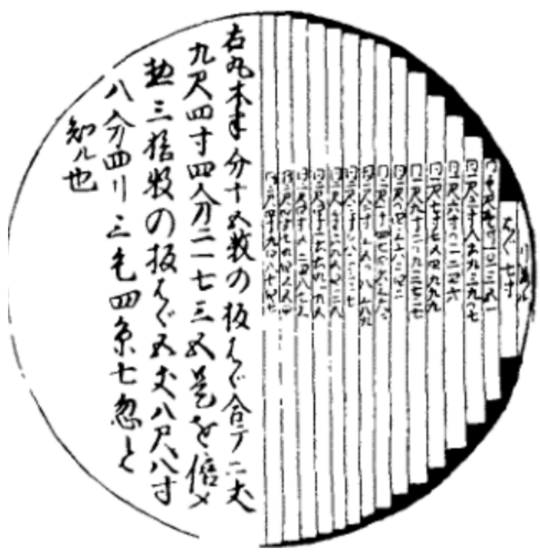
Phần 1 (Tạp chí Pi, tập 7, tháng $3-2023$) đã giới thiệu Lịch sử tính số Pi cho tới thế kỉ XVII với phương pháp tính chủ yếu nhờ thuật toán nhân đôi số cạnh của đa giác đều nội ngoại tiếp hình tròn của Archimedes. Phần 2 tiếp tục giới thiệu cách tính gần đúng số Pi nhờ các công thức khai triển số π dưới dạng chuỗi và trên máy tính, chủ yếu từ thế kỉ XVII cho tới nay.

Tính gần đúng số Pi dưới dạng chuỗi

Madhava $(1340-1425)$, nhà toán học Ấn Độ là người đầu tiên sử dụng công thức chuỗi vô hạn dưới đây để tính số π:

$$\pi = \sqrt{12}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)\cdot 3^{k-1}}. \qquad (1)$$

Công thức (1) cũng được Leibniz, nhà toán học Đức tìm ra vào năm 1676. Công thức (1) sau này được gọi là *chuỗi Madhava – Leibniz*.



Hình 1: Kazayuki.

Trong hai cuốn sách của ba nhà toán học Nhật Bản Sawaguchi Kazayuki (1670, Hình

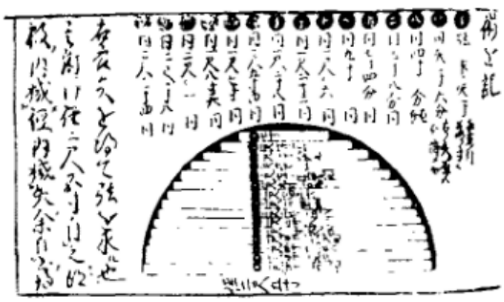
---

[1] *Viện Toán học, đã nghỉ hưu.*

[2] *Hà Nội.*

1), Machinag và Ohashi (1687, Hình 2) đã đưa ra công thức (2) tính số π

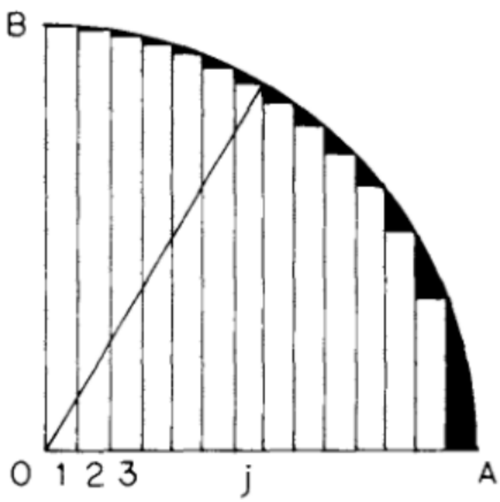
$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{n^2 - j^2}. \tag{2}$$



Hình 2: Machinag và Ohashi (1687).

Giải thích công thức (2): Chia $\frac{1}{4}$ hình tròn bán kính $OA = OB = 1$ thành n phần bằng nhau. Vì (Hình 3) mỗi dải chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{1}{n}$ và chiều dài bằng (theo Định lý Pythagoras) $\sqrt{1-\left(\frac{j}{n}\right)^2}$ nên diện tích của dải chữ nhật thứ j bằng

$$S_j = \frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{j}{n}\right)^2} = \frac{1}{n^2}\sqrt{n^2 - j^2}.$$



Hình 3.

