TÔPÔ SỐ HỌC: SỐ NGUYÊN TỐ GIỐNG NÚT NHƯ THẾ NÀO?

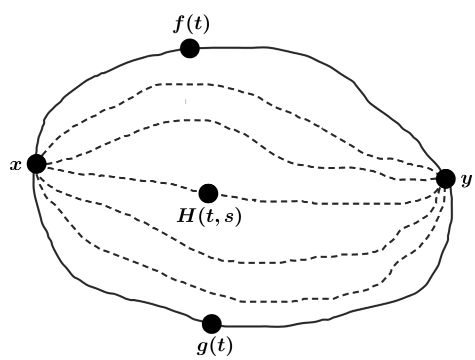
NGUYỄN MẠNH LINH[1]

Tôpô học là lĩnh vực nghiên cứu các không gian trừu tượng, những đối tượng liên tục. Ngược lại, số học là lĩnh vực nghiên cứu các số nguyên, những đối tượng rời rạc. Hai lĩnh vực này dường như nằm ở hai thái cực đối lập của toán học. Đấy là cho đến khoảng vài thập kỷ trở lại đây, khi các nhà toàn học phát hiện ra mối liên hệ giữa hai đối tượng tưởng như chẳng liên quan ở hai bên. Người ta đang xây dựng một cầu nối, một cuốn từ điển cho phép dịch các định lý từ một bên sang bên kia và ngược lại. Lĩnh vực mới toanh này được gọi là **tôpô số học**.

Nhóm cơ bản

Để nói về tôpô số học, tất nhiên ta phải bắt đầu với... tôpô học và số học. Các không gian tôpô là các đối tượng cho phép ta nói về lân cận của các điểm, cũng như các hàm liên tục. Sự "giống nhau" giữa các không gian tôpô được cho bởi các phép đồng phôi, các hàm liên tục $1-1$ mà hàm ngược cũng liên tục. Để đơn giản, ta sẽ chỉ quan tâm đến các không gian **liên thông**: hai điểm bất kỳ luôn nối được bằng một đường. Một **đường** giữa hai điểm x, y trong một không gian tôpô X đơn giản là một hàm liên tục $f : I \to X$ sao cho $f(0) = x$ và $f(1) = y$.

Giả sử ta có một đường khác $g : I \to X$ từ x đến y. Không gì cản chúng ta nói về khái niệm "đường giữa hai đường f và g", mà toán học gọi là **đồng luân**. Đó là một hàm liên tục $H : I \times I \to X$ sao cho $H(t,0) = f(t)$, $H(t,1) = g(t)$, $H(0,s) = x$ và $H(1,s) = y$. Nói cách khác, H là một họ các đường trung gian được tham số hóa bởi s, thể hiện sự biến dạng liên tục từ đường f (khi $s = 0$) đến đường g (khi $s = 1$), đồng thời giữ cố định hai đầu mút x, y.

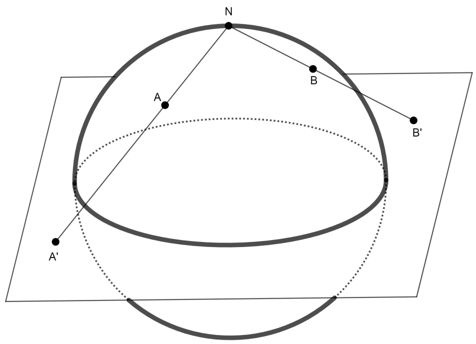


Hình 1: Một phép đồng luân giữa hai đường f và g.

Khi H tồn tại, ta nói hai đường f và g đồng luân, ký hiệu bởi $f \sim g$. Khi hai đường bất kỳ giữa hai điểm cho trước luôn đồng luân, ta nói không gian X **đơn liên**. Ví dụ về không gian đơn liên là không gian Euclid $\mathbb{R}^n$. Thật vậy, cấu trúc cộng và nhân với vô hướng

[1] *Université Paris-Saclay.*

trong $\mathbb{R}^n$ cho phép ta định nghĩa phép đồng luân $H(t,s) = (1-s)\cdot f(t) + s\cdot g(t)$ giữa hai đường f, g tùy ý. Mặt siêu cầu $\mathbb{S}^n$, thu được bằng cách thêm một điểm ở xa vô tận vào $\mathbb{R}^n$, cũng đơn liên với $n > 1$: hãy chọn một điểm P tùy ý trên mặt cầu và hình dung rằng mọi đường đều có thể biến dạng liên tục thành một đường không đi qua P. Mà $\mathbb{R}^n$ bỏ đi P chính là (đồng phôi với) $\mathbb{R}^n$, nên hai đường không đi qua P luôn đồng luân.

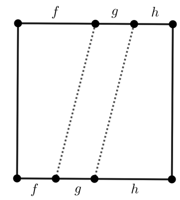


Hình 2: Qua phép chiếu lập thể, mặt cầu $\mathbb{S}^2$ bỏ đi điểm cực bắc N trở thành mặt phẳng $\mathbb{R}^2$. Ta có thể xem N như "điểm ở xa vô tận" của mặt phẳng.

Các đường cho ta bất biến đại số đầu tiên cho phép phân biệt các không gian tôpô (cho biết khi nào chúng không đồng phôi), được gọi là **nhóm cơ bản**, định nghĩa bởi Henri Poincaré năm 1895. Ta hãy cố định một điểm $x \in X$ và xét các đường từ x đến chính nó, được gọi là các **khuyên**. Ta xây dựng một phép toán trên chúng: cho f và g là hai khuyên tại x, ta định nghĩa $g * f : I \to X$ là khuyên thu được bằng cách đi theo f với vận tốc gấp đôi rồi đi theo g với vận tốc gấp đôi. Bằng công thức,

$$(g*f)(t)\begin{cases} = f(2t) & \text{nếu } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ = g(2t-1) & \text{nếu } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

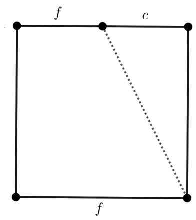
Như một thủ tục, ta cần kiểm tra các tiên đề của nhóm. Đầu tiên là tính kết hợp. Bằng tính toán trực tiếp, ta thấy ngay $h*(g*f) \neq (h*g)*f$. Tuy nhiên, hai đường này đồng luân. Điều này gợi ý rằng ta cần xem hai đường là như nhau nếu chúng đồng luân.



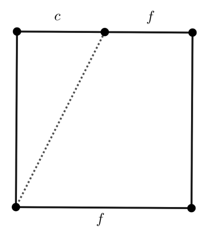
$$H(t,s) = \begin{cases} f(\frac{4t}{2-s}) & \text{nếu } 0 \le t \le \frac{2-s}{4}, \\ g(4t-2+s) & \text{nếu } \frac{2-s}{4} \le t \le \frac{3-s}{4}, \\ h(\frac{4t-3+s}{4}) & \text{nếu } \frac{3-s}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$

Hình 3: $h*(g*f) \sim (h*g)*f$.

Thứ hai, ta cần chỉ ra phần tử trung lập. Một cách trực giác, ta thấy nó phải là đường hằng c, cho bởi "đứng yên tại x", hay $c(t) = x$.



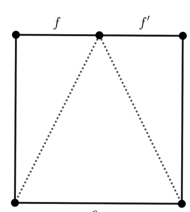
$$H(t,s) = \begin{cases} f(\frac{2t}{1+s}) & \text{nếu } 0 \le t \le \frac{1+s}{2}, \\ x & \text{nếu } \frac{1+s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$



$$H(t,s) = \begin{cases} x & \text{nếu } 0 \le t \le \frac{1-s}{2}, \\ f(\frac{2t-1+s}{1+s}) & \text{nếu } \frac{1-s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Hình 4: $f*c \sim f$ và $c*f \sim f$.

Cuối cùng, ta cần tìm nghịch đảo của một đường f cho trước. Đó là đường f' cho bởi "đi ngược với f", hay $f'(t) = f(1-t)$.



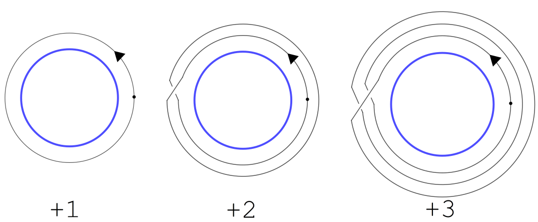
$$H(t,s) = \begin{cases} f(\frac{2t}{1-s}) & \text{nếu } 0 \le t \le \frac{1-s}{2}, \\ x & \text{nếu } \frac{1-s}{2} \le t \le \frac{1+s}{2}, \\ f(\frac{1+s-2t}{1-s}) & \text{nếu } \frac{1+s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Hình 5: $f*f' \sim c$. Tất nhiên, vì $f'' = f$ nên $f'*f \sim c$.

Vậy các khuyên tại x (sai khác đồng luân) tạo thành một nhóm, nó được gọi là nhóm cơ bản của X, ký hiệu bởi $\pi_1(X)$.

Một không gian là đơn liên khi và chỉ khi nhóm cơ bản của nó tầm thường (mọi khuyên đều biến dạng liên tục được về một điểm). Chẳng hạn $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 1$ và $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 1$

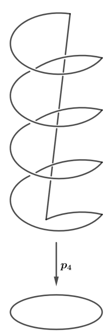
với $n > 1$. Ví dụ không tầm thường đầu tiên là đường tròn $\mathbb{S}^1$, có thể xem như tập các số phức với môđun bằng 1. Nhóm cơ bản của nó là (đẳng cấu với) $\mathbb{Z}$. Cụ thể, với mỗi số nguyên n, ta xét khuyên f_n cho bởi $f_n(t) = \cos(2n\pi t) + i \cdot \sin(2n\pi t)$, đó là phép cuộn đoạn thẳng thành $|n|$ lần đường tròn (theo chiều dương nếu $n > 0$, theo chiều âm nếu $n < 0$). Một khuyên f tùy ý đồng luân với f_n khi và chỉ khi f quay quanh đường tròn đúng $|n|$ lần với chiều tương ứng với dấu của n.



Hình 6: Nhóm cơ bản của đường tròn.

Cuối cùng, $f_n * f_m \sim f_{n+m}$, phép hợp thành của đường tương thích với phép cộng số nguyên, nghĩa là ta có đẳng cấu nhóm $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.

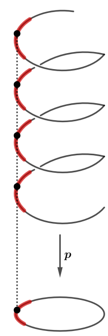
Không gian phủ



Hình 7: Đường tròn là một phủ 4–tờ của chính nó.

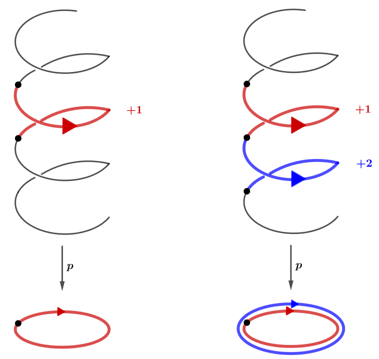
Khái niệm gắn liền với nhóm cơ bản là **không gian phủ**. Chẳng hạn, cho số nguyên dương n và xét hàm liên tục $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ cho bởi $p_n(z) = z^n$. Với mỗi điểm $w \in \mathbb{S}^1$, các điểm được p_n biến thành w (các căn bậc n của w) tạo thành **thớ** của p_n tại w. Thớ này gồm n điểm rời rạc. Hơn nữa, nếu ta chọn một lân cận U đủ nhỏ quanh w thì thớ của U gồm n thành phần liên thông rời nhau, mỗi thành phần này là một bản sao của U (cụ thể là p_n cảm sinh một phép đồng phôi từ mỗi thành phần này lên U). Ta gọi một đó là một **phủ n–tờ** hay **phủ bậc n**.

Tổng quát, một phủ của không gian tôpô X được cho bởi một không gian tôpô Y cùng một hàm liên tục $p : Y \to X$ (ta coi X là **không gian nền** nằm dưới, Y là **không gian toàn phần** nằm trên), sao cho mỗi điểm của X đều có một lân cận mà thớ được tạo thành từ một số (có thể vô hạn) bản sao rời rạc. Đây là một điều kiện hoàn toàn địa phương và từ nó không suy ra rằng bản thân Y gồm các bản sao rời rạc của X.



Hình 8: Phủ phổ dụng của đường tròn, cho bởi phép chiếu đường helix trong không gian 3–chiều lên mặt phẳng. Mỗi điểm trên đường tròn đều có một lân cận mà thớ được tạo thành từ các bản sao rời rạc của chính lân cận đó.

Một ví dụ về phủ vô hạn tờ là $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ cho bởi $p(x) = \cos(2\pi x) + i \cdot \sin(2\pi x)$. Phủ này được gọi là **phủ phổ dụng** của $\mathbb{S}^1$. Tại sao? Vì thông tin của nhóm cơ bản được thể hiện hoàn toàn trên nó. Một tính chất cơ bản của không gian phủ là tính nâng đường: cho một điểm $z \in \mathbb{S}^1$ và một điểm x trên thớ của z, tức là $p(x) = z$. Với một đường bất kỳ $f : I \to \mathbb{S}^1$ xuất phát từ z, ta có thể **nâng** nó thành một đường *duy nhất* $g : I \to \mathbb{R}$ xuất phát từ x, nghĩa là $p(g(t)) = f(t)$ và $g(0) = x$. Chẳng hạn khi f là một khuyên tại z (hay $f(0) = f(1) = z$) thì $g(1)$ cũng nằm trên thớ của z, điều này tương đương với việc $g(1) - g(0)$ là một số nguyên. Chênh lệch này này hóa ra chính là số vòng quay của khuyên f quanh đường tròn! Đây được gọi là **tác động đơn đạo** của nhóm cơ bản $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ lên phủ phổ dụng.



Hình 9: Tác động đơn đạo của nhóm cơ bản: khuyên $f_2(z) = z^2$ trên đường tròn được nâng thành phép tịnh tiến $g(x) = x + 2$ trên phủ phổ dụng.

Như vậy, số vòng quay, vốn là một thông tin bị che mất nếu ta chỉ đơn thuần nhìn vào vết của đường trên không gian nền, đã được phục hồi khi ta nhìn vào không gian phủ.

Định lý cơ bản của lý thuyết không gian phủ nói rằng có một tương ứng $1 - 1$ giữa các phủ (sai khác tương đương theo một nghĩa nào đó) với các nhóm con của nhóm cơ bản. Trong trường hợp đường tròn, các nhóm con của $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ gồm $n\mathbb{Z}$ với n nguyên dương (nhóm con các số nguyên chia hết cho n), cùng với $\{0\}$. Nhóm $n\mathbb{Z}$ có chỉ số n trong $\mathbb{Z}$ (có n lớp đồng dư modulo $n\mathbb{Z}$), nó ứng với phủ n-tờ $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ cho bởi $p_n(z) = z^n$. Nhóm $\{0\}$ ứng với phủ phổ dụng $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, một phủ vô hạn tờ (và $\{0\}$ cũng có chỉ số vô hạn trong $\mathbb{Z}$). Và đó là tất cả. Nói riêng, với mỗi n, vì $\mathbb{Z}$ chỉ có đúng một nhóm con với chỉ số n nên $\mathbb{S}^1$ chỉ có đúng một phủ n–tờ (sai khác tương đương).

Mở rộng trường

Lý thuyết về không gian phủ có một sự tương tự kỳ lạ với lý thuyết mở rộng trường của Galois. Để thấy phiên bản số học của đường tròn $\mathbb{S}^1$, ta quay lại với thế giới đại số. Một **trường** là một tập hợp số mà ta có thể làm các phép toán cộng, trừ, nhân, chia. Chính xác hơn, ta có hai phép toán $+$ và $\times$ sao cho chúng thỏa mãn các tiên đề kết hợp, giao hoán, phân phối, có phần tử trung lập 0, có phần tử đơn vị 1, mọi "số" đều có số đối, và mọi số khác 0 đều có nghịch đảo. Các ví dụ quen thuộc nhất là $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Trong khi đó, $\mathbb{Z}$ không phải một trường vì ta không thể làm phép chia $1 \div 2$ (sao kết quả vẫn nằm trong $\mathbb{Z}$).

Một thao tác ta có thể làm với các trường là **mở rộng**: ta kết nạp thêm nghiệm của một đa thức vô nghiệm trong trường ban đầu, và xét tất cả biểu thức thu được bằng cách cộng, trừ, nhân chia với phần tử mới này. Chẳng hạn, ta biết rằng đa thức $x^2 - 2$ không có nghiệm trong $\mathbb{Q}$. Khi kết nạp số thực $\sqrt{2}$, ta thu được tập các số $a + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị tại $\sqrt{2}$ của mọi đa thức hệ số hữu tỷ đều có thể viết được dưới dạng này: ta chỉ cần làm phép chia Euclid cho đa thức $x^2 - 2$ (dư sẽ có dạng $a + bx$) rồi thay $x = \sqrt{2}$. Để làm phép chia cho một số $a + b\sqrt{2} \neq 0$, ta chỉ đơn giản làm phép nhân liên hợp với $a - b\sqrt{2}$, vì $a + b\sqrt{2} = \frac{a^2 - 2b^2}{a - b\sqrt{2}}$.

Một câu hỏi mà thoạt nhìn có vẻ lẩm cẩm là "số $\sqrt{2}$ lấy từ đâu ra?". Việc xây dựng số thực từ số hữu tỷ là một thao tác phức tạp và nặng tính giải tích (gần như không hề đại số chút nào). Nhưng nếu ta không quan tâm đến tất cả số thực và chỉ muốn "cái gì đó bình phương lên bằng 2" thì sao? Các nhà đại số rất giỏi trong việc này, họ thêm một phần tử mới hoàn toàn hình thức và tuyên bố rằng nó là nghiệm của đa thức $x^2 - 2$, và ký hiệu nó bởi $\sqrt{2}$. Một kiểu "lý sự cùn": tôi chẳng quan tâm $\sqrt{2}$ đến từ đâu, tôi chỉ cần biết nó thỏa mãn $(\sqrt{2})^2 - 2$ = 0 và tôi cộng trừ nhân chia với nó cứ như thể chẳng có gì xảy ra vậy! Nếu để ý, ta sẽ thấy rằng một khi ta đã gọi một nghiệm là $\sqrt{2}$ thì nghiệm còn lại của $x^2 - 2$

là $-\sqrt{2}$ (đa thức bậc 2 nên chỉ có hai nghiệm này). Theo phong cách của các nhà đại số thì hoàn toàn không có cách nào để phân biệt giữa $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$ hết. Cứ chỗ nào có $\sqrt{2}$ thì thay bởi $-\sqrt{2}$, các tính toán vẫn không thay đổi. Để phân biệt hai số này, ta cần một thao mới (so với cộng, trừ, nhân, chia) là *so sánh*. Biết rằng có có hai căn bậc hai của 2 trong $\mathbb{R}$, ta sẽ tuyên bố rằng, số nào lớn hơn 0 thì được gọi là $\sqrt{2}$. Tình trạng tương tự xảy ra khi ta kết nạp vào $\mathbb{R}$ số i và tuyên bố rằng $i^2+1=0$, thứ mà ngày nay ta gọi là **số ảo**. Lúc này, để phân biệt i với $-i$, ta không thể so sánh các số phức được nữa, giải pháp duy nhất là chọn một trong hai căn bậc hai của -1 và gọi nó là i.

Tổng quát hơn, nếu f là một đa thức bất khả quy bậc $n>1$ với hệ số trong một trường K nào đó thì f không có nghiệm trong K (nếu nó có nghiệm $\alpha \in K$ thì nó chia hết cho đa thức $x-\alpha$, trái với giả thiết bất khả quy). Ta tuyên bố một cách hình thức rằng α là một "nghiệm nào đó" của f và kết nạp α vào K. Trường mới thu được, ký hiệu bởi $K(\alpha)$, gồm các tổng (hình thức) có dạng $a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}$, với $a_i \in K$. Ta cộng và trừ chúng một cách hiển nhiên. Khi làm phép nhân, ta chỉ cần chú ý rằng $f(\alpha)=0$, từ đó α^n cũng có dạng $a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}$, suy rộng ra thì giá trị tại α của mọi đa thức (bậc tùy ý) với hệ số trong K cũng có dạng này. Để làm phép chia cho một phần tử $a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1} \neq 0$, ta xét đa thức $g(x)a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$. Vì $g(x)\neq 0$ nên g không thể chia hết cho f, hay g và f nguyên tố cùng nhau (giả thiết f bất khả quy được dùng ở đây), nên thuật toán Bézout cho ta các đa thức u, v sao cho $fu+gv=1$, suy ra $g(\alpha)v(\alpha)=1$, hay $v(\alpha)$ chính là nghịch đảo cần tìm của $g(\alpha)$. Mở rộng trường $K(\alpha)/K$ được gọi là một **mở rộng bậc n**.

Trường hữu hạn

Nếu ta xét tập hợp $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ các lớp đồng dư modulo n với n là số nguyên dương cho trước, ta có thể làm phép cộng và phép nhân trên chúng một cách hiển nhiên. Thế thì $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ là một trường khi và chỉ khi $n=p$ là một số nguyên tố. Ta ký hiệu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ bởi $\mathbb{F}_p$, một trường có p phần tử. Các trường hữu hạn tìm thấy những ứng dụng quan trọng trong lý thuyết bảo mật hiện đại.

Tạm gác lại các ứng dụng của $\mathbb{F}_p$ trong tin học, ta hãy xem chúng có liên hệ gì với tôpô. Ta áp dụng phép mở rộng trường cho trường $\mathbb{F}_p$. Một suy luận đếm bằng hàm sinh và công thức nghịch đảo Möbius đảm bảo rằng với mỗi số nguyên dương n, luôn tồn tại một đa thức f với hệ số trong $\mathbb{F}_p$, bậc n, và bất khả quy. Kết nạp một nghiệm hình thức α của f vào $\mathbb{F}_p$, ta thu được trường mới mà mỗi phần tử được viết duy nhất dưới dạng dạng $a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}$, với $a_i \in \mathbb{F}_p$. Trường mới này vì thế có p^n phần tử.

Chẳng hạn, với $p=n=2$, đa thức bậc 2 bất khả quy duy nhất trên $\mathbb{F}_2$ là x^2+x+1. Ta tuyên bố rằng α là "cái gì đó" sao cho $\alpha^2+\alpha+1=0$ và kết nạp nó vào $\mathbb{F}_2$. Khi đó ta thu được một trường với 4 phần tử là 0, 1, α, $1+\alpha$. Hai phần tử α và $1+\alpha$ là nghịch đảo của nhau vì $\alpha(1+\alpha)=\alpha^2+\alpha=-1=1$ (ta đang xét modulo 2!), từ đó ta có thể dễ dàng cộng, trừ, nhân, chia trên 4 phần tử này.

Trở lại với trường với p^n phần tử, ta đã thấy rằng nó tồn tại. Ta muốn nó "duy nhất" theo nghĩa: hai trường có p^n phần tử thì **đẳng cấu** với nhau; một đẳng cấu trường là một tương ứng $1-1$ tương thích với các cấu trúc của trường (các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, số 0, số 1). Trước hết, bằng một suy luận đại số tuyến tính đơn giản, mỗi trường hữu hạn $\mathbb{F}$ đều phải có số phần tử q là lũy thừa của một số nguyên tố, $q=p^n$ chẳng hạn. Lúc này, $\mathbb{F}$ luôn "chứa" trường $\mathbb{F}_p$, theo nghĩa các phần tử $0,1,2\ldots p-1$ trong $\mathbb{F}$ tạo thành một bản sao đẳng cấu với $\mathbb{F}_p$; ta cộng, trừ, nhân, chia chúng theo modulo p. Khi bỏ đi số 0 khỏi $\mathbb{F}$, ta thu được một nhóm đối với phép nhân, một nhóm với $q-1$ phần tử. Định lý Lagrange trong lý thuyết nhóm đảm bảo rằng $a^{q-1}=1$ với mọi $a\neq 0$, hay $a^q=a$ với mọi $a\in\mathbb{F}$. Đây là một tổng quát hóa của định lý nhỏ Fermat trong $\mathbb{F}_p$ (vì thực ra cách chứng minh cũng y hệt). Vậy, mọi phần tử của $\mathbb{F}$ đều là nghiệm của đa thức x^q-x, hay $\mathbb{F}$ thu được bằng cách kết nạp tất cả nghiệm của đa thức này vào $\mathbb{F}_p$. Lý thuyết mở rộng trường gọi $\mathbb{F}$ là (một) **trường phân rã** của đa thức x^q-x, và nó đảm bảo rằng trường phân rã là duy nhất sai khác đẳng cấu. Như vậy, với mọi lũy thừa nguyên tố p^n, có duy nhất một trường với p^n phần tử, một mở rộng bậc n của $\mathbb{F}_p$.

Tổng quát hơn, nếu $\mathbb{F}$ là một trường hữu hạn thì với mọi số nguyên dương n, tồn tại duy nhất (sai khác đẳng cấu) một mở rộng bậc n của $\mathbb{F}$. Ta đã từng nói rằng lý thuyết không gian phủ có sự tương tự với lý thuyết mở rộng trường. Hãy nghĩ về các phủ n-tờ như các mở rộng bậc n. Vậy chẳng phải trường hữu hạn $\mathbb{F}$ rất giống đường tròn $\mathbb{S}^1$ ư? Dù trông nó như một sự tình cờ, ta hãy miễn cưỡng lấy quan sát này làm mở đầu cho sự liên hệ giữa tôpô và số học ở phần dưới. Sớm thôi, ta sẽ thấy rằng nó cũng không ngẫu nhiên lắm đâu.

Lược đồ

Bây giờ, hãy dạo qua thế giới hình học đại số một chút. Với ý tưởng tiên phong của Descartes là nghiên cứu các đối tượng hình học bằng các hệ tọa độ và phương trình đa thức, người ta đã dần dần phát triển hình học đại số. Khác với những người bạn bên tôpô học, các nhà hình học đại số nghiên cứu các đối tượng cứng nhắc hơn: tập nghiệm của các hệ phương trình đa thức. Sau một thời gian, giới toán học nhận ra rằng các trực giác hình học thường mang đến các chứng minh không chặt chẽ và đặc biệt là không giúp gì được ở số chiều cao hơn. Họ đã chuyển sang dùng đại số giao hoán làm công cụ chính để nghiên cứu hình học. Grothendieck, nhà toán học được công nhận rộng rãi là có ảnh hưởng nhất thế kỷ XX, đã cách mạng hóa hình học đại số một lần nữa bằng định nghĩa **lược đồ**.

Ta quay lại với khái niệm trường. Nếu bỏ qua việc luôn làm được phép chia, ta thu được khái niệm **vành**. Chẳng hạn, $\mathbb{Z}$ và $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ là các vành (phép cộng và phép nhân được hiểu theo nghĩa hiển nhiên). Chú ý rằng ta vẫn yêu cầu làm được phép trừ, nên $\mathbb{N}$ không phải là một vành. Với mỗi vành R, ta xây dựng được một không gian tôpô $\operatorname{Spec}(R)$, được gọi là **phổ** của R. Nếu chỉ nhìn $\operatorname{Spec}(R)$ như một không gian thì ta mất rất nhiều thông tin. Chẳng hạn, phổ của một trường luôn là một điểm. Vì thế, người ta đã làm giàu $\operatorname{Spec}(R)$ một cấu trúc gọi là **bó**, chúng làm cho $\operatorname{Spec}(R)$ trở thành một lược đồ.

