



# BÀI TOÁN THÁP HÀ NỘI

HÀ HUY KHOÁI

Trò chơi “Tháp Hà Nội”, xếp những miếng gỗ trên ba chiếc cọc, đã rất quen thuộc với các bạn nhỏ Việt Nam cũng như nhiều bạn nhỏ trên thế giới. Thật là tuyệt vời khi một trò chơi nổi tiếng trên thế giới lại có tên liên quan đến thủ đô của nước ta đúng không. Các bạn đã biết về xuất xứ cùng với nhiều điều thú vị xung quanh bài toán “Tháp Hà Nội” chưa? Chúng ta hãy cùng ngược dòng thời gian để tìm hiểu qua bài viết dưới đây nhé.

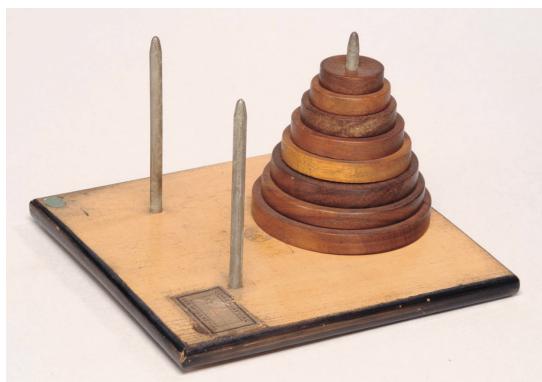
Năm 1883, Eduard Lucas (Claus) công bố bức tranh quảng cáo “Tháp Hà Nội – trò chơi thực sự nát óc xứ Annam”:



Một năm sau, Lucas viết bài “Tháp Hà Nội, trò chơi toán học” đăng ở tạp chí “Science et

Nature”, số 1 (1884) tr. 127 – 128. Có thể xem đó ngày khai sinh của “Bài toán Tháp Hà Nội”, một trong những bài toán nổi tiếng của toán học. Cho đến ngày nay, vẫn còn rất nhiều công trình nghiên cứu về bài toán tháp Hà Nội và những mở rộng của nó, vẫn còn nhiều giả thuyết đang chờ câu trả lời.

Hình sau đây là bức ảnh chụp từ hiện vật trưng bày trong “Musée des arts et métiers – Cnam Paris” (Bảo tàng nghệ thuật và thủ công Paris).



Ta có ba cái cọc, và 8 cái đĩa với kích thước khác nhau đôi một. Bài toán đặt ra là di chuyển toàn bộ 8 cái đĩa sang một cọc khác, sao cho vẫn giữ được thứ tự các đĩa với bán kính lớn dần từ trên xuống dưới. Quy tắc di chuyển: mỗi lần chỉ được chuyển một đĩa, và không bao giờ được đặt một đĩa lên đĩa khác có bán kính nhỏ hơn. Điều này có thể làm được nhờ sử dụng cọc “trung gian”.

Các bạn thử hình dung xem ta sẽ cần làm bao nhiêu phép chuyển đĩa?

Trước hết, ta thử làm bài toán dễ hơn: trên cọc chỉ có 2 đĩa. Rõ ràng chỉ cần chuyển đĩa nhỏ sang cọc trung gian, đĩa lớn sang cọc còn lại, rồi chuyển đĩa nhỏ lên cọc đó. Số bước chuyển là 3.

Nếu có 3 đĩa trên cọc thì sao? Giả sử các đĩa đang ở cọc A, và ta cần chuyển sang cọc C. Ta chuyển hai đĩa trên cùng sang cọc trung gian B, rồi chuyển đĩa to nhất sang cọc C. Sau đó chỉ cần chuyển hai đĩa từ cọc B sang cọc C. Phương pháp chuyển 2 đĩa từ cọc này sang cọc khác thì ta đã biết. Như vậy, số phép chuyển phải làm khi có 3 đĩa bằng 2 lần số phép chuyển khi có 2 đĩa, cộng thêm 1 phép chuyển (đĩa to nhất).

Như vậy, số bước chuyển cần thiết của 3 đĩa là:  $2 \times 3 + 1 = 7$ . Bằng quy nạp, để chứng minh nếu  $N$  là số phép chuyển khi có  $n$  đĩa thì với  $(n+1)$  đĩa, ta có thể thực hiện nhiệm vụ với  $(2N+1)$  phép chuyển. Từ đó, để suy ra, nhiệm vụ đặt ra trong bài toán Tháp Hà Nội với  $n$  đĩa có thể thực hiện với  $2^n - 1$  phép chuyển.