Tổng diện tích các hình chữ nhật bằng

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{n^2 - j^2}.$$

Khi $n \to \infty$ thì S_n tiến tới diện tích $(= \frac{\pi}{4})$ của $\frac{1}{4}$ hình tròn bán kính $= 1$. Suy ra công thức (2).

Về mặt lý thuyết, theo công thức (2), người Nhật có thể tính gần đúng số π với độ chính xác bất kỳ khi chọn số n đủ lớn. Tuy nhiên, chuỗi này hội tụ rất chậm vì phải khai căn, giống như trong phương pháp của Archimedes hoặc công thức của François Viète (xem [1]).

Chưa có cơ sở để khẳng định người Nhật đã thực sự sử dụng công thức (2) để tính gần đúng số π. Tuy nhiên, John Wallis đã tiếp cận tương tự: Vì $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm O bán kính bằng 1 trong góc phần tư thứ nhất có phương trình $y = \sqrt{1-x^2}$ có diện tích bằng $\frac{\pi}{4}$ nên theo ngôn ngữ tích phân hiện đại:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

John Wallis trong cuốn *Arithmetica infinitorum* (1655) đã rất vất vả để tìm ra công thức mà bây giờ được gọi là *tích Wallis* hay *tích vô hạn*:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\dots \tag{3}$$

Ngày nay, nhờ kỹ thuật tính tích phân từng phần, học sinh lớp 12 cũng có thể chứng minh được

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots 2m}\,\frac{\pi}{2}$$

và

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2m}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2m+1)}.$$

Lấy giới hạn hai vế khi $m \to \infty$, và vì vế trái của chúng bằng nhau, nên vế phải bằng nhau và ta suy ra công thức Wallis (3).

Công thức Wallis là một cột mốc quan trọng trong lịch sử tính số π: Wallis là người đầu tiên trong lịch sử tìm ra chuỗi vô hạn chỉ gồm các phép tính đơn giản, không có căn bậc hai gây khó khăn khi tính toán bằng số như trong các công thức của Archimedes hoặc Viète.

Vào những năm 1660, nhà khoa học người Anh Isaac Newton và nhà toán học người Đức Gottfried Wilhelm Leibniz đã xây dựng phép toán vi phân (calculus), dẫn tới phát hiện rất nhiều chuỗi vô hạn cho phép tính số π.

Vào năm 1672, James Gregory và Gottfried Leibniz năm 1674, độc lập nhau, đã đưa ra công thức (ngày nay được gọi là công thức Gregory – Leibniz) tính arctan của $t, 0 \leq t \leq 1$:

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \ldots \quad (4)$$

Giải thích: Ta có

$$\arctan t = \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Vì $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \ldots$ nên

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^t \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\right) dx$$
$$= t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \ldots$$

Suy ra công thức Gregory – Leibniz (4).

Cho $t = 1$ ta có

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots$$

Tuy nhiên, chuỗi này hội tụ rất chậm, thí dụ, cần phải tính hơn 300 số hạng để nhận được số π chính xác đến hai chữ số thập phân, và số gần đúng này không chính xác bằng $3\frac{1}{7}$, giá trị mà Archimedes đã nhận được hơn 2000 năm trước.

Vì vậy, cần xem xét công thức (4) tỷ mỉ hơn.

Năm 1699, nhà toán học người Anh Abraham Sharp đã dùng chuỗi Gregory – Leibniz (4) với $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ để tính số π chính xác đến 71 chữ số:

$$\frac{\pi}{6} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \ldots\right) \quad (5)$$

Kỷ lục này phá vỡ kỉ lục tính gần đúng số π đến 39 chữ số được thiết lập nhờ thuật toán Archimedes và cho thấy sức mạnh của Giải tích.

Năm 1719, nhà toán học người Pháp de Lagny đã tính gần đúng số π đến 127 chữ số thập phân (có 100 chữ số chính xác) nhờ chuỗi Sharp (5).

