# TÔPÔ SỐ HỌC: SỐ NGUYÊN TỐ GIỐNG NÚT NHƯ THẾ NÀO? (Phần I)

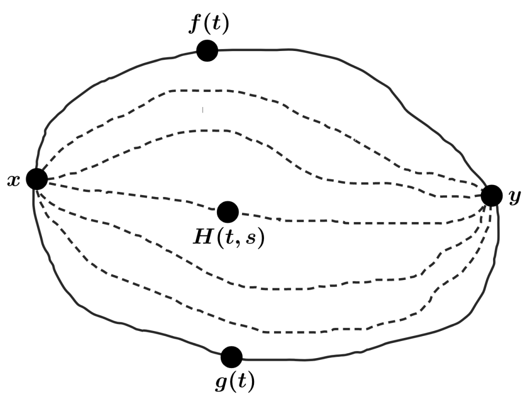
NGUYỄN MẠNH LINH[1]

Tôpô học là lĩnh vực nghiên cứu các không gian trừu tượng, những đối tượng liên tục. Ngược lại, số học là lĩnh vực nghiên cứu các số nguyên, những đối tượng rời rạc. Hai lĩnh vực này dường như nằm ở hai thái cực đối lập của toán học. Đấy là cho đến khoảng vài thập kỷ trở lại đây, khi các nhà toán học phát hiện ra mối liên hệ giữa hai đối tượng tưởng như chẳng liên quan ở hai bên. Người ta đang xây dựng một cầu nối, một cuốn từ điển cho phép dịch các định lý từ một bên sang bên kia và ngược lại. Lĩnh vực mới toanh này được gọi là **tôpô số học**.

## Nhóm cơ bản

Để nói về tôpô số học, tất nhiên ta phải bắt đầu với... tôpô học và số học. Các không gian tôpô là các đối tượng cho phép ta nói về lân cận của các điểm, cũng như các hàm liên tục. Sự "giống nhau" giữa các không gian tôpô được cho bởi các phép đồng phôi, các hàm liên tục $1-1$ mà hàm ngược cũng liên tục. Để đơn giản, ta sẽ chỉ quan tâm đến các không gian **liên thông đường**: hai điểm bất kỳ luôn nối được bằng một đường. Ở đây, $I=[0,1]$. Một **đường** giữa hai điểm $x$, $y$ trong một không gian tôpô $X$ đơn giản là một hàm liên tục $f: I \to X$ sao cho $f(0)=x$ và $f(1)=y$.

Giả sử ta có một đường khác $g: I \to X$ từ $x$ đến $y$. Không gì cản chúng ta nói về khái niệm "đường giữa hai đường $f$ và $g$", mà toán học gọi là **đồng luân**. Đó là một hàm liên tục $H: I \times I \to X$ sao cho $H(t,0)=f(t)$, $H(t,1)=g(t)$, $H(0,s)=x$ và $H(1,s)=y$. Nói cách khác, $H$ là một họ các đường trung gian được tham số hóa bởi $s$, thể hiện sự biến dạng liên tục từ đường $f$ (khi $s=0$) đến đường $g$ (khi $s=1$), đồng thời giữ cố định hai đầu mút $x$, $y$.

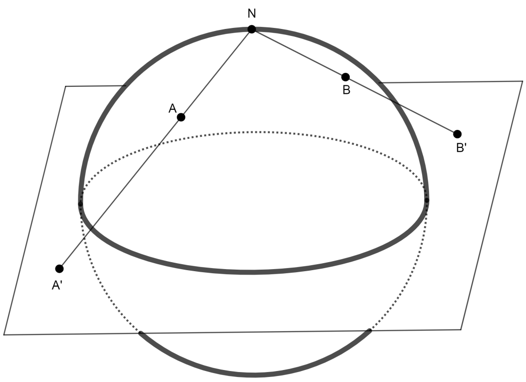



*Hình 1: Một phép đồng luân giữa hai đường $f$ và $g$.*

Khi $H$ tồn tại, ta nói hai đường $f$ và $g$ đồng luân, ký hiệu bởi $f \sim g$. Khi hai đường bất kỳ giữa hai điểm cho trước luôn đồng luân, ta nói không gian $X$ **đơn liên**. Ví dụ về không

[1] *Université Paris–Saclay.*

gian đơn liên là không gian Euclid $\mathbb{R}^n$. Thật vậy, cấu trúc cộng và nhân với vô hướng trong $\mathbb{R}^n$ cho phép ta định nghĩa phép đồng luân $H(t,s) = (1-s)\cdot f(t) + s\cdot g(t)$ giữa hai đường $f, g$ tùy ý. Mặt siêu cầu $\mathbb{S}^n$, thu được bằng cách thêm một điểm ở xa vô tận vào $\mathbb{R}^n$, cũng đơn liên với $n > 1$: hãy chọn một điểm $P$ tùy ý trên mặt cầu và hình dung rằng mọi đường đều có thể biến dạng liên tục thành một đường không đi qua $P$. Mà $\mathbb{S}^n$ bỏ đi $P$ chính là (đồng phôi với) $\mathbb{R}^n$, nên hai đường không đi qua $P$ luôn đồng luân.

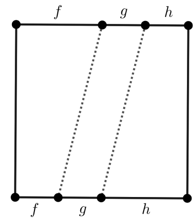



*Hình 2: Qua phép chiếu lập thể, mặt cầu $\mathbb{S}^2$ bỏ đi điểm cực bắc N trở thành mặt phẳng $\mathbb{R}^2$. Ta có thể xem N như "điểm ở xa vô tận" của mặt phẳng.*

Các đường cho ta bất biến đại số đầu tiên cho phép phân biệt các không gian tôpô (cho biết khi nào chúng không đồng phôi), được gọi là **nhóm cơ bản**, định nghĩa bởi Henri Poincaré năm 1895. Ta hãy cố định một điểm $x \in X$ và xét các đường từ $x$ đến chính nó, được gọi là các **khuyên**. Ta xây dựng một phép toán trên chúng: cho $f$ và $g$ là hai khuyên tại $x$, ta định nghĩa $g * f : I \to X$ là khuyên thu được bằng cách đi theo $f$ với vận tốc gấp đôi rồi đi theo $g$ với vận tốc gấp đôi. Bằng công thức,

$$(g*f)(t)\begin{cases} = f(2t) & \text{nếu } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ = g(2t-1) & \text{nếu } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

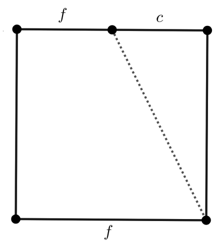
Như một thủ tục, ta cần kiểm tra các tiên đề của nhóm. Đầu tiên là tính kết hợp. Bằng tính toán trực tiếp, ta thấy ngay $h*(g*f) \neq (h*g)*f$. Tuy nhiên, hai đường này đồng luân. Điều này gợi ý rằng ta cần xem hai đường là như nhau nếu chúng đồng luân.



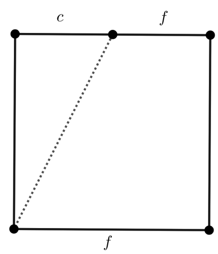

$$H(t,s) = \begin{cases} f(\frac{4t}{2-s}) & \text{nếu } 0 \le t \le \frac{2-s}{4}, \\ g(4t-2+s) & \text{nếu } \frac{2-s}{4} \le t \le \frac{3-s}{4}, \\ h(\frac{4t-3+s}{4}) & \text{nếu } \frac{3-s}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$

*Hình 3: $h*(g*f) \sim (h*g)*f$.*

Thứ hai, ta cần chỉ ra phần tử trung lập. Một cách trực giác, ta thấy nó phải là đường hằng $c$, cho bởi "đứng yên tại $x$", hay $c(t) = x$.



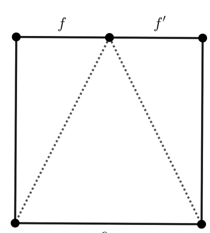

$$H(t,s) = \begin{cases} f(\frac{2t}{1+s}) & \text{nếu } 0 \le t \le \frac{1+s}{2}, \\ x & \text{nếu } \frac{1+s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$




$$H(t,s) = \begin{cases} x & \text{nếu } 0 \le t \le \frac{1-s}{2}, \\ f(\frac{2t-1+s}{1+s}) & \text{nếu } \frac{1-s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

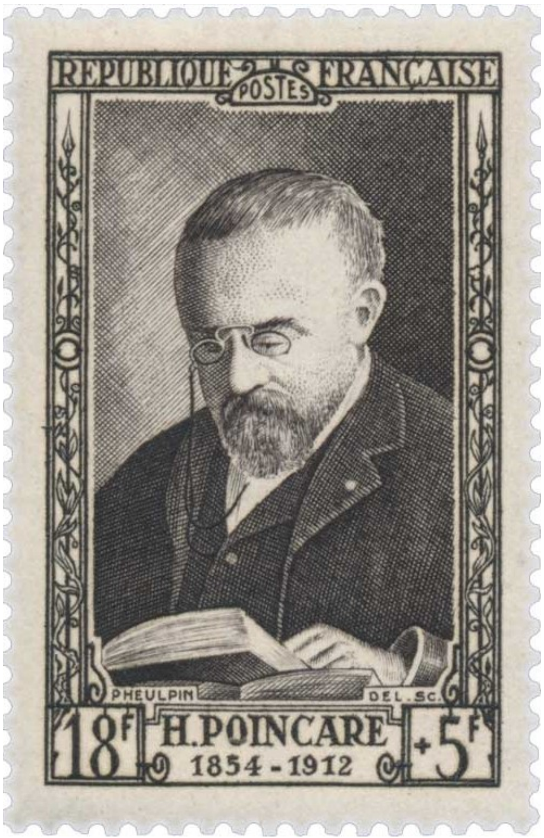
*Hình 4: $f*c \sim f$ và $c*f \sim f$.*

Cuối cùng, ta cần tìm nghịch đảo của một đường $f$ cho trước. Đó là đường $f'$ cho bởi "đi ngược với $f$", hay $f'(t) = f(1-t)$.



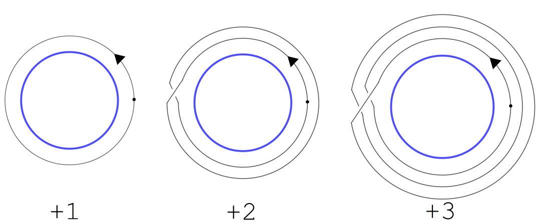

$$H(t,s) = \begin{cases} f(\frac{2t}{1-s}) & \text{nếu } 0 \le t \le \frac{1-s}{2}, \\ x & \text{nếu } \frac{1-s}{2} \le t \le \frac{1+s}{2}, \\ f(\frac{1+s-2t}{1-s}) & \text{nếu } \frac{1+s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

*Hình 5: $f*f' \sim c$. Tất nhiên, vì $f'' = f$ nên $f'*f \sim c$.*




*Poincaré trên tem của Pháp phát hành năm 1952*

Vậy các khuyên tại $x$ (sai khác đồng luân) tạo thành một nhóm, nó được gọi là nhóm cơ bản của $X$, ký hiệu bởi $\pi_1(X)$.



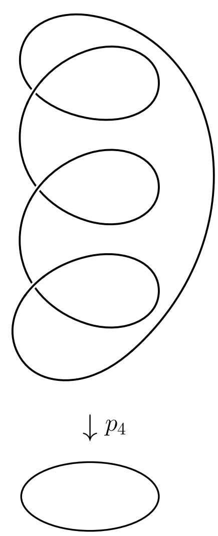

*Hình 6: Nhóm cơ bản của đường tròn.*

Một không gian là đơn liên khi và chỉ khi nhóm cơ bản của nó tầm thường (mọi khuyên đều biến dạng liên tục được về một điểm). Chẳng hạn $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 1$ và $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 1$ với $n > 1$. Ví dụ không tầm thường đầu tiên là đường tròn $\mathbb{S}^1$, có thể xem như tập các số phức với môđun bằng $1$. Nhóm cơ bản của nó là (đẳng cấu với) $\mathbb{Z}$. Cụ thể, với mỗi số nguyên n, ta xét khuyên $f_n$ cho bởi $f_n(t) = \cos(2n\pi t) + i \cdot \sin(2n\pi t)$, đó là phép cuộn đoạn thẳng thành $|n|$ lần đường tròn (theo chiều dương nếu $n > 0$, theo chiều âm nếu $n < 0$). Một khuyên $f$ tùy ý đồng luân với $f_n$ khi và chỉ khi $f$ quay quanh đường tròn đúng $|n|$ lần với chiều tương ứng với dấu của $n$.

Cuối cùng, $f_n * f_m \sim f_{n+m}$, phép hợp thành của đường tương thích với phép cộng số nguyên, nghĩa là ta có đẳng cấu nhóm $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.

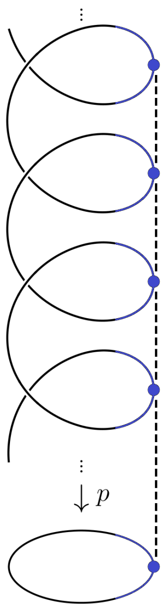
### Không gian phủ

Khái niệm gắn liền với nhóm cơ bản là **không gian phủ**. Chẳng hạn, cho số nguyên dương $n$ và xét hàm liên tục $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ cho bởi $p_n(z) = z^n$. Với mỗi điểm $w \in \mathbb{S}^1$, các điểm được $p_n$ biến thành $w$ (các căn bậc $n$ của $w$) tạo thành **thớ** của $p_n$ tại $w$. Thớ này gồm $n$ điểm rời rạc. Hơn nữa, nếu ta chọn một lân cận $U$ đủ nhỏ quanh $w$ thì thớ của $U$ gồm $n$ thành phần liên thông rời nhau, mỗi thành phần này là một bản sao của $U$ (cụ thể là $p_n$ cảm sinh một phép đồng phôi từ mỗi thành phần này lên $U$). Ta gọi một đó là một **phủ $n$–tờ** hay **phủ bậc $n$**.



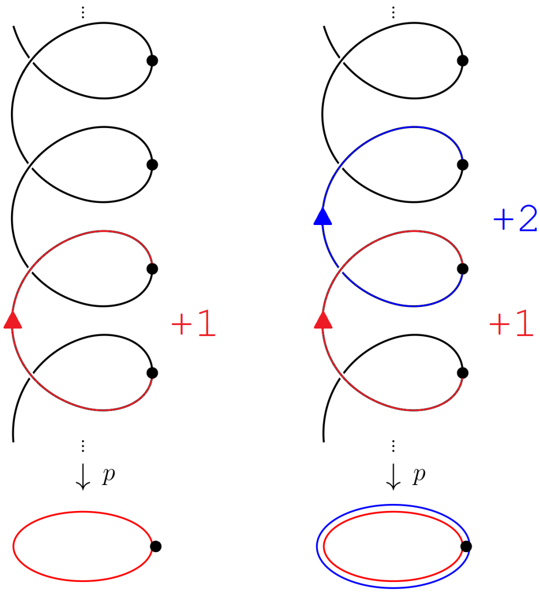

*Hình 7: Đường tròn là một phủ 4–tờ của chính nó.*

Tổng quát, một phủ của không gian tôpô $X$ được cho bởi một không gian tôpô $Y$ cùng một hàm liên tục $p : Y \to X$ (ta coi $X$ là **không gian nền** nằm dưới, $Y$ là **không gian toàn phần** nằm trên), sao cho mỗi điểm của $X$ đều có một lân cận mà thớ được tạo thành từ một số (có thể vô hạn) bản sao rời rạc. Đây là một điều kiện hoàn toàn địa phương và từ nó không suy ra rằng bản thân $Y$ gồm các bản sao rời rạc của $X$.




*Hình 8: Phủ phổ dụng của đường tròn, cho bởi phép chiếu đường helix trong không gian 3−chiều lên mặt phẳng. Mỗi điểm trên đường tròn đều có một lân cận mà thớ được tạo thành từ các bản sao rời rạc của chính lân cận đó.*

Một ví dụ về phủ vô hạn tờ là $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ cho bởi $p(x) = \cos(2\pi x) + i \cdot \sin(2\pi x)$. Phủ này được gọi là **phủ phổ dụng** của $\mathbb{S}^1$. Tại sao? Vì thông tin của nhóm cơ bản được thể hiện hoàn toàn trên nó. Một tính chất cơ bản của không gian phủ là tính nâng đường: cho một điểm $z \in \mathbb{S}^1$ và một điểm $x$ trên thớ của $z$, tức là $p(x) = z$. Với một đường bất kỳ $f : I \to \mathbb{S}^1$ xuất phát từ $z$, ta có thể **nâng** nó thành một đường *duy nhất* $g : I \to \mathbb{R}$ xuất phát từ $x$, nghĩa là $p(g(t)) = f(t)$ và $g(0) = x$. Chẳng hạn khi $f$ là một khuyên tại $z$ (hay $f(0) = f(1) = z$) thì $g(1)$ cũng nằm trên thớ của $z$, điều này tương đương với việc $g(1) - g(0)$ là một số nguyên. Chênh lệch này này hóa ra chính là số vòng quay của khuyên $f$ quanh đường tròn! Đây được gọi là **tác động đơn đạo** của nhóm cơ bản $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ lên phủ phổ dụng.




*Hình 9: Tác động đơn đạo của nhóm cơ bản: khuyên $f_2(z) = z^2$ trên đường tròn được nâng thành phép tịnh tiến $g(x) = x + 2$ trên phủ phổ dụng.*

Như vậy, số vòng quay, vốn là một thông tin bị che mất nếu ta chỉ đơn thuần nhìn vào vết của đường trên không gian nền, đã được phục hồi khi ta nhìn vào không gian phủ.

Định lý cơ bản của lý thuyết không gian phủ nói rằng có một tương ứng $1-1$ giữa các phủ (sai khác tương đương theo một nghĩa nào đó) với các nhóm con của nhóm cơ bản. Trong trường hợp đường tròn, các nhóm con của $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ gồm $n\mathbb{Z}$ với $n$ nguyên dương (nhóm con các số nguyên chia hết cho $n$), cùng với $\{0\}$. Nhóm $n\mathbb{Z}$ có chỉ số $n$ trong $\mathbb{Z}$ (có $n$ lớp đồng dư modulo $n\mathbb{Z}$), nó ứng với phủ $n$−tờ $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ cho bởi $p_n(z) = z^n$. Nhóm $\{0\}$ ứng với phủ phổ dụng $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, một phủ vô hạn tờ (và $\{0\}$ cũng có chỉ số vô hạn trong $\mathbb{Z}$). Và đó là tất cả. Nói riêng, với mỗi $n$, vì $\mathbb{Z}$ chỉ có đúng một nhóm con với chỉ số $n$ nên $\mathbb{S}^1$ chỉ có đúng một phủ $n$−tờ (sai khác tương đương).

## Mở rộng trường

Lý thuyết về không gian phủ có một sự tương tự kỳ lạ với lý thuyết mở rộng trường của Galois. Để thấy phiên bản số học của đường tròn $\mathbb{S}^1$, ta quay lại với thế giới đại số. Một **trường** là một tập hợp số mà ta có thể làm các phép toán cộng, trừ, nhân, chia. Chính xác hơn, ta có hai phép toán $+$ và $\times$ sao cho chúng thỏa mãn các tiên đề kết hợp, giao hoán, phân phối, có phần tử trung lập $0$, có phần tử đơn vị $1$, mọi "số" đều có số đối, và mọi số khác $0$ đều có nghịch đảo. Các ví dụ quen thuộc nhất là $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Trong khi đó, $\mathbb{Z}$ không phải một trường vì ta không thể làm phép chia $1 \div 2$ (sao kết quả vẫn nằm trong $\mathbb{Z}$).

Một thao tác ta có thể làm với các trường là **mở rộng**: ta kết nạp thêm nghiệm của một đa thức vô nghiệm trong trường ban đầu, và xét tất cả biểu thức thu được bằng cách cộng, trừ, nhân chia với phần tử mới này. Chẳng hạn, ta biết rằng đa thức $x^2-2$ không có nghiệm trong $\mathbb{Q}$. Khi kết nạp số thực $\sqrt{2}$, ta thu được tập các số $a+b\sqrt{2}$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Giá trị tại $\sqrt{2}$ của mọi đa thức hệ số hữu tỷ đều có thể viết được dưới dạng này: ta chỉ cần làm phép chia Euclid cho đa thức $x^2-2$ (dư sẽ có dạng $a+bx$) rồi thay $x=\sqrt{2}$. Để làm phép chia cho một số $a+b\sqrt{2}\neq 0$, ta chỉ đơn giản làm phép nhân liên hợp với $a-b\sqrt{2}$, vì $a+b\sqrt{2}=\frac{a^2-2b^2}{a-b\sqrt{2}}$.

Một câu hỏi mà thoạt nhìn có vẻ lẩm cẩm là "số $\sqrt{2}$ lấy từ đâu ra?". Việc xây dựng số thực từ số hữu tỷ là một thao tác phức tạp và nặng tính giải tích (gần như không hề đại số chút nào). Nhưng nếu ta không quan tâm đến tất cả số thực và chỉ muốn "cái gì đó bình phương lên bằng $2$" thì sao? Các nhà đại số rất giỏi trong việc này, họ thêm một phần tử mới hoàn toàn hình thức và tuyên bố rằng nó là nghiệm của đa thức $x^2-2$, và ký hiệu nó bởi $\sqrt{2}$. Một kiểu "lý sự cùn": tôi chẳng quan tâm $\sqrt{2}$ đến từ đâu, tôi chỉ cần biết nó thỏa mãn $(\sqrt{2})^2-2=0$ và tôi cộng trừ nhân chia với nó cứ như thể chẳng có gì xảy ra vậy! Nếu để ý, ta sẽ thấy rằng một khi ta đã gọi một nghiệm là $\sqrt{2}$ thì nghiệm còn lại của $x^2-2$ là $-\sqrt{2}$ (đa thức bậc $2$ nên chỉ có hai nghiệm này). Theo phong cách của các nhà đại số thì hoàn toàn không có cách nào để phân biệt giữa $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$ hết. Cứ chỗ nào có $\sqrt{2}$ thì thay bởi $-\sqrt{2}$, các tính toán vẫn không thay đổi. Để phân biệt hai số này, ta cần một thao mới (so với cộng, trừ, nhân, chia) là *so sánh*. Biết rằng có có hai căn bậc hai của $2$ trong $\mathbb{R}$, ta sẽ tuyên bố rằng, số nào lớn hơn $0$ thì được gọi là $\sqrt{2}$. Tình trạng tương tự xảy ra khi ta kết nạp vào $\mathbb{R}$ số $i$ và tuyên bố rằng $i^2+1=0$, thứ mà ngày nay ta gọi là **số ảo**. Lúc này, để phân biệt $i$ với $-i$, ta không thể so sánh các số phức được nữa, giải pháp duy nhất là chọn một trong hai căn bậc hai của $-1$ và gọi nó là $i$.

Tổng quát hơn, nếu $f$ là một đa thức bất khả quy bậc $n>1$ với hệ số trong một trường $K$ nào đó thì $f$ không có nghiệm trong $K$ (nếu nó có nghiệm $\alpha\in K$ thì nó chia hết cho đa thức $x-\alpha$, trái với giả thiết bất khả quy). Ta tuyên bố một cách hình thức rằng $\alpha$ là một "nghiệm nào đó" của $f$ và kết nạp $\alpha$ vào $K$. Trường mới thu được, ký hiệu bởi $K(\alpha)$, gồm các tổng (hình thức) có dạng $a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}$, với $a_i\in K$. Ta cộng và trừ chúng một cách hiển nhiên. Khi làm phép nhân, ta chỉ cần chú ý rằng $f(\alpha)=0$, từ đó $\alpha^n$ cũng có dạng $a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}$, suy rộng ra thì giá trị tại $\alpha$ của mọi đa thức (bậc tùy ý) với hệ số trong $K$ cũng có dạng này. Để làm phép chia cho một phần tử $a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}\neq 0$, ta xét đa thức $g(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$. Vì $g(\alpha)\neq 0$ nên $g$ không thể chia hết cho $f$, hay $g$ và $f$ nguyên tố cùng nhau (giả thiết $f$ bất khả quy được dùng ở đây), nên thuật toán Bézout cho ta các đa thức $u$, $v$ sao cho $fu+gv=1$, suy ra $g(\alpha)v(\alpha)=1$, hay $v(\alpha)$ chính là nghịch đảo cần tìm của

$g(\alpha)$. Mở rộng trường $K(\alpha)/K$ được gọi là một **mở rộng bậc $n$**.

## Trường hữu hạn

Nếu ta xét tập hợp $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ các lớp đồng dư modulo $n$ với $n$ là số nguyên dương cho trước, ta có thể làm phép cộng và phép nhân trên chúng một cách hiển nhiên. Thế thì $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ là một trường khi và chỉ khi $n = p$ là một số nguyên tố. Ta ký hiệu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ bởi $\mathbb{F}_p$, một trường có $p$ phần tử. Các trường hữu hạn tìm thấy những ứng dụng quan trọng trong lý thuyết bảo mật hiện đại.


*Galois trên tem của Pháp phát hành năm 1984.*

Tạm gác lại các ứng dụng của $\mathbb{F}_p$ trong tin học, ta hãy xem chúng có liên hệ gì với tôpô. Ta áp dụng phép mở rộng trường cho trường $\mathbb{F}_p$. Một suy luận đếm bằng hàm sinh và công thức nghịch đảo Möbius đảm bảo rằng với mỗi số nguyên dương $n$, luôn tồn tại một đa thức $f$ với hệ số trong $\mathbb{F}_p$, bậc $n$, và bất khả quy. Kết nạp một nghiệm hình thức $\alpha$ của $f$ vào $\mathbb{F}_p$, ta thu được trường mới mà mỗi phần tử được viết duy nhất dưới dạng $a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$, với $a_i \in \mathbb{F}_p$. Trường mới này vì thế có $p^n$ phần tử.

Chẳng hạn, với $p = n = 2$, đa thức bậc $2$ bất khả quy duy nhất trên $\mathbb{F}_2$ là $x^2 + x + 1$. Ta tuyên bố rằng $\alpha$ là "cái gì đó" sao cho $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ và kết nạp nó vào $\mathbb{F}_2$. Khi đó ta thu được một trường với $4$ phần tử là $0$, $1$, $\alpha$, $1 + \alpha$. Hai phần tử $\alpha$ và $1 + \alpha$ là nghịch đảo của nhau vì $\alpha(1 + \alpha) = \alpha^2 + \alpha = -1 = 1$ (ta đang xét modulo $2$!), từ đó ta có thể dễ dàng cộng, trừ, nhân, chia trên $4$ phần tử này.

Trở lại với trường với $p^n$ phần tử, ta đã thấy rằng nó tồn tại. Ta muốn nó "duy nhất" theo nghĩa: hai trường có $p^n$ phần tử thì **đẳng cấu** với nhau; một đẳng cấu trường là một tương ứng $1 - 1$ tương thích với các cấu trúc của trường (các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, số $0$, số $1$). Trước hết, bằng một suy luận đại số tuyến tính đơn giản, mỗi trường hữu hạn $\mathbb{F}$ đều phải có số phần tử $q$ là lũy thừa của một số nguyên tố, $q = p^n$ chẳng hạn. Lúc này, $\mathbb{F}$ luôn "chứa" trường $\mathbb{F}_p$, theo nghĩa các phần tử $0, 1, 2 \ldots p - 1$ trong $\mathbb{F}$ tạo thành một bản sao đẳng cấu với $\mathbb{F}_p$; ta cộng, trừ, nhân, chia chúng theo modulo $p$. Khi bỏ đi số $0$ khỏi $\mathbb{F}$, ta thu được một nhóm đối với phép nhân, một nhóm với $q - 1$ phần tử. Định lý Lagrange trong lý thuyết nhóm đảm bảo rằng $a^{q-1} = 1$ với mọi $a \neq 0$, hay $a^q = a$ với mọi $a \in \mathbb{F}$. Đây là một tổng quát hóa của định lý nhỏ Fermat trong $\mathbb{F}_p$ (vì thực ra cách chứng minh cũng y hệt). Vậy, mọi phần tử của $\mathbb{F}$ đều là nghiệm của đa thức $x^q - x$, hay $\mathbb{F}$ thu được bằng cách kết nạp tất cả nghiệm của đa thức này vào $\mathbb{F}_p$. Lý thuyết mở rộng trường gọi $\mathbb{F}$ là (một) **trường phân rã** của đa thức $x^q - x$, và nó đảm bảo rằng trường phân rã là duy nhất sai khác đẳng cấu. Như vậy, với mọi lũy thừa nguyên tố $p^n$, có duy nhất một trường với $p^n$ phần tử, một mở rộng bậc $n$ của $\mathbb{F}_p$.

Tổng quát hơn, nếu $\mathbb{F}$ là một trường hữu hạn thì với mọi số nguyên dương $n$, tồn tại duy nhất (sai khác đẳng cấu) một mở rộng bậc $n$ của $\mathbb{F}$. Ta đã từng nói rằng lý thuyết không gian phủ có sự tương tự với lý thuyết mở rộng trường. Hãy nghĩ về các phủ $n$-tờ như các mở rộng bậc $n$. Vậy chẳng phải trường hữu hạn $\mathbb{F}$ rất giống đường tròn $\mathbb{S}^1$ ư? Dù trông nó như một sự tình cờ, ta hãy miễn cưỡng lấy quan sát này làm mở đầu cho sự liên hệ giữa tôpô và số học ở phần dưới. Sớm thôi, ta sẽ thấy rằng nó cũng không ngẫu nhiên lắm đâu.