Có thể chứng minh  $2^n - 1$  là số phép dịch chuyển tối thiểu cần thiết, nghĩa là không có cách gì thực hiện nhiệm vụ với số phép dịch chuyển ít hơn.

Người ta cho rằng, bài toán Tháp Hà Nội lấy ý tưởng từ câu chuyện cổ Ấn Độ sau đây.

“Trong ngôi đền vĩ đại ở Benares, bên dưới mái vòm đánh dấu trung tâm thế giới, người ta đặt một chiếc đĩa bằng đồng, trên đó gắn cố định ba chiếc cọc kim cương, mỗi chiếc cao một mét và dày như thân của một con ong. Trên một trong những chiếc cọc kim cương

đó, vào buổi sáng tạo, Thượng Đế đặt 64 chiếc đĩa bằng vàng nguyên chất, theo thứ tự to dần từ trên xuống dưới. Ngày đêm không ngừng, những con quỷ chuyển các đĩa từ cọc kim cương này sang cọc kim cương khác theo nguyên tắc không được di chuyển nhiều hơn một đĩa cùng một lúc, và không được đặt đĩa nào lên trên cái nhỏ hơn nó. Khi 64 chiếc đĩa được chuyển xong thì tiếng sét sẽ nổ ra, và thế giới tan biến”.

Những suy luận trên đây chỉ ra rằng, số phép dịch chuyển mà lũ quỷ phải làm ít nhất là

$$2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615.$$

Giả sử lũ quỷ rất thạo “thuật toán dịch chuyển”, và mỗi giây chúng chuyển được một đĩa, thì phải mất khoảng 585 tỷ năm. Có lẽ dù không có lũ quỷ, trái đất của chúng ta cũng không tồn tại được lâu đến thế!

Từ sau khi ra đời, bài toán Tháp Hà Nội nhận được sự quan tâm lớn của các nhà toán học và những người làm ... đồ chơi. Rất nhiều phiên bản của bài toán Tháp Hà Nội xuất hiện, chẳng hạn như số cọc lớn hơn 3, hoặc cách chơi có thay đổi. Cho đến ngày nay, Tháp Hà Nội và những biến thể của nó vẫn là bài toán quan trọng trong toán học rắc rối, lý thuyết đồ thị, khoa học máy tính, và tô pô (chẳng hạn, bài toán về đường cong tự cắt tại mọi điểm của nó!). Thậm chí, Tháp Hà Nội còn có ứng dụng rộng rãi trong nghiên cứu tâm lý học!

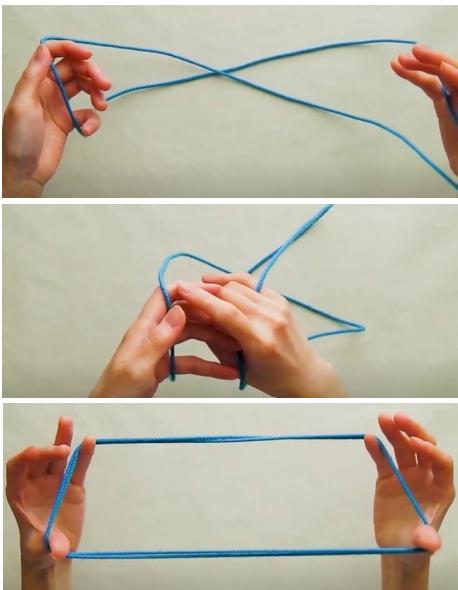
Người ta cho rằng, sở dĩ bài toán Tháp Hà Nội lôi cuốn được nhiều thế hệ các nhà toán học vì nó chứa đựng những yếu tố làm nên sức hấp dẫn của Toán học: đẹp, thú vị, hữu ích, và bất ngờ.