Năm 1706, John Machin (1680 – 1752) sử dụng mẹo sau đây để tăng tốc độ hội tụ của chuỗi Gregory – Leibniz (4): Với $\tan \beta = \frac{1}{5}$ ta có

$$\tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{5}{12}$$

và

$$\tan 4\beta = \frac{2 \tan 2\beta}{1 - \tan^2 2\beta} = \frac{120}{119}.$$

Suy ra

$$\tan\left(4\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\beta - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan 4\beta \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}}$$
$$= \frac{1}{239}.$$

Vậy

$$\arctan \frac{1}{239} = 4\beta - \frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}.$$

Áp dụng công thức (4) ta được

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}\\ &= 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \dots\right)\\ &\quad - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \dots\right). \quad (6)\end{aligned}$$

Vì 239 là đủ lớn, nên $\arctan\frac{1}{239}$ là số đủ nhỏ. Hơn nữa, do các số hạng liên tiếp trong phân tích chuỗi $\arctan\frac{1}{5}$ chỉ chênh nhau một đại lượng $\frac{1}{5^2} = 0.04$ nên có thể dễ dàng tính bằng tay $\arctan\frac{1}{5}$. Từ nhận xét này, John Machin đã tính bằng tay xấp xỉ số π đến 100 chữ số.

Dưới đây là một số công thức được Euler ($1707 - 1783$) phát hiện và trình bày trong cuốn sách *Introductio in Analysin infinitorum* (1748).

Từ công thức đã được Newton chúng minh

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

Euler đặt $x^2 = y$ và xét phương trình

$$\sin x = 0 \quad (7)$$

như phương trình bậc vô hạn, ta có (với $y \neq 0$):

$$1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \dots = 0. \quad (8)$$

Nghiệm của phương trình (7) là $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ Do đó nghiệm của (8) là $\pi^2, (2\pi)^2, \dots$

Theo tính chất của phương trình bậc vô hạn, tổng nghịch đảo của các nghiệm của (8) bằng ngược dấu hệ số của y, tức là

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \dots = \frac{1}{3!}$$

hay

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (9)$$

Lưu ý rằng Jacques Bernoulli (và cả Leibniz) tuy chứng minh được sự hội tụ của chuỗi (9), nhưng đã không tính được tổng này.

Tương tự cho $\cos x$, Euler tính được

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots. \quad (10)$$

Nhân (10) với 2 và trừ cho (9), ta đươc

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots.$$

Euler đã dùng công thức

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdots$$

để tính logarithm của π.

Euler cũng đã chứng minh công thức

$$\arctan\frac{1}{p} = \arctan\frac{1}{p+q} + \arctan\frac{q}{p^2+pq+1}.$$

Cho $p = q = 1$ ta được

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}.$$

Tính $\arctan\frac{1}{7}$ và $\arctan\frac{3}{79}$ trong công thức

$$\pi = 20\arctan\frac{1}{7} + 8\arctan\frac{3}{79}$$

theo công thức hội tụ nhanh

$$\arctan x = \frac{y}{x}\left(1 + \frac{2}{3}y + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}y^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}y^3 + \dots\right)$$

với $y = \frac{x^2}{1+x^2}$, Euler đã tính gần đúng số π đến 20 chữ số trong vòng 1 giờ.

Trên đây chỉ là một số trong rất nhiều công thức của Euler tính gần đúng số π theo chuỗi.

Phụ lục 1. Một số công thức tính số π ([3])

1. Archimedes (khoảng 250 trước công nguyên)

Đặt $P_6 := 4\sqrt{3}, p_6 = 6$ là chu vi lục giác đều ngoại tiếp và nội tiếp đường tròn bán kính 1 và

$$P_{2n} := \frac{P_n p_n}{P_n + p_n}, p_{2n} := \sqrt{P_{2n} p_n}$$

là chu vi đa giác đều ngoại tiếp và nội tiếp đường tròn bán kính 1 khi gấp đôi số cạnh. Khi ấy (xem [1]) $\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} p_n = \pi$.

Nhờ công thức này, Archimedes đã chứng minh được $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ và nhà toán học người Áo Christoph Grienberger năm 1630 đã đạt kỷ lục tính chính xác số π đến 39 chữ số (xem [1]).