# NHỮNG CÂU NÓI CUỐI CÙNG HUYỀN THOẠI CỦA ARCHIMEDES

PHẠM TRIỀU DƯƠNG

*"Xin đừng xáo trộn những vòng tròn của tôi"*

Μὴ μου τοὺς κύκλους τάραττε (tiếng Hy lạp)

Noli turbare circulos meos (Tiếng La tinh)

Khi chúng ta còn nhỏ, chắc hẳn ai cũng đều nghe tới chuyện về một ông già thời cổ đại nào đó, ông ta ngồi trên bờ biển, đang vẽ một cái hình gì đó trên cát thì một người lính cưỡi ngựa đi qua và đâm chiếc giáo làm ông già ngã xuống, ông ấy chỉ kịp thốt lên: "Ôi, làm ơn đừng làm hỏng những hình vẽ của tôi".

Câu chuyện này làm chúng ta mê say tới mức, lúc còn thơ ấu, cứ mỗi lần bạn và tôi đi nghỉ hè ở biển, chúng ta đều cố thử ngồi trên cát trắng và vẽ những hình tam giác, hình tròn và đợi những ngọn sóng ập tới xoá đi nhanh chóng những ký họa tạo ra trong những hình dung đẹp đẽ mơ hồ của chúng ta về một môn học gọi là Toán.

Rồi tới khi học Vật lý, chúng ta lại được biết tới một ông già nào đó khác ở một xứ nọ, ông đang ngồi ngâm mình trong bồn tắm thì bỗng vùng dậy chạy ra đường và kêu lên: "Eureka!" Tất cả các bạn bè của chúng ta đều yêu mến câu chuyện đó, và đều hay thốt lên một cách hồn nhiên "Eureka!" khi muốn nói đến một khám phá bất chợt, giống như khi giải ra được một bài toán khó vào chiều tối thứ Sáu.

Các câu chuyện trên đều về một người, đó là Archimedes xứ Syracuse (287 – 212). Về cái chết của ông, Wikipedia có viết ngắn gọn như sau: "Archimedes chết trong đợt vây hãm thành Syracuse, ở đó ông bị một người lính La Mã giết mặc dù có mệnh lệnh phải bảo toàn tính mạng cho Archimedes." Vào lúc đó, Archimedes, nổi tiếng với trí tuệ và kiến thức uyên thâm về hình học và cơ học, đã làm cho tướng quân La Mã là Marcus Claudius Marcellus phải nể phục. Marcellus biết rằng mình đã phải nhọc nhằn như thế nào trong việc chinh phục thành Syracuse cũng do các cỗ máy cơ học tinh xảo mà Archimedes chế tạo đã giúp dân thành chống cự được lính La Mã thiện chiến. Người La Mã nổi tiếng với tính tàn ác lạnh lùng, nhưng cũng là những người đề cao danh dự chiến trường. Vì quá hâm mộ tài năng xuất chúng của Archimedes, tướng quân Marcellus ra lệnh phải giữ mạng sống cho nhà toán học – đối với Marcellus, cứu được Archimedes cũng đáng được coi là vinh quang như hạ được thành luỹ của Syracuse bằng gươm kiếm.

Tuy nhiên, một người lính được cử đến để yêu cầu Archimedes nộp mình làm tù binh cho quân La Mã đã làm hỏng kế hoạch tỷ mỷ mà Marcellus nghĩ ra. Anh ta thô lỗ đạp cửa đột nhập vào nhà của Archimedes, đúng lúc nhà toán học đang trầm ngâm mải mê vẽ những hình vẽ phức tạp. Người lính tuốt kiếm ra và hỏi Archimedes tên ông là gì. Archimedes, vì đang mải miết với công việc, không nhận thấy ai đang chỉ kiếm về mình, đã nói với người lính: "Xin làm ơn đừng có làm xáo trộn những hình vẽ của tôi, anh bạn ơi!" Ông còn hét lên: "Ai đưa giúp cho tôi một trong những cái máy của tôi nào!" Người lính La Mã, vì quá sợ hãi, theo bản năng tự vệ bèn đâm thẳng kiếm vào ông già yếu ớt, và cũng trong giây phút ấy đã hạ gục nhà toán học vĩ đại.

Nhưng vì sao lại có câu chuyện về Archimedes bị đâm chết khi ngồi trên bãi cát nhỉ? Phần lớn các tài liệu đều đồng ý rằng ông đang ngồi tại nhà riêng và đang vẽ những hình hình học thì bị người lính đột nhập tới đâm ông bằng kiếm. Lúc đó Archimedes đang sử dụng một công cụ là bảng vẽ abax, một dụng cụ để vẽ bằng bụi cát. Vì vậy mới có dị bản trên về bãi cát như tôi và các bạn đã từng nghe khi còn nhỏ.

Ân hận với hành động bất cẩn của quân lính, Marcellus đã xin lỗi họ hàng của Archimedes và cho đặt trên mộ của ông một biểu tượng mô tả một hình cầu đặt trong một hình trụ, và mãi 137 năm sau, một chính trị gia La Mã là Cicero mới tìm thấy ngôi mộ này của nhà toán học. Người La Mã cổ đại nói chung không quan tâm tới toán học, và hành động dọn dẹp ngôi mộ cho phong quang của Cicero có lẽ là đóng góp đáng ghi nhớ nhất của bất kỳ người La Mã nào đối với lịch sử phát triển của toán học.

*Sophie Germain* (1776 – 1831) *– Nhà toán học, vật lý học và triết học người Pháp.*

Sự thiên tài và đầu óc luôn muốn tò mò khám phá tri thức của Archimedes tiếp tục truyền cảm hứng tới nhiều nhà tư tưởng khác rất lâu sau khi ông qua đời, từ Galileo cho tới Issac Newton. Chúng ta có thể nhắc tới Sophie Germain, một nhà toán học nữ người Pháp sinh năm 1776. Vào năm 13 tuổi, cô đã được đọc câu chuyện về cái chết của Archimedes. Sophie cho rằng bất kỳ môn học nào mà có thể thu hút một người tập trung say mê như vậy đều đáng để nghiên cứu, và cô quyết định tự học toán – đặc biệt là môn lý thuyết số. Cha mẹ cô đã lo lắng rất nhiều về sở thích toán học của con gái mình khi cô còn là một cô bé, và vào thời cô sống, việc phụ nữ trở thành một nhà toán học là điều không bình thường, vì vậy họ đã tịch thu tất cả các cây nến của cô và dỡ bỏ mọi thiết bị sưởi ấm trong phòng cô. Cô đáp lại bằng cách bí mật thắp nến rồi ngồi vào bàn, quấn chăn kín người. Cha mẹ cô cuối cùng đã mủi lòng và quyết định tài trợ cho việc học hành của cô. Sophie, sau khi tìm thấy một sinh viên sắp rời Paris tên là Antoine–August Le Blanc, đã bí mật thế chỗ anh ta, sử dụng tên của anh ta để gửi và nhận tài liệu từ École Polytechnique khi đó mới mở, vì trường chỉ nhận sinh viên nam tới học. Joseph–Louis Lagrange, lúc đó là người hướng dẫn của Sophie, đã rất ngạc nhiên khi sinh viên này có thể tiến bộ rất nhiều – từ một học sinh tệ hại trở thành người có bài tập giải hàng tuần (tất nhiên là được gửi qua đường bưu điện) là tốt nhất trong lớp. Lagrange yêu cầu được gặp "anh" sinh viên Le Blanc và ngạc nhiên khi biết rằng "anh ta" hoá ra là một quý cô! Sophie đã trở thành một trong những nhà lý thuyết số xuất chúng nhất trong thời đại của cô.

Chắc các bạn đọc đến đây đã yêu thích hơn chiếc bàn học ngăn nắp của mình được rọi chiếu bởi ánh sáng thoáng đãng rồi chứ?

Tham khảo dựa trên các nguồn internet:

[1] https://math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/contents.html

[2] https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Archimedes&oldid=1146936468

# BÀI TOÁN THÁP HÀ NỘI

HÀ HUY KHOÁI

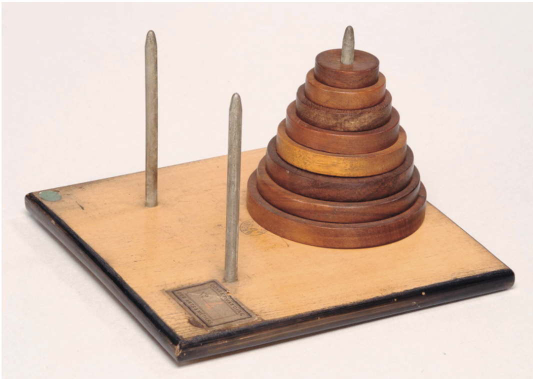
Trò chơi "Tháp Hà Nội", xếp những miếng gỗ trên ba chiếc cọc, đã rất quen thuộc với các bạn nhỏ Việt Nam cũng như nhiều bạn nhỏ trên thế giới. Thật là tuyệt vời khi một trò chơi nổi tiếng trên thế giới lại có tên liên quan đến thủ đô của nước ta đúng không. Các bạn đã biết về xuất xứ cùng với nhiều điều thú vị xung quanh bài toán "Tháp Hà Nội" chưa? Chúng ta hãy cùng ngược dòng thời gian để tìm hiểu qua bài viết dưới đây nhé.


Năm 1883, Eduard Lucas (Claus) công bố bức tranh quảng cáo "Tháp Hà Nội – trò chơi thực sự nát óc xứ Annnam".

Một năm sau, Lucas viết bài "Tháp Hà Nội , trò chơi toán học" đăng ở tạp chí "Science et Nature", số 1 (1884) tr. 127 – 128. Có thể xem đó ngày khai sinh của "Bài toán Tháp Hà Nội", một trong những bài toán nổi tiếng của toán học. Cho đến ngày nay, vẫn còn rất nhiều công trình nghiên cứu về bài toán tháp Hà Nội và những mở rộng của nó, vẫn còn nhiều giả thuyết đang chờ câu trả lời.

Hình sau đây là bức ảnh chụp từ hiện vật trưng bày trong "Musée des arts et métiers–Cnam Paris" (Bảo tàng nghệ thuật và thủ công Paris).

Ta có ba cái cọc, và 8 cái đĩa với kích thước khác nhau đôi một. Bài toán đặt ra là di chuyển toàn bộ 8 cái đĩa sang một cọc khác, sao cho vẫn giữ được thứ tự các đĩa với bán kính lớn dần từ trên xuống dưới. Quy tắc di chuyển: mỗi lần chỉ được chuyển một đĩa, và không bao giờ được đặt một đĩa lên đĩa khác có bán kính nhỏ hơn. Điều này có thể làm được nhờ sử dụng cọc "trung gian".



Các bạn thử hình dung xem ta sẽ cần làm bao nhiêu phép chuyển đĩa?

Trước hết, ta thử làm bài toán dễ hơn: trên cọc chỉ có $2$ đĩa. Rõ ràng chỉ cần chuyển đĩa nhỏ sang cọc trung gian, đĩa lớn sang cọc còn lại, rồi chuyển đĩa nhỏ lên cọc đó. Số bước chuyển là $3$.

Nếu có $3$ đĩa trên cọc thì sao? Giả sử các đĩa đang ở cọc $A$, và ta cần chuyển sang cọc $C$. Ta chuyển hai đĩa trên cùng sang cọc trung gian $B$, rồi chuyển đĩa to nhất sang cọc $C$. Sau đó chỉ cần chuyển hai đĩa từ cọc $B$ sang cọc $C$. Phương pháp chuyển $2$ đĩa từ cọc này sang cọc khác thì ta đã biết. Như vậy, số phép chuyển phải làm khi có $3$ đĩa bằng $2$ lần số phép chuyên khi có $2$ đĩa, cộng thêm $1$ phép chuyển (đĩa to nhất).

Như vậy, số bước chuyển cần thiết của $3$ đĩa là: $2 \times 3 + 1 = 7$. Bằng quy nạp, dễ chứng minh nếu $N$ là số phép chuyển khi có $n$ đĩa thì với $(n + 1)$ đĩa, ta có thể thực hiện nhiệm vụ với $(2N + 1)$ phép chuyển. Từ đó, dễ suy ra, nhiệm vụ đặt ra trong bài toán Tháp Hà Nội với $n$ đĩa có thể thực hiện với $2^n - 1$ phép chuyển.

Có thể chứng minh $2^n - 1$ là số phép dịch chuyển tối thiểu cần thiết, nghĩa là không có cách gì thực hiện nhiệm vụ với số phép dịch chuyển ít hơn.

Người ta cho rằng, bài toán Tháp Hà Nội lấy ý tưởng từ câu chuyện cổ Ấn Độ sau đây.

"Trong ngôi đền vĩ đại ở Benares, bên dưới mái vòm đánh dấu trung tâm thế giới, người ta đặt một chiếc đĩa bằng đồng, trên đó gắn cố định ba chiếc cọc kim cương, mỗi chiếc cao một mét và dày như thân của một con ong. Trên một trong những chiếc cọc kim cương đó, vào buổi sáng tạo, Thượng Đế đặt $64$ chiếc đĩa bằng vàng nguyên chất, theo thứ tự to dần từ trên xuống dưới. Ngày đêm không ngừng, những con quỷ chuyển các đĩa từ cọc kim cương này sang cọc kim cương khác theo nguyên tắc không được di chuyển nhiều hơn một đĩa cùng một lúc, và không được đặt đĩa nào lên trên cái nhỏ hơn nó. Khi $64$ chiếc đĩa được chuyển xong thì tiếng sét sẽ nổ ra, và thế giới tan biến".

Những suy luận trên đây chỉ ra rằng, số phép dịch chuyển mà lũ quỷ phải làm ít nhất là

$$2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615.$$

Giả sử lũ quỷ rất thạo "thuật toán dịch chuyển", và mỗi giây chúng chuyển được một đĩa, thì phải mất khoảng $585$ tỷ năm. Có lẽ dù không có lũ quỷ, trái đất của chúng ta cũng không tồn tại được lâu đến thế!

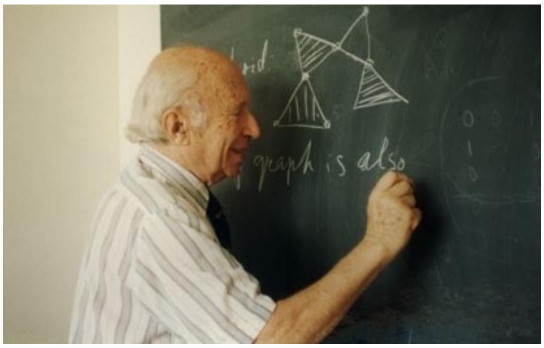
Từ sau khi ra đời, bài toán Tháp Hà Nội nhận được sự quan tâm lớn của các nhà toán học và những người làm ... đồ chơi. Rất nhiều phiên bản của bài toán Tháp Hà Nội xuất hiện, chẳng hạn như số cọc lớn hơn $3$, hoặc cách chơi có thay đổi. Cho đến ngày nay, Tháp Hà Nội và những biến thể của nó vẫn là bài toán quan trọng trong toán học rời rạc, lý thuyết đồ thị, khoa học máy tính, và tô pô (chẳng hạn, bài toán về đường cong tự cắt tại mọi điểm của nó!). Thậm chí, Tháp Hà Nội còn có ứng dụng rộng rãi trong nghiên cứu tâm lý học!

Người ta cho rằng, sở dĩ bài toán Tháp Hà Nội lôi cuốn được nhiều thế hệ các nhà toán học vì nó chứa đựng những yếu tố làm nên sức hấp dẫn của Toán học: đẹp, thú vị, hữu ích, và bất ngờ.

# GELFAND NÓI VỀ TOÁN HỌC

Người dịch: Phùng Hồ Hải

***Lời người dịch.*** *Israel M. Gelfand (1913 – 2009) là một trong những nhà toán học vĩ đại nhất của thế kỷ XX. Năm 2003, các đồng nghiệp và học trò ông đã tổ chức một hội thảo khoa học lớn tại Đại học Harvard để kỷ niệm 90 năm ngày sinh của ông. Bản thân Gelfand cũng trình bày báo cáo với tiêu đề "Toán học như một ngôn ngữ phù hợp"[1]. Các báo cáo tại hội thảo về sau được xuất bản thành cuốn sách "Sự thống nhất của Toán học" (The unity of Mathematics). Bài viết giới thiệu những chia sẻ của Gelfand tại hội thảo. Các tiêu đề do người dịch đặt.*




## Toán học là gì?

Theo quan điểm của tôi, toán học là một phần của nền văn hóa của chúng ta, giống như âm nhạc, thơ ca và triết học. Tôi đã nói về điều này trong bài giảng của tôi tại hội thảo. Ở đó, tôi đã đề cập đến sự gần gũi giữa phong cách toán học và phong cách âm nhạc cổ điển hay thơ ca. Tôi rất vui khi tìm thấy bốn đặc điểm chung sau: thứ nhất, vẻ đẹp; thứ hai, sự đơn giản; thứ ba, tính chính xác; thứ tư, những ý tưởng điên rồ. Sự kết hợp của bốn điều này: vẻ đẹp, tính chính xác, sự đơn giản và những ý tưởng điên rồ chính là trái tim của toán học, trái tim của âm nhạc cổ điển. Nhạc cổ điển không chỉ là nhạc của Mozart, hay Bach, hay Beethoven. Nó cũng là nhạc của Shostakovich, Schnittke, Schoenberg (nhạc của người cuối cùng tôi hiểu ít hơn). Tất cả đó là âm nhạc cổ điển. Và tôi nghĩ rằng cả bốn đặc điểm này luôn hiện hữu trong đó. Vì lý do này, không phải ngẫu nhiên mà các nhà toán học lại thích nhạc cổ điển. Họ thích nó vì nó có cùng phong cách tổ chức tâm lý.

Ngoài ra còn có một khía cạnh khác của sự tương đồng giữa toán học và âm nhạc cổ điển, thơ ca, v.v. Đây là những ngôn ngữ để hiểu nhiều thứ. Ví dụ: Tại sao các nhà triết học Hy Lạp vĩ đại lại nghiên cứu hình học? Họ là những triết gia. Họ đã học hình học như triết học. Các nhà hình học vĩ đại đã đi theo và làm theo cùng một truyền thống để thu hẹp khoảng cách giữa viễn kiến và lập luận. Chẳng hạn các tác phẩm của Euclid đã tóm tắt khuynh hướng này trong thời của ông.

## Toán học như một ngôn ngữ phù hợp

Một khía cạnh quan trọng của toán học là nó là một ngôn ngữ phù hợp cho các lĩnh vực khác nhau: vật lý, kỹ thuật, sinh học. Ở đây, cụm từ quan trọng nhất là "ngôn ngữ phù hợp". Chúng ta có ngôn ngữ phù hợp và không phù hợp. Tôi có thể cung cấp cho bạn các ví dụ về ngôn ngữ phù hợp và không phù hợp. Ví dụ, [sử dụng] cơ học lượng tử trong sinh học không phải là ngôn ngữ phù hợp, nhưng [sử dụng] toán học trong nghiên cứu trình tự gen là ngôn ngữ phù hợp.

Tại sao đây là vấn đề quan trọng vào lúc này? Nó quan trọng bởi vì chúng ta đang có một cuộc "cải tổ" trong thời đại này. Chúng ta có máy tính có thể làm mọi thứ. Chúng ta không bị ràng buộc bởi các phép tính cộng và nhân. Chúng ta cũng có rất nhiều công cụ. Tôi chắc chắn rằng trong 10 đến 15 năm nữa, toán học sẽ hoàn toàn khác so với trước đây.

[1] *Mathematics as an adequate language.*

### Làm sao tôi có thể làm toán ở tuổi chín mươi?

Câu trả lời rất đơn giản. Tôi không phải là một nhà toán học vĩ đại. Tôi nói nghiêm túc. Tôi chỉ là một học sinh trong suốt cuộc đời của tôi. Ngay từ khi bắt đầu cuộc đời, tôi đã cố gắng học hỏi. Và ví dụ như bây giờ, khi nghe các báo cáo và đọc các bản thảo ở hội nghị này, tôi phát hiện ra rằng mình còn nhiều điều chưa biết và phải học hỏi. Vì vậy, tôi luôn luôn học hỏi. Theo nghĩa này, tôi là một học sinh – không bao giờ là một "Lãnh tụ."

Tôi muốn nhắc đến những người thầy của tôi. Tôi không thể kể những ai là thầy của tôi là ai vì có quá nhiều người. Khi tôi còn trẻ, khoảng 15 – 16 tuổi, tôi bắt đầu học toán. Tôi không được học hành chính quy, tôi chưa bao giờ tốt nghiệp đại học, tôi "nhảy" qua bậc này. Năm 19 tuổi, tôi trở thành nghiên cứu sinh và tôi học hỏi từ những đồng nghiệp lớn tuổi hơn.

Vào thời điểm đó, một trong những người thầy quan trọng nhất đối với tôi là Schnirelmann, một nhà toán học thiên tài, qua đời khi còn trẻ. Sau đó là Kolmogorov, Lavrentiev, Plesner, Petrovsky, Pontryagin, Vinogradov, Lusternik. Tất cả đều khác nhau. Tôi thích một số người trong họ và tôi hiểu một số trong họ giỏi như thế nào nhưng tôi không tán thành – nói một cách nhẹ nhàng là vậy – quan điểm của họ. Nhưng họ là những nhà toán học vĩ đại. Tôi rất biết ơn tất cả họ, và tôi đã học được rất nhiều điều từ họ.

### Sự thống nhất của toán học

Khi chúng ta nghĩ về âm nhạc, chúng ta không phân chia nó thành những lĩnh vực cụ thể như chúng ta thường làm trong toán học. Nếu chúng ta hỏi một nhà soạn nhạc nghề nghiệp của anh ta là gì, anh ta sẽ trả lời, "Tôi là một nhà soạn nhạc." Khó mà có chuyện anh trả lời, "Tôi là một nhà soạn nhạc cho tứ tấu." Có lẽ đây là lý do tại sao, khi tôi được hỏi nghiên cứu lĩnh vực nào của toán học, tôi chỉ trả lời, "Tôi là một nhà toán học."

Tôi may mắn được gặp Paul Dirac vĩ đại, người mà tôi đã ở cùng vài ngày ở Hungary. Tôi học được nhiều thứ từ ông ấy.

Vào những năm 1930, nhà vật lý trẻ Pauli đã viết một trong những cuốn sách hay nhất về cơ học lượng tử. Trong chương cuối của cuốn sách này, Pauli thảo luận về các phương trình Dirac. Ông viết rằng các phương trình Dirac có những điểm yếu bởi vì chúng đưa ra những kết luận khó xảy ra và thậm chí điên rồ:

1. Các phương trình này giả định rằng, bên cạnh electron, còn tồn tại một hạt mang điện tích dương, positron, mà chưa ai từng quan sát thấy.

2. Hơn nữa, electron hành xử một cách kỳ lạ khi gặp positron. Cả hai triệt tiêu lẫn nhau và tạo thành hai photon.

Và điều hoàn toàn điên rồ là:

3. Hai photon có thể biến thành một cặp electron–positron.

Pauli viết rằng mặc dù vậy, các phương trình Dirac khá thú vị và đặc biệt là các ma trận Dirac đáng được quan tâm.

Tôi hỏi Dirac, "Paul, tại sao, bất chấp những nhận xét này, anh không từ bỏ các phương trình của mình mà tiếp tục theo đuổi các kết quả của mình?"

"Bởi vì, chúng đẹp."

Bây giờ là lúc cho một cuộc cải tổ triệt để ngôn ngữ cơ bản của toán học. Lúc này, điều đặc biệt quan trọng là phải ghi nhớ sự thống nhất của toán học, ghi nhớ vẻ đẹp, sự đơn giản, tính chính xác và những ý tưởng điên rồ của nó. Tôi muốn nhắc lại rằng khi phong cách âm nhạc thay đổi vào thế kỷ 20, nhiều người nói rằng âm nhạc hiện đại thiếu sự hài hòa, không tuân theo các quy tắc chuẩn mực, nghịch tai, v.v. Tuy nhiên, âm nhạc của Schoenberg, Stravinsky, Shostakovich và Schnitke cũng chính xác như âm nhạc của Bach, Mozart và Beethoven trước đây.

# MỘT CHUYẾN THĂM TRIỂN LÃM

GIA DƯƠNG

Thám tử Xuân Phong cùng thanh tra Lê Kính tham gia một buổi giới thiệu sản phẩm của hai công ty là Tae Yeon và TeaYon tại triển lãm Điện tử Expo – New Vision của khu vực. Công ty Tae Yeon có uy tín từ lâu đời, với những sản phẩm tinh tế có chất lượng tốt nổi tiếng, các nhân viên của công ty luôn nói thật. Còn công ty TeaYon chuyên sản xuất đồ rẻ, kém chất lượng, bắt chước kiểu dáng của công ty Tae Yeon nên Ban giám đốc dặn các nhân viên của mình chỉ được nói dối trong buổi triển lãm.

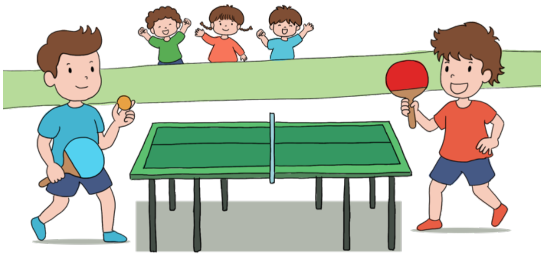
Vừa đặt chân tới khu vực triển lãm được trang hoàng lộng lẫy, Xuân Phong gặp ngay 5 đại diện của hai công ty này đứng tại cổng ra vào và tươi cười niềm nở tiếp đón. Xuân Phong tiến tới họ và hỏi cả 5 người cùng một câu hỏi "Có bao nhiêu người đến từ công ty Tae Yeon trong số các bạn?"

Người thứ nhất trả lời "Không có ai cả". Hai người tiếp theo đều trả lời "Có đúng một người".

Vậy hai người còn lại sẽ trả lời câu hỏi của thám tử Xuân Phong như thế nào nhỉ? Em có thể suy đoán ra câu trả lời của họ và giải thích lập luận được không?

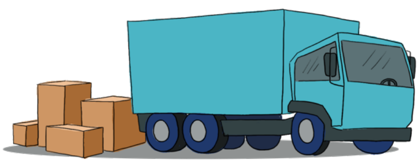

# CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

**1.** Trong một cuộc thi thể thao, ban tổ chức chọn ra một số bạn học sinh ở lớp $5A$ và một số bạn ở lớp $5B$ thi đấu trực tiếp. Mỗi bạn ở lớp $5A$ được chọn ra sẽ thi đấu duy nhất một trận với một bạn ở lớp $5B$, và ngược lại, mỗi bạn ở lớp $5B$ được chọn ra chỉ đấu đúng một trận với một bạn ở lớp $5A$.



Biết rằng số học sinh lớp $5A$ được chọn thi đấu chiếm $2/3$ tổng số học sinh toàn lớp $5A$, còn số học sinh lớp $5B$ được chọn thi đấu chiếm $3/5$ tổng số học sinh toàn lớp $5B$. Tổng số học sinh của cả hai lớp là 57 bạn. Hỏi có bao nhiêu học sinh của hai lớp đã tham gia các trận thi đấu trực tiếp?

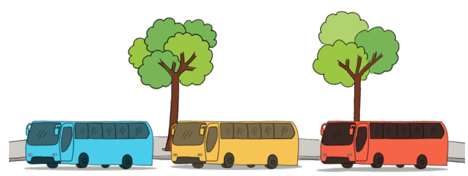
**2.** Công ty vận tải được thông báo ngắn gọn là có một số kiện hàng có tổng trọng lượng là 10 tấn cần được vận chuyển, hơn nữa mỗi kiện hàng nặng không quá 1 tấn. Hỏi công ty cần điều động ít nhất bao nhiêu xe tải có trọng tải là 3 tấn mỗi xe để luôn chắc chắn chở được hết được số hàng hoá đó?



**3.** Sau khi được sạc đầy pin, điện thoại di động của bạn An dùng đúng 6 tiếng ở chế độ trò chuyện hoặc đúng 210 tiếng ở chế độ chờ. Khi bạn An lên tàu hoả để đi du lịch, pin của bạn được sạc đầy 100%, và trên tàu không có ổ cắm sạc nên khi xuống ga, pin của bạn cũng vừa hết sạch. Biết rằng An đã nói chuyện với bạn bè đúng một nửa thời gian khi ngồi trên tàu, còn nửa thời gian còn lại đặt điện thoại ở chế độ chờ. Hỏi thời gian An đi trên tàu hoả là bao nhiêu lâu?

**4.** Một nhóm học sinh đi bộ từ điểm hẹn tới bến xe buýt để kịp đón chuyến xe vào lúc 8 giờ. Cũng vào thời điểm này, từ điểm thăm quan, một chiếc xe buýt cũng xuất phát để tới kịp bến xe đón nhóm học sinh đó. Tuy nhiên nhóm học sinh tới bến xe buýt khá sớm, vào lúc 6 giờ 10 phút, nên họ quyết định đi bộ tiếp tới điểm thăm quan. Trên đường, các bạn đã gặp được xe buýt và lên xe đi tiếp. Cuối cùng cả nhóm đến được điểm thăm quan sớm hơn 20 phút so với thời gian ấn định. Biết rằng vận tốc của xe buýt là 60 km/h và vận tốc đi bộ của các em học sinh luôn không đổi. Hãy tìm vận tốc đi bộ của nhóm học sinh trước khi gặp xe buýt.

**5.** Có 100 chiếc xe ô tô đỗ liền nhau thành một hàng dọc bên lề đường, trong đó có 70 chiếc xe hiệu Mercedes, còn lại là những xe nhãn hiệu khác. Trong các xe nhãn hiệu Mercedes có 30 chiếc màu đỏ, 20 chiếc màu vàng và 20 chiếc màu hồng. Biết rằng không có hai xe Mercedes nào khác màu lại đỗ cạnh nhau. Em hãy chỉ ra rằng luôn tìm ra 3 chiếc xe Mercedes cùng màu đỗ liên tiếp nhau.