# CÙNG CHƠI VỚI CÁC HÌNH ĐỐI XỨNG

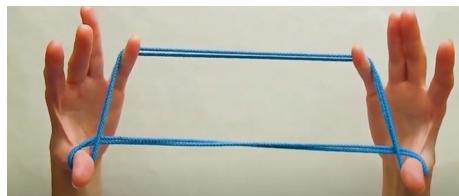
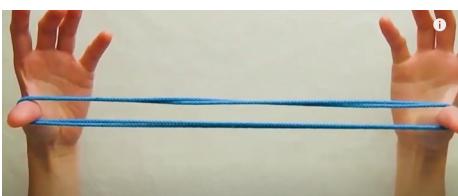
NGUYỄN THỦY VIỆT ANH<sup>1</sup>

**Ayatori** (hay trò chơi dây) là một trò chơi mà khi nhắc đến chắc chắn những người hâm mộ bộ truyện tranh Doraemon đều biết đến và nhớ ngay tới nhân vật Nobita. Trò chơi Ayatori là một trò chơi rất thú vị, người chơi sẽ sử dụng một sợi dây được buộc thành hình tròn, sau đó dùng những ngón tay của mình đan xen các sợi dây để tạo ra nhiều hình dạng khác nhau từ đơn giản đến phức tạp. Hôm nay, em hãy thử xếp hình ngôi sao thông qua trò chơi Ayatori nhé!

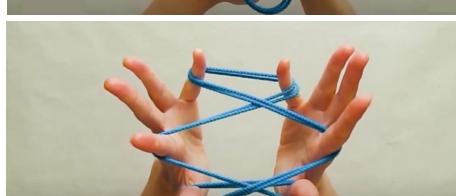
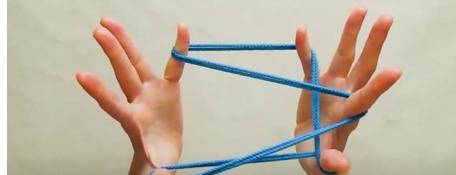
*Bước 1:* Cách cầm dây khi mới bắt đầu chơi trò chơi Ayatori là giữ sợi dây trong ngón cái và ngón út bằng hai tay, rồi kéo ngang để chuẩn bị chơi.



*Bước 2:* Thả dây ở hai ngón tay út. Sau đó dùng hai ngón tay út luồn phía dưới sợi dây ở hai ngón cái để kéo sợi dây ra như hình vẽ.



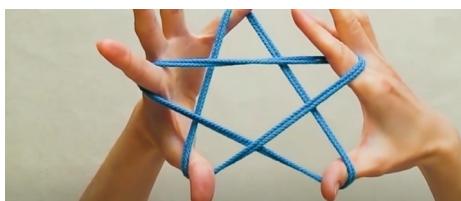
*Bước 3:* Lấy ngón trỏ tay phải móc vào phần dây giữa ngón cái và ngón út của tay trái. Thực hiện tương tự với ngón trỏ tay trái.



*Bước 4:* Thả dây ở hai ngón tay út.



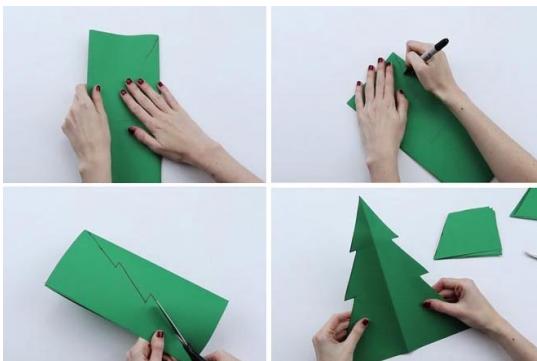
*Bước 5:* Dùng ngón út để kéo sợi dây ở dưới cùng lên và chúng ta sẽ hoàn thành ngôi sao năm cánh.



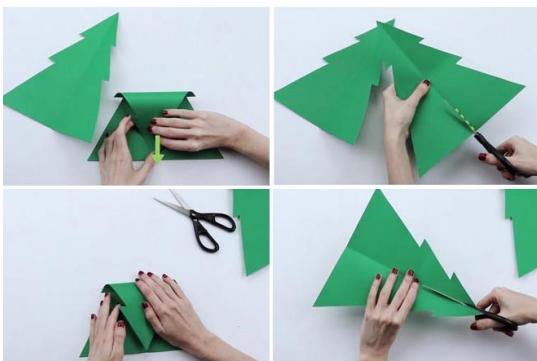
Hãy thử suy ngẫm xem hình ngôi sao năm cánh em vừa tạo ra có bao nhiêu trực đối xứng?

