TRANH KHẢM THIELE[1]

CHRISTIAN GENEST[2], STEFFEN LAURITZEN[3]

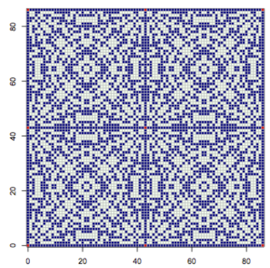
(Người dịch: Nguyễn Hoàng Thạch)

Nhà thiên văn học, nhà thống kê và doanh nhân bảo hiểm người Đan Mạch Thorvald Thiele đã tìm ra cách sinh tự động các họa tiết khảm rất đẹp nhờ sử dụng khái niệm thặng dư bậc hai trong tập hợp các số nguyên Gauss.

Tranh khảm gồm nhiều viên hoặc mảnh nhỏ nhiều màu sắc, làm từ những vật liệu khác nhau, được sắp xếp thành một họa tiết trang trí. Được dùng để lát sàn, trang trí tường, trần nhà và các đồ vật, tranh khảm rất được ưa chuộng ở thời Cổ Đại, và vẫn còn được sử dụng trong suốt thời Trung Cổ và Phục Hưng.

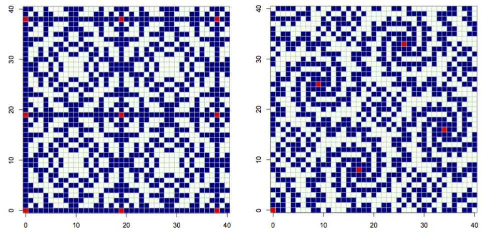
Sau khi gần như biến mất, nghệ thuật lát khảm trở nên phổ biến trở lại với trào lưu nghệ thuật *Art nouveau*[4] vào cuối thế kỷ 19, đầu thế kỷ 20. Những khám phá khoa học thu hút mạnh mẽ sự chú ý của công chúng và nhiều nghệ sỹ (gồm nhà thơ, nhạc sỹ, họa sỹ, v.v.) đã chuyển tải sức quyến rũ này bằng cách đưa thêm một chiều toán học vào tác phẩm của mình. Sự đều đặn duyên dáng của những họa tiết khảm tô điểm cho những ngôi nhà riêng cũng như những tòa nhà công cộng của chúng ta chỉ là một trong rất nhiều biểu hiện của cuộc tìm tòi thẩm mỹ này.

Thorvald Thiele (1838 – 1910) đã đóng góp vào trào lưu này theo cách của riêng mình.



Hình 1. Thặng dư bậc hai modulo 43.

Ông là người đầu tiên chỉ ra cách sử dụng thặng dư trong tập hợp các số nguyên Gauss để xây dựng một cách dễ dàng những hình khảm tuyệt đẹp. Trong Hình 2 là hai họa tiết được ông công bố lần đầu tiên tại một hội nghị khoa học lớn của vùng Scandinavia tổ chức tại Copenhagen vào năm 1873. Còn trong Hình 3 là họa tiết Thiele ở sàn tiền sảnh Bộ Quốc phòng Đan Mạch, cũng ở Copenhagen.



Hình 2. Hai họa tiết được Thiele công bố tại hội nghị khoa học năm 1873.

[1] *Accromath, vol. 11, 2016. (https://accromath.uqam.ca/2016/10/les-mosaiques-de-thiele/)*

[2] *Đại học McGill, Canada.* [3] *Đại học Copenhagen, Đan Mạch.* [4] *Nghệ thuật Mới, hay Tân Nghệ thuật.*

Không chỉ tạo ra kết quả tuyệt đẹp, kỹ thuật xây dựng họa tiết khảm của Thiele vừa đơn giản lại vừa khéo léo. Nó dựa trên khái niệm thặng dư bậc hai phức mà chúng ta sẽ cùng nhau tìm hiểu dưới đây. Ở cuối bài, chúng ta sẽ đưa ra ba câu đố chưa có lời giải về họa tiết trong Hình 3.

Hình 3. Họa tiết Thiele trang trí tiền sảnh Bộ Quốc Phòng Đan Mạch, số 9 phố Holmens Kanal, Copenhagen.

Đồng dư và thặng dư bậc hai trong $\mathbb{Z}$

Cho số nguyên $p \geq 1$. Nhắc lại rằng hai số nguyên

$$a, b \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

được gọi là đồng dư với nhau modulo p nếu hiệu $a - b$ là bội của p, nghĩa là tồn tại $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $a - b = kp$. Khi đó ta viết

$$a \equiv b \mod p.$$

Nói riêng, a đồng dư với số dư của nó khi chia cho p. Chẳng hạn, ta có thể viết $17 \equiv 1 \mod 4$ vì $17 - 1 = 16$ chia hết cho 4, hoặc $28 \equiv 0 \mod 4$ vì $28 = 4 \times 7$ là bội của 4.

Ngoài ra, ta nói rằng số tự nhiên $q \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ là một *thặng dư bậc hai* modulo p nếu tồn tại số nguyên x sao cho

$$q \equiv x^2 \mod p.$$

Trong trường hợp ngược lại, ta nói q không phải là thặng dư bậc hai modulo p.

Hai ví dụ đơn giản

Ví dụ 1. Mọi số tự nhiên q đều là thặng dư bậc hai modulo 2. Thật vậy:

- Nếu $q \equiv 0 \mod 2$, tức q chẵn, thì $q \equiv 0^2 \mod 2$;
- Nếu $q \equiv 1 \mod 2$, tức q lẻ, thì $q \equiv 1^2 \mod 2$. Một cách tổng quát, với mọi p, mọi số tự nhiên q đồng dư với 0 hoặc 1 đều là thặng dư bậc hai modulo p.

Ví dụ 2.

- Nếu $q \equiv 0 \mod 4$, thì $q \equiv 0^2 \mod 4$;
- Nếu $q \equiv 1 \mod 4$, thì $q \equiv 1^2 \mod 4$.

Trong khi đó, nếu $q \equiv 2 \mod 4$ hoặc $q \equiv 3 \mod 4$, không tồn tại số nguyên x nào sao cho $q \equiv x^2 \mod 4$. Điều này có thể được chứng minh bằng cách xét hai trường hợp x chẵn và x lẻ:

- Nếu $x = 2n$ thì $x^2 = 4n^2 \equiv 0 \mod 4$;
- Nếu $x = 2n + 1$ thì $x^2 = 4n^2 + 4n + 1 \equiv 1 \mod 4$.

Vỉa hè Thiele

Kết quả trên được minh họa trong Hình 4 bằng "vỉa hè Thiele". Một cách tổng quát, vỉa hè Thiele modulo p gồm các mảnh hình vuông đơn vị đặt chính giữa các điểm $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, v.v. Màu của mảnh hình vuông tại điểm $(q,0)$ được xác định như sau:

- đỏ nếu $q \equiv 0 \mod p$;
- xanh nếu q là thặng dư bậc hai modulo p (nhưng $q \not\equiv 0 \mod p$);
- trắng nếu q không phải thặng dư bậc hai modulo p.

Hình 4. Vỉa hè Thiele modulo 4.

Khi $p = 4$, mọi số tự nhiên q đồng dư với 0, 1, 2 hoặc 3 modulo 4. Họa tiết "đỏ, xanh, trắng, trắng" ứng với các mảnh $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$ lặp lại vô hạn. Với mọi giá trị $p \geq 1$ khác, vỉa hè Thiele modulo p có thể được xây dựng dễ dàng một khi ta đã biết màu của các mảnh $(0,0),\dots,(p-1,0)$: họa tiết lặp lại với chu kỳ p.

Các họa tiết khảm Thiele dựa trên một nguyên lý tương tự. Với mỗi cặp số nguyên $p=(p_1,p_2)$, màu của mảnh (q_1,q_2) sẽ phụ thuộc vào việc (q_1,q_2) có phải là thặng dư bậc hai modulo p hay không. Để điều này có nghĩa, trước tiên chúng ta cần tìm hiểu khái niệm đồng dư giữa hai cặp số nguyên.

Thorvald Nicolai Thiele (1838 – 1910)

Thorvald Thiele sinh ngày 24 tháng 12 năm 1838 ở Copenhagen và mất ngày 26 tháng 9 năm 1910 ở cùng thành phố, thọ 71 tuổi. Tên ông được đặt theo cha đỡ đầu của ông, nhà điêu khắc Bertel Thorvaldsen. Sau quá trình học tập xuất sắc, ông trở thành giáo sư thiên văn học tại Đại học Copenhagen từ năm 1875 đến năm 1907, đồng thời là giám đốc đài thiên văn của trường. Được coi là một người mở đường của thống kê toán học, ông là người đầu tiên đề xuất một lý thuyết chuyển động Brown, đồng thời là tác giả của các khái niệm cumulant và hàm hợp lý. Thiele cũng góp phần sáng lập Hafnia, công ty bảo hiểm nhân thọ tư nhân đầu tiên của Đan Mạch, vào năm 1872. Ông là giám đốc khoa học của công ty tới năm 1901, rồi chủ tịch Hội đồng Quản trị từ năm 1903 tới năm 1910. Tên ông được đặt cho hai tiểu hành tinh; một trong hai tiểu hành tinh đó được phát hiện bởi con trai ông, Holger Thiele, cũng là một nhà thiên văn học nổi tiếng.

Mở rộng cho tập hợp các số nguyên Gauss

Trong công trình *Disquisitiones arithmeticae*[5] xuất bản năm 1801, nhà toán học, vật lý học và thiên văn học người Đức Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) quan tâm đến số học đồng dư trên những tập hợp khác $\mathbb{Z}$, trong đó có tập hợp các cặp số nguyên, tức là các vector $(a_1,a_2)\in\mathbb{Z}^2=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Gauss định nghĩa tổng và tích của hai phần tử bất kỳ $a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)$ trong $\mathbb{Z}^2$ như sau:

$$\begin{aligned}&(a_1,a_2)+(b_1,b_2)\\&=(a_1+b_1,a_2+b_2),\\&(a_1,a_2)\times(b_1,b_2)\\&=(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1).\end{aligned}$$

Phép cộng là phép cộng vector thông thường. Phép nhân, có vẻ bí ẩn hơn, liên hệ mật thiết với khái niệm số phức (xem phần đóng khung bên dưới).

Tập hợp $\mathbb{Z}^2$ được trang bị hai phép toán trên được gọi là tập hợp các *số nguyên Gauss*. Tập hợp các số nguyên Gauss có đủ các tính chất cần thiết để ta có thể định nghĩa trên đó các khái niệm đồng dư và thặng dư bậc hai tương tự những khái niệm đã có trên $\mathbb{Z}$.

Cho hai số tự nhiên p_1 và p_2 không đồng thời bằng 0. Ta nói rằng hai phần tử $a,b\in\mathbb{Z}$ đồng dư với nhau modulo $p=(p_1,p_2)$ nếu tồn tại $k=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2$ sao cho $a-b=k\times p$. Nói cách khác, $a\equiv b \mod p$ nếu và chỉ nếu

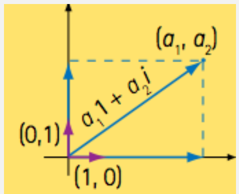
$$\begin{aligned}&(a_1,a_2)-(b_1,b_2)\\&=(k_1p_1-k_2p_2,k_1p_2+k_2p_1).\end{aligned}$$

Ta nói rằng $q=(q_1,q_2)$ là một *thặng dư bậc hai* modulo $p=(p_1,p_2)$ nếu tồn tại $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2$ sao cho $q\equiv x^2 \mod p$. Nói cách khác, ta cần tìm các số nguyên x_1 và x_2 sao cho

$$(q_1,q_2)\equiv(x_1^2-x_2^2,2x_1x_2) \mod p.$$

[5] *Công ty phá sản năm* 1993.

Mối liên hệ với số phức



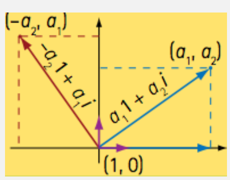
Các phép toán được Gauss định nghĩa trong $\mathbb{Z}^2$ có liên hệ mật thiết với khái niệm số phức. Một số phức là một số có dạng $a_1 + a_2 i$, ở đó $i = \sqrt{-1}$. Số phức có thể được biểu diễn trong mặt phẳng bằng cách đặt $1 = (1,0)$ và $i = (0,1)$, sao cho $(a_1, a_2) = a_1 1 + a_2 i$, mà ta có thể viết gọn là $a_1 + a_2 i$ mà không sợ nhầm lẫn. Thực hiện phép cộng và phép nhân thông thường với các biểu thức đại số $a_1 + a_2 i$ và $b_1 + b_2 i$, ta được:

$$\begin{aligned} &(a_1 + a_2 i) + (b_1 + b_2 i) \\ =&(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i, \\ &(a_1 + a_2 i) \times (b_1 + b_2 i) \\ =&a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i + a_2 b_2 i^2 \\ =&(a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i, \end{aligned}$$

ở đó ta đã thay $i^2 = -1$.

Để ý rằng phép nhân với i tương đương với phép quay một góc $\pi/2$ ngược chiều kim đồng hồ. Thật vậy:

$$(a_1 + a_2 i) \times i = a_1 i + a_2 i^2 = -a_2 + a_1 i.$$



Khi $a_2 = 0$, số là *số thực*, còn khi $a_1 = 0$, số là *số ảo*. Các phép toán được định nghĩa trong tập hợp các số phức chính là các phép toán trong tập hợp các số nguyên Gauss. Tập hợp $\mathbb{Z}^2$ cùng với hai phép toán này thường được ký hiệu là $\mathbb{Z}[i]$.

Hình khảm Thiele

Cũng như vỉa hè Thiele, một hình khảm Thiele modulo $p = (p_1, p_2)$ gồm nhiều mảnh hình vuông đơn vị phủ kín mặt phẳng. Màu của mảnh tại điểm $q = (q_1, q_2)$ được xác định như sau:

- đỏ nếu $q \equiv 0 \mod p$;
- xanh nếu q là thặng dư bậc hai phức modulo p (nhưng $q \not\equiv 0 \mod p$);
- trắng nếu q không phải thặng dư bậc hai phức modulo p.

Ví dụ, giả sử $p = (2,0)$. Ta có:

$$\begin{aligned} &(a_1, a_2) \equiv (b_1, b_2) \mod p \\ \iff &a_1 - b_1 = 2k_1 \text{ và } a_2 - b_2 = 2k_2, \end{aligned}$$

tức là $a_1 \equiv b_1 \mod 2$ và $a_2 \equiv b_2 \mod 2$. Suy ra với mọi $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$, $(a_1, a_2) \equiv (0,0), (0,1), (1,0)$ hoặc $(1,1) \mod p = (2,0)$.

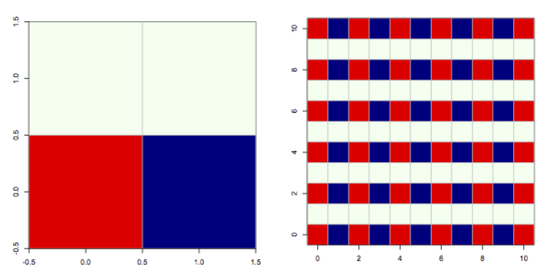
Từ nhận xét trên, để xây dựng hình khảm Thiele tương ứng, ta chỉ cần xét xem $(0,0), (0,1), (1,0)$ và $(1,1)$ có phải thặng dư bậc hai phức modulo $p = (2,0)$ hay không.

Như vậy, với $a_1, a_2 \in \{0,1\}$, ta cần kiểm tra xem có tồn tại hay không $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ sao cho

$$a_1 \equiv x_1^2 - x_2^2 \mod 2, a_2 \equiv 2x_1 x_2 \mod 2.$$

Nếu $a_2 = 0$, chỉ cần chọn $x_1 = a_1$ và $x_2 = 0$. Nhưng nếu $a_2 = 1$ thì không thể tìm được $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn vì $2x_1 x_2$ luôn chẵn.

Kết quả này được minh họa trong Hình 5. Các mảnh $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ và $(1,1)$ tạo thành họa tiết cơ bản (bên trái) mà chúng ta có thể lặp lại một số lần tùy ý (bên phải). Hiệu ứng ảo giác của hình vẽ được tạo bởi sự tuần hoàn kép (cả chiều ngang lẫn chiều dọc) của họa tiết cùng với các màu sắc tương phản mạnh.



Hình 5. Hình khảm Thiele modulo $p = (2,0)$.

Hai thí dụ khác, do chính Thiele đưa ra, được trình bày trong Hình 2 (hình này được vẽ bằng một phần mềm miễn phí, với hướng dẫn tải và sử dụng ở cuối bài). Hình khảm bên trái tương ứng với $p = (19,0)$; có thể dễ dàng nhận thấy nó tuần hoàn theo chiều dọc và chiều ngang. Hình khảm bên phải tương ứng với $p = (17,8)$; chúng ta cũng nhận có sự đều đặn, nhưng việc xác định chính xác nó thì không hiển nhiên như trường hợp trước.

Ý nghĩa hình học

Để hiểu rõ hơn quy luật của hình khảm Thiele, chúng ta hãy coi các phần tử của $\mathbb{Z}^2$ như các vector tọa độ nguyên. Để ý rằng theo định nghĩa, hai vector $a = (a_1,a_2)$ và $b = (b_1,b_2)$ đồng dư với nhau modulo $p = (p_1, p_2)$ nếu và chỉ nếu

$$\begin{aligned}&(a_1,a_2)-(b_1,b_2)\\ &=(k_1p_1-k_2p_2,k_1p_2+k_2p_1)\\ &=k_1(p_1,p_2)+k_2(-p_2,p_1),\end{aligned}$$

nghĩa là nếu hiệu của chúng có thể viết thành tổng của một bội của p và một bội của vector $p' = (-p_2, p_1)$ vuông góc với p.

Trong ngôn ngữ hình học, điều này có nghĩa là hai vector a và b đồng dư với nhau modulo p nếu có thể đi từ a tới b (hoặc ngược lại) bằng một số hữu hạn các tịnh tiến theo p, $-p$, p' và $-p'$. Đặc biệt, tất cả các vector [trong $\mathbb{Z}^2$] đều đồng dư với một vector nằm trong hình vuông có bốn đỉnh $(0,0)$, p, p' và $p+p'$. Tính chất này là tương đương trong $\mathbb{Z}^2$ của phép chia có dư trong $\mathbb{Z}$.

Quay trở lại với hình bên phải của Hình 2, chúng ta có thể kiểm tra rằng họa tiết cơ bản quả đúng là phần được giới hạn bởi bốn điểm đỏ $(9,25)$, $(17,8)$, $(26,33)$ và $(34,16)$.

Có bao nhiêu mảnh được tô màu?

Kinh nghiệm cho thấy những hình khảm Thiele đẹp nhất khi $p = (p_1, p_2)$ là một *số nguyên tố Gauss*, nghĩa là nếu với mọi $a,b \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned}&a\times b\equiv(0,0)\mod p\\ \Longrightarrow\ &a\equiv(0,0)\text{ hoặc }b\equiv(0,0)\mod p.\end{aligned}$$

Có thể chứng minh được rằng p là số nguyên tố Gauss nếu và chỉ nếu một trong ba điều kiện sau được thỏa mãn (chúng ta thừa nhận kết quả này):

- Nếu $p_1 \geq 1$ và $p_2 \geq 1$: $p_1^2 + p_2^2$ là số nguyên tố theo nghĩa thông thường;
- Nếu $p_1 = 0$ và $p_2 \geq 1$: $|p_2|$ nguyên tố và $|p_2| \equiv 3 \mod 4$;
- Nếu $p_1 \geq 1$ và $p_2 = 0$: $|p_1|$ nguyên tố và $|p_1| \equiv 3 \mod 4$.

Như vậy, $(19,0)$, $(71,0)$ và $(17,8)$ là các số nguyên tố Gauss, nhưng $(5,0)$ thì không phải, và ta có $(5,0) = (1,2) \times (1,-2)$.

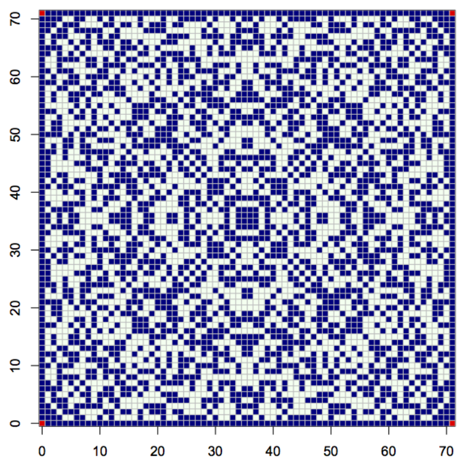
Ta biết rằng nếu p là một số nguyên tố, một nửa các số từ 1 đến $p-1$ là thặng dư bậc hai modulo p. Nói cách khác, có $(p-1)/2$ mảnh màu xanh trong họa tiết cơ bản của vỉa hè Thiele modulo p. Tương tự, bằng cách sử dụng các khái niệm trong lý thuyết trường, có thể chứng minh rằng nếu $p = (p_1, p_2)$ là số nguyên tố Gauss với $p_1 \geq 1$ và $p_2 \geq 1$, thì có $p_1^2 + p_2^2 - 1$ mảnh màu xanh trong họa tiết cơ bản của hình khảm Thiele modulo p.

Trở lại bức hình tiền sảnh

Sàn sảnh trong Hình 3 được lát theo hình khảm Thiele modulo $(71,0)$. Họa tiết cơ bản của nó được cho trong Hình 6. Ngày nay thuộc Bộ Quốc phòng Đan Mạch, tòa nhà có sàn lát này từng là trụ sở của công ty bảo hiểm Hafnia. Ở cương vị chủ tịch Hội đồng Quản trị của công ty, Thiele đã cho phép khởi công xây tòa nhà vào tháng 5 năm 1910, chỉ vài tháng trước khi ông qua đời ở tuổi 71. Người ta cho rằng họa tiết lát sảnh được chọn sau khi Thiele mất, để tưởng nhớ ông.

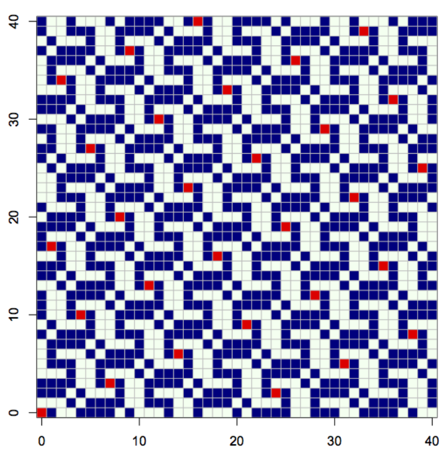
Chúng ta có thể rút ra ba quan sát về hình lát sàn này như sau:

- Có một số lỗi trong việc thể hiện họa tiết. Thực vậy, mặc dù $(27,35)$ là thặng dư bậc hai modulo $p = (71,0)$, viên gạch lát tương ứng lại có màu trắng. Đây có thể là một lỗi tính toán, vì nó xuất hiện đến bảy lần trên toàn bộ tác phẩm.



Hình 6. Hình khảm Thiele modulo $(71,0)$, được dùng làm mẫu lát sàn tiền sảnh Bộ Quốc phòng Đan Mạch.

• Khi so sánh Hình 3 và Hình 6, chúng ta thấy mảnh $(25,45)$ đúng ra phải màu trắng, nhưng trên sàn gạch thực tế lại màu đỏ. Lỗi này không lặp lại ở những chỗ khác. Không rõ đây là do sự lơ đãng của người thợ lát, hay do truyền thống nghề nghiệp không muốn sự hoàn hảo?



Hình 7. Thặng dư bậc hai modulo $(7,3)$. Hình khảm này được tạo với một số không nguyên tố: $(7,3)=(1,-1)\times(2,5)$.

• Vì sao một số viên gạch tương ứng với thặng dư bậc hai có màu đỏ, trong khi những viên khác lại xanh lá cây? Liệu có phải chỉ đơn giản vì lý do thẩm mỹ? Tính cân đối của họa tiết gợi ý rằng hai màu này thể hiện một tính chất khác của các thặng dư bậc hai. Nhưng đó là tính chất gì?

Có thể lục lại các tài liệu lưu trữ của công ty Hafnia để tìm câu trả lời cho hai câu hỏi đầu tiên. Câu hỏi thứ ba thì có bản chất thuần túy toán học và việc giải đáp nó có thể cần đến các tính chất của các số nguyên Gauss, của thặng dư bậc hai (hay bậc bốn?) phức và các chủ đề hấp dẫn khác của lý thuyết số. Câu trả lời vẫn là bí ẩn, và việc tìm ra nó được dành cho các bạn!

Vẽ tranh khảm Thiele bằng R

Chúng ta có thể dễ dàng tạo ra một hình khảm Thiele nhờ một chương trình được viết bởi Søren Buhl, giáo sư toán và thống kê, Đại học Aalborg (Đan Mạch). Chương trình của ông được viết bằng ngôn ngữ R, có thể được tải miễn phí cho Windows, MacOS hoặc Linux tại: http://www.r-project.org/

Chương trình vẽ có thể được tải ở đây: http://www.math.mcgill.ca/cgenest/Thiele.R

Sau khi sao chép đoạn mã của chương trình vào cửa sổ lệnh của R, ta có thể vẽ một hình khảm Thiele modulo p với kích thước $(n+1)\times(n+1)$ bằng lệnh $tuile(p,n)$. Thí dụ, Hình 2 là kết quả của các lệnh $tuile(19,40)$ và $tuile(17+8i,40)$. Hình 5 nhận được bằng cách nhập lệnh $tuile(71,71)$.

Tài liệu tham khảo

[1] Décaillot, A.–M. (2002). Géométrie des tissus, mosaïques, échiquiers: Mathématiques curieuses et utiles. *Revue d'histoire des mathématiques*, vol. 8, pp. 145 – 206.

[2] Lauritzen, S., *Thiele: Pioneer in Statistics*, Oxford University Press, 2002.

LÝ THUYẾT PHẠM TRÙ VÔ CỰC MANG LẠI TẦM NHÌN “TỪ TRÊN XUỐNG DƯỚI” CHO TOÁN HỌC[1]

EMILY RIEHL[2]

(Người dịch: Nguyễn Mạnh Linh[3])

Một ngày thu ở New England, khi còn là sinh viên năm ba, tôi đi ngang qua một ga tàu điện ngầm và một bài toán đã lọt vào mắt tôi. Một người đàn ông cùng những ý tưởng được vẽ nguệch ngoạc trên tường, một trong số đó là bài toán dựng một hình lập phương với thể tích gấp đôi một hình lập phương khác cho trước, bằng thước thẳng và compa.

Điều này làm tôi phải dừng lại. Tôi đã thấy bài toán này trước đây, đó là một câu đố từ hơn hai thiên thiên kỷ trước, mà theo Plutarch thì tác giả là Plato. Một thanh thước thẳng (lý tưởng) cho phép kéo dài một đoạn thẳng theo cả hai hướng, và một chiếc compa cho phép vẽ một đường tròn với bán kính tùy ý và tâm cho trước. Cái khó của câu đố này là các điểm và độ dài được dựng ra sau cùng hoặc phải có từ đầu, hoặc phải được dựng từ những thông tin trước đó.

Để gấp đôi thể tích của hình lập phương, ta bắt đầu với độ dài cạnh của nó. Ta hoàn toàn có thể xem độ dài này là 1 vì đó là độ dài duy nhất được cho trước. Để dựng hình lập phương lớn, ta cần tìm cách dựng cạnh của nó với độ dài yêu cầu, ở đây là $\sqrt[3]{2}$, mà chỉ dùng thước thẳng và compa.

Đây là một bài toán khó. Không ai giải được nó sau hơn 2000 năm. Cuối cùng thì, vào năm 1837, Pierre Laurent Wantzel đã giải thích tại sao chưa ai thành công, bằng cách chứng minh rằng bài toán không có lời giải. Chứng minh của ông sử dụng thứ toán học tối tân bấy giờ, được đặt nền móng bởi nhà toán học Pháp đương đại Évariste Galois, người đã chết ở tuổi 20 trong một cuộc đấu súng mà có lẽ là vì một drama ngoại tình. Cũng ở tuổi 20, bản thân tôi không đạt được những thành tựu toán học ấn tượng như vậy, nhưng ít nhất tôi cũng hiểu được chứng minh của Wantzel.

Ý tưởng như sau: Cho trước một điểm làm gốc và một đoạn với độ dài 1, ta dễ dàng dựng

---

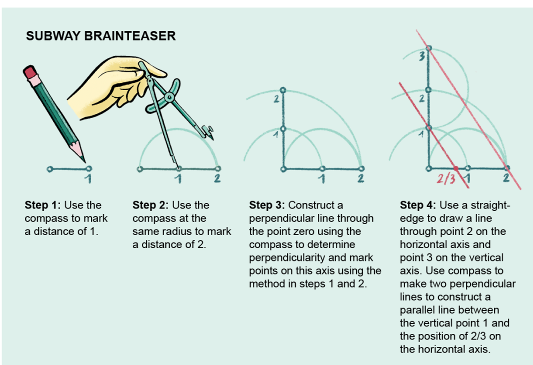
[1] *Bài viết gốc: Infinity Category Theory Offers a Bird’s–Eye View of Mathematics, đăng trên Scientific American, Volume 325, Issue 4, October 2021.*

[2] *Johns Hopkins University, chuyên gia về lý thuyết phạm trù bậc cao và lý thuyết đồng luân, các công trình của cô liên quan đến phạm trù mô hình và nền tảng của lý thuyết phạm trù vô cực*

[3] *Université Paris–Saclay.*

được tất cả các điểm trên trục số với tọa độ hữu tỷ (tất nhiên ta đã lờ đi, như các nhà toán học hay làm, sự thật rằng ta không thể vẽ vô hạn điểm trong thời gian hữu hạn).