Cũng như việc người ta quan tâm đến các hàm liên tục giữa các không gian tôpô, trong hình học đại số người ta quan tâm đến các **cấu xạ** giữa các lược đồ. Một cấu xạ $\operatorname{Spec}(R)\to\operatorname{Spec}(S)$ đơn giản được cho bởi một **đồng cấu vành** theo chiều ngược lại $f:S\to R$, đồng cấu ở đây nghĩa là $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(xy)=f(x)f(y)$ và $f(1)=1$. Chẳng hạn, $\mathbb{Z}$ là một vành con của $\mathbb{Q}$, và phép bao hàm $\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ cho ta một cấu xạ $\operatorname{Spec}(\mathbb{Q})\to\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$. Về mặt tôpô thì $\operatorname{Spec}(\mathbb{Q})$ chỉ có một điểm, nên ảnh của cấu xạ này là một điểm của $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$, được gọi là **điểm tổng quát**. Với mỗi số nguyên tố p, phép lấy dư modulo $p:\mathbb{Z}\to\mathbb{F}_p$ cho ta một cấu xạ $\operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p)\to\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$, đó là một **điểm đóng**. Các điểm đóng này và điểm tổng quát tạo nên không gian $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$. Khác với các không gian Euclid, tôpô trên lược đồ $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ rất thô: điểm tổng quát là một điểm nhưng lại trù mật trong cả không gian (người ta hay nói "điểm tổng quát là điểm nằm ở mọi nơi, nhưng không nằm cụ thể ở đâu cả").

Quay lại với lý thuyết không gian phủ. Khi áp dụng nó cho lược đồ, ta không thể chỉ xét khía cạnh tôpô ngây thơ được. Ta muốn

$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ giống với đường tròn $\mathbb{S}^1$, nhưng $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ lại chỉ có một điểm. Vấn đề với không gian tôpô $\mathrm{Spec}(R)$ là nó có quá ít lân cận, mỗi lân cận đều quá lớn. Cách khắc phục là sáng tạo ra một khái niệm tôpô mới dùng được cho các lược đồ (thứ mà ngày nay gọi là tôpô Grothendieck), với các "lân cận" mới. Một trong những loại tôpô đủ mạnh để phân biệt các "không gian 1 điểm" $\mathrm{Spec}(K)$ (với K là các trường) là **tôpô étale**. Từ "étale" được lấy từ văn học Pháp, mang nghĩa nôm na là trạng thái dịu dàng của biển. Với công cụ mới này, người ta định nghĩa được khái niệm nhóm cơ bản étale của lược đồ. Chẳng hạn, nhóm cơ bản étale của $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ là một nhóm có cùng họ hàng với $\mathbb{Z}$, gọi là "$\mathbb{Z}$ mũ". Điều này giải thích vì sao việc coi $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ như đường tròn $\mathbb{S}^1$ là hợp lý. Tương tự, khái niệm phủ trong thế giới lược đồ phải được hiểu là phủ étale. Đối với các trường, một phủ étale của $\mathrm{Spec}(K)$ đơn giản là $\mathrm{Spec}(L)$, với L/K là một mở rộng bậc hữu hạn. Như vậy, dù $\mathrm{Spec}(K)$ về mặt tôpô chỉ một 1 điểm, nó lại có nhóm cơ bản étale không tầm thường, hay có rất nhiều phủ.

Thực ra khái niệm mở rộng trường và mở rộng vành còn cho ta thêm một chút bên phía tôpô, nó ứng với khái niệm **phủ phân nhánh**. Nói nôm na, một phủ phân nhánh bậc n là một hàm liên tục $p : Y \to X$ sao cho nếu bỏ đi một số hữu hạn điểm của X (và các điểm của Y nằm trên chúng) thì ta thu được một phủ n-tờ. Các điểm bỏ đi kia (cùng các điểm nằm trên) gọi là các **điểm rẽ nhánh** của p. Hiện tượng rẽ nhánh là phiên bản hình học của hiện tượng "nghiệm bội" trong đại số. Ta xét ví dụ khi Y là đường cong elliptic cho bởi phương trình $y^2 = x(x-1)(x-2)$ trong $\mathbb{C}^2$ và $X = \mathbb{C}$. Lấy p là phép chiếu lên trục hoành, $p(x,y) = x$. Khi bỏ đi các điểm $0,1,2$ khỏi X (và các điểm $(0,0),(1,0),(2,0)$ khỏi Y), ta thu được một phủ 2–tờ: với mỗi $x \neq 0,1,2$ thì phương trình $y^2 = x(x-1)(x-2)$ có hai nghiệm phức phân biệt. Ở các điểm $0,1,2$ xảy ra hiện tượng rẽ nhánh, phương trình $y^2 = 0$ có nghiệm kép $y = 0$. Ta nói rằng **chỉ số rẽ nhánh** của p tại các điểm $(0,0),(1,0),(2,0)$ bằng 2.

Lý thuyết số đại số

Để tìm hiểu các phủ (étale) phân nhánh của lược đồ $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, ta bắt đầu từ điểm tổng quát: Phủ étale của $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ thì có dạng $\mathrm{Spec}(K)$, với $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, và α là nghiệm của một đa thức bậc n bất khả quy với hệ số hữu tỷ. Số α như vậy được gọi là một **số đại số**, chẳng hạn $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ là các số đại số. Trường K được gọi là một **trường số**, và mọi phần tử của nó đều là số đại số. Ta muốn thứ gì đó trong K đóng vai trò như các số nguyên đối với số hữu tỷ. Đó là các **số nguyên đại số**. Chúng là những phần tử của K mà là nghiệm của một đa thức với hệ số nguyên và hệ số đầu bằng 1. Chẳng hạn $\sqrt{2}$ là một số đại số vì nó là nghiệm của x^2-2. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ cũng là một số nguyên đại số (dù trông không có vẻ vậy) vì nó là nghiệm của x^2-x-1. Các số nguyên đại số trong K tạo thành một vành $\mathscr{O}$. Việc chuyển từ $\mathbb{Z}$ sang $\mathscr{O}$ là chuyển từ lý thuyết số sơ cấp sang lý thuyết số đại số. Một bài tập đơn giản (bằng cách dùng phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố) là: Các số nguyên đại số trong $\mathbb{Q}$ chính là các số nguyên theo nghĩa cổ điển.

Lý thuyết số đại số xuất phát từ nỗ lực chứng minh định lý lớn Fermat của Cauchy, Lamé... Ý tưởng như sau: với phương trình $x^2+y^2 = z^2$ chẳng hạn, ta giải bằng cách đưa về $x^2 = z^2-y^2 = (z-y)(z+y)$, sau đó lập luận (với phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố) rằng $z-y$ và $z+y$ phải là các số chính phương. Bây giờ, xét phương trình $x^p+y^p = z^p$, với p là số nguyên tố lẻ (dễ thấy ta chỉ cần xét trường hợp này). Để phân tích triệt để z^p-y^p thành các nhân tử bậc nhất, ta buộc phải dùng căn bậc p phức của 1. Gọi nó là $\zeta = \cos(\frac{2\pi}{p}) + i\cdot\sin(\frac{2\pi}{p})$. Thế thì ζ là một số nguyên đại số (nghiệm của phương trình x^p-1). Và như vậy ta đưa về chứng minh rằng phương trình trên không có nghiệm trong vành mới $\mathbb{Z}[\zeta]$, vành các số nguyên đại số của $\mathbb{Q}(\zeta)$. Sơ hở của cách tiếp cận này là lập luận như trong trường hợp $p=2$ không còn đúng nữa, vì nói chung không có phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố trong $\mathbb{Z}[\zeta]$.

Một ví dụ về sự thiếu sót của phân tích duy nhất là trường số $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. Vành số nguyên đại số của nó là $\mathscr{O}=\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, gồm các số có dạng $a+b\sqrt{-5}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Số 6 có thể phân tích thành $6=2\cdot 3=(1+\sqrt{-5})\cdot(-\sqrt{-5})$. Để thấy rằng hai phân tích này là triệt để và thực sự khác nhau, ta định nghĩa **chuẩn** của một số $a+b\sqrt{-5}$ bởi $N(a+b\sqrt{-5})=a^2+5b^2$. Đây là một số tự nhiên, và ta thấy ngay rằng $N(xy)=N(x)N(y)$. Trong phân tích $6=2\cdot 3=(1+\sqrt{-5})\cdot(-\sqrt{-5})$, ta có $N(2)=4, N(3)=9, N(1+\sqrt{-5})=N(1-\sqrt{-5})=6$, nên các nhân tử xuất hiện ở hai phân tích thực sự khác nhau. Ngoài ra, về cơ bản ta không thể phân tích thêm được nữa, vì không có phần tử nào có chuẩn bằng 2 hoặc 3 (một tính toán số học đơn giản cho thấy rằng phương trình các $a^2+5b^2=2$ và $a^2+5b^2=3$ đều không có nghiệm nguyên). Điều này cho thấy sự thiếu sót của phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố trong $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Sự sụp đổ của phân tích duy nhất trong $\mathscr{O}$ đã chấm dứt hi vọng chứng minh định lý lớn Fermat bằng lý thuyết số đại số cổ điển. Dù vậy, vành $\mathscr{O}$ vẫn giữ được một tính chất của vành $\mathbb{Z}$; nó là một **vành Dedekind**. Thay vì phân tích duy nhất của các số, người ta định nghĩa khái niệm **số lý tưởng** (cái mà ngày nay gọi là **iđêan**). Đại khái nó là thứ gì đó cho phép nói về quan hệ chia hết cũng như làm phép nhân. Việc $\mathscr{O}$ là vành Dedekind có nghĩa là mọi số lý tưởng đều phân tích một cách duy nhất ra các số lý tưởng nguyên tố. Một số nguyên đại số $a\in\mathscr{O}$ định nghĩa một số lý tưởng (a), được gọi là một số lý tưởng chính. Hai số a và b định nghĩa cùng một số lý tưởng nếu chúng **liên kết**, nghĩa là $a|b$ đồng thời $b|a$. Nói riêng, nếu là $u|1$ thì $(u)=(1)$. Nếu tất cả số lý tưởng nguyên tố đều có dạng trên thì $\mathscr{O}$ có phân tích duy nhất của các số (thực sự). Điều này không đúng trong $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$; cụ thể là khi phân tích $(6)=(2)\cdot(3)=(1+\sqrt{-5})\cdot(1-\sqrt{-5})$, ta vẫn phân tích được tiếp: $(2)=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $(3)=\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4$, $(1+\sqrt{-5})=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3$, $(1-\sqrt{-5})=\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4$, trong đó $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\mathfrak{p}_3,\mathfrak{p}_4$ là các số lý tưởng nguyên tố *không chính*. Chuẩn của chúng lần lượt là $N(\mathfrak{p}_1)=N(\mathfrak{p}_2)=2$ và $N(\mathfrak{p}_3)=N(\mathfrak{p}_4)=3$. Như vậy ta có phân tích duy nhất của (6) thành các số lý tưởng.

Cũng như mỗi số nguyên tố p ứng với các điểm đóng $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)\to\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, mỗi số lý tưởng nguyên tố $\mathfrak{p}$ trong trong $\mathscr{O}$ cho ta một trường hữu hạn $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ (gọi là **trường thặng dư** của $\mathfrak{p}$), cùng một điểm đóng $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})\to\mathrm{Spec}(\mathscr{O})$. Cùng với điểm tổng quát $\mathrm{Spec}(K)$, chúng tạo thành lược đồ $\mathrm{Spec}(\mathscr{O})$. Vì $\mathbb{Z}$ là một vành con của $\mathscr{O}$, ta có một cấu xạ $\mathrm{Spec}(\mathscr{O})\to\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, một phủ étale phân nhánh. Mỗi số nguyên tố p trong $\mathbb{Z}$ có thể không còn là số lý tưởng nguyên tố trong $\mathbb{O}$, nó phân rã thành tích của một số hữu hạn số lý tưởng nguyên tố, $(p)=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_n$. Các số lý tưởng nguyên tố xuất hiện trong phân tích trên chính xác là những điểm của $\mathrm{Spec}(\mathscr{O})$ nằm trên điểm đóng của $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ứng với p. Hiện tượng phân nhánh nhánh xảy ra nếu có một số lý tưởng $\mathfrak{p}_i$ xuất hiện nhiều lần trong phân tích trên, ta gọi đó số lần đó là **chỉ số rẽ nhánh** của $\mathfrak{p}_i$, nó đóng vai trò như chỉ số rẽ nhánh trong tôpô cổ điển.

Một bất đẳng thức trong lý thuyết số đại số, *chặn Minkowski*, cho phép xác định cụ thể phân tích trên. Hơn thế nữa, nó còn cho ta biết chính xác khi nào thì một số nguyên tố p rẽ nhánh trong $\mathscr{O}$. Một hệ quả của nó là với mọi trường số K, luôn có ít nhất một số nguyên tố p rẽ nhánh trong vành $\mathscr{O}$ các số nguyên đại số trong K, nghĩa là $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ không có phủ étale không rẽ nhánh nào ngoài phủ tầm thường (cho bởi ánh xạ đồng nhất $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$), hay nó là đơn liên.

Nút

Trong thế giới của các không gian tôpô thì có rất nhiều không gian đơn liên, và ta muốn tìm cái nào giống với $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Sự đột phá nằm ở các phát hiện sau đây của Mumford, Manin, và sau này là Mazur. Ở phía tôpô, các khái niệm điểm (0–chiều), đường (1–chiều), mặt (2–chiều) được tổng quát lên thành các đa tạp. Một đa tạp 3–chiều là một không gian tôpô mà nhìn địa phương thì giống như không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ (cũng như bề mặt trái đất là một đa tạp 2–chiều, nhìn địa phương thì giống như mặt phẳng).

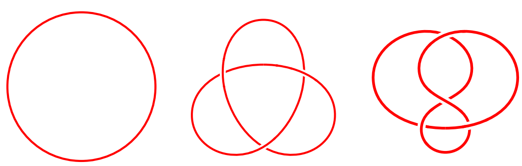
Bên cạnh nhóm cơ bản, tôpô đại số cổ điển còn cung cấp các bất biến đại số khác cho các không gian tôpô, gọi là các **nhóm đồng điều**. Nhóm đồng điều bậc n của một đa tạp X được xây dựng như sau: Xét các tổ hợp tạo thành từ một số đa tạp con n–chiều (chúng được gọi là các **n-dây chuyền**). Nếu chúng tạo thành một vòng kín, ta gọi nó là một **n–chu trình**. Nếu nó tạo thành biên của một đa tạp con $(n+1)$–chiều, ta gọi nó là một **n–biên**. Một n–biên thì luôn là một n–chu trình. Nhóm $H_n(X)$ được định nghĩa là chênh lệch giữa các nhóm các n–chu trình và nhóm các n–biên: một n–chu trình mà không phải n–biên thì nó bao quanh một "lỗ thủng" $(n+1)$–chiều; như vậy các nhóm đồng điều phát hiện các lỗ thủng trên X. Phiên bản đối ngẫu của đồng điều là **đối đồng điều**, các nhóm $H^n(X)$. Về cơ bản thì chúng cũng phát hiện các lỗ thủng. Về mặt kỹ thuật thì chúng dễ tính toán hơn đồng điều một chút, đồng thời có nhiều cấu trúc hơn. *Đối ngẫu Poincaré* nói rằng nếu X là một đa tạp đóng, khả định hướng, d–chiều, thì ta có một đối ngẫu hoàn hảo giữa hai nhóm $H^{d-i}(X)$ và $H^i(X)$ với mỗi $i = 0, 1, \ldots, d$.

Với các lược đồ, các nhóm đối đồng điều nhìn chung không cho thông tin gì (phần lớn chúng bằng 0) khi ta tính theo tôpô thông thường. Một lần nữa nhờ công của Grothendieck, ta có thể tính đối **đồng điều étale**. Trên một trường, chúng được gọi là đối **đồng điều Galois**, một công cụ đã được dùng từ lâu trước đó trong số học. Với các trường hữu hạn, đối đồng điều Galois của chúng rất đơn giản, chúng khác 0 ngoài bậc 0 và 1, và ta có một đối ngẫu hoàn hảo giữa các nhóm đối đồng điều ở hai bậc này. Điều này tương tự với đối ngẫu Poincaré cho các đa tạp 1–chiều, khẳng định thêm niềm tin rằng phổ của trường hữu hạn là phiên bản đại số của đường tròn.

Đối với các lược đồ $\mathrm{Spec}(\mathscr{O})$, với $\mathscr{O}$ là vành số nguyên đại số của một trường số K nào đó, các nhóm đối đồng điều étale thỏa mãn đối ngẫu giữa bậc 0 và bậc 3 cũng như bậc 1 và bậc 2. Các kết quả này được gọi là *đối ngẫu Artin–Verdier*, được khám phá khi áp dụng đối đồng điều étale cho lý thuyết trường các lớp toàn cục, một phần của lý thuyết số. Điều này gợi cho ta rằng phiên bản tôpô của $\mathrm{Spec}(\mathscr{O})$ "nên" là các đa tạp 3–chiều. Vậy $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ứng với đa đạp đóng 3–chiều nào? Ta thấy ở trên rằng $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ đơn liên, và đa tạp đóng 3–chiều đơn liên thì chỉ có thể đồng phôi với mặt (siêu) cầu $\mathbb{S}^3$! Đó là nội dung của *giả thuyết Poincaré*, bài toán duy nhất đã được giải trong 7 bài toán thiên niên kỷ. Tác giả của lời giải, thiên tài lập dị Perelman, đã từ chối cả Huy chương Fields lẫn Giải Breakthrough cho công trình vô song của mình.

Sau khi bỏ ra rất nhiều công sức, ta đã thấy được cầu nối mong manh giữa tôpô, rằng phiên bản số học của $\mathbb{S}^1$ là (phổ của) một trường hữu hạn, và của một đa tạp đóng 3–chiều là vành các số nguyên đại số của một trường số. Bây giờ là lúc chúng ta thu hoạch kết quả, chiêm ngưỡng những sự tương tự đáng ngạc nhiên dựa trên cầu nối này. Một số lý tưởng nguyên tố $\mathfrak{p}$ trong $\mathscr{O}$ cho ta một phép nhúng $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_\mathfrak{p}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathscr{O})$. Về phía tôpô, ta xét các phép nhúng $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow M$, với M là một đa tạp (đóng, khả định hướng) 3-chiều. Chúng được gọi là các **nút** trong M. Nói riêng, phiên bản tôpô của mỗi số nguyên tố p (với phép nhúng tương ứng $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$) là một nút trong $\mathbb{S}^3$ (ta sẽ tập trung vào các nút này). Từ một định lý sâu sắc trong tôpô học, *định lý Borsuk–Ulam*, ta có thể chỉ ra rằng một phép nhúng như thế không thể là toàn ánh, nghĩa là ta có thể xem một nút như một phép nhúng từ $\mathbb{S}^1$ vào $\mathbb{S}^3$ bỏ đi một điểm, nói cách khác chính là không gian Euclid $\mathbb{R}^3$.

Để biểu diễn một nút $K : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ta có thể chiếu nó lên một mặt phẳng sau cho tại mỗi điểm giao nhau chỉ có đúng 2 đường đi qua. Chúng ứng với một **sợi trên** và một **sợi dưới**, ta biểu diễn sợi dưới bằng nét đứt tại giao điểm đó. Đó là một **biểu đồ phẳng** của nút.



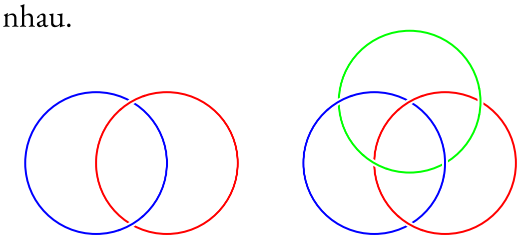
Hình 10: Biểu đồ phẳng của nút tầm thường, nút ba lá, và nút số 8.

Tất nhiên, mọi nút đều đồng phôi với $\mathbb{S}^1$. Ta cần cả thông tin về phép nhúng $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ để phân biệt các nút với nhau. Các nhà lý thuyết nút gọi sự giống nhau của các nút là **đẳng luân**. Một cách trực giác, hai nút đẳng luân nếu ta có thể tháo dỡ một nút rồi buộc thành nút còn lại (mà không cắt được cắt nút ra). Hóa ra, hai nút đẳng luân khi và chỉ khi phần bù của chúng trong $\mathbb{S}^3$ đồng phôi với nhau (*định lý Gordon–Luecke*).

Từ điển M²KR

Từ điển Mazur–Morishita–Kapranov–Reznikov (M²KR) là một danh sách những sự tương tự giữa lý thuyết số và hình học của các đa tạp 3–chiều; ở đó các số lý tưởng tưởng ứng với các liên kết, các số lý tưởng nguyên tố ứng với các nút. Sau đây là một số tương ứng giữa tôpô và số học trong từ điển này.

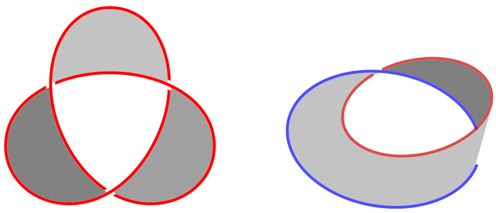
Mỗi số lý tưởng trong $\mathscr{O}$ phân tích thành tích của các số lý tưởng nguyên tố. Phiên bản tôpô của số lý tưởng là **liên kết**: một liên kết trong một đa tạp đóng 3–chiều M là một phép nhúng từ một số hữu hạn bản sao rời rạc của $\mathbb{S}^1$ vào M. Các ví dụ về liên kết trong $\mathbb{S}^3$ là **liên kết Hopf** và **vòng Borromean**, lần lượt được tạo bởi 2 và 3 nút tầm thường lồng nhau.



Hình 11: Biểu đồ phẳng của liên kết Hopf và vòng Borromean.

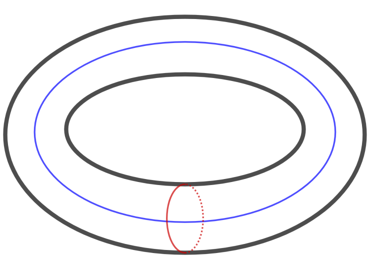
Để thêm phần thuyết phục rằng tại sao M lại tương ứng với (vành số nguyên đại số) một trường số, ta nhắc đến *định lý Alexander*: Mọi đa tạp đóng 3–chiều đều là một phủ phân nhánh của $\mathbb{S}^3$, trong đó các điểm rẽ nhánh trong $\mathbb{S}^3$ tạo thành một liên kết. Tương tự, một mở rộng L/K của trường số có thể được coi như một phủ phân nhánh giữa hai đa tạp đóng 3–chiều.

Một số nguyên đại số $a \in \mathscr{O}$ ứng với một mặt compact S (có thể có biên) nhúng trong đa tạp đóng 3–chiều M. Số lý tưởng chính (a) ứng với biên ∂S, đây là một liên kết, và chúng ứng với các 1–đối biên, tức là phần tử 0 trong nhóm đồng điều $H_1(M)$. Các số lý tưởng khác tương ứng với các liên kết, chúng là các 1–chu trình mà không phải biên, đại diện cho các phần tử không tầm thường của $H_1(M)$. Ta biết rằng trong $\mathbb{Z}$ có phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố, hay mọi số lý tưởng nguyên tố đều là số lý tưởng chính. Tương ứng, với $M = \mathbb{S}^3$, ta có $H_1(M) = 0$ (vì $\mathbb{S}^3$ không có lỗ thủng 2–chiều nào), nghĩa là mọi liên kết đều là biên của một mặt nào đó. Seifert đã đưa ra một thuật toán khá đơn giản để xây dựng một mặt với biên cho trước. Chẳng hạn, **mặt Seifert** của liên kết Hopf chính là *mặt Möbius*.



Hình 12: Mặt Seifert của nút ba lá và của liên kết Hopf (mặt Möbius).

Sự tương tự tiếp theo: với p là một số nguyên tố, ta xét vành $\mathbb{Z}_p$ các số nguyên p–adic cũng như trường $\mathbb{Q}_p$ các số p–adic. So với $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, phổ $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ chỉ còn 2 điểm là điểm tổng quát $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$ và điểm đóng $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$, vì thế ta gọi thao tác này **địa phương hóa** (tập trung nhìn vào số nguyên tố p và quên đi các số nguyên tố khác). Thao tác này ứng với việc lấy **lân cận ống** V của nút, kết quả thu được là một hình xuyến đặc. Dù hình xuyến đặc không đồng phôi với đường tròn, chúng **tương đương đồng luân với nhau**, điều này ứng với việc $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ và $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ **tương đương đồng luân étale với nhau**. Khi bỏ nút ban đầu khỏi V, ta thu được một không gian tương đương đồng luân với mặt xuyến (rỗng). Nhóm cơ bản của mặt xuyến là $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, một nhóm được sinh bởi hai phần tử là hai khuyên như trong Hình 13.

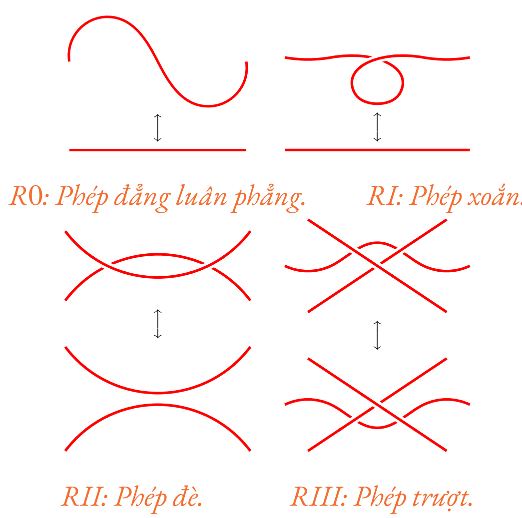


Hình 13: Nhóm cơ bản của mặt xuyến được sinh bởi hai khuyên màu xanh và màu đỏ.

Tương ứng, khi bỏ $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ khỏi $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$, ta thu được $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$, và **nhóm Galois rẽ nhánh yếu** (một phiên bản nhỏ hơn của nhóm cơ bản étale) của $\mathbb{Q}_p$ cũng được mô tả bởi 2 phần tử sinh. Sau cùng, lý thuyết trường các lớp địa phương của Tate cho ta các đối ngẫu hoàn hảo giữa đối đồng điều Galois của $\mathbb{Q}_p$ ở bậc 0 và bậc 2, cũng như ở bậc 1 và chính nó. Tương ứng, ta có đối ngẫu Poincaré cho mặt xuyến, một đa tạp đóng 2–chiều.

Thao tác trên biểu đồ phẳng

Quay lại với sự đẳng luân của các nút. Một câu hỏi rất tự nhiên là làm thế nào để chứng minh hai nút không đẳng luân? Đẳng luân vốn là một điều kiện tôpô quá khó sử dụng. Một khó khăn khi sử dụng các biểu đồ phẳng là hai nút đẳng luôn có thể cho hai biểu đồ phẳng trông rất khác nhau. Vậy vấn đề đầu tiên là ta cần tìm cách phân biệt hai nút qua biểu đồ phẳng của chúng (bài toán nhận biết nút). Điều này có thể được thực hiện một cách tổ hợp. Cụ thể, hai biểu đồ phẳng biểu diễn hai nút đẳng luân khi và chỉ khi tồn tại một chuỗi hữu hạn các thao tác thuộc một trong 4 kiểu, được gọi là các **chuyển động Reidemeister**.



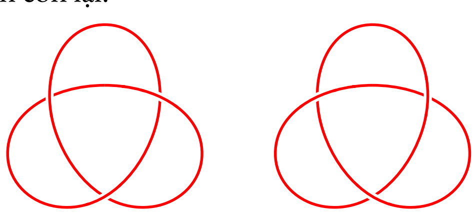
Hình 14: Các chuyển động Reidemeister.