2. Francois Viète (khoảng 1578)

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)} \ldots,$$

Nhờ công thức này, nhà toán học François Viète năm 1578 đã tính chính xác số π đến 9 chữ số.

3. John Wallis (khoảng 1655)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

4. William Brouncker (khoảng 1658)

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\ldots}}}}$$

5. Mādhava, Gregory, Leibnitz ($1450 - 1671$)

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

6. Isaac Newton (khoảng 1666)

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \ldots\right)$$

Năm 1665, Isaac Newton đã tính chính xác số π đến 16 chữ số thập phân.

7. Công thức kiểu Machin ($1706 - 1776$)

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right);$$
$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right);$$
$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{7}\right);$$
$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right).$$

Năm 1706, Machin đã tính chính xác số π đến 100 chữ số thập phân.

8. Leonard Euler (khoảng 1748)

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots;$$
$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots;$$
$$\frac{\pi^2}{6} = 3\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2\binom{2m}{m}}.$$

9. Srinivasa Ramanujan (1914)

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 \frac{42n+5}{2^{12n+4}};$$
$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{(1103+26390n)}{396^{4n}}.$$

10. Louis Comtet (1974)

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{36}{17}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4\binom{2m}{m}}.$$

11. Eugene Salamin, Richard Brent (1976)

Đặt $a_0 := 1, b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, s_0 = \frac{1}{2}$.

Với $k = 1, 2, 3, \ldots$ tính

$$a_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}, b_k = \sqrt{a_{k-1}b_{k-1}},$$
$$c_k = a_k^2 - b_k^2, s_k = s_{k-1} - 2^k c_k,$$
$$p_k = \frac{2a_k^2}{s_k}.$$

Khi ấy $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = \pi$ và tốc độ hội tụ là cấp hai.

12. Ronathan Borwein, Peter Borwein (1985)

Đặt $a_0 = 6 - 4\sqrt{2},\ y_0 = \sqrt{2} - 1$.

Với $k = 1, 2, 3, \ldots$ tính

$$\begin{aligned} y_{k+1} =& \frac{1 - \sqrt[4]{1 - y_k^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - y_k^4}}, \\ a_{k+1} =& a_k (1 + y_{k+1})^4 \\ & - 2^{2k+3} y_{k+1} \left(1 + y_{k+1} + y_{k+1}^2\right). \end{aligned}$$

Khi ấy $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \frac{1}{\pi}$ và tốc độ hội tụ là cấp hai.

13. Ronathan Borwein, Peter Borwein (1985)

Hệ thức sau đây không đúng nhưng chính xác đến 42 tỷ chữ số thập phân

$$\pi = \left(\frac{1}{10^5} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{10^{10}}} \right)^2.$$

14. David Chudnovsky, Gregory Chudnovsky (1989)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} =& 12 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \\ & \times \frac{13591409 + n545140134}{\left(640320^3\right)^{n+\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

15. Ronathan Borwein, Peter Borwein (1989)

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \frac{(A + nB)}{C^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Trong đó

$$A := 212175710912\sqrt{61} + 1657145277365;$$
$$B := 13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750;$$
$$C := \left[5280\left(236674 + 30303\sqrt{61}\right)\right]^3.$$

16. Ronathan Borwein, Peter Borwein (1991) Đặt $a_0 = \frac{1}{3}, s_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Với $k = 1, 2, 3, \ldots$ tính

$$r_{k+1} = \frac{3}{1 + 2\sqrt[3]{1 - s_k^3}}, s_{k+1} = \frac{r_{k+1} - 1}{2},$$
$$a_{k+1} = r_{k+1}^2 a_k - 3^k \left(r_{k+1}^2 - 1\right)$$

Khi ấy $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{a_k} = \pi$ và tốc độ hội tụ là cấp ba.

17. David Bailey, Peter Borwein và Simon Plouffe (1996)

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right).$$

Các công thức trên là cơ sở để tính gần đúng số π trên máy tính điện tử.

Tính gần đúng số π trên máy tính điện tử

Lần đầu tiên số π được tính gần đúng đến 2037 chữ số mất 70 giờ, theo công thức Marchin (6), trên máy tính điện tử ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) tại phòng nghiên cứu Ballistic vào tháng 9 năm 1949. Tháng 11 năm 1954 và tháng 1 năm 1955. Naval Ordnance Reseach Calculator tại Dahlgren, bang Virgina (Mỹ) đã tính gần đúng số π đến 3089 chữ số trong 13 phút.