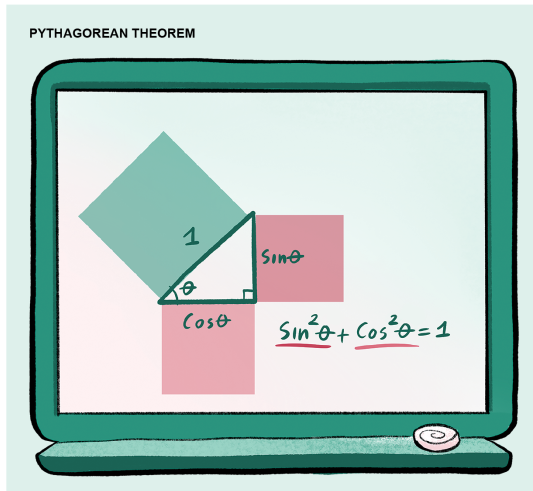
Wantzel đã chứng minh rằng, chỉ bằng những công cụ trên, mỗi điểm mới dựng phải là nghiệm của một phương trình đa thức bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với các hệ số a, b, c thu được từ các điểm đã dựng trước đó. Tuy nhiên, điểm $\sqrt[3]{2}$ lại là nghiệm của phương trình đa thức bậc ba $x^3 - 2 = 0$, và lý thuyết "mở rộng trường" của Galois đã chứng minh một cách thuyết phục rằng bạn không thể thu được nghiệm của một đa thức bất khả quy bậc ba chỉ bằng cách giải các phương trình bậc hai, về cơ bản là vì 3 không phải là lũy thừa của 2.



Thước thẳng và compa cho phép dựng mọi số hữu tỷ.

Với "vũ khí đầy mình", tôi không kìm được mà lại gần người đàn ông trên đường. Đúng như dự đoán, nỗ lực giải thích, rằng vì sao tôi biết bài toán này không có lời giải, đã không đi tới đâu cả. Ngược lại, người đàn ông tuyên bố rằng những gì được dạy đã khiến tôi trở nên bảo thủ và không thể "mở mang cái đầu ra". Sau cùng, bạn gái đã kéo được tôi khỏi cuộc tranh cãi và chúng tôi tiếp tục đi.

Nhưng vẫn còn đó một câu hỏi thú vị: Tại sao tôi, một đứa sinh viên năm ba vắt mũi chưa sạch, lại có thể học được cách dễ dàng thao túng các hệ thống số trừu tượng như các trường Galois chỉ trong vài tuần? Phần cuối của lớp học đó gồm nhóm đối xứng, vành đa thức và các cấu trúc liên quan, những thứ có lẽ sẽ làm đau đầu cả những người khổng lồ như Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Leonhard Euler hay Carl Friedrich Gauss. Tại sao các nhà toán học lại có thể dạy cho các thế hệ sinh viên sau những khám phá làm kinh động cả những chuyên gia ở thế hệ trước?



Đẳng thức $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ từ định lý Pythagore.

Một phần câu trả lời đến từ những tiến bộ gần đây của toán học, thứ mang lại một cái nhìn "từ trên xuống", thông qua các cấp độ trừu tượng ngày càng tăng. Lý thuyết phạm trù là một nhánh toán học giải thích khi nào những đối tượng toán học khác nhau được coi là "như nhau". Định lý cơ bản của nó nói rằng bất kỳ đối tượng nào, bất kể phức tạp ra sao, đều hoàn toàn xác định khi biết quan hệ của nó với các đối tượng tương tự. Nhờ lý thuyết phạm trù, chúng ta dạy các nhà toán học trẻ những ý tưởng mới nhất bằng những quy tắc tổng quát có thể áp dụng cho những phạm trù khác nhau của toán học, thay vì đào sâu vào những quy luật đặc trưng chỉ áp dụng được trong một lĩnh vực đơn lẻ.

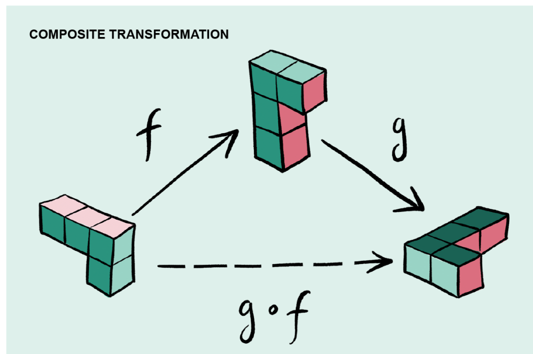
Khi toán học liên tục tiến hóa, cảm nhận của các nhà toán học về sự "như nhau" của hai vật cũng mở rộng theo. Trong vài thập kỷ vừa qua, tôi cùng nhiều nhà nghiên cứu đang phát triển lý thuyết phạm trù để hợp lý hóa khái niệm "duy nhất" mới này. Những phạm trù mới, gọi là phạm trù vô cực (∞–phạm trù), đã mở rộng lý thuyết phạm trù lên vô hạn chiều. Ngôn ngữ ∞–phạm trù mang lại cho các nhà toán học những công cụ mạnh mẽ để nghiên cứu những bài toán mà quan hệ giữa các vật quá rắc rối để có thể định nghĩa bằng phạm trù cổ điển. Góc nhìn "thu nhỏ đến vô hạn" này mang lại một cách nghĩ mới mẻ cho những khái niệm cũ cũng như một con đường để khám phá những khái niệm mới.

Phạm trù

Giống như nhiều đồng nghiệp của mình, tôi bị toán học lôi cuốn phần vì trí nhớ tệ của mình. Điều này có thể làm nhiều người bối rối khi họ nhớ rằng môn toán ở phổ thông là một mớ công thức phải thuộc – các đẳng thức lượng giác chẳng hạn. Nhưng tôi lại thấy chúng rất dễ chịu vì hầu hết những công thức thường dùy đều có thể rút ra từ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, đẳng thức mà tự thân nó có một kiến giải hình học tao nhã: đó chỉ là hệ quả trực tiếp của định lý Pythagore cho tam giác vuông với cạnh huyền bằng 1 và một góc nhọn bằng θ.

Viễn cảnh toán học lý tưởng này, nơi mà mọi thứ đều "hợp lý" và chẳng cần ghi nhớ gì hết, đã phần nào đó sụp đổ ở cấp đại học. Lúc này, sinh viên được biến đến một rổ đối tượng toán học được triệu hồi từ vài thế kỷ trước. "Nhóm", "vành" và "trường" thuộc về lĩnh vực toán học được gọi là Đại số, một từ có nguồn gốc từ cuốn sách viết ở thế kỷ IX bởi nhà toán học, thiên văn học Ba Tư Muhammad ibn Musa al–Khwarizmi, mà tựa sách dịch ra đại khái là "Khoa học của phục hồi và cân bằng". Suốt thiên niên kỷ sau đó, đại số đã tiến hóa từ việc nghiên cứu bản chất nghiệm của các hệ phương trình đa thức thành nghiên cứu các hệ thống số trừu tượng. Vì không có số thực x nào thỏa mãn phương trình $x^2 + 1 = 0$, các nhà toán học đã tạo ra một hệ thống số mới – mà ngày nay gọi là số phức – bằng cách thêm một số ảo i và quy định rằng $i^2 + 1 = 0$.

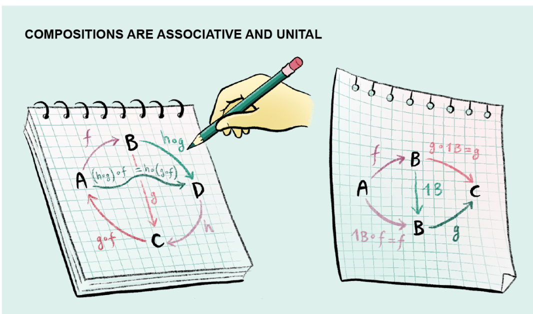
Đại số chỉ là một trong nhiều môn học ở chương trình toán đại học. Những môn cơ bản khác gồm Tôpô học – nghiên cứu trừu tượng về các không gian – và Giải tích, môn học bắt đầu với việc chặt chẽ hóa các tính toán trên hàm thực, trước khi rẽ sang những miền đất xa lạ hơn như không gian xác suất, biến ngẫu nhiên, đa tạp phức hay hàm chỉnh hình. Làm sao để sinh viên có thể thấy tất cả chúng đều hợp lý?



Hợp thành của hai phép biến đổi là một phép biến đổi mới.

Một ý tưởng toán học nghe có vẻ mâu thuẫn là đơn giản hóa bằng cách trừu tượng hóa. Như Eugenia Cheng đã viết trong "The Art of Logic in an Illogical World" (Nghệ thuật của logic trong một thế giới phi logic), "một trong những sức mạnh của trừu tượng hóa là nhiều bối cảnh khác nhau trở nên giống nhau khi bạn quên đi một số chi tiết." Đại số hiện đại được tạo ra đầu thế kỷ XX khi các nhà toán học quyết định thống nhất nghiên cứu của họ trên nhiều ví dụ khác nhau về các cấu trúc đại số xuất hiện khi xem xét nghiệm của các hệ phương trình đa thức hay các cấu hình trong mặt phẳng. Để liên kết việc tìm hiểu các cấu trúc này, họ xác định các "tiên đề" mô tả những tính chất chung của chúng. Nhóm, vành và trường đã được đưa vào thế giới toán học, cùng ý tưởng rằng một đối tượng toán học có thể được mô tả bằng những tính chất nó có và được khám phá một cách "trừu tượng", không phụ thuộc vào bối cảnh của những ví dụ hay xây dựng cụ thể.

John Horton Conway đã có một suy nghĩ nổi tiếng về bản thể luận kỳ lạ của các sự vật toán học: "Chúng chắc chắn có tồn tại, nhưng bạn không thể động chạm gì mà chỉ có thể nghĩ về chúng. Điều này thật đáng kinh ngạc, và tôi vẫn chưa hiểu, dù đã là nhà toán học suốt cuộc đời mình. Rằng làm thế nào một sự vật có thể ở đó mà lại không thực sự ở đó?"



Phép hợp thành có tính kết hợp và có đơn vị.

Nhưng thế giới của các đối tượng toán học tồn–tại–mà–không–thực–sự–ở–đó này có một vấn đề: Nó quá lớn cho bất kỳ ai để có thể hiểu được. Ngay trong đại số thôi đã có quá nhiều sự vật toán học để nghiên cứu, nhưng lại có quá ít thời gian để thể có thể thấy thấy cả đều hợp lý. Vào khoảng thế kỷ XX, các nhà toán học bắt đầu nghiên cứu đại số phổ dụng, gồm một "tập hợp", có thể là một họ những phép đối xứng, những con số trong một hệ thống hoặc thứ gì đó hoàn toàn khác, cùng một số phép toán – chẳng hạn như phép cộng và phép nhân – thỏa mãn một loạt các tiên đề liên quan như tính kết hợp, tính giao hoán hay tính phân phối. Với những điều chỉnh khác nhau như: "Phép toán được định nghĩa cục bộ hay toàn cục?", "Nó có khả nghịch không?", người ta thu được những cấu trúc đại số cơ bản: nhóm, vành và trường. Nhưng toán học thì không bị hạn chế bởi những điều chỉnh này, điều này cho thấy một phần rất nhỏ so với số lượng vô hạn các khả năng có thể xảy ra.

Sự sinh sôi của các đối tượng toán học trừu tượng mới mang lại sự phức tạp cho chính chúng. Một cách để đơn giản hóa là trừu tượng hóa hơn nữa, đến mức ta có thể chứng minh các định lý cho hàng loạt đối tượng cùng lúc mà không cần biết rằng cụ thể chúng ta nói về loại đối tượng nào.

Lý thuyết phạm trù, ra đời vào những năm 40 bởi Samuel Eilenberg và Saunders Mac Lane, đã làm chính việc này. Dù ban đầu nó được đưa ra để định nghĩa chặt chẽ thuật ngữ lỏng lẻo hay dùng là "tương đương tự nhiên", nó còn mang lại một cách nghĩ phổ quát về đại số phổ dụng cũng như các ngành toán học khác. Với ngôn ngữ cua Eilenberg và Mac Lane, ngày nay ta hiểu rằng mỗi loại đối tượng toán học đều thuộc về một phạm trù riêng, được định nghĩa là một họ các "vật" cùng các phép biến đổi được vẽ dưới dạng "mũi tên" giữa các vật. Chẳng hạn, trong đại số tuyến tính, người ta nghiên cứu các không gian véc tơ trừu tượng như không gian Euclid 3–chiều. Các phép biến đổi tương ứng được gọi là các biến đổi tuyến tính, và mỗi phép biến đổi phải có một không gian nguồn và một không gian đích (đầu vào và đầu ra của phép biến đổi). Cũng như các hàm số, các phép biến đổi trong một phạm trù có thể "hợp thành" với nhau, nghĩa là ta áp dụng một phép biến đổi lên kết quả một phép biến đổi khác. Cho một cặp phép biến đổi $f : A \to B$ (đọc là "f là một phép biến đổi từ A vào B") và $g : B \to C$, quy tắc của phạm trù trả về một phép biến đổi hợp thành duy nhất, ký hiệu bởi $g \circ f : A \to C$ (đọc là "g hợp f là một phép biến đổi từ A vào C"). Cuối cùng, quy tắc hợp thành này có tính kết hợp, nghĩa là $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Nó cũng có đơn vị: mỗi vật B đều có một "biến đổi đồng nhất", thường ký hiệu bởi $\mathbf{1}_B$, thỏa mãn tính chất $g \circ \mathbf{1}_B = g$ và $\mathbf{1}_B \circ f = f$ với mọi phép biến đổi g và f lần lượt có nguồn và đích là B.

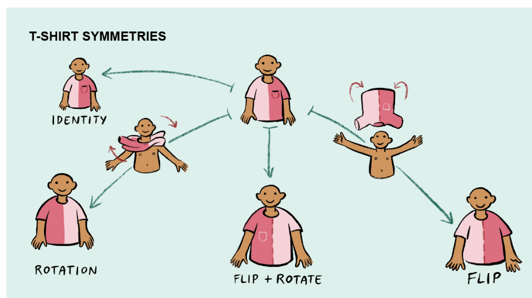
Làm thế nào mà các phạm trù có thể giúp cô hay cậu sinh viên bất hạnh, người đã phải gặp quá nhiều đối tượng toán học và chẳng có đủ thời gian học hết? Bất kỳ lớp cấu trúc nào trong đại số phổ dụng có thể khác các lớp khác, nhưng các phạm trù chứa chúng thì rất giống nhau, theo một cách có thể diễn tả chính xác bằng ngôn ngữ phạm trù.

Với đủ kinh nghiệm, một nhà toán học sẽ biết rằng họ sẽ thấy gì khi gặp một kiểu đối tượng đại số mới. Ý tưởng này được thể hiện trong các sách toán hiện đại mà lý thuyết nhóm, vành và không gian véctơ được trình bày theo một chuỗi, về cơ bản là các lý thuyết đó song song với nhau. Có những sự tương tự khác, lỏng lẻo hơn, giữa những những phạm trù này và một số phạm trù mà sinh viên gặp trong các môn tôpô hay giải tích, và những sự tương đồng đó đó giúp họ tiếp thu tài liệu mới nhanh hơn. Những khuôn mẫu như vậy cho phép sinh viên có thêm thời gian khám phá các chủ đề cụ thể có vai trò phân biệt các lĩnh vực của toán học – mặc dù những tiến bộ trong nghiên cứu toán học thường đến từ những sự tương tự mới và đáng ngạc nhiên giữa hai lĩnh vực không liên quan trước đó.

Đối xứng

Các tầng trừu tượng, từ những cấu trúc toán học cụ thể đến những hệ tiên đề và sau đó là các vật trong phạm trù, mở ra một thách thức mới: sự "như nhau" giữa một vật và một vật khác không còn rõ ràng nữa. Chẳng hạn, một nhóm, đối tượng toán học được cho bởi một họ trừu tượng các phép đối xứng mà các phần tử của nó được Amie Wilkinson (Đại học Chicago) mô tả như những "chuyển động" lật hoặc xoay một đối tượng để đưa nó về trạng thái gần giống như ban đầu.

Chẳng hạn, ta có thể khám phá các phép đối xứng của một chiếc áo thun. Có một phép đối xứng được coi là "chuyển động đồng nhất", khi mà người mặc chỉ đơn thuần là giữ chiếc áo thun như bình thường. Một phép đối xứng khác ứng với chuyển động mà người mặc bỏ tay ra khỏi tay áo, giữ áo ở cổ, xoay áo 180 độ và cho tay vào tay áo đối diện: mặt phải của áo vẫn ở ngoài nhưng áo được mặc ngược ra sau. Một phép đối xứng khác nữa ứng với chuyển động mà người mặc cởi áo ra, lộn mặt trong ra ngoài và mặc lại sao cho mỗi tay ở đúng tay áo ban đầu. Lúc này chiếc áo thun bị lộn ngược trong ra ngoài và sau ra trước. Một phép đối xứng cuối cùng là kết hợp hai chuyển động trên: không giống như với phần lớn các nhóm, hai chuyển động này có thể thực hiện theo thứ tự tùy ý mà không làm thay đổi kết quả. Mỗi một trong bốn chuyển động trên được coi là một phép đối xứng vì sau cùng chiếc áo thun được mặc nói chung là giống như lúc đầu.

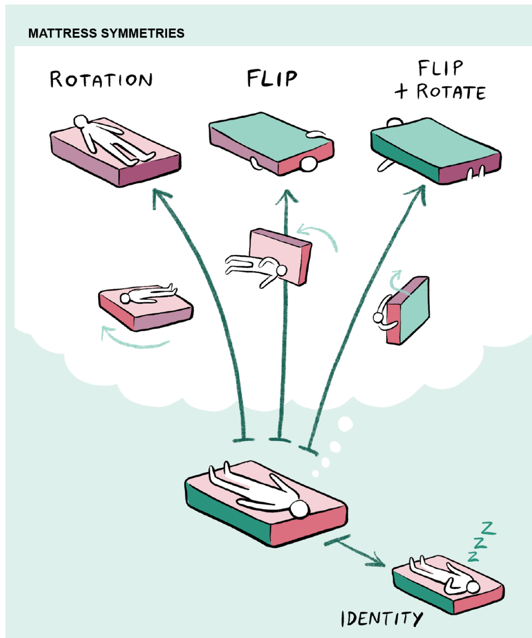


Các phép đối xứng trên áo thun.

Một nhóm khác là "nhóm lật thảm", nó mô tả các đối xứng của một tấm thảm. Bên cạnh chuyển động đồng nhất (tức là giữ nguyên tấm thảm), ta có thể xoay nó 180 độ, hoặc lật mặt dưới lên trên, hoặc kết hợp cả hai (tấm thảm nói chung không phải là hình vuông, nhưng nếu nó là hình vuông thì ta sẽ có nhiều phép đối xứng hơn nữa). Dù chiếc áo thun chẳng liên quan gì đến tấm thảm, có một trực giác rằng hai nhóm đối xứng trên có cùng "dạng" với nhau. Thứ nhất, cả hai nhóm đều có cùng số chuyển động (ở đây là bốn) và quan trọng hơn là ta có thể ghép mỗi chuyển động ở nhóm áo thun với nhóm lật thảm sao cho phép hợp thành chuyển động ở hai nhóm tương thích với nhau. Nói cách khác, ta có thể ghép cặp các chuyển động ở hai nhóm (phép đồng nhất ghép với phép đồng nhất, phép lật ghép với phép lật, phép xoay ghép với phép xoay, và cứ như vậy). Thứ hai, nếu ta lấy hai chuyển động từ một nhóm và thực hiện chúng theo trình tự, kết quả thu được sẽ giống với kết quả khi ta thực hiện hai chuyển động tương ứng từ nhóm còn lại theo trình tự. Về mặt kỹ thuật, các nhóm này được liên kết với nhau bởi một "đẳng cấu" (isomorphism), thuật ngữ được tạo ra bằng cách ghép từ gốc Hy Lạp *isos*, nghĩa là "bằng", với *morphe*, nghĩa là "dạng".

Ta có thể định nghĩa đẳng cấu trong bất kỳ phạm trù nào, cho phép ta chuyển khái niệm này giữa các ngữ cảnh toán học khác nhau. Một đẳng cấu giữa hai vật A và B trong một phạm trù được cho bởi một cặp biến đổi $f : A \to B$ và $g : B \to A$ với sao cho các phép biến đổi hợp thành $g \circ f$ và $f \circ g$ lần lượt là các biến đổi đồng nhất $\mathbf{1}_A$ và $\mathbf{1}_B$. Trong phạm trù các không gian tôpô, khái niệm đẳng cấu được mô tả bởi một cặp hàm liên tục nghịch đảo lẫn nhau. Chẳng hạn, có một phép biến dạng liên tục cho phép bạn biến đổi một chiếc bánh vòng (chưa nướng) thành hình dạng như tách cà phê: lỗ ở giữa chiếc bánh vòng trở thành quai cầm, và phần cốc được tạo thành bằng cách dùng ngón tay ép. (Để phép biến dạng là liên tục, bạn không được xé rách chiếc bánh, đó là lý do vì sao không nên nướng bánh trước khi làm trò này.)

Ví dụ này dẫn đến câu đùa rằng nhà tôpô học không thể phân biệt giữa tách cà phê và chiếc bánh vòng: với tư cách là các không gian trừu tượng, hai đối tượng này giống nhau. Trên thực tế, nhiều nhà tôpô học có khả năng phân biệt còn tệ hơn thế nữa kia; đó là vì họ đã sử dụng một quy ước linh hoạt hơn nhiều để mô tả tình huống khi hai không gian là "như nhau", họ đồng nhất hai không gian bất kỳ mà chỉ "tương đương đồng luân" với nhau thôi. Thuật ngữ trên là khái niệm đẳng cấu trong một phạm trù kỳ lạ hơn, phạm trù đồng luân của các không gian. Một tương đương đồng luân là một kiểu biến dạng liên tục khác, nhưng lúc này bạn được phép dính hai điểm phân biệt với nhau. Chẳng hạn, tưởng tượng rằng bạn bắt đầu với chiếc quần jean và thu gọn chiều dài của hai ống quần đến khi bạn thu được chiếc quần lọt khe, một "không gian" khác mà cấu trúc tôpô về cơ bản là không đổi – nó vẫn có hai lỗ để cho chân vào, dù hai ống quần (2–chiều) ban đầu đã bị rút thành hai vòng dây (1–chiều).



Các phép đối xứng trên tấm thảm.

Một phép tương đương đồng luân khác thu hết toàn bộ không gian Euclid vô hạn 3–chiều về một điểm bằng một vụ nổ "Big Bang ngược", khi mọi điểm đều thu về gốc, với tốc độ tăng dần theo khoảng cách giữa điểm đó với vị trí ban đầu của vụ nổ.

Trực giác rằng ta có thể dùng các vật đẳng cấu để thay thế nhau mà về cơ bản không làm thay đổi bản chất của phép xây dựng hay suy luận, là một trực giác rất mạnh mà các nhà lý thuyết phạm trù đã phải định nghĩa lại từ "the" trong tiếng Anh bởi thứ mà gần giống như từ "*a*". Chẳng hạn, có một khái niệm gọi là hợp rời của hai tập hợp A và B. Giống như hợp thông thường, hợp rời $A \sqcup B$ chứa một bản sao của mỗi phần tử của A cũng như của

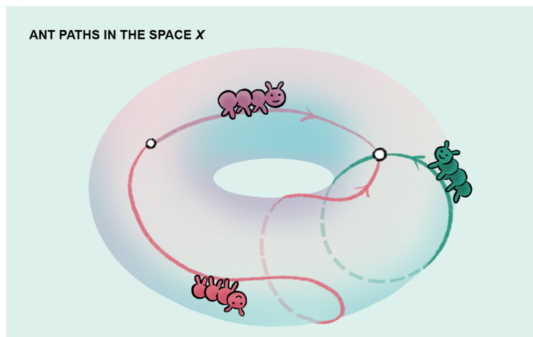
B. Nó khác hợp thông thường ở chỗ, nếu A và B có phần tử chung thì hợp rời $A \sqcup B$ chứa tới hai bản sao của phần tử đó, một bản sao "nhớ" rằng nó đến từ A và bản sao còn lại nhớ rằng nó đến từ B.

Có nhiều cách khác nhau để xây dựng hợp rời từ các tiên đề của lý thuyết tập hợp, chúng không cho chính xác cùng một tập hợp, nhưng sẽ cho các tập hợp đẳng cấu với nhau. Thay vì tốn thời gian tranh luận rằng cách xây dựng nào là chính tắc nhất, sẽ tiện hơn khi cứ giấu nhẹm sự mơ hồ này và dùng từ (the) hợp rời để chỉ bất kỳ tập hợp nào thỏa mãn bài toán phổ dụng tương ứng. Một ví dụ khác, các nhóm đối xứng áo thun và nhóm lật thảm ở trên đều được gọi là (the) nhóm bốn Klein.

Phạm trù vô cực

Có câu chuyện truyền miệng sau về nguồn gốc của định lý cơ bản của lý thuyết phạm trù: một nhà toán học trẻ tên Nobuo Yoneda đã mô tả một "bổ đề", tức là một định lý bổ trợ, cho Mac Lane ở điểm tàu Gare du Nord ở Paris năm 1954. Yoneda bắt đầu giải thích bổ đề trên sân ga và tiếp tục ở trên tàu trước khi nó rời ga. Hệ quả của bổ đề này là mọi vật trong bất kỳ phạm trù nào đều hoàn toàn xác khi biết quan hệ của nó với các vật khác trong phạm trù đó, tức là các phép biến đổi từ vật đó vào vật khác hoặc ngược lại. Như vậy ta có thể đặc trưng một không gian tôpô X bằng các nghiên cứu các hàm liên tục $f : T \to X$ đến từ các không gian T khác. Chẳng hạn, một điểm trong X ứng với một hàm liên tục $x : * \to X$ mà không gian nguồn $*$ là không gian với duy nhất một điểm. Ta có thể biết X liên thông hay không bằng cách xét các ánh xạ $p : I \to X$ với nguồn là đoạn $I = [0, 1]$. Một ánh xạ như thế là một "đường" có tham số trong không gian X từ điểm $p(0)$ đến điểm $p(1)$, có thể xem như một quỹ đạo khả dĩ mà một con kiến có thể di chuyển trong X.

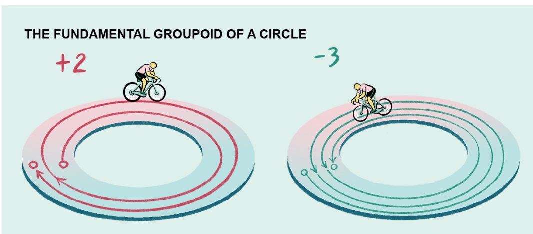
Ta có thể dùng các điểm và đường trong một không gian để dịch các bài toán tôpô sang đại số: Mỗi không gian tôpô X có một phạm trù tương ứng $\pi_1 X$, gọi là "phỏng nhóm cơ bản" của X. Vật trong phạm trù này là các điểm của không gian, và các phép biến đổi là các đường. Nếu một đường có thể biến dạng thành một đường khác mà vẫn cố định hai đầu mút, ta quy ước rằng hai đường này định nghĩa cùng một phép biến đổi. Các biến dạng này được gọi là các phép đồng luân, ta cần chúng để mô tả phép hợp thành của đường sao cho tính kết hợp được thỏa mãn, điều kiện cần của mọi phạm trù.



Các phép đối xứng trên tấm thảm.

Ưu thế then chốt của phỏng nhóm cơ bản là tính "hàm tử", nghĩa là mọi hàm liên tục $f : X \to Y$ giữa hai không gian tôpô cho ta một phép biến đổi $\pi_1 f : \pi_1 X \to \pi_1 Y$ giữa hai phỏng nhóm cơ bản. Phép biến đổi này tôn trọng phép hợp thành và đồng nhất của đường, nghĩa là $\pi_1(g \circ f) = \pi_1 g \circ \pi_1 f$ và $\pi_1(\mathbf{1}_x) = \mathbf{1}_{\pi_1 x}$. Hai tính chất này, gọi chung là "tính hàm tử", gợi ý rằng phỏng nhóm cơ bản giữ được những tính chất cốt lõi của không gian tôpô. Nói riêng, nếu hai không gian không tương đương đồng luân thì phỏng nhóm cơ bản của chúng cũng không tương đương.

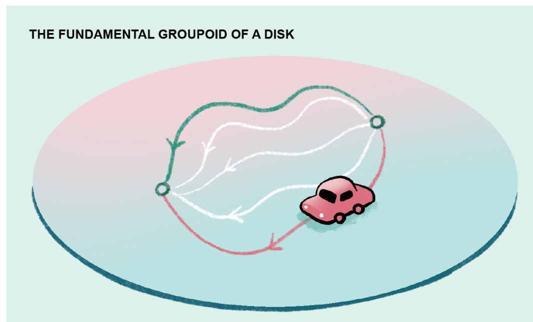
Dù vậy, phỏng nhóm cơ bản chưa phải là một bất biến hoàn chỉnh. Có thể dễ dàng phân biệt một đường tròn với hình tròn đặc mà đường tròn ấy bao quanh. Trong phỏng nhóm cơ bản của đường tròn, các đường giữa hai điểm cho trước, sai khác biến dạng liên tục (đồng luân), được gán với các số nguyên, chỉ số vòng mà đường này quay quanh đường tròn, với dấu $+$ hoặc $-$ chỉ chiều thuận hoặc ngược kim đồng hồ. Ngược lại, trong phỏng nhóm cơ bản của hình tròn, chỉ có duy nhất (sai khác đồng luân) một đường giữa bất kỳ cặp điểm nào. Phỏng nhóm cơ bản của phần bề mặt của quả bóng, hay một mặt cầu theo ngôn ngữ tôpô, cũng thỏa mãn chính chất này: tồn tại duy nhất, sai khác đồng luân, một đường giữa hai điểm bất kỳ.



Phỏng nhóm cơ bản của đường tròn.

Vấn đề lớn với phỏng nhóm cơ bản là điểm và đường không phát hiện được cấu trúc ở chiều cao hơn của không gian, vì bản thân điểm và đoạn lần lượt là 0–chiều và 1–chiều. Một giải pháp là xét thêm cả các hàm liên tục từ hình tròn 2–chiều, được gọi là các phép đồng luân, cùng với các "đồng luân bậc cao", được định nghĩa là các hàm liên tục hình hình cầu đặc 3–chiều và tương tự với các hình siêu cầu 4–, 5–, 6–chiều hoặc hơn.