**6.** Một lớp học có 20 em học sinh. Cô giáo chủ nhiệm của lớp tổ chức một số buổi thăm quan vào mỗi ngày cuối tuần trong suốt năm học, mỗi buổi tham quan có ít nhất 4 em học sinh tham gia. Em hãy chứng minh rằng có một buổi thăm quan mà mỗi em học sinh tham gia buổi đó đều tham gia ít nhất $1/17$ tổng số tất cả các buổi tham quan của cả năm học.

# LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 1-2 năm 2023)

**1.** Một bác nông dân chở một xe ô tô quất cảnh ra chợ Tết để bán. Sau khi bán hết cây quất cuối cùng với giá 230 nghìn đồng, bác tính nhẩm lại thấy mình đã bán số cây quất với giá trung bình là 245 nghìn đồng/cây. Nhưng ngay lúc ấy người mua cây quất cuối quay trở lại và chỉ cho bác thấy cành quất bị rụng quá nhiều lá, nên ông ta chỉ đồng ý mua với giá 158 nghìn đồng. Bác chấp thuận và bán cây quất đó. Khi nhẩm tính lại, bác nông dân thấy giá trung bình của xe quất bây giờ là 242 nghìn đồng. Hỏi bác đã bán được bao nhiêu cây quất?

*Lời giải.* Gọi số cây quất là $n$, còn giá tiền một cây quất là $Q$ (nghìn đồng). Khi đó $Q+230=245n$ và $Q+158=242n$. Trừ hai đẳng thức này ta có $72=3n$. Suy ra bác nông dân đã bán được $24$ cây quất.

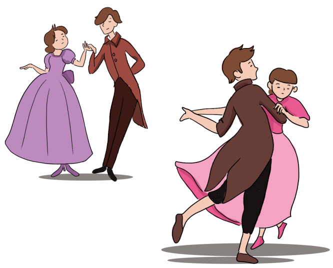
**2.** Chuyện kể rằng có một người khi gặp nhà triết học và toán học Hy–Lạp Pythagoras đã hỏi ông: "Bây giờ là mấy giờ?" Pythagoras đã trả lời "Cho đến hết ngày, còn lại hai lần của hai phần năm khoảng thời gian đã trôi qua từ lúc bắt đầu ngày". Nghe vậy, người đó chịu không thể nghĩ ra ngay được lúc họ gặp nhau là mấy giờ. Em có thể giúp trả lời lúc đó là mấy giờ được không?

*Lời giải.* Gọi $x$ là thời gian (tính theo giờ) đã trôi qua từ lúc bắt đầu ngày. Khi đó ta có hệ thức sau theo câu trả lời của Pythagoras: $24-x=4/5x$. Suy ra $x=40/3$ (giờ), có nghĩa là 13 giờ 20 phút. Vậy người đó đã gặp Pythagoras lúc 13 giờ 20 phút.

**3.** Một tháng trước bà Hoa ra chợ mua một cân khoai tây, một cân thịt và một chục trứng. Chủ nhật vừa rồi, khoai tây tăng lên gấp 3, thịt gấp 4 lần còn trứng đắt gấp 5 lần, nên bà Hoa phải trả 600 nghìn cho từng ấy món hàng như lần thứ nhất. Hôm nay thì khoai lại đắt gấp 6 lần so với tháng trước, thịt đắt gấp 5 lần còn trứng chỉ đắt gấp 4 lần nên bà Hoa lại phải trả 660 nghìn với cùng một lượng hàng. Hỏi bà Hoa đã trả bao nhiêu tiền cho lần mua thứ nhất?

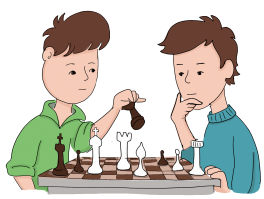
*Lời giải.* Giả sử vào tháng trước trong lần mua đầu tiên giá một cân khoai tây là $a$ (nghìn đồng), giá một cân thịt là $b$ (nghìn đồng) và giá một chục trứng là $c$ (nghìn đồng). Khi đó trong lần mua thứ nhất bà Hoa đã trả $a+b+c$ (nghìn), trong lần mua thứ hai là $3a+4b+5c=600$ và trong lần mua thứ ba là $6a+5b+4c=660$. Cộng hai đẳng thức cuối này, ta có $9(a+b+c)=1260$. Suy ra $a+b+c=140$. Vậy vào tháng trước bà Hoa chỉ phải trả có 140 nghìn đồng.

**4.** Trong một buổi dạ hội nọ mỗi quý ông đã hân hạnh khiêu vũ với ba quý bà, còn mỗi quý bà cũng đã khiêu vũ với ba quý ông. Em hãy chỉ ra rằng số quý ông và số quý bà tham gia dạ hội là bằng nhau.



*Lời giải.* Ta sẽ tính tổng tất cả các cặp đã khiêu vũ với nhau. Một mặt, tổng này sẽ bằng $3$ lần số các quý ông, mặt khác nó lại bằng $3$ lần số các quý bà. Vì thế số các quý ông bằng số các quý bà.

**5.** Sau khi kết thúc một giải thi cờ vua, ban tổ chức nhận thấy mỗi kỳ thủ tham gia đã có số trận thắng khi chơi bằng quân trắng bằng đúng tổng số trận thắng của toàn bộ các kỳ thủ còn lại khi chơi quân đen. Em hãy chỉ ra rằng tất cả các kỳ thủ tham gia thi đấu đã có số trận thắng là như nhau.



*Lời giải.* Các em có thể nhận thấy số trận thắng của mỗi kỳ thủ tham gia giải bằng đúng tổng số trận thắng của tất cả các kỳ thủ khi chơi bằng quân đen. Vì thế mọi kỳ thủ tham gia đã có số trận thắng bằng nhau.

**6.** Vào một ngày Chủ nhật nọ, Vinh và người em trai nhỏ tuổi hơn là Minh đạp hai chiếc xe tới hiệu sách trung tâm cách nhà vài cây số. Tại đó mỗi người chọn mua một cuốn sách quý mà nhóm bạn bè cũ đang bàn luận khen ngợi thường xuyên mấy năm nay trên Facebook. Mỗi người đều lấy tổng tất cả các chữ số của tất cả các trang sách mình đã mua và nhận thấy rằng số đó bằng năm sinh của mình. Vậy ai trong số hai anh em Vinh và Minh đang đi học lớp bồi dưỡng Toán cho học sinh phổ thông nhỉ?

*Lời giải.* Trước tiên ta tính tổng chữ số của tất cả các số từ $1$ tới $99$. Nhận thấy rằng mỗi chữ số, trừ chữ số $0$ đều xuất hiện $10$ lần ở hàng chục, và cũng $10$ lần ở hàng đơn vị, nghĩa là $20$ lần tổng cộng. Do $1+2+\cdots+9=45$, nên tổng này bằng $900$. Tổng các chữ số của các số từ $100$ tới $199$ sẽ lớn hơn tổng trước là $100$. Vì thế tổng các chữ số của các số từ $1$ tới $199$ bằng $1900$. Vì vậy ta xét một vài trường hợp sau.

| Số trang sách | Tổng các chữ số |
|---|---|
| 200 | $1900+2=1902$ |
| 202 | $1902+3+4=1909$ |
| 204 | $1909+5+6=1920$ |
| 206 | $1920+7+8=1935$ |
| 208 | $1935+9+10=1954$ |
| 210 | $1954+11+3=1968$ |
| 212 | $1968+4+5=1977$ |
| 214 | $1977+6+7=1990$ |
| 216 | $1990+8+9=2007$ |
| 217 | $2007+10=2017$ |
| 218 | $2017+11=2028$ |

Các em thấy ngay chỉ có người sinh năm $2007$ trong số hai anh em mới có thể là học sinh phổ thông. Người đó cũng không thể là anh, vì nếu vậy người em trai sinh năm $2017$ đến giờ mới có $5$ tuổi không thể tự đi xe đạp vài cây số để mua sách dày hơn hai trăm trang và về nhà tự làm tính cộng hết từng đó chữ số, hơn nữa lại có nhóm bạn bè cũ trên Facebook bàn luận về cuốn sách tới mấy năm rồi. Vì vậy các em kết luận được người sinh năm $2007$ là em và có tên là Minh.

# VIEWING ANIMALS VIA VENN DIAGRAM

NGÔ TRUNG HIẾU

It is a beautiful and blossoming Spring day. Tom and Ken are visiting the National Zoo in Washington, D.C.

As they eagerly walk through the entrance, Tom says: "The National Zoo is currently home to about 2,100 animals; they comprise hundreds of species. In the zoo, the species need an environment that resembles their natural habitat as closely as possible. The animals must be accommodated to a lifestyle similar to their wild counterparts."

"Oh I see. If they climb, they get trees or rocks. If they swim, they are in ponds, lakes and rivers. If they like to burrow, they own caves and tunnels. If they fly, they already have the sky." Ken replies excitedly.

"Beautiful! The terrains are designed to make the animals feel secure as well. Some animals are tamed: giraffes like visitors watching and feeding them. Some animals don't like to see the crowd. These hermitian animals like leopards need a jungle where they can retreat from humans. In order to protect those creatures and conserve wildlife, zoologists must study Nature very well." Tom continues.

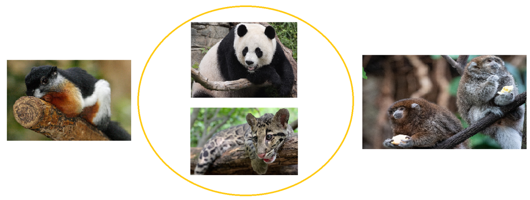
"From the brochure, we can learn valuable scientific information and classifications. Can you tell which creatures are sociable and which animals are solitary?" Tom asks.

"Well, let's see." Ken takes out the brochure. He reads out loud:

– Sociable: squirrels, primates, and so on.

– Solitary: leopards, giant pandas, and so on.

Tom nods: "Wonderful! To express and see better, you can draw a circle like this. Put those solitary inside the circle and those sociable outside of the circle. This is called a *Venn diagram*."



Tom continues: "In math, we call this circle a set: the 'solitary' set consisting of solitary species. The hermitian creatures inside the circle are called *elements* of the 'solitary' set. The tamed and sociable animals outside of the circle are not elements of the 'solitary' set."

Ken listens attentively: "That's cool. So if I want to classify animals by their habitats, I can draw a Venn diagram of 3 circles. One for landscapes, one for water, and one for the sky. The mammals live on land. The fish swim in water. The birds fly high." Ken replies.

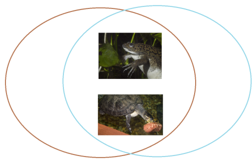
Tom slows down to emphasize: "Perfect! And you have 3 sets: the set of 'on–land' animals, the set of 'aquatic' animals, and the set of 'on–sky' animals. Does it make sense?"

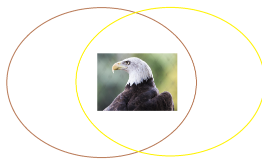
"It is as clear as day." Ken answers, full of smiles.

As they move on, Tom says: "And here are some fun facts. Amphibians, like turtles and frogs, live both on grasslands and in the lakes. So they belong to both the on–land set and the aquatic set. You can draw to express the overlap."

"Really? There are creatures that can live in both environments!" Ken is surprised.

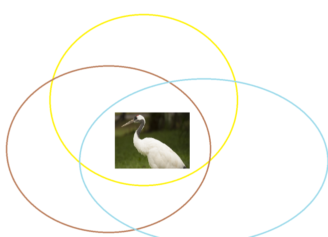
Tom gives another example: "Not just that! The bald eagles symbolize the national bird of the Americans. They hunt for fishes near the water surface and also hunt over grasslands. They belong to both ecosystems: the sky and the land."





Tom continues: "Those overlapping areas are called *intersections* of two sets. If you take all animals in two circles, the sky and the land say, you have a much bigger set of animals. You are thinking of all animals inhabiting either landscapes or the sky. Math lovers call it the *union* of two sets."

Tom tries to conclude: "Red–crowned cranes are found in Russia, China, Mongolia and Japan. In Japan, they forage regularly on pasturelands. They are also aquatic: they feed and nest in rivers or marshes with relatively deep water. They can fly well and migrate in flocks. These cranes inhabit all 3 ecosystems: land, water and sky."



Tom: "In the large, the union of these 3 sets is called the *total set*."

Ken's voice is filled with happiness: "That is our beloved Earth!"

Tom: "Voilà!"

Ken: "Can we start with the Asia Trail? I can't wait to see the cute giant pandas!"

"Ok, let's go!"

The above article is meant to be an introduction to Venn diagram for children in early Grades (such as Grades 1, 2 and 3) who have not met this concept before.

Photo source: https://nationalzoo.si.edu/

## Vocabulary

### Natural sciences

species: (n) giống loài
habitat: (n) môi trường sống
ecosystem: (n) hệ sinh thái
symbolize: (v) biểu tượng
burrow: (v) đào hang
terrain: (n) địa hình
solitary: (adj) đơn độc
sociable: (adj) bầy đàn
aquatic: (adj) dưới nước
grassland: (n) đồng cỏ
pastureland: (n) thảo nguyên
feed: (v) nuôi, kiếm ăn
hunt: (v) săn mồi
inhabit: (v) sinh sống
nest: (v) làm tổ
migrate: (v) di cư
flock: (n) đàn, bầy
amphibian: (n) động vật lưỡng cư
crane: (n) con hạc / con sếu
eagle: (n) đại bàng
frog: (n) con ếch
leopard: (n) con báo
monkey: (n) con khỉ
panda: (n) gấu trúc
squirrel: (n) con sóc
turtle: (n) con rùa

### Mathematics

Venn diagram: (n) sơ đồ Venn / biểu đồ Venn
set: (n) tập hợp
intersection of 2 sets: (n) giao của 2 tập hợp
union of 2 sets: (n) hợp của 2 tập hợp
total set: (n) tập hợp tổng
concept: (n) khái niệm

- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ $B$, $A$, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ $B$ không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ $A$ không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P701–P710: trước ngày 15/6/2023.

## THÁCH THỨC KỲ NÀY

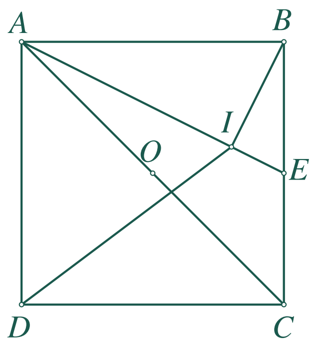
**P701.** (Mức $B$) Một chiếc hộp đựng một số viên bi, gồm bi xanh và bi đỏ. Biết rằng, số bi đỏ ít hơn số bi xanh; tổng của số bi xanh và hai lần số bi đỏ lớn hơn 24; tổng của số bi đỏ và hai lần số bi xanh nhỏ hơn 28. Hỏi, trong hộp có bao nhiêu viên bi xanh và bao nhiêu viên bi đỏ?

*Đăng Hải, Hà Nội*

**P702.** (Mức $B$) Xét các số nguyên dương $a, b, n$, với $a < n$. Chứng minh rằng, nếu $\dfrac{an^2+1}{bn+1}$ là một số nguyên thì $b = an$.

*Trích Đề thi VMTC 2022–Vòng 2–Khối lớp 8*

**P703.** (Mức $B$) Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là $O$. Gọi $E$ là trung điểm của $BC$ và $I$ là hình chiếu vuông góc của $B$ trên $AE$. Chứng minh rằng, phân giác của góc $\angle IDC$ đi qua trung điểm của $OC$.




*Bằng Linh, Phú Thọ (st)*

**P704.** (Mức $B$) Điền vào mỗi ô vuông con của bảng ô vuông kích thước $20 \times 22$ một số nguyên dương không vượt quá $10$, sao cho hai số được điền ở hai ô có đỉnh chung nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng, có ít nhất $74$ ô vuông con được điền số như nhau.

*Trích Đề thi VMTC 2022–Vòng 2–Khối lớp 9*

**P705.** (Mức $B$) Cho hai số nguyên dương $m,n$ thỏa mãn:

– $m$ không chia hết cho $101$.

– Tồn tại $50$ ước dương của $n$, mà số dư trong các phép chia $50$ ước này cho $101$ là: $51,52,53,\ldots,100$.

Chứng minh rằng, tồn tại ước dương $d$ của $n^2$, mà $m-d$ chia hết cho $101$.

*Trích Đề thi VMTC 2022–Vòng 2–Khối lớp 9*

**P706.** (Mức $B$) Cho $a,b,c$ là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2+3}{(a^3+b^3)(a^3+c^3)}}+\sqrt{\frac{b^2+3}{(b^3+c^3)(b^3+a^3)}}+\sqrt{\frac{c^2+3}{(c^3+a^3)(c^3+b^3)}}\leq 3.$$

*Hoàng Ngọc Minh, Hà Nội*

**P707.** (Mức $A$) Chứng minh rằng, với mỗi số nguyên $a$, tồn tại số thực $x$, sao cho

$$a=\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x\sqrt{2}\right].$$

*Trần Nam Dũng, Tp. Hồ Chí Minh*

**P708.** (Mức $A$) Tìm số thực $M$ lớn nhất sao cho bất đẳng thức

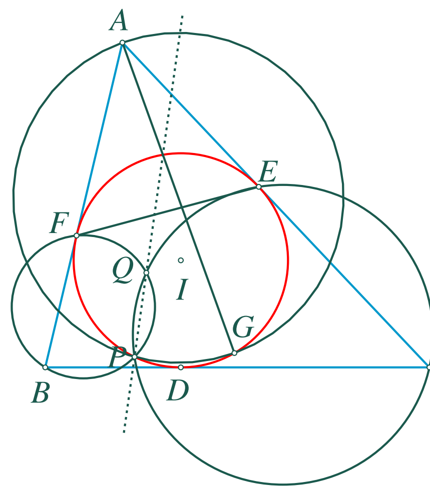
$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}>M$$

luôn đúng với mọi bộ ba số thực không âm $(a,b,c)$ thoả mãn

$$a+b+c=ab+bc+ca>0.$$

*Nguyễn Tuấn Anh, Đồng Tháp*

**P709.** (Mức $A$) Cho tam giác không cân $ABC$ ngoại tiếp đường tròn $(I)$. Gọi $D,E,F$ lần lượt là tiếp điểm của $(I)$ với $BC,CA,AB$. Qua $D$ kẻ đường thẳng song song với $EF$, cắt $(I)$ tại điểm thứ hai $G$ (khác $D$). Đường tròn đường kính $AG$ cắt $(I)$ tại điểm thứ hai $P$ (khác $G$). Đường tròn ngoại tiếp các tam giác $BPF$ và $CPE$ cắt nhau tại $Q$ (khác $P$). Chứng minh rằng $PQ,AG$ cắt nhau tại một điểm nằm trên $(I)$.




*Lê Hoài Bắc, Bà Rịa–Vũng Tàu (st)*

**P710.** (Mức $A$) Cho $a$ là số nguyên dương không vượt quá $7$. Chứng minh rằng, tồn tại số nguyên $b$ sao cho:

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{k}{a}\right]=\left[\frac{(2n+b)^2}{8a}\right]$$

với mọi số tự nhiên $n$.

*Phạm Công Tài, Hà Nội (st)*

## GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

**P671.** (Mức $B$) Một hình chữ nhật được chia thành $9$ hình chữ nhật con như hình vẽ. Số ghi ở giữa mỗi hình chữ nhật con bằng chu vi của hình chữ nhật ấy. Biết rằng $c$ là một số nguyên khác $2,3,4,5$; hãy tìm $a,b,c,d,e$.

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | 4 | $b$ |
| 2 | $c$ | 3 |
| $d$ | 5 | $e$ |

**Lời giải** (*dựa theo lời giải của bạn Hà Mạnh Hùng, lớp 8A, trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, Tp. Hà Nội*).

Trước hết, ta có Nhận xét đơn giản sau:

***Nhận xét.*** Nếu một hình chữ nhật được phân chia thành bốn hình chữ nhật I, II, III, IV như ở hình dưới đây, thì tổng chu vi của hai hình chữ nhật I và IV bằng tổng chu vi của hai hình chữ nhật II và III.

| | |
|---|---|
| I | III |
| III | IV |

Theo Nhận xét trên, từ các giả thiết của bài ra về chu vi của 9 hình chữ nhật con, ta có:

$$\begin{cases} a+c=4+2=6 & (1)\\ b+c=4+3=7 & (2)\\ c+e=3+5=8 & (3)\\ c+d=2+5=7. & (4)\end{cases}$$

Từ (1), do $a>0$, suy ra $0<c<6$. Mà $c$ là một số nguyên, khác 2, 3, 4, 5 (giả thiết), nên $c=1$. Từ đây và (1), (2), (3), (4), lần lượt suy ra, $a=61=5, b=71=6, e=81=7, d=71=6$.

Vậy, $a=5, b=6, c=1, d=6, e=7$.

**Bình luận và Nhận xét**

Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được, rất tiếc, có một lời giải không được coi là lời giải hoàn chỉnh, do người giải bài vẫn đang dang dở trong các lập luận lý giải cho kết quả tìm được.

**Lê Huy**

**P672.** (Mức *B*) Cho $x$ và $y$ là các số nguyên dương phân biệt thoả mãn

$$2023x^{2023}+999y^{2023}$$

chia hết cho $x+y$. Chứng minh rằng $x+y$ là hợp số.

**Lời giải** (*phỏng theo Đáp án của bài toán*).

Ta có:

$$\begin{aligned}&2023x^{2023}+999y^{2023}\\ &=999\left(x^{2023}+y^{2023}\right)+2^{10}\cdot x^{2023}.\end{aligned}$$

Do 2023 là số lẻ, nên $\left(x^{2023}+y^{2023}\right)\vdots(x+y)$. Vì thế, từ giả thiết của bài toán và (1), suy ra

$$2^{10}\cdot x^{2023}\vdots(x+y).$$

Vì $x, y$ là hai số nguyên dương phân biệt, nên $x+y\geq 3>1$. Do đó, $x+y$ hoặc là số nguyên tố lẻ, hoặc là hợp số. (3)

Nếu $x+y$ là số nguyên tố lẻ thì $\left(2^{10}, x+y\right)=1$. Vì thế, từ (2) ta có

$$x^{2023}\vdots(x+y).$$

Mà $x+y$ là số nguyên tố nên $x\vdots(x+y)$. Suy ra, $x\geq x+y$ (do $x, x+y\in\mathbb{N}^*$), là điều vô lý (do $y>0$). Vì vậy, $x+y$ không thể là số nguyên tố lẻ. Từ đây và (3) suy ra, $x+y$ là hợp số.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

**Bình luận và Nhận xét**

**1.** Trong lời giải trên, ta đã sử dụng kết quả rất quen biết sau:

"Với mọi $n\in\mathbb{N}$, với mọi $a.b\in\mathbb{Z}$, mà $a+b\neq 0,\pm 1$, luôn có $\left(a^{2n+1}+b^{2n+1}\right)\vdots(a+b)$."

Các bạn đọc chưa biết kết quả trên, có thể dễ dàng chứng minh được kết quả đó, bằng cách sử dụng phân tích của $a^{2n+1}+b^{2n+1}$ thành thừa số.

**2.** Tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều mắc *lỗi logic* sau: Khẳng định, với $a\in\mathbb{N}^*$, nếu $a$ không là số nguyên tố thì $a$ là hợp số.

Lưu ý rằng, 1 *không phải là số nguyên tố, và cũng không phải là hợp số*! Vì thế, để từ "$a\in\mathbb{N}^*$ và $a$ không là số nguyên tố" có thể suy ra "$a$ là hợp số", cần có thêm điều kiện $a>1$.

Người chấm bài đã châm chước lỗi trên, khi đánh giá tính đúng và tính hoàn chỉnh của lời giải.

**3.** Với sự châm chước nêu trên, trong số các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, vẫn có một số lời giải không được chấp nhận là lời giải hoàn chỉnh, do người giải bài không có các giải thích cần thiết cho một số sự kiện thiết yếu của lời giải.

**Lưu Thị Thanh Hà**

**P673.** (Mức $B$) Chứng minh rằng,

$$A=\sqrt[3]{1^3+1}+\sqrt[3]{2^3+1}+\cdots+\sqrt[3]{2023^3+1}$$

không phải là số nguyên.

**Lời giải** (*dựa theo lời giải của bạn Hà Mạnh Hùng, lớp 8A, trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, Tp. Hà Nội*).

Đặt $A = \sqrt[3]{1^3+1} + \sqrt[3]{2^3+1} + \cdots + \sqrt[3]{2023^3+1}$, và $B = 1+2+\cdots+2023$.

Vì với mọi $\in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[3]{n^3+1} > \sqrt[3]{n^3} = n$, nên $A > B$. (1)

Tiếp theo, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, do $n^2+n < 3n^2$, nên

$$n^3+1<n^3+\frac{3n^2}{n(n+1)}<\left(n+\frac{1}{n(n+1)}\right)^3.$$

Suy ra

$$\sqrt[3]{n^3+1}<n+\frac{1}{n(n+1)}=n+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Vì thế

$$\begin{aligned}A &< B+\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\right.\\ &\qquad \left.+\left(\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024}\right)\right)\\ &= B+\left(1-\frac{1}{2024}\right) < B+1. \qquad (2)\end{aligned}$$

Từ (1) và (2), ta có $B < A < B+1$. Mà $B$ là số nguyên, nên $A$ không là số nguyên.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

**Bình luận và Nhận xét**

**1.** Ngoài cách đã nêu ở Lời giải trên, còn có thể chứng minh $A < B+1$ (theo ký hiệu ở Lời giải) bằng cách sử dụng đánh giá sau:

$$\sqrt[3]{n^3+1} < n+\frac{1}{3n^2}, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

**2.** Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc có một lời giải sai (do người giải bài đã tính sai tổng các số tự nhiên từ 2 đến 2024) và một lời giải *không* được chấp nhận là đầy đủ và chính xác (do người giải bài đã bỏ qua quá nhiều các tính toán cụ thể cần thiết).

**Lê Huy**

**P674.** (Mức $B$) Ở mỗi ô vuông con của bảng ô vuông $8\times 8$ được điền một số $+1$, hoặc một số $-1$, sao cho tổng của bốn số ở một bảng con $2\times 2$ tuỳ ý bằng $2$, hoặc $-2$. Chứng minh rằng, trong bảng số thu được có hai hàng giống nhau.

**Lời giải** (*của người chấm bài*).

Ở lời giải này:

– $(x_1,x_2,\ldots,x_8)$ ký hiệu hàng, mà các ô vuông con của nó, lần lượt từ trái qua phải, được điền các số $x_1,x_2,\ldots,x_8$.

– $\begin{pmatrix} xu \\ yv \end{pmatrix}$ ký hiệu bảng $2\times 2$, mà các ô vuông con của nó, lần lượt từ trên xuống dưới, từ trái qua phải, được điền các số $x,y,u,v$.

– Cặp gồm hàng thứ $m$ và hàng thứ $n$ sẽ được gọi vắn tắt là *cặp* $m-n$.

Ta có các Nhận xét sau:

**Nhận xét 1.** Giả sử các ô vuông con của một bảng con $2\times 2$ tùy ý của bảng $8\times 8$ đã cho, theo thứ tự từ trên xuống dưới, từ trái qua phải, lần lượt được điền các số $a,b,c,d$ (xem Hình 1).

| | |
|---|---|
| $a$ | $c$ |
| $b$ | $d$ |

*Hình* 1.

Khi đó: – Nếu $a=b$ thì $c=-d$;

– Nếu $a = -b$ thì $c = d$.

*Chứng minh.* Theo giả thiết của bài ra, $a, b, c, d \in \{+1; -1\}$ và $(a+b+c+d) \in \{2; -2\}$. Suy ra, trong bốn số đó, hoặc có ba số bằng $1$ và số còn lại bằng $-1$, hoặc có ba số bằng $-1$ và số còn lại bằng $1$. Do đó, $abcd = -1$. Vì vậy:

– Nếu $a = b$ thì $cd = -1$ (do $ab = a^2 = 1$); suy ra, $c = -d$.

– Nếu $a = -b$ thì $cd = 1$ (do $ab = -a^2 = -1$); suy ra, $c = d$.

Nhận xét $1$ được chứng minh.

**Nhận xét 2.** Giả sử $(x_1, x_2, \ldots, x_8)$ và $(y_1, y_2, \ldots, y_8)$ là hai hàng liên tiếp của bảng $8 \times 8$ đã cho (xem Hình $2$).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ |
| $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ | $y_8$ |

*Hình* 2.

Khi đó:

– Nếu $x_1 = y_1$ thì $x_i = y_i$ với mọi $i \in \{1; 3; 5; 7\}$, và $x_i = -y_i$ với mọi $i \in \{2; 4; 6; 8\}$;

– Nếu $x_1 = -y_1$ thì $x_i = y_i$ với mọi $i \in \{2; 4; 6; 8\}$, và $x_i = -y_i$ với mọi $i \in \{1; 3; 5; 7\}$.

*Chứng minh.*

– Giả sử $x_1 = y_1$. Khi đó, áp dụng Nhận xét $1$, lần lượt, cho $\begin{pmatrix} x_1x_2 \\ y_1y_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2x_3 \\ y_2y_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_3x_4 \\ y_3y_4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_4x_5 \\ y_4y_5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_5x_6 \\ y_5y_6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_6x_7 \\ y_6y_7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_7x_8 \\ y_7y_8 \end{pmatrix}$, ta được:

$$x_2 = -y_2, x_3 = y_3, x_4 = -y_4, x_5 = y_5,$$
$$x_6 = -y_6, x_7 = y_7, x_8 = -y_8.$$

– Giả sử $x_1 = -y_1$. Khi đó, áp dụng Nhận xét $1$, lần lượt, cho bảy bảng con $2 \times 2$ vừa nêu trên, ta được:

$$x_2 = y_2, x_3 = -y_3, x_4 = y_4, x_5 = -y_5,$$
$$x_6 = y_6, x_7 = -y_7, x_8 = y_8.$$

Nhận xét $2$ được chứng minh.