## Làm cây thông Noel

**Bước 1:** Xếp hai tờ giấy màu cứng chồng lên nhau rồi gấp đôi lại cho đều nhau. Sau đó lấy bút vẽ phác họa hình cây thông lên mặt ngoài của tờ giấy rồi dùng kéo cắt theo các đường đã vẽ sẵn. Lúc mở ra, em sẽ có hai cây thông với kích thước giống nhau.



**Bước 2:** Gấp đôi cây thông theo chiều ngang, gấp đầu nhọn xuống dưới để xác định tâm của mỗi cây thông. Tiếp đến dùng kéo cắt một đường từ đỉnh cây thông xuống điểm vừa đánh dấu. Cây thông còn lại thì cắt từ đáy lên điểm vừa đánh dấu.



**Bước 3:** Sau khi đã hoàn thành việc cắt hai cây thông, em hãy ghép chúng lại với nhau

theo các khe đã cắt, chú ý để các góc không bị cong. Nếu sau khi ráp cây thông bị lung lay các em có thể cố định lại bằng keo dán.



**Bước 4:** Cuối cùng các em chỉ cần điều chỉnh sao cho cây thông đứng vững, trang trí thêm các dây ruy băng hay rắc kim tuyến, ... hoặc vẽ họa tiết lên cây thông Noel để nhìn đẹp hơn.



*Ảnh: Internet.*

## Bài tập

Còn gì tuyệt vời hơn khi được thả diều dưới bầu trời xanh và trong lành gió mát của những buổi chiều mùa hè oi ả. Bằng những kiến thức của bài “Hình có trực đối xứng” và trí tưởng tượng phong phú của mình, em hãy tự làm ra cho mình một con diều đẹp đẽ với màu sắc rực rỡ nhé. Chúc em thành công!



*Hình ảnh con diều (Ảnh: Internet)*

# MỘT CHUYẾN THĂM TRIỂN LÃM

GIA DƯƠNG

Thám tử Xuân Phong cùng thanh tra Lê Kính tham gia một buổi giới thiệu sản phẩm của hai công ty là Tae Yeon và TeaYon tại triển lãm Điện tử Expo – New Vision của khu vực. Công ty Tae Yeon có uy tín từ lâu đời, với những sản phẩm tinh tế có chất lượng tốt nổi tiếng, các nhân viên của công ty luôn nói thật. Còn công ty TeaYon chuyên sản xuất đồ rẻ, kém chất lượng, bắt chước kiểu dáng của công ty Tae Yeon nên ban giám đốc dặn các nhân viên của mình chỉ được nói dối trong buổi triển lãm.

Vừa đặt chân tới khu vực triển lãm được trang hoàng lộng lẫy, Xuân Phong gặp ngay 5 đại diện của hai công ty này đứng tại cổng ra vào và tươi cười niềm nở tiếp đón. Xuân Phong tiến tới họ và hỏi cả 5 người cùng một câu hỏi “Có bao nhiêu người đến từ công ty Tae Yeon trong số các bạn?”

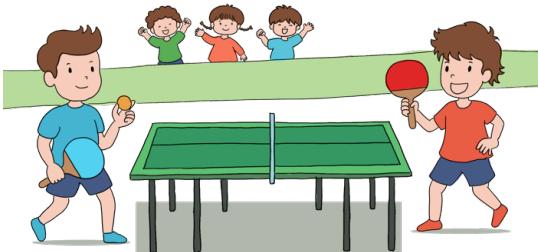
Người thứ nhất trả lời “Không có ai cả”. Hai người tiếp theo đều trả lời “Có đúng một người”.

Vậy hai người còn lại sẽ trả lời câu hỏi của thám tử Xuân Phong như thế nào nhỉ? Em có thể suy đoán ra câu trả lời của họ và giải thích lập luận được không?