Một câu hỏi tự nhiên là các điểm, đường, đồng luân và đồng luân bậc cao của một không gian X thì tạo ra cấu trúc gì: cấu trúc π_∞ này, gọi là ∞–phỏng nhóm cơ bản của X, định nghĩa một ∞–phạm trù, phiên bản vô hạn chiều của phạm trù đưa ra bởi Eilenberg và Mac Lane. Giống như phạm trù thông thường, một ∞–phạm trù gồm các vật và các phép biến đổi được vẽ như những mũi tên 1–chiều, nhưng nó còn có thêm các phép "biến đổi bậc cao", được vẽ như các mũi tên 2–chiều, mũi tên 3–chiều, và cứ như vậy. Ví dụ, trong $\pi_\infty X$, các vật và các mũi tên lần lượt là các điểm và các đường – lúc này ta không xét sai khác đồng luân nữa – trong khi các biến đổi bậc cao lưu giữ thông tin đồng luân bậc cao. Cũng như trong phạm trù thông thường, các mũi tên (với số chiều cố định) có thể hợp thành: nếu ta có hai mũi tên $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$, ta phải có mũi tên thứ ba $g \circ f : X \to Z$. Nhưng cái khó ở đây là: để mô tả được những ví dụ rất tự nhiên như ∞–phỏng nhóm cơ bản của một không gian, luật hợp thành phải bị làm yếu đi. Với mỗi cặp mũi tên khả hợp thành, một mũi tên hợp thành tồn tại, nhưng nó không còn là duy nhất nữa.



Phỏng nhóm cơ bản của hình tròn.

Sự thiếu sót của tính duy nhất này thách thức việc định nghĩa ∞–phạm trù bằng cơ sở toán học bởi lý thuyết tập hợp cổ điển, vì ta không thể xem phép hợp thành như một phép toán như trong đại số phổ dụng nữa. Dù ∞–phạm trù đang dần trở thành đối tượng trung tâm của nghiên cứu hiện đại trong nhiều lĩnh tực toán học từ lý thuyết trường lượng tử tôpô đến hình học đại số hay tôpô đại số, chúng thường được xem là "quá khó" cho mọi người ngoài các chuyên gia, và nó không xuất hiện thường xuyên trong chương trình học, ngay cả sau đại học. Dù vậy, tôi và nhiều người khác xem ∞–phạm trù như một hướng đi mới và cách mạng, cho phép các nhà toán học mơ đến những liên kết mới mà không thể phát biểu và chứng minh một cách chặt chẽ bằng cách khác.

Một số thuật ngữ Toán học hiện đại

- Hợp thành: chỉ việc áp dụng một phép biến đổi lên kết quả của một phép biến đổi khác.

• Phạm trù: một họ cụ thể gồm các vật và phép biến đổi giữa chúng, cùng một luật hợp thành.

• Đồng nhất: phép biến đổi từ một vật vào chính nó mà hoàn toàn không thay đổi vật đó.

• Đối xứng: một phép biến đổi khả nghịch từ một vật vào chính nó.

• Đẳng cấu: khái niệm "như nhau" về mặt cấu trúc, tồn tại giữa các cặp vật trong một phạm trù.

• Phỏng nhóm cơ bản: phạm trù mà vật là điểm trong một không gian và các phép biến đổi là các đường sai khác đồng luân giữa chúng.

• Đồng luân: "đường giữa hai đường", được định nghĩa là một biến dạng liên tục từ đường này thành đường kia.

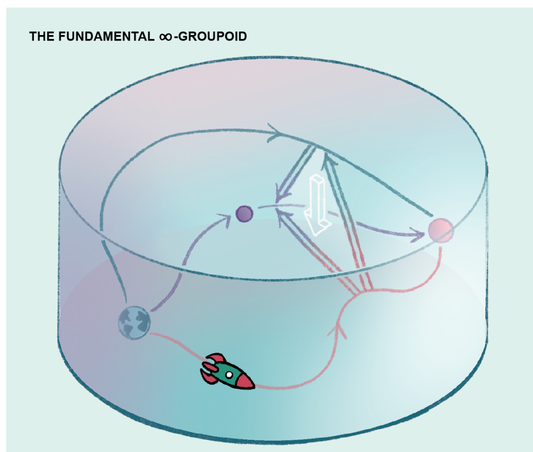
• Phạm trù vô cực: phiên bản vô hạn chiều của phạm trù, nơi có thêm các biến đổi bậc cao và luật hợp thành bị làm yếu đi.

• Phỏng nhóm vô cực cơ bản: phạm trù vô cực gồm các điểm, đường, đồng luân và đồng luân bậc cao của một không gian.

Chân trời tương lai

Dẫu vậy, kinh nghiệm lịch sử cho thấy rằng phần lớn những kiến thức toán học mới lạ nhất hôm nay sẽ dần trở nên đủ dễ để dạy cho sinh viên toán ngài mai. Sẽ rất vui khi được quan sát, với tư cách là một người nghiên cứu ∞–phạm trù, cách mà nó có thể được đơn giản hóa đi. Chẳng hạn như một mẹo nhỏ về ngôn ngữ – một phiên bản siêu cấp của từ "the" trong phạm trù – có thể khiến cho sinh viên ở cuối thế kỷ XXI hiểu ∞–phạm trù một cách dễ dàng như phạm trù thông thường ngày nay. Tiên đề then chốt của lý thuyết phạm trù thông thường là sự tồn tại duy nhất của một phép biến đổi hợp thành $g \circ f : X \to Z$ với mỗi cặp biến đổi $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$, được chọn ra từ tập các phép biến đổi từ X vào Z. Trái lại, trong một ∞–phạm trù, có một không gian các mũi tên từ X vào Z, thứ mà trong ∞–phỏng nhóm cơ bản có thể hiểu là "không gian đường". Phiên bản đúng của tính hợp thành duy nhất trong phạm trù thông thường là mệnh đề: trong một ∞–phạm trù, không gian các hợp thành là "co rút được", nghĩa là mỗi điểm của nó đều có thể suy sụp một cách liên tục qua một vụ nổ "Big Bang ngược" về một điểm gốc duy nhất.

Chú ý rằng tính co rút được không suy ra rằng có duy nhất một hợp thành: thật vậy, ta đã thấy rằng trong ∞–phỏng nhóm cơ bản, có thể có rất nhiều đường hợp thành. Nhưng tính co rút được đảm bảo rằng hai đường hợp thành luôn đồng luân, và hai phép đồng luân bất kỳ giữa hai đường hợp thành luôn liên kết với nhau bởi một đồng luân bậc cao, và cứ như vậy.



Phỏng nhóm vô cực cơ bản.

Ý tưởng về sự duy nhất như điều kiện co rút được này là một ý tưởng trung tâm trong hệ cơ sở toán học mới được đề xuất bởi Vladimir Voedvodsky và nhiều người khác. Các nhà toán học khắp nơi đang hợp sức phát triển những "phụ tá chứng minh" bằng máy tính có khả năng kiểm tra từng dòng một trong chứng minh hình thức của một kết quả toán học. Những phụ tá này có một cơ chế bắt chước theo một kỹ thuật chung trong toán học là chuyển thông tin từ một vật sang một vật khác được coi là giống vật ban đầu qua một đẳng cấu tường minh hoặc một tương đương đồng luân. Cơ chế này cho phép người dùng chuyển một chứng minh liên quan đến một điểm trong không gian qua một đường nối nó đến một điểm khác, đưa ra một định nghĩa chặt chẽ về khái niệm "như nhau" của tôpô.

Trong một tham luận năm 1974, nhà toán học Micheal Atiyah đã viết "Mục tiêu thực sự của lý thuyết là tổ chức lại một cách có hệ thống kinh nghiệm quá khứ sao cho thế hệ sau, học sinh của chúng ta, rồi học sinh của họ, rồi sau đó nữa, có thể tiếp thu những khía cạnh cốt lõi mà ít tốn sức nhất, và đó là cách duy nhất mà bạn có thể liên tục tích lũy và xây dựng bất kỳ hoạt động khoa học nào mà không đi đến ngõ cụt." Lý thuyết phạm trù đóng vai trò này trong toán học hiện đại: nếu toán học là khoa học của sự tương tự, các khuôn mẫu, thì lý thuyết phạm trù là khoa học của các khuôn mẫu tư duy toán học – "toán học của toán học", như Eugenia Cheng (Viện Nghệ thuật Chicago), đã gọi.

Lý do ta dạy được rất nhiều trong một môn toán ở đại học ngày nay là vì hiểu biết của chúng ta về rất nhiều khái niệm toán học khác nhau đã được đơn giản hóa nhờ sự trừu tượng, có thể xem như lùi khỏi bài toán cụ thể để quan sát tổng quan toán học. Rất nhiều chi tiết sẽ ẩn đi ở tầm này – xấp xỉ số chẳng hạn, hoặc bất kỳ thứ gì liên quan đến số – nhưng một sự thật đáng chú ý là nhiều định lý trong đại số, lý thuyết tập hợp, tôpô và hình học đại số thường đúng vì cùng một lý do đằng sau, và khi đó, các chứng minh được diễn tả bằng ngôn ngữ phạm trù.

Có gì ở chân trời tương lai? Đang hình thành một sự đồng thuận trong nhiều lĩnh vực toán học rằng các đối tượng cơ bản của toán học thế kỷ XXI là các ∞–phạm trù, giống như ở thế kỷ XX là các phạm trù thông thường. Ta hi vọng rằng chiếc tháp vô hạn của các mũi tên ở mọi chiều này, thứ cần nghiên cứu tỷ mỉ trong ∞–phạm trù, đến lúc nào đó sẽ thu gọn về về tiềm thức chung của toán học, với các không gian co rút được suy sụp về một điểm duy nhất. Và ta có thể tự hỏi: Nếu những tiến bộ này xuất hiện ở thế kỷ XX, toán ở học ở cuối thế kỷ XXI sẽ đi về đâu?

DANH NGÔN TOÁN HỌC

"Không có con đường hoàng gia dẫn tới hình học" (Euclid)

PHẠM TRIỀU DƯƠNG

LTS. *Chuyên mục Danh ngôn Toán học giới thiệu với bạn đọc về lịch sử, ý nghĩa của những phát ngôn bởi các nhà toán học nổi tiếng. Ban biên tập Pi trân trọng mời bạn đọc đóng góp cho chuyên mục này.*

Vào khoảng ba thế kỷ trước Công nguyên có một người Hy Lạp tên là Euclid từ xứ Alexandria. Họ gọi ông là như vậy, vì không ai biết họ của ông là gì. Ông lang thang ở thành Alexandria và trong thời gian rỗi, ông đã viết ra một bộ sách giáo khoa về hình học mà ông đặt tên là Cơ sở. Có lẽ ông đã được đào tạo sớm từ các học trò của Plato ở Athens, sau đó tiếp tục thành lập một trường học ở Alexandria vào năm 306 trước Công nguyên.

Vào thời đó, có một nhà cai trị và tướng quân người Macedonia thuộc Hy lạp là Ptolemy I Soter . Ông từng là vệ sỹ riêng của Alexander Đại đế, cũng đồng thời là một pharaoh của Ai Cập. Ptolemy I, giống như Alexander, rất quan tâm đến việc thúc đẩy nghiên cứu học thuật, và ông là người bảo trợ cho việc khai phá tri thức, sáng lập ra Đại Thư viện Alexandria. Ông ta tập hợp những "người có học" xung quanh cung đình của mình. Những người được biết đến là "các bạn bè" này, bất kể là người đó là quý tộc hay thường dân, phục vụ Ptolemy với vai trò là các cố vấn chính của ông. Danh tiếng về bản tính nhân từ và phóng khoáng của tướng quân Ptolemy I đã gắn kết tầng lớp lính tráng trôi nổi nay đây mai đó, gồm cả những người Macedonia và những người Hy Lạp khác tới phục vụ quanh ông. Chính Ptolemy đã viết cuốn Sử lược về các chiến dịch của Alexander, đã thất truyền. Đây từng được coi là một tác phẩm khách quan, nổi bật bởi tính trung thực và sự tỉnh táo trong nhận định.

Hình 1. Ptolemy I Soter (366 – 282 TCN), vị pharaoh Ai cập đồng thời là tướng quân người Macedonia thuộc Hy lạp.

Ptolemy I cũng từng mời Triết gia nổi tiếng Strabo đến Alexandria làm gia sư cho con trai mình. Và khá đặc biệt, nhà toán học Euclid cũng là một trong những học giả được

Prolemy bảo trợ. Tướng quân Ptolemy thấy tác phẩm tiêu biểu của Euclid, cuốn Cơ sở, quá khó để lĩnh hội, vì vậy ông ta đã hỏi liệu có cách nào dễ dàng hơn để nắm vững được nó không. Và Euclide, theo ghi chép lại của Triết gia Proclus, đã có câu nói châm biếm nổi tiếng sau để trả lời Ptolemy "Thưa Đức Ngài, không có con đường hoàng gia nào dẫn tới hình học".

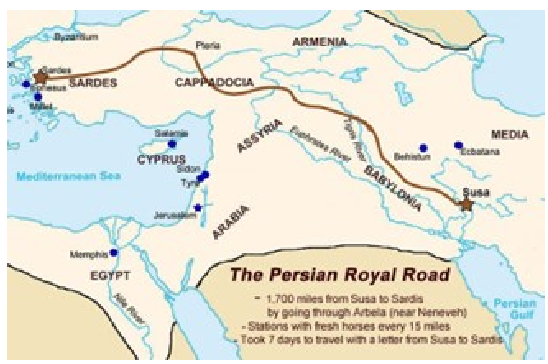
Hình 3. Euclid, hay Kiến trúc. Tranh đá cẩm thạch, tầng hầm tháp chuông Florence, Ý.

Cụm từ "con đường hoàng gia" thời đó chỉ con đường đặc biệt được xây dựng xuyên qua Anatolia và Ba Tư bởi Darius Đại đế của Ba Tư (Darius I), cho phép liên lạc và chuyển quân nhanh chóng, nhưng Euclide đã sử dụng từ Hy lạp ἀτραπός nghĩa là "lối đi" (chứ không phải từ ὁδός "con đường") để truyền đạt ý nghĩa của "đường tắt".

Hình 3. Darius Đại đế của Ba Tư (550 – 486 TCN).

Tất nhiên, Eclide đã nói bằng tiếng Hy Lạp với hy vọng Ptolemy sẽ hiểu ra rằng không có một điểm thưởng nào cho những ai chỉ đơn giản có mặt để điểm danh qua loa, khi muốn học môn hình học cho đến nơi đến chốn.

Rất thú vị, ngày nay cụm từ "con đường hoàng gia" đã vượt qua khuôn khổ của hình học và toán học, với ý nghĩa mới là "con đường dẫn tới đích dễ dàng và nhanh nhất, không tốn công sức". Người ta có thể nói, "đội bóng, sau khi đã loại tất cả các đối phương trong cùng nhóm, hiện đang trên con đường hoàng gia dẫn tới chức vô địch lần đầu tiên trong lịch sử thông qua đá loại trực tiếp", "hãng phim nọ đang trên con đường hoàng gia đơn độc thống trị cả nền sản xuất điện ảnh và tạo ra một thế độc quyền trong nền công nghiệp mà họ đang tích cực khai thác". Và tất nhiên, khi học tiếng Anh, các bạn cũng đều biết tới câu nói "there is no royal road to learning". Học tiếng Anh, cũng như học hình học, đòi hỏi phải luyện tập kiên trì để đạt tới thành công trong việc diễn tả lưu loát những ý nghĩ riêng của bản thân mà không phải học thuộc lòng những cách nói mẫu, tuy đẹp nhưng khác lạ với cách diễn đạt của chính mình.



Hình 4. Con đường hoàng gia của Ba Tư.

Còn trong môn hình học, cần rất nhiều kiên trì để hiểu và ghi nhớ những điều phức tạp của môn học, bao gồm các tính chất khác nhau của các hình khác nhau có hai chiều và ba chiều. Chỉ khi đó chúng ta mới có thể học được cách dựng và phân tích các hình hình học.

SỰ THẬT ĐƯỢC LÀM RÕ

GIA DƯƠNG

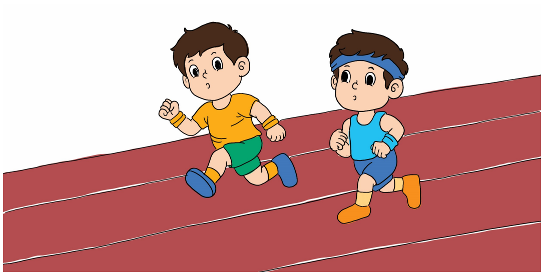
Lần này thì Thám tử Xuân Phong phải vào tận hang ổ của một băng đảng để điều tra manh mối về một vụ án. Khác với những lần bị lạc lên đảo, ở đó có những thổ dân nói thật hoặc nói dối, trong ba người thuộc băng đảng mà Xuân Phong tiếp cận, không có ai nói thật mà lại có tới ba kiểu người. Loại thứ nhất, tất nhiên rồi, đó là người Nói dối – chuyên nói sai sự thật. Tiếp theo mới phức tạp cho Xuân Phong, lại có kẻ Ranh mãnh: hắn sẽ nói thật hoặc nói dối bất cứ khi nào hắn muốn. Thế chưa hết, loại cuối cùng mới rầy rà, đó là người Thay đổi, cứ nói thật và nói dối luân phiên nhau. Nhiệm vụ của Thám tử là xác định từng người thuộc kiểu gì. Vừa được miêu tả về ba kiểu người như vậy, thanh tra Lê Kính đã ôm đầu kêu rên: "Thôi, thà cho tôi lên hoang đảo với thổ dân nói Thật và nói Dối rõ ràng còn hơn. Ở đây phức tạp tờ mờ quá, không biết đường nào mà lần!"

Xuân Phong đưa tay trấn an sự bực tức nóng nảy của thanh tra Lê Kính, thì thầm nói: "Anh cứ yên tâm. Thế giới của băng đảng này phức tạp như vậy, nhưng tôi quả quyết chỉ sau không quá ba câu hỏi, ta sẽ biết ngay ai là thuộc loại người nào?"

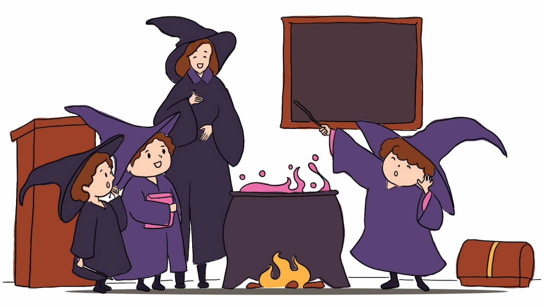
Làm thế nào mà Xuân Phong lại tự tin như thế nhỉ? Em có thể tìm thấy cách Thám tử đặt câu hỏi để xác định ai là ai, và giúp Lê Kính lấy lại bình tĩnh hay không?

CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

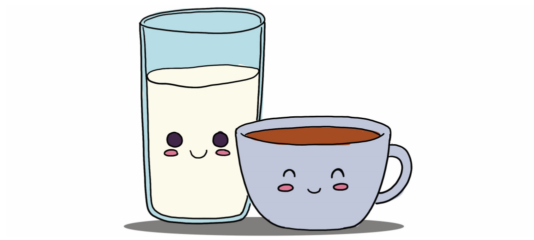
1. Pinocchio và Pierrot thi chạy với nhau. Pierrot chạy suốt cả quãng đường với cùng một tốc độ, còn Pinocchio chạy nhanh gấp đôi Pierrot trong nửa đầu quãng đường, và nửa sau lại chậm bằng nửa Pierrot. Hỏi ai đã thắng?



2. "Còn quá sớm để các em nhìn thấy điều thần kỳ sau đây của thế giới pháp sư," cô giáo McGonagall nói với 33 học trò của mình ở ngôi trường Hogwarts đào tạo Phù thủy, và vung cây đũa thần ra lệnh: "Nào, các em hãy nhắm mắt lại!" Tất cả học trò nam và một phần ba học trò nữ đều nhắm mắt phải. Tất cả học trò nữ và một phần ba các học trò nam đều nhắm mắt trái. Hỏi có bao nhiêu học trò đã nhìn thấy những gì còn quá sớm để nhìn thấy?

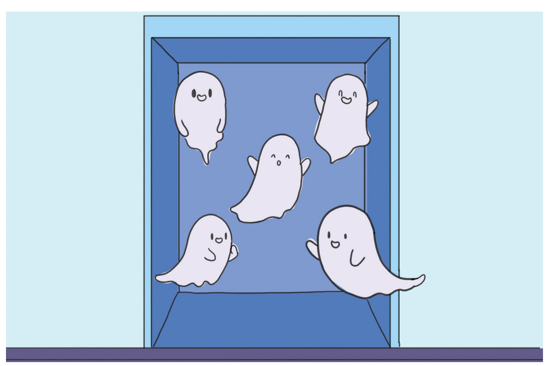


3. Bác Tư múc ra ba thìa sữa từ một ly sữa đầy và đổ chúng vào một ly đựng cà phê nguyên chất và khuấy đều. Sau đó bác múc ba thìa hỗn hợp thu được và đổ lại vào ly sữa. Hỏi bây giờ thứ gì nhiều hơn: cà phê trong ly đựng sữa hay sữa trong ly đựng cà phê?

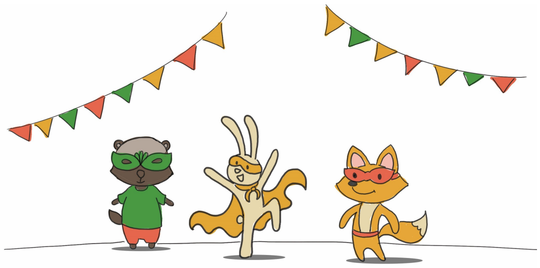


4. Ma xó Brownie là một nhân vật trong văn hóa dân gian Anh và một số quốc gia khác. Đó là một dạng Phúc thần (ma thiện), tiểu yêu nghịch ngợm, thường mô tả là bé tí hon, có da nâu, ăn mặc tuềnh toàng, sinh sống gần gũi với con người, và là thần hộ mệnh cho các gia đình. Các Brownies có một xã hội thu nhỏ riêng và thường tổ chức những cuộc họp bí mật tại một tảng đá nào đó để con người không để ý tới.

Trong một tòa nhà bảy tầng nọ cũng có rất nhiều ma xó Brownies sinh sống. Thang máy chạy giữa tầng một và tầng cuối, dừng lại ở mỗi tầng. Ở mỗi tầng, bắt đầu từ tầng đầu tiên, có một chú Brownie bước vào thang máy, nhưng không có chú nào bước ra ngoài. Thang máy cứ di chuyển liên tục như vậy cho đến khi chú Brownie thứ một nghìn bước vào thang máy thì thang máy dừng lại. Hỏi điều này đã xảy ra ở tầng nào?



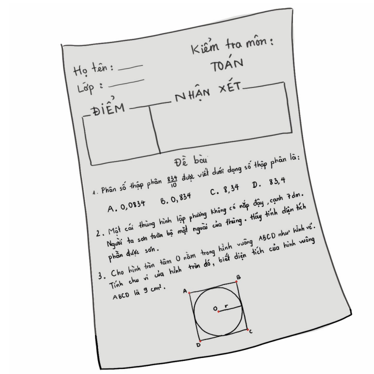
5. Có 40 con thú sống trong rừng gồm cáo, sói, thỏ rừng và lửng. Hàng năm, các con thú tổ chức vũ hội hóa trang: mỗi con đeo một chiếc mặt nạ của một loài động vật khác và trong hai năm liên tiếp không con nào đeo cùng một chiếc mặt nạ của cùng một loài.



Hai năm trước, có 12 "cáo" và 28 "sói" tại vũ hội, một năm trước – có 15 "thỏ rừng", 10 "cáo" và 15 "lửng", và năm nay – 15 "thỏ rừng" và 25 "cáo" . Hỏi loài thú nào có nhiều nhất trong rừng?

6. *a*) Có tám bạn học sinh giải một đề thi gồm 8 bài toán. Khi tổng kết lại, cô giáo thấy rằng với mỗi bài toán lại có đúng năm bạn học sinh giải được bài đó. Chứng minh rằng có hai học sinh sao cho với mỗi bài toán trong đề có ít nhất một trong hai em giải được.

b) Em hãy chỉ ra một ví dụ rằng, nếu với mỗi bài toán đều có đúng bốn bạn học sinh giải được, thì điều khẳng định ở câu *a*) không đúng.



LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 12 năm 2022)

1. Bạn Tùng làm một số bài trắc nghiệm và sau đó sẽ lấy điểm trung bình của các bài đó để tự đánh giá học lực của mình. Trả lời xong bài trắc nghiệm cuối cùng, Tùng thấy rằng nếu bài này mình được 97 điểm thì điểm trung bình của tất cả các bài trắc nghiệm sẽ là 90 điểm, còn nếu như ở bài cuối Tùng chỉ nhận được 73 điểm thì điểm trung bình sẽ chỉ còn 87 điểm. Vậy số bài trắc nghiệm mà Tùng đã làm là bao nhiêu?

Lời giải. Các em có thể gọi số bài trắc nghiệm là n, tổng số điểm các bài trắc nghiệm từ bài số 1 tới bài thứ $(n-1)$ là S. Khi đó ta có các hệ thức sau

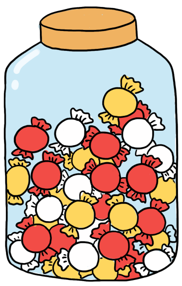
$$\frac{S+97}{n} = 90$$
$$\frac{S+73}{n} = 87.$$

Từ đó suy ra $90n - 97 = 87n - 73$. Các em nhận được $n = 8$.

Hoặc các em có thể lập luận nhẩm như sau. Điểm chênh lệch của bài trắc nghiệm cuối sau hai lần dự tính của Tùng là $97 - 73 = 24$. Trong khi chênh lệch của hai điểm điểm trung bình là $90 - 87 = 3$. Vậy số bài trắc nghiệm mà Tùng cần thực hiện là $\frac{24}{3} = 8$ (bài).

2. Có 3 loại kẹo để trong lọ thủy tinh với ba màu khác nhau: kẹo màu đỏ, kẹo màu vàng và kẹo màu trắng. Nếu Bình nhặt hết số kẹo màu vàng thì tổng số kẹo trong lọ ít hơn một chiếc so với $2/3$ tổng số kẹo ban đầu. Còn nếu Bình nhặt hết số kẹo đỏ, thì số kẹo còn lại trong lọ nhiều hơn 4 chiếc so với $2/3$ tổng số kẹo ban đầu.

Vậy ban đầu trong hai loại kẹo màu vàng và kẹo màu trắng, loại nào có nhiều hơn và nhiều hơn bao nhiêu?



Lời giải. Từ điều kiện thứ nhất suy ra số kẹo màu vàng nhiều hơn một chiếc so với $1/3$ tổng số kẹo ban đầu trong lọ. Từ điều kiện thứ hai suy ra số kẹo màu đỏ ít hơn 4 chiếc so với $1/3$ tổng số kẹo ban đầu trong lọ. Suy ra số kẹo màu trắng nhiều hơn $(4-1)=3$ chiếc so với $1/3$ tổng số kẹo ban đầu, tức là nhiều hơn 2 chiếc so với số kẹo màu vàng.

3. 40 bạn nhỏ nắm tay nhau xếp thành vòng tròn quanh đống lửa trại. Có tất cả 22 bạn có nắm tay một bạn nam, và 30 bạn có nắm tay một bạn nữ. Hỏi có tất cả bao nhiêu bạn nữ xếp trong vòng tròn quanh lửa trại ngày hôm đó?

Lời giải. Vì $22+30=52$ và $52-40=12$, nên có 12 bạn nhỏ hôm đó vừa nắm tay cả bạn nam lẫn bạn nữ trong vòng tròn. Suy ra có $30-12=18$ bạn chỉ nắm tay các bạn nữ. 18 bạn này nắm tất cả $18\times 2=36$ cánh tay của các bạn nữ, còn 12 bạn còn lại nắm đúng 12 cánh tay của các bạn nữ. Vì thế tổng số cánh tay của các bạn nữ là $36+12=48$. Do đó số các bạn nữ là $48:2=24$ (bạn).

4. Trên mặt bàn có 5 đồng xu xếp thành hàng ngang. Đồng xu ở giữa đặt sấp còn 4 đồng còn lại đều đặt ngửa. Mỗi một lần em được phép lật 3 đồng xu đặt liền nhau tùy ý. Liệu em có thể có cách lật thế nào để cuối cùng 5 đồng xu đều đặt sấp được không?

Cũng câu hỏi như vậy, nếu lúc đầu đồng xu đặt sấp duy nhất là đồng xu xếp đầu hàng? Là đồng xu xếp thứ hai trong hàng?

Lời giải. Nếu lúc đầu đồng ở giữa là đồng duy nhất đặt xấp, thì em chỉ cần lật 3 đồng xu xếp đầu tiên, sau đó lại lật 3 đồng xu xếp cuối hàng là hoàn thành nhiệm vụ.

Nếu lúc đầu đồng xu thứ hai là đồng đặt xấp duy nhất, thì em không thể nào lật xấp toàn bộ 5 đồng xu. Thật vậy, có ba cách lật ba đồng xu đặt cạnh nhau: lật 3 đồng xu đầu tiên, 3 đồng xu ở giữa và 3 đồng xu cuối hàng ngang. Do lúc đầu đồng xu đầu hàng và đồng xu cuối hàng đều đặt ngửa, nên mỗi một trong số hai đồng xu này phải lật một số lẻ lần, có nghĩa là hai cách "lật" kiểu thứ nhất và kiểu thứ ba phải thực hiện một số lẻ lần. Khi đó, với hai kiểu "lật" này đồng xu ở giữa sẽ bị lật một số chẵn lần (do *lẻ* + *lẻ* = *chẵn*). Nhưng lúc đầu đồng xu ở giữa đặt ngửa nên số lần "lật" kiểu thứ hai cũng phải là số lẻ. Tuy nhiên, khi đó đồng xu thứ tư lại sẽ bị lật một số chẵn (= *lẻ* + *lẻ*) lần, và nó cuối cùng sẽ vẫn bị lật ngửa. Do đó, trong trường hợp này em không thể lật xấp tất cả các đồng xu.