Ta gọi cặp gồm hai hàng liên tiếp, $(x_1, x_2, \ldots, x_8)$ và $(y_1, y_2, \ldots, y_8)$, là một *cặp xanh*, nếu $x_1 = y_1$; và gọi cặp gồm hai hàng đó là một *cặp đỏ*, nếu $x_1 = -y_1$.

Trong phần trình bày dưới đây, thứ tự của các hàng được tính từ trên xuống dưới.

Với bảng $8 \times 8$ đã cho, xảy ra đúng một trong hai trường hợp sau:

◇ *Trường hợp* $1$: Tồn tại ba hàng liên tiếp mà cặp $1-2$ và cặp $2-3$ là hai cặp cùng màu.

Giả sử $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ là hàng thứ nhất trong ba hàng đó. Khi đó, theo Nhận xét $2$, ba hàng này sẽ hoặc là ba hàng ở Hình $3$, hoặc là ba hàng ở Hình $4$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ |
| $a_1$ | $-a_2$ | $a_3$ | $-a_4$ | $a_5$ | $-a_6$ | $a_7$ | $-a_8$ |
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ |

*Hình* 3. *Cặp* $1-2$ *và cặp* $2-3$ *cùng là cặp xanh.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ |
| $-a_1$ | $a_2$ | $-a_3$ | $a_4$ | $-a_5$ | $a_6$ | $-a_7$ | $a_8$ |
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ |

*Hình* 4. *Cặp* $1-2$ *và cặp* $2-3$ *cùng là cặp đỏ.*

Nhận thấy, hàng thứ nhất và hàng thứ ba ở mỗi hình (trong hai hình, $3$ và $4$) là hai hàng giống nhau. Điều này cho thấy, trong bảng $8 \times 8$ đã cho có hai hàng giống nhau.

◇ *Trường hợp* $2$: Với ba hàng liên tiếp bất kỳ, cặp $1-2$ và cặp $2-3$ là hai cặp khác màu.

Xét năm hàng đầu tiên của bảng $8 \times 8$ đã cho.

Giả sử $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ là hàng thứ nhất trong năm hàng đó.

Xảy ra một trong hai khả năng sau:

– *Khả năng* $1$: Cặp $1-2$ là cặp xanh, và cặp $2-3$ là cặp đỏ.

Khi đó, từ giả thiết "khác màu" suy ra, cặp $3-4$ là cặp xanh, và cặp $4-5$ là cặp đỏ.

Vì thế, ở khả năng này, theo Nhận xét 2, năm hàng đầu tiên của bảng $8 \times 8$ đã cho là năm hàng dưới đây (xem Hình 5):

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ |
| $a_1$ | $-a_2$ | $a_3$ | $-a_4$ | $a_5$ | $-a_6$ | $a_7$ | $-a_8$ |
| $-a_1$ | $-a_2$ | $-a_3$ | $-a_4$ | $-a_5$ | $-a_6$ | $-a_7$ | $-a_8$ |
| $-a_1$ | $a_2$ | $-a_3$ | $a_4$ | $-a_5$ | $a_6$ | $-a_7$ | $a_8$ |
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ |

*Hình* 5.

– *Khả năng* 2: Cặp $1 - 2$ là cặp đỏ, và cặp $2 - 3$ là cặp xanh.

Khi đó, từ giả thiết "khác màu" suy ra, cặp $3 - 4$ là cặp đỏ, và cặp $4 - 5$ là cặp xanh.

Vì thế, ở khả năng này, theo Nhận xét 2, năm hàng đầu tiên của bảng $8 \times 8$ đã cho là năm hàng dưới đây (xem Hình 6):

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ |
| $-a_1$ | $a_2$ | $-a_3$ | $a_4$ | $-a_5$ | $a_6$ | $-a_7$ | $a_8$ |
| $-a_1$ | $-a_2$ | $-a_3$ | $-a_4$ | $-a_5$ | $-a_6$ | $-a_7$ | $-a_8$ |
| $a_1$ | $-a_2$ | $a_3$ | $-a_4$ | $a_5$ | $-a_6$ | $a_7$ | $-a_8$ |
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ |

*Hình* 6.

Nhận thấy, hàng thứ nhất và hàng thứ năm ở mỗi hình, trong hai hình 5 và 6, là hai hàng giống nhau. Điều này cho thấy, dù khả năng nào xảy ra, trong bảng $8 \times 8$ đã cho đều có hai hàng giống nhau.

Kết quả xét hai trường hợp trên đây cho ta điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

**Bình luận và Nhận xét**

**1.** Lời giải trên được trình bày theo tinh thần giúp bạn đọc cảm nhận, hình dung được cách tiếp cận để tìm ra lời giải cho bài đã ra.

**2.** Lời giải trên cho thấy, kết quả của bài đã ra không thay đổi, khi thay bảng $8 \times 8$ bởi bảng $m \times n$, với $m, n$ là các số nguyên dương tùy ý, thỏa mãn $m \geq 5$ và $n \geq 2$.

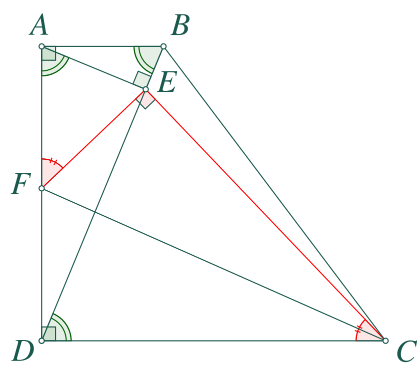
**3.** Rất tiếc, cho tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí vẫn chưa nhận được lời giải nào, từ bạn đọc.

**Nguyễn Khắc Minh**

**P675.** (Mức $B$) Cho hình thang $ABCD$ vuông tại $A$ và $D$. Trên tia $AD$ lấy điểm $F$ sao cho $AF \cdot AD = AB \cdot CD$. Gọi $E$ là hình chiếu vuông góc của $A$ trên $BD$. Chứng minh rằng $\angle CEF = 90°$.

**Lời giải** (*của người chấm bài*).

Từ các giả thiết của bài toán suy ra, $F \not\equiv A$ và $E$ nằm giữa $B$ và $D$.




*Hình* 1.

Vì $DA \perp AB$ và $AE \perp BD$ (giả thiết), nên

$$\angle ABD = \angle EAD$$

(hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc). Do đó, tam giác vuông (tại $A$) $ABD$ đồng dạng với tam giác vuông (tại $E$) $EAD$. Vì vậy

$$\frac{AB}{AD} = \frac{EA}{ED}. \tag{1}$$

Từ giả thiết về vị trí của điểm $F$ trên tia $AD$, ta có:

$$\frac{AF}{CD} = \frac{AB}{AD}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2), suy ra $\frac{EA}{ED} = \frac{AF}{CD}$; do đó

$$\frac{AE}{AF} = \frac{DE}{DC}. \tag{3}$$

Vì $AF \perp DC$ và $AE \perp DE$ (giả thiết), nên

$$\angle EAF = \angle EDC \tag{4}$$

(hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc).

Từ (3) và (4), suy ra $\Delta EAF \sim \Delta EDC$. Do vậy

$$\angle AEF = \angle CED. \qquad (5)$$

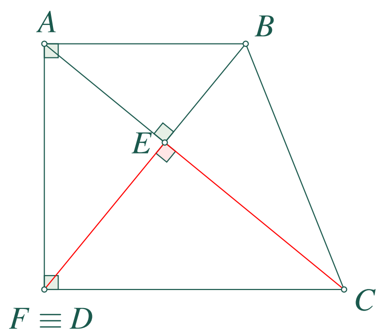
Xảy ra hai trường hợp sau:

◇ *Trường hợp* 1: $AC \perp BD$ (xem Hình 2).

Khi đó, ba điểm $A, E, C$ thẳng hàng, và $\angle CED = 90^\circ$. Do đó, theo (5), ta có:

$$\angle AEF = 90^\circ = \angle AED$$

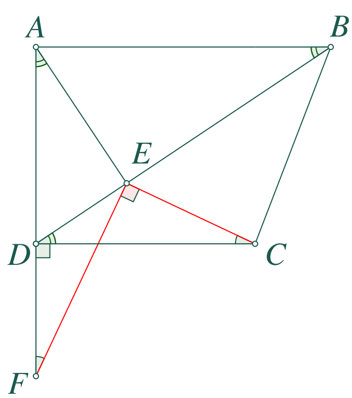
suy ra, $F$ thuộc đường thẳng $ED$. Mà theo giả thiết, $F$ thuộc tia $AD$, nên $F$ là giao điểm của $ED$ và tia $AD$. Vì vậy, $F \equiv D$. Do đó, $\angle CEF = \angle CED = 90^\circ$.




*Hình* 2.

◇ *Trường hợp* 2: *AC không vuông góc BD.*

Khi đó, $F \not\equiv D$. Do đó, hoặc $F$ nằm giữa $A$ và $D$ (xem Hình 1), hoặc $F$ nằm trên tia đối của tia $DA$ (xem Hình 3).




*Hình* 3.

– Nếu $F$ nằm giữa $A$ và $D$ thì tia $ED$ nằm giữa hai tia $EF$ và $EC$. Do đó

$$\begin{aligned}\angle CEF &= \angle CED + \angle DEF \\ &= \angle AEF + \angle DEF \text{ (do(5))} \\ &= \angle AED = 90^\circ.\end{aligned}$$

– Nếu $F$ nằm trên tia đối của tia $DA$ thì tia $EF$ nằm giữa hai tia $ED$ và $EC$. Do đó

$$\begin{aligned}\angle CEF &= \angle CED - \angle DEF \\ &= \angle AEF - \angle DEF \text{ (do(5))} \\ &= \angle AED = 90^\circ.\end{aligned}$$

Kết quả xét hai trường hợp trên đây cho ta điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

**Bình luận và Nhận xét**

**1.** Ngoài cách "tính góc", được trình bày ở Lời giải trên, còn có thể giải bài đã ra bằng cách "sử dụng tứ giác nội tiếp"; tóm tắt như sau:

– Chứng minh $BF \perp AC$. Từ đó, gọi $K$ là giao điểm của $BF$ và $AC$, ta có $D, F, K, C$ là bốn điểm cùng nằm trên đường tròn đường kính $CF$. $(*)$

– Chứng minh

$$BK \cdot BF = BE \cdot BD. \qquad (**)$$

Từ đó suy ra, bốn điểm $K, F, D, E$ cùng nằm trên một đường tròn. $(***)$

– Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Lưu ý rằng, *từ* $(**)$ *có thể suy ra* $(***)$ *khi và chỉ khi hai đường thẳng* $KF$ *và* $ED$ *cắt nhau tại* $B$. Do đó, điều "suy ra" vừa nêu *chỉ đúng* trong trường hợp $AC$ *không* vuông góc $BD$. Vì vậy, lời giải theo cách nêu trên, mà *không* xét trường hợp $AC \perp BD (\Leftrightarrow F \equiv D)$ *không thể* được coi là lời giải đúng.

**2.** Tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, đều chỉ đúng cho trường hợp $F$ nằm giữa $A$ và $D$.

**Hạ Vũ Anh**

**P676.** (Mức $B$) Cho $a, b, c$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\le\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{3}{2}}.$$

**Lời giải** (*dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Thị Bảo Tiên, lớp* 11 *Toán* 1, *trường THPT chuyên Lương Văn Chánh, tỉnh Phú Yên*).

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\right)^2$$
$$\le(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)$$
$$=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+3. \quad (1)$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3}{2}\le\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

Thật vậy, ta có:

(2)

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}-\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a}-\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow\frac{ca}{b(b+c)}+\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}\ge\frac{3}{2}. \quad (3)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz và bất đẳng thức rất quen biết

$(x+y+z)^2\ge3(xy+yz+zx)\,\forall x,y,z\in\mathbb{R}$,

với lưu ý $a,b,c>0$, ta có:

$$\frac{ca}{b(b+c)}+\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}$$
$$=\frac{(ca)^2}{abc(b+c)}+\frac{(ab)^2}{abc(c+a)}+\frac{(bc)^2}{abc(a+b)}$$
$$\ge\frac{(ca+ab+bc)^2}{2abc(a+b+c)}\ge\frac{3abc(a+b+c)}{2abc(a+b+c)}=\frac{3}{2}.$$

Bất đẳng thức (3) được chứng minh; do đó, (2) được chứng minh.

Từ (1) và (2) hiển nhiên suy ra bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu đề bài.

**Bình luận và Nhận xét**

**1.** Dễ dàng chứng minh được rằng, dấu "$=$" ở bất đẳng thức của đề bài xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**2.** Một cách vận dụng khác bất đẳng thức Cauchy – Schwarz đối với biểu thức ở vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu đề bài:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\right)^2$$
$$=\left(\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2ab}{(2a+b)(b+c)}}\right.$$
$$+\sqrt{\frac{b}{c}+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2bc}{(2b+c)(c+a)}}$$
$$\left.+\sqrt{\frac{c}{a}+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2ca}{(2c+a)(a+b)}}\right)^2$$
$$\le\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2ab}{(2a+b)(b+c)}\right.$$
$$\left.+\frac{2bc}{(2b+c)(c+a)}+\frac{2ca}{(2c+a)(a+b)}\right).$$

Từ đó, bằng cách chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{2ab}{(2a+b)(b+c)}+\frac{2bc}{(2b+c)(c+a)}$$
$$+\frac{2ca}{(2c+a)(a+b)}\le1,$$

bạn sẽ thu được một lời giải cho bài đã ra.

**3.** Tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

**Võ Quốc Bá Cẩn**

**P677.** (Mức $A$) Cho dãy số thực $(u_n)$ xác định bởi

$$u_n=\frac{C_{2n}^n-2022}{n^2},\quad n=1,2,3,\ldots.$$

$a)$ Chứng minh rằng $(u_n)$ là dãy tăng và không bị chặn trên.

$b)$ Tìm tất cả các số thực $\alpha$, sao cho dãy số $(x_n)$, xác định bởi

$$x_n=\frac{n^\alpha.u_n}{4^n},\quad n=1,2,3,\ldots,$$

có giới hạn hữu hạn khác 0, khi $n\to+\infty$.

**Lời giải** (*dựa theo lời giải của bạn Trần Minh Hoàng, lớp 10T1, trường THPT chuyên*

*Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh*).

*a*) Sử dụng công thức xác định dãy $(u_n)$ dễ dàng tính được $u_1 = -2020, u_2 = -504$. Do đó, $u_1 < u_2$ (1)

Với $n \geq 3$, ta có:

$$\frac{C_{2n}^n}{C_{2(n-1)}^{n-1}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(2n-2)!} = \frac{2(2n-1)}{n}.$$

Do đó

$$\frac{\frac{C_{2n}^n}{n^2}}{\frac{C_{2(n-1)}^{n-1}}{(n-1)^2}} = \frac{2(2n-1)(n-1)^2}{n^3} > 4\left(\frac{n-1}{n}\right)^3$$

$$\geq 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{27} > 1,$$

với mọi $n \geq 3$. Suy ra

$$\frac{C_{2n}^n}{n^2} > \frac{C_{2(n-1)}^{n-1}}{(n-1)^2} \forall n \geq 3.$$

Do đó

$$u_n = \frac{C_{2n}^n}{n^2} - \frac{2022}{n^2} > \frac{C_{2(n-1)}^{n-1}}{(n-1)^2} - \frac{2022}{(n-1)^2}$$

$$= u_{n-1} \quad \forall n \geq 3.$$

Từ (1) và (2) suy ra, $(u_n)$ là dãy tăng. (3)

Giả sử dãy $(u_n)$ bị chặn trên. Khi đó, $(u_n)$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Đặt $\lim u_n = L$.

Do $\lim \frac{2022}{n^2} = 0$ nên

$$L = \lim u_n = \lim \left(\frac{C_{2n}^n}{n^2} - \frac{2022}{n^2}\right) = \lim \frac{C_{2n}^n}{n^2}.$$

Suy ra

$$1 = \lim \frac{\frac{C_{2n}^n}{n^2}}{\frac{C_{2(n-1)}^{n-1}}{(n-1)^2}} = \lim \frac{2(2n-1)(n-1)^2}{n^3} = 4,$$

là điều vô lý. Vì vậy, dãy $(u_n)$ không bị chặn trên. (4)

(3) và (4) cho ta điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

*b*) Trước hết, nhắc lại rằng, với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, $(2n-1)!!$ ký hiệu tích của $n$ số nguyên dương lẻ đầu tiên và $(2n)!!$ ký hiệu tích của $n$ số nguyên dương chẵn đầu tiên.

Ta sẽ chứng minh rằng, dãy số $(s_n)$ xác định bởi

$$s_n = \frac{\sqrt{n} C_{2n}^n}{4^n}, n = 1, 2, \ldots,$$

có giới hạn hữu hạn khác 0, khi $n \to +\infty$.

Thật vậy, với mọi $n \geq 1$, ta có $s_n > 0$ và

$$s_n = \frac{\sqrt{n} C_{2n}^n}{4^n} = \sqrt{n} \cdot \frac{(2n)!}{4^n \cdot (n!)^2}$$

$$= \sqrt{n} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Suy ra

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{\sqrt{n+1}(2n+1)}{\sqrt{n}(2n+2)} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$$

$$> 1 \quad \forall n \geq 1.$$

Do đó, $(s_n)$ là một dãy dương tăng.

Hơn nữa, $(s_n)$ là một dãy bị chặn trên, do với mọi $n \geq 1$, ta có

$$s_n^2 = n \cdot \frac{((2n-1)!!)^2}{((2n)!!)^2}$$

$$< n \cdot \frac{(2n-1)!! \cdot (2n)!!}{(2n)!! \cdot (3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n+1))}$$

$$= \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2}.$$

Vì vậy, $(s_n)$ có giới hạn hữu hạn khác 0, khi $n \to +\infty$. Đặt $\lim s_n = S, S \neq 0$. (5)

Tiếp theo, với mọi $n \geq 1$, ta có:

$$x_n = \frac{n^\alpha \cdot u_n}{4^n} = n^{\alpha - \frac{5}{2}} \cdot \left(n^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{u_n}{4^n}\right)$$

$$= n^{\alpha - \frac{5}{2}} \cdot \frac{\sqrt{n}\left(C_{2n}^n - 2022\right)}{4^n}$$

$$= n^{\alpha - \frac{5}{2}} \left(s_n - 2022 \cdot \frac{\sqrt{n}}{4^n}\right). \quad (6)$$

Dễ thấy, $\lim \frac{\sqrt{n}}{4^n} = 0$. Từ đây và (5), suy ra

$$\lim \left(s_n - 2022 \cdot \frac{\sqrt{n}}{4^n}\right) = S \neq 0. \quad (7)$$

Từ (6) và (7), do $\lim n^{\alpha - \frac{5}{2}} = 1$ nếu $\alpha = \frac{5}{2}$, $\lim n^{\alpha - \frac{5}{2}} = 0$ nếu $\alpha < \frac{5}{2}$, và $\lim n^{\alpha - \frac{5}{2}} = +\infty$ nếu $\alpha > \frac{5}{2}$, suy ra, dãy $(x_n)$ có giới hạn hữu hạn khác 0 khi và chỉ khi $\alpha = \frac{5}{2}$.

**Bình luận và Nhận xét**

**1.** Bài đã ra là một bài toán khá cơ bản về khảo sát tính hội tụ của một dãy số.

**2.** Bằng các kiến thức giải tích ở bậc học cao hơn bậc phổ thông, ta chứng minh được rằng, $\lim s_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ($(s_n)$ là dãy số được định nghĩa trong lời giải trên).

**3.** Vấn đề đặt ra ở câu $b)$ là một vấn đề quan trọng trong Toán học: Tìm các dãy tương đương của một dãy số.

Ta nói rằng, dãy $(x_n)$ tương đương với dãy $(y_n)$, và viết $x_n \sim y_n$, nếu $\lim \frac{x_n}{y_n} = 1$.

Như vậy, kết quả của câu $b)$ và kết quả được nêu ở mục $2$ cho thấy $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 4^n \cdot n^{-\frac{5}{2}}$.

**4.** Trong số các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc, có hai lời giải sai ở câu $b)$, do người giải bài đã mắc những lỗi chuyên môn cơ bản.

**Trần Nam Dũng**

**P678.** (Mức $A$) Trong mặt phẳng, cho hai điểm $I, J$ cố định thoả mãn $IJ = 8$. Gọi $(S)$ là tập hợp các điểm $M$ sao cho ít nhất một trong hai đoạn thẳng $MI, MJ$ có độ dài không vượt quá $7$. Với $A, B, C$ là ba điểm không thẳng hàng thuộc $(S)$, chu vi tam giác $ABC$ lớn nhất là bao nhiêu?

**Lời giải** (*dựa theo Đáp án của bài toán*).

**Bình luận và Nhận xét**

**Hà Thanh**

**P679.** (Mức $A$) Có $100$ quả trứng, được xếp thành một vòng tròn. Gọi một quả bất kỳ, trong $100$ quả trứng đó, là quả thứ nhất; sau đó, theo chiều kim đồng hồ, lần lượt gọi các quả trứng tiếp theo là quả thứ $2$, quả thứ $3$, $\ldots$, quả thứ $100$. Người ta nhặt trứng theo quy tắc: đầu tiên, nhặt quả thứ hai; sau đó, theo chiều kim đồng hồ, cứ cách một quả lại nhặt một quả, cho đến khi nhặt được hết $100$ quả trứng. Hỏi quả trứng nhặt được ở lần cuối cùng là quả thứ mấy?

**Lời giải** (*dựa theo lời giải của các bạn Hà Mạnh Hùng, lớp 8A, trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, Tp. Hà Nội, và Trần Minh Hoàng, lớp 10T1, trường THPT chuyên Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh*).

Ta có Nhận xét sau:

***Nhận xét.*** Với cách nhặt trứng của đề bài, nếu số quả trứng trên vòng tròn bằng $2^n, n \in \mathbb{N}^*$ tùy ý, thì quả trứng nhặt được ở lần cuối cùng là quả thứ nhất.

*Chứng minh.* Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo $n$.

Với $n = 1$, kết luận của Nhận xét là hiển nhiên.

Giả sử kết luận của Nhận xét đã đúng với $n = k$.

Xét $n = k + 1$.

Khi đó, sau $2^k$ lần nhặt đầu tiên, số quả trứng còn lại trên vòng tròn bằng

$$2^{k+1} - 2^k = 2^k \text{ (quả)},$$

và quả trứng được nhặt ở lần thứ $2^k$ là quả thứ $2^{k+1}$.

Vì vậy, bắt đầu từ lần nhặt thứ $2^k + 1$, ta sẽ thực hiện việc nhặt, theo quy tắc của đề bài, $2^k$ quả trứng, với quả thứ nhất trong $2^k$ quả này chính là quả thứ nhất trong $2^{k+1}$ quả ban đầu. Do đó, theo giả thiết quy nạp, quả trứng được nhặt ở lần cuối cùng (lần thứ $2^{k+1}$) là quả thứ nhất trong $2^{k+1}$ quả ban đầu. Điều này cho thấy, kết luận của Nhận xét đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, Nhận xét được chứng minh.

*Trở lại bài toán.*

Dễ thấy, sau $36$ lần nhặt trứng đầu tiên, trên vòng tròn sẽ còn lại

$$100 - 36 = 64 = 2^6$$

quả trứng, và quả trứng được nhặt ở lần thứ $36$ là quả thứ $72$.

Vì vậy, bắt đầu từ lần nhặt thứ $37$, ta sẽ thực hiện việc nhặt, theo quy tắc của đề bài, $2^6$ quả trứng, với quả thứ nhất trong $2^6$ quả này là quả thứ $73$ trong $100$ quả ban đầu. Do đó, áp dụng Nhận xét cho $n = 6$, ta được: quả trứng được nhặt ở lần cuối cùng (lần thứ $100$) là quả thứ $73$ trong $100$ quả ban đầu.

**Bình luận và Nhận xét**

Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có hai lời giải không được chấp nhận là lời giải hoàn chỉnh, do người giải bài chỉ nêu ra các kết quả mang tính suy đoán, mà không có bất cứ lập luận nào chứng minh các suy đoán đó là đúng.

**Nguyễn Khắc Minh**

**P680.** (Mức $A$) Xác định tất cả các số nguyên $a$ sao cho: với mỗi số nguyên dương $k$, tồn tại số nguyên dương $n_k$ thoả mãn $2^k \mid n_k^{n_k} + a$.

**Lời giải** (*của người chấm bài*).

*Để thuận tiện cho việc theo dõi Lời giải của đông đảo đối tượng bạn đọc, chúng tôi nhắc lại một số ký hiệu toán học, được sử dụng trong Lời giải này:*

– Với $p$ là một ước nguyên tố của số nguyên dương $n$, $v_p(n)$ ký hiệu số mũ của $p$ trong phân tích chuẩn của $n$;

– Với $n$ là một số nguyên dương lớn hơn $1$, $\varphi(n)$ ký hiệu giá trị của Phi–hàm Euler tại $n$.

*Trở lại bài toán.*

• Trước hết, dễ thấy $a = 0$ là một số nguyên thỏa mãn yêu cầu đề bài.

• Xét số nguyên chẵn $a \neq 0$ tùy ý.

Giả sử $a$ là số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đặt $k_0 = v_2(|a|)$; do $a$ chẵn, khác $0$, nên $k_0 \geq 1$.

Theo đề bài, với mỗi số nguyên dương $k > k_0$, tồn tại số nguyên dương $n_k$ sao cho

$$2^k \left| n_k^{n_k} + a \right. . \qquad (1)$$

Vì $a$ là số chẵn, nên $n_k$ là số nguyên dương chẵn. Do đó, $v_2(n_k) \geq 1$. (2)

Ký hiệu $S$ là tập hợp tất cả các số $n_k^{n_k} + a$, $k = k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots$.

Giả sử tồn tại $k > k_0$, sao cho $v_2\left(n_k^{n_k}\right) \neq k_0$. Khi đó, nếu $n_k^{n_k} + a \neq 0$ thì từ (1) ta có

$$k_0 < k \leq v_2\left(\left|n_k^{n_k} + a\right|\right) = \min\left\{v_2\left(n_k^{n_k}\right), k_0\right\} \leq k_0,$$

là điều vô lý. Vì vậy, nếu $k > k_0$ và $n_k^{n_k} + a \neq 0$, thì

$$k_0 = v_2\left(n_k^{n_k}\right) = n_k \cdot v_2(n_k). \qquad (3)$$

Hiển nhiên, (3) cũng đúng khi $k > k_0$ và $n_k^{n_k} + a = 0$. Do vậy, (3) đúng với mọi $k > k_0$. (4)

Từ (2) và (4), suy ra

$$n_k \mid k_0 \ \forall k > k_0.$$

Do đó, $S$ là tập hữu hạn. (5)

Xét tập $U = \{u \in \mathbb{N}^* \mid \exists s \in S : u \mid s\}$.

Do (1) nên $2^k \in U$ với mọi $k > k_0$. Do đó, $U$ là tập vô hạn. (6)

Từ (5) và (6), suy ra $0 \in S$ (vì nếu ngược lại, $0 \notin S$ thì $U$ là tập hữu hạn); nghĩa là, tồn tại số nguyên dương $q > k_0$, sao cho $n_q^{n_q} + a = 0$, hay $a = -n_q^{n_q}$.

Như vậy, nếu số nguyên chẵn $a \neq 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $a$ có dạng $a = -m^m$, với $m$ là một số nguyên dương chẵn.

Ngược lại, giả sử $a$ là số có dạng vừa nêu trên. Khi đó, với mỗi số nguyên dương $k$, chọn $n_k = m$, hiển nhiên có $2^k \left| n_k^{n_k} + a \right.$.

Vì vậy, tất cả các số nguyên $a$ có dạng $a = -m^m$, với $m$ là một số nguyên dương chẵn, đều thỏa mãn yêu cầu đề bài.

• Xét số nguyên lẻ $a$ tùy ý.

Ta sẽ chứng minh Khẳng định sau:

***Khẳng định.*** Với mỗi số nguyên dương $k$, tồn tại số nguyên dương $n_k$ sao cho $2^k \left| n_k^{n_k} + a \right.$.

*Chứng minh.* Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo $k$.

Với $k = 1$, do $a$ là số nguyên lẻ, nên chọn $n_1$ là một số nguyên dương lẻ bất kỳ, sẽ có

$$2^1 \left| n_1^{n_1} + a \right.$$

Như vậy, Khẳng định đúng với $k = 1$.

Giả sử Khẳng định đã đúng với $k = h, h \in \mathbb{N}^*$; nghĩa là, tồn tại $n_h \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$2^h \left| n_h^{n_h} + a \right. . \qquad (7)$$

Xét $k = h + 1$.

Nếu $n_h^{n_h} + a = 0$, chọn $n_{h+1} = n_h$, ta sẽ có

$n_{h+1} \in \mathbb{N}^*$ và $2^{h+1} \left| n_{h+1}^{n_{h+1}} + a \right.$.

Giả sử $n_h^{n_h} + a \neq 0$. Khi đó, do (7) nên có thể xảy ra hai trường hợp sau:

– *Trường hợp* 1: $v_2\left(\left|n_h^{n_h} + a\right|\right) \geq h + 1$.

Khi đó, chọn $n_{h+1} = n_h$, ta sẽ có $n_{h+1} \in \mathbb{N}^*$ và $2^{h+1} \left| n_{h+1}^{n_{h+1}} + a \right.$.