Từ biểu đồ phẳng của nút, ta dùng các đại lượng không đổi qua các biến đổi Reidemeister, các **bất biến nút**. Hai nút có bất biến khác nhau thì phải khác nhau. Một ví dụ như vậy là **bất biến tô màu**. Ta nói một biểu đồ phẳng của nút là **tô được bằng 3 màu** nếu mỗi sợi (phần đường cong liên tục giữa hai giao điểm liên tiếp của nút) đều có thể tô được bằng một trong 3 màu cho trước, sao cho

- ít nhất hai màu phải được dùng;
- tại mỗi giao điểm, sợi trên cùng 2 sợi dưới hoặc là được tô cùng màu, hoặc là được tô 3 màu khác nhau.

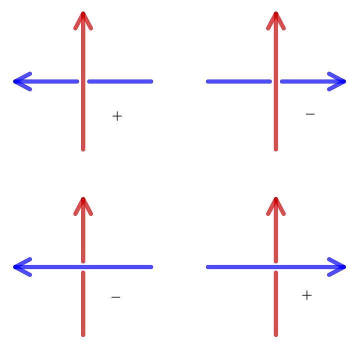
Ví dụ, nút ba lá hiển nhiên tô được bằng 3 màu, nút tầm thường hiển nhiên không tô được bằng 3 màu. Nút số 8 cũng không tô được bằng 3 màu. Vậy ít nhất ta biết rằng nút 3 lá không đẳng luân với nút tầm thường cũng như nút số 8.

Hiển nhiên là bất biến tô màu chỉ cho phép phân loại các nút thành 2 lớp. Ta cần các loại bất biến khác. Ví dụ, xét nút ba lá trái và ảnh gương của nó là nút ba lá phải. Tất nhiên cả hai đều tô được bằng 3 màu. Rất ngạc nhiên, hai nút này không đẳng luân! Hãy thử dùng các biến đổi Reidemeister để gỡ nút này thành nút kia và bạn sẽ sớm bị thuyết phục. Một bất biến cho phép phân biệt hai nút này là **đa thức Alexander**. Đa thức này đến từ *lý thuyết Alexander–Fox*, và người ta phát hiện ra phiên bản số học của nó là *lý thuyết Iwasawa*. Sự song song của chúng cho phép ta dịch các kết quả từ một bên sang bên còn lại.



Hình 15: Nút ba lá trái và nút ba lá phải.

Một kiểu bất biến khác cho liên kết là **số liên kết**. Xét một liên kết được tạo bởi hai nút. Giữa hai nút L và K, ta có thể định nghĩa **số liên kết** qua biểu đồ phẳng của chúng như sau. Chẳng hạn, tô màu đỏ cho L và màu xanh cho K, đồng thời định hướng cho chúng (mỗi nút có thể có 1 trong 2 hướng). Tại các điểm trên biểu đồ phẳng mà có một sợi của nút này nằm trên một sợi của nút kia hoặc ngược lại, ta đánh dấu $+$ hoặc $-$ theo quy tắc ở Hình 16. Sau đó ta lấy số dấu cộng trừ đi số dấu trừ, và lấy kết quả chia đôi. Kết quả cuối cùng thu được được gọi là số liên kết $\operatorname{lk}(L, K)$. Chẳng hạn, số liên kết của hai nút trong liên kết Hopf là 1 hoặc -1, tùy theo cách định hướng hai nút.



Hình 16: Quy tắc tính số liên kết.

Nhiều tính toán cho thấy rằng số liên kết thỏa mãn các tính chất tương tự như **ký hiệu Legendre** $\left(\frac{p}{q}\right)$ giữa hai số nguyên tố p, q trong lý thuyết thặng dư bậc hai. Ta có thể chứng minh rằng $\operatorname{lk}(K, L) = \operatorname{lk}(L, K)$. Tương ứng, ta có luật tương hỗ bậc hai, nói rằng

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}} \left(\frac{q}{p}\right).$$

Bài toán trung tâm của tôpô số học có lẽ là câu hỏi tự nhiên nhất: số nguyên tố nào ứng với nút nào? Đây vẫn là một câu hỏi mở. Nếu một ngày người ta xây dựng được một tương ứng $1-1$ tốt giữa chúng, theo nghĩa mỗi kết quả với số nguyên tố thì ta có kết quả với các nút tương ứng, một số lượng khổng lồ bài toán tôpô học sẽ được giải bằng các kết quả tương tự ở lý thuyết số, và ngược lại. Có thể nói, tôpô số học là một trong những ví dụ điển hình nhất về tư tưởng toán học thống nhất, rằng tất cả những đại số, giải tích, hình học, số học... đều chỉ là một.

NHỮNG CÂU NÓI CUỐI CÙNG HUYỀN THOẠI CỦA ARCHIMEDES

PHẠM TRIỀU DƯƠNG

"Xin đừng xáo trộn những vòng tròn của tôi"

Μὴ μου τοὺς κύκλους τάραττε (tiếng Hy lạp)

Noli turbare circulos meos (Tiếng La tinh)

Khi chúng ta còn nhỏ, chắc hẳn ai cũng đều nghe tới chuyện, có một ông già thời cổ đại nào đó, ông ta ngồi trên bờ biển, đang vẽ một cái hình gì đó trên cát thì một người lính cưỡi ngựa đi qua và vô tình đâm chiếc giáo làm ông già ngã xuống, ông ấy chỉ kịp thốt lên "ôi, làm ơn đừng làm hỏng những hình vẽ của tôi".

Câu chuyện này làm chúng ta mê say tới mức, lúc còn thơ ấu, cứ mỗi lần bạn và tôi đi nghỉ hè ở biển, chúng ta đều cố thử ngồi trên cát trắng và vẽ những hình tam giác, hình tròn và đợi những ngọn sóng ập tới xoá đi nhanh chóng những ký hoạ tạo ra trong những hình dung đẹp đẽ mơ hồ của chúng ta về một môn học gọi là Toán.

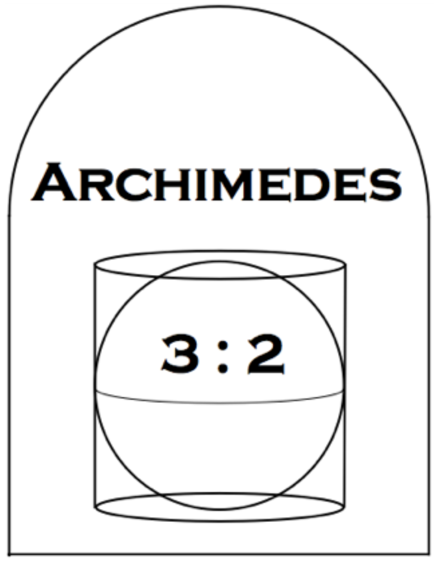
Rồi tới khi học Vật lý, chúng ta lại được biết tới một ông già nào đó khác ở một xứ nọ, ông đang ngồi ngâm mình trong bồn tắm thì bỗng vùng dậy chạy ra đường và kêu lên: Eureka! Tất cả các bạn bè của chúng ta đều yêu mến câu chuyện đó, và đều hay thốt lên một cách hồn nhiên "Eureka!" khi muốn nói đến một khám phá bất chợt, giống như khi giải ra được một bài toán khó vào chiều tối thứ Sáu.

Các câu chuyện trên đều về một người, đó là Archimedes xứ Syracuse (287 – 212). Về cái chết của ông, Wikipedia có viết ngắn gọn như sau: "Archimedes chết trong đợt vây hãm thành Syracuse, ở đó ông bị một người lính La Mã giết mặc dù có mệnh lệnh phải bảo toàn tính mạng cho Archimedes." Vào lúc đó, Archimedes, nổi tiếng với trí tuệ kiến thức uyên thâm về hình học và cơ học, đã làm cho tướng quân La Mã là Marcus Claudius Marcellus phải nể phục. Marcellus biết rằng mình đã phải nhọc nhằn như thế nào trong việc chinh phục thành Syracuse cũng do các cỗ máy cơ học tinh xảo mà Archimedes chế tạo đã giúp dân thành chống cự được lính La Mã thiện chiến. Người La Mã nổi tiếng với tính tàn ác lạnh lùng, nhưng cũng là những người đề cao danh dự chiến trường. Vì quá hâm mộ tài năng đột xuất của Archimedes, tướng quân Marcellus ra lệnh phải giữ mạng sống cho nhà toán học – đối với Marcellus, cứu được Archimedes cũng đáng được vinh quang như hạ được thành luỹ của Syracuse bằng gươm kiếm.

Tuy nhiên, một người lính được cử đến để yêu cầu Archimedes nộp mình làm tù binh cho quân La Mã đã làm hỏng kế hoạch tỷ mỷ mà Marcellus nghĩ ra. Anh ta thô lỗ đạp cửa đột nhập vào nhà của Archimedes, đúng lúc nhà toán học đang trầm ngâm mải mê vẽ những hình vẽ phức tạp. Người lính tuốt kiếm ra và hỏi Archimedes tên ông là gì. Archimedes vì đang mải miết với công việc, không nhận thấy ai đang chỉ kiếm về mình, đã nói với người lính “Xin làm ơn đừng có làm xáo trộn những hình vẽ của tôi, anh bạn ơi!”. Ông còn hét lên “Ai đưa giúp cho tôi một trong những cái máy của tôi nào!” Người lính La Mã, vì quá sợ hãi, theo bản năng tự vệ bèn đâm thẳng kiếm vào ông già yếu ớt, và cũng trong giây phút ấy, đã hạ gục nhà toán học vĩ đại.

Nhưng vì sao lại có câu chuyện về Archimedes bị đâm chết khi ngồi trên bãi cát nhỉ? Phần lớn các tài liệu đều đồng ý, ông đang ngồi tại nhà riêng và đang vẽ những hình hình học thì bị người lính đột nhập tới đâm ông bằng kiếm. Lúc đó Archimedes đang sử dụng một công cụ là bảng vẽ abax, một dụng cụ để vẽ bằng bụi cát. Vì vậy mới có dị bản trên về bãi cát như tôi và các bạn đã từng nghe khi còn nhỏ.

Ân hận với hành động bất cẩn của quân lính, Marcellus đã xin lỗi họ hàng của Archimedes và cho đặt trên mộ của ông một biểu tượng mô tả một hình cầu đặt trong một hình trụ, và mãi 137 năm sau, một nhà chính trị gia La Mã là Cicero mới tìm thấy ngôi mộ này của nhà toán học. Người La Mã cổ đại nói chung không quan tâm tới toán học, và hành động dọn dẹp ngôi mộ cho phong quang của Cicero có lẽ là đóng góp đáng ghi nhớ nhất của bất kỳ người La Mã nào đối với lịch sử phát triển của toán học.



Hình 2. Biểu tượng về hình cầu và hình trụ như thế này đã được khắc trên mộ của Archimedes.

Sự thiên tài và đầu óc luôn muốn tò mò khám phá tri thức của Archimedes tiếp tục truyền cảm hứng tới nhiều nhà tư tưởng khác rất lâu sau khi ông qua đời, từ Galileo cho tới Issac Newton. Chúng ta có thể nhắc tới Sophie Germain, một nữ toán học người Pháp sinh năm 1776. Vào năm 13 tuổi, cô đã được đọc câu chuyện về cái chết của Archimedes. Sophie cho rằng bất kỳ môn học nào mà có thể thu hút một người tập trung say mê như vậy, đều đáng để nghiên cứu, và cô quyết định tự học toán – đặc biệt là môn lý thuyết số. Cha mẹ cô đã lo lắng rất nhiều về sở thích toán học của con gái mình khi cô còn là một cô bé, và vào thời cô sống, việc phụ nữ trở thành một nhà toán học là điều không bình thường, vì vậy họ đã tịch thu tất cả các cây nến của cô và dỡ bỏ mọi thiết bị sưởi ấm trong phòng cô. Cô đáp lại bằng cách bí mật thắp nến rồi ngồi vào bàn, quấn chăn kín người. Cha mẹ cô cuối cùng đã mủi lòng một cách thật thông thái và quyết định tài trợ cho việc học hành của cô. Sophie, sau khi tìm thấy một sinh viên sắp rời Paris tên là Antoine–August Le Blanc, đã bí mật thế chỗ anh ta, sử dụng tên của anh ta để gửi và nhận tài liệu từ Ecole Polytechnic khi đó mới mở, vì trường chỉ nhận sinh viên nam tới học. Joseph–Louis Lagrange, lúc đó là người hướng dẫn của Sophie, đã rất ngạc nhiên khi sinh viên này có thể tiến bộ rất nhiều – từ một học sinh tệ hại trở thành người có bài tập giải hàng tuần (tất nhiên là được gửi qua đường bưu điện) là tốt nhất trong lớp. Lagrange yêu cầu được gặp "anh" sinh viên Le Blanc và ngạc nhiên khi biết rằng "Anh" ta hoá ra là một quý "Cô"! Sophie đã trở thành một trong những nhà lý thuyết số xuất chúng nhất trong thời đại của cô.

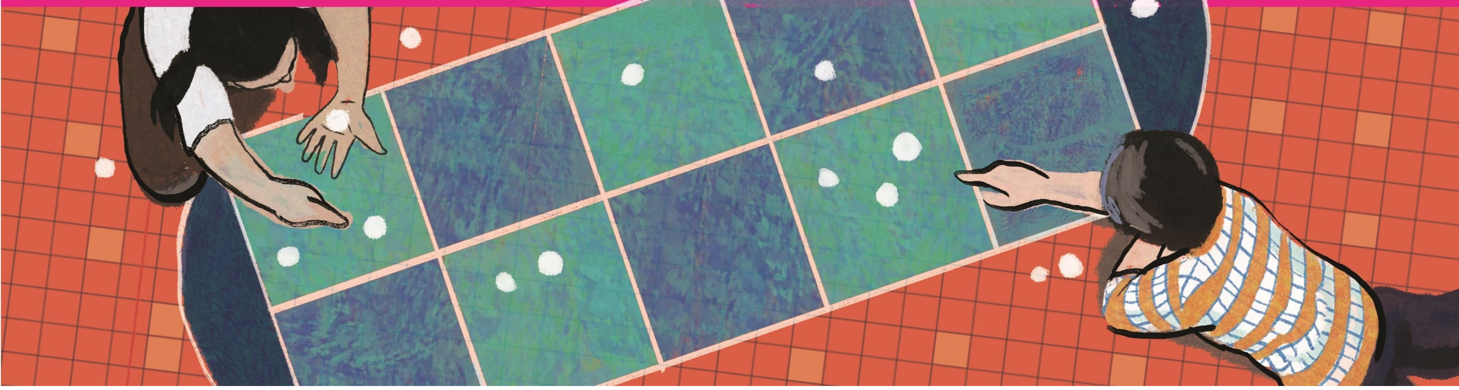
Hình 3. Sophie Germain (1776 – 1831) – Nhà toán học, vật lý học và Triết học gia người Pháp.

Chắc các bạn đọc đến đây đã yêu thích hơn chiếc bàn học ngăn nắp của mình được rọi chiếu bởi ánh sáng thoáng đãng rồi chứ?

Tham khảo dựa trên các nguồn internet:

[1] https://math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/contents.html

[2] https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Archimedes&oldid=1146936468



BÀI TOÁN THÁP HÀ NỘI

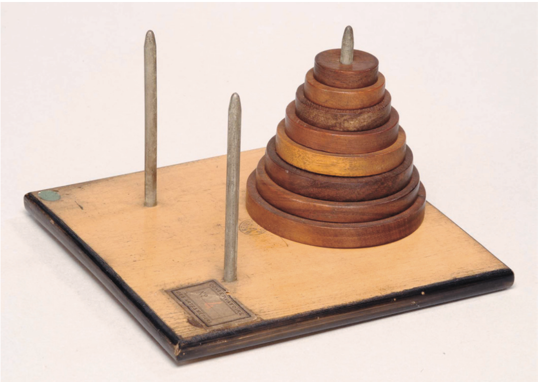
HÀ HUY KHOÁI

Trò chơi “Tháp Hà Nội”, xếp những miếng gỗ trên ba chiếc cọc, đã rất quen thuộc với các bạn nhỏ Việt Nam cũng như nhiều bạn nhỏ trên thế giới. Thật là tuyệt vời khi một trò chơi nổi tiếng trên thế giới lại có tên liên quan đến thủ đô của nước ta đúng không. Các bạn đã biết về xuất xứ cùng với nhiều điều thú vị xung quanh bài toán “Tháp Hà Nội” chưa? Chúng ta hãy cùng ngược dòng thời gian để tìm hiểu qua bài viết dưới đây nhé.

Năm 1883, Eduard Lucas (Claus) công bố bức tranh quảng cáo “Tháp Hà Nội – trò chơi thực sự nát óc xứ Annnam”:

Một năm sau, Lucas viết bài “Tháp Hà Nội , trò chơi toán học” đăng ở tạp chí “Science et Nature”, số 1 (1884) tr. 127 – 128. Có thể xem đó ngày khai sinh của “Bài toán Tháp Hà Nội”, một trong những bài toán nổi tiếng của toán học. Cho đến ngày nay, vẫn còn rất nhiều công trình nghiên cứu về bài toán tháp Hà Nội và những mở rộng của nó, vẫn còn nhiều giả thuyết đang chờ câu trả lời.

Hình sau đây là bức ảnh chụp từ hiện vật trưng bày trong “Musée des arts et métiers–Cnam Paris” (Bảo tàng nghệ thuật và thủ công Paris).



Ta có ba cái cọc, và 8 cái đĩa với kích thước khác nhau đôi một. Bài toán đặt ra là di chuyển toàn bộ 8 cái đĩa sang một cọc khác, sao cho vẫn giữ được thứ tự các đĩa với bán kính lớn dần từ trên xuống dưới. Quy tắc di chuyển: mỗi lần chỉ được chuyển một đĩa, và không bao giờ được đặt một đĩa lên đĩa khác có bán kính nhỏ hơn. Điều này có thể làm được nhờ sử dụng cọc “trung gian”.

Các bạn thử hình dung xem ta sẽ cần làm bao nhiêu phép chuyển đĩa?

Trước hết, ta thử làm bài toán dễ hơn: trên cọc chỉ có 2 đĩa. Rõ ràng chỉ cần chuyển đĩa nhỏ sang cọc trung gian, đĩa lớn sang cọc còn lại, rồi chuyển đĩa nhỏ lên cọc đó. Số bước chuyển là 3.

Nếu có 3 đĩa trên cọc thì sao? Giả sử các đĩa đang ở cọc A, và ta cần chuyển sang cọc C. Ta chuyển hai đĩa trên cùng sang cọc trung gian B, rồi chuyển đĩa to nhất sang cọc C. Sau đó chỉ cần chuyển hai đĩa từ cọc B sang cọc C. Phương pháp chuyển 2 đĩa từ cọc này sang cọc khác thì ta đã biết. Như vậy, số phép chuyển phải làm khi có 3 đĩa bằng 2 lần số phép chuyên khi có 2 đĩa, cộng thêm 1 phép chuyển (đĩa to nhất).

Như vậy, số bước chuyển cần thiết của 3 đĩa là: $2 \times 3 + 1 = 7$. Bằng quy nạp, dễ chứng minh nếu N là số phép chuyển khi có n đĩa thì với $(n+1)$ đĩa, ta có thể thực hiện nhiệm vụ với $(2N+1)$ phép chuyển. Từ đó, dễ suy ra, nhiệm vụ đặt ra trong bài toán Tháp Hà Nội với n đĩa có thể thực hiện với $2^n - 1$ phép chuyển.

Có thể chứng minh $2^n - 1$ là số phép dịch chuyển tối thiểu cần thiết, nghĩa là không có cách gì thực hiện nhiệm vụ với số phép dịch chuyển ít hơn.

Người ta cho rằng, bài toán Tháp Hà Nội lấy ý tưởng từ câu chuyện cổ Ấn Độ sau đây.

"Trong ngôi đền vĩ đại ở Benares, bên dưới mái vòm đánh dấu trung tâm thế giới, người ta đặt một chiếc đĩa bằng đồng, trên đó gắn cố định ba chiếc cọc kim cương, mỗi chiếc cao một mét và dày như thân của một con ong. Trên một trong những chiếc cọc kim cương đó, vào buổi sáng tạo, Thượng Đế đặt 64 chiếc đĩa bằng vàng nguyên chất, theo thứ tự to dần từ trên xuống dưới. Ngày đêm không ngừng, những con quỷ chuyển các đĩa từ cọc kim cương này sang cọc kim cương khác theo nguyên tắc không được di chuyển nhiều hơn một đĩa cùng một lúc, và không được đặt đĩa nào lên trên cái nhỏ hơn nó. Khi 64 chiếc đĩa được chuyển xong thì tiếng sét sẽ nổ ra, và thế giới tan biến".

Những suy luận trên đây chỉ ra rằng, số phép dịch chuyển mà lũ quỷ phải làm ít nhất là

$$2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615.$$

Giả sử lũ quỷ rất thạo "thuật toán dịch chuyển", và mỗi giây chúng chuyển được một đĩa, thì phải mất khoảng 585 tỷ năm. Có lẽ dù không có lũ quỷ, trái đất của chúng ta cũng không tồn tại được lâu đến thế!

Từ sau khi ra đời, bài toán Tháp Hà Nội nhận được sự quan tâm lớn của các nhà toán học và những người làm ... đồ chơi. Rất nhiều phiên bản của bài toán Tháp Hà Nội xuất hiện, chẳng hạn như số cọc lớn hơn 3, hoặc cách chơi có thay đổi. Cho đến ngày nay, Tháp Hà Nội và những biến thể của nó vẫn là bài toán quan trọng trong toán học rời rạc, lý thuyết đồ thị, khoa học máy tính, và tô pô (chẳng hạn, bài toán về đường cong tự cắt tại mọi điểm của nó!). Thậm chí, Tháp Hà Nội còn có ứng dụng rộng rãi trong nghiên cứu tâm lý học!

Người ta cho rằng, sở dĩ bài toán Tháp Hà Nội lôi cuốn được nhiều thế hệ các nhà toán học vì nó chứa đựng những yếu tố làm nên sức hấp dẫn của Toán học: đẹp, thú vị, hữu ích, và bất ngờ.

MỘT CHUYẾN THĂM TRIỂN LÃM

GIA DƯƠNG

Thám tử Xuân Phong cùng thanh tra Lê Kính tham gia một buổi giới thiệu sản phẩm của hai công ty là Tae Yeon và TeaYon tại triển lãm Điện tử Expo – New Vision của khu vực. Công ty Tae Yeon có uy tín từ lâu đời, với những sản phẩm tinh tế có chất lượng tốt nổi tiếng, các nhân viên của công ty luôn nói thật. Còn công ty TeaYon chuyên sản xuất đồ rẻ, kém chất lượng, bắt chước kiểu dáng của công ty Tae Yeon nên ban giám đốc dặn các nhân viên của mình chỉ được nói dối trong buổi triển lãm.

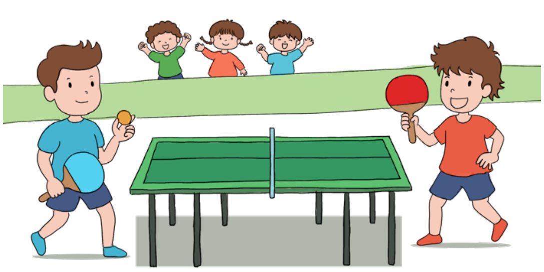
Vừa đặt chân tới khu vực triển lãm được trang hoàng lộng lẫy, Xuân Phong gặp ngay 5 đại diện của hai công ty này đứng tại cổng ra vào và tươi cười niềm nở tiếp đón. Xuân Phong tiến tới họ và hỏi cả 5 người cùng một câu hỏi "Có bao nhiêu người đến từ công ty Tae Yeon trong số các bạn?"

Người thứ nhất trả lời "Không có ai cả". Hai người tiếp theo đều trả lời "Có đúng một người".

Vậy hai người còn lại sẽ trả lời câu hỏi của thám tử Xuân Phong như thế nào nhỉ? Em có thể suy đoán ra câu trả lời của họ và giải thích lập luận được không?

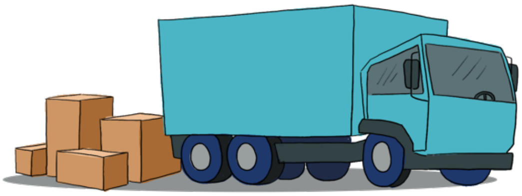
CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

1. Trong một cuộc thi thể thao, ban tổ chức chọn ra một số bạn học sinh ở lớp $5A$ và một số bạn ở lớp $5B$ thi đấu trực tiếp. Mỗi bạn ở lớp $5A$ được chọn ra sẽ thi đấu duy nhất một trận với một bạn ở lớp $5B$, và ngược lại, mỗi bạn ở lớp $5B$ được chọn ra chỉ đấu đúng một trận với một bạn ở lớp $5A$.



Biết rằng số học sinh lớp $5A$ được chọn thi đấu chiếm $2/3$ tổng số học sinh toàn lớp $5A$, còn số học sinh lớp $5B$ được chọn thi đấu chiếm $3/5$ tổng số học sinh toàn lớp $5B$. Tổng số học sinh của cả hai lớp là 57 bạn. Hỏi có bao nhiêu học sinh của hai lớp đã tham gia các trận thi đấu trực tiếp?

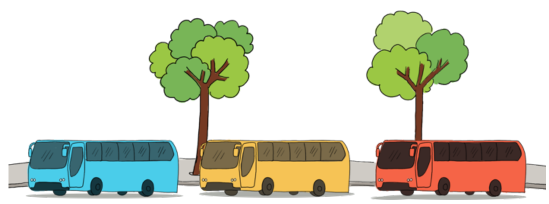
2. Công ty vận tải được thông báo ngắn gọn là có một số kiện hàng có tổng trọng lượng là 10 tấn cần được vận chuyển, hơn nữa mỗi kiện hàng nặng không quá 1 tấn. Hỏi công ty cần điều động ít nhất bao nhiêu xe tải có trọng tải là 3 tấn mỗi xe để luôn chắc chắn chở được hết được số hàng hoá đó?



3. Sau khi được sạc đầy pin, điện thoại di động của bạn An dùng đúng 6 tiếng ở chế độ trò chuyện hoặc đúng 210 tiếng ở chế độ chờ. Khi bạn An lên tàu hoả để đi du lịch, pin của bạn được sạc đầy 100%, và trên tàu không có ổ cắm sạc nên khi xuống ga, pin của bạn cũng vừa hết sạch. Biết rằng An đã nói chuyện với bạn bè đúng một nửa thời gian khi ngồi trên tàu, còn nửa thời gian còn lại đặt điện thoại ở chế độ chờ. Hỏi thời gian An đi trên tàu hoả là bao nhiêu lâu?

4. Một nhóm học sinh đi bộ từ điểm hẹn tới bến xe buýt để kịp đón chuyến xe vào lúc 8 giờ. Cũng vào thời điểm này, từ điểm thăm quan, một chiếc xe buýt cũng xuất phát để tới kịp bến xe đón nhóm học sinh đó. Tuy nhiên nhóm học sinh tới bến xe buýt khá sớm, vào lúc 6 giờ 10 phút, nên họ quyết định đi bộ tiếp tới điểm thăm quan. Trên đường, các bạn đã gặp được xe buýt và lên xe đi tiếp. Cuối cùng cả nhóm đến được điểm thăm quan sớm hơn 20 phút so với thời gian ấn định. Biết rằng vận tốc của xe buýt là 60 km/h và vận tốc đi bộ của các em học sinh luôn không đổi. Hãy tìm vận tốc đi bộ của nhóm học sinh trước khi gặp xe buýt.