Kỷ lục này đã bị phá vỡ vào tháng 3 năm 1957 khi máy tính Pegasus tại Ferranti Computer Centre (London) tính được 10021 chữ số trong 33 giờ. Tuy nhiên, chỉ có 7480 chữ số chính xác.

Tháng 6 năm 1958, máy tính IBM 704 tại Paris Data Processing Center đã tính được 10000 chữ số trong vòng 1 giờ 40 phút nhờ chương trình được lập trên sự kết hợp công thức Machin (6) và chuỗi Gregory – Leibnitz (4).

Một năm sau, vào tháng 7 năm 1959, máy tính IBM 704 tại Commissariat à l'Enrgie Atomique (Paris) đã tính được 16167 chữ số trong vòng 4 giờ 20 phút, cũng theo chương trình trên.

Công thức Machin cũng là cơ sở để máy tính IBM 7090 tại the London Data Centre chạy chương trình vào tháng 7 năm 1961 với kết quả 20000 chữ số mất 39 phút.

Vào thời điểm này, bộ nhớ máy tính gần như đã đạt đến giới hạn. Để đạt được độ chính xác cao hơn, có thể khéo léo sửa đổi chương trình để sử dụng thời gian chạy máy lâu hơn, nhưng như vậy lại phải chịu những chi phí không hợp lý.

Vào tháng 7 năm 1961, Shanks và Wrench đã tăng tốc độ tính toán lên gấp 20 lần. Điều này một phần do IBM Data Processing Center (New York) đã sử dụng IBM 7090 có tốc độ nhanh, một phần họ đã sử dụng công thức được Stömer tìm ra năm 1896, thay cho công thức Machin:

$$\pi = 24\arctan\frac{1}{8} + 8\arctan\frac{1}{57} + 4\arctan\frac{1}{239} \tag{11}$$

Sau 8 giờ 43 phút, máy đã tính được 100265 chữ số và 100000 chữ số đầu đã được in ra trên 20 tờ giấy A4, mỗi tờ có 5000 chữ số.

Sau đó, vào tháng 2 năm 1966 trên IBM 7030 và một năm sau, vào tháng 2 năm 1967, máy CDC 6600 tại Commissariat à l'Enrgie Atomique (Paris) đã tính được 500000 chữ số dựa trên công thức Stömer (11), mất 29 giờ 45 phút chạy chương trình và 16 giờ 35 phút kiểm tra.

Nhà toán học Nhật Bản Yasumasa Kanada lập nhiều kỷ lục về tính gần đúng số trong khoảng 1995 – 2002, Ông đã tính được gần đúng số π đến trên 1 nghìn tỷ chữ số thập phân.

Năm 2019, nhà khoa học máy tính người Nhật Emma Haruka Iwao đã lập kỷ lục thế giới khi đã tính được hơn 31.4 nghìn tỷ chữ số của π.

Sử dụng máy tính hiệu năng cao, vào ngày 19 tháng 8 năm 2021, một nhóm các nhà nghiên cứu Thụy Sĩ đã tính được giá trị gần đúng mới của π gồm $62,831,853,071,796$ chữ số.

Ngày 21 tháng 3 năm 2022, Google Cloud thông báo rằng họ vừa lập kỷ lục thế giới mới tính giá trị gần đúng của π đến 100 nghìn tỷ chữ số, đánh bại kỷ lục trước đó là 62.8 nghìn tỷ.

Phụ lục 2 Các mốc thời gian tính số π ([3])