– *Trường hợp* 2: $v_2\left(\left|n_h^{n_h} + a\right|\right) = h$ (8)

Chọn $n_{h+1} = n_h + 2^h$; ta có $n_{h+1} \in \mathbb{N}^*$ và

$$n_{h+1}^{n_{h+1}} + a = n_{h+1}^{n_h}\left(n_{h+1}^{2^h} - 1\right) + \left(n_{h+1}^{n_h} - n_h^{n_h}\right) + \left(n_h^{n_h} + a\right). \quad (9)$$

Do $a$ là số nguyên lẻ nên từ (7) suy ra, $n_h$ là số nguyên dương lẻ; do đó, $n_{h+1}$ cũng là số nguyên dương lẻ. Vì thế

$$n_{h+1}^{n_h} - n_h^{n_h} = (n_{h+1} - n_h) \cdot \sum_{i=0}^{n_h - 1} n_{h+1}^{(n_h-1)-i} \cdot n_h^i = 2^h \cdot \sum_{i=0}^{n_h - 1} n_{h+1}^{(n_h-1)-i} \cdot n_h^i$$

và $\sum_{i=0}^{n_h-1} n_{h+1}^{(n_h-1)-i} \cdot n_h^i$ là một số nguyên dương lẻ (do là tổng của một số lẻ các số nguyên dương lẻ).

Do đó

$$v_2\left(n_{h+1}^{n_h} - n_h^{n_h}\right) = v_2\left(n_{h+1} - n_h\right) = v_2\left(2^h\right) = h. \quad (10)$$

Từ (8) và (10) suy ra, nếu $n_{h+1}^{n_h} + a \neq 0$ thì

$$v_2\left(\left|\left(n_{h+1}^{n_h} - n_h^{n_h}\right) + \left(n_h^{n_h} + a\right)\right|\right) \geq h + 1.$$

Vì vậy

$$2^{h+1} \left| \left(n_{h+1}^{n_h} - n_h^{n_h}\right) + \left(n_h^{n_h} + a\right) \right. . \quad (11)$$

Do $\left(n_{h+1}, 2^{h+1}\right) = 1$ (vì $n_{h+1}$ là số nguyên dương lẻ) và $\varphi\left(2^{h+1}\right) = 2^h$, nên theo định lý Euler,

$$2^{h+1} \left| n_{h+1}^{2^h} - 1 \right. . \quad (12)$$

Từ (9), (11) và (12), suy ra

$$2^{h+1} \left| n_{h+1}^{n_{h+1}} + a \right. .$$

Kết quả xét các trường hợp trên đây cho thấy, Khẳng định đúng với $k = h + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, Khẳng định được chứng minh.

Do đó, tất cả các số nguyên lẻ $a$ đều thỏa mãn yêu cầu đề bài.

• Vậy, tóm lại, tất cả các số nguyên $a$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là: tất cả các số nguyên lẻ, $0$, và tất cả các số nguyên có dạng $-m^m$ với $m$ là một số nguyên dương chẵn.

**Bình luận và Nhận xét**

Tạp chí đã nhận được hai lời giải cho bài toán, từ bạn đọc. Rất tiếc, cả hai lời giải này đều không đúng, do người giải bài đã mắc một số lỗi, trong các lỗi sau:

– Mặc định tất cả các số $n_k^{n_k} + a$ đều là số nguyên dương;

– Khẳng định rằng, với $x, y$ là các số nguyên, từ $x \mid y$ suy ra $x \leq y$;

– Không xét trường hợp $a = 0$.

**Lưu Thị Thanh Hà**

## DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI HOÀN CHỈNH

*Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải hoàn chỉnh.*

### KHỐI THCS

• Trường **THCS xã Pom Lót**, huyện Điện Biên, tỉnh Điện Biên: *Nguyễn Ngọc Diệp* (lớp 9D3; P671).

• Trường **THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam**, Thành phố Hà Nội: *Hà Mạnh Hùng* (lớp 8A; P671, P672, P673, P679).

• Trường **THCS Phúc Yên**, Thành phố Phúc Yên, tỉnh Vĩnh Phúc: *Vũ Bảo Lân* (lớp 8A5; P672).

### KHỐI THPT

• Trường **THPT chuyên Nguyễn Quang**

**Diêu**, tỉnh Đồng Tháp: *Lư Gia Hưng* (lớp 11T1; P672, P673), *Đỗ Duy Quang* (lớp 11T1; P671).

• Trường **THPT Chi Lăng**, tỉnh Gia Lai: *Phan Trịnh Nguyên* (lớp 10A1; P676).

• Trường **THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam**, Thành phố Hà Nội: *Đoàn Quang Khải* (lớp 10T2; P671), *Phạm Hoàng Lâm* (lớp 10T2; P672).

• Trường **THPT chuyên Hà Tĩnh**, tỉnh Hà Tĩnh: *Trần Minh Hoàng* (lớp 10T1; P676, P677, P679).

• Trường **THPT chuyên Lê Hồng Phong**, tỉnh Nam Định: *Nguyễn Đức Khải* (lớp 11 Toán 2; P672, P677).

• Trường **THPT chuyên Lương Văn Chánh**, tỉnh Phú Yên: *Nguyễn Thị Bảo Tiên* (lớp 11 Toán 1; P676).

• Trường **THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai**, tỉnh Sóc Trăng: *Tiết Trọng Khiêm* (lớp 11A2; P676).

• Trường **THPT chuyên Quốc học Huế**, tỉnh Thừa Thiên – Huế: *Đặng Quỳnh Bảo Uyên* (lớp 11 Toán 2; P671).

• Trường **THPT chuyên Sư phạm**, ĐH Sư phạm Hà Nội: *Hồ Trần Khánh Linh* (lớp 12 Toán 2; P677, P679).

MINH VIỆT
SCHOOL OF MATH

mvsm.org

# MVSM
# NƠI ƯƠM MẦM TOÁN HỌC TRẺ

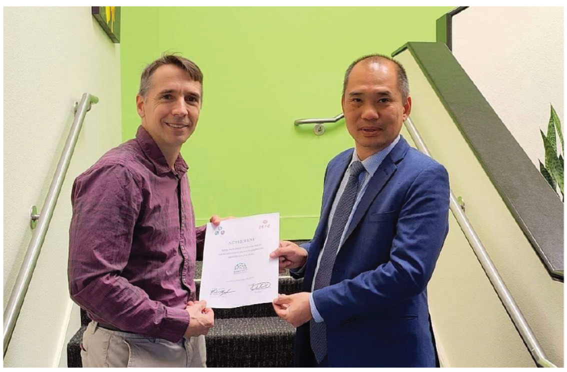
Minh Việt School of Math là trường dạy Toán nâng cao cho học sinh Việt Nam, giúp các em học Toán hiệu quả, biết cách ứng dụng Toán học vào cuộc sống.

Khả năng Sáng tạo

Tư duy Logic

Tình yêu Toán học

Nghệ thuật giải quyết các vấn đề



## CHƯƠNG TRÌNH ĐÀO TẠO

Vào ngày 4/11/2022, tại San Diego, California, Minh Việt Academy đã chính thức ký kết hợp tác với Công ty AoPS (Mỹ).

- π AoPS là chương trình Toán lớn nhất ở Mỹ với hơn 750 ngàn cựu học sinh và cộng đồng mạng hơn 3 triệu người.
- π Tất cả các thành viên đội tuyển Mỹ thi toán quốc tế gần đây đều từng là thành viên của AOPS.
- π AOPS có đội ngũ giáo viên Toán đều là những người có thành tích cao trong các kỳ thi toán quốc gia và quốc tế.

## HỌC PHÍ < 1 TRIỆU ĐỒNG/THÁNG, HỌC CẢ TOÁN VÀ TIẾNG ANH

π **5 lớp dạy Toán cho học sinh cấp Tiểu học**
Giảng dạy bằng giáo trình Beast Academy của AoPS, với truyện tranh và video minh họa.

π **4 Chương trình Toán cho học sinh THCS**
- Tiền Đại số
- Giới thiệu hình học
- Giới thiệu Lý thuyết Đếm và Xác suất
- Giới thiệu Lý thuyết Số

π **3 Chương trình tiếng Anh bổ trợ với 6 cấp độ:**
Học 4 buổi/tuần, từ thứ Hai đến thứ Năm.
- EFL 1-3 (cấp độ A, B)
- EFL 4-5 (cấp độ A, B)
- EFL 6-9 (cấp độ A, B)

Với lợi thế dạy học trực tuyến, trường Toán Minh Việt cam kết mức học phí dưới 1 triệu đồng/20 buổi/tháng. Học sinh học toàn bộ với giáo viên Mỹ 100% bằng tiếng Anh.

Học sinh có thể đăng ký học riêng tiếng Anh.

## MÔ HÌNH DẠY TOÁN KIM TỰ THÁP

- Chương trình linh hoạt, từ thấp đến cao hay có thể chuyển sang ngang theo các môn Toán khác nhau tuỳ theo từng nhu cầu cá nhân học sinh.

- Các học sinh xuất sắc sẽ được giới thiệu qua học Câu lạc bộ Toán Kỳ Lân (UMC) với những Giáo sư Toán học hàng đầu ở Việt Nam.

# KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA MÔN TOÁN THPT NĂM HỌC 2022-2023

TRẦN NAM DŨNG

Kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán THPT năm học $2022-2023$ được diễn ra trong hai ngày $24$ và $25/2/2023$ với tổng cộng $4.589$ thí sinh tham gia dự thi. Kết quả kỳ thi được công bố vào chiều tối ngày $13/3/2023$. Trong bài viết này, chúng tôi xin đưa ra một số tổng kết, đánh giá và bình luận về đề thi và kết quả của kỳ thi năm nay.

### Về đề thi

Đề thi năm nay vẫn giữ ổn định cấu trúc đề thi HSG quốc gia môn toán từ gần $15$ năm nay. Ngày thứ nhất bốn bài toán lần lượt thuộc các phân môn: giải tích, số học, đại số và hình học. Bài toán giải tích là một bài toán thuộc chủ đề quen thuộc: giới hạn dãy số. Ý đầu ở mức căn bản sử dụng tính chất dãy đơn điệu và bị chặn thì có giới hạn, còn ý sau liên quan đến khảo sát dãy số ở dạng tích bằng cách logarit hóa. Việc sử dụng phép thế lượng giác chỉ giúp nhìn ra vấn đề nhanh hơn và giải gọn hơn chứ không phải là cách giải tiên quyết. Có thể đánh giá đây là bài dễ nhất của ngày thứ nhất cũng là bài dễ nhất của cả hai ngày.

Ở Bài $2$, bài số học, thì ý đầu là một ý hoàn toàn đại số và rất cơ bản, chúng ta có thể tìm được công thức tổng quát của dãy số một cách dễ dàng. Phần chính của bài toán này là ý sau (không liên quan gì đến ý đầu). Yêu cầu bài toán được phát biểu khá thú vị, thoạt nhìn thì có vẻ rất "khủng" nhưng nếu xem kỹ về bản chất thì khá đơn giản, chỉ dùng đến nguyên lý Dirichlet và tính tuần hoàn của số dư của dãy truy hồi nguyên.

Bài $3$ là một bài về bất đẳng thức ba biến có điều kiện, có thể nói là có dạng khá quen thuộc. Hướng đi tự nhiên nhất của bài này là chuẩn hóa rồi đưa về một biến (cụ thể là biến $r = abc$). Như vậy, xét về độ khó thì bài $3$ nhẹ nhàng hơn Bài $2$ cả về phát biểu (rất dễ hiểu), hướng đi và kỹ thuật.

Bài $4$ là một bài toán hình học có hai ý gần như độc lập. Ý đầu có điểm mấu chốt là có được $AKJH$ là hình bình hành rồi dùng tứ giác nội tiếp hoặc hàng điểm điều hoàn. Ý sau dùng tính chất của đường thẳng Simson và phép vị tự sẽ làm khá gọn.

Đánh giá sơ bộ cho đề thi ngày $1$ là đề khá dài, có nhiều ý, đặc biệt là các ý trong các Bài $2$ và $4$ hầu như không lên quan đến nhau. Các ý khó là $2b$ và $4a$, $4b$.

Đề thi ngày thứ hai gồm $3$ bài toán thuộc ba phân môn, lần lượt là: đại số, tổ hợp, hình học.

Bài $5$ là một bài phương trình hàm có dạng giống (và cách giải cũng tương tự) với một bài toán trong IMO shortlist $2000$, khai thác tính toàn ánh và đơn ánh của phương trình hàm có biến nằm ngoài biểu thức hàm số. Không khó về mặt ý tưởng nhưng đây vẫn là một thách thức lớn cho thí sinh với những khó khăn kỹ thuật.

Bài 6 là một bài toán tổ hợp về họ tập con khá quen thuộc sử dụng phương pháp đếm bằng hai cách. Dạng toán này đã xuất hiện nhiều, chỉ là với các tham số khác. Có lẽ khó khăn lớn nhất trong bài này là việc xây dựng ví dụ (nhất là trong tình huống các đánh giá đưa ra mới chỉ là các điều kiện cần). Phát biểu của bài toán này cũng hơi rối rắm và có lẽ điều đó cũng làm cho số thí sinh làm tốt bài này không nhiều.

Bài 7 là một bài toán hình học có cấu hình khá phức tạp với ý đầu là một bất đẳng thức hình học và ý sau yêu cầu chứng minh tính chất hình học thuần túy. Ý đầu có thể giải quyết khá gọn nếu biết một bổ đề quen thuộc sau: Cho góc xAy. Đường tròn $(I)$ tiếp xúc $Ax$, $Ay$ tại $B$, $C$. Đường tròn $(J)$ qua $A$ tiếp xúc $(I)$ cắt $Ax$, $Ay$ tại $D$, $E$. Khi đó $AD + AE \geq BC$. Ý sau tuy có vẻ rối rắm nhưng lại có nhiều hướng để tiếp cận.

So với ngày thứ nhất thì đề thi ngày thứ hai cân bằng hơn: Bài 6 với hai ý $6a$, $6b$ khá nhẹ nhàng, Bài 5 cũng có ý $5a$ cơ bản, còn lại các ý khó là $5b$, $6c$ và bài hình.

Về tổng thể đề thi năm nay được đánh giá là khó, dài với nhiều ý (hầu như bài nào cũng có ý $a$, $b$, thậm chí $c$), hơi nặng về kỹ thuật, phần hình học khá nặng với hai bài, bốn ý riêng biệt, cấu hình rất phức tạp và đều đặt ở vị trí bài cuối (và quả thật cũng là bài khó của từng ngày).

### Về kết quả

Trước hết là điểm chuẩn. Dù đề thi năm nay được đánh giá là khá khó, dài và nhiều ý, nhưng điểm chuẩn không quá thấp như dự đoán ban đầu: KK – 13,5; Ba: 16,5; Nhì: 20,5; Nhất 28 và điểm để dự thi chọn đội tuyển là 23.

Kết quả tốt nhất thuộc về đội tuyển Hà Tĩnh với hai giải nhất, tám giải nhì. Trong đó có em Trần Minh Hoàng, học sinh lớp 10 chuyên Hà Tĩnh đạt thủ khoa với số điểm 32 (với một đề thi có đến năm bài ở mức khó thì đây là một kết quả tuyệt vời đối với một bạn học sinh lớp 10).

Tiếp theo là đội tuyển Phú Thọ với hai giải nhất, năm giải nhì, ba giải ba. Đội tuyển trường PTNK, ĐHQG–HCM vẫn giữ được phong độ với hai giải nhất, ba giải nhì, hai giải ba và hai giải KK.

Ngoài ba đơn vị dẫn đầu có hai giải nhất, các đơn vị có giải nhất và cũng có kết quả tốt là: ĐHKHTN, ĐQGHN: một giải nhất, ba nhì, ba giải ba; Bắc Ninh: một giải nhất, hai giải nhì, năm giải ba; Hà Nội, một giải nhất, ba giải nhì, bốn giải ba, sáu giải KK; Hải Phòng: một giải nhất, ba giải nhì, hai giải ba, hai giải KK; Thừa Thiên Huế: một giải nhất, một giải ba, bốn giải KK.

Đây đều là các đơn vị có truyền thống của VMO. Ở một góc nhìn khác, VMO năm nay có những đơn vị có những thành tích vượt bậc so với chính mình như Sóc Trăng có một giải nhì, một giải ba, hai giải KK; Lâm Đồng có hai giải nhì, một giải ba, một giải KK; Điện Biên có hai giải ba, Trà Vinh có một giải nhì, Kiên Giang có một giải ba, một giải KK. Đặc biệt, có hai bạn không phải là học sinh trường chuyên cũng đã xuất sắc đạt giải: một bạn học sinh THPT FPT Cần Thơ đạt giải ba và một bạn học sinh THCS & THPT Đông Du Đăk lak đạt giải khuyến khích.

Cuối cùng xin được điểm qua về bản đồ TST năm nay. Với điểm chuẩn là 23 có 48 bạn đạt mốc điểm này, được phân bố như sau: đông đảo nhất là Hà Tĩnh với tám bạn, tiếp đến là Phú Thọ với năm bạn. Năm đội mạnh tiếp theo, mỗi đội có ba học sinh gồm PTNK, ĐHQG–HCM; KHTN, ĐHQG–HN, ĐHSP HN, Hà Nội, Hải Phòng; các đội có hai thí sinh tham dự TST gồm Bắc Ninh, Nam Định, Nghệ An và Thanh Hóa. Cuối cùng là nhóm các đơn vị có một suất TST: Bà Rịa – Vũng Tàu, Bắc Giang, Đà Nẵng, Hải Dương, Hưng Yên, Lâm Đồng, Quảng Bình, Quảng Ngãi, Quảng Ninh, Tp

HCM, Thừa Thiên – Huế và Trà Vinh. 48 em này sẽ cùng với bạn Phạm Việt Hưng, HCV IMO 2022, tranh sáu suất dự IMO 2023 tại Nhật Bản.

Trong các suất dự TST chúng tôi đặc biệt muốn nhắc tới hai suất của Trà Vinh và Lâm Đồng. Với Trà Vinh, có lẽ đây là suất TST đầu tiên còn với Lâm Đồng thì điều đặc biệt là suất TST này thuộc về học sinh trường chuyên Bảo Lộc, một trường chuyên thứ hai trong tỉnh mới được thành lập sau này. Và bạn học sinh đạt giải nhì có điểm số rất cao, 27 điểm, tức là chỉ thiếu tí chút là đạt giải nhất.

Nói câu chuyện về các trường hợp FPT Cần Thơ, Đông Du Đak lak, Điện Biên, Kiên Giang, Sóc Trăng, Trà Vinh hay chuyên Bảo Lộc để thấy rằng ở đâu cũng có học sinh có tố chất tốt, chỉ cần có những người thầy tâm huyết, biết thổi vào học trò sự tự tin và niềm đam mê. Ở thời đại của Internet, đặc biệt với sự cởi mở của cộng đồng toán, các vấn đề về tài liệu, thông tin sẽ không còn là lợi thế của riêng ai, và, với hình thức học online, các bạn học sinh ở mọi miền đều có cơ hội được học với các thầy giáo, các chuyên gia giỏi. Cơ hội được học hỏi đồng đều hơn và cơ hội thành công cũng đồng đều hơn.

### Một số bình luận và đề xuất

Trước hết là về đề thi. Với thời gian 180 phút làm bài, đề thi như vậy là quá dài với quá nhiều ý, quá nhiều yêu cầu, đặc biệt là ở ngày thi thứ nhất. Đề thi học sinh giỏi đa số là những bài mới, đòi hỏi thí sinh phải có nhiều thời gian suy nghĩ, tìm hướng tiếp cận rồi mới đến giai đoạn xử lý kỹ thuật, rồi lại phải trình bày chặt chẽ. Và kỹ thuật cũng không đơn giản (trên thực tế, hai bài toán có hướng đi khá rõ ràng là bài bất đẳng thức và bài phương trình hàm đã gây rất nhiều khó khăn cho các bạn học sinh). Theo ý kiến của chúng tôi, nên hạn chế các đề toán có nhiều ý mà chỉ nên đưa ra yêu cầu xử lý trọn vẹn một vấn đề. Nếu bài toán có hai ý trở lên thì nhất thiết chúng phải liên quan đến nhau và ý đầu sẽ như một gợi ý cho ý sau.

Một vấn đề nữa nên có sự thay đổi là số lượng bài của mỗi ngày. Hiện nay, với cấu trúc $(4+3)$ thì ngày thứ nhất có bốn bài toán, mỗi bài được 5 điểm còn ngày thứ hai có ba bài toán, mỗi bài được 6 hoặc 7 điểm. Rõ ràng ngày thứ nhất sẽ có nhiều áp lực hơn vì trên thực tế, độ khó của các bài toán của hai ngày không có sự chênh lệch đáng kể. Đã thế điểm số tối đa của mỗi bài ở ngày thứ nhất chỉ là 5 điểm (có thể tưởng tượng lấy được 5 điểm ở bài 2 hay bài 4 khó thế nào). Vì vậy, chúng tôi đề xuất nên quay lại định dạng ba bài mỗi ngày như giai đoạn trước năm 2007, cũng là một định dạng quen thuộc của nhiều kỳ thi toán trên thế giới. Với định dạng sáu bài thì trong hai ngày như vậy, phân bổ cho mỗi phân môn một bài và một bài ở dạng kiến thức tổng hợp. Như vậy sẽ đều hơn thay vì hơi nặng về hình học và đại số như hiện nay.

Cuối cùng, để tiếp nối ý đã trình bày ở cuối phần 2, chúng tôi đề xuất nên triển khai mạnh hơn nữa các hoạt động dạy, bồi dưỡng chung cho các đối tượng học sinh (như các hoạt động trường hè, trường đông) để tạo cơ hội đồng đều cho các thí sinh. Việc tổ chức này sẽ được điều phối chung về chuyên môn bởi một Hội đồng chuyên môn (có thể là sự phối hợp giữa Bộ giáo dục, Hội toán học Việt Nam và Viện toán học) và các BTC địa phương lo các vấn đề hậu cần (hình thành các cụm).

Sau khi hình thành được các cụm để triển khai việc học tập, bồi dưỡng chung, có thể hướng đến việc tổ chức thi theo cụm với những hình thức sinh hoạt chuyên môn bổ ích như sửa bài thi, chia sẻ kinh nghiệm dạy và học toán, nghe các bài giảng đại chúng về toán học. Việc tổ chức thi cụm cũng giúp xóa tan những lăn tăn không đáng có về tính trung thực, nghiêm túc của kỳ thi, một điều luôn rất được coi trọng trong các kỳ thi tuyển chọn tài năng.

## Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm học 2022 – 2023

**Bài 1** (5,0 điểm) Xét dãy số $(a_n)$ thỏa mãn $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_{n+1} - a_n}$ và $0 \leq a_n \leq 1$, với mọi $n \geq 1$.

$a)$ Chứng minh rằng dãy $(a_n)$ xác định duy nhất và có giới hạn hữu hạn.

$b)$ Cho dãy số $(b_n)$ xác định bởi $b_n = (1 + 2a_1)(1 + 2^2a_2)\cdots(1 + 2^na_n)$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy $(b_n)$ có giới hạn hữu hạn.

**Bài 2** (5,0 điểm) Cho các số nguyên $a, b, c, \alpha, \beta$ và dãy số $(u_n)$ xác định bởi

$$u_1 = \alpha, u_2 = \beta, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$$
$$\text{với mọi } n \geq 1.$$

$a)$ Chứng minh rằng nếu $a = 3, b = -2, c = -1$ thì có vô số cặp số nguyên $(\alpha, \beta)$ để $u_{2023} = 2^{2022}$.

$b)$ Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương $n_0$ sao cho có duy nhất một trong hai khẳng định sau là đúng:

$i)$ Có vô số số nguyên dương $m$ để $u_{n_0}u_{n_0+1}\cdots u_{n_0+m}$ chia hết cho $7^{2023}$ hoặc $17^{2023}$;

$ii)$ Có vô số số nguyên dương $k$ để $u_{n_0}u_{n_0+1}\cdots u_{n_0+k} - 1$ chia hết cho $2023$.

**Bài 3** (5,0 điểm) Tìm số thực dương $k$ lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{1}{kab+c^2} + \frac{1}{kbc+a^2} + \frac{1}{kca+b^2} \geq \frac{k+3}{a^2+b^2+c^2}$$

đúng với mọi bộ ba số thực dương $(a;b;c)$ thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$.

**Bài 4** (5,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ có $DB = DC$ và nội tiếp một đường tròn. Gọi $M, N$ tương ứng là trung điểm của $AB, AC$ và $J, E, F$ tương ứng là các tiếp điểm của đường tròn $(I)$ nội tiếp tam giác $ABC$ với $BC, CA, AB$. Đường thẳng $MN$ cắt $JE, JF$ lần lượt tại $K, H$; $IJ$ cắt lại đường tròn $(IBC)$ tại $G$ và $DG$ cắt lại $(IBC)$ tại $T$.

$a)$ Chứng minh rằng $JA$ đi qua trung điểm của $HK$ và vuông góc với $IT$.

$b)$ Gọi $R, S$ tương ứng là hình chiếu vuông góc của $D$ trên $AB, AC$. Lấy các điểm $P, Q$ lần lượt trên $IF, IE$ sao cho $KP$ và $HQ$ đều vuông góc với $MN$. Chứng minh rằng ba đường thẳng $MP, NQ$ và $RS$ đồng quy.

**Bài 5** (6,0 điểm) Xét hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(0) = 2022$ và $f(x + g(y)) = xf(y) + (2023 - y)f(x) + g(x)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

$a)$ Chứng minh rằng $f$ là một toàn ánh và $g$ là một đơn ánh.

$b)$ Tìm tất cả các hàm số $f$ và $g$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

**Bài 6** (7,0 điểm) Có $n \geq 2$ lớp học tổ chức $m \geq 1$ tổ ngoại khóa cho học sinh. Lớp nào cũng có học sinh tham gia ít nhất một tổ ngoại khóa. Mọi tổ ngoại khóa đều có đúng $a$ lớp có học sinh tham gia. Với hai tổ ngoại khóa bất kỳ, có không quá $b$ lớp có học sinh tham gia đồng thời cả hai tổ này.

$a)$ Tính $m$ khi $n = 8, a = 4, b = 1$.

$b)$ Chứng minh rằng $n \geq 20$ khi $m = 6, a = 10, b = 4$.

$c)$ Tìm giá trị nhỏ nhất của $n$ khi $m = 20, a = 4, b = 1$.

**Bài 7** (7,0 điểm) Cho tam giác nhọn, không cân $ABC$ có trực tâm $H$ và tâm đường tròn ngoại tiếp $O$. Đường tròn nội tiếp $(I)$ của tam giác $ABC$ tiếp xúc với các cạnh $BC, CA, AB$ tương ứng tại $M, N, P$. Gọi $\Omega_A$ là một đường tròn đi qua $A$, tiếp xúc ngoài với $(I)$ tại một điểm $A'$ và cắt lại $AB, AC$ tương ứng tại $A_b, A_c$. Các đường tròn $\Omega_B, \Omega_C$ và các điểm $B', B_a, B_c, C', C_a, C_b$ được xác định một cách tương tự.

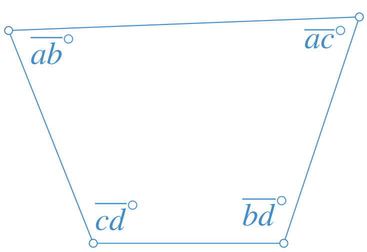
$a)$ Chứng minh rằng $B_cC_b + C_aA_c + A_bB_a \geq NP + PM + MN$.

$b)$ Xét trường hợp $A', B', C'$ tương ứng thuộc các đường thẳng $AM, BN, CP$. Gọi $K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba cạnh tương ứng thuộc ba đường thẳng $A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b$. Chứng minh rằng $OH$ song song với $IK$.

# GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày với các bạn lời giải của các bài toán trong kỳ thi Olympic Toán học Trẻ của Vương quốc Anh năm học $2022$, đăng trong số báo $1-2/2023$.


**OC31.** Bốn góc trong một tứ giác có số đo là các số tự nhiên có $2$ chữ số $\overline{ab}, \overline{cd}, \overline{bd}, \overline{ac}$ như trong hình vẽ. Tìm tất cả các khả năng có thể của tập hợp bốn góc trên.




*Lời giải.* Do tổng bốn góc trong từ giác bằng $360^\circ$, ta có

$$\begin{aligned}&10a+b+10a+c+10b+d+10c+d\\&=20a+11b+11c+2d=360. \qquad (1)\end{aligned}$$

Nhận xét rằng nếu $a \leq 7$ thì tổng trong $(1)$ không vượt quá $20\times 7+11\times 9+11\times 9+2\times 9=356.$ Do đó $a$ chỉ có thể nhận giá trị $8$ hoặc $9.$ Do $b$ và $c$ có thể đổi vai trò cho nhau mà đáp án không thay đổi, ta có thể giả sử $b \geq c.$

Trường hợp $I$: $a=8.$ Vì trong bốn góc phải có một góc không bé hơn $90^\circ$ nên $b=9.$ Phương trình $(1)$ trở thành $11c+2d=101$ và chỉ có nghiệm duy nhất là $c=9, d=1.$

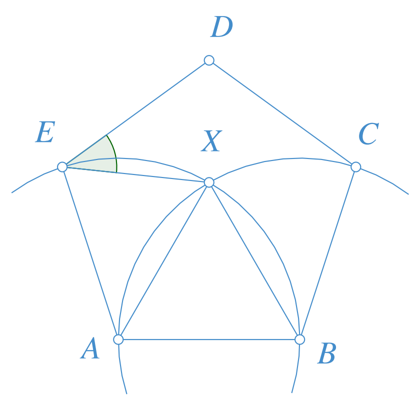
Trường hợp $IIa$: $a=9, b=8.$ Phương trình $(1)$ trở thành $11c+2d=92.$ Do $c \leq b=8,$ nên ta chỉ có nghiệm duy nhất $c=8, d=2.$

Trường hợp $IIb$: $a=9, b=9.$ Phương trình $(1)$ trở thành $11c+2d=81.$ Dễ thấy phương trình chỉ có nghiệm duy nhất $c=7, d=2.$

Tóm lại, có ba bộ bốn góc thỏa mãn bài toán: $\{89,89,91,91\},\{98,98,82,82\},\{99,97,92,72\}.$

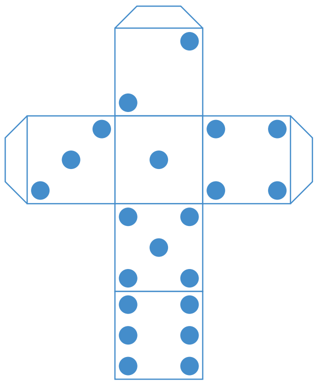
**OC32.** Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$. Vẽ hai đường tròn: một có tâm $A$ và bán kính $AB$, và hình kia có tâm $B$ và bán kính $BA$. Gọi $X$ là giao điểm bên trong ngũ giác của hai đường tròn. Hỏi số đo của $\angle DEX$ bằng bao nhiêu?