Lý luận tương tự, em cũng có thể thấy không thể lật xấp cả 5 đồng xu nếu lúc đầu đồng xu đứng đầu hàng là đồng xu duy nhất được đặt xấp.

5. Một lần Lý Toét diện guốc mộc loẹt quẹt ra tận chợ phiên chơi ngày cuối tuần. Khi về nhà, Lý Toét ba hoa khoe khắp làng "Tôi là tôi gặp 15 ông bán cây cảnh ngoài chợ nhé. Mà tôi đi lòng vòng và nghiệm thấy cứ 3 ông bất kỳ có tổng cộng đúng 10 cây hoa hồng. Thế là tôi lẩm nhẩm đoán được ngay 15 ông này có tất cả bao nhiêu cây hoa hồng."

Em có thể đoán được Lý Toét đã tính số cây hoa hồng của 15 ông bán cây cảnh như thế nào không? Hay Lý Toét có khoác lác hay nhầm lẫn gì không nhỉ?

Lời giải. Trước tiên ta sẽ chỉ ra hai ông bán cây bất kỳ luôn có số cây hồng bằng nhau. Gọi hai ông đó là A và B. Lấy thêm hai ông C và D khác nữa trong số 15 ông bán cây. Theo lời của Lý Toét, 3 ông A, C và D có 10 cây hồng. Và cũng thế, 3 ông B, C, D cũng có đúng 10 cây hồng. Suy ra ông A và ông B có số cây hồng bằng nhau. Vì hai ông này được chọn bất kỳ, suy ra số cây hồng của mỗi ông trong số 15 ông là như nhau.

Nhưng khi đó, ba ông bán cây không thể có đúng 10 cây hồng vì số cây phải là số nguyên, mà 10 lại không chia hết cho 3.

Vì thế, chắc chắn Lý Toét có hơi khoác lác hoặc nhầm lẫn đấy.

6. Có 20 bạn tham gia nhóm Toán ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn. Một lúc sau các bạn nhóm Văn cũng đến, cứ xen kẽ hai bạn nhóm Toán ngồi kề nhau giờ có thêm 20 bạn mới từ nhóm Văn. Tổng cộng có tất cả 400 bạn từ nhóm Văn ngồi thêm quanh chiếc bàn tròn rộng đó. Thỉnh thoảng một bạn nhóm Văn lại đứng dậy và rời khỏi bàn, dắt theo hai bạn ngồi cạnh mình đi luôn. Cứ như vậy, sau một lúc thì quanh bàn số bạn nhóm Toán còn lại chỉ là 3 bạn. Hỏi số bạn nhóm Văn còn ở lại quanh bàn lúc đó ít nhất phải là bao nhiêu?

Lời giải. Các bạn nhóm Toán chia chiếc bàn tròn ra thành các khoảng bao gồm các bạn nhóm Văn ngồi giữa. Ta sẽ chỉ ra một tính chất (bất biến!) thú vị quan trọng sau: trong mỗi khoảng như vậy số các bạn nhóm Văn luôn là một số chia 3 dư 2. Thật vậy, điều này lúc đầu là đúng vì 20 chia 3 dư 2. Nếu có 3 bạn nhóm Văn rời khỏi bàn thì số bạn nhóm Văn trong một khoảng nào đó sẽ giảm đi 3. Nếu có 1 bạn nhóm Toán và 2 bạn nhóm Văn rời khỏi bàn, thì hai khoảng sẽ nhập lại thành 1 và tổng số bạn nhóm Văn trong khoảng tổng cộng mới đó sẽ giảm đi 2. Trong khoảng mới này, số bạn nhóm Văn sẽ chia 3 dư $(2+2)-2=2$, có nghĩa là tính chất vẫn giữ nguyên. Cũng theo lập luận này, không thể xảy ra tình huống có 1 bạn nhóm Văn rời bàn mang theo hai bạn nhóm Toán, vì khi đó trong khoảng giữa hai bạn nhóm Toán chỉ có 1 bạn Văn, mà 1 chia 3 không thể dư 2.

Suy ra tính chất đó sẽ vẫn đúng ở thời điểm cuối cùng. Khi đó có 3 bạn nhóm Toán ngồi lại, chia bàn ra 3 khoảng, và trong mỗi khoảng phải có ít nhất 2 bạn nhóm Văn. Suy ra số bạn nhóm Văn còn lại ngồi quanh bàn là 6 bạn.

Ta có thể xây dựng tình huống để quanh bàn còn ngồi lại đúng 6 bạn nhóm Văn như sau. Đầu tiên, 17 bạn nhóm Toán rời khỏi bàn lần lượt, chỉ để lại 3 bạn nhóm Toán ở lại. Sau đó mỗi một khoảng gồm các bạn nhóm Văn sẽ giảm dần cho đến khi chỉ còn 2 bạn nhóm Văn ở lại khoảng đó.

TRANSLATION IS FUN

NGHIA DOAN[1]

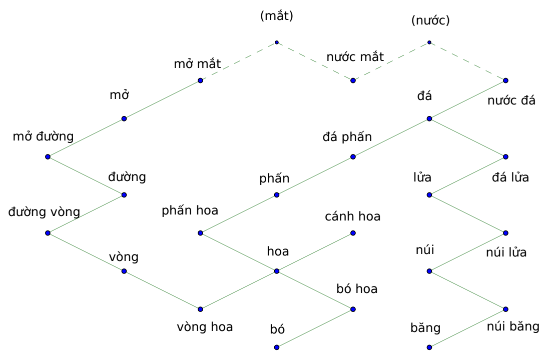
In this article, we introduce an application of graph theory to pattern recognition.

Exercise (Phrase matching). Match the Vietnamese phrases in the left column to their English translations in the right column of the table below.

1	băng	A	bouquet (a bunch of flowers)
2	bó	B	chalk
3	bó hoa	C	circle
4	cánh hoa	D	cluster
5	đá	E	detour
6	đá lửa	F	fire
7	đá phấn	G	flint (a stone used to make sparks)
8	đường	H	flower
9	đường vòng	I	ice
10	hoa	J	iceberg
11	lửa	K	mountain
12	mở	L	petal
13	mở đường	M	pollen
14	mở mắt	N	powder
15	núi	O	road
16	núi băng	P	rock
17	núi lửa	Q	tear (as in teardrop)
18	nước đá	R	to make aware
19	nước mắt	S	to open
20	phấn	T	to pave the way
21	phấn hoa	U	volcano
22	vòng	V	wreath
23	vòng hoa		

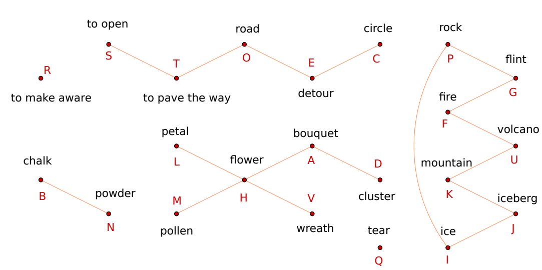
Solution. We use a graph theory approach from the point of view of an English speaker to solve the problem.

First, notice that the Vietnamese phrases above are single–word and double–word phrases. We construct a graph as follows: each phrase is represented by a vertex; an edge connects a single–word phrase and a double–word phrase where the latter contains the former. See the graph below.



Graph of Vietnamese phrases

In plain words, the graph of Vietnamese phrases represents connections in *shared meaning* between the connected phrases. Similarly, we connect the English phrases such that, in each connected phrases, the meaning of one phrase is contained in the meaning of the other. We obtain the graph of English phrases below.



Graph of English phrases

Comparing the resulting graphs, only the $5-vertex$ subgraphs *(phấn hoa, vòng hoa, cánh hoa, bó hoa, hoa)* and *(bouquet, petal, pollen, wreath, flower)*, are *isomorphic*

[1] *Ottawa, Canada.*

(that is to say, they are the same graphs). Therefore, *hoa=flower*. Observe that the relation between *pollen* and *power* implies that *powder* is *phấn*. The rest of the vertices can then be paired up *petal – cánh hoa*, *bouquet – bó hoa*, *pollen – phấn hoa*, *wreath – vòng hoa*. Thus *bó – cluster* and *chalk – đá phấn*. Similarly, the paths *(băng – núi băng – núi – núi lửa – lửa – đá lửa – đá – nước đá) (ice – iceberg – mountain – volcano – fire – flint – rock)* are very much alike. In addition, the relation of *đá – đá phấn* is similar to *rock - chalk*, and so both *nước đá* and *đá* mean *ice*. Similarly, the paths *(vòng – đường vòng – đường – mở đường – mở) (to open – to pave the way – road – detour – circle)* are very much alike.

Following the same arguments, we can fill up the table below.

#	Vietnamese	Literal meaning	Answer	English
1	băng	ice	I	ice
2	bó	cluster	D	cluster
3	bó hoa	flower cluster	A	bouquet
4	cánh hoa	flower wing	L	petal
5	đá	rock	P	rock
6	đá lửa	fire rock	G	flint
7	đá phấn	powder rock	B	chalk
8	đường	road	O	road
9	đường vòng	circle road	E	detour
10	hoa	flower	H	flower
11	lửa	fire	F	fire
12	mở	to open	S	to open
13	mở đường	to open a road	T	to pave a way
14	mở mắt	to open eyes	R	to make aware
15	núi	mountain	K	mountain
16	núi băng	ice mountain	J	iceberg
17	núi lửa	fire mountain	U	volcano
18	nước đá	rock water	I	ice
19	nước mắt	eye water	Q	tear
20	phấn	powder	N	powder
21	phấn hoa	flower powder	M	pollen
22	vòng	circle	C	circle
23	vòng hoa	flower circle	V	wreath

- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P691–P700: trước ngày 15/5/2023.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P691. (Mức B) Tìm tất cả các số có sáu chữ số, trong đó chữ số hàng trăm nghìn bằng $\frac{1}{6}$ lần tổng năm chữ số còn lại; chữ số hàng chục nghìn bằng $\frac{1}{6}$ tổng bốn chữ số nằm bên phải nó.

Duy Minh, Hà Nội (st)

P692. (Mức B) Ở mỗi ô vuông con của bảng ô vuông kích thước 3×3, có 4 viên bi. Bạn Hà lấy bi ra khỏi bảng, theo quy tắc: Mỗi lần, lấy hai viên bi nằm ở hai ô vuông con kề nhau, ở mỗi ô lấy một viên. Hỏi, bạn Hà có thể lấy ra khỏi bảng tối đa bao nhiêu viên bi?

(*Hai ô vuông được gọi là kề nhau, nếu chúng có cạnh chung.*)

Trích Đề thi VMTC 2022–Vòng 2–Khối lớp 8

P693. (Mức B) Cho các số thực phân biệt a, b, c thoả mãn
$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{23}{20}.$$
Tính
$$S = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}.$$

Trích Đề thi VMTC 2022–Vòng 2–Khối lớp 8

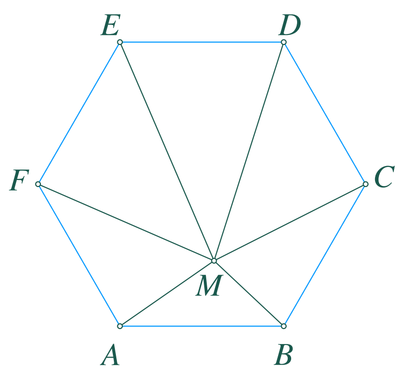
P694. (Mức B) Cho tập hợp S gồm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số. Chứng minh rằng, trong 106 số đôi một khác nhau tùy ý thuộc S, luôn tồn tại 8 số, sao cho có thể phân chia 8 số này thành 4 nhóm, mỗi nhóm có hai số, và các tổng hai số cùng nhóm bằng nhau.

Trích Đề thi VMTC 2022–Vòng 2–Khối lớp 8

P695. (Mức B) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x;y)$ thoả mãn $x^2+16=5^y$.

Trích Đề thi VMTC 2022–Vòng 2–Khối lớp 9

P696. (Mức B) Cho lục giác đều $ABCDEF$ có cạnh bằng 1 và M là một điểm tuỳ ý nằm trong lục giác đó. Chứng minh rằng, trong 6 tam giác MAB, MBC, MCD, MDE, MEF và MFA có ít nhất 3 tam giác có chu vi không nhỏ hơn 3.



Nguyễn Văn Bản, Điện Biên

P697. (Mức A) Cho các số dương x,y,z thoả mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{yz}{x^5-x+8}}+\sqrt[3]{\frac{zx}{y^5-y+8}}+\sqrt[3]{\frac{xy}{z^5-z+8}}\leq\frac{3}{2}.$$

Hoàng Lê Nhật Tùng, Hà Nội

P698. (Mức A) Cho số nguyên m, với $m>1$. Chứng minh rằng

$a)$ Tồn tại m số thực dương $x_1,\ldots,x_m$, không đồng thời bằng 1, sao cho

$$\sqrt[n]{x_1}+\cdots+\sqrt[n]{x_m} \quad \text{là số nguyên}$$

là số nguyên, với mọi $n=1,2,\ldots,100$.

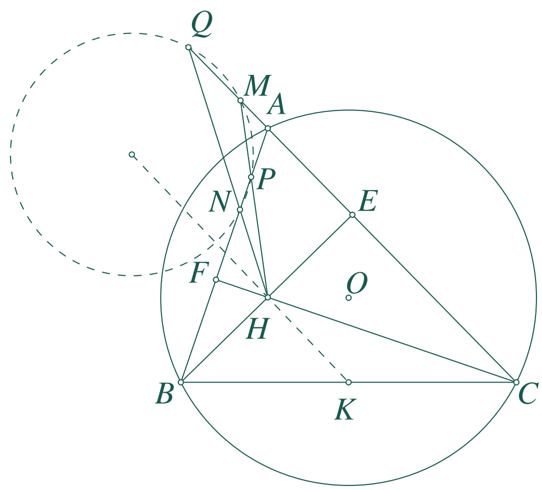
$b)$ Không tồn tại m số thực dương $x_1,\ldots,x_m$, không đồng thời bằng 1, sao cho

$$\sqrt[n]{x_1}+\cdots+\sqrt[n]{x_m}$$

là số nguyên, với mọi số nguyên dương n.

Nguyễn Huy Hoàng, Bình Định

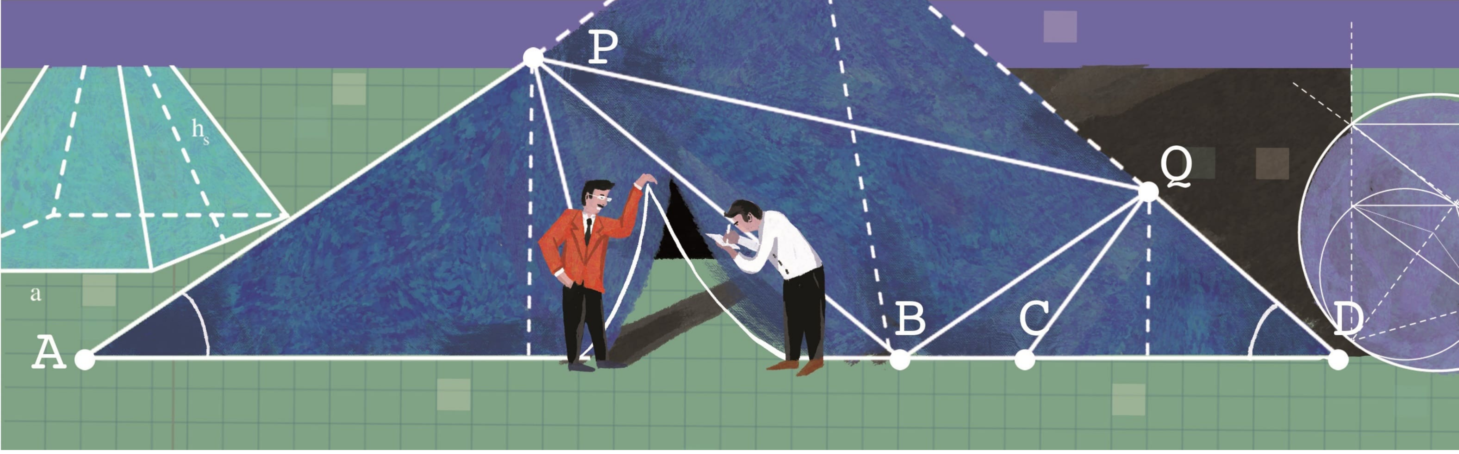
P699. (Mức A) Cho tam giác không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) và có hai đường cao BE,CF cắt nhau tại H. Giả sử $\angle BAC$ khác $60^\circ, 90^\circ$ và 120°. Gọi P,Q lần lượt là các điểm đối xứng với B,C tương ứng qua F,E. Các đường thẳng HP,HQ theo thứ tự cắt AC,AB tương ứng tại M,N. Gọi K là trung điểm của BC. Chứng minh rằng, các điểm M,N,P,Q cùng thuộc một đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng HK.



Lưu Công Đông, Hà Nội

P700. (Mức A) Cho n là một số nguyên dương. Lần lượt ghi các số n^3, $n^3+1,\ldots,$ n^3+n lên $n+1$ tấm thẻ trắng, trên mỗi thẻ ghi đúng một số. Người ta xếp tất cả $n+1$ tấm thẻ đó vào hai chiếc hộp xanh và đỏ, sao cho mỗi hộp có ít nhất một thẻ và tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp xanh chia hết cho tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp đỏ. Chứng minh rằng, số các tấm thẻ trong hộp xanh chia hết cho số các tấm thẻ trong hộp đỏ.

Tô Trung Hiếu, Nghệ An (st)



NỘI SUY VÀ ĐA THỨC ĐỐI XỨNG

PHÙNG HỒ HẢI

1. Đa thức và hàm đa thức

1.1. Đa thức. Đa thức là một biểu thức đại số nhận được một cách hình thức từ các biến số và các hệ số thông qua các phép tính cộng, trừ và nhân.

Các hệ số là phần tử thuộc một tập hợp nào đó, thông thường là một tập hợp số (ví dụ $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) nhưng cũng có thể là một tập tổng quát hơn mà trên đó đã xác định các phép toán cộng, trừ, nhân.

Biến số là các ký tự hình thức (ví dụ $x, y, X, Y, \ldots$) mà ta có thể thay thế chúng bằng những phần tử trong tập hợp chứa các hệ số hoặc một tập hợp lớn hơn mà trên đó cũng xác định các phép toán cộng, trừ và nhân.

Đa thức một biến có thể được mô tả bằng biểu thức dạng

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Như vậy thông tin về các đa thức một biến bao gồm hai loại: số tự nhiên n được gọi là bậc của nó, ký hiệu là $\deg P(x)$, và các số (nguyên, hữu tỷ, thực hay phức) $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – các hệ số của nó.

> Thông tin về đa thức một biến với bậc (không quá) n là một dãy có thứ tự gồm $n+1$ *đơn vị thông tin.*

Dưới đây ta sẽ chỉ xét các đa thức một biến với hệ số nằm trong một tập số như $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

1.2. Phép chia có dư. Đối với đa thức hệ số thực ta có thể thực hiện được phép chia có dư, tương tự như đối với các số nguyên. Cho các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ với $Q(x) \neq 0$, khi đó tồn tại duy nhất các đa thức $P_1(x)$ và $R(x)$ với $\deg R(x) < \deg Q(x)$ sao cho

$$P(x) = Q(x)P_1(x) + R(x).$$

Ta nói đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$ nếu $R(x) = 0$.

Chú ý. Ta có thể thay thế điều kiện "hệ số thực" bởi điều kiện "hệ số phức" hay "hệ số hữu tỷ". Nhưng ta không thể áp dụng với điều kiện "hệ số nguyên".

Ví dụ, ta không thể thực hiện được phép chia có dư của đa thức x^2+1 cho đa thức $2x$ trong tập hợp đa thức hệ số nguyên!

1.3. Hàm đa thức. Xét các đa thức một biến với hệ số nằm trong một tập số. Khi đó, bằng cách thay thế biến số bằng các giá trị trong tập số đó ta thu được một hàm số. Hàm số thu được bằng cách này gọi là hàm đa thức. Chúng thường được mô tả ở dạng

$$y = P(x),$$

trong đó $P(x)$ là một đa thức theo biến x.

Nguyên lý đồng nhất của Đại số học nói rằng nếu hai hàm đa thức (trên tập số thực) bằng nhau tại mọi giá trị của biến số thì các đa thức xác định chúng bằng nhau. Nói cách khác, mỗi hàm đa thức được xác định bởi một đa thức duy nhất.

Ta chú ý rằng tính đúng đắn của nguyên lý này phụ thuộc vào miền giá trị của biến số (và hệ số). Ví dụ nguyên lý đồng nhất sai nếu xét đa thức trên tập các lớp đồng dư.

1.4. Nghiệm của đa thức. Nghiệm, hay còn gọi là không điểm, của một đa thức $P(x)$ là những giá trị của biến số x mà tại đó $P(x)$ nhận giá trị 0. Sử dụng phép chia có dư của $P(x)$ cho $x-a$ ta có

$$P(x) = (x-a)P_1(x) + P(a).$$

Như vậy nếu a là nghiệm của $P(x)$ thì $P(x)$ chia hết cho $x-a$. Từ đó ta kết luận một đa thức bậc n có không quá n nghiệm.

Định lý cơ bản của Đại số học khẳng định mọi đa thức với hệ số phức với bậc lớn hoặc bằng 1 luôn có nghiệm phức. Từ đó suy ra, một đa thức bậc $n \geq 1$ luôn có thể viết được ở dạng

$$P(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - x_i), \quad x_i \in \mathbb{C}.$$

Chú ý rằng các số (phức) x_i có thể bằng nhau – trong trường hợp đó ta nói $P(x)$ có *nghiệm bội*.

> Nghiệm bội của một đa thức luôn là nghiệm chung của đa thức đó với đạo hàm của nó.

1.5. Các tính chất cơ bản của đa thức dẫn tới nguyên lý nội suy.

– Hai đa thức bằng nhau nếu chúng xác định hai hàm số bằng nhau (trên các tập số nguyên, hữu tỷ, thực hay phức);

– Hai đa thức bằng nhau nếu giá trị chúng bằng nhau tại "đủ nhiều giá trị của biến số", phát biểu một cách tương đương là, một đa thức sẽ đồng nhất bằng 0 nếu nó bằng 0 tại "đủ nhiều giá trị của biến số";

– Một đa thức được xác định duy nhất bởi giá trị của nó tại "đủ nhiều giá trị của biến số", "đủ nhiều" được xác định là nhiều hơn bậc của đa thức. Ví dụ một tập vô hạn luôn là "đủ nhiều".

2. Nội suy Lagrange

Bài toán nội duy Lagrange là xác định một đa thức bậc (không quá) $n-1$ từ các giá trị của đa thức tại n vị trí khác nhau.

> **Bài toán nội suy Lagrange.** Cho các số $y_1, \ldots, y_n$ và các số phân biệt $x_1, \ldots, x_n$. Xác định đa thức $P(x)$ bậc không quá $n-1$ thỏa mãn:
>
> $$P(x_i) = y_i, \text{ với mọi } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Nhận xét. Nếu tồn tại đa thức $P(x)$ (với bậc không quá $n-1$) nhận giá trị y_i tại điểm x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, thì $P(x)$ là duy nhất. Từ đó suy ra tính chất tuyến tính của bài toán nội suy Lagrage:

– Giả sử $Q(x)$ là đa thức được xây dựng từ bộ số $(z_1, \ldots, z_n)$:

$$Q(x_i) = z_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

thì đa thức $P(x) + Q(x)$ được xác định từ bộ số

$$(y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n).$$

– Bộ số $(\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n)$ xác định đa thức $\lambda P(x)$ (λ là một số bất kỳ).

Trên có sở của tính chất tuyến tính, ta sẽ xây dựng đa thức $P(x)$ bắt đầu từ những bộ số $(y_1, \ldots, y_n)$ đơn giản nhất.

– Nếu tất cả các giá trị y_i đều bằng 0, ta có $P(x) = 0$.

– Nếu $y_1 = 1, y_2 = \ldots = y_n = 0$ thì đa thức $P_1(x)$ tương ứng sẽ nhận các giá trị $x_2, \ldots, x_n$ làm nghiệm. Do $P_1(x)$ có bậc không quá $n-1$ nên

$$P(x) = c(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Thay $x = x_1$ ta suy ra

$$c = \frac{1}{(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)}.$$

Từ đó

$$P_1(x) = \frac{(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)}.$$

– Tương tự, với bộ $y_1 = \dots = y_{i-1} = y_{i+1} = \dots = y_n = 0$, $y_i = 1$, đa thức tương ứng là

$$P_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Theo nguyên lý tuyến tính nêu trên, ta có lời giải bài toán tổng quát như sau. Đa thức

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{j\neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \qquad (1)$$

thỏa mãn $P(x_i) = y_i$.

Chú ý. Bậc của $P(x)$ có thể bé hơn hẳn $n-1$.

Bài toán 2.1. Giả sử A, B và C là phần dư của đa thức $P(x)$ khi chia cho $x-a, x-b$ và $x-c$. Tìm phần dư của phép chia đa thức đó cho $(x-a)(x-b)(x-c)$.

Bài toán 2.2. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là đa thức bậc nhỏ hơn n thì phân thức

$$\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}$$

trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các giá trị khác nhau, luôn biểu diễn được ở dạng

$$\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}.$$

với các số $A_1, A_2, \dots, A_n$ nào đó.

Bài toán 2.3. Cho $x_1, \dots, x_n$ là các số thực phân biệt. Đặt $g(x) := \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$. Chứng minh rằng

$$\sum_i \frac{x_i^k}{g'(x_i)} = \begin{cases} 0 & \text{với } k = 0, 1, \dots, n-2; \\ 1 & \text{với } k = n-1. \end{cases}$$

Nhận xét. Trong bài toán trên ta thực sự có các đồng nhất thức, nghĩa là ta có thể coi x_i như là các biến số, tuy nhiên việc chứng minh trực tiếp đồng nhất thức này bằng các biến đổi đại số là rất phức tạp.

Lời giải. Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \qquad (2)$$

ta thu được:

$$g'(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i}^{n} (x - x_j).$$

Từ đó

$$g'(x_i) = \prod_{j\neq i}(x_i - x_j). \qquad (3)$$

Áp dụng công thức nội duy Lagrange cho đa thức x^k ta thu được

$$x^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \prod_{j\neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

So sánh hệ số của x^{n-1} ở hai vế cho ta các hệ thức cần chứng minh cho $k \le n-1$.

Bài toán 2.4. Tính

$$h_k := \sum_i \frac{x_i^{n+k-1}}{g'(x_i)},$$

với $k = 1, 2, 3$.

Lời giải. Xét công thức Viète

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = x^n - e_1 x^n + \dots + (-1)^n e_n.$$

Các hệ số e_i là các đa thức đối xứng cơ bản theo các biến $x_1, \dots, x_n$.

Nhân theo vế đẳng thức $g(x_i) = 0$ với x_i^k ta thu được

$$x_i^{n+k} - e_1 x_i^{n+k-1} + \dots + (-1)^n e_n x_i^k = 0.$$

Chia theo vế cho $\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)$ và lấy tổng theo i, ta thu được

$$h_{k+1} - e_1 h_k + \ldots + (-1)^n e_n h_{k+1-n} = 0,$$

với quy ước $h_0 = 1$ và $h_k = 0$ nếu $k < 0$. Công thức trên cho phép ta tính các đa thức h_k. Cụ thể ta có:

$$\begin{aligned} h_1 = e_1 &= \sum_i x_i \\ h_2 = e_1 h_1 - e_2 &= \sum_{i\leq j} x_i x_j \\ h_3 = e_1 h_2 - e_2 h_1 + e_3 &= \sum_{i\leq j\leq k} x_i x_j x_k. \end{aligned}$$

Nhận xét. Trong lời giải trên ta sử dụng hai kỹ thuật. Thứ nhất là thế $x = x_i$ vào $g(x)$ để thu được một hệ thức giữa x_i và các hệ số e_j. Thứ hai là nhân hệ thức đó theo các trọng số.

Bài toán 2.5. Chứng minh công thức tổng quát sau với mọi $k = 4, 5, \ldots$

$$h_k = \sum_{i_1\leq i_2\leq\ldots\leq i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}.$$

Các đa thức h_k được gọi là *đa thức đối xứng toàn phần* theo các biến $x_1, \ldots, x_n$.

2.1. Hệ số của đa thức nhận được từ công thức nội suy Lagrange. Trong bài tập 2.1 ta đã sử dụng phương pháp so sánh hệ số trong công thức nội suy Lagrange. Một câu hỏi tự nhiên là: có thể mô tả cụ thể được các hệ số của $P(x)$ từ các giá trị y_i và x_i hay không?

Từ đẳng thức

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \frac{\prod_{j\neq i}^n (x - x_i)}{g'(x_i)}, \end{aligned} \tag{6}$$

so sánh hệ số ta thu được:

$$a_0 = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{g'(x_i)},$$

và

$$a_1 = \sum_{i=1}^n \frac{y_i(x_i - e_1)}{g'(x_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i x_i}{g'(x_i)} - a_0 e_1.$$

Bài toán 2.6. Đặt

$$b_k := \sum_i \frac{y_i x_i^k}{g'(x_i)}.$$

Chứng minh rằng các hệ số của đa thức $P(x)$ được tính bởi công thức

$$a_k = \sum_{j=0}^k (-1)^i e_j b_{k-j}.$$

2.2. Đạo hàm bậc hai. Trong các tính toán ở trên ta đã sử dụng các giá trị của đạo hàm bậc nhất của $g'(x)$. Vậy đạo hàm bậc hai có ý nghĩa gì?