5. Có 100 chiếc xe ô tô đỗ liền nhau thành một hàng dọc bên lề đường, trong đó có 70 chiếc xe hiệu Mercedes, còn lại là những xe nhãn hiệu khác. Trong các xe nhãn hiệu Mercedes có 30 chiếc màu đỏ, 20 chiếc màu vàng và 20 chiếc màu hồng. Biết rằng không có hai xe Mercedes nào khác màu lại đỗ cạnh nhau. Em hãy chỉ ra rằng luôn tìm ra 3 chiếc xe Mercedes cùng màu đỗ liên tiếp nhau.



6. Một lớp học có 20 em học sinh. Cô giáo chủ nhiệm của lớp tổ chức một số buổi thăm quan vào mỗi ngày cuối tuần trong suốt năm học, mỗi buổi tham quan có ít nhất 4 em học sinh tham gia. Em hãy chứng minh rằng có một buổi thăm quan mà mỗi em học sinh tham gia buổi đó đều tham gia ít nhất $1/17$ tổng số tất cả các buổi tham quan của cả năm học.

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 1-2 năm 2023)

1. Một bác nông dân chở một xe ô tô quất cảnh ra chợ Tết để bán. Sau khi bán hết cây quất cuối cùng với giá 230 nghìn đồng, bác tính nhẩm lại thấy mình đã bán số cây quất với giá trung bì nh là 245 nghìn đồng/cây. Nhưng ngay lúc ấy người mua cây quất cuối quay trở lại và chỉ cho bác thấy cành quất bị rụng quá nhiều lá, nên ông ta chỉ đồng ý mua với giá 158 nghìn đồng. Bác chấp thuận và bán cây quất đó. Khi nhẩm tính lại, bác nông dân thấy giá trung bình của xe quất bây giờ là 242 nghìn đồng. Hỏi bác đã bán được bao nhiêu cây quất?

Lời giải. Gọi số cây quất là n, còn giá tiền một cây quất là Q (nghìn đồng). Khi đó $Q + 230 = 245n$ và $Q + 158 = 242n$. Trừ hai đẳng thức này ta có $72 = 3n$. Suy ra bác nông dân đã bán được 24 cây quất.

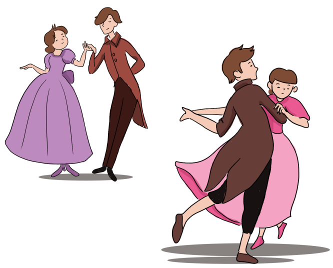
2. Chuyện kể rằng có một người khi gặp nhà triết học và toán học Hy–Lạp Pythagoras đã hỏi ông: "Bây giờ là mấy giờ?" Pythagoras đã trả lời "Cho đến hết ngày, còn lại hai lần của hai phần năm khoảng thời gian đã trôi qua từ lúc bắt đầu ngày". Nghe vậy, người đó chịu không thể nghĩ ra ngay được lúc họ gặp nhau là mấy giờ. Em có thể giúp trả lời lúc đó là mấy giờ được không?

Lời giải. Gọi x là thời gian (tính theo giờ) đã trôi qua từ lúc bắt đầu ngày. Khi đó ta có hệ thức sau theo câu trả lời của Pythagoras: $24 - x = 4/5x$. Suy ra $x = 40/3$ (giờ), có nghĩa là 13 giờ 20 phút. Vậy người đó đã gặp Pythagoras lúc 13 giờ 20 phút.

3. Một tháng trước bà Hoa ra chợ mua một cân khoai tây, một cân thịt và một chục trứng. Chủ nhật vừa rồi, khoai tây tăng lên gấp 3, thịt gấp 4 lần còn trứng đắt gấp 5 lần, nên bà Hoa phải trả 600 nghìn cho từng ấy món hàng như lần thứ nhất. Hôm nay thì khoai lại đắt gấp 6 lần so với tháng trước, thịt đắt gấp 5 lần còn trứng chỉ đắt gấp 4 lần nên bà Hoa lại phải trả 660 nghìn với cùng một lượng hàng. Hỏi bà Hoa đã trả bao nhiêu tiền cho lần mua thứ nhất?

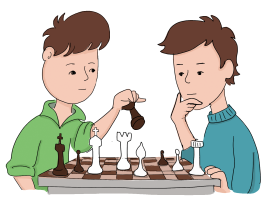
Lời giải. Giả sử vào tháng trước trong lần mua đầu tiên giá một cân khoai tây là a (nghìn đồng), giá một cân thịt là b (nghìn đồng) và giá một chục trứng là c (nghìn đồng). Khi đó trong lần mua thứ nhất bà Hoa đã trả $a + b + c$ (nghìn), trong lần mua thứ hai là $3a + 4b + 5c = 600$ và trong lần mua thứ ba là $6a + 5b + 4c = 660$. Cộng hai đẳng thức cuối này, ta có $9(a + b + c) = 1260$. Suy ra $a + b + c = 140$. Vậy vào tháng trước bà Hoa chỉ phải trả có 140 nghìn đồng.

4. Trong một buổi dạ hội nọ mỗi quý ông đã hân hạnh khiêu vũ với ba quý bà, còn mỗi quý bà cũng đã khiêu vũ với ba quý ông. Em hãy chỉ ra rằng số quý ông và số quý bà tham gia dạ hội là bằng nhau.



Lời giải. Ta sẽ tính tổng tất cả các cặp đã khiêu vũ với nhau. Một mặt, tổng này sẽ bằng 3 lần số các quý ông, mặt khác nó lại bằng 3 lần số các quý bà. Vì thế số các quý ông bằng số các quý bà.

5. Sau khi kết thúc một giải thi cờ vua, ban tổ chức nhận thấy mỗi kỳ thủ tham gia đã có số trận thắng khi chơi bằng quân trắng bằng đúng tổng số trận thắng của toàn bộ các kỳ thủ còn lại khi chơi quân đen. Em hãy chỉ ra rằng tất cả các kỳ thủ tham gia thi đấu đã có số trận thắng là như nhau.



Lời giải. Các em có thể nhận thấy số trận thắng của mỗi kỳ thủ tham gia giải bằng đúng tổng số trận thắng của tất cả các kỳ thủ khi chơi bằng quân đen. Vì thế mọi kỳ thủ tham gia đã có số trận thắng bằng nhau.

6. Vào một ngày Chủ nhật nọ, Vinh và người em trai nhỏ tuổi hơn là Minh đạp hai chiếc xe tới hiệu sách trung tâm cách nhà vài cây số. Tại đó mỗi người chọn mua một cuốn sách quý mà nhóm bạn bè cũ đang bàn luận khen ngợi thường xuyên mấy năm nay trên Facebook. Mỗi người đều lấy tổng tất cả các chữ số của tất cả các trang sách mình đã mua và nhận thấy rằng số đó bằng năm sinh của mình. Vậy ai trong số hai anh em Vinh và Minh đang đi học lớp bồi dưỡng Toán cho học sinh phổ thông nhỉ?

Lời giải. Trước tiên ta tính tổng chữ số của tất cả các số từ 1 tới 99. Nhận thấy rằng mỗi chữ số, trừ chữ số 0 đều xuất hiện 10 lần ở hàng chục, và cũng 10 lần ở hàng đơn vị, nghĩa là 20 lần tổng cộng. Do $1+2+\cdots+9=45$, nên tổng này bằng 900. Tổng các chữ số của các số từ 100 tới 199 sẽ lớn hơn tổng trước là 100. Vì thế tổng các chữ số của các số từ 1 tới 199 bằng 1900. Vì vậy ta xét một vài trường hợp sau.

Số trang sách	**Tổng các chữ số**
200	$1900+2=1902$
202	$1902+3+4=1909$
204	$1909+5+6=1920$
206	$1920+7+8=1935$
208	$1935+9+10=1954$
210	$1954+11+3=1968$
212	$1968+4+5=1977$
214	$1977+6+7=1990$
216	$1990+8+9=2007$
217	$2007+10=2017$
218	$2017+11=2028$

Các em thấy ngay chỉ có người sinh năm 2007 trong số hai anh em mới có thể là học sinh phổ thông. Người đó cũng không thể là anh, vì nếu vậy người em trai sinh năm 2017 đến giờ mới có 5 tuổi không thể tự đi xe đạp vài km để mua sách dày hơn hai trăm trang và về nhà tự làm tính cộng hết từng đó chữ số, hơn nữa lại có nhóm bạn bè cũ trên Facebook bàn luận về cuốn sách tới mấy năm rồi. Vì vậy các em kết luận được người sinh năm 2007 là em và có tên là Minh.

PRINCIPLES IN GAMES

NGHIA DOAN[1]

In this article, we discuss a few games and principles associated with solutions to the problems posed by the games.

Example (Pigeons share a hole)**.** Each square of a 3×3 board is filled with one of the numbers $-1, 0, +1$. See the figure below for an example. Viet calculates the sums of the rows, columns, and two main diagonals. He found that there are at least two equal sums. For example, in the example below, both the sums of the second and third rows are 0. Is it always true that there are at least two equal sums?

-1	$+1$	$+1$
0	-1	$+1$
-1	$+1$	0

Solution. The answer is yes. The largest possible sum is 3 and the smallest is -3. So there areo 7 possible values $-3, -2, \ldots, 2, 3$ for 8 sums, so two of them should be the same and therefore equal.

In above we applied the *Pigeonhole principle: if $n + 1$ or more pigeons are placed in n holes, then one hole must contain two or more pigeons.*

Example (Nothing ever changes)**.** Each square of the board contains a $+$ or $-$ signs, see the board the left, which contains a single $-$ at the square intersection of the first row and second column.

At each step, you can change all the signs in a row, a column, or a diagonal to their opposite ones, i.e. $+$ to $-$, and $-$ to $+$. An example of how a column is changed shown as below in the board on the right.

$+$	$-$	$+$	$+$
$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$+$	$+$	$+$

$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$+$	$+$
$+$	$-$	$+$	$+$
$+$	$-$	$+$	$+$

Solution. Take a look at the squares colored red.

$+1$	-1	$+1$	$+1$
$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
$+1$	$+1$	$+1$	$+1$

$+1$	$+1$	$+$	$+1$
$+1$	-1	$+1$	$+1$
$+1$	-1	$+1$	$+1$
$+1$	-1	$+1$	$+1$

If we replace the $+$ sign by $+1$ and the $-$ sign by -1, then at the beginning the product of all numbers in these red square is -1. Easy to see that each operation to change all the signs in a row, a column or a diagonal shall change exactly two red squares. Whatever the numbers in the two red squares, the product of their negates remain same. Since the product of the red squares at the beginning is -1, so it cannot be changed at all.

In above we applied the *Invariant Principle: In mathematics, an invariant is a property of a mathematical object (or a class of mathematical objects) which remains unchanged after operations or*

[1] *Ottawa, Canada.*

transformations of a certain type are applied to the objects.

Example (Integers are well–ordered). On a stormy night, ten students from the *Math, Chess, and Coding Club in Ottawa* went to a party. They left their shoes in the foyer in order to keep the carpet clean. After the dinner, there was a power outage. So the students, leaving one by one, put on, at random, any pair of shoes big enough for their feet (each pair of shoes stay together). Any student who couldn't find a pair of shoes big enough spent the night at the place of the party.

What is the largest number of students who might have had to spend the night? Show an example for this number. *Note that no two students wear the same size shoes.*

Solution. Easy to see that if the five students with smallest feet left first wearing all five largest pairs of shoes then none of the remaining student can find a pair of shoes to leave. Now let assume that there were 6 students who would have to spent the night and there were 6 pairs of shoes left, then because $6+6>10$, so there is a student with his pair of shoes is still at the place of the party. This is not possible!

In above we applied the *Well–Ordering Principle: the positive integers are well–ordered. An ordered set is said to be well–ordered if each and every nonempty subset has a smallest or least element.*

Example (Invariant to reach end–state with desired outcomes). In a darkroom there are two tables. The first one is empty and the second one is cover by a layer of nickels (one nickel thick, so no coin is on top of another), in which 31 coins are tails up and the rest are heads up.

Minh enters the room with the task of transferring some coins from the second table to the first table (he wears gloves, so he cannot feel the faces of the coins). He can flip over any number of coins when transferring them.

Is that possible when he leaves the room the number of nickels that are tails up is the same on both tables?

Solution. If Minh turns a coin on the second table during transfer to the first one, then the number of coins *tails–up* on the second table will be reduce by one if it was a *tails–p* coin, or the number of coins *tails–up* on the first table is increased by one if it was a *heads–up* coin. In any case, the difference between the *tails–up* coins on the second and first tables will be reduced by one (this is an *invariant*.) Hence, after 31 moves, they will be the same.

In above we again applied the *Invariant Principle* with a twist. Note that in every turn the difference between the *tails–up* coins on the second and first tables will be reduced by one, since at the beginning, in other words, at the *start state* this difference is 31, thus after 31 turns the game reaches the *end–state* where the difference is 0.

Example (Winning positions). Berry and Cherry take alternate turns in playing a two–player game removing marbles from a pile as follows:

- Berry always goes first.
- The player whose turn it is, must remove exactly 2, 4, or 5 marbles from the pile.
- The player who at some point is unable to make a move (cannot remove 2, 4, or 5 marbles from the pile) loses the game.

They play 14 games with $\{8,9,\ldots,21\}$ as the initial number of marbles in the pile. What games does Cherry win, regardless of what Berry does?

Solution. The positive integers from 0 to 21 can be divided into 7 groups of numbers based on their remainders when divided by 7,

$$G_0 = \{0, 7, 14, 21\}, \quad G_1 = \{1, 8, 15\},$$
$$G_2 = \{2, 9, 16\}, \quad G_3 = \{3, 10, 17\},$$
$$G_4 = \{4, 11, 18\}, \quad G_5 = \{5, 12, 19\},$$
$$G_6 = \{6, 13, 20\}$$

It is easy to verify that,

Claim. If n is a number in G_0 and G_1 then $n-2$, $n-4$, and $n-5$ are in G_2, G_3, G_4, G_5, or G_6.

Now, by the rules of the game, it is obvious that $\{0, 1\}$ are *losing* positions and $\{2, 4, 5\}$ are *winning* positions. Furthermore, because $3-2=6-5=1$, so $\{3, 6\}$ are also *winning* positions, too.

Therefore G_0 and G_1 contain all *losing* positions, while G_2, G_3, G_4, G_5, and G_6 containing all *winning* positions. A player, who is in a *winning* position, can always force the game into a *losing* position. Thus, Cherry will win the game if the game starts with a *losing* position. Thus, the games that Cherry wins are $\{8, 14, 15, 21\}$.

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA MÔN TOÁN THPT NĂM HỌC 2022-2023

TRẦN NAM DŨNG[1]

Kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán THPT năm học $2022-2023$ được diễn ra trong hai ngày 24 và $25/2/2023$ với tổng cộng 4.589 thí sinh tham gia dự thi. Kết quả kỳ thi được công bố vào chiều tối ngày $13/3/2023$. Trong bài viết này, chúng tôi xin đưa ra một số tổng kết, đánh giá và bình luận về đề thi và kết quả của kỳ thi năm nay.

Về đề thi

Đề thi năm nay vẫn giữ ổn định cấu trúc đề thi HSG quốc gia môn toán từ gần 15 năm nay, tức là 2 ngày với ngày một có bốn bài, mỗi bài 5 điểm và ngày hai có ba bài, số điểm tương ứng là 6, 7, 7.

Ngày thứ nhất bốn bài toán lần lượt thuộc các phân môn: giải tích, số học, đại số và hình học. Bài toán giải tích là một bài toán thuộc chủ đề quen thuộc: giới hạn dãy số. Ý đầu ở mức căn bản sử dụng tính chất dãy đơn điệu và bị chặn thì có giới hạn, còn ý sau liên quan đến khảo sát dãy số ở dạng tích bằng cách logarit hóa. Việc sử dụng phép thế lượng giác chỉ giúp nhìn ra vấn đề nhanh hơn và giải gọn hơn chứ không phải là cách giải tiên quyết. Có thể đánh giá đây là bài dễ nhất của ngày thứ nhất cũng là bài dễ nhất của cả hai ngày.

Ở Bài 2, bài số học, thì ý đầu là một ý hoàn toàn đại số và rất cơ bản, chúng ta có thể tìm được công thức tổng quát của dãy số một cách dễ dàng. Phần chính của bài toán này là ý sau (không liên quan gì đến ý đầu). Yêu cầu bài toán được phát biểu khá thú vị, thoạt nhìn thì có vẻ rất "khủng" nhưng nếu xem kỹ về bản chất thì khá đơn giản, chỉ dùng đến nguyên lý Dirichlet và tính tuần hoàn của số dư của dãy truy hồi nguyên.

Bài 3 là một bài về bất đẳng thức ba biến có điều kiện, có thể nói là có dạng khá quen thuộc. Hướng đi tự nhiên nhất của bài này là chuẩn hóa rồi đưa về một biến (cụ thể là biến $r = abc$). Như vậy, xét về độ khó thì bài 3 nhẹ nhàng hơn Bài 2 cả về phát biểu (rất dễ hiểu), hướng đi và kỹ thuật.

Bài 4 là một bài toán hình học có hai ý gần như độc lập. Ý đầu có điểm mấu chốt là có được $AKJH$ là hình bình hành rồi dùng tứ giác nội tiếp hoặc hàng điểm điều hoàn. Ý sau dùng tính chất của đường thẳng Simson và phép vị tự sẽ làm khá gọn.

Đánh giá sơ bộ cho đề thi ngày 1 là đề khá dài, có nhiều ý, đặc biệt là các ý trong các Bài 2 và 4 hầu như không lên quan đến nhau. Các ý khó là $2b$ và $4a$, $4b$.

Đề thi ngày thứ hai gồm 3 bài toán thuộc ba phân môn, lần lượt là: đại số, tổ hợp, hình học.

Bài 5 là một bài phương trình hàm có dạng giống (và cách giải cũng tương tự) với một bài toán trong IMO shortlist 2000, khai thác tính toàn ánh và đơn ánh của phương trình hàm có biến nằm ngoài biểu thức hàm số. Không khó về mặt ý tưởng nhưng đây vẫn là một thách thức lớn cho thí sinh với những khó khăn kỹ thuật.

Bài 6 là một bài toán tổ hợp về họ tập con khá quen thuộc sử dụng phương pháp đếm bằng hai cách. Dạng toán này đã xuất hiện nhiều, chỉ là với các tham số khác. Có lẽ khó khăn lớn nhất trong bài này là việc xây dựng ví dụ (nhất là trong tình huống các đánh giá đưa ra mới chỉ là các điều kiện cần). Phát biểu của bài toán này cũng hơi rối rắm và có lẽ điều đó cũng làm cho số thí sinh làm tốt bài này không nhiều.

Bài 7 là một bài toán hình học có cấu hình khá phức tạp với ý đầu là một bất đẳng thức hình học và ý sau yêu cầu chứng minh tính chất hình học thuần túy. Ý đầu có thể giải quyết khá gọn nếu biết một bổ đề quen thuộc sau: Cho góc xAy. Đường tròn (I) tiếp xúc Ax, Ay tại B, C. Đường tròn (J) qua A tiếp túc (I) cắt Ax, Ay tại D, E. Khi đó $AD + AE \geq BC$. Ý sau tuy có vẻ rối rắm nhưng lại có nhiều hướng để tiếp cận.

So với ngày thứ nhất thì đề thi ngày thứ hai cân bằng hơn: Bài 6 với hai ý $6a$, $6b$ khá nhẹ nhàng, Bài 5 cũng có ý $5a$ cơ bản, còn lại các ý khó là $5b$, $6c$ và bài hình.

Về tổng thể đề thi năm nay được đánh giá là khó, dài với nhiều ý (hầu như bài nào cũng có ý a, b, thậm chí c), hơi nặng về kỹ thuật, phần hình học khá nặng với hai bài, bốn ý riêng biệt, cấu hình rất phức tạp và đều đặt ở vị trí bài cuối (và quả thật cũng là bài khó của từng ngày).

Về kết quả

Trước hết là điểm chuẩn. Dù đề thi năm nay được đánh giá là khá khó, dài và nhiều ý, nhưng điểm chuẩn không quá thấp như dự đoán ban đầu: KK – 13,5; Ba: 16,5; Nhì: 20,5; Nhất 27,5 và điểm để dự thi chọn đội tuyển là 23.

Kết quả tốt nhất thuộc về đội tuyển Hà Tĩnh với hai giải nhất, tám giải nhì. Trong đó có em Trần Minh Hoàng, học sinh lớp 10 chuyên Hà Tĩnh đạt thủ khoa với số điểm 32 (với một đề thi có đến năm bài ở mức khó thì đây là một kết quả tuyệt vời đối với một bạn học sinh lớp 10).

Tiếp theo là đội tuyển Phú Thọ với hai giải nhất, năm giải nhì, ba giải ba. Đội tuyển trường PTNK, ĐHQG–HCM vẫn giữ được phong độ với hai giải nhất, ba giải nhì, hai giải ba và hai giải KK.

Ngoài ba đơn vị dẫn đầu có hai giải nhất, các đơn vị có giải nhất và cũng có kết quả tốt là: ĐHKHTN, ĐQGHN: một giải nhất, ba nhì, ba giải ba; Bắc Ninh: một giải nhất, hai giải nhì, năm giải ba; Hà Nội, một giải nhất, ba giải nhì, bốn giải ba, sáu giải KK; Hải Phòng: một giải nhất, ba giải nhì, hai giải ba, hai giải KK; Thừa Thiên Huế: một giải nhất, một giải ba, bốn giải KK.

Đây đều là các đơn vị có truyền thống của VMO. Ở một góc nhìn khác, VMO năm nay có những đơn vị có những thành tích vượt bậc so với chính mình như Sóc Trăng có một giải nhì, một giải ba, hai giải KK; Lâm Đồng có hai giải nhì, một giải ba, một giải KK; Điện Biên có hai giải ba, Trà Vinh có một giải nhì, Kiên Giang có một giải ba, một giải KK. Đặc biệt, có hai bạn không phải là học sinh trường chuyên cũng đã xuất sắc đạt giải: một bạn học sinh THPT FPT Cần Thơ đạt giải ba và một bạn học sinh THCS & THPT Đông Du Đăk lak đạt giải khuyến khích.

Cuối cùng xin được điểm qua về bản đồ TST năm nay. Với điểm chuẩn là 23 có 48 bạn đạt mốc điểm này, được phân bổ như sau: đông đảo nhất là Hà Tĩnh với tám bạn, tiếp đến là Phú Thọ với năm bạn. Năm đội mạnh tiếp theo, mỗi đội có ba học sinh gồm

PTNK, ĐHQG–HCM; KHTN, ĐHQG–HN, ĐHSP HN, Hà Nội, Hải Phòng; các đội có hai thí sinh tham dự TST gồm Bắc Ninh, Nam Định, Nghệ An và Thanh Hóa. Cuối cùng là nhóm các đơn vị có một suất TST: Bà rịa – Vũng Tàu, Bắc Giang, Đà Nẵng, Hải Dương, Hưng Yên, Lâm Đồng, Quảng Bình, Quảng Ngãi, Quảng Ninh, Tp HCM, Thừa Thiên – Huế và Trà Vinh. 48 em này sẽ cùng với bạn Phạm Việt Hưng, HCV IMO 2022, tranh sáu suất dự IMO 2023 tại Nhật Bản.

Trong các suất dự TST chúng tôi đặc biệt muốn nhắc tới hai suất của Trà Vinh và Lâm Đồng. Với Trà Vinh, có lẽ đây là suất TST đầu tiên còn với Lâm Đồng thì điều đặc biệt là suất TST này thuộc về học sinh trường chuyên Bảo Lộc, một trường chuyên thứ hai trong tỉnh mới được thành lập sau này. Và bạn học sinh đạt giải nhì có điểm số rất cao, 27 điểm, tức là chỉ thiếu tí chút là đạt giải nhất.

Nói câu chuyện về các trường hợp FPT Cần Thơ, Đông Du Đak lak, Điện Biên, Kiên Giang, Sóc Trăng, Trà Vinh hay chuyên Bảo Lộc để thấy rằng ở đâu cũng có học sinh có tố chất tốt, chỉ cần có những người thầy tâm huyết, biết thổi vào học trò sự tự tin và niềm đam mê. Ở thời đại của Internet, đặc biệt với sự cởi mở của cộng đồng toán, các vấn đề về tài liệu, thông tin sẽ không còn là lợi thế của riêng ai, và, với hình thức học online, các bạn học sinh ở mọi miền đều có cơ hội được học với các thầy giáo, các chuyên gia giỏi. Cơ hội được học hỏi đồng đều hơn và cơ hội thành công cũng đồng đều hơn.

Một số bình luận và đề xuất

Trước hết là về đề thi. Với thời gian 180 phút làm bài, đề thi như vậy là quá dài với quá nhiều ý, quá nhiều yêu cầu, đặc biệt là ở ngày thi thứ nhất. Đề thi học sinh giỏi đa số là những bài mới, đòi hỏi thí sinh phải có nhiều thời gian suy nghĩ, tìm hướng tiếp cận rồi mới đến giai đoạn xử lý kỹ thuật, rồi lại phải trình bày chặt chẽ. Và kỹ thuật cũng không đơn giản (trên thực tế, hai bài toán có hướng đi khá rõ ràng là bài bất đẳng thức và bài phương trình hàm đã gây rất nhiều khó khăn cho các bạn học sinh). Theo ý kiến của chúng tôi, nên hạn chế các đề toán có nhiều ý mà chỉ nên đưa ra yêu cầu xử lý trọn vẹn một vấn đề. Nếu bài toán có hai ý trở lên thì nhất thiết chúng phải liên quan đến nhau và ý đầu sẽ như một gợi ý cho ý sau.

Một vấn đề nữa nên có sự thay đổi là số lượng bài của mỗi ngày. Hiện nay, với cấu trúc $(4+3)$ thì ngày thứ nhất có bốn bài toán, mỗi bài được 5 điểm còn ngày thứ hai có ba bài toán, mỗi bài được 6 hoặc 7 điểm. Rõ ràng ngày thứ nhất sẽ có nhiều áp lực hơn vì trên thực tế, độ khó của các bài toán của hai ngày không có sự chênh lệch đáng kể. Đã thế điểm số tối đa của mỗi bài ở ngày thứ nhất chỉ là 5 điểm (có thể tưởng tượng lấy được 5 điểm ở bài 2 hay bài 4 khó thế nào). Vì vậy, chúng tôi đề xuất nên quay lại định dạng ba bài mỗi ngày như giai đoạn trước năm 2007, cũng là một định dạng quen thuộc của nhiều kỳ thi toán trên thế giới. Với định dạng sáu bài thì trong hai ngày như vậy, phân bổ cho mỗi phân môn một bài và một bài ở dạng kiến thức tổng hợp. Như vậy sẽ đều hơn thay vì hơi nặng về hình học và đại số như hiện nay.

Cuối cùng, để tiếp nối ý đã trình bày ở cuối phần 2, chúng tôi đề xuất nên triển khai mạnh hơn nữa các hoạt động dạy, bồi dưỡng chung cho các đối tượng học sinh (như các hoạt động trường hè, trường đông) để tạo cơ hội đồng đều cho các thí sinh. Việc tổ chức này sẽ được điều phối chung về chuyên môn bởi một Hội đồng chuyên môn (có thể là sự phối hợp giữa Bộ giáo dục, Hội toán học Việt Nam và Viện toán học) và các BTC địa phương lo các vấn đề hậu cần (hình thành các cụm).