*Lời giải.* Do $AX, BX, AB$ đều là bán kính của hai đường tròn nên chúng bằng nhau. Như vậy $ABX$ là tam giác đều. Vì mỗi góc trong ngũ giác đều bằng $\frac{540^\circ}{5}=108^\circ$, ta có $\angle EAX=108^\circ-60^\circ=48^\circ.$




Mặt khác, tam giác $AEX$ cân tại $A,$ nên $\angle AEX=\frac{180^\circ-48^\circ}{2}=66^\circ.$ Ta nhận được $\angle DEX=108^\circ-66^\circ=42^\circ.$

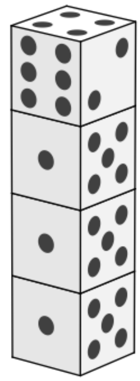
**OC33.** Seth làm $n$ viên xúc xắc giống hệt nhau bằng cách gấp $n$ bản giống như trong hình bên. Sau đó, anh ta xếp lần lượt các viên xúc xắc chồng lên nhau thành một hình tháp thẳng đứng. Biết rằng tổng số chấm ở mỗi một trong bốn mặt xung quanh của tháp xúc xắc đều là số lẻ. Hỏi các giá trị có thể của $n$ là bao nhiêu?



*Lời giải.* Giả sử tổng số chấm trên $n$ ô của mặt đằng trước của tháp xúc xắc là $T$ và của mặt đằng sau là $S$. Do tổng $2$ ô trên $2$ mặt đối diện của mỗi viên xúc xắc bằng $7$, ta có $T+S=7n$. Theo đầu bài thì cả $T$ và $S$ đều lẻ nên $n$ phải chẵn.

Ta sẽ chứng minh rằng với mọi $n$ chẵn ta đều có thể xếp được một tháp xúc xắc như vậy. Trước tiên ta xếp $n$ viên xúc xắc theo hướng giống hệt nhau thành một tháp có mỗi mặt gồm toàn các số giống nhau. Sau đó ta xoay viên xúc xắc ở trên cùng đi sao cho các mặt trước, sau đổi chỗ cho nhau và các mặt trái, phải cũng đổi chỗ cho nhau.

Bên dưới là hình minh họa trong trường hợp $n=4$. Như vậy, tổng các chấm trên mỗi mặt của tháp có dạng $(n-1)a+7-a=(n-2)a+7$ luôn là số lẻ. Do đó có thể xếp được tháp xúc xắc khi và chỉ khi $n$ chẵn.



Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc ba bài toán trong kỳ thi Olympic toán học trẻ của Thổ Nhĩ Kỳ. Các bài toán này phù hợp với trình độ học sinh lớp $8-10$.

**OC40.** Cho $x,y,z$ là các số thực dương với $x\le 1$. Chứng minh rằng

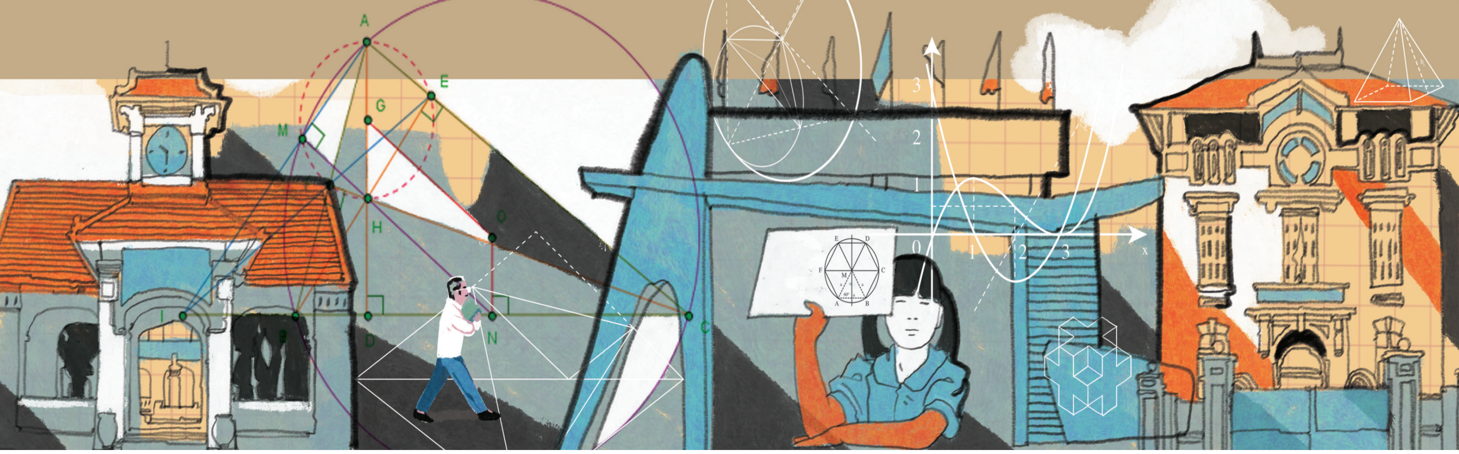
$$xy+y+2z\ge 4\sqrt{xyz}.$$

**OC41.** Trong một trường có $101$ học sinh, mỗi học sinh có ít nhất một người bạn thân trong số các học sinh khác trong trường. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n, 1<n<101,$ ta có thể chọn một nhóm $n$ học sinh trong trường này sao cho mỗi học sinh được chọn có ít nhất một bạn thân trong số các học sinh khác được chọn. (Biết rằng nếu $A$ là bạn thân của $B$ thì $B$ cũng là bạn thân của $A$).

**OC42.** Cho $m,n,a,k$ là các số nguyên dương và $k>1$ sao cho đẳng thức sau thỏa mãn

$$5^m+63n+49=a^k.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $k$.



# CHUNG KẾT VÀ TRAO GIẢI CUỘC THI "BÀI GIẢNG VÀ BÀI VIẾT VỀ TOÁN HỌC, MANG TÊN HOÀNG TỤY" LẦN THỨ HAI

VÂN NGA[1]

Ngày 25/3/2023, tại Hà Nội, Viện Toán học, Trung tâm Thông tin – Tư liệu, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam và Trung tâm Quốc tế Đào tạo và Nghiên cứu Toán học (trực thuộc Viện Toán học, được UNESCO bảo trợ) đã đồng tổ chức ngày "Toán học dành cho mọi người". Đây là hoạt động hưởng ứng Ngày Toán học Thế giới năm 2023, đã thu hút đông đảo các nhà khoa học, giáo viên, sinh viên và học sinh trên cả nước tham dự.

GS. Hoàng Tụy (1927 – 2019) là một nhà Toán học xuất sắc, đồng thời cũng là một nhà sư phạm mẫu mực. Trước khi biên soạn những giáo trình đại học được nhiều thế hệ sinh viên, nghiên cứu sinh sử dụng, GS. Hoàng Tụy từng biên soạn những bài giảng đầu tiên cho hệ thống giáo dục quốc dân. Cả cuộc đời cống hiến cho Toán học, Ông không ngừng trăn trở về nền giáo dục nước nhà. Được sự đồng ý của gia đình GS. Hoàng Tụy, Kỳ thi "Bài giảng và bài viết về Toán học, mang tên Hoàng Tụy" được tổ chức với sự phối hợp của Tạp chí Pi và Trung tâm Quốc tế Đào tạo và Nghiên cứu Toán học.

Với mục tiêu khích lệ sự tìm tòi, sáng tạo của giáo viên, sinh viên và mọi người yêu Toán học trong việc giảng dạy, đồng thời quảng bá Toán học, khơi dậy lòng say mê Toán học trong học sinh và công chúng, Kỳ thi "Bài giảng và bài viết mang tên Hoàng Tụy" đã thu hút nhiều tác giả gửi hồ sơ tham gia.

Chủ đề của Kỳ thi lần thứ hai, năm 2023 là: Tìm hiểu về môn Toán trong "Chương trình giáo dục phổ thông mới" thông qua một chủ đề cụ thể; Tìm hiểu về Toán sơ cấp, Lịch sử Toán học và Toán học trong cuộc sống. Hội đồng giám khảo năm nay gồm:

– GS.TSKH. Ngô Việt Trung (Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, Nguyên Viện trưởng Viện Toán học), Chủ tịch Hội đồng;

– GS.TSKH. Đỗ Đức Thái (Đại học Sư phạm Hà Nội, Phó Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam);

– GS.TSKH. Phùng Hồ Hải (Phó Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, Nguyên Viện trưởng Viện Toán học);

– GS.TSKH. Hà Huy Khoái (Viện trưởng viện Toán học và khoa học ứng dụng Trường

[1] *Trung tâm Thông tin – Tư liệu, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.*

Đại học Thăng Long, Nguyên Viện trưởng Viện Toán học);

– TS. Trần Nam Dũng (Phó Hiệu trưởng Trường Phổ thông Năng khiếu, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh);

– PGS. TS Phó Đức Tài (Trưởng khoa Toán–Cơ–Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội).

*Giáo sư Ngô Việt Trung, Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, Chủ tịch Hội đồng Giám khảo.*

Ban Tổ chức đã tiến hành chấm các hồ sơ dự thi ở vòng sơ khảo, lựa chọn được 8 hồ sơ tốt nhất để tranh tài tại vòng chung khảo, bao gồm:

1. Hình có trục đối xứng, tác giả Nguyễn Thụy Việt Anh, Trường Liên cấp Hội nhập Quốc tế Ischool, Quảng Trị;

2. Lý thuyết đồ thị và các cấu trúc đáng chú ý, tác giả Hà Trung, Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định;

3. Bổ đề hai đoạn thẳng và một số ứng dụng, tác giả Nguyễn Hữu Tâm, Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định;

4. Nét đẹp của phương pháp đếm dưới góc nhìn của số Fibonacci, tác giả Nguyễn Tuấn Anh, Trường PTTH chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp;

5. Một cách thiết kế dạy học Toán theo hướng gắn liền với thực tiễn, tác giả Phạm Đức Quang, Trường Đại học Hà Nội 2;

6. Tích hợp tư duy công dân số trong bài giảng môn Toán, tác giả Nguyễn Thế Minh, Trường Trung học Vinschool Imperia, Hải Phòng;

7. Mập mờ công thức Euler, tác giả Nguyễn Quang Minh, Biên Hoà, Đồng Nai;

8. Giải bài toán tập hợp bằng phương pháp "ô ăn quan", nhóm tác giả Ngô Quốc Trung, Nguyễn Thị Hiền, Trường Liên cấp Hermann Gmeiner Vinh, Nghệ An.

Trong khuôn khổ Ngày "Toán học dành cho mọi người", 8 nhóm tác giả/tác giả đã thuyết trình các bài giảng và bài viết trước Hội đồng giám khảo. Sau những nhận xét công tâm và đánh giá kỹ lưỡng, Ban Tổ chức đã quyết định trao giải cho các tác giả.

Về chủ đề "Tìm hiểu về môn Toán trong "Chương trình giáo dục phổ thông mới" thông qua một chủ đề cụ thể": Không có giải Nhất, giải Nhì được trao cho bài giảng "Giải bài toán tập hợp bằng phương pháp ô ăn quan", nhóm tác giả Ngô Quốc Trung, Nguyễn Thị Hiền. Bài viết "Một cách thiết kế dạy học Toán theo hướng gắn liền với thực tiễn", tác giả Phạm Đức Quang đạt giải Ba. Bài giảng "Tích hợp tư duy công dân số trong bài giảng môn Toán", tác giả Nguyễn Thế Minh và "Hình có trục đối xứng", tác giả Nguyễn Thụy Việt Anh đạt giải Khuyến khích.

Về các chuyên đề khác, giải Nhất được trao cho bài giảng "Bổ đề hai đoạn thẳng và một số ứng dụng", tác giả Nguyễn Hữu Tâm. Bài giảng "Mập mờ công thức Euler", tác giả Nguyễn Quang Minh đạt giải Nhì; "Lý thuyết đồ thị và một số cấu trúc đáng chú ý", tác giả Hà Trung đạt giải Ba; "Nét đẹp của phương pháp đếm dưới góc nhìn của số Fibonacci", tác giả Nguyễn Tuấn Anh đạt giải Khuyến khích.

*Đại diện ban giám khảo và đại diện gia đình GS Hoàng Tụy trao giải cho các tác giả.*

Theo đánh giá của Ban Tổ chức, chất lượng hồ sơ dự thi của các tác giả tại Kỳ thi "Bài giảng và bài viết về Toán học, mang tên Hoàng Tụy" lần thứ hai, năm 2023 cao hơn lần thứ nhất, năm 2021. Điều đó cho thấy Kỳ thi "Bài giảng và bài viết về Toán học, mang tên Hoàng Tụy" đã được lan tỏa và hưởng ứng mạnh mẽ, trở thành một nhân tố tích cực góp phần nâng cao chất lượng dạy và học Toán ở cấp trung học phổ thông.

# LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

## Một chuyến thăm triển lãm

Người của công ty Tae Yeon không thể trả lời "Không có ai cả" vì như vậy người đó sẽ nói dối. Vì vậy, người đầu tiên đến từ công ty TeaYon.

Hai người tiếp theo trả lời giống nhau, vì thế họ phải cùng nói thật hoặc cùng nói dối, tức là đến từ cùng một công ty.

Nếu cả hai người này cùng đến từ công ty Tae Yeon, suy ra số người của công ty Tae Yeon trong số họ không ít hơn 2 người. Suy ra câu trả lời của họ là sai. Vì vậy cả hai người thứ hai và thứ ba đều nói dối, tức là đến từ công ty TeaYon.

Do vậy, trong số 5 người này, có ít nhất 3 người của công ty TeaYon và không quá 2 người đến từ công ty Tae Yeon.

Nhưng vì cả 3 người đầu tiên đều nói dối, suy ra số người của công ty Tae Yeon trong số họ không thể là 0 hoặc 1. Vì vậy, cả hai người còn lại đều là nhân viên của công ty Tae Yeon. Và họ đều sẽ trả lời là "Có hai người".

## Đố vui

Sau đây là một cách điền thỏa mãn yêu cầu:

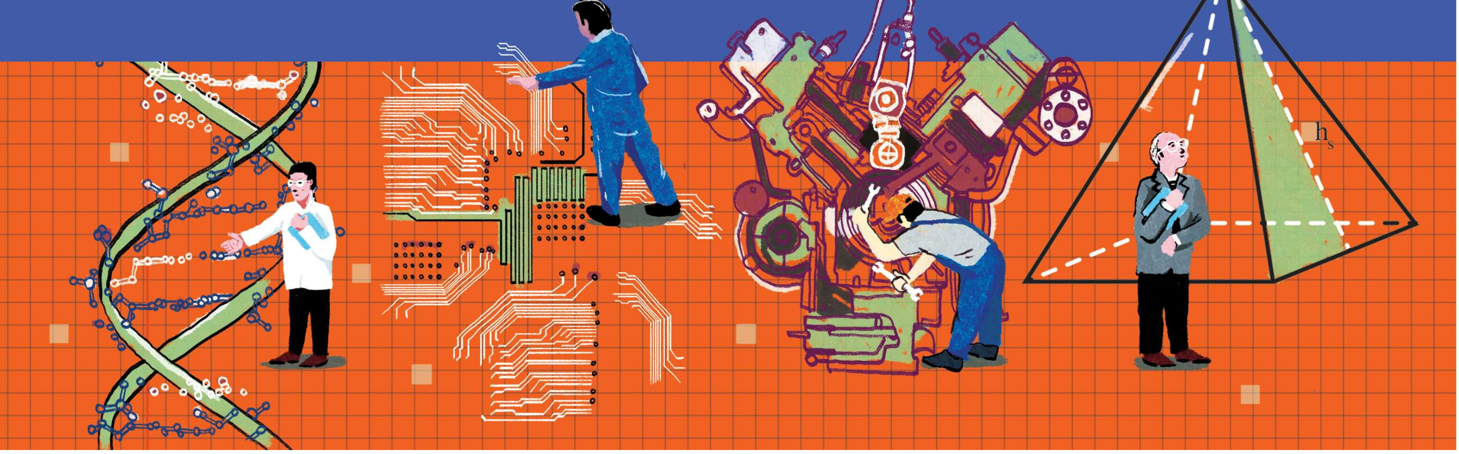
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 8 | 5 | 7 |
| 4 | 2 | 8 | 5 | 7 | 1 |
| 2 | 8 | 5 | 7 | 1 | 4 |
| 8 | 5 | 7 | 1 | 4 | 2 |
| 5 | 7 | 1 | 4 | 2 | 8 |
| 7 | 1 | 4 | 2 | 8 | 5 |

## Góc cờ

**1.Ha2+ Vg1** Nếu 1...Vh1 2.Vf3 Th4 3.Hd2+

**2.Vf3 Th4 3.He2!** Phương án khác cũng dẫn đến Trắng thắng như sau 3.Hd2! Vh1 4.Hb2! Vg1 5.Hd4+ Vh1 6.Hxh4

**3...Vh1 4.Hb2! Vg1 5.Hd4+** Trắng thắng.



# LÀM THẾ NÀO ĐỂ CÂN TRÁI ĐẤT?

NGUYỄN HOÀNG VŨ[1]

Khối lượng của Trái Đất bằng bao nhiêu? Đây là một câu hỏi mà đến thế kỷ 18 người ta mới có được những kết quả đo đạc tương đối chính xác dựa trên những lý thuyết vật lý được phát triển suốt hai thế kỷ bắt đầu từ những thí nghiệm của Galileo.

## 1. Từ Galileo đến Newton

*Hình 1. Galileo và dao động của ngọn đèn trên trần nhà thờ.*

Một câu chuyện khá thú vị thường được kể về Galileo và trọng lực là khi ông quan sát ngọn đèn trên trần nhà trong nhà thờ Pisa. Ông dùng mạch đập của mình để tính thời gian của mỗi chu kỳ dao động của nó và nhận thấy rằng với những góc dao động nhỏ, chu kỳ dao động không thay đổi. Với những thí nghiệm sau này về con lắc đơn, Galileo còn nhận thấy rằng chu kỳ dao động thay đổi theo chiều dài của dây treo (dây treo càng dài thì chu kỳ càng lớn) nhưng lại không phụ thuộc vào khối lượng của con lắc.

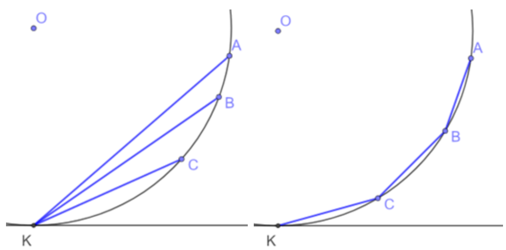
*Hình 2. Galileo biểu diễn thí nghiệm về chuyển động trên mặt phẳng nghiêng cho các quý tộc nhà Medici (tranh của Giuseppe Bezzuoli).*

Ông tiếp tục nghiên cứu vấn đề này bằng cách làm thí nghiệm với chuyển động trên mặt phẳng nghiêng, một dạng chuyển động mà ông cho rằng có thể dùng để liên hệ với chuyển động theo cung tròn của con lắc. Thời gian được Galileo đo bằng một đồng hồ nước. Khi hòn bi được thả từ vị trí đầu của mặt phẳng nghiêng thì khóa cũng được mở để nước từ đồng hồ chảy vào một bình chứa bên dưới. Khi hòn bi đến vị trí bị chặn lại thì khóa cũng được đóng lại cùng lúc. Việc đo lượng nước trong bình sẽ cho độ dài thời gian của chuyển động. Kết quả thí nghiệm

[1] *Hà Nội.*

cho thấy quãng đường chuyển động tỷ lệ thuận với bình phương của thời gian. Đồng thời, thời gian chuyển động cho cùng một quãng đường sẽ càng ngắn khi góc nghiêng tăng lên.

Galileo còn phát hiện ra rằng khi cho hòn bi lăn trên một dây cung có điểm cuối tại vị trí mà đường tròn tiếp xúc phương nằm ngang thì thời gian chuyển động không thay đổi khi ta di chuyển vị trí đầu dây cung trên đường tròn (độc giả có thể thử tự chứng minh bài toán này). Đồng thời, ta cũng có thể coi chuyển động của con lắc đơn dọc theo cung tròn là tổng hợp của nhiều chuyển động trên các đoạn dây cung liên tiếp nhau. Nhận định này cũng là cơ sở giúp Huygens thiết lập phương trình toán học cho chuyển động của con lắc đơn nhiều thập kỷ sau đó.




*Hình 3. Một số nhận định của Galileo về chuyển động trên mặt phẳng nghiêng. Trái: viên bi lăn trên các dây cung của cùng một đường tròn và cùng một điểm cuối có thời gian lăn bằng nhau. Phải: Khi xấp xỉ cung tròn bằng các đoạn mặt phẳng nghiêng liên tiếp, thời gian lăn càng ngày càng gần với thời gian lăn trên cung tròn khi độ dài các đoạn nghiêng càng nhỏ.*

Một điểm đáng chú ý nữa là khi dây cung trở thành đường kính, ta có được chuyển động rơi tự do! Khi đó, quãng đường chuyển động của vật rơi tự do sẽ tỷ lệ với bình phương thời gian. Mặt khác, độ dài của dây treo con lắc đơn cũng tỷ lệ với bình phương của chu kỳ dao động. Galileo tiến hành các thí nghiệm đo tỷ lệ giữa thời gian rơi tự do và chu kỳ con lắc đơn, với độ cao thả rơi bằng chiều dài dây treo của con lắc. Kết quả cho thấy đây là một hằng số không phụ thuộc vào khối lượng. Các thí nghiệm của ông cho kết quả từ 2,3 đến 2,52 (giá trị đúng là $\frac{g}{\sqrt{2}} = 2{,}22$). Do không có cơ sở lý thuyết, Galileo không thể đưa ra chứng minh toán học cho vấn đề này.

Quy luật bình phương thời gian của chuyển động trong các thí nghiệm của Galileo hoàn toàn đi ngược lại với những lập luận của Aristotle. Trong khi Aristotle phát biểu rằng vật càng nặng sẽ rơi càng nhanh hơn, Galileo lại kết luận bằng thực nghiệm rằng thời gian rơi chỉ phụ thuộc vào độ cao khi thả vật. Việc thay những lập luận cảm tính bằng kiểm chứng thực nghiệm đánh dấu một chuyển biến lớn, đặt nền móng cho khoa học tự nhiên hiện đại.

*Hình 4. Các ngọn tháp nghiêng gắn liền với các thí nghiệm về trọng lực. Trái: tháp nghiêng Oude Kerk (Hà Lan). Giữa: tháp nghiêng Pisa (Italia). Phải: Tháp nghiêng Asinelli (Italia).*

Nhiều độc giả chắc cũng sẽ liên hệ đến câu chuyện về Galileo và tháp nghiêng Pisa, trong đó khi ông thả cùng lúc một quả đạn đại bác và một viên đạn súng trường từ đỉnh tháp thì chúng cũng chạm đất cùng một thời điểm. Tuy nhiên, về mặt lịch sử, Galileo không phải là người đầu tiên làm việc này. Một thí nghiệm tương tự đã được Simon Stevin tiến hành trước đó vào năm 1586 tại tháp nghiêng ở Oude Kerk (Delft, Hà Lan). Sau vài thập kỷ, một thí nghiệm quan trọng hơn được Giovanni Riccioli thực hiện tại tháp nghiêng Asinelli ở Bologna, Italia bắt đầu từ năm 1640. Thời gian rơi từ các độ cao khác nhau cho kết quả hoàn toàn khớp với quy luật bình phương thời gian. Những số liệu của Riccioli cho thấy giá trị gia tốc trọng trường là $9{,}4\,m/s^2$, không quá xa so với giá trị đã biết ngày nay.

Mặt khác, vào đầu thế kỷ 17, dựa vào những số liệu thiên văn của Tycho Brahe, Kepler đã đưa ra các định luật quan trọng về sự chuyển động của các hành tinh quanh Mặt Trời. Quỹ đạo của các hành tinh là một hình ellipse mà Mặt Trời nằm tại một tiêu điểm của nó. Tuy nhiên, Kepler vẫn chưa đưa ra được giải thích đầy đủ cho hiện tượng này. Phải vài thập kỷ tiếp theo, lý thuyết về lực hấp dẫn mới được hình thành trong các nghiên cứu của Newton. Một điều đáng chú ý là Newton không phải người đầu tiên đưa ra giả thuyết về một lực hấp dẫn tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách. Nhà toán học Pháp Ismael Boulliau đã thảo luận về vấn đề này năm 1645, nhưng Newton chính là người đầu tiên đưa ra được chứng minh toán học rằng một lực như vậy sẽ dẫn đến các quỹ đạo ellipse như trong định luật 1 của Kepler, cũng như các quỹ đạo dạng conic khác (tròn, parabol và hyperbol). Đồng thời, Newton cũng tính toán được rằng lực hấp dẫn của một khối cầu đối với một vật khác sẽ tương đương với lực hấp dẫn của chất điểm có cùng khối lượng đặt ở tâm hình cầu. Nói cách khác, trọng lực gây ra sự rơi của các vật hướng về mặt đất cũng như lực hút giữa các vật thể trong vũ trụ có cùng bản chất.

Lực hấp dẫn giữa hai vật có khối lượng $m_1$ và $m_2$ cách nhau một khoảng $r$ có công thức như sau:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

với $G$ là hằng số hấp dẫn. Cần chú ý rằng khái niệm về $G$ chưa xuất hiện ở thời kỳ của Newton.

### 2. Lực hấp dẫn của ngọn núi

Một vấn đề được đặt ra là trọng lực liệu có như nhau tại mọi nơi trên Trái Đất? Theo Newton, do lực quán tính ly tâm, Trái Đất sẽ phình ra hơn ở xích đạo và do đó trọng lực sẽ nhỏ nhất ở vị trí này và tăng dần theo vĩ độ. Từ các kết quả đo đạc trọng lực của nhà khoa học Pháp Jean Richer tại đảo Cayene, Newton tính ra rằng khoảng cách đến tâm Trái Đất tại xích đạo lớn hơn tại các cực là 17 dặm (con số chính xác là 17 dặm).

Tuy nhiên, tại bản thân nước Pháp, nhiều nhà khoa học ủng hộ lý thuyết của Descartes từ hơn nửa thế kỷ trước, rằng tương tác giữa các vật thể trong vũ trụ hay trọng lực đều xảy ra do các vòng xoáy của một chất lỏng vô hình tràn đầy khắp nơi gọi là “ether”, ngược với mô hình lực hấp dẫn của Newton. Một số đo đạc tại Pháp của hai cha con Cassini, đều là thành viên Viện Hàn lâm Khoa học Pháp, vào đầu thế kỷ 18 cho kết quả rằng độ dài của vĩ độ giảm dần khi vĩ độ tăng, tức Trái Đất nhọn ở hai cực (dạng quả trứng). Trong khi đó, những người Anh lại cho rằng các đo đạc tại Pháp có độ chính xác không đủ cao.

*Hình 5. Trái Đất dẹt ở xích đạo hay ở hai cực? Đây là một câu hỏi quan trọng của khoa học thế kỷ 18.*

Năm 1734, Johann Bernoulli công bố chứng minh của ông rằng các xoáy ether của Descartes sẽ dẫn đến việc Trái Đất nhọn ở hai đầu, cung cấp cơ sở lý thuyết cho thuyết quả trứng. Trong khi đó, học trò của ông là Pierre Maupertuis lại ủng hộ mô hình của Newton. Bản thân Viện Hàn lâm Khoa học Pháp bị chia thành hai phái do vấn đề này.

Sau khi Pháp và Tây Ban Nha trở thành đồng minh, năm 1735, một đoàn khảo sát gồm ba thành viên của Viện Hàn lâm Khoa học Pháp: Pierre Bouger, Charles–Marie de La Condamine và Louis Godin được cử đến khu vực dãy núi Andes ở Nam Mỹ do Tây Ban Nha quản lý lúc đó để tiến hành đo độ dài của vĩ độ ở xích đạo. Đồng thời, năm 1736, Maupertuis đích thân dẫn đoàn đi đo độ dài vĩ độ tại Lapland, Phần Lan. Các kết quả của hai chuyến khảo sát này cho thấy Newton đã đúng: Trái Đất phình ra hơn ở xích đạo và dẹt hơn ở hai cực.