Tác giả	Th. gian	ch xác	Giá trị
Babilon	2000TCN	1	3.125
Ai Cập	2000TCN	1	3.16045
Trung Quốc	1200TCN	1	3
Kinh thánh	550 TCN	1	3
Archimedes	250 TCN	3	3.1418
Ptolemy	150	3	3.14166
Liu Hui	263	5	3.14159
Siddhanta	380	3	3.1416
Tổ Xung Chi	480?	7	3.1415926
Aryabhata	499	4	3.14156
Brahmagupta	640?	1	3.162277
Al-Khowarizmi	800	4	3.1416
Fibonacci	1220	3	3.141818
Al-Kashi	1429	14	
Viète	1593	9	3.1415926536
Van Ceulen	1615	35	
Newton	1665	16	
Sharp	1699	71	
Seki	1700?	10	
Kamata	1730?	25	
Machin	1706	100	
De Lagny	1719	127	112 chính xác
Rutherford	1824	208	152 chính xác
Lehmann	1853	261	
Shanks	1874	707	
Ferguson	1-1947	710	
Ferguson&Wrench	9-1947	808	
Smith & Wrench	1949	1120	
ENIAC	1949	2037	
Nicholson& Jeenel	1954	3092	

Phụ lục 2 Mốc thời gian tính số ([3], tiếp)

Tác giả	Th. gian	ch xác
Felton	5-1958	10.021
Guilloud	1959	16.167
Shanks & Wrench	1961	100.265
Guilloud & Filliatre	1966	250.000
Guilloud & Dichampt	1967	500.000
Guilloud & Bouyer	1973	1.001.250
Guilloud	1982	2.000.050
Tamura	1982	2.097.144
Tamura & Kanada	1982	8.388.576
Kanada, Yoshino& Tamura	1982	16.777.206
Ushio & Kanada	10-1983	10.013.395
Gosper	1985	17.526.200
Bailey	1-1986	29.360.111
Kanada & Tamura	10-1986	67.108.839
Kanada, Tamura, Kubo, et. al	1-1987	134.217.700
Kanada & Tamura	1-1988	201.326.551
Chudnovskys	6-1989	525.229.270
Kanada & Tamura	7-1989	536.870.898
Kanada & Tamura	11-1989	1.073.741.799
Chudnovskys	5-1994	4,044,000,000
Yasumasa Kanada	8-1995	4,294,967,286
Yasumasa Kanada	11-2002	1,241,100,000,000
Sandon Nash Van Ness "houkouonchi"	10-2014	13,300,000,000,000
Peter Trueb	11-2016	22,459,157,718,361
Emma Haruka Iwao	3-2019	31,415,926,535,897
Timothy Mullican	1-2020	50,000,000,000,000
Nhóm Thụy Sĩ	8-2021	62,831,853,071,796
Emma Haruka Iwao	3-2022	100,000,000,000,000
Jordan Ranous	4-2023	100,000,000,000,000

Phụ lục 3 Thực hành tính số π với GeoGebra

Phụ lục này giới thiệu cách tính số π trên *GeoGebra* có thể phục vụ trong dạy và học.

Thuật toán tính số Pi theo chuỗi Trong *GeoGebra*, việc tính xấp xỉ số π dựa theo các công thức dạng chuỗi là tương đối thuận tiện. Ví dụ, với công thức của Euler (9) cho $\frac{n^2}{6}$, ta tính tổng của chuỗi theo lệnh sau:

$$s = Sum\left(Sequence\left(\frac{1}{a^2}, a, 1, n\right)\right)$$

với n là giá trị cho trước. Ở đây lệnh *Sequence* sẽ tạo ra một dãy số có các phần tử là $\frac{1}{a^2}$ với $1 \le a \le n$. Giá trị của π có thể được tính bằng $\sqrt{6s}$. Với giá trị n càng lớn thì giá trị của π càng chính xác hơn. Chẳng hạn, với $n = 10^6$ lệnh

$$s = Sum\left(Sequence\left(\frac{1}{a^2}, a, 1, 106\right)\right)$$

cho $\pi \approx 3.14159$ (tính toán này mất khoảng vài phút trong *GeoGebra*). Các công thức khác dạng chuỗi của Euler hay của Ramanujan hoặc Comtet đều có thể tính theo phương pháp trên trong *GeoGebra*.

Với công thức Gregory – Leibnitz hoặc các công thức dạng Machin, các số hạng của chuỗi liên quan đến các số lẻ và dấu được đảo liên tiếp. Biểu thức tính dấu của mỗi số hạng sẽ tương đối phức tạp. Tuy nhiên, ta có thể sử dụng mẹo đặt bước của dãy số là 4 và sinh hai thay vì chỉ một số hạng ở mỗi bước. Ví dụ với công thức Gregory-Leibnitz ta làm như sau:

$$4 * Sum\left(Sequence\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+2}, a, 1, n+1, 4\right)\right)$$

với n là một số chia hết cho 4. Các số hạng sẽ được sinh theo cặp:$1 - \frac{1}{3}m\frac{1}{5} - \frac{1}{7}, \ldots$.