Sau khi hình thành được các cụm để triển khai việc học tập, bồi dưỡng chung, có thể hướng đến việc tổ chức thi theo cụm với những hình thức sinh hoạt chuyên môn bổ ích như sửa bài thi, chia sẻ kinh nghiệm dạy và học toán, nghe các bài giảng đại chúng về toán học. Việc tổ chức thi cụm cũng giúp xóa tan những lăn tăn không đáng có về tính trung thực, nghiêm túc của kỳ thi, một điều luôn rất được coi trọng trong các kỳ thi tuyển chọn tài năng.

Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm học 2022 – 2023

Bài 1 (5,0 điểm) Xét dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_{n+1} - a_n}$ và $0 \le a_n \le 1$, với mọi $n \ge 1$.

$a)$ Chứng minh rằng dãy (a_n) xác định duy nhất và có giới hạn hữu hạn.

$b)$ Cho dãy số (b_n) xác định bởi $b_n = (1 + 2a_1)(1+2^2a_2)\cdots(1+2^n a_n)$ với mọi $n \ge 1$. Chứng minh rằng dãy (b_n) có giới hạn hữu hạn.

Bài 2 (5,0 điểm) Cho các số nguyên a, b, c, α, β và dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = \alpha, u_2 = \beta, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$$
$$\text{với mọi } n \ge 1.$$

$a)$ Chứng minh rằng nếu $a = 3, b = -2, c = -1$ thì có vô số cặp số nguyên (α, β) để $u_{2023} = 2^{2022}$.

$b)$ Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho có duy nhất một trong hai khẳng định sau là đúng:

$i)$ Có vô số số nguyên dương m để $u_{n_0}u_{n_0+1}\cdots u_{n_0+m}$ chia hết cho 7^{2023} hoặc 17^{2023};

$ii)$ Có vô số số nguyên dương k để $u_{n_0}u_{n_0+1}\cdots u_{n_0+k} - 1$ chia hết cho 2023.

Bài 3 (5,0 điểm) Tìm số thực dương k lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{1}{kab+c^2} + \frac{1}{kbc+a^2} + \frac{1}{kca+b^2} \ge \frac{k+3}{a^2+b^2+c^2}$$

đúng với mọi bộ ba số thực dương $(a;b;c)$ thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2 = 2(ab+bc+ca)$.

Bài 4 (5,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ có $DB = DC$ và nội tiếp một đường tròn. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AB, AC và J, E, F tương ứng là các tiếp điểm của đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với BC, CA, AB. Đường thẳng MN cắt JE, JF lần lượt tại K, H; IJ cắt lại đường tròn (IBC) tại G và DG cắt lại (IBC) tại T.

$a)$ Chứng minh rằng JA đi qua trung điểm của HK và vuông góc với IT.

$b)$ Gọi R, S tương ứng là hình chiếu vuông góc của D trên AB, AC. Lấy các điểm P, Q lần lượt trên IF, IE sao cho KP và HQ đều vuông góc với MN. Chứng minh rằng ba đường thẳng MP, NQ và RS đồng quy.

Bài 5 (6,0 điểm) Xét hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(0) = 2022$ và $f(x+g(y)) = xf(y) + (2023-y)f(x) + g(x)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

$a)$ Chứng minh rằng f là một toàn ánh và g là một đơn ánh.

$b)$ Tìm tất cả các hàm số f và g thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài 6 (7,0 điểm) Có $n \ge 2$ lớp học tổ chức $m \ge 1$ tổ ngoại khóa cho học sinh. Lớp nào cũng có học sinh tham gia ít nhất một tổ ngoại khóa. Mọi tổ ngoại khóa đều có đúng a lớp có học sinh tham gia. Với hai tổ ngoại khóa bất kỳ, có không quá b lớp có học sinh tham gia đồng thời cả hai tổ này.

$a)$ Tính m khi $n = 8, a = 4, b = 1$.

$b)$ Chứng minh rằng $n \ge 20$ khi $m = 6, a = 10, b = 4$.

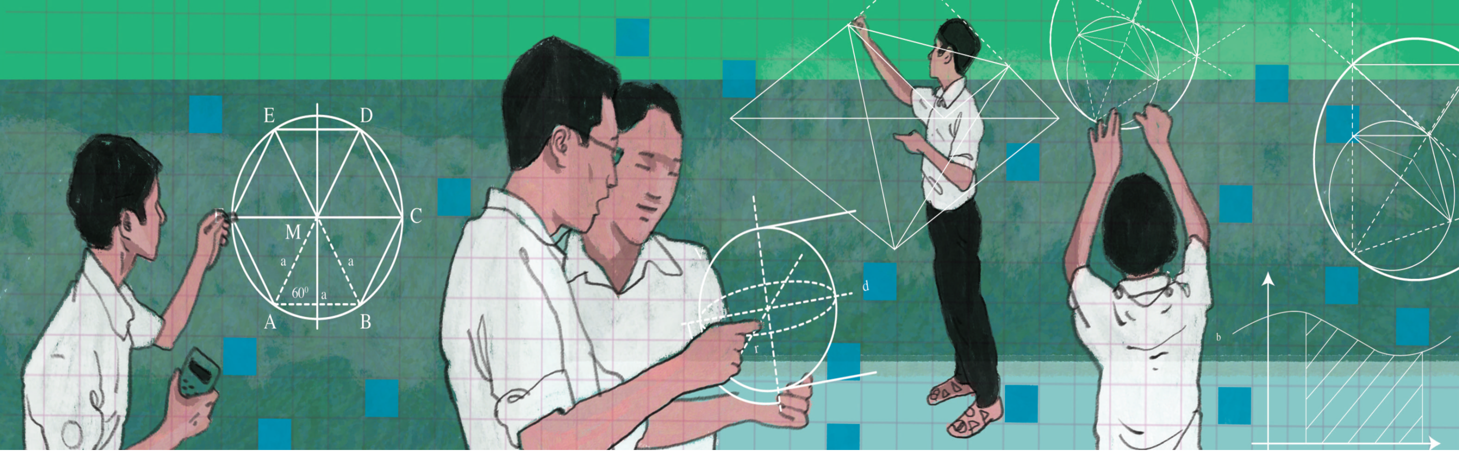
$c)$ Tìm giá trị nhỏ nhất của n khi $m = 20, a = 4, b = 1$.

Bài 7 (7,0 điểm) Cho tam giác nhọn, không cân ABC có trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại M, N, P. Gọi Ω_A là một đường tròn đi qua A, tiếp xúc ngoài với (I) tại một điểm A' và cắt lại AB, AC

tương ứng tại A_b, A_c. Các đường tròn Ω_B, Ω_C và các điểm $B', B_a, B_c, C', C_a, C_b$ được xác định một cách tương tự.

$a)$ Chứng minh rằng $B_cC_b + C_aA_c + A_bB_a \geq NP + PM + MN$.

$b)$ Xét trường hợp A', B', C' tương ứng thuộc các đường thẳng AM, BN, CP. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba cạnh tương ứng thuộc ba đường thẳng A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b. Chứng minh rằng OH song song với IK.



DẠY TOÁN, VIỆC ĐẦU TIÊN LÀ DẠY TOÁN!

THƯ HIÊN[1]

Với những ai quan tâm kỳ thi Bài giảng và bài viết về Toán học mang tên Hoàng Tụy, không chỉ là xem các thí sinh thuyết trình bài giảng, mà hơn thế, được nghe các thầy giám khảo chia sẻ quan điểm về dạy toán.

Theo nhận định của nhiều người theo dõi, điều lôi cuốn người xem nhất ở vòng chung khảo kỳ thi Bài giảng và bài viết về Toán học, mang tên Hoàng Tụy, là phần nhận xét của các thành viên hội đồng giám khảo. Nội dung các nhận xét này không chỉ đơn giản chỉ là những lời khen chê. Quan trọng hơn, đó là những chia sẻ về quan điểm dạy toán từ những giáo sư toán có sự am hiểu sâu sắc về toán phổ thông, thậm chí nhiều người trong đó đóng vai trò chủ chốt trong việc việc tham gia biên soạn chương trình phổ thông 2018 như GS Đỗ Đức Thái, GS Phùng Hồ Hải.

Dạy toán ứng dụng không dễ

Bài thuyết trình *Lý thuyết đồ thị và một số cấu trúc đáng chú ý* của tác giả Hà Trung (Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định) nhận được sự quan tâm đặc biệt của hội đồng giám khảo. Đây là chuyên đề (không bắt buộc) sẽ được dạy cho học sinh lớp 11 của chương trình phổ thông 2018 (bắt đầu được triển khai từ năm học 2023 – 2024). Nhưng theo tác giả Hà Trung, lý do ông chọn chuyên đề này bởi nó có nhiều kiến thức thú vị, có nhiều ứng dụng trong cuộc sống (ví dụ bản đồ mạng lưới bay của hàng không, mạng tương tác gene).

Theo GS Phùng Hồ Hải thì việc tác giả "gói" ba nội dung (sơ lược về lý thuyết đồ thị; đồ thị lưỡng phân; đồ thị cây, rừng) trong một chuyên đề là hơi ôm đồm. Hơn nữa, đối tượng mà người dạy là hướng đến học sinh giỏi toán, thì không cần thiết phải mất quá nhiều thời gian vòng vo về những ứng dụng mà nên đi thẳng sâu vào bản chất nội dung.

GS Ngô Việt Trung cho rằng, tác giả cần lựa chọn bài toán phù hợp với kiến thức đồ thị để giảng dạy. Không nên nhắc tới những vấn đề chỉ mang tính minh họa. Bài toán về chủ đề đồ thị thì mình phải áp dụng kiến thức đồ thị để giải quyết vấn đề. Chẳng hạn như nói về mạng thì kiến thức đồ thị đóng vai trò quan trọng. Ví dụ ChatGPT chắc chắn là phải dùng đồ thị để xác định những gì gắn với nhau.

Còn theo GS Đỗ Đức Thái, điều khiến cho đồ thị quan trọng hơn đối với toán học và đối với cuộc sống bây giờ là những thuật toán để từ đó giúp chúng ta tìm được câu trả lời. Chẳng hạn, người ta có thể mô tả ở chu

---

[1] *Tòa soạn Hà Nội, Báo Thanh Niên.*

trình Ơ le thì có cái này, hoặc ở đồ thị lưỡng phân thì sẽ có cái thứ như thế này... Trong khi cái quan trọng phải là có thuật toán để tìm những cái đấy thế nào. Và thuật toán đó phải mô phỏng được, phải lập trình được để thành ra những cái chạy được trên máy tính. "Có lẽ đến một lúc nào đó chúng ta nên dạy học sinh những cái như thế. Còn cứ gieo vào đầu học sinh, nhất là học sinh giỏi toán, rằng dùng cái này suy ra những cái trừu tượng này..., thì mãi cũng sẽ chẳng đi đến đâu. Cho nên tôi nghĩ nên chọn những bài toán, vẫn là toán hoàn toàn, vẫn khó như thường, nhưng cho phép người ta lập trình được, gắn vào một thuật toán nào đó coding được nó", GS Thái gợi ý.

Dạy cho tử tế toán!

Với phần trình bày của tác giả Nguyễn Thế Minh (Trường Trung học Vinschool Imperia, Hải Phòng), chủ đề *Tích hợp tư duy công dân số trong bài giảng môn Toán*, GS Đỗ Đức Thái cho rằng, bài giảng phù hợp với xu hướng tích hợp mà Chương trình phổ thông 2018 muốn thúc đẩy. Thông qua kiến thức về toán, người dạy muốn mang đến cho người học những gợi mở ứng dụng trong lĩnh vực tin học, đó là ưu điểm của bài giảng.

GS. Đỗ Đức Thái, Đại học Sư phạm Hà Nội.

Tuy nhiên, cũng từ bài giảng này, GS Thái đã cảnh báo về nguy cơ dạy học xa rời cái cốt lõi, dạy toán, mà nhiều giáo viên có thể mắc phải vì say sưa với cái gọi là "tích hợp". Cái mà những người biên soạn Chương trình phổ thông 2018 môn toán quan tâm là thầy cô giáo dạy toán cho học sinh, chứ không phải ra sức tô vẽ cho các bài dạy để bài học trông cho có vẻ hấp dẫn, nhưng lại không đọng lại được trong trí não người học kiến thức toán. "Dạy toán, việc đầu tiên là dạy toán! Dạy cho tử tế toán! Rồi muốn làm việc gì thì làm sau. Học sinh học môn toán thì trước hết các em phải được học toán", GS Thái khẳng định.

Phải tuân thủ những chuẩn mực

Với phần trình bày của tác giả Nguyễn Thụy Việt Anh (Trường Liên cấp Hội nhập Quốc tế Ischool, Quảng Trị), về *Hình có trục đối xứng*, GS Đỗ Đức Thái cảnh báo, người giáo viên luôn cần xác định một bài học cụ thể thuộc dạng nào trong lý thuyết dạy học. Trong trường sư phạm, giáo sinh được dạy cách xác định dạng bài điển hình trong lý thuyết dạy học. Bởi mỗi dạng bài điển hình sẽ có một nguyên tắc dạy học mà người dạy phải bám theo nguyên tắc đó, giống như đi đường thì phải đi bên phải.

"Dạy toán có những chuẩn mực về mặt sự phạm. Đây là bài học về dạy khái niệm mới, định nghĩa mới. Ở bài này, GV dạy một khái niệm rất khó với học sinh, đó là hình có trục đối xứng, hay nói cách khác, đối xứng trục mà lại không được phép định nghĩa phép đối xứng trục (vì lên đến lớp 10 học sinh mới được học kiến thức này ở chuyên đề). Nguyên tắc dạy bài học khái niệm mới, định nghĩa mới, bao gồm nhiều bước, trong đó bước cuối cùng là làm nổi bật lên được là chốt lại, neo lại trong đầu học sinh khái niệm mới đó là cái gì", GS Thái phát biểu.

Học toán để làm gì?

Ngay từ bài giảng đạt giải cao nhất (giải nhì, không có giải nhất) trong phần *Tìm hiểu về môn Toán trong "Chương trình giáo dục phổ thông mới"* thông qua một chủ đề cụ thể, các thí sinh và người theo dõi cuộc thi cũng được nhận những chia sẻ thấu đáo về quan điểm dạy toán của những người tham gia biên soạn chương trình môn toán. Đây là bài giảng *Giải bài toán tập hợp bằng phương pháp "ô ăn quan"*, của nhóm tác giả Ngô Quốc Trung, Nguyễn Thị Hiền (Trường Liên cấp Hermann Gmeiner Vinh, Nghệ An). Phần đầu bài giảng, các tác giả dùng phương pháp ô ăn quan để giải các bài toán ở tiểu học (thường được gọi là bài toán giả thiết tạm). "Tôi thấy phần đó rất thú vị, rất sáng tạo. Nó cho học sinh thấy một cơ chế mà thoát ra khỏi bản chất giải phương trình. Tôi hoàn toàn cho điểm 10 ở phần đó", GS Thái nhận xét.

Nhưng với phần thứ hai, các tác giả dùng phương pháp này với nội dung tổ hợp ở lớp 10, thì các tác giả không thuyết phục được ban giám khảo. "Nói cho cùng, học toán là học cách nghĩ, cách suy luận, cách khám phá ra một cái gì đó. Từ nó dẫn người ta đến tư duy, đến những thuật toán chung, để khái quát nó lên, giải quyết những mô hình trong cuộc sống mà nó tương tự như thế. Việc dùng một phương pháp thiên về mô tả cho nội dung tổ hợp ở lớp 10 của các tác giả vừa khiến cho bài giảng cầu kỳ, vừa không phù hợp. Học sinh lớp 10, 15 – 16 tuổi rồi, không phải lúc nào cũng cầm nắm sờ mó với mô tả được. Một lúc nào đó, anh phải chuyển từ *cụ thể* lên đến *hình ảnh*, rồi lên đến *biểu tượng hoá* chứ.", GS Thái chia sẻ.

Cuối tháng Ba vừa qua, trong trong khuôn khổ sự kiện "Toán học cho mọi người", vòng chung khảo kỳ thi Bài giảng và bài viết về Toán học, mang tên Hoàng Tụy, lần thứ hai, đã được diễn ra. Trước đó, hội đồng giám khảo đã tiến hành chấm các hồ sơ dự thi ở vòng sơ khảo, lựa chọn được 8 hồ sơ tốt nhất để tranh tài tại vòng chung khảo. Tại vòng chung khảo (diễn ra ở hội trường Hoàng Tụy, Viện Toán học Việt Nam), đại diện nhóm tác giả hoặc các tác giả đã thuyết trình các bài giảng và bài viết trước hội đồng giám khảo, trước sự theo dõi (trực tiếp và trực tuyến) của những người quan tâm tới kỳ thi. Theo hội đồng giám khảo, chất lượng hồ sơ dự thi năm nay cao hơn hẳn năm trước, vì thế mà phần trình bày của 8 thí sinh được lựa chọn thuyết trình trong vòng chung khảo ít nhiều đều tạo sự thú vị cho người theo dõi.

Trọng tâm nội dung của kỳ thi lần thứ hai là Tìm hiểu về môn Toán trong "Chương trình giáo dục phổ thông mới" thông qua một chủ đề cụ thể. Bên cạnh đó là một số nội dung truyền thống như: Tìm hiểu về Toán sơ cấp, lịch sử Toán học và Toán học trong cuộc sống.

Hội đồng giám khảo năm nay gồm GS Ngô Việt Trung, Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, nguyên Viện trưởng Viện Toán học; GS Đỗ Đức Thái, Trường ĐH Sư phạm Hà Nội; GS Phùng Hồ Hải, Phó chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, nguyên Viện trưởng Viện Toán học; GS Hà Huy Khoái, nguyên Viện trưởng Viện Toán học; TS Trần Nam Dũng, Phó hiệu trưởng Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐH Quốc gia TP.HCM; PGS Phó Đức Tài, Trưởng Khoa Toán-Cơ-Tin học, Trường ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐH Quốc gia Hà Nội.

Kết quả chung cuộc như sau:

Nội dung "Tìm hiểu về môn Toán trong "Chương trình giáo dục phổ thông mới" thông qua một chủ đề cụ thể":

- Giải nhì (không có giải nhất): Bài giảng "Giải bài toán tập hợp bằng phương pháp "ô ăn quan" của nhóm tác giả Ngô Quốc Trung, Nguyễn Thị Hiền, Trường Liên cấp Hermann Gmeiner Vinh, Nghệ An.

- Giải ba: Bài viết "Một cách thiết kế dạy học Toán theo hướng gắn liền với thực tiễn", tác giả Phạm Đức Quang, Trường ĐH Sư phạm Hà Nội 2.

• Giải khuyến khích: Bài giảng "Hình có trục đối xứng", tác giả Nguyễn Thụy Việt Anh, Trường Liên cấp Hội nhập Quốc tế Ischool, Quảng Trị; Bài giảng "Tích hợp tư duy công dân số trong bài giảng môn Toán", tác giả Nguyễn Thế Minh, Trường Trung học Vinschool Imperia, Hải Phòng.

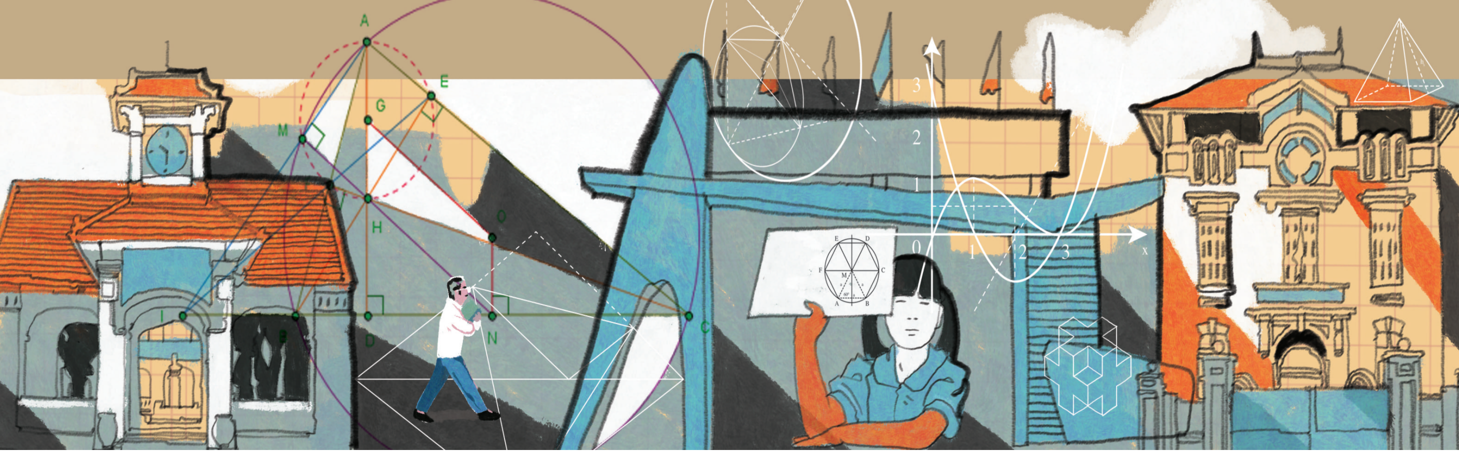
Các nội dung khác:

• Giải nhất: Bài giảng "Bổ đề hai đoạn thẳng và một số ứng dụng", tác giả Nguyễn Hữu Tâm, Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định.

• Giải nhì: Bài giảng "Mập mờ công thức Euler", tác giả Nguyễn Quang Minh, Biên Hoà, Đồng Nai.

• Giải ba: Bài giảng "Lý thuyết đồ thị và một số cấu trúc đáng chú ý", tác giả Hà Trung, Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định.

• Giải khuyến khích: Bài giảng "Nét đẹp của phương pháp đếm dưới góc nhìn của số Fibonacci", tác giả Nguyễn Tuấn Anh, Trường PTTH chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp.



CHUNG KẾT VÀ TRAO GIẢI CUỘC THI "BÀI GIẢNG VÀ BÀI VIẾT VỀ TOÁN HỌC, MANG TÊN HOÀNG TỤY" LẦN THỨ HAI

VÂN NGA[1]

Ngày 25/3/2023, tại Hà Nội, Viện Toán học, Trung tâm Thông tin – Tư liệu, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam và Trung tâm Quốc tế Đào tạo và Nghiên cứu Toán học (trực thuộc Viện Toán học, được UNESCO bảo trợ) đã đồng tổ chức ngày "Toán học dành cho mọi người". Đây là hoạt động hưởng ứng Ngày Toán học Thế giới năm 2023, đã thu hút đông đảo các nhà khoa học, giáo viên, sinh viên và học sinh trên cả nước tham dự.

GS. Hoàng Tụy (1927 – 2019) là một nhà Toán học xuất sắc, đồng thời cũng là một nhà sư phạm mẫu mực. Trước khi biên soạn những giáo trình đại học được nhiều thế hệ sinh viên, nghiên cứu sinh sử dụng, GS. Hoàng Tụy từng biên soạn những bài giảng đầu tiên cho hệ thống giáo dục quốc dân. Cả cuộc đời cống hiến cho Toán học, Ông không ngừng trăn trở về nền giáo dục nước nhà. Được sự đồng ý của gia đình GS. Hoàng Tụy, Kỳ thi "Bài giảng và bài viết về Toán học, mang tên Hoàng Tụy" được tổ chức với sự phối hợp của Tạp chí Pi và Trung tâm Quốc tế Đào tạo và Nghiên cứu Toán học.

Với mục tiêu khích lệ sự tìm tòi, sáng tạo của giáo viên, sinh viên và mọi người yêu Toán học trong việc giảng dạy, đồng thời quảng bá Toán học, khơi dậy lòng say mê Toán học trong học sinh và công chúng, kỳ thi "Bài giảng và bài viết mang tên Hoàng Tụy" đã thu hút nhiều tác giả gửi hồ sơ tham gia.

Chủ đề của Kỳ thi lần thứ hai, năm 2023 là: Tìm hiểu về môn Toán trong "Chương trình giáo dục phổ thông mới" thông qua một chủ đề cụ thể; Tìm hiểu về Toán sơ cấp, lịch sử Toán học và Toán học trong cuộc sống. Hội đồng giám khảo năm nay gồm:

– GS.TSKH. Ngô Việt Trung (Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, Nguyên Viện trưởng Viện Toán học), Chủ tịch Hội đồng;

– GS.TSKH. Đỗ Đức Thái (Đại học Sư phạm Hà Nội, Phó Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam);

– GS.TSKH. Phùng Hồ Hải (Phó Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, Nguyên Viện trưởng Viện Toán học);

– GS.TSKH. Hà Huy Khoái (Trưởng khoa Toán Đại học Thăng Long, Nguyên Viện

[1] *Trung tâm Thông tin – Tư liệu, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.*

trưởng Viện Toán học);

– TS. Trần Nam Dũng (Phó Hiệu trưởng Trường Phổ thông Năng khiếu, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh);

– PGS. TS Phó Đức Tài (Trưởng khoa Toán–Cơ–Tin học, Đại học Khoa học Tự Nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội).

Giáo sư Ngô Việt Trung, Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, Chủ tịch Hội đồng Giám khảo.

Ban Tổ chức đã tiến hành chấm các hồ sơ dự thi ở vòng sơ khảo, lựa chọn được 8 hồ sơ tốt nhất để tranh tài tại vòng chung khảo, bao gồm:

1. Hình có trục đối xứng, tác giả Nguyễn Thụy Việt Anh, Trường Liên cấp Hội nhập Quốc tế Ischool, Quảng Trị;

2. Lý thuyết đồ thị và các cấu trúc đáng chú ý, tác giả Hà Trung, Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định;

3. Bổ đề hai đoạn thẳng và một số ứng dụng, tác giả Nguyễn Hữu Tâm, Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định;

4. Nét đẹp của phương pháp đếm dưới góc nhìn của số Fibonacci, tác giả Nguyễn Tuấn Anh, Trường PTTH chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp;

5. Một cách thiết kế dạy học Toán theo hướng gắn liền với thực tiễn, tác giả Phạm Đức Quang, Trường Đại học Hà Nội 2;

6. Tích hợp tư duy công dân số trong bài giảng môn Toán, tác giả Nguyễn Thế Minh, Trường Trung học Vinschool Imperia, Hải Phòng;

7. Mập mờ công thức Euler, tác giả Nguyễn Quang Minh, Biên Hoà, Đồng Nai;

8. Giải bài toán tập hợp bằng phương pháp “ô ăn quan”, nhóm tác giả Ngô Quốc Trung, Nguyễn Thị Hiền, Trường Liên cấp Hermann Gmeiner Vinh, Nghệ An.