*Hình 6. Maupertuis đo độ dài vĩ độ tại Lapland.*

Trong thời gian này, Bouger cũng đã tiến hành đo trọng lực tại những độ cao và vĩ độ khác nhau thông qua việc xác định chu kỳ của con lắc đơn. Bouger đã chỉ ra ba nhân tố ảnh hưởng đến giá trị của gia tốc trọng trường $g$ trong thực tiễn:

- Vĩ độ: khi vĩ độ tăng, khoảng cách từ vị trí của ta đến trục quay của Trái Đất cũng tăng nên lực quán tính ly tâm do chuyển động quay của Trái Đất cũng giảm theo.
- Độ cao: Tại độ cao $h$ so với mực nước biển, ta có $g = \dfrac{GM}{(R+h)^2}$ với $G$ là hằng số hấp dẫn, còn $M$ và $R$ lần lượt là khối lượng và bán kính Trái Đất. Sử dụng xấp xỉ bậc nhất ta có: $g \approx \dfrac{GM}{R^2}\left(1 - \dfrac{2h}{R}\right)$.
- Địa hình: Do khoảng không giữa vị trí đo và mực nước biển không phải là không khí mà là dãy núi, Bouger tiến hành tính toán ảnh hưởng từ lực hấp dẫn của các đối tượng này lên giá trị trọng lực đo được. Nếu coi toàn bộ khoảng không giữa Trái Đất (bán kính $R$) và vị trí đo có một vỏ cầu bề dày $h$ thì thành phần trọng lực do vỏ cầu này gây ra tại độ cao $h$ sẽ bằng $4\pi Gh\rho'$ với $\rho'$ là mật độ của vỏ cầu. Để mô phỏng tốt hơn dãy núi Andes, Bouger sử dụng một hình lăng trụ dài vô hạn có thiết diện là một tam giác vuông cân. Từ trường hợp này, có thể tính được thành phần trọng lực với các giá trị khác nhau của góc giữa hai cạnh bên của dãy núi. Khi hai cạnh của dãy núi tạo với nhau góc $180°$, ta được mặt phẳng Bouger, một mặt phẳng giả tưởng mà ngày nay vẫn được các nhà địa vật lý sử dụng để hiệu chỉnh giá trị đo trọng lực.

*Pierre Bouger* (1698 – 1758).

Từ dữ liệu ở hai điểm có độ cao khác nhau, Bouger tính được rằng tỷ lệ mật độ của dãy núi Andes so với mật độ của Trái Đất là $\dfrac{850}{3993}$. Giá trị mật độ đo được ngày nay của dãy Andes và Trái Đất lần lượt là $2{,}7$ và $5{,}515\, g/cc$. Tuy giá trị mà Bouger tính được không chính xác nhưng nó cho thấy một phương pháp để xác định khối lượng Trái Đất (khi đã biết bán kính của nó): đánh giá biến thiên trọng lực gây ra bởi một ngọn núi để tìm mật độ của Trái Đất.

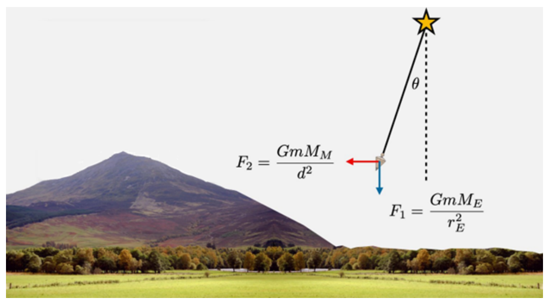
Để tiến hành tính khối lượng Trái Đất, Bouger và La Condamine cần một ngọn núi cách biệt với các ngọn núi khác (thay vì nhiều đỉnh núi liền nhau như Bouger đã đo trên dãy Andes) để việc ước lượng khối lượng của nó dễ dàng hơn. Họ chọn ngọn núi Chimborazo (ngày nay thuộc Ecuador).

*Hình 7. Núi Chimborazo (Ecuador ngày nay).*

Việc đo đạc được tiến hành năm 1738 tại hai vị trí cùng vĩ độ: một ở xa và một ở gần ngọn núi (thay vì trên đỉnh núi). Khi đó ở vị trí gần ngọn núi, lực hấp dẫn của ngọn núi sẽ làm con lắc bị lệch khỏi phương thẳng đứng. Độ lệch này sẽ được xác định bằng cách so phương dây dọi với phương quan sát tới cùng một ngôi sao tại hai địa điểm. Sau khi xác định góc lệch do lực hấp dẫn của ngọn núi gây ra, tỷ lệ mật độ giữa ngọn núi và Trái Đất có thể được xác định thông qua biến đổi toán học (thể tích của ngọn núi cần được tính thông qua các công thức giải tích). Ước lượng cho khối lượng Trái Đất mà Bouger công bố sau khi trở lại Pháp không quá chính xác do những sai sót trong việc tính thể tích ngọn núi cũng như giả thuyết rằng lực hấp dẫn của ngọn núi tương đương với lực hấp dẫn của một chất điểm có cùng khối lượng đặt ở trọng tâm (giả thuyết này chỉ đúng với hình cầu).

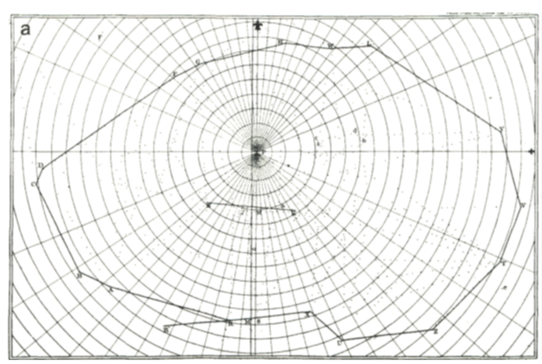
*Nevil Maskelyne* (1732 – 1811).

Dù Bouger đề nghị các nhà khoa học khác ở châu Âu tiến hành những thí nghiệm tương tự, phải nhiều năm sau việc này mới lại được nhắc đến. Năm 1772, Nevil Maskelyne đề xuất tiến hành một thí nghiệm như vậy tại Anh. Cuối cùng, ngọn núi Schiehallion ở Scotland được chọn do nó đủ lớn, cách xa các đỉnh núi khác và có hình dạng dễ tính toán. Các dữ liệu từ lần đo này được nhà toán học Charles Hutton xử lý. Kết quả cuối cùng cho mật độ Trái Đất là $4{,}5\,g/cc$. Nếu sử dụng các dữ liệu hiện đại về địa hình cũng như mật độ của đá núi tại địa điểm đó, kết quả đúng sẽ là $5{,}480\,g/cc$, rất gần với giá trị $5{,}515\,g/cc$ ngày nay.




*Hình 8. Thí nghiệm ở núi Schiehallion (Scotland).*

Một điểm đáng chú ý là Hutton đã biểu diễn các điểm có cùng độ cao bằng một đường gấp khúc khi mô tả địa hình của khu vực xung quanh Schiehallion. Các đường này đã trở thành các đường đồng mức được sử dụng phổ biến trong bản đồ địa hình cũng như trong các biểu diễn dữ liệu kỹ thuật.

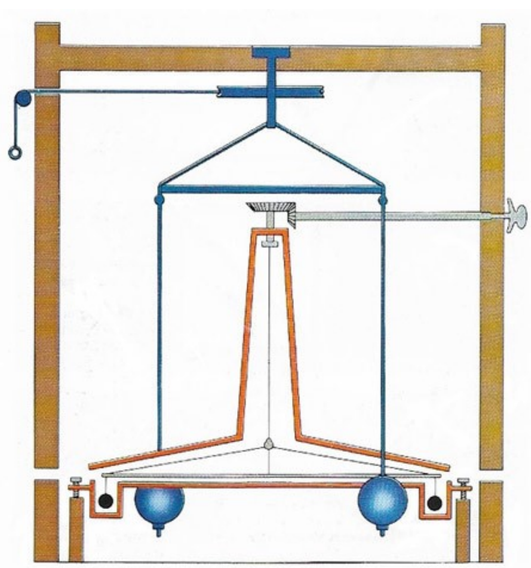



*Hình 9. Đường đồng mức độ cao của Charles Hutton.*

Trong thế kỷ 19, với các cuộc khảo sát sử dụng con lắc đơn để đo trọng lực ở khu vực Ấn Độ, các nhà khoa học Anh đã nhận thấy độ lệch của con lắc khi ở gần dãy núi Himalaya không lớn như các tính toán lý thuyết. Các nghiên cứu của các nhà khoa học John Pratt và George Airy về vấn đề này đã dẫn đến mô hình trong đó lớp vỏ Trái Đất thực chất đang nổi trên một lớp dung nham nóng chảy ở phía dưới. Phải đến giữa thế kỷ 20, người ta mới khẳng định được vấn đề này nhờ các phát hiện chứng minh cho thuyết kiến tạo lục địa.

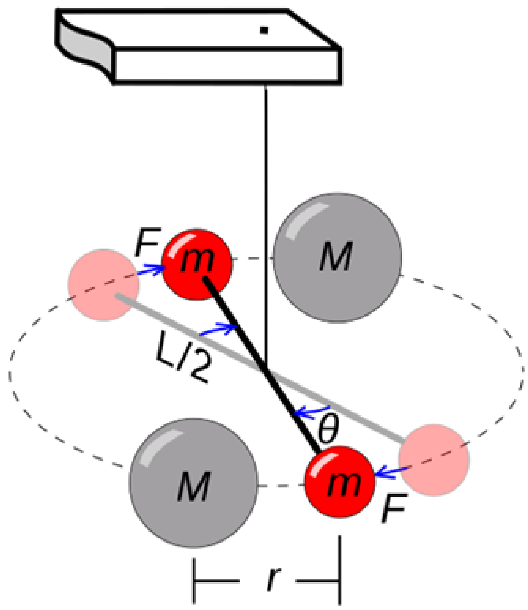
### 3. Thí nghiệm của Cavendish

Liệu có cách nào để đo khối lượng Trái Đất mà không cần đi đến những ngọn núi xa xôi? Năm 1797, Henry Cavendish đã tiến hành một thí nghiệm như vậy ngay tại London. Dựa trên những thiết bị chưa hoàn thiện của John Michell, ông đã thiết kế thí nghiệm đo lực hấp dẫn thông qua momen xoắn.



*Hình 10. Sơ đồ thí nghiệm của Cavendish. Các viên bi m có màu đen còn các quả nặng bằng chì M có màu xanh.*

Về cơ bản, ta có hai quả cầu nhỏ $m$ và hai quả cầu lớn $M$ bằng chì. Lực hấp dẫn do các quả cầu lớn tác dụng lên các quả cầu nhỏ sẽ tạo một momen xoắn làm xoay dây treo. Bằng cách xác định góc lệch của thanh nối hai quả cầu nhỏ, ta có thể tính được momen xoắn cũng như độ lớn của lực hấp dẫn.



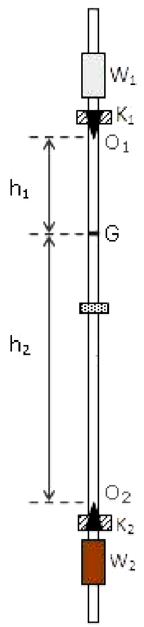

*Hình 11. Các lực hấp dẫn tạo momen xoắn làm lệch dây treo.*

Do khoảng cách giữa $M$ với $m$ và khoảng cách từ $m$ đến tâm Trái Đất cũng như khối lượng của $m$ đều là đã biết, thí nghiệm của Cavendish cho phép xác định khối lượng Trái Đất qua tỷ lệ giữa lực hút của $M$ với $m$ và trọng lực tác dụng lên $m$. Với giả sử Trái Đất là hình cầu, kết quả của Cavendish cho mật độ của Trái Đất là $5{,}448 g/cc$.

Bản thân thí nghiệm này cũng cho phép tính được hằng số hấp dẫn $G$ từ độ lớn của lực hấp dẫn giữa $M$ và $m$. Số liệu của Cavendish cho giá trị của $G$ chỉ khác 1% so với số liệu hiện đại nhất. Cho đến ngày nay, việc đo momen xoắn vẫn là phương pháp chủ yếu cho các thí nghiệm độ chính xác cao để xác định hằng số hấp dẫn.

### 4. Đo trọng lực thời hiện đại

Trong thế kỷ 19, đã có một số nỗ lực cải thiện độ chính xác của việc đo trọng lực. Vào đầu thế kỷ, Henry Kater đề xuất sử dụng con lắc vật lý thay cho con lắc đơn. Con lắc này gồm một vật nặng cố định $W_2$ và một vật nặng có thể di chuyển $W_1$. Trọng tâm $G$ của hệ sẽ thay đổi khi $W_1$ di chuyển. Con lắc Kater có thể được cho dao động quanh một trong hai điểm tựa $O_1$ hoặc $O_2$. Gọi $h_1$ và $h_2$ là khoảng cách từ các điểm này đến $G$.




*Hình 12. Con lắc thuận nghịch của Kater.*

Khi dao động quanh $O_1$, momen quán tính của con lắc là $I_1 = I_G + Mh_1^2$ với $I_G$ là momen quán tính của con lắc quanh $G$ và $M$ là tổng khối lượng của cả hệ. Phương trình dao động cho góc lệch nhỏ khi đó là:

$$I_1\theta'' = -Mgh_1\theta$$

cho ta chu kỳ dao động:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\left(h_1^2 + \frac{I_G}{M}\right)}{gh_1}}$$

Tương tự cho $T_2$, sau khi biến đổi đại số ta có:

$$h_1T_1^2 - h_2T_2^2 = \frac{4\pi^2}{g}\left(h_1^2 - h_2^2\right)$$

do đó:

$$g = \frac{8\pi^2}{\frac{T_1^2+T_2^2}{h_1+h_2} + \frac{T_1^2-T_2^2}{h_1-h_2}}.$$

Khi $h_1 = h_2$, ta có $T_1 = T_2 = T$ và $g = \frac{4\pi^2}{T^2}(h_1+h_2)$.

Khi sử dụng, người ta cần chỉnh vị trí của $W_1$ sao cho $T_1 = T_2$ trong khi đó $h_1 + h_2$ chính là khoảng cách $O_1O_2$ đã biết.

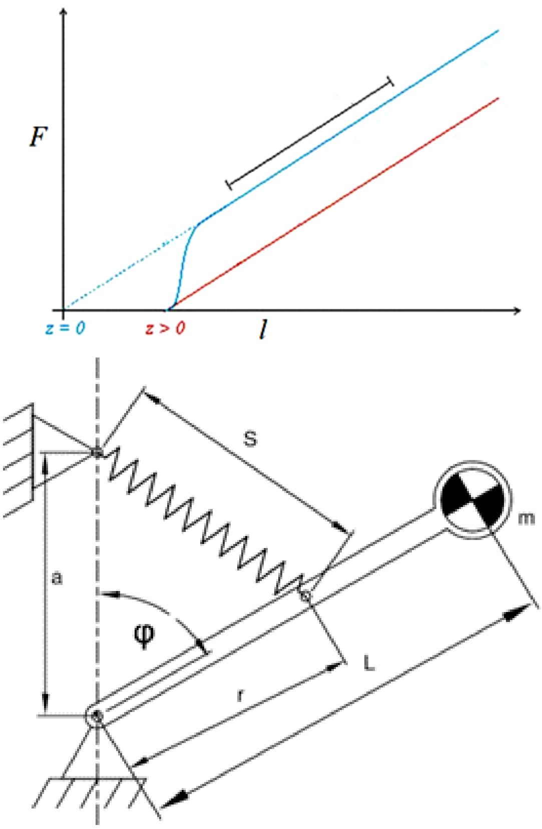
Thiết kế này được nhà toán học Friedrich Bessel cải tiến bằng cách cho khối lượng của $W_1$ và $W_2$bằng nhau. Khi đó, với các giá trị của $T_1$ và $T_2$ gần nhau, có thể tính được T theo công thức:

$$T^2 = \frac{T_1^2+T_2^2}{2} + \frac{T_1^2-T_2^2}{2}\left(\frac{h_1+h_2}{h_1-h_2}\right).$$

Với thay đổi này, việc hiệu chỉnh con lắc trở nên đỡ phức tạp hơn nhiều.

Đến cuối thế kỷ 19, nhà vật lý Eötvös bắt đầu sử dụng các thiết bị tương tự như của Cavendish để đo trọng lực phục vụ khảo sát địa chất ở Hungary. Một số thiết bị dạng này cũng được sản xuất ở một số nơi khác nhau trên thế giới. Người ta hi vọng rằng việc khảo sát sự biến thiên của trọng lực ở các vị trí khác nhau có thể giúp phát hiện các bất thường dưới lòng đất như mỏ quặng, mỏ dầu, khí gas, ... Tuy nhiên, việc đo đạc chiếm thời gian quá dài và đòi hỏi độ chính xác cao khi thao tác là một khó khăn lớn.

Đến giai đoạn trước chiến tranh thế giới thứ hai, Lucien LaCoste, khi đang theo học cao học tại đại học Texas, Austin, đã phát minh ra một thiết bị đo trọng lực mới sử dụng lò xo. Ý tưởng về việc sử dụng lực đàn hồi lò xo để đo trọng lực đã được đưa ra từ thế kỷ 19 nhưng nhiều vấn đề về kỹ thuật đã dẫn đến việc thiết kế thiết bị dạng này không hiệu quả. LaCoste sử dụng một loại lò xo "độ dài zero". Với loại lò xo này, sẽ có một khoảng hoạt động mà trong đó lực đàn hồi tỷ lệ thuận với độ dài lò xo (thay vì tỷ lệ thuận với độ lệch từ độ dài tự nhiên). Các trọng lực kế theo dạng LaCoste có độ chính xác cao và nhanh chóng được sử dụng phổ biến ngày nay trong các khảo sát địa chất. Trọng lực kế của công ty LaCoste còn được NASA đưa lên Mặt Trăng để khảo sát trọng lực trên thiên thể này.




*Hình 13. Trên: Sự phụ thuộc của lực đàn hồi vào độ dài lò xo của lò xo độ dài zero (xanh) và lò xo thông thường (đỏ). Dưới: một thiết bị đo trọng lực theo dạng LaCoste, trong đó trọng lực tác dụng lên vật m và lực đàn hồi của lò xo có cân bằng về momen quay.*

Với các khảo sát bằng máy bay, do phải xử lý các gia tốc gây ra do lực quán tính khi máy bay chuyển động trên bầu trời, người ta thiết kế những thiết bị rất phức tạp gồm nhiều thành phần tương tự với các thiết bị đo momen xoắn từ thời Eötvös. Đồng thời, với sự ra đời của máy tính điện tử, bản đồ trọng lực có thể được thiết lập từ việc tính toán các dịch chuyển nhỏ của quỹ đạo các vệ tinh quay quanh Trái Đất. Đây cũng là một trong những công nghệ có vai trò quan trọng để tăng độ chính xác của việc định vị GPS.

## 5. Lời kết

Có thể thấy, trong khoa học và kỹ thuật, những vấn đề lý thuyết và thực nghiệm luôn đan xen thúc đẩy lẫn nhau. Những thí nghiệm cơ học của Galileo cũng như các kết quả thiên văn của Kepler lại cần đến giải tích của Newton để xây dựng lý thuyết về lực hấp dẫn. Đồng thời, trong khi Newton cho rằng người ta không thể nào đo lực hấp dẫn giữa các vật thể nhỏ hơn các thiên thể trong vũ trụ thì các nhà thực nghiệm lại chứng minh điều ngược lại nếu ta có thể thiết kế và sáng tạo được các dụng cụ và phương pháp đo đủ chính xác. Pi sẽ còn tiếp tục giới thiệu tới độc giả nhiều vấn đề thú vị khác trong lịch sử khoa học trong những số tiếp theo.

Gần đây, một bài hát đã được sáng tác kể về thí nghiệm cân Trái Đất của Maskelyne. Độc giả quan tâm có thể tìm trên Internet bài hát mang tên Schiehallion của ca sĩ Iona Lane.

## Tài liệu tham khảo

[1] Ferreiro, L. D. (2011). *Measure of the Earth*. Basic Books.

[2] Milsom, J. (2018). *The Hunt for Earth Gravity : A History of Gravity Measurement from Galileo to the 21st Century*. Springer International Publishing.

[3] Smallwood, J. R. (2007). Maskelyne's 1774 Schiehallion experiment revisited. *Scottish Journal of Geology*, 43(1), 15 – 31. https://doi.org/10.1144/sjg43010015

# CÁC NHÀ TOÁN HỌC HY LẠP
## Bài 4: Euclid

TẠ DUY PHƯỢNG[1]

**Nhập đề.** Chúng ta có rất ít thông tin về cuộc đời các nhà toán học Hy Lạp vĩ đại. Euclid cũng không ngoại lệ. Tất cả những gì được biết về ông chứa trong một vài câu tóm tắt của Proclus: (Euclid, người đã viết *Cơ sở* (*Elements*), trong đó tập hợp nhiều định lý của Eudoxus, hoàn thiện nhiều kết quả của Theaetetus, đồng thời đã chứng minh rõ ràng, chặt chẽ và sắp xếp lại trong một trật tự logic rất nhiều kết quả chỉ được chứng minh một cách lỏng lẻo bởi những người đi trước.)

Như vậy, ngay cả nhà triết học Proclus (411 – 485 Công nguyên, viết tắt: CN), người đã viết nhiều cuốn sách về triết học và toán học Hy Lạp, trong đó có cuốn sách bình luận về *Cơ sở* của Euclid [8], cũng không cho biết chính xác năm sinh, năm mất và nơi sinh của Euclid. Proclus chỉ cho biết Euclid trẻ hơn các học trò đầu tiên của Plato, nhiều tuổi hơn Eratosthenes và Archimedes. Plato mất vào năm 347 trước Công nguyên (viết tắt: TCN) và Archimedes sống trong khoảng năm 287 đến 212 TCN. Vì vậy, các nhà viết sử cho rằng Euclid sống vào khoảng những năm 300 TCN, dưới thời Ptolemy I, người trị vì từ 306 đến 283 TCN và Ptolemy II (309 – 246 TCN, người trị vì từ 284 đến 246 TCN).

Phần đầu bài viết này giới thiệu nội dung cơ bản và những đánh giá về *Cơ sở* và các tác phẩm khác của Euclid, chủ yếu dựa trên [1]. Các phần sau dựa trên sự tổng hợp của các tài liệu [1]–[8].

**Bối cảnh ra đời của Elements.** Alexander Đại đế đã chinh phục phần lớn thế giới trong vòng 12 năm (334 – 323 TCN). Vì quân đội của ông chủ yếu là người Hy Lạp nên ông đã truyền bá văn hóa Hy Lạp sang một phần rộng lớn của vùng Cận Đông. Tiếp theo là

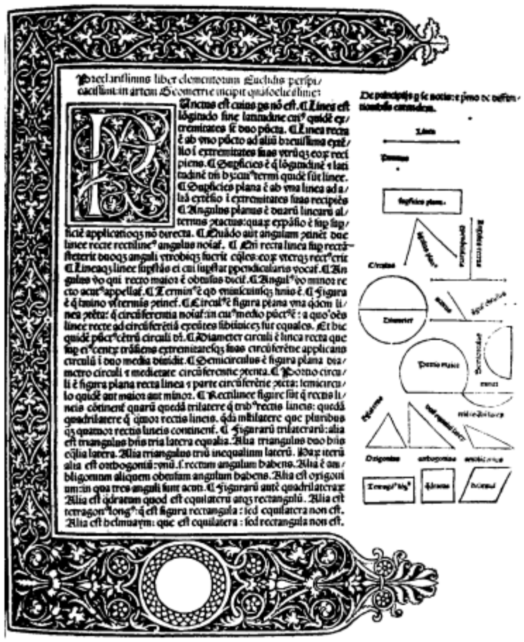
[1] *Cộng tác viên Viện Toán học.*

một chương mới của lịch sử, được gọi là *Thời đại Hy Lạp hóa* (Hellenistic) hoặc *tựa Hy Lạp* (Greek–like), kéo dài trong ba thế kỷ, cho đến khi đế chế La Mã được thành lập.

Sau khi Alexander qua đời, Ptolemy, một trong những vị tướng hàng đầu của Alexander, trở thành Thống đốc của Ai Cập và hoàn thành việc xây dựng thành phố Alexandria. Alexandria nhanh chóng tỏa sáng và làm lu mờ Athens, khiến Athens bị giảm xuống vị thế của một thành phố tỉnh lẻ. Trong gần 1000 năm, Alexandria là trung tâm phát triển của văn hóa Hy Lạp hóa.

Các thế hệ vua Ptolemy đã làm hết mình để biến Alexandria thành trung tâm của đời sống trí thức cho toàn bộ Địa Trung Hải. Họ đã xây dựng một trung tâm lớn của học thuật, gọi là *Bảo tàng* (Musaeum), ở đây có nghĩa là *Ngôi đền của các nàng thơ* (Temple of the Muses), tiền thân của trường đại học hiện đại. Các học giả hàng đầu của thời đại–các nhà khoa học, nhà thơ, nghệ sĩ và nhà văn–đã đến Alexandria theo lời mời của các vua Ptolemy với lòng hiếu khách đặc biệt. Các học giả có thể ở lại *Bảo tàng* bao lâu tùy thích, Tại *Bảo tàng*, họ có thời gian rảnh rỗi để theo đuổi việc nghiên cứu, tiếp cận các sách cổ trong thư viện và có cơ hội thảo luận các vấn đề với các chuyên gia. Ngoài ăn ở miễn phí, họ được trả lương, với yêu cầu duy nhất là họ phải giảng bài. Các học giả sống trong *Bảo tàng* với chi phí của nhà vua trong điều kiện sang trọng, với các phòng giảng rộng rãi và lộng lẫy, có thể đi dạo trong các hành lang với các hàng cột tráng lệ. Bảo tàng có một phòng ăn rộng lớn, nơi các học giả dùng bữa cùng nhau.

Được xây dựng như một tượng đài cho sự huy hoàng của dòng họ Ptolemy, *Bảo tàng* đã là một cột mốc quan trọng trong lịch sử khoa học. Nó được xây dựng như là một tổ chức nghiên cứu và học thuật, hơn là một cơ quan giáo dục, cho các học giả và các nhà khoa học đến sống và làm việc tại đây hàng mấy thế kỷ. Ở đỉnh cao của nó, trung tâm này có đến vài trăm chuyên gia, sự hiện diện của họ đã thu hút nhiều thế hệ trẻ háo hức đến học tập và phát triển tài năng. Khoa học và toán học thời kỳ này đã phát triển với thành công đáng kể. Trong lịch sử toán học chỉ có một thời gian khác trong khoảng 200 năm có thể so sánh với giai đoạn 300 – 100 trước Công nguyên, đó là khoảng thời gian từ Kepler đến Gauss (1600 – 1850).



*Một trang từ cuốn sách Elements của Euclid in lần đầu tiên bằng tiếng Latin năm 1482.*

Các học giả không thể sống mà không có sách, vì vậy nhu cầu đầu tiên là thu thập các bản thảo. Được thành lập gần như đồng thời với *Bảo tàng* và liền kề với nó là *Thư viện lớn* của Alexandria, nơi chứa bộ sưu tập lớn nhất các tác phẩm Hy Lạp còn tồn tại. Tất nhiên trước đó đã có những thư viện, nhưng không có thư viện nào sở hữu những tài nguyên lớn như thư viện Alexandria. Các bản thảo được tìm kiếm trên khắp thế giới và có những đại lý được ủy quyền để sao chép các tác phẩm nếu không mua được chúng. Du khách đến Alexandria được yêu cầu giao nộp bất kỳ cuốn sách nào chưa có trong thư viện.

Trước khi Bảo tàng chìm vào quên lãng năm 641, nó đã tạo ra nhiều tác phẩm nổi bật của các học giả, xác định tiến trình phát triển của toán học trong nhiều thế kỷ: Euclid, Archimedes, Apollonius, Ptolemy và Diophantus.

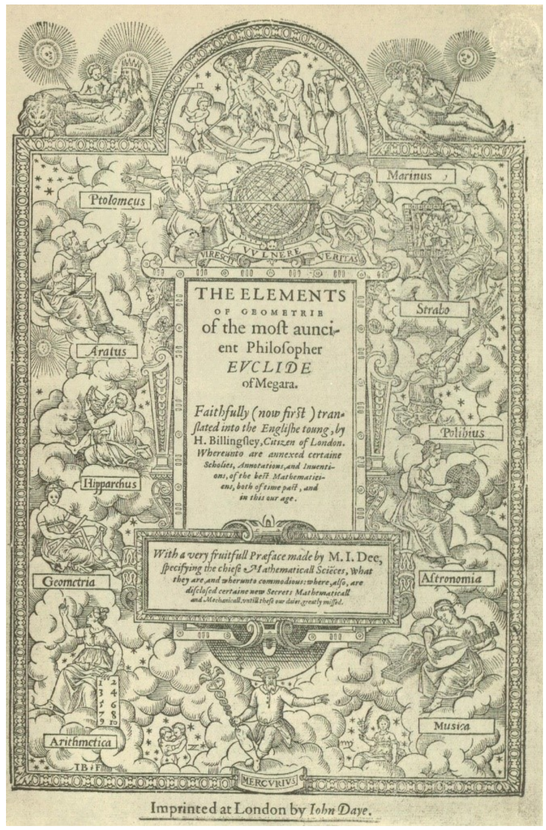
Các nhà lịch sử thống nhất cho rằng, Euclid là một học giả tích cực của *Bảo tàng* và *Thư viện*, dưới triều đại Ptolemy I và II.

Hậu thế biết đến Euclid như là tác giả của *Cơ sở của hình học* (*Elements of Geometry*), một cuốn sách toán học quan trọng nhất của văn hóa Hy Lạp và có lẽ của tất cả các thời đại. *Cơ sở* là tập hợp các kiến thức quan trọng nhất vào thời điểm đó, được sắp xếp thành 13 phần, hay 13 chương (13 quyển). Sáu quyển đầu dành cho hình học phẳng, ba quyển tiếp theo về số học. Quyển X cung cấp mối liên hệ giữa hai đại lượng: độ lớn (magnitude) được trình bày trong Quyển V và các con số (number) trong quyển VII. Quyển XI nghiên cứu hình học không gian và Quyển XII trình bày phương pháp vét cạn (method of exhaustion) cho cả hình phẳng và hình không gian. Và cuối cùng, Quyển XIII trình bày năm khối đa diện đều và phân loại các đường đã được trình bày trong Quyển X.

Mặc dù đã có một vài cuốn sách toán trước *Cơ sở*, nhưng không quyển nào được bảo tồn, vì lý do rõ ràng là tất cả đã bị lu mờ và được thay thế bởi cuốn sách của Euclid.