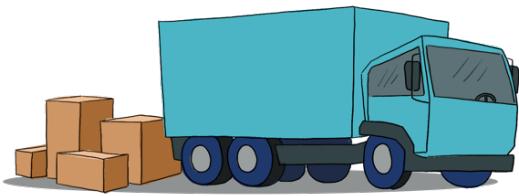
## CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

- 1.** Trong một cuộc thi thể thao, ban tổ chức chọn ra một số bạn học sinh ở lớp 5A và một số bạn ở lớp 5B thi đấu trực tiếp. Mỗi bạn ở lớp 5A được chọn ra sẽ thi đấu duy nhất một trận với một bạn ở lớp 5B, và ngược lại, mỗi bạn ở lớp 5B được chọn ra chỉ đấu đúng một trận với một bạn ở lớp 5A.



Biết rằng số học sinh lớp 5A được chọn thi đấu chiếm  $\frac{2}{3}$  tổng số học sinh toàn lớp 5A, còn số học sinh lớp 5B được chọn thi đấu chiếm  $\frac{3}{5}$  tổng số học sinh toàn lớp 5B. Tổng số học sinh của cả hai lớp là 57 bạn. Hỏi có bao nhiêu học sinh của hai lớp đã tham gia các trận thi đấu trực tiếp?

- 2.** Công ty vận tải được thông báo ngắn gọn là có một số kiện hàng có tổng trọng lượng là 10 tấn cần được vận chuyển, hơn nữa mỗi kiện hàng nặng không quá 1 tấn. Hỏi công ty cần điều động ít nhất bao nhiêu xe tải có trọng tải là 3 tấn mỗi xe để luôn chắc chắn chở được hết được số hàng hoá đó?



3. Sau khi được sạc đầy pin, điện thoại di động của bạn An dùng đúng **6** tiếng ở chế độ trò chuyện hoặc đúng **210** tiếng ở chế độ chờ. Khi bạn An lên tàu hỏa để đi du lịch, pin của bạn được sạc đầy **100%**, và trên tàu không có ổ cắm sạc nên khi xuống ga, pin của bạn cũng vừa hết sạch. Biết rằng An đã nói chuyện với bạn bè đúng một nửa thời gian khi ngồi trên tàu, còn nửa thời gian còn lại đặt điện thoại ở chế độ chờ. Hỏi thời gian An đi trên tàu hỏa là bao nhiêu lâu?



4. Một nhóm học sinh đi bộ từ điểm hẹn tới bến xe buýt để kịp đón chuyến xe vào lúc **8** giờ. Cũng vào thời điểm này, từ điểm thăm quan, một chiếc xe buýt cũng xuất phát để tới kịp bến xe đón nhóm học sinh đó. Tuy nhiên nhóm học sinh tới bến xe buýt khá sớm, vào lúc **6** giờ **10** phút, nên họ quyết định đi bộ tiếp tới điểm thăm quan. Trên đường, các bạn đã gặp được xe buýt và lên xe đi tiếp. Cuối cùng cả nhóm đến được điểm thăm quan sớm hơn **20** phút so với thời gian ấn định. Biết rằng vận tốc của xe buýt là **60** km/h và vận tốc đi bộ của các em học sinh luôn không đổi. Hãy tìm vận tốc đi bộ của nhóm học sinh trước khi gặp xe buýt.



5. Có **100** chiếc xe ô tô đỗ liền nhau thành một hàng dọc bên lề đường, trong đó có **70** chiếc xe hiệu Mercedes, còn lại là những xe nhãn hiệu khác. Trong các xe nhãn hiệu Mercedes có **30** chiếc màu đỏ, **20** chiếc màu vàng và **20** chiếc màu hồng. Biết rằng không có hai xe Mercedes nào khác màu lại đỗ cạnh nhau. Em hãy chỉ ra rằng luôn tìm ra **3** chiếc xe Mercedes cùng màu đỗ liên tiếp nhau.



6. Một lớp học có **20** em học sinh. Cô giáo chủ nhiệm của lớp tổ chức một số buổi thăm quan vào mỗi ngày cuối tuần trong suốt năm học, mỗi buổi tham quan có ít nhất **4** em học sinh tham gia. Em hãy chứng minh rằng có một buổi thăm quan mà mỗi em học sinh tham gia buổi đó đều tham gia ít nhất **1/17** tổng số tất cả các buổi tham quan của cả năm học.



# LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 1-2 năm 2023)

1. Một bác nông dân chở một xe ô tô quất cảnh ra chợ Tết để bán. Sau khi bán hết cây quất cuối cùng với giá 230 nghìn đồng, bác tính nhẩm lại thấy mình đã bán số cây quất với giá trung bì nh là 245 nghìn đồng/cây. Nhưng ngay lúc ấy người mua cây quất cuối quay trở lại và chỉ cho bác thấy cành quất bị rụng quá nhiều lá, nên ông ta chỉ đồng ý mua với giá 158 nghìn đồng. Bác chấp thuận và bán cây quất đó. Khi nhẩm tính lại, bác nông dân thấy giá trung bình của xe quất bây giờ là 242 nghìn đồng. Hỏi bác đã bán được bao nhiêu cây quất?



*Lời giải.* Gọi số cây quất là  $n$ , còn giá tiền một cây quất là  $Q$  (nghìn đồng). Khi đó  $Q + 230 = 245n$  và  $Q + 158 = 242n$ . Trừ hai đẳng thức này ta có  $72 = 3n$ . Suy ra bác nông dân đã bán được 24 cây quất.

2. Chuyện kể rằng có một người khi gặp nhà triết học và toán học Hy-Lạp Pythagoras đã hỏi ông: “Bây giờ là mấy giờ?” Pythagoras đã trả lời “Cho đến hết ngày, còn lại hai lần của hai phần năm khoảng thời gian đã trôi qua từ lúc bắt đầu ngày”. Nghe vậy, người đó chịu không thể nghĩ ra ngay được lúc họ gặp nhau là mấy giờ. Em có thể giúp trả lời lúc đó là mấy giờ được không?

*Lời giải.* Gọi  $x$  là thời gian (tính theo giờ) đã trôi qua từ lúc bắt đầu ngày. Khi đó ta có hệ thức sau theo câu trả lời của Pythagoras:  $24 - x = 4/5x$ . Suy ra  $x = 40/3$  (giờ), có

nghĩa là 13 giờ 20 phút. Vậy người đó đã gặp Pythagoras lúc 13 giờ 20 phút.



3. Một tháng trước bà Hoa ra chợ mua một cân khoai tây, một cân thịt và một chục trứng. Chủ nhật vừa rồi, khoai tây tăng lên gấp 3, thịt gấp 4 lần còn trứng đắt gấp 5 lần, nên bà Hoa phải trả 600 nghìn cho từng ấy món hàng như lần thứ nhất. Hôm nay thì khoai lại đắt gấp 6 lần so với tháng trước, thịt đắt gấp 5 lần còn trứng chỉ đắt gấp 4 lần nên bà Hoa lại phải trả 660 nghìn với cùng một lượng hàng. Hỏi bà Hoa đã trả bao nhiêu tiền cho lần mua thứ nhất?



*Lời giải.* Giả sử vào tháng trước trong lần mua đầu tiên giá một cân khoai tây là  $a$  (nghìn đồng), giá một cân thịt là  $b$  (nghìn đồng) và giá một chục trứng là  $c$  (nghìn đồng). Khi đó trong lần mua thứ nhất bà Hoa đã trả  $a + b + c$  (nghìn), trong lần mua thứ hai là  $3a + 4b + 5c = 600$  và trong lần mua thứ ba là  $6a + 5b + 4c = 660$ . Cộng hai đẳng thức cuối này, ta có  $9(a + b + c) = 1260$ . Suy ra  $a + b + c = 140$ . Vậy vào tháng trước bà Hoa chỉ phải trả có 140 nghìn đồng.

4. Trong một buổi dạ hội nọ mỗi quý ông đã hân hạnh khiêu vũ với ba quý bà, còn mỗi quý bà cũng đã khiêu vũ với ba quý ông. Em hãy chỉ ra rằng số quý ông và số quý bà tham gia dạ hội là bằng nhau.



*Lời giải.* Ta sẽ tính tổng tất cả các cặp đã khiêu vũ với nhau. Một mặt, tổng này sẽ bằng 3 lần số các quý ông, mặt khác nó lại bằng 3 lần số các quý bà. Vì thế số các quý ông bằng số các quý bà.

5. Sau khi kết thúc một giải thi cờ vua, ban tổ chức nhận thấy mỗi kỳ thủ tham gia đã có số trận thắng khi chơi bằng quân trắng bằng đúng tổng số trận thắng của toàn bộ các kỳ thủ còn lại khi chơi quân đen. Em hãy chỉ ra rằng tất cả các kỳ thủ tham gia thi đấu đã có số trận thắng là như nhau.