Bài toán 2.7. Giả thiết rằng các số x_i phân biệt, khi đó $g''(x_i) = 0$ khi và chỉ khi

$$\sum_{j\neq k}^n \frac{1}{x_i - x_j} = 0.$$

Lời giải. Tính đạo hàm hai lần của $g(x)$. Ta có

$$g''(x) = \sum_{k\neq j} \prod_{i\neq k,j} (x - x_i) = \sum_{k\neq j} \frac{g(x)}{(x - x_k)(x - x_j)}.$$

Từ đó ta có, với mỗi $1 \leq i \leq n$:

$$g''(x_i) = 2\prod_{j\neq i}(x_i - x_j) \sum_{j\neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j}.$$

Vậy $g''(x_i) = 0$ khi và chỉ khi

$$\sum_{j\neq i} \frac{1}{x_i - x_j} = 0.$$

Bài toán 2.8. Cho các số $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = 1$ thỏa mãn

$$\sum_{j=0, j\neq i}^{n+1} \frac{1}{x_i - x_j} = 0,$$

với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Chứng minh rằng với mọi i, $x_i = 1 - x_{n+1-i}$.

3. Hàm sinh

Hàm sinh là một công cụ dùng để phát biểu nhiều vấn đề của số học hay tổ hợp theo ngôn ngữ đại số, trên cơ sở đó sử dụng các phương pháp đại số (và giải tích) để giải quyết vấn đề.

Để xác định, hay tìm hiểu tính chất của một dãy số $a_0, a_1, \ldots$, thay vì nghiên cứu từng số hạng riêng rẽ, người ta tập hợp tất cả chúng trong một *tổng hình thức* hay một chuỗi lũy thừa:

$$A(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Nếu dãy đã cho hữu hạn, thì $A(x)$ là một đa thức. Như vậy các chuỗi số có thể coi như một *khái niệm mở rộng của đa thức.*

Tương tự như với đa thức, ta có thể quy ước các phép tính cộng, trừ hay nhân các hàm sinh.

Phép cộng và trừ được thực hiện theo thành phần (nghĩa là tương ứng với phép cộng, trừ hai dãy số).

Phép nhân được thực hiện tương tự nhân đa thức. Với hai hàm sinh

$$A(t) = \sum_0^\infty a_i x^i, \quad B(t) = \sum_0^\infty b_i x^i,$$

tích của chúng là hàm sinh $C(t) = \sum_0^\infty c_i x^i$, với các hệ số c_i cho bởi công thức

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}.$$

3.1. Ví dụ.

– Với

$$A(x) = 1 - x,$$
$$B(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

ta có

$$A(x) \cdot B(x) = 1.$$

Nghĩa là ta có đẳng thức

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

Từ đó ta cũng có

$$\begin{aligned} B(x)^2 &= 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots \\ &= \frac{1}{1 - 2x + x^2}. \end{aligned}$$

– Hàm sinh cho dãy các đa thức đối xứng cơ bản của $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là:

$$E(x) = 1 + e_1 x + \ldots + e_n x^n = \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i x).$$

Xét hệ thức

$$\begin{aligned} \frac{1}{E(-x)} &= \prod_i \frac{1}{1 - x_i x} \\ &= \prod_i (1 + x_i x + \ldots + x_i^n x^n + \ldots) \\ &= 1 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + \ldots \qquad (7) \end{aligned}$$

$$h_r = \sum_{i_1 \leq \ldots \leq i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_r}.$$

– Các đa thức h_r là các đa thức đối xứng toàn phần theo $x_1, \ldots, x_n$. Từ trên ta rút ra hệ thức sau giữa các đa thức e_i và h_i:

$$h_k - e_1 h_{k-1} + \ldots + (-1)^k e_k = 0,$$
$$\text{với mọi } 1 \leq k \leq n;$$
$$h_k - e_1 h_{k-1} + \ldots + (-1)^n e_n h_{k-n} = 0,$$
$$\text{với mọi } k \geq n.$$

3.2. Đạo hàm của hàm sinh. Ngoài các phép toán đại số nêu trên, ưu thế quan trọng của hàm sinh là ta có thể thực hiện phép *đạo hàm* trên chúng.

Nếu $A(x) = \sum a_n x^n$ thì

$$A'(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Bài tập dưới đây cho thấy hai phép toán định nghĩa như trên thỏa mãn các tính chất quen biết của phép toán đạo hàm và tích phân.

Bài toán 3.1. Kiểm tra các hệ thức sau:

$$(A(t)\cdot B(t))' = A(t)'\cdot B(t) + A(t)\cdot B(t)'$$
$$\left(\frac{1}{A(t)}\right)' = -\frac{A(t)'}{A(t)^2}$$

Bài toán 3.2. Hàm mũ $\exp$ và hàm logarit $\ln$ được định nghĩa như sau:

$$\exp(x) = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (8)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (9)$$

Chứng minh rằng

– $\exp(x)' = \exp(x)$, $\ln(x)' = \frac{1}{1+x}$;

– với mỗi hàm sinh $A(x)$ với hệ số đầu tiên bằng 0, nghĩa là $A(0) = 0$, thì $\exp(A(x))$ cũng là một hàm sinh;

– với mỗi hàm sinh $A(x)$với hệ số đầu tiên bằng 0, nghĩa là $A(0) = 1$, thì $\ln(A(x))$ cũng là một hàm sinh;

– $\exp(\ln(1+x)) = 1 + x$, $\ln(\exp(x)) = x$.

4. Đa thức đối xứng

Đa thức theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là đối xứng nếu nó không thay đổi khi ta hoán vị các biến. Ta đã làm quen với các đa thức đối xứng sau:

– Đa thức đối xứng cơ bản

$$e_r = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_r}, \quad r = 1,2,\ldots,n.$$

– Đa thức đối xứng toàn phần

$$h_r = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_r}, \quad r = 1,2,\ldots,n.$$

– Ngoài ra ta còn đó tổng lũy thừa

$$p_r = \sum_i x_i^r, r = 1,2,\ldots$$

Ứng với mỗi loại đa thức đối xứng ở trên ta sẽ xét hàm sinh của nó. Như ở phần trên ta có

$$E(x) = \sum_{i=0}^{n} e_i x^i = \prod(1 + x_i x),$$
$$H(x) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i x^i = \prod \frac{1}{1 - x_i x},$$
$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i+1} x^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - x_i x}.$$

Từ hệ thức (7) ta có $E(-x)\cdot H(x) = 1$. Mặt khác, xét đạo hàm của $\ln E(x)$ ta có

$$\ln(E(x))' = \frac{E'(x)}{E(x)} = \sum_i \ln(1 + x_i x)'$$
$$= \sum_i \frac{x_i}{1 + x_i x}.$$

Từ đó ta suy ra hệ thức:

$$E'(x) = E(x)\cdot P(-x).$$

Đây chính là hệ thức Newton đối với các tổng lũy thừa. So sánh hệ số của x^k ở hai vế ta có.

– Với $0 \le k \le n-1$:

$$(k+1)e_{k+1} = e_k p_1 - e_{k-1}p_2 + \ldots + (-1)^{k-1}e_1 p_k + (-1)^k p_{k+1}$$

hay là

$$p_{k+1} = e_1 p_k + \ldots + (-1)^{k-1}e_k p_1 + (-1)^k(k+1)e_{k+1}.$$

– Với $k \ge n$:

$$0 = e_n p_{k+1-n} - e_{n-1}p_{k+2-n} + \ldots + (-1)^{n-1}e_1 p_k + (-1)^n p_{k+1}$$

hay là

$$p_{k+1} = e_1 p_k + \ldots + (-1)^{n-1}e_n p_{k+1-n}.$$

Bài toán 4.1. Chứng minh trực tiếp hệ thức Newton. (Với trường hợp $k \ge n$, sử dụng phương pháp trong lời giải bài toán 2.4. Với trường hợp $k < n$, sử dụng quy nạp theo số biến).

Bài toán 4.2. Giả thiết $x_1,\dots,x_n$ là các nghiệm (thực hoặc phức) của đa thức

$$x^n - \binom{m}{1}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n\binom{m}{n}$$

với m là số tự nhiên bất kỳ. Tính tổng

$$\sum x_i^k,\quad k = 1,2,\dots,n.$$

Bài toán 4.3. Cho các số thực $a_1,\dots,a_n$ và các số nguyên dương $b_1,\dots,b_n$. Giả thiết tồn tại đa thức $f(x)$ sao cho:

$$(1-x)^n f(x) = 1 + \sum_i a_i x^{b_i}$$

Tính $f(1)$ qua b_i và n.

5. Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Cho trước các số $e_1, e_2, \dots, e_n$. Ta xét dãy vô hạn (a_k), $k = 0,1,\dots$ các số thỏa mãn hệ thức truy hồi

$$a_{n+k} = e_1 a_{n+k-1} - e_2 a_{n+k-2} + \ldots + (-1)^n e_n a_k,\quad k = 0,1,\dots$$

với các giá trị $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ cho trước.

– Dãy (a_n) được xác định duy nhất bởi hệ thức trên, và các số hạng $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ được gọi là điều kiện ban đầu.

– Bài toán xác định một dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi như trên còn được gọi là bài toán *giải phương trình sai phân*.

– Đa thức

$$g(x) = x^n - e_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n e_n$$

được gọi là đa thức đặc trưng của phương trình trên.

5.1. Nghiệm tổng quát. Việc xác định dãy từ hệ thức truy hồi và điều kiện ban đầu được thực hiện theo hai bước.

– Xác định tất cả các dãy thỏa mãn hệ thức truy hồi – đây gọi là các nghiệm tổng quát của bài toán;

– Kết hợp với điều kiện ban đầu để xác định dãy cần tìm trong số các dãy ở trên – đây gọi là nghiệm riêng của bài toán.

Gọi t là một nghiệm của $g(x)$. Khi đó dãy $(\lambda t^k)_{k\geq 0}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi ở trên, với mọi số λ.

Giả thiết $g(x)$ có n nghiệm phân biệt $x_1,\dots,x_n$ (có thể là nghiệm phức). Khi đó với mọi bộ số $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, dãy (a_k) cho bởi

$$a_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^k$$

thỏa mãn hệ thức truy hồi ở trên.

5.2. Nghiệm riêng. Các hệ số λ_i được tính cụ thể thông qua điều kiện ban đầu $a_0,\dots,a_{n-1}$ bằng cách giải hệ phương trình

$$\sum \lambda_i x_i^k = a_k,\quad k = 0,1,\dots,n-1. \tag{10}$$

Chúng ta sẽ mô tả nghiệm $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ của hệ này nhờ bài toán nội suy. Cụ thể, ta tìm λ_i ở dạng

$$\lambda_i = \frac{P(x_i)}{g'(x_i)},$$

với $P(x_i)$ là một đa thức bậc $n-1$:

$$P(x) = b_0 x^{n-1} - b_1 x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} b_{n-1}.$$

Nghĩa là

$$a_k = \sum_i P(x_i)\frac{x_i^k}{g'(x_i)},\quad \text{với } k = 0,1,\dots,n-1.$$

Thế giá trị của $P(x_i)$ và sử dụng kết quả của bài tập 2.3 ta có

$$a_k = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j b_j \sum_i \frac{x_i^{n-1-j+k}}{g'(x_i)} = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j b_j h_{k-j}.$$

Vậy, sử dụng hệ thức (5) giữa e_i và h_j ta thu được:

$$b_k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j a_j e_{k-j}. \tag{11}$$

Cụ thể

$$\begin{aligned}
&b_0 = a_0\\
&b_1 = a_0e_1 - a_1\\
&b_2 = a_0e_2 - a_1e_1 + a_2\\
&\dots\\
&b_{n-1} = a_0e_{n-1} - a_1e_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n-1}.
\end{aligned}$$

Ta cũng có cách mô tả khác cho $P(x)$ như sau:

$$\begin{aligned}
P(x) =& a_0(x^{n-1} - e_1x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}e_{n-1})\\
&+ a_1(x^{n-2} - e_1x^{n-3} + \ldots + (-1)^{n-2}e_{n-2})\\
&+ \ldots + a_{n-1}.
\end{aligned}$$

Bài toán 5.1. Chứng minh rằng với mỗi $k = 1, 2, \ldots, n-1$, giá trị của đa thức

$$c_k(x) := (-1)^k(x^k - e_1x^{k-1} + \ldots + (-1)^ke_k)$$

tại x_i là đa thức đối xứng thứ k theo $n-1$ biến x_j, $j \neq i$.

Từ bài toán 5.1 ta có công thức sau cho các hệ số λ_i:

$$\lambda_i = \frac{1}{g'(x_i)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k e_{n-k-1,(x_i=0)}.$$

Trong đó $e_{k,(x_i=0)}$ ký hiệu đa thức đối xứng thứ k theo các biến x_j, $j \neq i$ (nhận được từ e_k bằng cách cho $x_i = 0$). Ví dụ:

– $n = 2$. Ta có

$$\lambda_1 = \frac{a_1 - a_0x_2}{x_1 - x_2}, \quad \lambda_2 = \frac{a_1 - a_0x_1}{x_2 - x_1}.$$

– $n = 3$. Ta có

$$\lambda_i = \frac{a_0x_jx_k - a_1(x_j + x_k) + a_2}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)},$$

trong đó (i, j, k) là một hoán vị của $(1, 2, 3)$.

5.3. Sử dụng hàm sinh. Ta có thể dùng hàm sinh để thu được công thức (11) cho các hệ số của $P(x)$ như sau. Xét hàm sinh của dãy $(a_n)_{n\geq 0}$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Xét đa thức

$$\begin{aligned}
G(x) := x^ng(1/x) &= 1 - e_1x + \ldots + (-1)^ne_nx^n\\
&= \prod_i (1 - x_ix).
\end{aligned}$$

Hệ thức truy hồi suy ra:

$$A(x) \cdot G(x) = B(x),$$

với đa thức $B(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}$ được cho bởi

$$b_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j a_j e_{k-j}.$$

Vậy

$$A(x) = \frac{B(x)}{G(x)}.$$

Nhận xét rằng công thức trên cho hàm $A(x)$ đúng cả khi các giá trị x_i không phân biệt.

Nếu các giá trị x_i là phân biệt, do $\deg B(x) \leq n-1$, theo bài toán 2.2 ta có khai triển

$$\frac{B(x)}{G(x)} = \sum_i \frac{\lambda_i}{1 - x_ix}.$$

Nhân cả hai vế hệ thức trên với $(1 - x_ix)$ và thay $x = 1/x_i$ ta thu được

$$\lambda_i = \frac{B(1/x_i)}{\prod_{j\neq i}(1 - x_j/x_i)} = \frac{x_i^{n-1}B(x_i)}{g'(x_i)}.$$

Dễ thấy $x^{n-1}B(1/x) = P(x)$.

Bài toán 5.2. Ký hiệu x_n là số các số n chữ số trong đó chỉ có các chữ số $2, 3, 5, 7$ xuất hiện và 5 không đứng ngay sau 2. Chứng minh rằng với mọi $r \geq 1$ và $m \geq 2$, ta luôn có x_{rm-1} chia hết cho x_{m-1}.

Bài toán 5.3. Xét dãy (f_n):

$$f_n = af_{n-1} + bf_{n-2}, \quad f_0 = c, f_1 = d$$

và p là số nguyên tố, $p > 2$. Chứng minh rằng, theo modulo p:

– nếu $a^2 + 4b$ chính phương thì $f_p \equiv d$;

– nếu $a^2 + 4b$ không chính phương thì $f_p \equiv ca - d$;

–nếu $a^2 + 4b \equiv 0$ thì $2f_p \equiv ac$.

Bài toán 5.4. Cho $x_0 = 4$, $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 3$,

$$x_{n+4} = x_{n+1} + x_n.$$

Chứng minh rằng x_p chia hết p với mọi p nguyên tố.

6. Lời giải và gợi ý

6.1. Lời giải bài 2.5. Sử dụng hệ thức (5) và các kết quả trong ví dụ 3.1.

6.2. Lời giải bài 2.6. Từ hệ thức (6) ta có

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \\ &= g(x)\sum_i \frac{y_i}{g'(x_i)(x-x_i)}. \end{aligned}$$

Thay x bằng $1/x$ trong hệ thức trên và nhân theo vế với x^{n-1} ta thu được

$$\begin{aligned} x^nP(1/x) &= \prod_i (1-x_ix)\sum_i \frac{y_i}{g'(x_i)(1-x_ix)} \\ &= E(-x)\sum_{k=0}^{\infty} b_ix^k. \end{aligned}$$

Hay là

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} = E(-x)\sum_{k=0}^{\infty} b_ix^k.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

6.3. Lời giải bài 4.3. Cho $x = 1$ ta thu được

$$\sum_i a_i = -1. \tag{12}$$

Đạo hàm cả hai vế rồi cho $x = 1$ ta thu được

$$\sum_i a_ib_i = 0. \tag{13}$$

Đạo hàm hai lần cả hai vế rồi cho $x = 1$ ta thu được $\sum_i a_ib_i(b_i - 1) = 0$. Kết hợp với (13) ta thu được

$$\sum_i a_ib_i^2 = 0. \tag{14}$$

Tương tự ta thu được các đẳng thức với $k = 2, 3, \ldots, n-1$:

$$\sum_i a_ib_i^k = 0. \tag{15}$$

Đạo hàm n lần cả hai vế rồi cho $x = 1$ ta thu được

$$(-1)^n n! f(1) = \sum_i a_ib_i^n.$$

Vậy bài toán đưa về tính tổng $\sum_i a_ib_i^n$ theo các số n và b_i, biết rằng

$$\begin{cases} \sum_i a_i &= -1 \\ \sum_i a_ib_i &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \sum_i a_ib_i^{n-1} &= 0. \end{cases}$$

Xét $P(x) = \prod(x - b_i) = x^n - e_1x^{n-1} + \ldots + (-1)^n e_n$. Nhân theo vế với a_i ta có

$$a_ib_i^n - a_ie_1b_i^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_ie_n = 0.$$

Lấy tổng theo i suy ra

$$\sum_i a_ib_i^n = (-1)^n \prod_i b_i.$$

OLYMPIC TOÁN MÁT-XCƠ-VA

PHÙNG HỒ HẢI

Kỳ thi Olympic Toán học Mát–xcơ–va đầu tiên được tổ chức vào năm 1935, theo sáng kiến của Hiệp hội Toán học Mátxcơva bởi Bộ Giáo dục, Đại học Quốc gia Mát–xcơ–va và Sở Giáo dục Thành phố. Ban tổ chức Olympic này bao gồm những người như Pavel Aleksandrov, Sergei Sobolev, Lev Shnirelman, Andrey Kolmogorov, những nhà toán học lỗi lạc thời bấy giờ. Kể từ năm 1967, Olympic Toán học Mát–xcơ–va đã trở thành một cấp trong Olympic Toán toàn Nga (và sau này là toàn Liên bang).

Olympiad	Year	Chairperson	Olympiad	Year	Chairperson
1	1935	P. S. Alexandrov	23	1960	I. R. Shafarevich
2	1936	N. A. Glagolev	24	1961	V. A. Efremovich
3	1937	A. N. Kolmogorov	25	1962	N. V. Efimov
4	1938	A. G. Kurosh	26	1963	A. N. Kolmogorov
5	1939	L. A. Lusternik	27	1964	I. R. Shafarevich
6	1940	L. S. Pontryagin	28	1965	N. V. Efimov
7	1941	A. O. Gelfond	29	1966	A. A. Kronrod
8	1945	I. M. Gelfand	30	1967	V. V. Nemytsky
9	1946	S. A. Galpern	31	1968	N. S. Bakhvalov
10	1947	I. G. Petrovsky	32	1969	V. A. Efremovich
11	1948	V. V. Nemytsky	33	1970	V. M. Alekseev
12	1949	A. I. Markushevich	34	1971	I. R. Shafarevich
13	1950	M. A. Kreines	35	1972	B. P. Demidovich
14	1951	B. N. Delone	36	1973	A. A. Kirillov
15	1952	P. K. Rashevsky	37	1974	V. I. Arnold
16	1953	D. E. Menshov	38	1975	A. N. Kolmogorov
17	1954	S. V. Bakhvalov	39	1976	A. V. Arkhangelsky
18	1955	G. E. Shilov	40	1977	V. A. Uspensky
19	1956	E. B. Dynkin	41	1978	Yu. I. Manin
20	1957	O. A. Oleinik	42	1979	V. M. Tikhomirov
21	1958	V. G. Boltyansky	43	1980	A. S. Mishchenko
22	1959	E. M. Landis	44	1981-??	O. B. Lupanov

Các trưởng ban tổ chức MMO từ 1935 đến 1981.

Năm 1980, Hội Toán học Mát–xcơ–va bị loại ra khỏi ban tổ chức Olympic Toán học Mát–xcơ–va và Toàn Nga. Nikolai Konstantinov, một trong những người lãnh đạo phong trào Olympic, đã khởi xướng ra Kỳ thi giữa các thành phố (Tournament of the town) vào năm 1981, một kỳ thi Olympic về cơ bản giống với Olympic toán học Moscow, nhưng được tổ chức cho học sinh từ các thành phố khác nhau đến từ các quốc gia khác nhau.

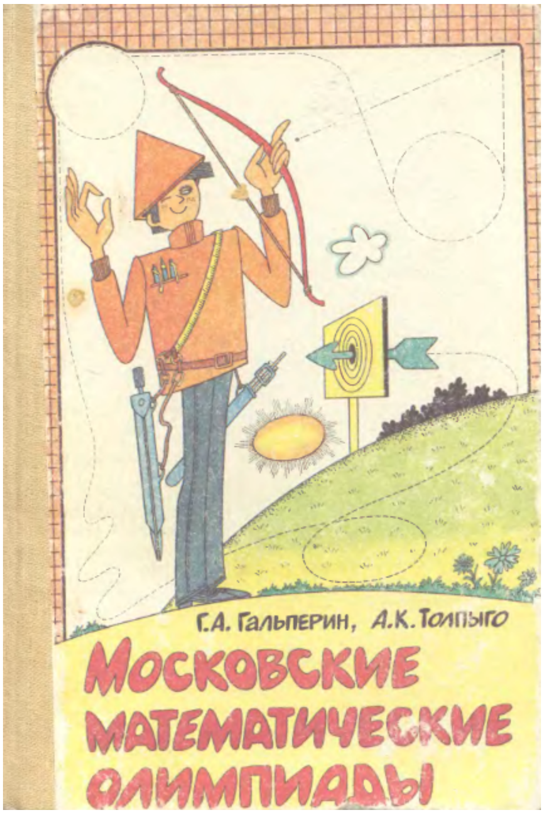
Trong thời kỳ Xô Viết, kỳ thi đã có những ảnh hưởng to lớn tới sự phát triển của nền toán học Xô Viết. Các nhà toán học lớn nhất của Liên Xô ở Mát–xcơ–va đều đã từng tham gia tổ chức kỳ thi với tư cách trưởng ban tổ chức.

Năm 1993, quyền tổ chức Olympic Toán Mát–xcơ–va được trả lại cho Hội Toán học Mát–xcơ–va. Năm 1994, Festival Toán bắt đầu được tổ chức – một phiên bản của kỳ thi dành cho học sinh lớp 6 – 7.

Năm 2008, sau quy định mới về Olympic toàn Nga, Olympic Mát–xcơ–va đã mất tư cách là một kỳ thi của Olympic toàn Nga và trở thành một Olympic độc lập.

Ngày nay, Olympic Toán Mát–xcơ–va là một kỳ thi Olympic mở, hơn 4.000 học sinh lớp 8 – 11 từ Mát–xcơ–va, St. Petersburg, Dolgoprudny, Kirov, Kharkov, Chernogolovka và các thành phố khác của không gian hậu Xô Viết tham gia.

Các bài toán tại MMO đã được tập hợp trong cuốn sách "Olympic Toán Mát–xcơ–va" xuất bản năm 1986 bởi các tác giả G. A. Galperin và A. C. Tolpygo. Cuốn sách này được dịch sang tiếng Anh đồng thời bổ sung nhiều đề thi và lời giải năm 1997.



Bìa cuốn sách "Olympic Toán Mát–xcơ–va, 1986.

Để bạn đọc có thể hiểu được phần nào mục đích, ý nghĩa, nguyên tắc cũng như phương thức tổ chức kỳ thi, cách chuẩn bị cho kỳ thi, chúng tôi xin trích giới thiệu Lời tựa của hai tác giả G. A. Galperin và A. C. Tolpygo trong cuốn sách nói trên[1].

Olympic toán có cần không?

Nhiều nhà toán học ở Nga không hài lòng với việc thi giải một số bài toán trong năm giờ đồng hồ tại một kỳ thi Olympic. Họ phản đối sự kết hợp giữa thể thao và khoa học này: nhiều người chiến thắng sau này đã không đạt được nhiều thành tích trong học tập như họ từng đoạt được trong loại hình "thể thao toán học" thực sự rất cụ thể này. Ngược lại, nhiều người không bao giờ có thể thành công dưới sức ép của một kỳ sau đó lại chứng tỏ họ là những người tài năng và hiệu quả nhất. Đúng là những vấn đề của toán học thực tế cần nhiều tháng và nhiều năm, chứ không phải mấy giờ, để có một bước tiến.

Tuy nhiên, đối với nhiều học sinh, ý tưởng về một cuộc thi rất hấp dẫn, và các em có thể tham gia chỉ vì mục đích của nó và từ đó khám phá xem Toán học (không chỉ là môn toán) có thể đa dạng và thú vị như thế nào. Sau đó, người ta có thể tìm thấy rất nhiều hoạt động toán học hiệu quả hơn so với các cuộc thi: đọc sách toán học chỉ là một. Nhưng cần phải có bước đầu tiên, và các kỳ thi Olympic, cũng như các bài toán kiểu Olympic trong các câu lạc bộ toán học ở trường, v.v., sẽ giúp thực hiện điều đó.

Ở Mát–xcơ–va, nhóm các giáo sư và nghiên cứu sinh từng khởi xướng các kỳ thi Olympic cũng đã thiết lập một truyền thống về "câu lạc bộ toán học" – các cuộc gặp gỡ hàng tuần của học sinh tại trường Đại học, nơi họ có thể tham dự một bài giảng, giải quyết một số vấn đề, báo cáo tiến trình của họ và nhận được lời khuyên. Nhiều vấn đề lần đầu tiên được đề xuất tại Olympic sau đó đã trở thành "văn hóa dân gian của các câu lạc bộ" và được dạy cho nhiều thế hệ.

Sử dụng những bài toán này theo cách này có lẽ sẽ tốt hơn nhiều, bởi vì học sinh có thể lựa chọn giữa: cạnh tranh với những người khác về số lượng bài toán được giải, hoặc chỉ giải một bài khó duy nhất. Do đó, các loại tâm lý khác nhau có thể được đáp ứng đúng cách mà không làm tổn thương bất kỳ ai. (Thất bại trong cuộc thi Olympic có thể là nguyên nhân gây ra rối loạn tâm lý nghiêm trọng trong toàn bộ cuộc sống tương lai.)

Làm gì khi không giải được một bài toán khó?

Bạn phải biết rằng một số bài toán trong kỳ thi Olympic rất khó. Một số bài thậm chí khó tới mức trong 5 giờ của kỳ thi, không một học sinh nào ở thành phố 10 triệu dân Moscow tìm ra được lời giải đúng. Một bài

[1] *Một số tiêu đề bên dưới do tác giả bài viết này đặt.*

toán như vậy có thể làm kinh ngạc ngay cả những người có bằng Tiến sĩ. Vì vậy, bạn không nên coi bản thân là không đủ năng lực nếu bạn không giải được bài toán ngay cả sau một tuần vật lộn.

Nhưng bạn không nên sợ hãi! Lời khuyên của chúng tôi: hãy đặt một bài toán khó sang một bên trong một thời gian thay vì vội vàng tìm đến lời giải ngay sau lần tấn công đầu tiên không thành công.

Thế nào là cách luyện tập hiệu quả nhất?

Không giống như bài tập trong sách giáo khoa thông thường, một bài toán thực sự cần phải được nghiền ngẫm: người ta phải tìm ra ít nhất một cách để giải quyết nó. Do đó, hãy bắt đầu với những bài toán dễ hơn. Đừng giải quyết tất cả các bài toán một cách tuần tự; đây không phải là bài tập về nhà, hãy chọn những bài toán bạn thấy thú vị. Nếu bạn không thể giải quyết bài toán, hãy thử một bàit toán tương tự nhưng dễ dàng hơn và giải quyết nó. Nếu bạn thậm chí không thể làm điều đó, hãy tham khảo lời giải. Nhưng cố gắng đừng "nuốt chửng" lời giải mà hãy đọc nó một cách chậm rãi, như một câu chuyện trinh thám mà bạn cố đoán diễn biến tiếp theo của suy nghĩ. Cuối cùng, hãy xem xét giải pháp "tổng thể": ý tưởng thúc đẩy chính của nó là gì và quan trọng nhất là làm cách nào để đạt được nó.

Để hiểu sâu hơn về một lời lời giải, hãy tự hỏi: ở giai đoạn nào của chứng minh, người ta đã sử dụng các dữ kiện đã cho? Liệu khẳng định có còn đúng nếu chúng ta nới lỏng hoặc bỏ qua một điều kiện? Khẳng định ngược lại có đúng không? Điều quan trọng không phải là số lượng các bài toán được giải quyết mà là sự hiểu biết sâu sắc về lời giải của chúng, những kiến thức mới thu lượm được.

Hãy nhớ rằng một câu trả lời, như "Có", "Không bao giờ" hoặc "Năm trăm linh năm", không phải là một lời giải, ngay cả khi chúng đúng. Bạn cần lời giải thích cho tất cả các khẳng định, nói một cách rõ ràng không là: hãy cố gắng giải thích mọi thứ.

Lời khuyên cho các bạn tham gia một kỳ thi Olympic

1. Đọc tất cả các bài toán được đưa ra và sắp xếp chúng theo thứ tự bạn sẽ giải. Hãy nhớ rằng thứ tự trong đề đưa ra thường phù hợp với độ khó của chúng theo quan điểm của người soạn đề.