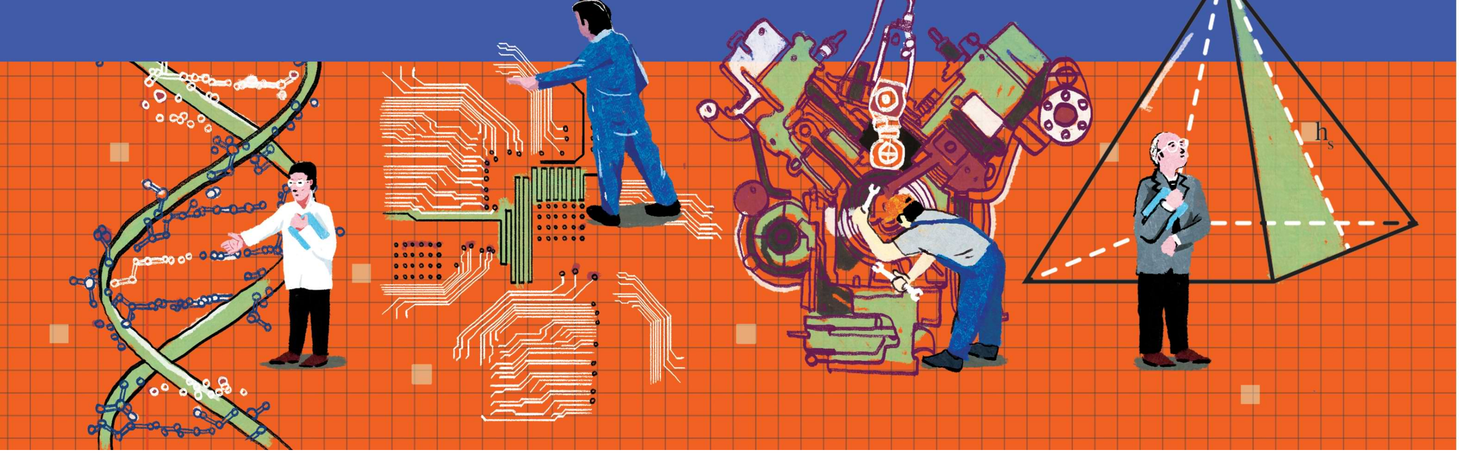
Trong khuôn khổ Ngày “Toán học dành cho mọi người”, 8 nhóm tác giả/tác giả đã thuyết trình các bài giảng và bài viết trước Hội đồng giám khảo. Sau những nhận xét công tâm và đánh giá kỹ lưỡng, Ban Tổ chức đã quyết định trao giải cho các tác giả.

Về chủ đề “Tìm hiểu về môn Toán trong “Chương trình giáo dục phổ thông mới” thông qua một chủ đề cụ thể”: Không có giải Nhất, giải Nhì được trao cho bài giảng “Giải bài toán tập hợp bằng phương pháp ô ăn quan”, nhóm tác giả Ngô Quốc Trung, Nguyễn Thị Hiền. Bài viết “Một cách thiết kế dạy học Toán theo hướng gắn liền với thực tiễn”, tác giả Phạm Đức Quang đạt giải Ba. Bài giảng “Tích hợp tư duy công dân số trong bài giảng môn Toán”, tác giả Nguyễn Thế Minh và “Hình có trục đối xứng”, tác giả Nguyễn Thụy Việt Anh đạt giải Khuyến khích.

Về các chuyên đề khác, giải Nhất được trao cho bài giảng “Bổ đề hai đoạn thẳng và một số ứng dụng”, tác giả Nguyễn Hữu Tâm. Bài giảng “Mập mờ công thức Euler”, tác giả Nguyễn Quang Minh đạt giải Nhì; “Lý thuyết đồ thị và một số cấu trúc đáng chú ý”, tác giả Hà Trung đạt giải Ba; “Nét đẹp của phương pháp đếm dưới góc nhìn của số Fibonacci”, tác giả Nguyễn Tuấn Anh đạt giải Khuyến khích.

Đại diện ban giám khảo và đại diện gia đình GS Hoàng Tụy trao giải cho các tác giả.

Theo đánh giá của Ban Tổ chức, chất lượng hồ sơ dự thi của các tác giả tại Kỳ thi "Bài giảng và bài viết về Toán học, mang tên Hoàng Tụy" lần thứ hai, năm 2023 cao hơn lần thứ nhất, năm 2021. Điều đó cho thấy Kỳ thi "Bài giảng và bài viết về Toán học, mang tên Hoàng Tụy" đã được lan tỏa và hưởng ứng mạnh mẽ, trở thành một nhân tố tích cực góp phần nâng cao chất lượng dạy và học Toán ở cấp trung học phổ thông.



LÀM THẾ NÀO ĐỂ CÂN TRÁI ĐẤT?

NGUYỄN HOÀNG VŨ[1]

Khối lượng của Trái Đất bằng bao nhiêu? Đây là một câu hỏi mà đến thế kỷ 18 người ta mới có được những kết quả đo đạc tương đối chính xác dựa trên những lý thuyết vật lý được phát triển suốt hai thế kỷ bắt đầu từ những thí nghiệm của Galileo.

1. Từ Galileo đến Newton

Hình 1. Galileo và dao động của ngọn đèn trên trần nhà thờ.

Một câu chuyện khá thú vị thường được kể về Galileo và trọng lực là khi ông quan sát ngọn đèn trên trần nhà trong nhà thờ Pisa. Ông dùng mạch đập của mình để tính thời gian của mỗi chu kỳ dao động của nó và nhận thấy rằng với những góc dao động nhỏ, chu kỳ giao động không thay đổi. Với những thí nghiệm sau này về con lắc đơn, Galileo còn nhận thấy rằng chu kỳ dao động thay đổi theo chiều dài của dây treo (dây treo càng dài thì chu kỳ càng lớn) nhưng lại không phụ thuộc vào khối lượng của con lắc.

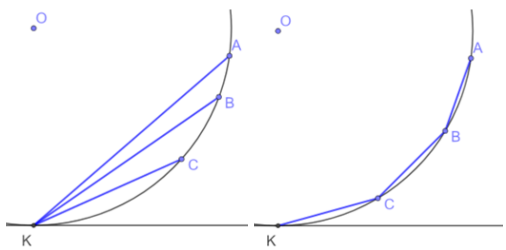
Hình 2. Galileo biểu diễn thí nghiệm về chuyển động trên mặt phẳng nghiêng cho các quý tộc nhà Medici (tranh của Giuseppe Bezzuoli).

Ông tiếp tục nghiên cứu vấn đề này bằng cách làm thí nghiệm với chuyển động trên mặt phẳng nghiêng, một dạng chuyển động mà ông cho rằng có thể dùng để liên hệ với chuyển động theo cung tròn của con lắc. Thời gian được Galileo đo bằng một đồng hồ nước. Khi hòn bi được thả từ vị trí đầu của mặt phẳng nghiêng thì khóa cũng được mở để nước từ đồng hồ chảy vào một bình chứa bên dưới. Khi hòn bi đến vị trí bị chặn lại thì khóa cũng được đóng lại cùng lúc. Việc đo khối lượng nước trong bình sẽ cho độ dài thời gian của chuyển động. Kết quả

[1] *Hà Nội.*

thí nghiệm cho thấy quãng đường chuyển động tỷ lệ thuận với bình phương của thời gian. Đồng thời, thời gian chuyển động cho cùng một quãng đường sẽ càng ngắn khi góc nghiêng tăng lên.

Galileo còn phát hiện ra rằng khi cho hòn bi lăn trên một dây cung có điểm cuối tại vị trí mà đường tròn tiếp xúc phương nằm ngang thì thời gian chuyển động không thay đổi khi ta di chuyển vị trí đầu dây cung trên đường tròn (độc giả có thể thử tự chứng minh bài toán này). Đồng thời, ta cũng có thể coi chuyển động của con lắc đơn dọc theo cung tròn là tổng hợp của nhiều chuyển động trên các đoạn dây cung liên tiếp nhau. Nhận định này cũng là cơ sở giúp Huygens thiết lập phương trình toán học cho chuyển động của con lắc đơn nhiều thập kỷ sau đó.



Hình 3. Một số nhận định của Galileo về chuyển động trên mặt phẳng nghiêng. Trái: viên bi lăn trên các dây cung của cùng một đường tròn và cùng một điểm cuối có thời gian lăn bằng nhau. Phải: Khi xấp xỉ cung tròn bằng các đoạn mặt phẳng nghiêng liên tiếp, thời gian lăn càng ngày càng gần với thời gian lăn trên cung tròn khi độ dài các đoạn nghiêng càng nhỏ.

Một điểm đáng chú ý nữa là khi dây cung trở thành đường kính, ta có được chuyển động rơi tự do! Khi đó, quãng đường chuyển động của vật rơi tự do sẽ tỷ lệ với bình phương thời gian. Mặt khác, độ dài của dây treo con lắc đơn cũng tỷ lệ với bình phương của chu kỳ dao động. Galileo tiến hành các thí nghiệm đo tỷ lệ giữa thời gian rơi tự do và chu kỳ con lắc đơn với độ cao thả rơi bằng chiều dài dây treo của con lắc. Kết quả cho thấy đây là một hằng số không phụ thuộc vào khối lượng. Các thí nghiệm của ông cho kết quả từ 2.3 đến 2.52 (giá trị đúng là $\frac{g}{\sqrt{2}} = 2.22$). Do không có cơ sở lý thuyết, Galileo không thể đưa ra chứng minh toán học cho vấn đề này.

Quy luật bình phương thời gian của chuyển động trong các thí nghiệm của Galileo hoàn toàn đi ngược lại với những lập luận của Aristotle. Trong khi Aristotle phát biểu rằng vật càng nặng sẽ rơi càng nhanh hơn, Galileo lại kết luận bằng thực nghiệm rằng thời gian rơi chỉ phụ thuộc vào độ cao khi thả vật. Việc thay những lập luận cảm tính bằng kiểm chứng thực nghiệm đánh dấu một chuyển biến lớn đặt nền móng cho khoa học tự nhiên hiện đại.

Hình 4. Các ngọn tháp nghiêng gắn liền với các thí nghiệm về trọng lực. Trái: tháp nghiêng Oude Kerk (Hà Lan). Giữa: tháp nghiêng Pisa (Italia). Phải: Tháp nghiên Asinelli (Italia).

Nhiều độc giả chắc cũng sẽ liên hệ đến câu chuyện về Galileo và tháp nghiêng Pisa, trong đó khi ông thả cùng lúc một quả đạn đại bác và một viên đạn súng trường từ đỉnh tháp thì chúng cũng chạm đất cùng một thời điểm. Tuy nhiên, về mặt lịch sử, Galileo không phải là người đầu tiên làm việc này. Một thí nghiệm tương tự đã được Simon Stevin tiến hành trước đó vào năm 1586 tại tháp nghiêng ở Oude Kerk (Delft, Hà Lan). Sau vài thập kỷ, một thí nghiệm quan trọng hơn được Giovanni Riccioli thực hiện tại tháp nghiêng Asinelli ở Bologna, Italia bắt đầu từ năm 1640. Thời gian rơi từ các độ cao khác nhau cho kết quả hoàn toàn khớp với quy luật bình phương thời gian. Những số liệu của Riccioli cho thấy giá trị gia tốc trọng trường là $9.4\, m/s^2$, không quá xa cho với giá trị đã biết ngày nay.

Mặt khác, vào đầu thế kỷ 17, dựa vào những số liệu thiên văn của Tycho Brahe, Kepler đã đưa ra các định luật quan trọng về sự chuyển động của các hành tinh quanh Mặt trời. Quỹ đạo của các hành tinh là một hình ellipse mà Mặt trời nằm tại một tiêu điểm của nó. Tuy nhiên, Kepler vẫn chưa đưa ra được giải thích đầy đủ giải thích hiện tượng này. Phải vài thập kỷ tiếp theo, lý thuyết về lực hấp dẫn mới được hình thành trong các nghiên cứu của Newton. Một điều đáng chú ý là Newton không phải người đầu tiên đưa ra giả thuyết về một lực hấp dẫn tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách, nhà toán học Pháp Ismael Boulliau đã thảo luận về vấn đề này năm 1645, nhưng Newton chính là người đầu tiên đưa ra được chứng minh toán học rằng một lực như vậy sẽ dẫn đến các quỹ đạo ellipse như trong định luật 1 của Kepler cũng như các quỹ đạo dạng conic khác (tròn, parabol và hyperbol). Đồng thời, Newton cũng tính toán được rằng lực hấp dẫn của một khối cầu đối với một vật khác sẽ tương đương với lực hấp dẫn của chất điểm có cùng khối lượng đặt ở tâm hình cầu. Nói cách khác, trọng lực gây ra sự rơi của các vật hướng về mặt đất cũng như lực hút giữa các vật thể trong vũ trụ có cùng bản chất.

Lực hấp dẫn giữa hai vật có khối lượng m_1 và m_2 cách nhau một khoảng r có công thức như sau:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

với G là hằng số hấp dẫn. Cần chú ý rằng khái niệm về G chưa xuất hiện ở thời kỳ của Newton.

2. Lực hấp dẫn của ngọn núi

Một vấn đề được đặt ra là trọng lực liệu có như nhau tại mọi nơi trên Trái Đất? Theo Newton, do lực quán tính li tâm, Trái Đất sẽ phình ra hơn ở xích đạo và do đó trọng lực sẽ nhỏ nhất ở vị trí này và tăng dần theo vĩ độ. Từ các kết quả đo đạc trọng lực của nhà khoa học Pháp Jean Richer tại đảo Cayene, Newton tính ra rằng khoảng cách đến tâm Trái Đất tại xích đạo lớn hơn tại các cực là 17 dặm (con số chính xác là 17 dặm).

Tuy nhiên, tại bản thân nước Pháp, nhiều nhà khoa học ủng hộ lý thuyết của Descartes từ hơn nửa thế kỷ trước, rằng tương tác giữa các vật thể trong vũ trụ hay trọng lực đều xảy ra do các vòng xoáy của một chất lỏng vô hình tràn đầy khắp nơi gọi là "ether", ngược với mô hình lực hấp dẫn của Newton. Một số đo đạc tại Pháp của hai cha con Cassini, đều là thành viên Viện Hàn lâm Khoa học Pháp, vào đầu thế kỷ 18 cho kết quả rằng độ dài của vĩ độ giảm dần khi vĩ độ tăng, tức Trái Đất nhọn ở hai cực (dạng quả trứng). Trong khi đó, những người Anh lại cho rằng các đo đạc tại Pháp có độ chính xác không đủ cao.

Hình 5. Trái Đất dẹt ở xích đạo hay ở hai cực? Đây là một câu hỏi quan trọng của khoa học thế kỷ 18.

Năm 1734, Johann Bernoulli công bố chứng minh của ông rằng các xoáy ether của Descartes sẽ dẫn đến việc Trái Đất nhọn ở hai đầu, cung cấp cơ sở lý thuyết cho thuyết quả trứng. Trong khi đó, học trò của ông là Pierre Maupertuis lại ủng hộ mô hình của Newton. Bản thân Viện Hàn lâm Khoa học Pháp bị chia thành hai phái do vấn đề này.

Sau khi Pháp và Tây Ban Nha trở thành đồng minh, năm 1735, một đoàn khảo sát gồm ba thành viên của Viện Hàn lâm Khoa học Pháp: Pierre Bouger, Charles–Marie de La Condamine và Louis Godin được cử đến khu vực dãy núi Andes ở Nam Mỹ do Tây Ban Nha quản lý lúc đó để tiến hành đo độ dài của vĩ độ ở xích đạo. Đồng thời, năm 1736, Maupertuis đích thân dẫn đoàn đi đo độ dài vĩ độ tại Lapland, Phần Lan. Các kết quả của hai chuyến khảo sát này cho thấy Newton đã đúng: Trái Đất phình ra hơn ở xích đạo và dẹt hơn ở hai cực.

Hình 6. Maupertuis đo độ dài vĩ độ tại Lapland.

Trong thời gian này, Bouger cũng đã tiến hành đo trọng lực tại những độ cao và vĩ độ khác nhau thông qua việc xác định chu kỳ của con lắc đơn. Bouger đã chỉ ra ba nhân tố ảnh hưởng đến giá trị của gia tốc trọng trường g trong thực tiễn:

- Vĩ độ: khi vĩ độ tăng, khoảng cách từ vị trí của ta đến trục quay của Trái Đất cũng tăng nên lực quán tính li tâm do chuyển động quay của Trái Đất cũng giảm theo.
- Độ cao: Tại độ cao h so với mực nước biển, ta có $g = \dfrac{GM}{(R+h)^2}$ với G là hằng số hấp dẫn, còn M và R lần lượt là khối lượng và bán kính Trái Đất. Sử dụng xấp xỉ bậc nhất ta có: $g \approx \dfrac{GM}{R^2}\left(1-\dfrac{2h}{R}\right)$.
- Địa hình: Do khoảng không giữa vị trí đo và mực nước biển không phải là không khí mà là dãy núi, Bouger tiến hành tính toán ảnh hưởng từ lực hấp dẫn của các đối tượng này lên giá trị trọng lực đo được. Nếu coi toàn bộ khoảng không giữa Trái Đất (bán kính R) và vị trí đo có một vỏ cầu bề dày h thì thành phần trọng lực do vỏ cầu này gây ra tại độ cao h sẽ bằng $4\pi G h\rho'$ với ρ' là mật độ của vỏ cầu. Để mô phỏng tốt hơn dãy núi Andes, Bouger sử dụng một hình lăng trụ dài vô hạn có thiết diện là một tam giác vuông cân. Từ trường hợp này, có thể tính được thành phần trọng lực với các giá trị khác nhau của góc giữa hai cạnh bên của dãy núi. Khi hai cạnh của dãy núi tạo với nhau góc 180°, ta được mặt phẳng Bouger, một mặt phẳng giả tưởng mà ngay nay vẫn được các nhà địa vật lý sử dụng để hiệu chỉnh giá trị đo trọng lực.

Pierre Bouger (1698 – 1758).

Từ dữ liệu ở hai điểm có độ cao khác nhau, Bouger tính được rằng tỷ lệ mật độ của dãy núi Andes so với mật độ của Trái Đất là $\dfrac{850}{3993}$. Giá trị mật độ đo được ngày nay của dãy Andes và Trái Đất lần lượt là 2.7 và $5.515\, g/cc$. Tuy giá trị mà Bouger tính được không chính xác nhưng nó cho thấy một phương pháp để xác định khối lượng Trái Đất (khi đã biết bán kính của nó): đánh giá biến thiên trọng lực gây ra bởi một ngọn núi để tìm mật độ của Trái Đất.

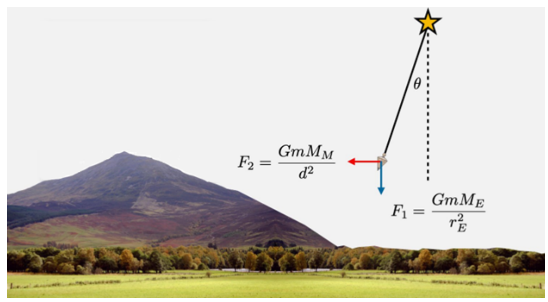
Để tiến hành tính khối lượng Trái Đất, Bouger và La Condamine cần một ngọn núi cách biệt với các ngọn núi khác (thay vì nhiều đỉnh núi liền nhau như Bouger đã đo trên dãy Andes) để việc ước lượng khối lượng của nó dễ dàng hơn. Họ chọn ngọn núi Chimborazo (ngày nay thuộc Ecuador).

Hình 7. Núi Chimborazo (Ecuador ngày nay).

Việc đo đạc được tiến hành năm 1738 tại hai vị trí cùng vĩ độ: một ở xa và một ở gần ngọn núi (thay vì trên đỉnh núi). Khi đó ở vị trí gần ngọn núi, lực hấp dẫn của ngọn núi sẽ làm con lắc bị lệch khỏi phương thẳng đứng. Độ lệch này sẽ được xác định bằng cách so phương dây dọi với phương quan sát tới cùng một ngôi sao tại hai địa điểm. Sau khi xác định góc lệch do lực hấp dẫn của ngọn núi gây ra, tỷ lệ mật độ giữa ngọn núi và Trái Đất có thể được xác định thông qua biến đổi toán học (thể tích của ngọn núi cần được tính thông qua các công thức giải tích). Ước lượng cho khối lượng Trái Đất mà Bouger công bố sau khi trở lại Pháp không quá chính xác do những sai sót trong việc tính thể tích ngọn núi cũng như giả thuyết rằng lực hấp dẫn của ngọn núi tương đương với lực hấp dẫn của một chất điểm có cùng khối lượng đặt ở trọng tâm (giả thuyết này chỉ đúng với hình cầu).

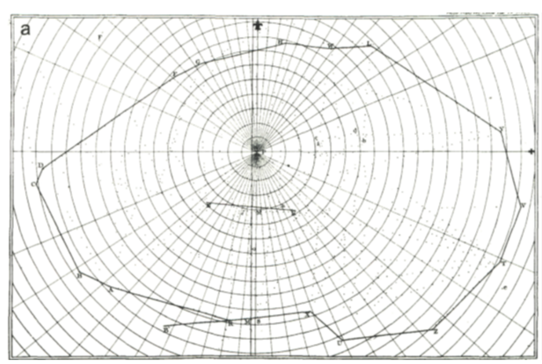
Nevil Maskelyne (1732 – 1811).

Dù Bouger đề nghị các nhà khoa học khác ở châu Âu tiến hành những thí nghiệm tương tự, phải nhiều năm sau việc này mới lại được nhắc đến. Năm 1772, Nevil Maskelyne đề xuất tiến hành một thí nghiệm như vậy tại Anh. Cuối cùng, ngọn núi Schiehallion ở Scotland được chọn do nó đủ lớn, cách xa các đỉnh núi khác và có hình dạng dễ tính toán. Các dữ liệu từ lần đo này được nhà toán học Charles Hutton xử lý. Kết quả cuối cùng cho mật độ Trái Đất là $4.5\,g/cc$. Nếu sử dụng các dữ liệu hiện đại về địa hình cũng như mật độ của đá núi tại địa điểm đó, kết quả đúng sẽ là $5.480\,g/cc$ rất gần với giá trị $5.515\,g/cc$ ngày nay.



Hình 8. Thí nghiệm ở núi Schiehallion (Scotland).

Một điểm đáng chú ý là Hutton đã biểu diễn các điểm có cùng độ cao bằng một đường gấp khúc khi mô tả địa hình của khu vực xung quanh Schiehallion. Các đường này đã trở thành các đường đồng mức được sử dụng phổ biến trong bản đồ địa hình cũng như trong các biểu diễn dữ liệu kỹ thuật.

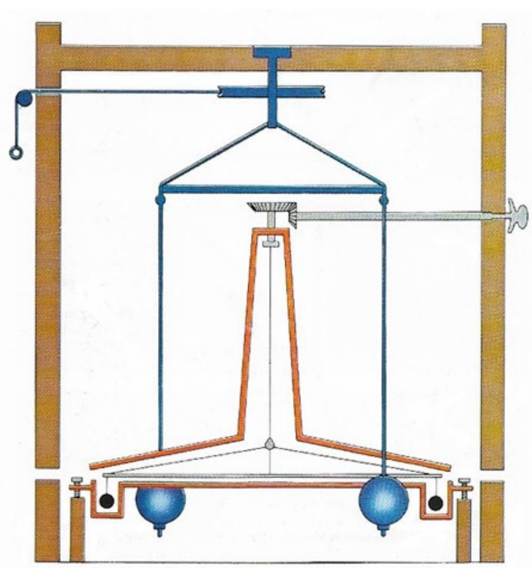


Hình 9. Đường đồng mức độ cao của Charles Hutton.

Trong thế kỷ 19, với các cuộc khảo sát sử dụng con lắc đơn để đo trọng lực ở khu vực Ấn Độ, các nhà khoa học Anh đã nhận thấy độ lệch của con lắc khi ở gần dãy núi Himalaya không lớn như các tính toán lý thuyết. Các nghiên cứu của các nhà khoa học John Pratt và George Airy về vấn đề này đã dẫn đến mô hình trong đó lớp vỏ Trái Đất thực chất đang nổi trên một lớp dung nham nóng chảy ở phía dưới. Phải đến giữa thế kỷ 20, người ta mới khẳng định được vấn đề này nhờ các phát hiện chứng minh cho thuyết kiến tạo lục địa.

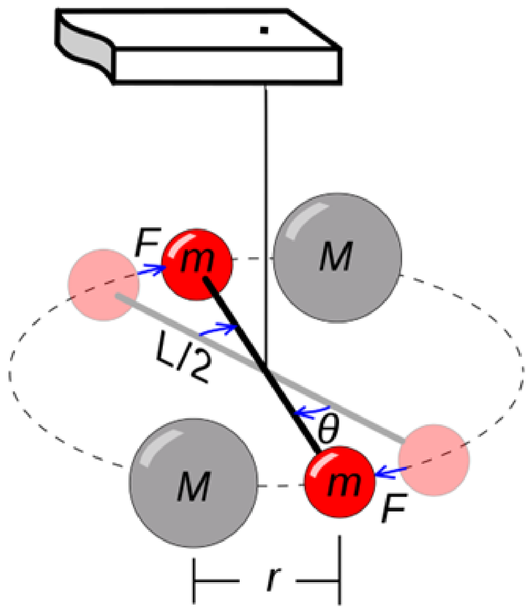
3. Thí nghiệm của Cavendish

Liệu có cách nào để đo khối lượng Trái Đất mà không cần đi đến những ngọn núi xa xôi? Năm 1797, Henry Cavendish đã tiến hành một thí nghiệm như vậy ngay tại London. Dựa trên những thiết bị chưa hoàn thiện của John Michell, ông đã thiết kế thí nghiệm đo lực hấp dẫn thông qua momen xoắn.



Hình 10. Sơ đồ thí nghiệm của Cavendish. Các viên bi m có màu đen còn các quả nặng bằng chì M có màu xanh.

Về cơ bản, ta có hai quả cầu nhỏ m và hai quả cầu lớn M bằng chì.Lực hấp dẫn do các quả cầu lớn tác dụng lên các quả cầu nhỏ sẽ tạo một momen xoắn làm xoay dây treo. Bằng cách xác định góc lệch của thanh nối hai quả cầu nhỏ, ta có thể tính được momen xoắn cũng như độ lớn của lực hấp dẫn.



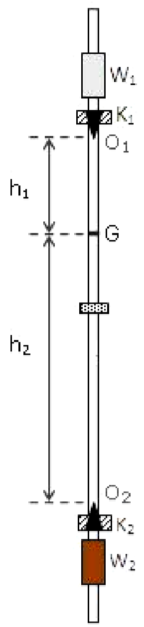
Hình 11. Các lực hấp dẫn tạo moment xoắn làm lệch dây treo.

Do khoảng cách giữa M với m và khoảng cách từ m đến tâm Trái Đất cũng như khối lượng của m đều là đã biết, thí nghiệm của Cavendish cho phép xác định khối lượng Trái Đất qua tỷ lệ giữa lực hút của M với m và trọng lực tác dụng lên m. Với giả sử Trái Đất là hình cầu, kết quả của Cavendish cho mật độ của Trái Đất là $5.448g/cc$.

Bản thân thí nghiệm này cũng cho phép tính được hằng số hấp dẫn G từ độ lớn của lực hấp dẫn giữa M và m. Số liệu của Cavendish cho giá trị của G chỉ khác 1% so với số liệu hiện đại nhất. Cho đến ngày nay, việc đo momen xoắn vẫn là phương pháp chủ yếu cho các thí nghiệm độ chính xác cao để xác định hằng số hấp dẫn.

4. Đo trọng lực thời hiện đại

Trong thế kỷ 19, đã có một số nỗ lực cải thiện độ chính xác của việc đo trọng lực. Vào đầu thế kỷ, Henry Kater đề xuất sử dụng con lắc vật lý thay cho con lắc đơn. Con lắc này gồm một vật nặng cố định W_2 và một vật nặng có thể di chuyển W_1. Trọng tâm G của hệ sẽ thay đổi khi W_1 di chuyển. Con lắc Kater có thể được cho dao động quanh một trong hai điểm tựa O_1 hoặc O_2. Gọi h_1 và h_2 là khoảng cách từ các điểm này đến G.