*Lời giải.* Các em có thể nhận thấy số trận thắng của mỗi kỳ thủ tham gia giải bằng đúng tổng số trận thắng của tất cả các kỳ thủ khi chơi bằng quân đen. Vì thế mọi kỳ thủ tham gia đã có số trận thắng bằng nhau.

6. Vào một ngày Chủ nhật nọ, Vinh và người em trai nhỏ tuổi hơn là Minh đạp hai chiếc xe tới hiệu sách trung tâm cách nhà vài cây số. Tại đó mỗi người chọn mua một cuốn sách quý mà nhóm bạn bè cũ đang bàn luận khen ngợi thường xuyên mấy năm nay trên Facebook. Mỗi người đều lấy tổng tất cả các chữ số của tất cả các trang sách mình đã mua và nhận thấy rằng số đó bằng năm sinh của

mình. Vậy ai trong số hai anh em Vinh và Minh đang đi học lớp bồi dưỡng Toán cho học sinh phổ thông nhỉ?



*Lời giải.* Trước tiên ta tính tổng chữ số của tất cả các số từ 1 tới 99. Nhận thấy rằng mỗi chữ số, trừ chữ số 0 đều xuất hiện 10 lần ở hàng chục, và cũng 10 lần ở hàng đơn vị, nghĩa là 20 lần tổng cộng. Do  $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ , nên tổng này bằng 900. Tổng các chữ số của các số từ 100 tới 199 sẽ lớn hơn tổng trước là 100. Vì thế tổng các chữ số của các số từ 1 tới 199 bằng 1900. Vì vậy ta xét một vài trường hợp sau.

Số trang sách	Tổng các chữ số
200	$1900 + 2 = 1902$
202	$1902 + 3 + 4 = 1909$
204	$1909 + 5 + 6 = 1920$
206	$1920 + 7 + 8 = 1935$
208	$1935 + 9 + 10 = 1954$
210	$1954 + 11 + 3 = 1968$
212	$1968 + 4 + 5 = 1977$
214	$1977 + 6 + 7 = 1990$
216	$1990 + 8 + 9 = 2007$
217	$2007 + 10 = 2017$
218	$2017 + 11 = 2028$

Các em thấy ngay chỉ có người sinh năm 2007 trong số hai anh em mới có thể là học sinh phổ thông. Người đó cũng không thể là anh, vì nếu vậy người em trai sinh năm 2017 đến giờ mới có 5 tuổi không thể tự đi xe đạp vài km để mua sách dày hơn hai trăm trang và về nhà tự làm tính cộng hết từng đó chữ số, hơn nữa lại có nhóm bạn bè cũ trên Facebook bàn luận về cuốn sách tới mấy năm rồi. Vì vậy các em kết luận được người sinh năm 2007 là em và có tên là Minh.



## VIEWING ANIMALS VIA VENN DIAGRAM

NGÔ TRUNG HIẾU

It is a beautiful and blossoming Spring day. Tom and Ken are visiting the National Zoo in Washington, D.C.

As they eagerly walk through the entrance, Tom says: "The National Zoo is currently home to about 2,100 animals; they comprise hundreds of species. In the zoo, the species need an environment that resembles their natural habitat as closely as possible. The animals must be accommodated to a lifestyle similar to their wild counterparts."

"Oh I see. If they climb, they get trees or rocks. If they swim, they are in ponds, lakes and rivers. If they like to burrow, they own caves and tunnels. If they fly, they already have the sky." Ken replies excitedly.

"Beautiful! The terrains are designed to make the animals feel secure as well. Some animals are tamed: giraffes like visitors watching and feeding them. Some animals don't like to see the crowd. These hermitian animals like leopards need a jungle where they can retreat from humans. In order to protect those creatures and conserve wildlife, zoologists must study Nature very well." Tom continues.

"From the brochure, we can learn valuable scientific information and classifications. Can you tell which creatures are sociable and which animals are solitary?" Tom asks.

"Well, let's see." Ken takes out the brochure. He reads out loud:

- Sociable: squirrels, primates, and so on.
- Solitary: leopards, giant pandas, and so on.

Tom nods: "Wonderful! To express and see better, you can draw a circle like this. Put those solitary inside the circle and those

sociable outside of the circle. This is called a *Venn diagram*."