2. Nếu bài toán có cách giải quá dễ, thì rất có thể bạn đã hiểu sai đề bài hoặc giải sai.

3. Nếu bạn không thể giải quyết vấn đề, hãy cố gắng đơn giản hóa nó: tạo các số nhỏ hơn, xem xét các trường hợp cụ thể, v.v. , vân vân, hoặc giải "ngược", dùng phản chứng, thay thế các số bởi các biến số, hoặc ngược lại, v.v..

4. Nếu không quyết định được liệu một khẳng định có đúng hay không, hãy thử lần lượt chứng minh và phủ định nó.

5. Đừng sa lầy vào một bài toán quá lâu: thỉnh thoảng hãy nghỉ ngơi và đánh giá vị trí của bạn. Nếu bạn có tiến triển trong lời giải, hãy tiếp tục, nếu không, hãy bỏ qua bài toán này một lát.

6. Nếu mệt mỏi, hãy thư giãn ngay lập tức (nhìn lên trời và chiêm ngưỡng sự vô tận hoặc đi dọc hành lang).

7. Sau khi giải quyết xong bài toán, hãy viết lời giải một cách nghiêm túc theo yêu cầu, không phải như một bức thư gửi cho bạn bè. Điều này sẽ giúp kiểm tra các lập luận và sẽ tao hứng khởi để giải các bài toán khác.

8. Mỗi ý tưởng nên được ghi lại ngay cả khi nó có vẻ hiển nhiên. Do đó, sẽ thuận tiện khi diễn đạt lời giải dưới dạng một loạt các phát biểu (bổ đề).

9. Học sinh hiếm khi đọc lại sản phẩm của chính mình để cố gắng đặt mình vào vị trí của ban giám khảo: liệu có ai có thể hiểu bất cứ điều gì bạn viết không?"

Một số bài toán trong Olympic toán học Mát–xcơ–va lần thứ LXXXIII

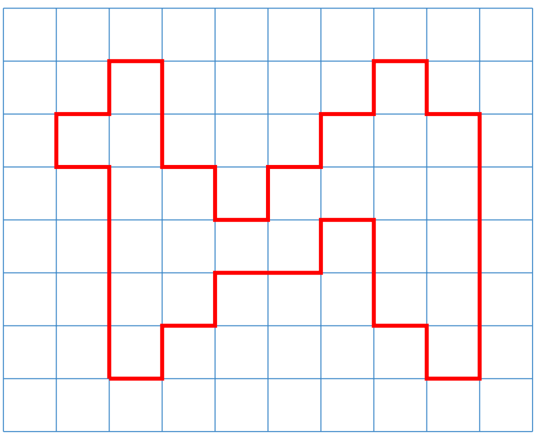
Lớp 6. Trên bảng viết các số $2, 3, 4, \ldots, 29, 30$. Bạn phải nộp một rup để xóa đi một số bất kỳ cùng với tất cả các ước số của nó. Hỏi số rub nhỏ nhất cần thiết để xóa đi tất cả các số.

Lớp 7. Hỏi hình dưới đây (có tên gọi là "lạc đà") có thể được chia

$a)$ dọc theo các đường lưới;

$b)$ không nhất thiết phải dọc theo các đường lưới

thành 3 phần, để từ đó có thể ghép thành một hình vuông?



Lớp 8. Cho một số tự nhiên N. Vera thực hiện các thao tác sau với nó: đầu tiên, nó cộng thêm 3 cho đến khi nhận được số chia hết cho 5 (nếu ban đầu N chia hết cho 5 thì không cần cộng thêm). Vera chia kết quả cho 5. Sau đó, cô ấy thực hiện các thao tác tương tự với số mới nhận được. Những số nào không thể được sử dụng để có được số 1 từ một quá trình như vậy?

Lớp 9. Từ sáu que tính với độ dài đôi một khác nhau có thể xếp được thành hai hình tam giác (ba que trong mỗi hình). Hỏi có thể luôn xếp được từ sáu que tính đó một tam giác mà các cạnh của nó lần lượt bao gồm một, hai và ba que không?

Lớp 10. Tồn tại hay không một đa giác nội tiếp 19 cạnh mà không có hai cạnh cùng độ dài và tất cả các góc được biểu thị bằng những số nguyên độ?

Lớp 11. Có $2n$ số nguyên liên tiếp được viết lên bảng. Mỗi bước, bạn có thể chia các số đã viết thành các cặp theo cách tùy ý và thay thế mỗi cặp bằng tổng và hiệu của các số trong cặp này (không cần thiết phải trừ số nhỏ hơn cho số lớn hơn; tất thay thế xảy ra cùng một lúc). Chứng minh rằng sẽ không bao giờ có $2n$ số liên tiếp trên bảng nữa.

Tài liệu tham khảo

[1] 60–odd YEARS of Moscow Mathematical Olympiads. Edited by D. Leites. Compilation and solutions by G. Galperin and A. Tolpygo with assistance of P. Grozman, A. Shapovalov and V. Prasolov.

[2] Г.А. Гальперин, А.К. Толпыго. Московские математические олимпиады. М., Просвещение, 1986. (Tiếng Nga).

GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày với các bạn lời giải của các bài toán trong kỳ thi Olympic Toán học vùng Cáp–ca năm học 2022 (Caucasus Math Olympiad), đăng trong số báo tháng 12/2022.

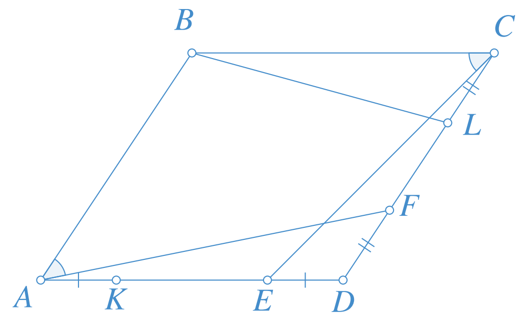
OC28. Cho trước các số nguyên dương a, b, c. Biết rằng $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$, và $b^2 - a - c + 1$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng $\frac{a}{2}$ và $\frac{c}{2}$ là các số chính phương.

Lời giải. Từ đầu bài ta có $b^2 = ac$, từ đó thu được $b^2 - a - c + 1 = (a-1)(c-1)$ là số nguyên tố. Như vậy một trong hai số a hoặc c phải bằng 2. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 2$, khi đó $b^2 = 2c$ như vậy b là chẵn. Đặt $b = 2k$, thì $c = 2k^2$. Như vậy ta có điều cần chứng minh: $\frac{a}{2} = 1$ và $\frac{c}{2} = k^2$.

OC29. Cho hình bình hành $ABCD$, các điểm E và F lần lượt nằm trên các đoạn AD và CD sao cho $\angle BCE = \angle BAF$. Các điểm K và L lần lượt nằm trên các đoạn AD và CD sao cho $AK = ED$ và $CL = FD$. Chứng minh rằng $\angle BKD = \angle BLD$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có

$$\begin{aligned}\angle ECD &= \angle BCD - \angle BCE \\ &= \angle BAD - \angle BAF = \angle FAD.\end{aligned}$$



Ta thu được hai tam giác ECD và FAD đồng dạng và từ đó có đẳng thức $\frac{ED}{FD} = \frac{DC}{DA}$. Mặt khác ta có $\frac{ED}{FD} = \frac{AK}{CL}$ và $\frac{DC}{DA} = \frac{AB}{CB}$. Do đó ta nhận được $\frac{AK}{CL} = \frac{AB}{CB}$, suy ra hai tam giác AKB và CLB đồng dạng.

Như vậy, ta có $\angle AKB = \angle CLB$ do đó nhận được $\angle BKD = \angle BLD$.

OC30. Peter viết ra 21 số nguyên dương đôi một phân biệt, mỗi số không lớn hơn 10^6. Đối với mỗi cặp số (a, b) được Peter viết ra, Nick viết số

$$F(a, b) = a + b - \gcd(a, b)$$

trên mảnh giấy của mình (ở đây $\gcd$ ký hiệu ước chung lớn nhất).

Chứng minh rằng một trong những số mà Nick viết khác với tất cả những số mà Peter viết.

Lời giải. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử mọi số mà Nick viết ra đều trùng với một trong các số mà Peter đã viết. Ta xếp các số Peter viết theo thứ tự tăng dần:

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{20} < a_{21}.$$

Khi đó, do $\gcd(a_{20}, a_{21}) \leq a_{20}$, ta có $F(a_{20}, a_{21}) = a_{20} + a_{21} - \gcd(a_{20}, a_{21}) \geq a_{21}$. Như vậy dấu bằng phải xảy ra, tức là $\gcd(a_{20}, a_{21}) = a_{20}$ ta suy ra a_{21} là bội của a_{20}.

Ta sẽ chứng minh a_{k+1} là bội của a_k với mọi $k = 1, \cdots, 20$. Thật vậy, với $k = 20$ điều này đúng. Giả sử trái lại, gọi $k < 20$ là số lớn nhất mà a_{k+1} không là bội của a_k. Khi đó, lý luận như trên ta có $F(a_k, a_{k+1}) > a_{k+1}$. Mặt khác, do a_{k+2} là bội của a_{k+1}, ta có

$$\begin{aligned} F(a_k, a_{k+1}) &= a_k + a_{k+1} - \gcd(a_k, a_{k+1}) \\ &< a_k + a_{k+1} < 2a_{k+1} \le a_{k+2}. \end{aligned}$$

Như vậy $F(a_k, a_{k+1})$ không trùng với bất kỳ số nào Peter viết ra, điều này mâu thuẫn với giả thiết phản chứng. Vậy ta chứng minh được a_{k+1} là bội của a_k với mọi $k = 1, \cdots, 20$.

Từ đây ta có

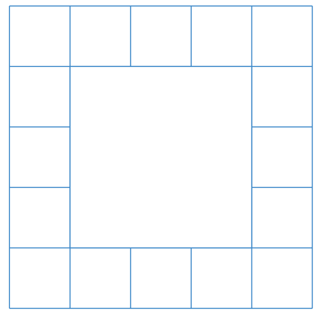
$$\begin{aligned} a_{21} &\ge 2a_{20} \ge 2^2 a_{19} \ge \cdots \ge 2^{19} a_2 \ge 2^{20} a_1 \\ &\ge 2^{20} > 10^6. \end{aligned}$$

Điều này trái với giả thiết, như vậy ta có điều cần chứng minh.

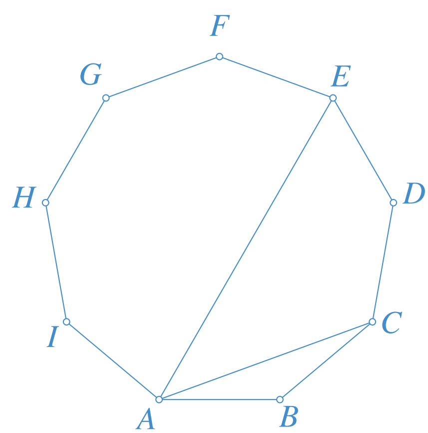
Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc ba bài toán trong kỳ thi toán của Đan Mạch mang tên nhà toán học Georg Mohr. Các bài toán này phù hợp với trình độ học sinh lớp $5-7$.

OC37. Một con ếch nhảy vào các số nguyên trên trục số. Nếu đang ở một số n chẵn, bước tiếp theo nó sẽ nhảy đến số $\frac{n}{2}$. Nếu đang ở một n số lẻ, nó sẽ nhảy đến số $n+5$. Tại một thời điểm nó nhảy vào số 25. Hỏi trước đó 3 bước nó có thể ở những vị trí nào?

OC38. Các số $1, 2, 3, \cdots, 16$ được đặt trong 16 ô vuông xung quanh một bảng ô vuông cỡ 5×5 như hình bên sao cho tổng của 5 số trên mỗi cạnh của hình vuông là bằng nhau. Tổng nhỏ nhất có thể có của bốn số trong các ô vuông ở góc là bao nhiêu?



OC39. Cho hình đa giác đều 9 cạnh $ABCDEFGHI$ như hình vẽ. Chứng minh rằng $AB + AC = AE$.



CÁC NHÀ TOÁN HỌC HY LẠP TỪ PYTHAGORAS TỚI EUCLID (Thế kỷ V đến thế kỷ III trước Công nguyên) Phần IV: Từ Plato đến Euclid

TẠ DUY PHƯỢNG[1]

S 1. Democritus xứ Abdera

Xã hội loài người đã và đang trải qua năm giai đoạn phát triển: Tiền sử (Prehistory), Cổ đại (Classical), Trung đại (Middle), Cận đại (Early Modern) và Hiện đại (Modern). *Thời đại anh hùng* thuộc vào thời kỳ Cổ đại. Trong Thời đại anh hùng, đặc biệt là ở Hy Lạp và La Mã, các vị thần và á thần, các anh hùng vĩ đại trong truyền thuyết (Achilles, Hercules, Agamemnon, ...) đã thực hiện những hành động anh hùng và tỏa sáng.

Thời đại anh hùng đã tạo ra nửa tá nhân vật vĩ đại trong toán học, trong số đó phải kể đến Democritus xứ Abdera (khoảng 460 – 370 TCN), ngày nay được tôn vinh như một người đề xướng học thuyết duy vật nguyên tử, nhưng đương thời ông cũng được tôn vinh như một nhà hình học. Ông được cho là đã đi du lịch nhiều hơn bất kỳ ai trong thời của mình – ông đã đến Athens, Ai Cập, Lưỡng Hà và có thể cả Ấn Độ – tiếp thu những gì học được, và những thành tựu của riêng ông trong toán học là xuất sắc. Ông đã viết một số công trình toán học, nhưng ngày nay không còn tồn tại.

Chìa khóa cho toán học của Democritus được tìm thấy trong học thuyết vật lý về nguyên tử. Ông lập luận, về mức độ nhỏ vô hạn và đa dạng vô hạn (về kích thước và hình dạng), các nguyên tử di chuyển không ngừng trong không gian trống.

Thuyết vật lý nguyên tử của Democritus có thể đã xuất phát từ thuyết nguyên tử hình học của Pythagoras, và không có gì ngạc nhiên khi các vấn đề toán học mà Democritus quan tâm chủ yếu là những thứ đòi hỏi cách tiếp cận đại lượng vô cùng bé. Ví dụ, người Ai Cập nhận thức được rằng thể tích của một kim tự tháp bằng một phần ba tích của đáy và chiều cao, nhưng chứng minh điều này gần như chắc chắn nằm ngoài khả năng của họ, vì nó đòi hỏi các kiến thức giải tích. Archimedes đã viết rằng kết quả này là của Democritus. Archimedes cũng gán cho Democritus định lý nói rằng thể tích của một hình nón bằng một phần ba thể tích của hình trụ tròn ngoại tiếp. Kết quả này có lẽ đã được Democritus coi là hệ quả của định lý về kim tự tháp, vì hình nón về cơ bản là một hình chóp có đáy là một đa giác đều có vô số cạnh.

---

[1] *Cộng tác viên Viện Toán học.*

Lý thuyết nguyên tử hình học của Democritus ngay lập tức đối đầu với nhiều vấn đề. Ví dụ: Nếu các phần liền kề có diện tích bằng nhau, thì vì tất cả các phần đều bằng nhau, tổng sẽ là một lăng trụ hoặc một hình trụ và không phải là một hình chóp hoặc một hình nón.

Mặt khác, nếu các phần liền kề không bằng nhau, tổng sẽ là một kim tự tháp có bậc hoặc một hình nón có bậc chứ không phải là hình có bề mặt nhẵn. Vấn đề này không giống như những khó khăn với số vô tỷ và với những nghịch lý của chuyển động.

Có lẽ, trong tác phẩm *On the Irrational* (Về Vô tỷ), Democritus đã phân tích những khó khăn gặp phải, nhưng không có cách nào để biết những nỗ lực của ông có thể đã đi theo hướng nào.

Democritus không được ưa chuộng trong hai trường phái triết học thống trị thế kỷ tiếp theo, của Plato và Aristotle, có thể họ đã khuyến khích việc coi thường các ý tưởng của Democritus.

Di sản toán học chính của Thời đại anh hùng có thể được tóm gọn trong sáu vấn đề: cầu phương hình tròn, nhân đôi thể tích hình lập phương, chia ba một góc, tỷ lệ giữa các đại lượng không thông ước, các nghịch lý về chuyển động, và phương pháp vô cùng bé.

Những bài toán này liên quan, ở mức độ nào đó, với những người cùng thời: Hippocrates, Archytas, Hippias, Hippasus, Zeno và Democritus.

Thời đại nào cũng có những tài năng, nhưng có lẽ không có thời đại nào có thể thực hiện một cuộc tấn công táo bạo vào rất nhiều các vấn đề toán học với nguồn tài nguyên phương pháp luận không đầy đủ như vậy. Vì lý do này mà thời kỳ từ Anaxagoras đến Archytas được gọi là "Thời đại anh hùng" trong toán học.

2. Eudoxus

Nhà toán học Hy Lạp lỗi lạc nhất trước Archimedes có lẽ là Eudoxus xứ Cnidos (408 – 355 TCN).

Ra đời khoảng năm 408 TCN ở Cnidos trên Biển Đen, ở tuổi 23, Eudoxus bắt đầu học hình học với Archytas xứ Tarentum, và học triết học và hùng biện với Plato ở Athens. Eudoxus, quá nghèo để sống ở Athens, đã ở trọ với giá rẻ mạt tại thị trấn bến cảng Piraeus, mỗi ngày ông phải đi bộ hai dặm (1 dặm = 1,6 km) đến Học viện Plato. Sau đó, ông đến Ai Cập, nơi ông ở lại trong 16 tháng. Ông kiếm sống bằng nghề dạy học, thành lập một trường học tại Cyzicus ở Tây Bắc Tiểu Á, trường đã thu hút rất nhiều học sinh. Vào năm 365 TCN, Eudoxus trở lại Athens cùng với một số lượng lớn các học trò. Ở đó, ông trở thành một đồng nghiệp của Plato. Eudoxus cũng đã mở một trường học ở Athens, có một thời gian là đối thủ cạnh tranh của Học viện Plato.

Eudoxus là nhà toán học và thiên văn học hàng đầu của thời đại mình. Eudoxus đã giải quyết những khủng hoảng của toán học thời đại ông. Ông có ba cống hiến cho toán học: lý thuyết tổng quát về tỷ lệ, bổ sung nhiều kết quả nghiên cứu về tỷ lệ vàng, và phát minh ra một quy trình được gọi là *phương pháp vét kiệt*.

Lý thuyết tổng quát về tỷ lệ

Việc khám phá ra số vô tỷ đã gây ra một sự khủng hoảng trong toán học, vì nó đã làm lung lay niềm tin về số (hữu tỷ) là bản chất của mọi thứ và làm lý thuyết về tỷ lệ của người Pythagoras không còn vững vàng. Hai đại lượng, chẳng hạn như đường chéo và cạnh của hình vuông, không thông ước, vì độ dài của chúng không có tỷ lệ là một số (hữu tỷ). Vậy thì làm thế nào để so sánh các tỷ lệ của các đại lượng vô ước?

Người Pythagoras đã sử dụng ý tưởng rằng bốn đại lượng theo tỷ lệ, $a : b = c : d$, nếu hai tỷ lệ $a : b$ và $c : d$ có cùng một cách trừ. Nghĩa là, số nhỏ hơn trong mỗi tỷ lệ có thể được bớt đi ở số lớn hơn cùng một số lần và phần dư trong mỗi trường hợp có thể được bớt đi cùng một số lần ở số nhỏ hơn, và phần dư mới lại có thể được bớt đi cùng một số lần ở phần dư đầu tiên, v.v.

Định nghĩa như vậy rất khó sử dụng (khi áp dụng cho số vô tỷ), do đó lý thuyết mới về tỷ lệ là một thành tựu rực rỡ của Eudoxus và nó đã được đưa vào Quyển V của *Cơ sở* của Euclid.

Một tuyên bố quan trọng của Euclid là các đại lượng được cho có một tỷ lệ với nhau nếu bội số của một trong hai số có thể vượt quá số kia.

Đây thực chất là tiên đề Archimedes – mà Archimedes gán cho Eudoxus. Khái niệm tỷ lệ của Eudoxus do đó loại trừ số không và làm rõ nghĩa độ lớn cùng loại là gì. Ví dụ: một đoạn thẳng không được so sánh theo tỷ lệ với diện tích; cũng như diện tích không được so sánh với thể tích.

Sau những nhận xét sơ bộ về tỷ lệ, Euclid đưa ra Định nghĩa 5 trong Quyển V của *Cơ sở* về phát biểu nổi tiếng của Eudoxus: *Các độ lớn được cho là theo cùng một tỷ lệ, cái thứ nhất so với cái thứ hai và cái thứ ba so với cái thứ tư, khi nếu lấy các bội của cái thứ nhất và cái thứ ba với cùng một số bất kỳ, và các bội của cái thứ hai và cái thứ tư với cùng một số bất kỳ, hai bội đầu sẽ cùng lớn hơn, cùng bằng hoặc cùng bé hơn hai bội sau một cách tương ứng* ([1], trang 80, xem thêm [2], trang 236).

Nghĩa là, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nếu và chỉ nếu với các số nguyên dương bất kỳ m và n, nếu $ma < nb$, thì $mc < nd$, hoặc nếu $ma = nb$, thì $mc = nd$, hoặc nếu $ma > nb$ thì $mc > nd$.

Định nghĩa của Eudoxus về sự bằng nhau của tỷ lệ không khác gì phép nhân chéo được sử dụng ngày nay cho phân số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nếu $ad = bc$ – một sự tương đương với việc đưa về mẫu số chung. Ví dụ, để chứng tỏ rằng $\frac{3}{6}$ bằng $\frac{4}{8}$ ta nhân 3 và 6 với 4, được 12 và 24, và nhân 4 và 8 với 3, thu được cùng một cặp số 12 và 24[2].

Cần lưu ý rằng, định nghĩa này không xa mấy so với định nghĩa về số thực ở thế kỷ 19 bởi lát cắt Dedekind, vì nó phân lớp số hữu tỷ $\frac{m}{n}$ thành hai lớp, theo $ma \le nb$ và $ma > nb$.

Vì có vô số số hữu tỷ, người Hy Lạp đã phải đối mặt với khái niệm mà họ muốn tránh – đó là tập hợp vô hạn – nhưng ít nhất dựa trên khái niệm về tỷ lệ của Eudoxus, họ đã có thể đưa ra các chứng minh thỏa đáng cho các định lý liên quan đến tỷ lệ.

Phương pháp vét kiệt

Cuộc khủng hoảng về vô ước đã được giải quyết thành công, nhờ vào định nghĩa của Eudoxus về tỷ lệ, nhưng vẫn còn một vấn đề chưa được giải quyết – so sánh cấu hình đường cong và đường thẳng.

Ở đây, có vẻ như Eudoxus đã cung cấp chìa khóa.

Các nhà toán học trước đây dường như đã có ý mô tả các hình đa giác nội tiếp và ngoại tiếp các hình cong và tiếp tục tăng vô hạn số cạnh, nhưng họ đã không biết cách lập luận, vì khái niệm giới hạn là chưa rõ ràng vào thời điểm ấy.

Theo Archimedes, chính Eudoxus là người đã cung cấp bổ đề hiện mang tên Archimedes – đôi khi được gọi là tiên đề về tính liên tục – được dùng làm cơ sở cho phương pháp vét kiệt, tương đương Hy Lạp của phép tính tích phân.

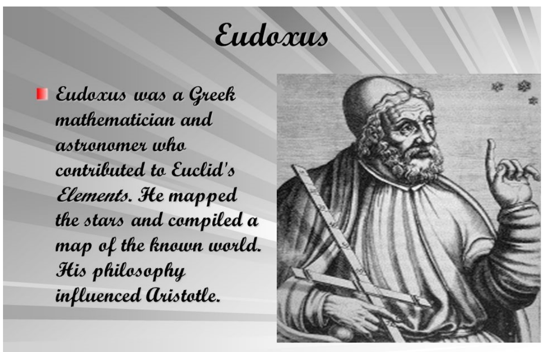
Bổ đề (hoặc tiên đề) Eudoxus nói rằng hai đại lượng có một tỷ số (nghĩa là, không bằng 0) nếu có thể tìm thấy một nhân tử để đại lượng này sẽ vượt quá đại lượng kia. Có thể phát biểu điều này trên ngôn ngữ hiện đại như sau: Cho $M > \varepsilon$ và một số $0 < r < 1$. Khi

[2] *Ở đây chúng ta đã đổi vai trò của "cái thứ hai" và "cái thứ ba" trong định nghĩa của Eudoxus – Pi.*

ấy tồn tại số $n \in \mathbb{N}$ sao cho $M(1-r)^n < \varepsilon$, tức là $\lim_{n\to\infty} M(1-r)^n = 0$.

Khẳng định này đã loại trừ lập luận mơ hồ về các đoạn thẳng không thể phân chia hoặc các số nhỏ cố định, đôi khi duy trì trong tư tưởng Hy Lạp.

Phương pháp vét kiệt được đề xuất bởi Eudoxus sau đó đã được Archimedes phát triển thành một công cụ mạnh mẽ để xác định diện tích hình phẳng, diện tích bề mặt và thể tích đường cong – một tiền thân quan trọng của phép toán tích phân.



Thiên văn của Eudoxus

Eudoxus không chỉ là một nhà toán học. Ông còn được biết đến như là cha đẻ của khoa học thiên văn. Plato được cho là đã cố gắng đưa ra một biểu diễn hình học về chuyển động của Mặt Trời, Mặt Trăng và năm hành tinh đã biết. Rõ ràng là người ta ngầm cho rằng các chuyển động là hợp nhất của các chuyển động tròn đều. Mặc dù có những hạn chế như vậy, Eudoxus đã có thể cung cấp cho mỗi thiên thể trong số bảy thiên thể một biểu diễn thỏa đáng thông qua một tổ hợp các quả cầu đồng tâm với tâm là Trái Đất và với các bán kính khác nhau, mỗi quả cầu quay đều quanh một trục cố định đối với bề mặt của hình cầu lớn hơn tiếp theo. Với mỗi hành tinh thì Eudoxus đưa ra một hệ thống mà những người kế vị của ông biết đến là "Hình cầu đồng tâm". Những sơ đồ hình học này, được kết hợp bởi Aristotle vào vũ trụ học, đã thống trị tư tưởng trong gần 2000 năm.

Eudoxus, không nghi ngờ gì, là nhà toán học có năng lực nhất Thời kỳ Hy Lạp hóa (Hellenic period, khoảng 507 – 323 trước Công nguyên), nhưng tất cả các tác phẩm của ông đã bị thất lạc. Trong thiên văn học, bằng sự kết hợp của các chuyển động tròn, Eudoxus đã có thể mô tả chuyển động của các hành tinh trong các quỹ đạo lặp lại dọc theo một đường cong được gọi là đường *hippopede*, hoặc vòng kiềng ngựa. Đường cong này, giống như một hình số tám trên một hình cầu, là một trong số ít các đường cong mới mà người Hy Lạp đã tìm ra. Vào thời điểm đó, chỉ có hai phương tiện xác định các đường cong: (1) thông qua sự kết hợp của các chuyển động đều và (2) như các giao điểm của các bề mặt hình học quen thuộc.

Proclus, khoảng 800 năm sau Eudoxus, nói rằng Eudoxus đã thêm nhiều định lý tổng quát trong hình học và đã áp dụng phương pháp phân tích của Plato để nghiên cứu tỷ lệ vàng, nhưng cống hiến lớn nhất của Eudoxus vẫn là lý thuyết về tỷ lệ và phương pháp vét kiệt.

3. Phép suy luận suy diễn và Đại số hình học

Thales có lẽ là người đầu tiên nhận thấy nhu cầu về một phương pháp suy luận hợp lý chặt chẽ. Một số nhà nghiên cứu cho rằng, hình thức suy luận suy diễn hình thành muộn hơn nhiều – thậm chí có thể là vào đầu thế kỷ thứ tư TCN, sau khi phát hiện ra số vô tỷ.

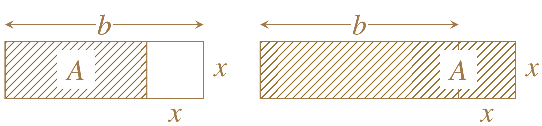
Các đề xuất khác tìm nguyên nhân bên ngoài toán học. Một ví dụ là suy luận suy diễn có thể đã xuất phát từ logic, trong nỗ lực thuyết phục một phản đối của một kết luận bằng cách tìm kiếm các tiền đề mà từ đó kết luận nhất thiết phải tuân theo.

Liệu suy luận có được đưa vào toán học vào thế kỷ VI TCN hay thế kỷ IV TCN và liệu tính không thông ước đã được phát hiện trước đó hoặc sau năm 400 TCN? Không thể nghi ngờ rằng toán học Hy Lạp đã trải qua những thay đổi mạnh mẽ vào thời của Plato. Sự phân đôi giữa số (number) và độ lớn liên tục (continuous magnitude) đòi hỏi một cách tiếp cận mới đối với Đại số Babylon mà người Pythagoras đã kế thừa.

Các bài toán cũ trong đó, cho tổng và tích các cạnh của hình chữ nhật, các thứ nguyên được yêu cầu phải được xử lý khác với thuật toán số của người Babylon.

Một "đại số hình học" phải thay thế cho "đại số số học" cũ và trong đại số mới này không thể thêm cạnh vào diện tích hoặc thêm diện tích vào thể tích.

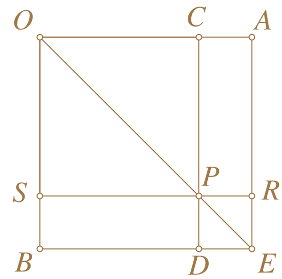
Kể từ bây giờ, phải có một sự đồng nhất nghiêm ngặt của các thuật ngữ trong các phương trình, thí dụ, $xy = A, y \pm x = b$, với diễn giải về mặt hình học. Để tìm y và x ta phải xây dựng trên một cạnh cho trước b một hình hình chữ nhật có chiều rộng x chưa biết sao cho diện tích của hình chữ nhật vượt quá diện tích A đã cho so với hình vuông x^2 (trường hợp $xy = A, y + x = b$, Hình 1 bên trái) hoặc rút ngắn diện tích A bởi hình vuông x^2 (trường hợp $xy = A, y - x = b$, Hình 1 bên phải).