Hình 12. Con lắc thuận nghịch của Kater.

Khi dao động quanh O_1, moment quán tính của con lắc là $I_1 = I_G + Mh_1^2$ với I_G là moment quán tính của con lắc quanh G và M là tổng khối lượng của cả hệ. Phương trình dao động cho góc lệch nhỏ khi đó là:

$$I_1\theta'' = -Mgh_1\theta$$

cho ta chu kỳ dao động:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\left(h_1^2 + \frac{I_G}{M}\right)}{gh_1}}$$

Tương tự cho T_2, sau khi biến đổi đại số ta có:

$$h_1T_1^2 - h_2T_2^2 = \frac{4\pi^2}{g}\left(h_1^2 - h_2^2\right)$$

do đó:

$$g = \frac{8\pi^2}{\dfrac{T_1^2+T_2^2}{h_1+h_2} + \dfrac{T_1^2-T_2^2}{h_1-h_2}}.$$

Khi $h_1 = h_2$, ta có $T_1 = T_2 = T$ và $g = \frac{4\pi^2}{T^2}(h_1+h_2)$.

Khi sử dụng, người ta cần chỉnh vị trí của W_1 sao cho $T_1 = T_2$ trong khi đó $h_1 + h_2$ chính là khoảng cách O_1O_2 đã biết.

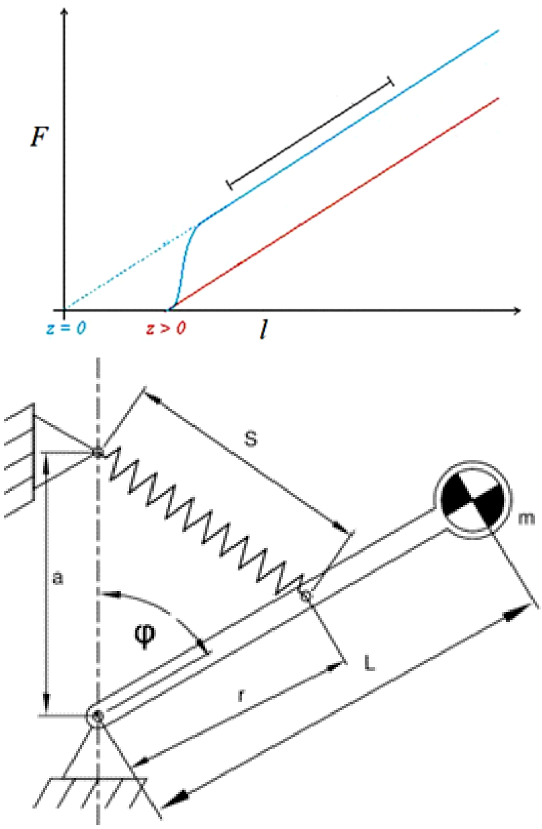
Thiết kế này được nhà toán học Friedrich Bessel cải tiến bằng cách cho khối lượng của W_1 và W_2bằng nhau. Khi đó, với các giá trị của T_1 và T_2 gần nhau, có thể tính được T theo công thức:

$$T^2 = \frac{T_1^2+T_2^2}{2} + \frac{T_1^2-T_2^2}{2}\left(\frac{h_1+h_2}{h_1-h_2}\right).$$

Với thay đổi này, việc hiệu chỉnh con lắc trở nên đỡ phức tạp hơn nhiều.

Đến cuối thế kỷ 19, nhà vật lý Eötvös bắt đầu sử dụng các thiết bị tương tự như của Cavendish để đo trọng lực phục vụ khảo sát địa chất ở Hungary. Một số thiết bị dạng này cũng được sản xuất ở một số nơi khác nhau trên thế giới. Người ta hi vọng rằng việc khảo sát sự biến thiên của trọng lực ở các vị trí khác nhau có thể giúp phát hiện các bất thường dưới lòng đất như mỏ quặng, mỏ dầu, khí gas ... Tuy nhiên, việc đo đạc chiếm thời gian quá dài và đòi hỏi độ chính xác cao khi thao tác là một khó khăn lớn.

Đến giai đoạn trước chiến tranh thế giới thứ hai, Lucien LaCoste, khi đang theo học cao học tại đại học Texas, Austin, đã phát minh ra một thiết bị đo trọng lực mới sử dụng lò xo. Ý tưởng về việc sử dụng lực đàn hồi lò xo để đo trọng lực đã được đưa ra từ thế kỷ 19 nhưng nhiều vấn đề về kỹ thuật đã dẫn đến việc thiết kế thiết bị dạng này không hiệu quả. LaCoste sử dụng một loại lò xo "độ dài zero". Với loại lò xo này, sẽ có một khoảng hoạt động mà trong đó lực đàn hồi tỷ lệ thuận với độ dài lò xo (thay vì tỷ lệ thuận với độ lệch từ độ dài tự nhiên). Các trọng lực kế theo dạng LaCoste có độ chính xác cao và nhanh chóng được sử dụng phổ biến ngày nay trong các khảo sát địa chất. Trọng lực kế của công ty LaCoste còn được NASA đưa lên Mặt trăng để khảo sát trọng lực trên thiên thể này.



Hình 13. Trên: Sự phụ thuộc của lực đàn hồi vào độ dài lò xo của lò xo độ dài zero (xanh) và lò xo thông thường (đỏ). Dưới: một thiết bị đo trọng lực theo dạng LaCoste, trong đó trọng lực tác dụng lên vật m và lực đàn hồi của lò xo có cân bằng về moment quay.

Với các khảo sát bằng máy bay, do phải xử lý các gia tốc gây ra do lực quán tính khi máy bay chuyển động trên bầu trời, người ta thiết kế những thiết bị rất phức tạp gồm nhiều thành phần tương tự với các thiết bị đo moment xoắn từ thời Eötvös. Đồng thời, với sự ra đời của máy tính điện tử, bản đồ trọng lực có thể được thiết lập từ việc tính toán các dịch chuyển nhỏ của quỹ đạo các vệ tinh quay quanh Trái Đất. Đây cũng là một trong những công nghệ có vai trò quan trọng để tăng độ chính xác của việc định vị GPS.

5. Lời kết

Có thể thấy, trong khoa học và kỹ thuật, những vấn đề lý thuyết và thực nghiệm luôn đan xen thúc đẩy lẫn nhau. Những thí nghiệm cơ học của Galileo cũng như các kết quả thiên văn của Kepler lại cần đến giải tích của Newton để xây dựng lý thuyết về lực hấp dẫn. Đồng thời, trong khi Newton cho rằng người ta không thể nào đo lực hấp dẫn giữa các vật thể nhỏ hơn các thiên thể trong vũ trụ thì các nhà thực nghiệm lại chứng minh điều ngược lại nếu ta có thể thiết kế và sáng tạo được các dụng cụ và phương pháp đo đủ chính xác. Pi sẽ còn tiếp tục giới thiệu tới độc giả nhiều vấn đề thú vị khác trong lịch sử khoa học trong những số tiếp theo.

> Gần đây, một bài hát đã được sáng tác kể về thí nghiệm cân Trái Đất của Maskelyne. Độc giả quan tâm có thể tìm trên Internet bài hát mang tên Schiehallion của ca sĩ Iona Lane.

Tài liệu tham khảo

[1] Ferreiro, L. D. (2011). *Measure of the Earth*. Basic Books.

[2] Milsom, J. (2018). *The Hunt for Earth Gravity : A History of Gravity Measurement from Galileo to the 21st Century*. Springer International Publishing.

[3] Smallwood, J. R. (2007). Maskelyne's 1774 Schiehallion experiment revisited. *Scottish Journal of Geology*, 43(1), 15 – 31. https://doi.org/10.1144/sjg43010015

CÁC NHÀ TOÁN HỌC HY LẠP
Bài 4: Euclid

TẠ DUY PHƯỢNG[1]

Nhập đề. Chúng ta có rất ít thông tin về cuộc đời các nhà toán học Hy Lạp vĩ đại. Euclid cũng không ngoại lệ. Tất cả những gì được biết về ông chứa trong một vài câu tóm tắt của Proclus: (Euclid, người đã viết *Cơ sở* (*Elements*), trong đó tập hợp nhiều định lý của Eudoxus, hoàn thiện nhiều kết quả của Theaetetus, đồng thời đã chứng minh rõ ràng, chặt chẽ và sắp xếp lại trong một trật tự logic rất nhiều kết quả chỉ được chứng minh một cách lỏng lẻo bởi những người đi trước.)

Như vậy, ngay cả nhà triết học Proclus (411 – 485 Công nguyên, viết tắt: CN), người đã viết nhiều cuốn sách về triết học và toán học Hy Lạp, trong đó có cuốn sách bình luận về *Cơ sở* của Euclid [8], cũng không cho biết chính xác năm sinh, năm mất và nơi sinh của Euclid. Proclus chỉ cho biết Euclid trẻ hơn các học trò đầu tiên của Plato, nhiều tuổi hơn Eratosthenes và Archimedes. Plato mất vào năm 347 trước Công nguyên (viết tắt: TCN) và Archimedes sống trong khoảng năm 287 đến 212 TCN. Vì vậy, các nhà viết sử cho rằng Euclid sống vào khoảng những năm 300 TCN, dưới thời Ptolemy I, người trị vì từ 306 đến 283 TCN và Ptolemy II (309 – 246 TCN, người trị vì từ 284 đến 246 TCN).

Phần đầu bài viết này giới thiệu nội dung cơ bản và những đánh giá về *Cơ sở* và các tác phẩm khác của Euclid, chủ yếu dựa trên [1]. Các phần sau dựa trên sự tổng hợp của các tài liệu [1]–[8].

Bối cảnh ra đời của Elements. Alexander Đại đế đã chinh phục phần lớn thế giới trong vòng 12 năm (334 – 323 TCN). Vì quân đội của ông chủ yếu là người Hy Lạp nên ông đã truyền bá văn hóa Hy Lạp sang một phần rộng lớn của vùng Cận Đông. Tiếp theo là

[1] *Cộng tác viên Viện Toán học.*

một chương mới của lịch sử, được gọi là *Thời đại Hy Lạp hóa* (Hellenistic) hoặc *tựa Hy Lạp* (Greek–like), kéo dài trong ba thế kỷ, cho đến khi đế chế La Mã được thành lập.

Sau khi Alexander qua đời, Ptolemy, một trong những vị tướng hàng đầu của Alexander, trở thành Thống đốc của Ai Cập và hoàn thành việc xây dựng thành phố Alexandria. Alexandria nhanh chóng tỏa sáng và làm lu mờ Athens, khiến Athens bị giảm xuống vị thế của một thành phố tỉnh lẻ. Trong gần 1000 năm, Alexandria là trung tâm phát triển của văn hóa Hy Lạp hóa.

Các thế hệ vua Ptolemy đã làm hết mình để biến Alexandria thành trung tâm của đời sống trí thức cho toàn bộ Địa Trung Hải. Họ đã xây dựng một trung tâm lớn của học thuật, gọi là *Bảo tàng* (Musaeum), ở đây có nghĩa là *Ngôi đền của các nàng thơ* (Temple of the Muses), tiền thân của trường đại học hiện đại. Các học giả hàng đầu của thời đại–các nhà khoa học, nhà thơ, nghệ sĩ và nhà văn–đã đến Alexandria theo lời mời của các vua Ptolemy với lòng hiếu khách đặc biệt. Các học giả có thể ở lại *Bảo tàng* bao lâu tùy thích, Tại *Bảo tàng*, họ có thời gian rảnh rỗi để theo đuổi việc nghiên cứu, tiếp cận các sách cổ trong thư viện và có cơ hội thảo luận các vấn đề với các chuyên gia. Ngoài ăn ở miễn phí, họ được trả lương, với yêu cầu duy nhất là họ phải giảng bài. Các học giả sống trong *Bảo tàng* với chi phí của nhà vua trong điều kiện sang trọng, với các phòng giảng rộng rãi và lộng lẫy, có thể đi dạo trong các hành lang với các hàng cột tráng lệ. Bảo tàng có một phòng ăn rộng lớn, nơi các học giả dùng bữa cùng nhau.

Được xây dựng như một tượng đài cho sự huy hoàng của dòng họ Ptolemy, *Bảo tàng* đã là một cột mốc quan trọng trong lịch sử khoa học. Nó được xây dựng như là một tổ chức nghiên cứu và học thuật, hơn là một cơ quan giáo dục, cho các học giả và các nhà khoa học đến sống và làm việc tại đây hàng mấy thế kỷ. Ở đỉnh cao của nó, trung tâm này có đến vài trăm chuyên gia, sự hiện diện của họ đã thu hút nhiều thế hệ trẻ háo hức đến học tập và phát triển tài năng. Khoa học và toán học thời kỳ này đã phát triển với thành công đáng kể. Trong lịch sử toán học chỉ có một thời gian khác trong khoảng 200 năm có thể so sánh với giai đoạn 300 – 100 trước Công nguyên, đó là khoảng thời gian từ Kepler đến Gauss (1600 – 1850).

Một trang từ cuốn sách Elements của Euclid in lần đầu tiên bằng tiếng Latin năm 1482.

Các học giả không thể sống mà không có sách, vì vậy nhu cầu đầu tiên là thu thập các bản thảo. Được thành lập gần như đồng thời với *Bảo tàng* và liền kề với nó là *Thư viện lớn* của Alexandria, nơi chứa bộ sưu tập lớn nhất các tác phẩm Hy Lạp còn tồn tại. Tất nhiên trước đó đã có những thư viện, nhưng không có thư viện nào sở hữu những tài nguyên lớn như thư viện Alexandria. Các bản thảo được tìm kiếm trên khắp thế giới và có những đại lý được ủy quyền để sao chép các tác phẩm nếu không mua được chúng. Du khách đến Alexandria được yêu cầu giao nộp bất kỳ cuốn sách nào chưa có trong thư viện.

Trước khi Bảo tàng chìm vào quên lãng năm 641, nó đã tạo ra nhiều tác phẩm nổi bật của các học giả, xác định tiến trình phát triển của toán học trong nhiều thế kỷ: Euclid, Archimedes, Apollonius, Ptolemy và Diophantus.

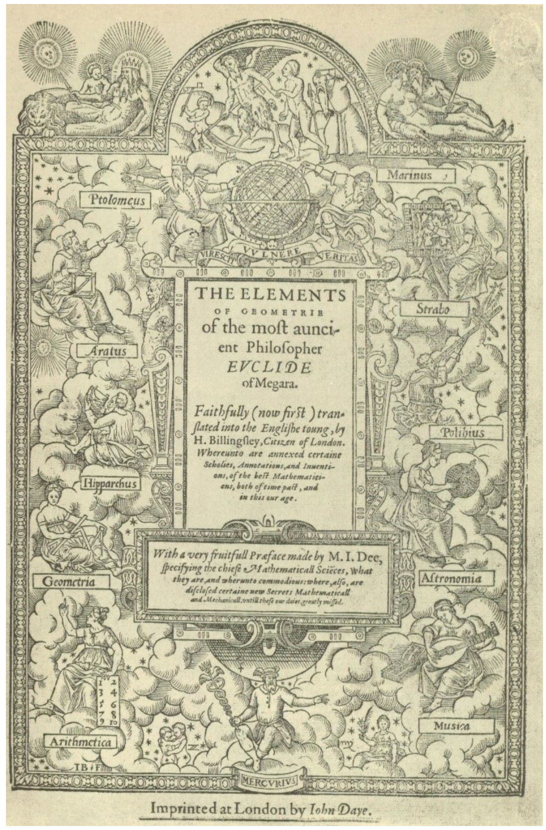
Các nhà lịch sử thống nhất cho rằng, Euclid là một học giả tích cực của *Bảo tàng* và *Thư viện*, dưới triều đại Ptolemy I và II.

Hậu thế biết đến Euclid như là tác giả của *Cơ sở của hình học* (*Elements of Geometry*), một cuốn sách toán học quan trọng nhất của văn hóa Hy Lạp và có lẽ của tất cả các thời đại. *Cơ sở* là tập hợp các kiến thức quan trọng nhất vào thời điểm đó, được sắp xếp thành 13 phần, hay 13 chương (13 quyển). Sáu quyển đầu dành cho hình học phẳng, ba quyển tiếp theo về số học. Quyển X cung cấp mối liên hệ giữa hai đại lượng: độ lớn (magnitude) được trình bày trong Quyển V và các con số (number) trong quyển VII. Quyển XI nghiên cứu hình học không gian và Quyển XII trình bày phương pháp vét cạn (method of exhaustion) cho cả hình phẳng và hình không gian. Và cuối cùng, Quyển XIII trình bày năm khối đa diện đều và phân loại các đường đã được trình bày trong Quyển X.

Mặc dù đã có một vài cuốn sách toán trước *Cơ sở*, nhưng không quyển nào được bảo tồn, vì lý do rõ ràng là tất cả đã bị lu mờ và được thay thế bởi cuốn sách của Euclid.

Mặc dù phần lớn kết quả đã có từ trước, nhưng sự sắp xếp hợp lý đến tuyệt vời của các định lý và sự phát triển của các sự kiện cho thấy thiên tài của Euclid. Ông đã hợp nhất các khám phá biệt lập thành một hệ thống các định đề, định nghĩa và tiên đề ban đầu, để từ đó suy ra các kết quả (định lý) theo một thứ tự suy diễn duy nhất.

Gần như không có cuốn sách nào quan trọng đối với tư tưởng và giáo dục của phương Tây hơn là *Cơ sở* của Euclid. Hiếm có cuốn sách nào, ngoại trừ Kinh Thánh, đã được xuất bản, lưu hành và nghiên cứu rộng rãi như *Cơ sở*. Trong suốt 2000 năm, sáu cuốn sách đầu tiên của *Cơ sở* là sách giáo khoa hình học của học sinh. Hơn 1000 phiên bản của *Cơ sở* đã xuất hiện kể từ bản in đầu tiên bằng tiếng Latin ra đời năm 1482. Và trước đó, các bản sao viết tay đã thống trị phần lớn việc giảng dạy toán học ở châu Âu.



Bìa trước của bản dịch tiếng Anh đầu tiên của Henry Billingsley năm 1570.

Mặc dù danh tiếng của Euclid, cả trong thời cổ đại và thời hiện đại, hầu như chỉ dựa vào *Cơ sở*, nhưng ông còn là tác giả của ít nhất 10 tác phẩm khác về nhiều chủ đề khác nhau. Văn bản tiếng Hy lạp cuốn *Dữ liệu* (*Data*), một tuyển tập gồm 95 bài tập có lẽ dành cho những sinh viên đã hoàn thành *Cơ sở*, là văn bản duy nhất khác của Euclid về hình học còn tồn tại. Một chuyên luận, *Các thiết diện conic* (*Conic Sections*), là nền tảng của bốn cuốn sách đầu tiên trong tác phẩm cùng tên của Apollonius, đã bị thất lạc. Và tác phẩm *Các hệ quả* (*Porisms*) cũng chung số phận. Rõ ràng *Các thiết diện conic* là một cuốn sách về hình học cao cấp, là một bản cổ xưa nhất của hình học giải tích. Ngoài ra, ông còn có *Phân chia các hình* (*Division of Figures*), *Hiện tượng* (*Phaenomena*), và *Quang học* (*Optics*),...

Chúng ta biết rất ít về cuộc sống cá nhân của Euclid. Chỉ biết chắc chắn ông đã thành lập một trường học và giảng dạy ở Alexandria, nhưng không có gì khác được biết ngoại trừ điều đó. Có khả năng ông đã được đào tạo toán học ở Athens dưới sự dẫn dắt của các học trò của Plato. Hai giai thoại sau có thể là những minh chứng cho tính cách của Euclid. Giai thoại thứ nhất kể rằng, khi nhà vua Ptolemy I hỏi ông liệu có con đường nào ngắn để tiếp thu hình học hơn là *Cơ sở* không, ông đã trả lời: "Thưa Bệ hạ, không có con đường hoàng gia tới hình học" ("There is no royal road to Geometry"), ngụ ý là toán học bình đẳng với tất cả mọi người, Một câu chuyện khác, do Stobaeus (thế kỷ 5) kể lại, liên quan đến một thanh niên bắt đầu học hình học với Euclid và hỏi, sau khi đã học các định lý đầu tiên: "Nhưng tôi sẽ nhận được gì sau khi học những điều này?" Euclid đã gọi người hầu của mình đến và bảo rằng: "Hãy cho người đàn ông này một đồng xu, vì anh ta phải kiếm được lợi nhuận từ những gì anh ta học được." Lời quở trách có lẽ đã được chuyển thể từ một câu châm ngôn của trường phái Pythagoras: "Một sơ đồ và một bước (trong kiến thức), không phải là một sơ đồ và một đồng xu." ("A diagram and a step (in knowledge), not a diagram and a coin.") Thiết nghĩ những câu chuyện này vẫn còn mang tính thời sự đến tận ngày nay.

Cơ sở hình học của Euclid

Trong hơn hai nghìn năm, Euclid đã là người phát ngôn của hình học Hy Lạp, sự sáng tạo tuyệt vời nhất của trí tuệ Hy Lạp. Kể từ thời của ông, việc nghiên cứu *Cơ sở* là điều cần thiết với một nền giáo dục khai phóng. Thế hệ này qua thế hệ khác đã coi *Cơ sở* là đỉnh cao của logic, và nghiên cứu nó là cách tốt nhất làm cơ sở cho suy luận chính xác. Chỉ trong vòng 100 năm trở lại đây, *Cơ sở* mới bắt đầu bị thay thế bởi các sách giáo khoa hiện đại. Tuy nhiên, tác phẩm của Euclid vẫn là mô hình tối cao về toán học thuần túy.

Bất kỳ ai quen thuộc với quá trình thao tác trí tuệ đều nhận ra rằng nội dung của *Cơ sở* không thể là nỗ lực của một cá nhân đơn lẻ. Có lẽ không nhiều các định lý được thiết lập trong *Cơ sở* là do chính Euclid khám phá ra. Sự vĩ đại của Euclid nằm ở chỗ ông đã sắp xếp một khối lượng lớn các kiến thức độc lập của toán học Hy Lạp về hình học và lý thuyết số vào một trật tự logic chặt chẽ, có quan hệ mật thiết với nhau. Kết quả này tiếp nối kết quả khác với tối thiểu các giả thiết. Uy tín của *Cơ sở* lớn đến mức tác giả của nó hiếm khi được gọi bằng tên mà bằng *Tác giả của Elements* hoặc đơn giản là *Nhà hình học*.

Euclid nhận thức được rằng để tránh vòng luẩn quẩn và cung cấp một điểm khởi đầu, một số sự kiện về bản chất của đối tượng phải được coi là một sự thật hiển nhiên mà không cần chứng minh, được gọi là các *tiên đề*. Theo một nghĩa nào đó, chúng là những "luật chơi" mà từ đó tất cả các suy luận có thể tiến hành, là nền tảng mà toàn bộ các định lý phải dựa vào.

Euclid đã cố gắng xây dựng toàn bộ tòa nhà kiến thức hình học Hy Lạp, được tích lũy kể từ thời Thales, trên 5 định đề có bản chất hình học cụ thể và 5 tiên đề được dùng làm nền móng cho toàn bộ lâu đài toán học. Ba định đề đầu tiên là định đề xây dựng, khẳng định những gì chúng ta được phép vẽ. Từ đó, ông suy ra từ 10 giả định này 465 mệnh đề qua một chuỗi suy luận logic, sử dụng chúng như những viên đá lót đường trong một cuộc diễu hành có trật tự từ một mệnh đề đã được chứng minh sang một mệnh đề khác. Điều kỳ diệu là rất nhiều mệnh đề thú vị có thể thu được chỉ từ một vài tiên đề được lựa chọn một cách khôn ngoan.

Đột ngột và không có bình luận giới thiệu, cuốn sách đầu tiên của *Cơ sở* mở ra với danh sách 23 định nghĩa (xem [2*b*], trang 16 – 18). Chúng bao gồm, thí dụ, điểm là gì, đường là gì (Định nghĩa 1, 2) và kết thúc bằng Định nghĩa 23: "Các đường thẳng song song là các đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và khi kéo dài đến vô tận ở cả hai hướng thì không gặp nhau ở cả hai hướng." Các định nghĩa này không được coi là định nghĩa theo nghĩa hiện đại. Mặc dù mơ hồ và không hữu ích trong một số khía cạnh, chúng cũng đủ để tạo ra một số hình ảnh trực quan nhất định. Một số thuật ngữ kỹ thuật được sử dụng, thí dụ chu vi đường tròn, hoàn toàn không được định nghĩa. Thật lạ lùng khi Euclid đã định nghĩa đường thẳng song song, lại không đưa ra một định nghĩa chính thức về hình bình hành.

Sau các định nghĩa, Euclid đặt ra 10 nguyên tắc mà chứng minh các mệnh đề và định lý phải dựa trên. Đó là (xem thêm [2*b*], trang 19 – 20):

Các định đề:

1. Cùng quy ước rằng có thể vẽ một đoạn thẳng nối hai điểm bất kì.

2. Và có thể kéo dài liên tục một đoạn thẳng thành đường thẳng.

3. Có thể vẽ một đường tròn có tâm và bán kính bất kì.

4. Tất cả các góc vuông đều bằng nhau.

5. Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng khác tạo thành các góc trong về cùng một phía [với nó] có tổng nhỏ hơn 2 góc vuông, thì hai đường thẳng (bị cắt) khi kéo dài ra vô tận sẽ cắt nhau ở phía của đường thẳng ban đầu mà tổng các góc trong nhỏ hơn 2 vuông (chứ không cắt ở phía bên kia).

Các tiên đề:

1. Những thứ cùng bằng một thứ thì bằng nhau.

2. Nếu cùng thêm những thứ bằng nhau vào những thứ bằng nhau thì những tổng sẽ bằng nhau.

3. Nếu cùng bớt những thứ bằng nhau vào những thứ bằng nhau thì những phần còn lại sẽ bằng nhau.

4. Các thứ trùng nhau thì bằng nhau.

5. Tổng thể thì lớn hơn bộ phận.

Định đề 5, còn gọi là *Định đề song song*, đã trở thành một trong những phát biểu nổi tiếng và gây tranh cãi nhất trong lịch sử toán học. Thậm chí có ý kiến cho rằng Euclid không hoàn toàn hài lòng với Định đề 5. Ông đã trì hoãn sử dụng của nó cho đến khi không thể tiến xa hơn nếu không có nó, mặc dù việc sử dụng nó sớm hơn sẽ đơn giản hóa nhiều chứng minh các định lý.

Hơn 2000 năm, từ lúc xuất hiện *Cơ sở* đến thế kỷ 19, các nhà toán học đã cố gắng rút ra định đề song song từ bốn định đề đầu tiên, tin rằng bốn định đề này cùng với 5 tiên đề là đủ cho sự phát triển hoàn chỉnh hình học Euclid. Tất cả những nỗ lực nhằm thay đổi trạng thái từ "Định đề 5" thành định lý" đều thất bại, vì mỗi nỗ lực đều dựa trên giả định ẩn tương đương với chính định đề đó.

Tuy nhiên, những nỗ lực này đã dẫn đến việc phát hiện ra hình học phi–Euclid, trong đó các Định đề của Euclid, ngoại trừ định đề song song đều đúng và các định lý của Euclid đều đúng, ngoại trừ những định lý dựa trên định đề song song. Thiên tài của Euclid thể hiện ở chỗ ông đã nhận ra rằng Định đề 5 đòi hỏi tuyên bố rõ ràng như một giả định, không thể được chứng minh.