Tom continues: "In math, we call this circle a set: the 'solitary' set consisting of solitary species. The hermitian creatures inside the circle are called *elements* of the 'solitary' set. The tamed and sociable animals outside of the circle are not elements of the 'solitary' set."

Ken listens attentively: "That's cool. So if I want to classify animals by their habitats, I can draw a Venn diagram of 3 circles. One for landscapes, one for water, and one for the sky. The mammals live on land. The fish swim in water. The birds fly high." Ken replies.

Tom slows down to emphasize: "Perfect! And you have 3 sets: the set of 'on-land' animals, the set of 'aquatic' animals, and the set of 'on-sky' animals. Does it make sense?"

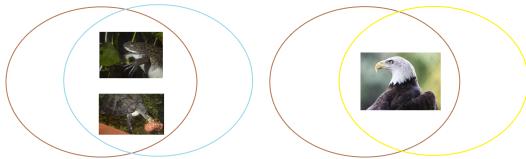
"It is as clear as day." Ken answers, full of smiles.

As they move on, Tom says: "And here are some fun facts. Amphibians, like turtles and frogs, live both on grasslands and in the lakes. So they belong to both the on-land set and the aquatic set. You can draw to express the overlap."

"Really? There are creatures that can live in both environments!" Ken is surprised.

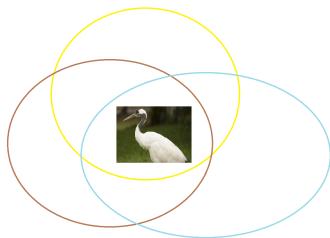
Tom gives another example: "Not just that! The bald eagles symbolize the national bird of

the Americans. They hunt for fishes near the water surface and also hunt over grasslands. They belong to both ecosystems: the sky and the land.”



Tom continues: “Those overlapping areas are called *intersections* of two sets. If you take all animals in two circles, the sky and the land say, you have a much bigger set of animals. You are thinking of all animals inhabiting either landscapes or the sky. Math lovers call it the *union* of two sets.”

Tom tries to conclude: “Red-crowned cranes are found in Russia, China, Mongolia and Japan. In Japan, they forage regularly on pasturelands. They are also aquatic: they feed and nest in rivers or marshes with relatively deep water. They can fly well and migrate in flocks. These cranes inhabit all 3 ecosystems: land, water and sky.”



Tom: “In the large, the union of these 3 sets is called the *total set*.”

Ken’s voice is filled with happiness: “That is our beloved Earth!”

Tom: “Voilà!”

Ken: “Can we start with the Asia Trail? I can’t wait to see the cute giant pandas!”

“Ok, let’s go!”

The above article is meant to be an introduction to Venn diagram for children in early Grades (such as Grades 1, 2 and 3) who have not met this concept before.

Photo source: <https://nationalzoo.si.edu/>

## Vocabulary

### Natural sciences

- species:** (n) giống loài
- habitat:** (n) môi trường sống
- ecosystem:** (n) hệ sinh thái
- symbolize:** (v) biểu tượng
- burrow:** (v) đào hang
- terrain:** (n) địa hình
- solitary:** (adj) đơn độc
- sociable:** (adj) bầy đàn
- aquatic:** (adj) dưới nước
- grassland:** (n) đồng cỏ
- pastureland:** (n) thảo nguyên
- feed:** (v) nuôi, kiếm ăn
- hunt:** (v) săn mồi
- inhabit:** (v) sinh sống
- nest:** (v) làm tổ
- migrate:** (v) di cư
- flock:** (n) đàn, bầy
- amphibian:** (n) động vật lưỡng cư
- crane:** (n) con hạc / con sếu
- eagle:** (n) đại bàng
- frog:** (n) con ếch
- leopard:** (n) con báo
- monkey:** (n) con khỉ
- panda:** (n) gấu trúc
- squirrel:** (n) con sóc
- turtle:** (n) con rùa

### Mathematics

- Venn diagram:** (n) sơ đồ Venn / biểu đồ Venn
- set:** (n) tập hợp
- intersection of 2 sets:** (n) giao của 2 tập hợp
- union of 2 sets:** (n) hợp của 2 tập hợp
- total set:** (n) tập hợp tổng
- concept:** (n) khái niệm