Với $n = 10^6$, ta thu được giá trị của π là 3.14159. Bạn đọc có thể tự sử dụng cách này để tính π theo các công thức dạng Machin.

Tính số Pi trên GeoGebra theo Archimedes

Có thể sử dụng *GeoGebra* để minh họa cách tính số π theo thuật toán Archimedes như sau. Thiết lập các đường tròn cùng với các đa giác đều nội ngoại tiếp theo các bước sau. Cũng có thể sử dụng các file .ggb *GeoGebra* có sẵn trên mạng.

Bước 1: Dùng công cụ vẽ đường tròn : Khai báo tâm (nhấn chuột được một điểm), chọn bán kính 0.5 (đường kính bằng 1).

Bước 2: Phóng to hình cho dễ nhìn đường tròn.

Bước 3: Vẽ đa giác đều nhớ công cụ đa giác đều (thí dụ, tam giác hoặc tứ giác đều).

Nháy vào đỉnh đầu tiên để kết thúc vẽ đa giác đều nội tiếp.

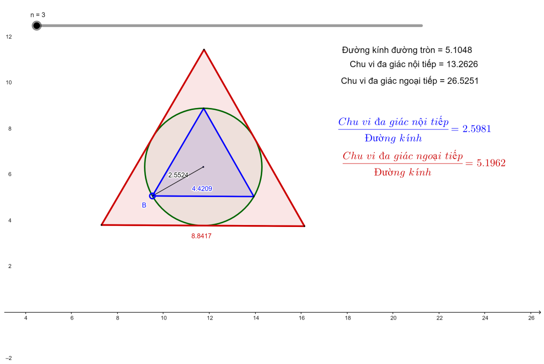
Bước 4: Chọn nút công cụ chuyển động và vẫn giữ nguyên hình (tam giác hoặc vuông).

Bước 5: Chọn công cụ Khoảng cách hoặc Độ dài. Chọn một điểm bên trong đường tròn nội tiếp để xuất hiện số đo chu vi. Ghi số đo chu vi xuống phía dưới.

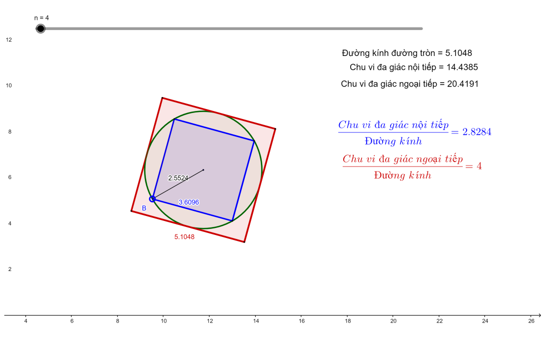
Bước 6: Dùng quy trình trên để vẽ và tìm chu vi đa giác đều 6 cạnh, 12 cạnh, 24, 48 và 96 cạnh.

Bước 7: Làm tương tự với đa giác đều ngoại tiếp và so sánh với chu vi đa giác đều nội tiếp và đi đến kết luận xấp xỉ số π.

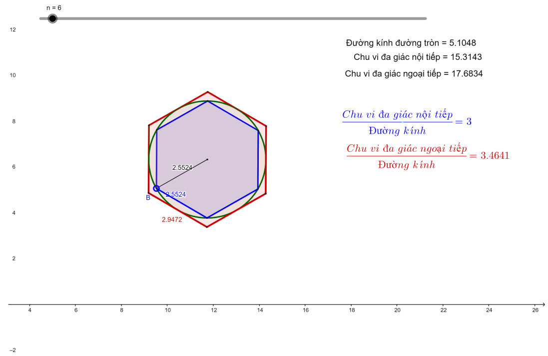
Dưới đây là một số hình ảnh minh họa. :