Hình 1.

Theo cách này, người Hy Lạp đã xây dựng lời giải của phương trình bậc hai bằng một quá trình được gọi là "ứng dụng của diện tích", một phần của đại số hình học được trình bày chi tiết trong *Cơ sở* của Euclid.

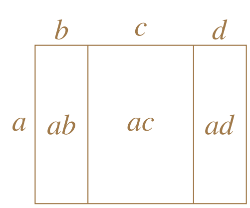
Hơn nữa, sử dụng các đoạn thẳng dẫn đến việc tránh các tỷ lệ, trong chừng mực có thể, trong toán sơ cấp. Thí dụ, phương trình tuyến tính $ax = bc$ được coi là một đẳng thức của các diện tích ax và bc, thay vì theo tỷ lệ – một đẳng thức giữa hai tỷ số $a : b$ và $c : x$. Do đó, khi xây dựng tỷ lệ thứ tư, x trong trường hợp này, thông thường ta dựng một hình chữ nhật $OCDB$ với các cạnh $b = OB$ và $c = OC$ (Hình 2) và sau đó dọc theo OC đặt $OA = a$. Được hình chữ nhật $OAEB$ và vẽ đường chéo OE cắt CD tại P. Bây giờ rõ ràng CP là đoạn x mong muốn, và hình chữ nhật $OARS$ có diện tích bằng hình chữ nhật $OCDB$.



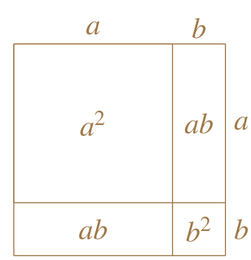
Hình 2.

Đại số hình học Hy Lạp là quá mức nhân tạo và khó khăn đối với các độc giả hiện đại. Tuy nhiên, nó có vẻ là một công cụ tiện lợi cho những người đã sử dụng nó và trở nên thành thạo trong việc xử lý các hoạt động của nó.

Luật phân phối $a(b+c+d) = ab+ac+ad$ chắc chắn là rõ ràng hơn đối với một học giả Hy Lạp hơn là sinh viên ngày nay, vì trước đây có thể dễ dàng hình dung các diện tích của hình chữ nhật trong định lý này, nói một cách đơn giản rằng hình chữ nhật trên a và tổng của các đoạn b, c, d bằng tổng các hình chữ nhật trên a và mỗi các cạnh b, c, d được lấy riêng (Hình 3).

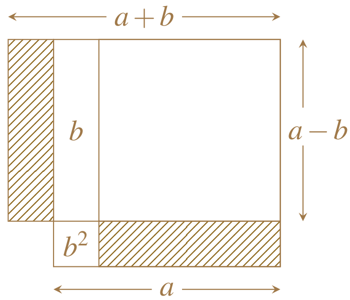


Hình 3



Hình 4

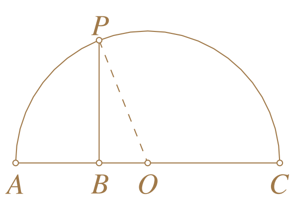
Một lần nữa, hệ thức $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ trở nên hiển nhiên từ sơ đồ cho thấy ba hình vuông và hai hình chữ nhật bằng nhau trong Hình 4; và hiệu của hai hình vuông $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ có thể được minh họa tương tự, như trong Hình 5.



Hình 5.

Tổng, hiệu, tích và thương của các đoạn thẳng có thể dễ dàng được xây dựng bằng một thước thẳng và một com–pa.

Căn bậc hai cũng không gặp khó khăn trong đại số hình học. Muốn tìm một đoạn x sao cho $x^2 = ab$, ta chỉ cần làm theo cách có thể tìm thấy trong sách giáo khoa hình học ngày nay: Lấy đoạn thẳng ABC, trong đó $AB = a$ và $BC = b$ (Hình 6). Với AC là đường kính, người ta dựng một nửa hình tròn (tâm O) và tại B dựng BP vuông góc với AC. BP là đoạn x cần tìm.



Hình 6.

Điều thú vị ở đây là, Euclid đã chỉ ra, có thể tránh tỷ lệ bằng cách sử dụng các diện tích.

Nếu trong Hình 6 đặt $PO = AO = CO = r$ và $BO = s$, khi ấy ta có

$$x^2 = r^2 - s^2 = (r - s)(r + s) = ab.$$

4. Toán học và nghệ thuật khai phóng

Archytas được coi là một trong số các nhà toán học của Thời đại anh hùng, nhưng theo một nghĩa nào đó, ông là một nhân vật chuyển tiếp trong toán học thời Plato.

Archytas là một trong những người cuối cùng của trường phái Pythagoras, theo cả nghĩa đen và nghĩa bóng. Ông vẫn còn tin rằng số là quan trọng nhất trong cuộc đời và trong toán học.

Archytas được cho là đã thiết lập *bộ tứ* (Quadrivium) – số học, hình học, âm nhạc và thiên văn – làm cốt lõi của một nền giáo dục khai phóng, và ở đây quan điểm của ông đã thống trị phần lớn tư tưởng sư phạm cho đến ngày nay.

Bảy nghệ thuật khai phóng được công nhận trong gần hai thiên niên kỷ, được tạo thành từ bộ tứ Archytas và bộ ba ngữ pháp, tu từ học và phép biện chứng của Zeno. Do đó, người ta có quyền cho rằng các nhà toán học của Thời đại anh hùng có tác động mạnh mẽ tới hướng đi trong truyền thống giáo dục phương Tây, đặc biệt là lan truyền qua các triết gia của thế kỷ thứ tư TCN.

5. Autolycus xứ Pitane (360 – 290 TCN)

Một vài năm sau Dinostratus và Menaechmus, vào nửa sau của thế kỷ thứ tư TCN đã xuất hiện một nhà thiên văn học, người được coi là đã viết ra tác phẩm toán học Hy Lạp cổ nhất.

Autolycus xứ Pitane là tác giả của chuyên luận *Về hình cầu chuyển động* (On the Moving Sphere), là một phần của bộ sưu tập được gọi là *Thiên văn học nhỏ* (Little Astronomy), được sử dụng rộng rãi bởi các nhà thiên văn học cổ đại. *Về hình cầu chuyển động* không phải là một tác phẩm sâu sắc và có lẽ không phải là một tác phẩm nguyên bản, vì nó bao gồm rất ít các định lý cơ bản về hình học của các quả cầu, cần thiết trong thiên văn học. Ý nghĩa chính của nó nằm ở chỗ nó chỉ ra rằng hình học Hy Lạp đã đạt đến dạng mà chúng ta coi là điển hình của thời đại cổ điển. Các định lý được phát biểu và chứng minh rõ ràng. Hơn nữa, tác giả sử dụng mà không dẫn nguồn các định lý mà ông coi là quen thuộc. Do đó, có thể kết luận rằng tại Hy Lạp vào thời của Autolycus, khoảng năm 320 trước Công nguyên, đã tồn tại một cuốn sách giáo khoa hình học hoàn chỉnh.

6. Aristotle

Như Eudoxus, Aristotle (384 – 322 TCN) là một học giả uyên bác nhất và là một học trò của Plato và, giống như Menaechmus, một gia sư của Alexander Đại đế.

Aristotle trước hết là một triết gia và một nhà sinh vật học, nhưng ông rất say mê với các hoạt động toán học.

Ông có thể đã đóng một vai trò quan trọng trong những cuộc tranh cãi ở Học viện Plato, vì ông đã viết một luận thuyết có tựa đề *Về những đường không thể chia cắt* (On Indivisible Lines). Các học giả hiện đại đặt câu hỏi về tính xác thực của tác phẩm này, nhưng trong mọi trường hợp, nó có lẽ là kết quả của các cuộc thảo luận được thực hiện trong thời trẻ của Aristotle.

Luận điểm của luận thuyết Aristotle là học thuyết về sự bất phân định được tán thành bởi Xenocrates, người kế nhiệm Plato với tư cách là người đứng đầu Học viện.

Xenocrates nghĩ rằng khái niệm về tính không phân chia hoặc vô cùng bé cố định của chiều dài hoặc diện tích hoặc thể tích sẽ giải quyết các nghịch lý dai dẳng của toán học và triết học, chẳng hạn những nghịch lý của Zeno.

Aristotle cũng dành nhiều sự quan tâm cho những nghịch lý của Zeno, nhưng ông đã tìm cách bác bỏ chúng trên cơ sở ý nghĩa thông thường. Ông do dự theo dõi các nhà toán học Plato về những điều trừu tượng và kỹ thuật trong thời đó và không có đóng góp ấn tượng.

Thông qua nền tảng của logic và sự ám chỉ thường xuyên của ông đến các khái niệm toán học và các định lý trong các công trình đồ sộ của mình, Aristotle có thể được coi là đã đóng góp vào sự phát triển của toán học.

Thảo luận của trường phái Aristotle về vô hạn đã ảnh hưởng đến nhiều tác giả sau này về nền tảng của toán học, nhưng tuyên bố của Aristotle rằng các nhà toán học "không cần vô hạn hoặc sử dụng nó" (do not need the infinite or use it) nên được so sánh với những khẳng định của thời đại chúng ta rằng cái vô hạn là thiên đường của nhà toán học.

Những phân tích của Aristotle về vai trò của các định nghĩa và giả thuyết trong toán học mang một ý nghĩa tích cực hơn.

Năm 323 TCN, Alexander Đại đế đột ngột qua đời, và đế chế của ông sụp đổ. Các tướng lĩnh của ông đã phân chia lãnh thổ mà người chinh phục trẻ tuổi đã cai trị. Ở Athens, nơi Aristotle từng bị coi là người nước ngoài, nhà triết học thấy mình không được ưa chuộng vì giờ đây người bảo trợ mạnh mẽ của ông đã chết. Ông rời Athens và qua đời vào năm sau đó.

Trên khắp thế giới Hy Lạp, trật tự cũ đã thay đổi, về mặt chính trị và văn hóa. Dưới thời Alexander, đã có sự pha trộn dần dần của phong tục và kiến thức của người Hy Lạp với phương Đông, vì vậy đã thích hợp hơn để nói về nền văn minh thời kỳ Hy Lạp hóa mới hơn, thay vì Hy lạp cổ điển.

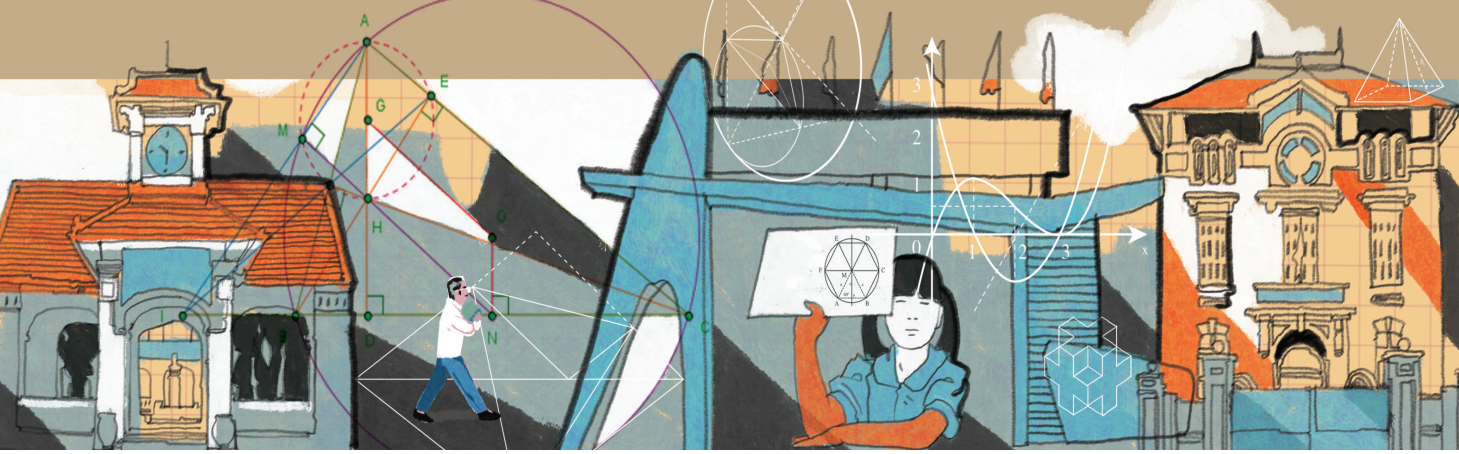
Hơn nữa, thành phố mới Alexandria, được thành lập bởi kẻ chinh phục thế giới, bây giờ đã thay thế Athens làm trung tâm toán học thế giới.

Trong lịch sử của nền văn minh, do đó, có phong tục phân biệt hai thời kỳ trong thế giới Hy Lạp, với các cái chết gần như đồng thời của Aristotle và Alexander, như một vạch phân chia tiện lợi. Phần trước được gọi là Thời đại Hy Lạp cổ điển (Hellenic), về sau là Thời đại Hy Lạp hóa (Hellenistic) hoặc Alexandria.

Tài liệu trích dẫn:

[1] Uta C. Merzbach and Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, Third Edition, John Wiley & Sons, 2011, pp. 57 – 89.

[2] Euclid, *Cơ sở của Hình học*, Nhà xuất bản Trí thức, 2016, 350 trang.



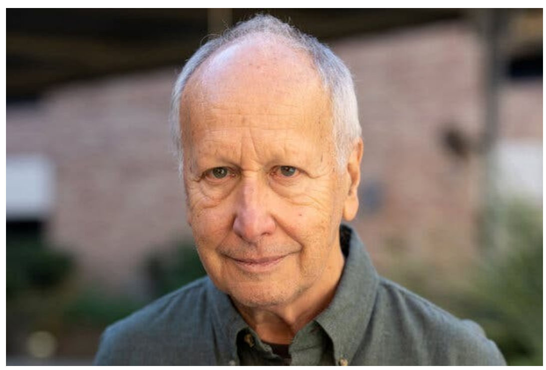
GIẢI THƯỞNG ABEL NĂM 2023[1]

NGƯỜI DỊCH: PHÙNG HỒ HẢI VÀ NGÔ TRUNG HIẾU

Luis A. Caffarelli được trao tặng Giải thưởng Abel 2023 vì "những đóng góp đầy sức ảnh hưởng vào lý thuyết chính quy cho các phương trình đạo hàm riêng phi tuyến bao gồm các bài toán không có biên và phương trình Monge–Ampère.".

Phương trình vi phân là công cụ mà các nhà khoa học sử dụng để dự đoán hành vi của thế giới vật chất. Các phương trình này liên hệ một hoặc nhiều hàm số chưa biết và các đạo hàm của chúng. Các hàm số này thường đại diện cho các đại lượng vật lý, các đạo hàm đại diện cho tỷ lệ thay đổi của chúng và phương trình vi phân định nghĩa một mối quan hệ giữa hai đại lượng này. Những mối quan hệ như vậy là phổ biến; do đó, các phương trình vi phân đóng một vai trò nổi bật trong nhiều ngành bao gồm kỹ thuật, vật lý, kinh tế, và sinh học.

Các phương trình đạo hàm riêng phát sinh một cách tự nhiên như các quy luật của Tự nhiên, để mô tả các hiện tượng khác nhau như dòng chảy của nước hoặc sự phát triển của dân số. Những phương trình này luôn là khởi nguồn của những nghiên cứu mạnh mẽ kể từ thời của Isaac Newton và Gottfried Leibniz. Tuy nhiên, bất chấp những nỗ lực đáng kể của nhiều nhà toán học trong nhiều thế kỷ, các câu hỏi cơ bản liên quan đến sự tồn tại, tính duy nhất, tính chính quy, và tính ổn định của các nghiệm của một số phương trình chủ chốt vẫn chưa được giải quyết.



Bản quyền ảnh: Nolan Zunk, Đại học Texas ở Austin.

Kết quả chuẩn mực về kỹ thuật

Rất ít nhà toán học đương đại khác có đóng góp nhiều hơn so với Luis Caffarelli, một người Mỹ gốc Argentina, cho sự hiểu biết

[1] *Theo thông báo Viện Hàn lâm Khoa học và Văn học Na Uy. https://abelprize.no/article/2023/luis-caffarelli-awarded-2023-abel-prize*

của chúng ta về phương trình đạo hàm riêng. Ông đã đưa ra những kỹ thuật mới tài tình, thể hiện cái nhìn sáng suốt về hình học và tạo ra nhiều kết quả có sức ảnh hưởng. Trong khoảng thời gian hơn 40 năm, ông đã có những đóng góp đột phá cho lý thuyết về tính chính quy. Tính chính quy – hay độ trơn – của các nghiệm là thiết yếu trong những tính toán số, và sự vắng mặt của tính chính quy là thước đo mức độ hoang dã mà Tự nhiên có thể hành xử.

Helge Holden, chủ tịch Ủy ban Abel, cho biết: "Các định lý của Caffarelli đã thay đổi hoàn toàn hiểu biết của chúng ta về các lớp phương trình đạo hàm riêng phi tuyến với nhiều ứng dụng. Các kết quả là chuẩn mực về mặt kỹ thuật, ảnh hưởng tới nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học và các ứng dụng của nó."

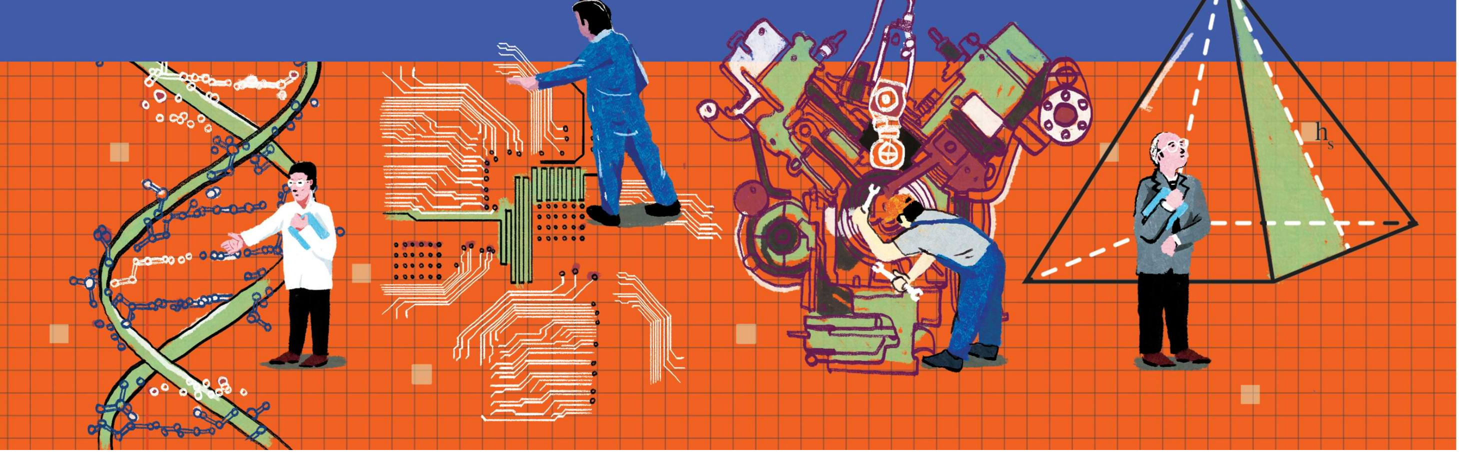
Phần lớn công việc của Luis A. Caffarelli liên quan đến các bài toán không có biên. Ví dụ, hãy xem xét vấn đề băng tan thành nước. Ở đây biên tự do là giao diện giữa nước và băng; nó là một phần của ẩn số cần được xác định. Một ví dụ khác là nước thấm qua một môi trường xốp – một lần nữa, giao diện của nước và môi trường cần được hiểu rõ. Caffarelli đã đưa ra các giải xuyên thấu cho những vấn đề này với các ứng dụng cho các giao diện rắn–lỏng, dòng phun và tạo bọt, dòng khí và dòng chảy chất lỏng trong môi trường xốp, cũng như toán tài chính.

Ảnh hưởng to lớn đến lĩnh vực

Caffarelli là một nhà toán học có hiệu suất đặc biệt, với hơn 130 cộng sự và hơn 30 nghiên cứu sinh trong khoảng thời gian 50 năm.

Helge Holden nói: "Nhờ kết hợp sự hiểu biết sáng suốt về hình học với các công cụ và phương pháp giải tích khéo léo, ông [Caffarelli] đã và tiếp tục có ảnh hưởng to lớn đến lĩnh vực này."

Luis A. Caffarelli đã giành được nhiều giải thưởng, trong đó có Giải thưởng Leroy P. Steele cho Thành tựu Trọn đời về Toán học, Giải thưởng Wolf và Giải thưởng Shaw.



TÌM HIỂU VỀ HIỆN TƯỢNG CỘNG HƯỞNG

NGUYỄN HOÀNG VŨ[1]

Hiện tượng cộng hưởng là một nội dung kiến thức quan trọng trong chương trình vật lý lớp 12. Nó xảy ra khi tác động từ bên ngoài có một tần số phù hợp làm biên độ của dao động bị tăng vọt. Trong bài viết này, chúng ta hãy cùng tìm hiểu về quá trình phát hiện của hiện tượng cộng hưởng cũng như một số ứng dụng thú vị của nó.

1. Mô hình cho thủy triều và bài toán dao động cưỡng bức

Hiện tượng cộng hưởng xuất hiện lần đầu tiên trong các tài liệu khoa học khi Galileo tiến hành giải thích về hiện tượng mang tính chu kỳ của thủy triều dựa trên các quan sát về dao động. Ông nhận thấy rằng một tác động yếu có thể làm tăng mạnh biên độ của một dao động nếu tác động này có một tần số phù hợp. Một ví dụ mà Galileo đưa ra là việc một quả chuông sau khi được một người tiến hành rung thì dây thừng của nó có thể nhấc bổng tận 6 người lên. Sự tăng biên độ nhờ các tác động mang tính chu kỳ cũng có thể thấy được ở con lắc đơn trong đồng hồ hay các nhạc cụ dây.

Galileo đưa ra một nhận định đúng đắn rằng mỗi một hệ dao động có một tần số dao động tự nhiên (dao động tự do). Tuy nhiên, ông lại cho rằng nó chỉ có thể có thể dao động với tần số này mà thôi (nhận định này không đúng). Sai lầm trên là một trong những nguyên nhân khiến Galileo kết luận rằng thủy triều được gây ra bởi chuyển động của Trái Đất trong khi thực tế thì Mặt Trăng có vai trò quan trọng liên quan đến chu kỳ của hiện tượng này.

Phải đến thế kỷ 18, tính chu kỳ của thủy triều lại được tiếp tục nghiên cứu bởi Euler. Ông đã tiến hành giải phương trình dao động với ngoại lực cũng là một hàm có chu kỳ. Bằng các công cụ giải tích, Euler đã tìm ra rằng nghiệm của trường hợp này là tổng của hai dao động điều hòa với hai tần số khác nhau. Tần số thứ nhất phụ thuộc vào các tham số cấu tạo của hệ dao động và tần số thứ hai là tần số của ngoại lực. Euler giải được nghiệm đúng cho trường hợp hai tần số này bằng nhau và công thức nghiệm của ông cũng cho thấy sự tăng biên độ tuyến tính theo thời gian (tức khi cộng hưởng xảy ra). Tuy vậy, Euler không tiếp tục đi sâu vào phương diện vật lý của vấn đề này, ngoài việc nhắc đến sự liên hệ giữa nó và thủy triều. Trong các công trình sau này về cơ học, Euler cũng không quay lại bài toán trên, có thể là do ông chỉ xem nó như một câu hỏi toán học thú vị mà thôi.

Đến thế kỷ 19, Thomas Young, sau khi tiến hành thí nghiệm chứng minh bản chất sóng

---

[1] *Hà Nội.*

của ánh sáng năm 1802, cũng bắt đầu nghiên cứu về mô hình của thủy triều. Ông tiến hành giải phương trình dao động dưới tác động của ngoại lực có chu kỳ giống như Euler nhưng thêm vào thành phần biểu diễn lực cản. Đồng thời, Young cũng đưa ra thuật ngữ dao động cưỡng bức để gọi tên trường hợp dao động này. Tuy nhiên, ông cũng vẫn chủ yếu tập trung vào giải thích tính chu kỳ của thủy triều mà không tiến hành mở rộng sang các ứng dụng cơ học khác. Khi các mô hình mới trong không gian 3 chiều được đưa ra cho thủy triều thì mô hình dao động cưỡng bức của con lắc không còn được sử dụng nữa và nghiên cứu này của Young cũng không được chú ý đến. Đột phá thật sự chỉ xảy ra vài thập kỷ sau với các nghiên cứu của Helmholtz về sự cộng hưởng của sóng âm.

2. Helmholtz và sự cộng hưởng của sóng âm

Hermann von Helmholtz (1821 – 1894).

Hermann von Helmholtz, sinh năm 1821 tại Postdam, nay thuộc Đức, là con trai duy nhất của một giáo viên. Ông muốn học vật lý nhưng do hoàn cảnh tài chính nên theo học quân y bằng học bổng chính phủ. Trong thời gian làm bác sĩ phẫu thuật cho quân đội, Helmholtz vẫn có những đóng góp quan trọng trong vật lý, đặc biệt là sự thiết lập định luật bảo toàn năng lượng. Từ năm 1849, ông giữ vị trí giáo sư ngành sinh lý học ở nhiều đại học khác nhau cho đến khi trở thành giáo sư vật lý tại đại học Humboldt, Berlin năm 1871.

Helmholtz bắt đầu các nghiên cứu về âm thanh vào năm 1856, dựa trên các ý tưởng toán học của Fourier. Trước đó, khi giải bài toán về phương trình truyền nhiệt, Fourier đã đưa ra phương pháp biểu diễn một hàm số tuần hoàn dưới dạng tổng của các sóng hình sine. Tần số, pha, và biên độ của mỗi sóng trong tổng này phụ thuộc vào các điều kiện ban đầu và điều kiện biên của bài toán. Cách biểu diễn này còn được biết đến với tên gọi chuỗi Fourier.

Hình 1. Một thiết bị cộng hưởng Helmholtz.

Phương pháp của Fourier giúp Helmholtz đưa ra ý tưởng rằng các âm thanh phức tạp có thể được đơn giản hóa thành tổng của các sóng âm đơn giản hơn với các tần số khác nhau. Để tiến hành nghiên cứu vấn đề này, ông đã chế tạo các dụng cụ thí nghiệm được gọi là thiết bị cộng hưởng Helmholtz. Mỗi một thiết bị cộng hưởng Helmholtz gồm một quả cầu kim loại hoặc thủy tinh có lỗ hở ở một đầu. Đầu còn lại có một núm nhỏ để người sử dụng có thể gắn vào tai.

Cơ chế hoạt động của thiết bị cộng hưởng này có thể được giải thích theo một mô hình tương tự với dao động của con lắc lò xo dựa trên tính đàn hồi của không khí. Khi một khối không khí đi vào hình cầu, nó sẽ đóng vai trò của vật dao động còn lượng không khí có sẵn ở trong thiết bị sẽ bị nén lại. Tương tự như lò xo bị nén, lượng khí bị nén lại này sẽ đẩy khối khi ban đầu ra ngoài xa hơn so với trước, đồng thời giãn nở ra. Do đó, không khí ở trong một vật chứa hình cầu có thể dao động tương tự như một con lắc lò xo.

Bản thân các dụng cụ âm nhạc đều là các thiết bị cộng hưởng để khuếch đại âm thanh: ống của các loại kèn, sáo, hộp đàn của các loại đàn dây, thân của các loại trống.

Tùy theo kích thước hình cầu và độ rộng của lỗ, mỗi một thiết bị cộng hưởng Helmholtz có một tần số dao động tự nhiên riêng biệt. Khi sử dụng núm của thiết bị để nghe bằng cách cắm vào tai, người dùng chỉ nghe thấy các thành phần của âm thanh có tần số giống với tần số dao động tự nhiên của thiết bị còn các tần số khác đều bị suy giảm. Bản thân các dụng cụ âm nhạc đều là các thiết bị cộng hưởng để khuếch đại âm thanh: ống của các loại kèn, sáo, hộp đàn của các loại đàn dây, thân của các loại trống.

Hình 2. Một bộ thiết bị cộng hưởng Helmholtz cho các tần số khác nhau.

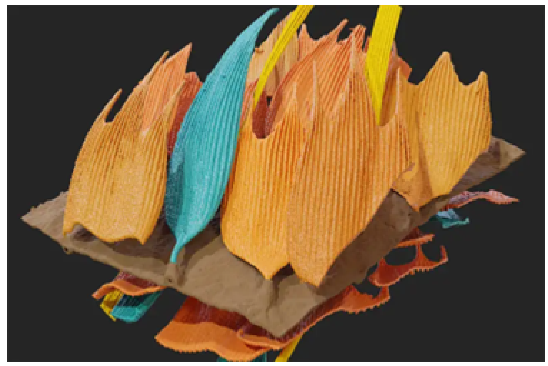
Helmholtz không dừng ở việc phân tích âm thanh mà còn tiến hành các thí nghiệm tổng hợp âm thanh. Ông sử dụng các âm thoa được kích hoạt cho dao động bằng nam châm điện. Các âm thoa cấu tạo khác nhau sẽ có các tần số cơ bản khác nhau. Âm thanh của chúng sẽ được khuếch đại bằng thiết bị cộng hưởng Helmholtz. Thông qua các thí nghiệm phân tích cũng như tổng hợp âm thanh, Helmholtz đã xác định được rằng âm thanh của các dụng cụ âm nhạc cũng như các nguyên âm trong giọng nói của con người là sự tổng hợp của những âm thanh với tần số khác nhau và ta cũng có thể tạo những âm thanh tương tự bằng cách tổng hợp các sóng âm với tần số tương ứng. Ví dụ với nguyên âm “a”, thanh quản sẽ khuếch đại các tần số gần với 800 Hz, 1600 Hz và 2400 Hz. Với những nguyên âm khác, các cơ của cổ họng và miệng sẽ thay đổi hình dạng của thanh quản, tạo ra một bộ các tần số cộng hưởng khác. Dựa trên các công trình của Helmholtz, Graham Bell đã nảy sinh ý tưởng về việc truyền dẫn âm thanh trên dây điện theo các tần số khác nhau và tổng hợp lại thành âm thanh ban đầu, dẫn đến sự ra đời của điện thoại cố định.