Khi xem xét Định đề 5 Euclid, nhà toán học Giovanni Saccheri (1667 – 1733) đã phân loại:

Trường hợp 1: Qua điểm đã cho có duy nhất đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Trường hợp 2: Qua điểm đã cho có nhiều hơn một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Trường hợp 3: Qua điểm đã cho không có đường thẳng nào song song với đường thẳng đã cho.

Trường hợp 1 cho ta hình học Euclid, Trường hợp 2 dẫn đến hình học Lobachevsky, Trường hợp 3 cho ta hình học Riemann.

Việc xem xét kĩ lưỡng trong hơn 2000 năm đã phát lộ nhiều điểm sáng và những nhược điểm trong cách xử lý hình học của Euclid. Hầu hết các định nghĩa của ông đều dễ bị chỉ trích trên cơ sở này hay cơ sở khác. Xét cho cùng, một định nghĩa chỉ mang lại ý nghĩa của một từ theo nghĩa khác, đơn giản hơn– hoặc những từ mà ý nghĩa của nó đã rõ ràng. Những từ này đến lượt chúng lại được định nghĩa bằng những từ thậm chí còn đơn giản hơn. Rõ ràng quá trình định nghĩa như vậy phải có kết thúc. Cách duy nhất để tránh một vòng tròn luẩn quẩn là cho phép một số khái niệm ban đầu không được định nghĩa. Euclid đã nhầm khi cố gắng giải nghĩa toàn bộ từ vựng mà ông đã sử dụng. Chắc chắn điều này dẫn tới một số định nghĩa kỳ lạ và không thỏa đáng. Thí dụ: "Điểm là cái không thể chia nhỏ", "Đường không có chiều rộng". Vậy "chia nhỏ" và "chiều rộng" là gì? Ý tưởng về "điểm" và "đường thẳng" là những khái niệm cơ bản nhất trong hình học, chúng có thể được mô tả và được giải thích nhưng không thể được định nghĩa thỏa đáng bằng các định nghĩa đơn giản hơn chính chúng. Phải có một sự khởi đầu ở đâu đó trong một hệ thống khép kín, vì vậy chúng nên được chấp nhận không có định nghĩa.

Có lẽ sự phản đối lớn nhất đã được đưa ra chống lại tác giả *Cơ sở* là sự bất cập đáng tiếc trong các tiên đề của ông. Ngoài những thiếu sót hiển nhiên như không nêu được sự tồn tại của điểm và đường thẳng hoặc đường thẳng nối hai điểm là duy nhất, Euclid đã đưa ra một số giả định ngầm được sử dụng sau này trong các chứng minh nhưng không xuất phát từ các định đề. Khá nhiều chứng minh của Euclid dựa trên hình vẽ và bằng chứng trực quan. Điều này được minh họa bằng lập luận được sử dụng ngay trong mệnh đề đầu tiên dưới đây trong *Cơ sở*.

Mệnh đề 1 Cho một đoạn AB. Tồn tại tam giác đều có đoạn thẳng là một trong các cạnh của nó.

Chứng minh Sử dụng Định đề 3, vẽ đường tròn tâm A bán kính AB đi qua điểm B. Từ tâm B vẽ đường tròn bán kính BA đi qua A. Từ giao điểm C của hai đường tròn, dựng đoạn thẳng CA và CB (Định đề 1). Ta thấy $AC = AB$ và $BC = AB$ vì chúng là các bán kính của một đường tròn. Từ Tiên đề 1 suy ra $AC = AB = BC$. Vậy các đoạn thẳng AB, AC, BC tạo thành tam giác đều có đoạn thẳng AB cho trước là một cạnh.

Lời bình. Ở đây có một vấn đề: Trên cơ sở trực giác, ta thấy hai đường tròn tâm A và tâm B chắc chắn cắt nhau tại C. Tuy nhiên, mục đích của một lý thuyết tiên đề chính xác là phải cung cấp một hệ thống lý luận không phụ thuộc vào trực giác. Toàn bộ chứng minh sẽ đổ bể nếu các đường tròn ta xây dựng là không cắt nhau. Và điều này (đường tròn cắt nhau) không thể suy ra từ các định đề và tiên đề. Để khắc phục tình trạng này, phải bổ sung thêm một định đề đảm bảo tính "liên tục" của các đường thẳng và đường tròn. Các nhà toán học sau này đã phải bổ sung thêm:

Nếu một đường tròn hoặc đường thẳng có một điểm ở ngoài và một điểm ở trong một đường tròn khác thì nó có hai điểm chung với đường tròn.

Phát biểu đơn thuần của định đề liên quan đến các khái niệm "bên trong" và "bên ngoài" không xuất hiện rõ ràng trong *Cơ sở*. Nếu hình học muốn phát huy hết danh tiếng của nó về tính chặt chẽ logic hoàn hảo, thì nó phải chú ý đáng kể đến ý nghĩa của các thuật ngữ đó và các tiên đề chi phối chúng.

Trong suốt 25 năm cuối của thế kỷ 19, nhiều nhà toán học đã cố gắng xây dựng một hệ tiên đề đầy đủ và cần thiết để chứng minh tất cả các định lý quen thuộc từ lâu trong hình học Euclid. Nghĩa là, họ đã cố gắng bổ sung thêm những định đề nhằm mang lại tính rõ ràng và chặt chẽ cho những ý tưởng mà Euclid đã nhận ra bằng trực giác. Người thành công nhất trong lĩnh vực này là David Hilbert (1862 – 2943) với tác phẩm *Cơ sở Hình học* in năm 1899 [9] (Grundlagen der Geometrie, tiếng Anh: *Foundations of Geometry*). Trong tác phẩm này, Hilbert đã xây dựng lại hình học Euclid dựa trên năm nhóm tiên đề: các tiên đề về tính liên thông, các tiên đề về thứ tự, Tiên đề về song song (Tiên đề Euclid), các tiên đề về đồng dạng và Tiên đề về liên tục. Hệ tiên đề này phải bảo đảm tính *đơn giản*, tính *đầy đủ* và tính *độc lập*, khiến hình học Euclid trở nên hoàn hảo hơn.

Lý thuyết số của Euclid

Các tính chất chia hết. Mặc dù công trình vĩ đại của Euclid có tựa đề *Cơ sở của Hình học*, chủ đề của nó mở rộng vượt xa những gì chúng ta bây giờ coi là hình học phổ thông. Quyển II và Quyển V hầu như chỉ có đại số (đại số hình học). Ba quyển VII, VIII, IX chứa tổng cộng 102 mệnh đề, được dành cho *số học Hy Lạp*, nghĩa là số học trên tập các số tự nhiên (với sự mở rộng chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỷ,...). Euclid đã viết các chương này chủ yếu dựa trên nội dung những cuốn sách số học có thể bắt nguồn từ trường phái Pythagoras. Tuy nhiên, ông đã sắp xếp toàn bộ các kiến thức đã có trong một trật tự hợp lý. Nhiều kết quả đã biết từ trước nhưng không phải cái nào cũng được chứng minh một cách chặt chẽ. Nhiều công trình về lý thuyết số được viết trước có thể đã không còn tồn tại. Vì vậy, không thể phân biệt được cái nào là đã có từ trước và cái nào là do Euclid khám phá.

Quyển VII mở đầu với danh sách 22 định nghĩa phân biệt các số khác nhau: số lẻ và số chẵn, số nguyên tố và hợp số, số hoàn hảo (là số bằng tổng các ước của nó, không tính chính nó).... Các định lý trong Quyển VII, VIII và IX là quen thuộc với học sinh phổ thông, nhưng ngôn ngữ chứng minh thì không quen thuộc. Xuyên suốt ba quyển sách này, mỗi số được thể hiện bằng một đoạn thẳng, do đó mỗi số được Euclid gọi là số AB. Mọi đoạn thẳng (độ dài bằng số vô tỷ) có thể không biểu diễn được dưới dạng số hữu tỷ, nhưng mọi số hữu tỷ đều được biểu diễn bằng các đoạn thẳng.

Do đó, Euclid không sử dụng cụm từ "là bội số của" hay "là thừa số của", mà Ông thay thế bằng "được đo bằng" và "đo" tương ứng. Nghĩa là, một số n được đo bằng một số m khác nếu có số thứ ba k sao cho $n = km$.

Quyển VII bắt đầu bằng hai mệnh đề mà ngày nay được gọi là "Thuật toán Euclid" tìm ước số chung lớn nhất (số đo) của hai số tự nhiên.

Từ các mệnh đề đã được chứng minh, ta tìm được các định lý tương tự trong số học. Mệnh đề 8 phát biểu rằng, $a = \frac{m}{n}b$ và $c = \frac{m}{n}d$ thì $a - c = \frac{m}{n}(b - d)$. Mệnh đề VII.24 nói rằng, nếu a và b nguyên tố cùng nhau với c, thì ab nguyên tố cùng nhau với c. Quyển VII kết thúc bằng Mệnh đề VII.39 với quy tắc tìm bội số chung nhỏ nhất của các số.

Quyển VIII là quyển ít kết quả nhất trong số 13 cuốn của *Cơ sở*. Nó bắt đầu với các mệnh đề về cấp số nhân (Euclid gọi là *tỷ số liên tục*) và chuyển sang một số tính chất đơn giản của hình vuông và hình lập phương và kết thúc với Mệnh đề VIII.27: Nếu ta có một số "không gian" (solid number) dạng $ma \cdot mb \cdot mc$ và một số không gian đồng dạng $na \cdot nb \cdot nc$ thì tỷ số của chúng sẽ là $m^3 : n^3$,tức là như một khối lập phương đối với một khối lập phương.

Quyển IX, quyển cuối cùng trong ba quyển sách về lý thuyết số, chứa nhiều định lý quan trọng. Trong số đó nổi tiếng nhất là Mệnh đề IX.20 về sự tồn tại vô hạn số nguyên tố với chứng minh đơn giản bằng phản chứng: Giả sử tồn tại hữu hạn số nguyên tố. Gọi P là tích của tất cả các số nguyên tố. Xét $N = P + 1$. Khi ấy theo giả thiết N không thể là số nguyên tố, hay N phải là hợp số. Do đó nó phải chia hết cho p là một trong các số nguyên tố. Nhưng N chia cho bất kỳ số nguyên tố p nào trong tích P cũng có số dư bằng 1. Điều vô lý này dẫn đến điều giả sử có hữu hạn số nguyên tố là sai. Vậy có vô hạn số nguyên tố.

Mệnh đề IX.14 chính là định lý mà ngày nay ta gọi là Định lý cơ bản của số học: *Bất kỳ số tự nhiên nào lớn hơn 1 cũng đều có thể biểu diễn được duy nhất dưới dạng tích của các số nguyên tố.*

Mệnh đề IX.35 là một mệnh đề thú vị, vì nó cho một phương pháp, rất tao nhã, tính tổng các số hạng của cấp số nhân như sau: Từ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ldots = \frac{a_2}{a_1},$$

theo tính chất của tỷ lệ thức (Quyển VII), suy ra

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \ldots = \frac{a_3 - a_2}{a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}.$$

Cộng tử với tử, mẫu với mẫu của tỷ lệ thức, ta có

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

Vậy $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$,
trong đó $a = a_1$ là số hạng đầu tiên của cấp số nhân, $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ là tổng của n số hạng đầu của cấp số nhân và $r = \frac{a_2}{a_1}$ là tỷ lệ (công bội).

Mệnh đề tiếp theo, cũng là mệnh đề cuối cùng trong Quyển IX nói về số hoàn hảo: Nếu $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ là số hoàn hảo, thì $2^{n-1}(2^n - 1)$ cũng là số hoàn hảo. Điều này có thể được chứng minh dễ dàng theo định nghĩa số hoàn hảo trong Quyển VII. Người Hy Lạp đã biết bốn số hoàn hảo: 6, 28, 496 và 8128. Euclid không trả lời câu hỏi ngược lại: Công thức trên có cung cấp tất cả các số hoàn hảo không. Euler đã chứng minh rằng mọi số hoàn hảo chẵn đều có dạng trên, nhưng câu hỏi về sự tồn tại số hoàn hảo lẻ vẫn chưa có lời giải. Hiện nay người ta mới chỉ biết 39 số hoàn hảo (chẵn).

Tính vô ước của các đoạn thẳng (sự tồn tại số vô tỷ). Quyển X của tập *Cơ sở*, trước khi đại số hiện đại ra đời, là tác phẩm được ngưỡng mộ nhất và cũng là đáng sợ nhất. Nó chứng minh sự tồn tại của số vô tỷ và liên quan đến sự phân loại có hệ thống của các đoạn không thông ước (hai đoạn thẳng có độ dài a và b được gọi là thông ước nếu tồn tại đoạn thẳng k có độ dài hữu tỷ sao cho $a = kb$). Cạnh của hình vuông và đường chéo của nó là không thông ước với nhau. Điều này có thể dễ dàng suy ra từ Định lý Pythagoras (xem [10], Tập 6, số 5: Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỷ).

Hình học không gian. Quyển XI gồm 39 mệnh đề về các tính chất của các hình đa diện. Quyển XII liên quan đến đo lường (độ dài, diện tích, thể tích) nhờ phương pháp vét cạn và áp dụng đo thể tích của kim tự tháp, hình nón, hình trụ và hình cầu. Archimedes đã gán các kết quả này cho Eudoxus, người mà có lẽ Euclid đã dựa vào để viết các quyển này. Quyển XIII dành cho nghiên cứu 5 khối đa diện đều.

Kết luận. Trong một bài viết, không thể nói đầy đủ về *Cơ sở* và các tác phẩm khác của Euclid. Bạn đọc muốn nghiên cứu *Cơ sở* của Euclid với các phân tích sâu hơn, có thể đọc bản dịch tiếng Việt [2b] và các tài liệu tiếng Anh trong *Tài liệu tham khảo*. Để phần nào thấy được toán học Hy Lạp đã được Euclid thể hiện trong *Cơ sở* với một trật tự logic hoàn hảo như thế nào, bạn đọc có thể xem thêm [10] và các tài liệu trích dẫn trong đó.

Tài liệu tham khảo chính

[1] David M. Burton, *The History of Mathematics, An Introduction*, Seventh Edition, McGraw–Hill, 2011. Ch. 4: The Alexandrian School: Euclid, pp. 141 – 183.

[2*a*] Euclid's *Elements of Geometry*, English translation from the Greek text of J.L. Heiberg (1883 – 1885): Richard Fitzpatrick, 2008, 545 p.

[2*b*] Euclid, *Cơ sở của Hình học*, Nhà xuất bản Trí thức, 2016, 350 trang.

[3] Uta C. Merzbach and Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, 3th Edition, John Wiley & Sons, 2011, Ch. 5: *Euclid of Alexandria*, pp. 90 – 108.

[4] Thomas Heath, *The thirteen books of Euclid' s Elements*, Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary T. L. Heath, the University Press, Cambridge, 1908.

Tài liệu tham khảo

[5] Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1921, Volume 1: *Euclid*, pp. 354 – 446.

[6] Stephen Hawking, *God Created the Integers*, The mathematical Breakthroughs that changed History, Running Press, Euclid, pp. 1 – 118.

[7] Victor J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, Third Edition, Addison–Wesley, 2008. Chapter 3: Euclid, pp. 50 – 93.

[8] Proclus, *The Philosophical and Mathematical Commentaries of Proclus*, Translated from the Greek by Thomas Taylor, London, 1792.

Tài liệu trích dẫn

[9] David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 1899. *Foundations of Geometry*, Translation by E. J. Townsend, The Open Court Publishing Company, 1950.

[10] Tạ Duy Phượng, Các nhà toán học Hy Lạp. Tạp chí Pi, Tập 6, số 4, trang 46 – 50; Tập 6, số 5, trang 45 – 53, số 9, trang 44 – 51, số 10, trang 56 – 59; số 11, trang 51 – 55; Tập 7, số 4, trang 54 – 60.

HẬU CHỐNG CÁC QUÂN NHẸ

BÙI VINH[1]

Lý thuyết cờ tàn cơ bản đều cho rằng Hậu sẽ dễ dành chiến thắng trong khi chống lại các quân nhẹ.

Trong bài học hôm nay, chúng ta sẽ xem xét một vài tình huống có tính chất tiêu chuẩn như sau:

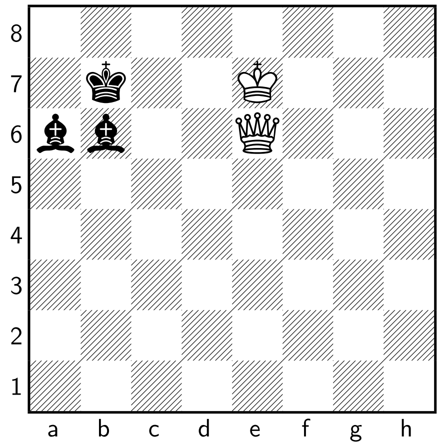
1. *Trường hợp Hậu chống lại hai tượng.*

Hai tượng trong cờ tàn rất mạnh vì khả năng che chắn và làm hàng rào ngăn chặn vua đối phương.

Tuy nhiên khi không còn tốt, Tượng sẽ rất khó tránh khỏi nước chiếu bắt đôi của Hậu.

Lý thuyết chỉ ra rằng có hơn 90% các thế cờ bên có Hậu sẽ giành chiến thắng. Chúng tôi sẽ trình bày một vài tình huống cho chủ đề này.

NN–NN



Hình 1.

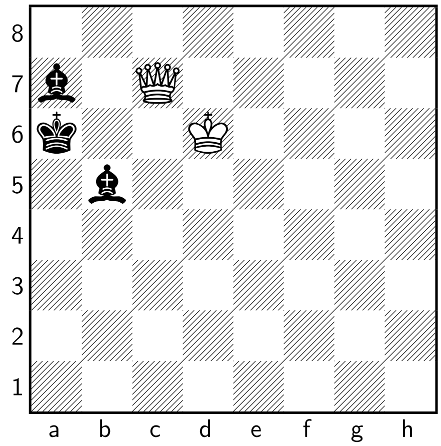
Chiến lược chơi cơ bản của Trắng là từ từ tiếp cận vua vào gần vua đối phương và buộc đối phương phải di chuyển một trong hai con tượng ra khỏi vị trí vua có thể bảo vệ được.

1.Vd7

1...Tb5+ 2.Vd6 Ta7 Mọi phương án khác của đen đều dẫn đến Trắng chiếu bắt tượng như:

2...Tc7+ 3.Vc5 Ta4 4.He4+ Đen bị mất Tượng; 2...Vb8 3.Hb3; 2...Ta4 3.He4+; 2...Va7 3.Hc8 Đen bị hết nước đi 3...Ta6 4.Hd7+ Tb7 5.Ha4+ Vb8 (*5...Ta6 6.Vc6 Tg1 7.Hb4 Tf2 8.He7+ Va8 9.Hf8+*) 6.Vd7 Ta8 7.Ha6 Tc7 (*7...Te3 8.Hb5+ Va7 9.Ha4+ Vb8 10.Hb3+*) 8.Hc8+

3.He7+ Vb6 Nếu 3...Va6 4.Hc7!

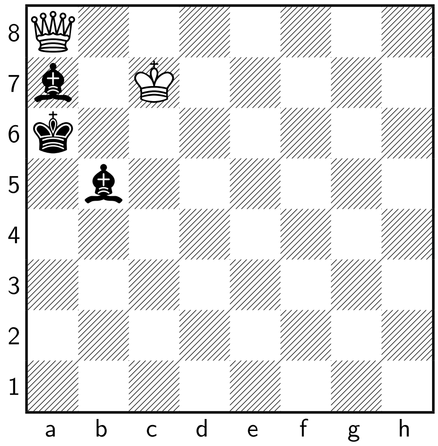


Hình 2.

4...Tb6 5.Hc8+ Va7 6.Hg8 Vb7 7.Hd5+

[1] *Đại kiện tướng quốc tế.*

Va6 8.Ha8+ Ta7 9.Vc7!



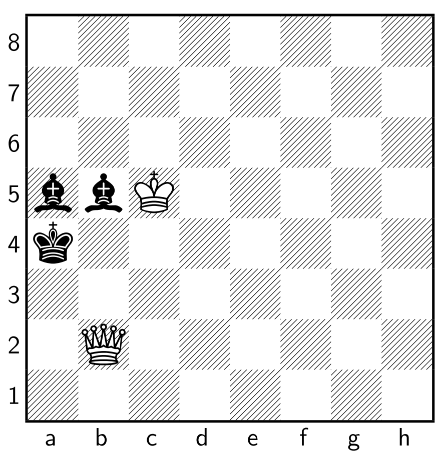
Hình 3.

Đen sẽ buộc phải di chuyển Tượng khỏi ô b5 và Trắng sẽ chiếu bắt mất Tượng sau vài nước

4.Hc7+ Va6 5.Vd5 Trắng tạo cho Vua đen hết nước đi, từ đó bắt buộc một trong hai tượng của đen phải di chuyển ra xa vua của mình.

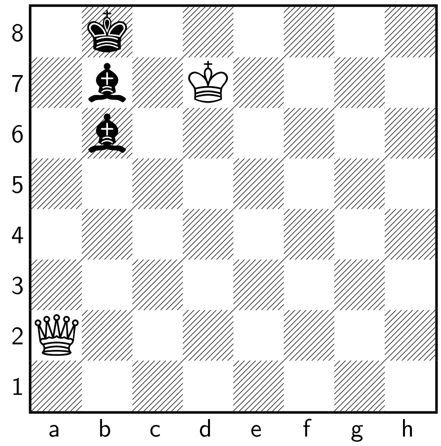
5...Tb6 6.Hc8+ Va7 Nếu 6...Va5 7.Ha8+ Ta6 (7...Vb4 8.Hf8+ Ka4 9.He7! Ta5 10.Ha7! Vb4 11.Hc5+ Va4 12.Hc2+ Va3 13.Hc1+ Vb3 14.Hb1+ Va4 15.Ha2+ Vb4 16.Hb2+ Va4 17.Vc5

Trắng thắng



Hình 4.

7.Vd6! Ta6 8.Hc2 Tb7 9.Ha2+ Vb8 10.Vd7!



Hình 5.

Các phương án tiếp theo Đen sẽ thua vì không thể tránh khỏi mất tượng.

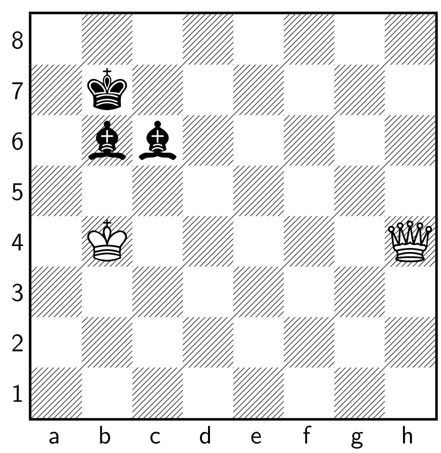
10...Td4 *pmb*11.**Hb3! Te5** Nếu 11...Va8 12.Ha4+ Ta7 13.Vc7; 11...Tf2 12.Hg8+ Va7 13.Ha2+; 11...Tg1 12.Hg8+; 11...Tf6 12.Hg3+ Va7 13.Vc7 trắng thắng

12.Hb4! Tg7 Các phương án khác cũng không thể tốt tránh khỏi nước chiếu bắt tượng 12...Th2 13.Hf8+ Va7 14.Hf2+; 12...Ta1 13.Hf8+ Va7 14.Ha3+

13.He7! Ta1 Nếu 13...Tc3 14.Hf8+ Va7 15.Ha3+; 13...Tb2 14.Hf8+ Va7 15.Hf2+

14.Hf8+ Va7 15.Ha3+ Trắng thắng

G. Lolli 1763



Hình 6.

Trong một vài tính huống đặc biệt, bên có hai tượng có thể gỡ hòa nhờ xây dựng các “bong ke” hay “lô cốt” không cho vua bên có

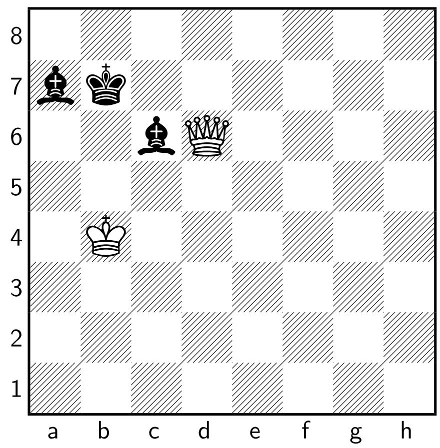
Hâu tiếp cận hai tượng. Tuy nhiên bên có hai tượng phải phòng thủ rất chính xác.

1.He7+ Vb8! Biện pháp phòng thủ tốt nhất cho đen.

Nếu 1...Tc7 2.Vc5! Th1 3.Hh7 Tg2 4.Hg6 Tf3 5.Hb1+ Vc8 6.Hf5+ Đen mất tượng

2.Hd6+ Vb7 3.Vc4 Ta7 4.He7+ Vb6 5.Hd8+ Vb7 6.Vb4 Tb6 7.Hd6 Ta7!

Đen kiên quyết không rời tượng ra khỏi vua. Hai tượng đen tạo ra 1 hàng rào ngăn vua trắng tiếp cận vua đen

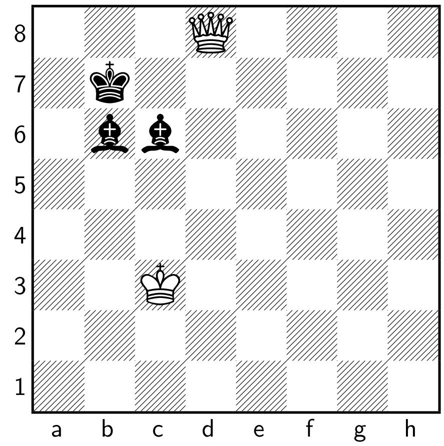


Hình 7.

8.He7+ Vb6 9.Hd8+ Vb7 10.Va5 Tc5! 11.Hf6 Tb6+ 12.Vb4 Vc7

13.Vc4 Vb7 14.Hd6 Ta7 15.He7+ Vb6 16.Hd8+ Vb7 17.Vc3 Tb6 =

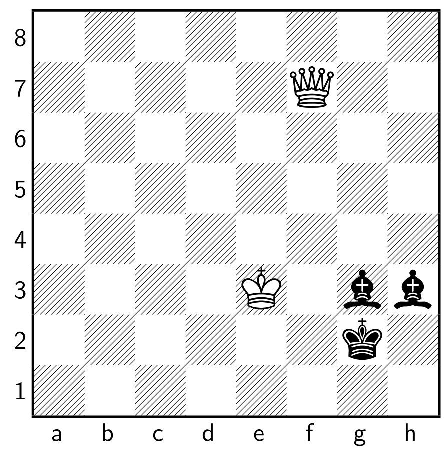
Đen chơi chiến thuật chờ đợi.Trắng khổng thể có cách nào đưa vua tiếp cận hai tượng cũng như buộc bên đen phải di chuyển tượng khỏi vua.



Hình 8.

Bài tập về nhà

Trắng đi trước và thắng. NN



Hình 9.

Bài giải:

1.Ha2+ Vg1 Nếu 1...Vh1 2.Vf3 Th4 3.Hd2+

2.Vf3 Th4 3.He2! Phương án khác cũng dẫn đến Trắng thắng như sau 3.Hd2! Vh1 4.Hb2! Vg1 5.Hd4+ Vh1 6.Hxh4

3...Vh1 4.Hb2! Vg1 5.Hd4+ Trắng thắng