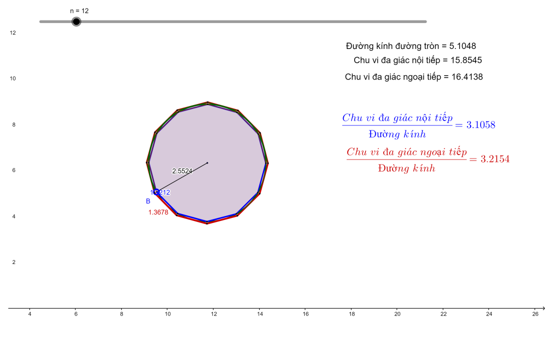
$n = 3$



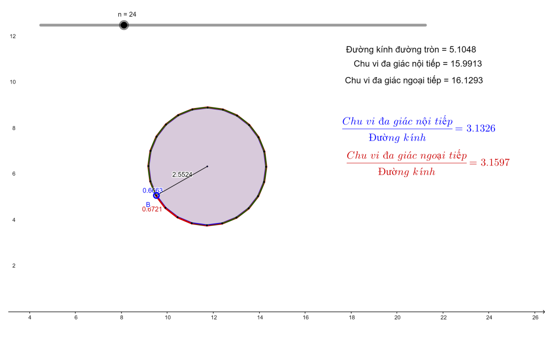
$n = 4.$



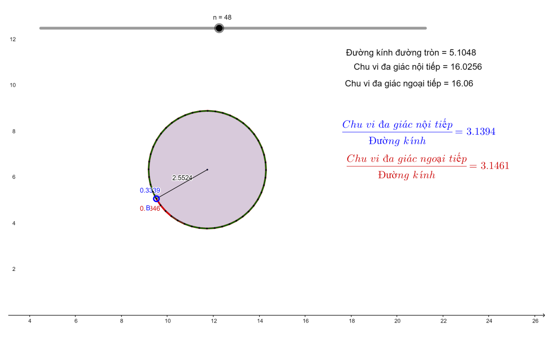
$n = 6.$



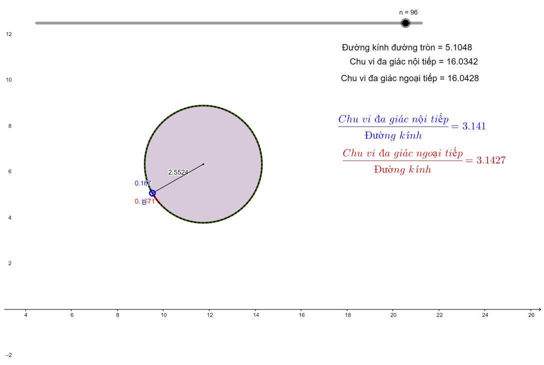
$n = 12.$



$n = 24.$



$n = 48.$



$n = 96$.

GeoGebra đã cài đặt số Pi gần đúng đến 13 chữ số 3.141592653589.

Máy tính điện tử khoa học (Casio fx–580) đã cài đặt số Pi gần đúng đến 10 chữ số

$$\pi \approx 3.141592653$$

Thay lời kết

Xung quanh số π còn khá nhiều điều đáng được quan tâm. Thí dụ:

1) Tính chất vô tỷ và siêu việt (không là nghiệm của phương trình đa thức) của số π.

2) Biểu diễn số π qua phân số liên tục.

3) Các công thức mới, lập trình và tính gần đúng số π trên các máy tính hiện đại.

4) Phương pháp Monte–Carlo tính gần đúng π.

5) Số π và những vấn đề toán học liên quan (Công thức Euler, Hàm zeta, Fractal, ...).

6) Số π trong cuộc sống, ...

Bạn đọc có thể tham khảo thêm trong các tài liệu [2], [3] và trên Internet.

Tài liệu tham khảo

[1] Tạ Duy Phượng, Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành, Mai Văn Thu, Nguyễn Hoàng Vũ, Tính số Pi: Xưa và Nay, Phần 1: Tính số Pi: Xưa, Tạp chí Pi, Tập 7, số 3, 2023.

[2] Petr Beckmann, *A History of* π (Pi), St. Martin's Press, New York, in lần thứ ba, 1974.

[3] Lennart Berggren, Jonathan Borwein, Peter Borwein, Pi: *A Source Book* (Second Edition), Springer, 2000.

[4] Một số tư liệu trên Internet.