Hình 3. Thiết bị phát sóng âm của Helmholtz.

Cũng do nghiên cứu của Helmholtz, thuật ngữ "resonance" chính thức được sử dụng để chỉ sự dao động mãnh liệt ở một tần số đặc thù, tất nhiên lúc này vẫn chỉ giới hạn với dao động của sóng âm.

Hình 4. Chim gõ kiến sử dụng thân cây làm thiết bị cộng hưởng.

Không chỉ có con người, một số loài động vật cũng biết sử dụng hiện các vật thể trong tự nhiên làm thiết bị cộng hưởng sóng âm. Các loài chim gõ kiến sử dụng việc gõ vào thân cây để giao tiếp với nhau trong rừng nên chúng thường chọn những thân cây khô và rỗng để tăng hiệu quả cộng hưởng giúp âm thanh vang xa hơn. Trong khi đó, một số loài bướm đêm lại có các cấu trúc vảy trên cánh cộng hưởng với sóng âm mà dơi bắt mồi phát ra, khiến sóng này bị hấp thụ thay vì phản xạ lại cho dơi.



Hình 5. Một số loài bướm đêm có cấu tạo vảy đặc thù cộng hưởng với sóng âm phát ra từ dơi bắt mồi.

3. Cộng hưởng điện từ

Ngay khi đang làm việc với hiện tượng sóng âm, Helmholtz cũng dành sự chú ý cho một loại sóng khác trong tự nhiên. Các nghiên cứu khoa học trước đó của Faraday và Weber đã cho thấy khả năng dòng điện cũng là một hiện tượng sóng. Helmholtz cho rằng, nếu toán học có thể mô tả dao động sóng âm trong một ống hình trụ thì những phương trình tương tự cũng có thể biểu diễn chuyển động của các sóng điện từ trong mạch điện kín. Nhiều nhà khoa học đương thời khác cũng có những ý tưởng giống như vậy, bao gồm Kelvin và Maxwell. Với những công trình được công bố trong giai đoạn 1861 – 1865, Maxwell đã xây dựng cơ sở toán học cho lý thuyết về sóng điện từ với hệ các phương trình mô tả dao động của các sóng này.

Trước đó, trong công bố năm 1853, Kelvin đã chỉ ra sự tăng vọt cường độ dòng điện trong mạch *LC* (gồm cuộn cảm có độ tự cảm L và tụ điện có điện dung C) khi tần số dòng xoay chiều là $\omega = \sqrt{LC}$. Phải đến năm 1885, nhà vật lý Anton Oberbeck mới sử dụng thuật ngữ cộng hưởng mượn từ lĩnh vực sóng âm để miêu tả hiện tượng này và chỉ ra sự tương đồng về mặt phương trình của hai loại dao động, sóng âm và sóng điện từ.

Năm 1886, Heinrich Hertz phát hiện rằng mạch LC phát ra sóng điện từ trong không gian mà không cần dây dẫn, cung cấp bằng chứng quan trọng khẳng định dự đoán của Maxwell. Đồng thời, thí nghiệm này cũng khẳng định sự tồn tại của cộng hưởng sóng điện từ.

Bản thân Hertz cho rằng sóng điện từ cũng như đặc tính cộng hưởng của nó không có ứng dụng trong đời sống. Tuy nhiên thực tế lại hoàn toàn ngược lại. Dựa trên công trình của Hertz và một số nhà khoa học khác, Guglielmo Marconi đã chế tạo hệ thống thu phát sóng radio cho phép truyền tín hiệu không dây trong thực tế đồng thời thương mại hóa công nghệ này. Để tránh xung đột từ các nguồn khác nhau, cả thiết bị phát và thiết bị thu được điều chỉnh về cùng một tần số cộng hưởng. Ngày nay việc thu phát sóng không dây đã trở nên quá quen thuộc trong đời sống, từ phát thanh, truyền hình không dây cho đến điện thoại di động, wifi hay các thiết bị bluetooth. Trong các công nghệ này, các mạch cộng hưởng vẫn luôn đóng vai trò thiết yếu khi thu phát tín hiệu.

Hình 6. Marconi và thiết bị thu phát sóng không dây do ông chế tạo.

Một dạng cộng hưởng khác ở cấp độ vi mô hơn là cộng hưởng từ hạt nhân. Khi ta kích thích một hạt nhân được đặt trong một từ trường mạnh, hạt nhân này có thể phát ra bức xạ với tần số nhất định do sự chuyển trạng thái của spin trong hạt nhân. Sự cộng hưởng này được sử dụng để quan sát bên trong các mẫu vật cũng như chụp cắt lớp cộng hưởng từ (MRI) trong y học.

4. Cộng hưởng và cơ học ứng dụng

Quá trình để lý thuyết cộng hưởng được chấp nhận trong cơ học ứng dụng kéo dài suốt từ thế kỷ 19 đến đầu thế kỷ 20. Năm 1831, cầu treo Broughton ở Anh bị sập do binh lính tiến hành hành quân theo nhịp bước trên cầu. Một sự kiện tương tự cũng xảy ra ở Angers, Pháp năm 1850. Năm 1855, Redtenbacher, một giáo sư cơ học ở Karlsruhe, ghi nhận rằng khi vận tốc của động cơ tàu hỏa tăng dần, sẽ có một giá trị của vận tốc khiến dao động của thân tàu bị tăng đột biến, có thể gây ra tai nạn. Tuy nhiên, khi vận tốc vượt qua giá trị này thì biên độ dao động cũng giảm theo. Ông cũng chỉ ra sự liên hệ giữa quan sát này và hiện tượng cộng hưởng nhưng các phân tích của Redtenbacher bị giới học thuật lúc đó phủ nhận.

Đến đầu thế kỷ 20, cộng hưởng trong các thiết bị cơ học mới được quan tâm trở lại. Kỹ sư đóng tàu Hermann Frahm chú ý đến sự cộng hưởng cơ học của các tàu đi biển trên đại dương với dao động sóng biển, có thể làm cho tàu bị dao động mạnh và lật. Để giảm bớt ảnh hưởng có hại của việc này, ông thiết kế hệ thống bể chứa nước ở hai bên thành tàu có pha dao động ngược với pha dao động của tàu. Do phát minh này, ông được Arrhenius đưa vào danh sách đề cử giải Nobel vật lý năm 1913. Ngoài thiết bị cho tàu biển, Frahm còn có nhiều sáng chế khác để giảm ảnh hưởng của cộng hưởng trong các hệ thống cơ học khác nhau.

Hình 7. Một thiết bị giảm dao động cho cánh quạt trực thăng phát triển từ bằng sáng chế của Frahm.

Đồng thời, các nhà toán học như Felix Klein và Arnold Sommerfeld cũng công bố và biên soạn các tài liệu khoa học có liên quan đến cộng hưởng trong cơ học. Dần dần, vấn đề cộng hưởng cũng trở thành một nội dung thiết yếu trong chương trình học của các kỹ sư. Trong khi các công trình lớn của thế kỷ 19, như cầu Brooklyn hay tháp Eiffel chỉ được thiết kế dựa trên các công thức tĩnh học thì trong thế kỷ 20, việc thiết kế và đánh giá an toàn của các công trình cũng như thiết bị cơ học đều tính đến quá trình vận hành và chuyển động, đặc biệt là tác động của các dao động tự nhiên như gió hay động đất đến các công trình. Có thể thấy, tuy được biết đến từ sớm thông qua các nhận định về con lắc đơn của Galileo, cộng hưởng cơ học lại mất thời gian rất dài, tới vài thế kỷ, để trở nên phổ biến trong các tài liệu khoa học và kỹ thuật cũng như trong ứng dụng thực tiễn.

Một ví dụ khá thú vị gần đây về cộng hưởng cơ học là việc một bản nhạc năm 2022 của ca sĩ Janet Jackson có tần số gây ra cộng hưởng với một số ổ đĩa cứng máy tính xách tay. Nếu một người mở bản nhạc này trên máy tính xách tay hoặc bản nhạc được phát trên một thiết bị gần đó, dao động cộng hưởng cơ học có thể phá hủy các đĩa trong ổ cứng của máy tính xách tay. Các ổ cứng bị ảnh hưởng đều có tốc độ quay 5400 vòng/phút và được sản xuất khoảng những năm 2005! Cũng may là các ổ cứng cơ học sản xuất gần đây không bị ảnh hưởng bởi tần số của bài hát này.

6. Kết luận

Cộng hưởng là một hiện tượng khá thú vị xảy ra trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Việc giảng dạy về hiện tượng này sẽ trở nên thú vị hơn nếu chúng ta đưa vào các nội dung liên quan đến lịch sử khoa học cũng như mô hình toán học của nó.

Phụ lục: Mô hình toán học của hiện tượng cộng hưởng

Xét một con lắc lò xo với vật khối lượng m và lò xo độ cứng k. Lực đàn hồi phụ thuộc vào ly độ x của vật so với vị trí cân bằng:

$$F = -kx,$$

(dấu $-$ xuất hiện do lực ngược chiều với sự biến dạng của lò xo).

Theo định luật 2 Newton:

$$mx'' = ma = -kx,$$

hay:

$$x'' + \omega_0^2 x = 0, \qquad (1)$$

với $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ và x'' là đạo hàm cấp 2 của x theo thời gian t.

Đây cũng là phương trình dao động của con lắc lò xo trong sách giáo khoa vật lí 12.

Từ dạng của phương trình này, ta thấy rằng x là một hàm số mà khi lấy đạo hàm sẽ được một hàm số là tích của hàm số ban đầu với một hằng số. Một hàm số thỏa mãn dạng này là $f(t) = e^{\lambda t}$. Thay $f(x)$ vào phương trình dao động và rút gọn ta được:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0,$$

hay

$$\lambda = \pm i\omega_0.$$

Do các giá trị λ tìm được là số phức, ta sử dụng công thức Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Khi đó, ta được $x_1 = \cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t$ và $x_2 = \cos\omega_0 t - i\sin\omega_0 t$.

Do phương trình (1) của ta là phương trình vi phân tuyến tính (cấp hai) nên các tổ hợp tuyến tính của hai hàm số trên cũng là nghiệm của (1), cho nên $\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ và $\sin\omega_0 t = \frac{1}{2i}(x_1 - x_2)$ cũng là nghiệm của (1).

Người ta chứng minh được rằng nếu biết n nghiệm độc lập của phương trình vi phân tuyến tính cấp n thì nghiệm tổng quát sẽ là tổ hợp tuyến tính của n nghiệm này. Vì vậy, (1) có nghiệm tổng quát:

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,$$

với A và B là các hằng số phụ thuộc vào giá trị ban đầu của x (ly độ) và x' (vận tốc) tại thời điểm $t = 0$. Nghiệm này cũng có thể thu gọn thành dạng:

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t - \phi),$$

và do đó ta thu được một dao động điều hòa.

Trong trường hợp dao động còn chịu lực cản tỉ lệ với vận tốc ($F_c = -cx'$), phương trình (1) trở thành:

$$x'' + \frac{c}{m}x' + \omega_0^2 x = 0, \qquad (2)$$

và phương trình của λ có dạng:

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0. \qquad (3)$$

Trong trường hợp hai nghiệm của (3) là hai nghiệm thực (lực cản mạnh ứng với $c^2 > 4mk$), nghiệm tổng quát của (2) sẽ là:

$$x(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t},$$

với $\alpha = \frac{c}{2m}, \beta = \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$.

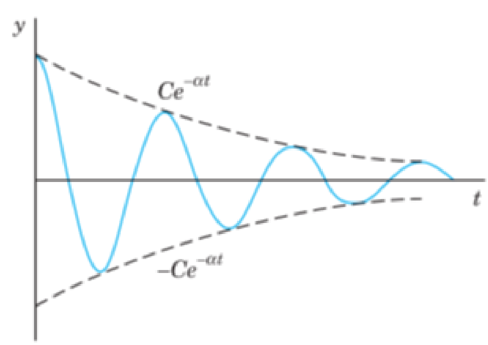
Dao động này sẽ giảm dần theo hàm mũ.

Trong trường hợp lực cản yếu ($c^2 < 4mk$), ta thu được nghiệm tổng quát:

$$x(t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega_* t - \phi),$$

với $\omega_* = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$.

Đây là một dao động có biên độ giảm dần theo thời gian.



Trong trường hợp dao động cưỡng bức với ngoại lực cũng có tính chu kỳ, ta có phương trình:

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega t. \qquad (4)$$

Với dạng phương trình này, nghiệm cuối cùng sẽ là tổng của nghiệm tổng quát của (2) và một nghiệm đặc thù thỏa mãn (4).

Ta tìm một nghiệm đặc thù có dạng tương tự với vế phải:

$$x_p(t) = a \cos \omega_t + b \sin \omega_t.$$

Đây còn gọi là phương pháp hệ số bất định. Thay biểu thức của x_p vào (4) ta được:

$$[(k - m\omega^2)a + \omega b] \cos \omega t$$
$$+ [-\omega c a + (k - m\omega^2)b] \sin \omega t = F_0 \cos \omega t.$$

Cân bằng các hệ số của $\sin \omega t$ và $\cos \omega t$ ta được hệ phương trình gồm hai phương trình và hai ẩn. Khi giải hệ ta được:

$$a = F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2},$$
$$b = F_0 \frac{\omega c}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}.$$

Nghiệm tổng quát sẽ có dạng:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

với x_h là nghiệm tổng quát của (2).

Trong trường hợp không có lực cản ($c = 0$), x_p có dạng:

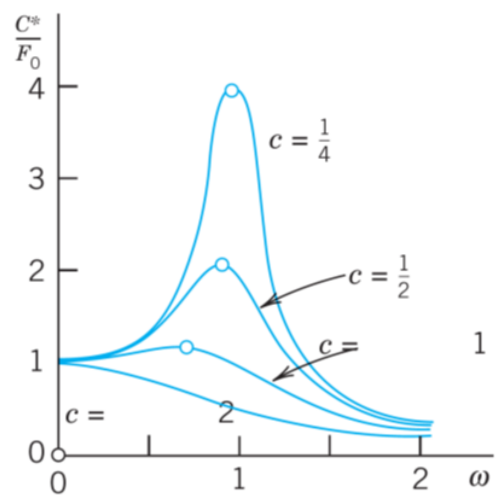
$$x_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t).$$

Khi $\omega = \omega_0$ hay tần số của ngoại lực bằng với tần số dao động tự nhiên của con lắc, sử dụng quy tắc L'Hospital để lấy giới hạn, ta có:

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega \to \omega_0} x_p &= \frac{F_0}{m} \lim_{\omega \to \omega_0} \frac{\frac{d}{d\omega} \cos(\omega t)}{\frac{d}{d\omega} \cos(\omega_0^2 - \omega^2)} \\
&= \frac{F_0}{m} \lim_{\omega \to \omega_0} \left(\frac{-t \sin \omega t}{-2\omega} \right) \\
&= \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega t.
\end{aligned}$$

Đây cũng là công thức mà Euler tìm ra. Khi đó, biên độ của dao động cưỡng bức sẽ tăng tuyến tính theo thời gian và cộng hưởng xảy ra.

Trong trường hợp có lực cản, biên độ của x_p sẽ là $C^* = \sqrt{a^2 + b^2}$. Lấy đạo hàm theo ω và tìm cực trị, sẽ thấy C^* có giá trị lớn nhất khi $\omega = \omega_0^2 - \dfrac{c^2}{2m^2}$. Trong trường hợp này, tần số xảy ra cộng hưởng không trùng nhưng rất gần với tần số dao động tự do của con lắc lò xo khi lực cản yếu.



Tài liệu tham khảo

[1] Buchanan, M. (2019). Going into resonance. *Nature Physics*, 15(3), 203 – 203. https://doi.org/10.1038/s41567-019-0458-z

[2] Eckert, M. (2013). *Arnold Sommerfeld*. Springer Science & Business Media.

[3] Patton, L. (2018). Hermann von Helmholtz (Stanford Encyclopedia of Philosophy). Retrieved from Stanford.edu website: https://plato.stanford.edu/entries/hermann-helmholtz/

[4] Zill, D. G. (2018). *Advanced engineering mathematics*. Burlington: Jones & Bartlett Learning. C.

TÀN PHÁO CHỐT - MỐT SỐ ĐIỂM CẦN LƯU Ý

TRẦN VĂN DŨNG[1]

Tàn cuộc Pháo Chốt – mặc dù vẫn được coi là một trong những loại hình tàn cuộc căn bản, thế nhưng việc điều quân như thế nào để đạt kết quả tốt nhất vẫn luôn là bài toán khó đối với nhiều kỳ thủ, đặc biệt là đối với những người chơi còn thiếu kinh nghiệm thực chiến. Như những bài viết ở các số trước, chúng ta đã biết rằng, 2 loại binh chủng Pháo và Chốt đều có những điểm yếu cố hữu của riêng mình: Chốt di chuyển từng bước một, không có khả năng đi lùi khi tiến sâu vào đất địch; Pháo có thể trở nên vô hại nếu như không có quân làm "ngòi".

Để sử dụng và phối hợp 2 quân nói trên trong tàn cuộc để đi đến thắng lợi sau cùng, ngoài việc hiểu rõ về đặc điểm và tính năng của chúng người chơi cần lưu ý một số vấn đề quan trọng để giành lấy kết quả có lợi cho ván đấu như sau:

1. *Khi đổi quân, cần cân nhắc kỹ giữ Pháo hay giữ Chốt*

Nếu như cuộc cờ đang trong giai đoạn giằng co, việc giữ Pháo là sự ưu tiên lựa chọn của đa số kỳ thủ, thế nhưng đến giai đoạn tàn cuộc mọi thứ có thể thay đổi hoàn toàn. Quân Chốt một khi áp sát cửu cung có thể được đánh giá cao hơn quân Pháo không có "ngòi", hãy suy nghĩ thấu đáo trước khi tiến hành trao đổi.

2. *Tận dụng tối đa vai trò của Sỹ, Tượng*

Bước vào Tàn cuộc, số lượng quân chiến đôi bên không còn nhiều, việc giữ Sỹ, Tượng và tận dụng chúng để hỗ trợ cho Pháo là điều vô cùng cần thiết. Trong nhiều tình huống, chúng góp phần làm thay đổi kết quả sau cùng của ván cờ.

3. *Chú ý dùng Tướng chiếm mặt đúng thời điểm*

Tướng là đối tượng luôn được ưu tiên bảo vệ trong mọi tình huống, nhưng trong các loại hình tàn cuộc nói chung và tàn Pháo Chốt nói riêng, kỳ thủ cần phải biết tận dụng mặt Tướng để chiếm lộ, hạn chế khả năng hoạt động cũng như truy sát Tướng đối phương.

4. *Nắm bắt tính chẵn–lẻ của nước đi. đẩy đối phương vào thế khó.*

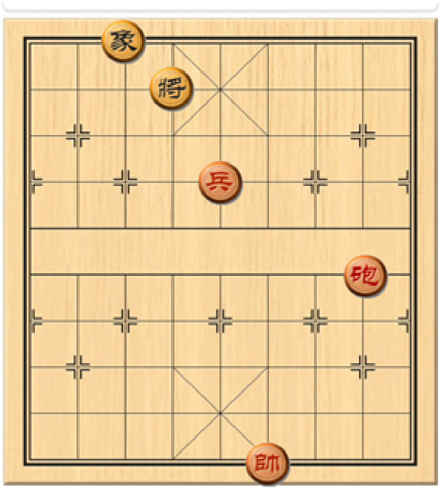
Nghe qua thì có vẻ không mấy liên quan vì khái niệm chẵn lẻ chỉ thường xuất hiện trong Toán học. Nhưng đôi khi trong các ván đấu cờ Tướng, đặc biệt trong cờ tàn Pháo Chốt, các kỳ thủ cần lợi dụng đặc điểm này để thực hiện nước nhấp một cách hợp lý, biến lượt đi của mình thành lượt đi đối phương, ép buộc đối phương phải đi quân để tự rơi vào tình huống bất lợi, từ đó giành lấy thắng lợi sau cùng.

Để hiểu hơn về những điểm nêu trên, trong

---

[1] *Tp. Hồ Chí Minh.*

bài viết kỳ này, tác giả xin gửi đến bạn đọc Pi một số hình tàn cuộc Pháo Chốt đặc sắc, từ đó có thể áp dụng vào thực chiến:



Hình 1.

1. Hình 1, Đỏ còn Pháo Chốt,Đen chỉ còn đơn Tượng, Đỏ khéo léo giành chiến thắng như sau:

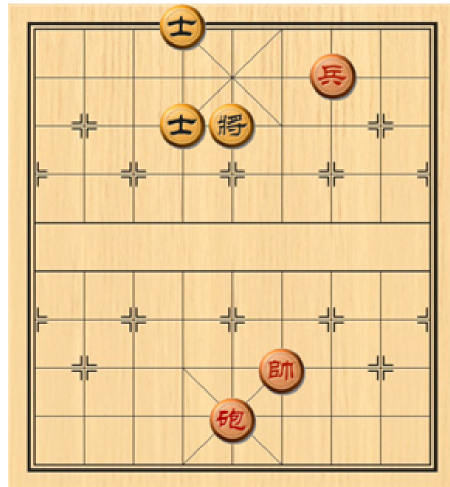
1) P2 – 8 T3.1 **2)** P8.2(*) T1/3 **3)** C5.1 T3.1 **4)** Tg4 – 5 T1/3 **5)** P8.2 Tg4/1 **6)** C5 – 6(**) T3.5 **7)** C6 – 5 (1 – 0)

(*): *Với sự cơ động của Pháo, Đỏ lập tức đem qua cánh còn lại nhằm cản trở nước đi của Tượng đối phương.*

(**): *Tiếp theo đó, Đỏ dùng Tướng chiếm trung lộ để bình chốt, thu hẹp không gian hoạt động của Tướng và Tượng Đen. Đen thua do không còn quân đi.*

2. Hình 2, Bên Đỏ còn Pháo Chốt đang nắm lợi thế lớn, tuy nhiên, với Chốt đã xuống sâu thì việc giành chiến thắng xem ra cũng không hề đơn giản. Đỏ đã áp dụng các quy tắc và ra đòn như sau:

1) P5 – 2 St/5 **2)** P2.8(*) S5.4 **3)** C3 – 4 St/5 **4)** P2 – 5 S5.6 **5)** Tg4/1 Tg5 – 4 **6)** Tg4 – 5(**) S6/5 **7)** P5 – 2 S5.6 **8)** P2/1 S6/5 **9)** P2 – 5(***) S4.5 **10)** C4 – 5 (1 – 0)

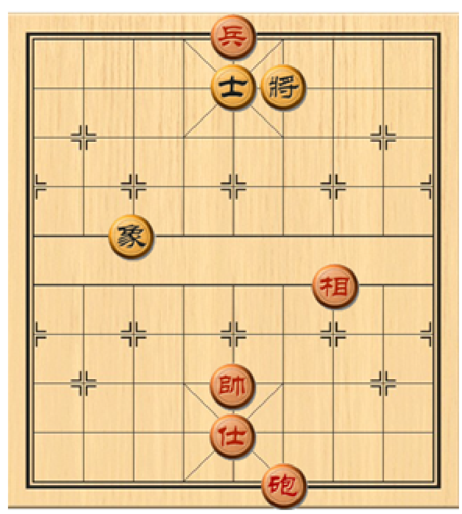


Hình 2.

(*): *Trong bối cảnh không còn Sỹ Tượng để làm ngòi, Đỏ bình Pháo rồi tấn Pháo xuống đáy, thể hiện ý đồ rõ ràng nhằm di chuyển vào giữa và chiếm lấy trung lộ.*

(**): *Sau khi bình Chốt áp sát và bình Pháo vào đường 5, Đỏ có nước thoái Tướng chờ đợi đầy tinh tế. Đen không còn nước hay để đi đành bình Tướng, nhường lại cho Đỏ trục lộ quan trọng.*

(***): *Mục tiêu ban đầu đã hoàn thành, Đỏ nhanh chóng điều Pháo trở về hàng áp đáy, dùng Pháo đối 2 Sỹ để giành lấy thắng lợi. Nếu lúc này sai lầm dùng Chốt ăn Sỹ, sẽ trở thành cờ hòa ngay lập tức.*



Hình 3.

3. Hình 3, mặc dù Đỏ đang có lợi thế nhưng để có thể giành chiến thắng hình cờ này đòi hỏi kỳ thủ cần phải nắm vững các kỹ thuật khóa quân và lấy mặt Tướng trong Tàn cuộc Pháo Chốt. Đỏ đi:

1) S5.4 S5.6 **2)** Tg5/1(∗) T3/5 **3)** P4 – 3 T5.3 **4)** P3 – 5 T3/1 **5)** T3/5 T1.3 **6)** T5.7 T3/1 **7)** P5 – 7(∗∗) S6/5 **8)** Tg5/1 S5.6 **9)** P7.3 S6/5 **10)** P7/2 S5.6 **11)** C5 – 6 S6/5 **12)** P7 – 4 S5.6 **13)** Tg5 – 4 T1.3 **14)** P4 – 7 T3/1 **15)** S4/5 Tg6 – 5 **16)** S5.6 Tg5.1 **17)** Tg4.1 S6/5 **18)** P7 – 6 S5.6 **19)** P6/1 S6/5 **20)** T7/5 S5.6 **21)** P6 – 4(∗∗∗∗) S6/5 **22)** P4 – 5 (Đỏ mất Sỹ, 1 – 0)

(∗): *Sau khi dùng Sỹ làm ngòi uy hiếp Tướng Đen, Đỏ lùi Tướng nhằm nhường đường cho Tượng đảo qua cánh còn lại.*

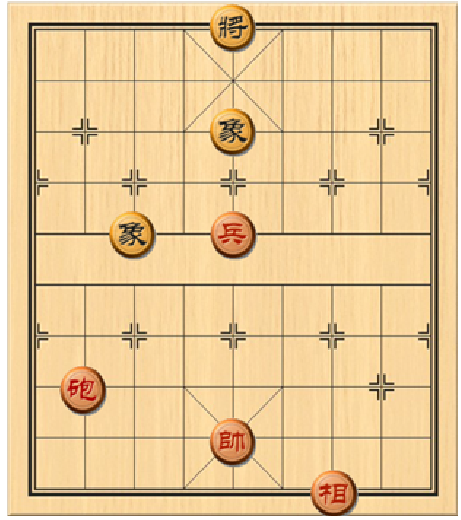
(∗∗): *Những nước điều Pháo rất có ý đồ của Đỏ, khiến cho Tượng Đen phải dạt sang lộ 1. Nhân cơ hội đó, Đỏ đã thực hiện việc treo Tượng lên lộ 7 và bình Pháo trói chặt Tượng đối phương.*

(∗∗∗): *Giai đoạn vừa rồi Đỏ đã thực hiện một loạt các nước đi điều quân nhằm mục đích sắp xếp đội hình trước khi ra đòn, Đen không thể làm gì hơn ngoài việc đi Sỹ. Đặc biệt, nước số 9 – 10, Đỏ đã áp dụng số nước đi chẵn lẻ nhằm lấy nhịp về sau có thể bình ra bắt Tượng (nước số 14) và mở Sỹ chiếm mặt (nước số 15).*

(∗∗∗∗): *Những nước tiếp theo Đỏ điều chuyển Tướng, Sĩ, Tượng một cách khéo léo làm ngòi cho Pháo rồi bắt chết Sĩ, cuối cùng Đen đành chấp nhận thua cuộc.*

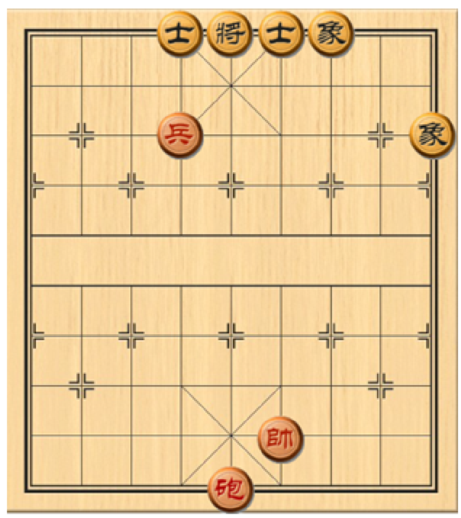
Chú thích: C: Chốt, P: Pháo, Tg: Tướng, S: Sĩ, T: Tượng, t: trước, s: sau.

Câu đố kỳ này: Đỏ đi trước và sẽ khéo léo kết hợp Pháo Chốt như thế nào để giành lấy thắng lợi trong những hình tàn cuộc sau?



Hình 4.

Đáp án tham khảo: **1)** P8/2 T5/7 **2)** Tg5 – 6 T7.9 **3)** T3.5 T9.7 **4)** P8 – 4 T3/5 **5)** C5 – 4 Tg5.1 **6)** C4.1 T5/3 **7)** C4.1 T3.1 **8)** P4 – 5 T7/5 **9)** P5.7 (Đen mất Tượng, Đỏ tiếp tục đưa Pháo về đáy dùng thủ đoạn tương tự bắt chết Tượng còn lại, Đỏ thắng)



Hình 5.

Đáp án tham khảo: **1)** C6.1 T9.7 **2)** P5.3 Ts.9 **3)** Tg4/1 T9/7 **4)** Tg4 – 5 Ts.9 **5)** Tg5 – 6 T9/7 **6)** P5 – 9 S4.5 **7)** Tg6 – 5 Ts.9 **8)** P9 – 3 T7/5 **9)** P3 – 5 T9/7 **10)** Tg5 – 6 T7.9 **12)** C6.1 (1 – 0)