Mặc dù phần lớn kết quả đã có từ trước, nhưng sự sắp xếp hợp lý đến tuyệt vời của các định lý và sự phát triển của các sự kiện cho thấy thiên tài của Euclid. Ông đã hợp nhất các khám phá biệt lập thành một hệ thống các định đề, định nghĩa và tiên đề ban đầu, để từ đó suy ra các kết quả (định lý) theo một thứ tự suy diễn duy nhất.

Gần như không có cuốn sách nào quan trọng đối với tư tưởng và giáo dục của phương Tây hơn là *Cơ sở* của Euclid. Hiếm có cuốn sách nào, ngoại trừ Kinh Thánh, đã được xuất bản, lưu hành và nghiên cứu rộng rãi như *Cơ sở*. Trong suốt 2000 năm, sáu cuốn sách đầu tiên của *Cơ sở* là sách giáo khoa hình học của học sinh. Hơn 1000 phiên bản của *Cơ sở* đã xuất hiện kể từ bản in đầu tiên bằng tiếng Latin ra đời năm 1482. Và trước đó, các bản sao viết tay đã thống trị phần lớn việc giảng dạy toán học ở châu Âu.




*Bìa trước của bản dịch tiếng Anh đầu tiên của Henry Billingsley năm* 1570.

Mặc dù danh tiếng của Euclid, cả trong thời cổ đại và thời hiện đại, hầu như chỉ dựa vào *Cơ sở*, nhưng ông còn là tác giả của ít nhất 10 tác phẩm khác về nhiều chủ đề khác nhau. Văn bản tiếng Hy lạp cuốn *Dữ liệu* (*Data*), một tuyển tập gồm 95 bài tập có lẽ dành cho những sinh viên đã hoàn thành *Cơ sở*, là văn bản duy nhất khác của Euclid về hình học còn tồn tại. Một chuyên luận, *Các thiết diện conic* (*Conic Sections*), là nền tảng của bốn cuốn sách đầu tiên trong tác phẩm cùng tên của Apollonius, đã bị thất lạc. Và tác phẩm *Các hệ quả* (*Porisms*) cũng chung số phận. Rõ ràng *Các thiết diện conic* là một cuốn sách về hình học cao cấp, là một bản cổ xưa nhất của hình học giải tích. Ngoài ra, ông còn có *Phân chia các hình* (*Division of Figures*), *Hiện tượng* (*Phaenomena*), và *Quang học* (*Optics*),...

Chúng ta biết rất ít về cuộc sống cá nhân của Euclid. Chỉ biết chắc chắn ông đã thành lập một trường học và giảng dạy ở Alexandria, nhưng không có gì khác được biết ngoại trừ điều đó. Có khả năng ông đã được đào tạo toán học ở Athens dưới sự dẫn dắt của các học trò của Plato. Hai giai thoại sau có thể là những minh chứng cho tính cách của Euclid. Giai thoại thứ nhất kể rằng, khi nhà vua Ptolemy I hỏi ông liệu có con đường nào ngắn để tiếp thu hình học hơn là *Cơ sở* không, ông đã trả lời: "Thưa Bệ hạ, không có con đường hoàng gia tới hình học" ("There is no royal road to Geometry"), ngụ ý là toán học bình đẳng với tất cả mọi người, Một câu chuyện khác, do Stobaeus (thế kỷ 5) kể lại, liên quan đến một thanh niên bắt đầu học hình học với Euclid và hỏi, sau khi đã học các định lý đầu tiên: "Nhưng tôi sẽ nhận được gì sau khi học những điều này?" Euclid đã gọi người hầu của mình đến và bảo rằng: "Hãy cho người đàn ông này một đồng xu, vì anh ta phải kiếm được lợi nhuận từ những gì anh ta học được." Lời quở trách có lẽ đã được chuyển thể từ một câu châm ngôn của trường phái Pythagoras: "Một sơ đồ và một bước (trong kiến thức), không phải là một sơ đồ và một đồng xu." ("A diagram and a step (in knowledge), not a diagram and a coin.") Thiết nghĩ những câu chuyện này vẫn còn mang tính thời sự đến tận ngày nay.

## Cơ sở hình học của Euclid

Trong hơn hai nghìn năm, Euclid đã là người phát ngôn của hình học Hy Lạp, sự sáng tạo tuyệt vời nhất của trí tuệ Hy Lạp. Kể từ thời của ông, việc nghiên cứu *Cơ sở* là điều cần thiết với một nền giáo dục khai phóng. Thế hệ này qua thế hệ khác đã coi *Cơ sở* là đỉnh cao của logic, và nghiên cứu nó là cách tốt nhất làm cơ sở cho suy luận chính xác. Chỉ trong vòng 100 năm trở lại đây, *Cơ sở* mới bắt đầu bị thay thế bởi các sách giáo khoa hiện đại. Tuy nhiên, tác phẩm của Euclid vẫn là mô hình tối cao về toán học thuần túy.

Bất kỳ ai quen thuộc với quá trình thao tác trí tuệ đều nhận ra rằng nội dung của *Cơ sở* không thể là nỗ lực của một cá nhân đơn lẻ. Có lẽ không nhiều các định lý được thiết lập trong *Cơ sở* là do chính Euclid khám phá ra. Sự vĩ đại của Euclid nằm ở chỗ ông đã sắp xếp một khối lượng lớn các kiến thức độc lập của toán học Hy Lạp về hình học và lý thuyết số vào một trật tự logic chặt chẽ, có quan hệ mật thiết với nhau. Kết quả này tiếp nối kết quả khác với tối thiểu các giả thiết. Uy tín của *Cơ sở* lớn đến mức tác giả của nó hiếm khi được gọi bằng tên mà bằng *Tác giả của Elements* hoặc đơn giản là *Nhà hình học*.

Euclid nhận thức được rằng để tránh vòng luẩn quẩn và cung cấp một điểm khởi đầu, một số sự kiện về bản chất của đối tượng phải được coi là một sự thật hiển nhiên mà không cần chứng minh, được gọi là các *tiên đề*. Theo một nghĩa nào đó, chúng là những "luật chơi" mà từ đó tất cả các suy luận có thể tiến hành, là nền tảng mà toàn bộ các định lý phải dựa vào.

Euclid đã cố gắng xây dựng toàn bộ tòa nhà kiến thức hình học Hy Lạp, được tích lũy kể từ thời Thales, trên 5 định đề có bản chất hình học cụ thể và 5 tiên đề được dùng làm nền móng cho toàn bộ lâu đài toán học. Ba định đề đầu tiên là định đề xây dựng, khẳng định những gì chúng ta được phép vẽ. Từ đó, ông suy ra từ 10 giả định này 465 mệnh đề qua một chuỗi suy luận logic, sử dụng chúng như những viên đá lót đường trong một cuộc diễu hành có trật tự từ một mệnh đề đã được chứng minh sang một mệnh đề khác. Điều kỳ diệu là rất nhiều mệnh đề thú vị có thể thu được chỉ từ một vài tiên đề được lựa chọn một cách khôn ngoan.

Đột ngột và không có bình luận giới thiệu, cuốn sách đầu tiên của *Cơ sở* mở ra với danh sách 23 định nghĩa (xem [2*b*], trang 16 – 18). Chúng bao gồm, thí dụ, điểm là gì, đường là gì (Định nghĩa 1, 2) và kết thúc bằng Định nghĩa 23: "Các đường thẳng song song là các đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và khi kéo dài đến vô tận ở cả hai hướng thì không gặp nhau ở cả hai hướng." Các định nghĩa này không được coi là định nghĩa theo nghĩa hiện đại. Mặc dù mơ hồ và không hữu ích trong một số khía cạnh, chúng cũng đủ để tạo ra một số hình ảnh trực quan nhất định. Một số thuật ngữ kỹ thuật được sử dụng, thí dụ chu vi đường tròn, hoàn toàn không được định nghĩa. Thật lạ lùng khi Euclid đã định nghĩa đường thẳng song song, lại không đưa ra một định nghĩa chính thức về hình bình hành.

Sau các định nghĩa, Euclid đặt ra 10 nguyên tắc mà chứng minh các mệnh đề và định lý phải dựa trên. Đó là (xem thêm [2*b*], trang 19 – 20):

**Các định đề:**

1. Cùng quy ước rằng có thể vẽ một đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ.

2. Và có thể kéo dài liên tục một đoạn thẳng thành đường thẳng.

3. Có thể vẽ một đường tròn có tâm và bán kính bất kỳ.

4. Tất cả các góc vuông đều bằng nhau.

5. Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng khác tạo thành các góc trong về cùng một phía [với nó] có tổng nhỏ hơn 2 góc vuông, thì hai đường thẳng (bị cắt) khi kéo dài ra vô tận sẽ cắt nhau ở phía của đường thẳng ban đầu mà tổng các góc trong nhỏ hơn 2 vuông (chứ không cắt ở phía bên kia).

**Các tiên đề:**

1. Những thứ cùng bằng một thứ thì bằng nhau.

2. Nếu cùng thêm những thứ bằng nhau vào những thứ bằng nhau thì những tổng sẽ bằng nhau.

3. Nếu cùng bớt những thứ bằng nhau vào những thứ bằng nhau thì những phần còn lại sẽ bằng nhau.

4. Các thứ trùng nhau thì bằng nhau.

5. Tổng thể thì lớn hơn bộ phận.

Định đề 5, còn gọi là *Định đề song song*, đã trở thành một trong những phát biểu nổi tiếng và gây tranh cãi nhất trong lịch sử toán học. Thậm chí có ý kiến cho rằng Euclid không hoàn toàn hài lòng với Định đề 5. Ông đã trì hoãn sử dụng của nó cho đến khi không thể tiến xa hơn nếu không có nó, mặc dù việc sử dụng nó sớm hơn sẽ đơn giản hóa nhiều chứng minh các định lý.

Hơn 2000 năm, từ lúc xuất hiện *Cơ sở* đến thế kỷ 19, các nhà toán học đã cố gắng rút ra định đề song song từ bốn định đề đầu tiên, tin rằng bốn định đề này cùng với 5 tiên đề là đủ cho sự phát triển hoàn chỉnh hình học Euclid. Tất cả những nỗ lực nhằm thay đổi trạng thái từ "Định đề 5" thành định lý" đều thất bại, vì mỗi nỗ lực đều dựa trên giả định ẩn tương đương với chính định đề đó.

Tuy nhiên, những nỗ lực này đã dẫn đến việc phát hiện ra hình học phi–Euclid, trong đó các Định đề của Euclid, ngoại trừ định đề song song đều đúng và các định lý của Euclid đều đúng, ngoại trừ những định lý dựa trên định đề song song. Thiên tài của Euclid thể hiện ở chỗ ông đã nhận ra rằng Định đề 5 đòi hỏi tuyên bố rõ ràng như một giả định, không thể được chứng minh.

Khi xem xét Định đề 5 Euclid, nhà toán học Giovanni Saccheri (1667 – 1733) đã phân loại:

Trường hợp 1: Qua điểm đã cho có duy nhất đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Trường hợp 2: Qua điểm đã cho có nhiều hơn một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Trường hợp 3: Qua điểm đã cho không có đường thẳng nào song song với đường thẳng đã cho.

Trường hợp 1 cho ta hình học Euclid, Trường hợp 2 dẫn đến hình học Lobachevsky, Trường hợp 3 cho ta hình học Riemann.

Việc xem xét kỹ lưỡng trong hơn 2000 năm đã phát lộ nhiều điểm sáng và những nhược điểm trong cách xử lý hình học của Euclid. Hầu hết các định nghĩa của ông đều dễ bị chỉ trích trên cơ sở này hay cơ sở khác. Xét cho cùng, một định nghĩa chỉ mang lại ý nghĩa của một từ theo nghĩa khác, đơn giản hơn– hoặc những từ mà ý nghĩa của nó đã rõ ràng. Những từ này đến lượt chúng lại được định nghĩa bằng những từ thậm chí còn đơn giản hơn. Rõ ràng quá trình định nghĩa như vậy phải có kết thúc. Cách duy nhất để tránh một vòng tròn luẩn quẩn là cho phép một số khái niệm ban đầu không được định nghĩa. Euclid đã nhầm khi cố gắng giải nghĩa toàn bộ từ vựng mà ông đã sử dụng. Chắc chắn điều này dẫn tới một số định nghĩa kỳ lạ và không thỏa đáng. Thí dụ: "Điểm là cái không thể chia nhỏ", "Đường không có chiều rộng". Vậy "chia nhỏ" và "chiều rộng" là gì? Ý tưởng về "điểm" và "đường thẳng" là những khái niệm cơ bản nhất trong hình học, chúng có thể được mô tả và được giải thích nhưng không thể được định nghĩa thỏa đáng bằng các định nghĩa đơn giản hơn chính chúng. Phải có một sự khởi đầu ở đâu đó trong một hệ thống khép kín, vì vậy chúng nên được chấp nhận không có định nghĩa.

Có lẽ sự phản đối lớn nhất đã được đưa ra chống lại tác giả *Cơ sở* là sự bất cập đáng tiếc trong các tiên đề của ông. Ngoài những thiếu sót hiển nhiên như không nêu được sự tồn tại của điểm và đường thẳng hoặc đường thẳng nối hai điểm là duy nhất, Euclid đã đưa ra một số giả định ngầm được sử dụng sau này trong các chứng minh nhưng không xuất phát từ các định đề. Khá nhiều chứng minh của Euclid dựa trên hình vẽ và bằng chứng trực quan. Điều này được minh họa bằng lập luận được sử dụng ngay trong mệnh đề đầu tiên dưới đây trong *Cơ sở*.

**Mệnh đề 1** Cho một đoạn $AB$. Tồn tại tam giác đều có đoạn thẳng là một trong các cạnh của nó.

**Chứng minh** Sử dụng Định đề 3, vẽ đường tròn tâm $A$ bán kính $AB$ đi qua điểm $B$. Từ tâm $B$ vẽ đường tròn bán kính $BA$ đi qua $A$. Từ giao điểm $C$ của hai đường tròn, dựng đoạn thẳng $CA$ và $CB$ (Định đề 1). Ta thấy $AC = AB$ và $BC = AB$ vì chúng là các bán kính của một đường tròn. Từ Tiên đề 1 suy ra $AC = AB = BC$. Vậy các đoạn thẳng $AB, AC, BC$ tạo thành tam giác đều có đoạn thẳng $AB$ cho trước là một cạnh.

**Lời bình.** Ở đây có một vấn đề: Trên cơ sở trực giác, ta thấy hai đường tròn tâm $A$ và tâm $B$ chắc chắn cắt nhau tại $C$. Tuy nhiên, mục đích của một lý thuyết tiên đề chính xác là phải cung cấp một hệ thống lý luận không phụ thuộc vào trực giác. Toàn bộ chứng minh sẽ đổ bể nếu các đường tròn ta xây dựng là không cắt nhau. Và điều này (đường tròn cắt nhau) không thể suy ra từ các định đề và tiên đề. Để khắc phục tình trạng này, phải bổ sung thêm một định đề đảm bảo tính "liên tục" của các đường thẳng và đường tròn. Các nhà toán học sau này đã phải bổ sung thêm:

*Nếu một đường tròn hoặc đường thẳng có một điểm ở ngoài và một điểm ở trong một đường tròn khác thì nó có hai điểm chung với đường tròn.*

Phát biểu đơn thuần của định đề liên quan đến các khái niệm "bên trong" và "bên ngoài" không xuất hiện rõ ràng trong *Cơ sở*. Nếu hình học muốn phát huy hết danh tiếng của nó về tính chặt chẽ logic hoàn hảo, thì nó phải chú ý đáng kể đến ý nghĩa của các thuật ngữ đó và các tiên đề chi phối chúng.

Trong suốt 25 năm cuối của thế kỷ 19, nhiều nhà toán học đã cố gắng xây dựng một hệ tiên đề đầy đủ và cần thiết để chứng minh tất cả các định lý quen thuộc từ lâu trong hình học Euclid. Nghĩa là, họ đã cố gắng bổ sung thêm những định đề nhằm mang lại tính rõ ràng và chặt chẽ cho những ý tưởng mà Euclid đã nhận ra bằng trực giác. Người thành công nhất trong lĩnh vực này là David Hilbert (1862 – 2943) với tác phẩm *Cơ sở Hình học* in năm 1899 [9] (Grundlagen der Geometrie, tiếng Anh: *Foundations of Geometry*). Trong tác phẩm này, Hilbert đã xây dựng lại hình học Euclid dựa trên năm nhóm tiên đề: các tiên đề về tính liên thông, các tiên đề về thứ tự, Tiên đề về song song (Tiên đề Euclid), các tiên đề về đồng dạng và Tiên đề về liên tục. Hệ tiên đề này phải bảo đảm tính *đơn giản*, tính *đầy đủ* và tính *độc lập*, khiến hình học Euclid trở nên hoàn hảo hơn.

## Lý thuyết số của Euclid

**Các tính chất chia hết.** Mặc dù công trình vĩ đại của Euclid có tựa đề *Cơ sở của Hình học*, chủ đề của nó mở rộng vượt xa những gì chúng ta bây giờ coi là hình học phổ thông. Quyển II và Quyển V hầu như chỉ có đại số (đại số hình học). Ba quyển VII, VIII, IX chứa tổng cộng 102 mệnh đề, được dành cho *số học Hy Lạp*, nghĩa là số học trên tập các số tự nhiên (với sự mở rộng chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỷ,...). Euclid đã viết các chương này chủ yếu dựa trên nội dung những cuốn sách số học có thể bắt nguồn từ trường phái Pythagoras. Tuy nhiên, ông đã sắp xếp toàn bộ các kiến thức đã có trong một trật tự hợp lý. Nhiều kết quả đã biết từ trước nhưng không phải cái nào cũng được chứng minh một cách chặt chẽ. Nhiều công trình về lý thuyết số được viết trước có thể đã không còn tồn tại. Vì vậy, không thể phân biệt được cái nào là đã có từ trước và cái nào là do Euclid khám phá.

Quyển VII mở đầu với danh sách 22 định nghĩa phân biệt các số khác nhau: số lẻ và số chẵn, số nguyên tố và hợp số, số hoàn hảo (là số bằng tổng các ước của nó, không tính chính nó).... Các định lý trong Quyển VII, VIII và IX là quen thuộc với học sinh phổ thông, nhưng ngôn ngữ chứng minh thì không quen thuộc. Xuyên suốt ba quyển sách này, mỗi số được thể hiện bằng một đoạn thẳng, do đó mỗi số được Euclid gọi là số $AB$. Mọi đoạn thẳng (độ dài bằng số vô tỷ) có thể không biểu diễn được dưới dạng số hữu tỷ, nhưng mọi số hữu tỷ đều được biểu diễn bằng các đoạn thẳng.

Do đó, Euclid không sử dụng cụm từ “là bội số của” hay “là thừa số của”, mà Ông thay thế bằng “được đo bằng” và “đo” tương ứng. Nghĩa là, một số $n$ được đo bằng một số $m$ khác nếu có số thứ ba $k$ sao cho $n = km$.

Quyển VII bắt đầu bằng hai mệnh đề mà ngày nay được gọi là “Thuật toán Euclid” tìm ước số chung lớn nhất (số đo) của hai số tự nhiên.

Từ các mệnh đề đã được chứng minh, ta tìm được các định lý tương tự trong số học. Mệnh đề 8 phát biểu rằng, $a = \frac{m}{n}b$ và $c = \frac{m}{n}d$ thì $a - c = \frac{m}{n}(b - d)$. Mệnh đề VII.24 nói rằng, nếu $a$ và $b$ nguyên tố cùng nhau với $c$, thì $ab$ nguyên tố cùng nhau với $c$. Quyển VII kết thúc bằng Mệnh đề VII.39 với quy tắc tìm bội số chung nhỏ nhất của các số.

Quyển VIII là quyển ít kết quả nhất trong số 13 cuốn của *Cơ sở*. Nó bắt đầu với các mệnh đề về cấp số nhân (Euclid gọi là *tỷ số liên tục*) và chuyển sang một số tính chất đơn giản của hình vuông và hình lập phương và kết thúc với Mệnh đề VIII.27: Nếu ta có một số “không gian” (solid number) dạng $ma \cdot mb \cdot mc$ và một số không gian đồng dạng $na \cdot nb \cdot nc$ thì tỷ số của chúng sẽ là $m^3 : n^3$ ,tức là như một khối lập phương đối với một khối lập phương.

Quyển IX, quyển cuối cùng trong ba quyển sách về lý thuyết số, chứa nhiều định lý quan trọng. Trong số đó nổi tiếng nhất là Mệnh đề IX.20 về sự tồn tại vô hạn số nguyên tố với chứng minh đơn giản bằng phản chứng: Giả sử tồn tại hữu hạn số nguyên tố. Gọi $P$ là tích của tất cả các số nguyên tố. Xét $N = P + 1$. Khi ấy theo giả thiết $N$ không thể là số nguyên tố, hay $N$ phải là hợp số. Do đó nó phải chia hết cho $p$ là một trong các số nguyên tố. Nhưng $N$ chia cho bất kỳ số nguyên tố $p$ nào trong tích $P$ cũng có số dư bằng 1. Điều vô lý này dẫn đến điều giả sử có hữu hạn số nguyên tố là sai. Vậy có vô hạn số nguyên tố.

Mệnh đề IX.14 chính là định lý mà ngày nay ta gọi là Định lý cơ bản của số học: *Bất kỳ số tự nhiên nào lớn hơn 1 cũng đều có thể biểu diễn được duy nhất dưới dạng tích của các số nguyên tố.*

Mệnh đề IX.35 là một mệnh đề thú vị, vì nó cho một phương pháp, rất tao nhã, tính tổng các số hạng của cấp số nhân như sau: Từ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ldots = \frac{a_2}{a_1},$$

theo tính chất của tỷ lệ thức (Quyển VII), suy ra

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \ldots = \frac{a_3 - a_2}{a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}.$$

Cộng tử với tử, mẫu với mẫu của tỷ lệ thức, ta có

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

Vậy $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$,

trong đó $a = a_1$ là số hạng đầu tiên của cấp số nhân, $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ là tổng của $n$ số hạng đầu của cấp số nhân và $r = \frac{a_2}{a_1}$ là tỷ lệ (công bội).

Mệnh đề tiếp theo, cũng là mệnh đề cuối cùng trong Quyển IX nói về số hoàn hảo: Nếu $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ là số hoàn hảo, thì $2^{n-1}(2^n - 1)$ cũng là số hoàn hảo. Điều này có thể được chứng minh dễ dàng theo định nghĩa số hoàn hảo trong Quyển VII. Người Hy Lạp đã biết bốn số hoàn hảo: 6, 28, 496 và 8128. Euclid không trả lời câu hỏi ngược lại: Công thức trên có cung cấp tất cả các số hoàn hảo không. Euler đã chứng minh rằng mọi số hoàn hảo chẵn đều có dạng trên, nhưng câu hỏi về sự tồn tại số hoàn hảo lẻ vẫn chưa có lời giải. Hiện nay người ta mới chỉ biết 39 số hoàn hảo (chẵn).

**Tính vô ước của các đoạn thẳng (sự tồn tại số vô tỷ).** Quyển X của tập *Cơ sở*, trước khi đại số hiện đại ra đời, là tác phẩm được ngưỡng mộ nhất và cũng là đáng sợ nhất. Nó chứng minh sự tồn tại của số vô tỷ và liên quan đến sự phân loại có hệ thống của các đoạn không thông ước (hai đoạn thẳng có độ dài $a$ và $b$ được gọi là thông ước nếu tồn tại đoạn thẳng $k$ có độ dài hữu tỷ sao cho $a = kb$). Cạnh của hình vuông và đường chéo của nó là không thông ước với nhau. Điều này có thể dễ dàng suy ra từ Định lý Pythagoras (xem [10], Tập 6, số 5: Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỷ).

**Hình học không gian.** Quyển XI gồm 39 mệnh đề về các tính chất của các hình đa diện. Quyển XII liên quan đến đo lường (độ dài, diện tích, thể tích) nhờ phương pháp vét cạn và áp dụng đo thể tích của kim tự tháp, hình nón, hình trụ và hình cầu. Archimedes đã gán các kết quả này cho Eudoxus, người mà có lẽ Euclid đã dựa vào để viết các quyển này. Quyển XIII dành cho nghiên cứu 5 khối đa diện đều.

**Kết luận.** Trong một bài viết, không thể nói đầy đủ về *Cơ sở* và các tác phẩm khác của Euclid. Bạn đọc muốn nghiên cứu *Cơ sở* của Euclid với các phân tích sâu hơn, có thể đọc bản dịch tiếng Việt [2b] và các tài liệu tiếng Anh trong *Tài liệu tham khảo*. Để phần nào thấy được toán học Hy Lạp đã được Euclid thể hiện trong *Cơ sở* với một trật tự logic hoàn hảo như thế nào, bạn đọc có thể xem thêm [10] và các tài liệu trích dẫn trong đó.

### Tài liệu tham khảo chính


[1] David M. Burton, *The History of Mathematics, An Introduction*, Seventh Edition, McGraw–Hill, 2011. Ch. 4: The Alexandrian School: Euclid, pp. 141 – 183.

[2a] Euclid's *Elements of Geometry*, English translation from the Greek text of J.L. Heiberg (1883 – 1885): Richard Fitzpatrick, 2008, 545 p.

[2b] Euclid, *Cơ sở của Hình học*, Nhà xuất bản Trí thức, 2016, 350 trang.

[3] Uta C. Merzbach and Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, 3th Edition, John Wiley & Sons, 2011, Ch. 5: *Euclid of Alexandria*, pp. 90 – 108.

[4] Thomas Heath, *The thirteen books of Euclid' s Elements*, Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary T. L. Heath, the University Press, Cambridge, 1908.


### Tài liệu tham khảo


[5] Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1921, Volume 1: *Euclid*, pp. 354 – 446.

[6] Stephen Hawking, *God Created the Integers*, The mathematical Breakthroughs that changed History, Running Press, Euclid, pp. 1 – 118.

[7] Victor J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, Third Edition, Addison–Wesley, 2008. Chapter 3: Euclid, pp. 50 – 93.

[8] Proclus, *The Philosophical and Mathematical Commentaries of Proclus*, Translated from the Greek by Thomas Taylor, London, 1792.


### Tài liệu trích dẫn


[9] David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 1899. *Foundations of Geometry*, Translation by E. J. Townsend, The Open Court Publishing Company, 1950.

[10] Tạ Duy Phượng, Các nhà toán học Hy Lạp. Tạp chí Pi, Tập 6, số 4, trang 46 – 50; Tập 6, số 5, trang 45 – 53, số 9, trang 44 – 51, số 10, trang 56 – 59; số 11, trang 51 – 55; Tập 7, số 4, trang 54 – 60.


# HẬU CHỐNG CÁC QUÂN NHẸ

BÙI VINH[1]

Lý thuyết cờ tàn cơ bản đều cho rằng Hậu sẽ dễ dành chiến thắng trong khi chống lại các quân nhẹ.

Trong bài học hôm nay, chúng ta sẽ xem xét một vài tình huống có tính chất tiêu chuẩn như sau:

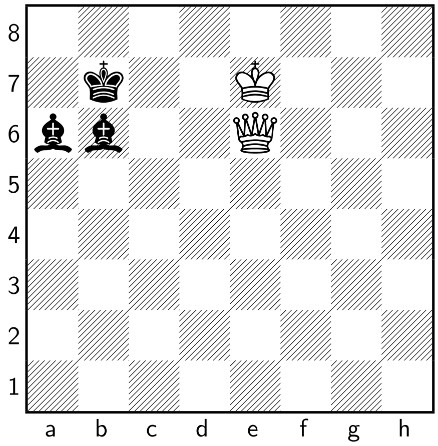
1. *Trường hợp Hậu chống lại hai tượng.*

Hai tượng trong cờ tàn rất mạnh vì khả năng che chắn và làm hàng rào ngăn chặn vua đối phương.

Tuy nhiên khi không còn tốt, Tượng sẽ rất khó tránh khỏi nước chiếu bắt đôi của Hậu.

Lý thuyết chỉ ra rằng có hơn 90% các thế cờ bên có Hậu sẽ giành chiến thắng. Chúng tôi sẽ trình bày một vài tình huống cho chủ đề này.

**NN–NN**



*Hình 1.*

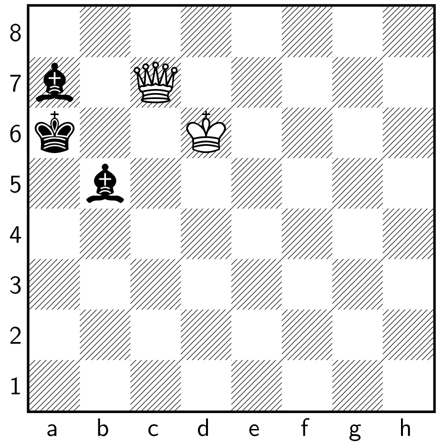
Chiến lược chơi cơ bản của Trắng là từ từ tiếp cận vua vào gần vua đối phương và buộc đối phương phải di chuyển một trong hai con tượng ra khỏi vị trí vua có thể bảo vệ được.

**1.Vd7**

**1...Tb5+ 2.Vd6 Ta7** Mọi phương án khác của đen đều dẫn đến Trắng chiếu bắt tượng như:

2...Tc7+ 3.Vc5 Ta4 4.He4+ Đen bị mất Tượng; 2...Vb8 3.Hb3; 2...Ta4 3.He4+; 2...Va7 3.Hc8 Đen bị hết nước đi 3...Ta6 4.Hd7+ Tb7 5.Ha4+ Vb8 (5...*Ta6 6.Vc6 Tg1 7.Hb4 Tf2 8.He7+ Va8 9.Hf8+*) 6.Vd7 Ta8 7.Ha6 Tc7 (7...*Te3 8.Hb5+ Va7 9.Ha4+ Vb8 10.Hb3+*) 8.Hc8+

**3.He7+ Vb6** Nếu 3...Va6 4.Hc7!



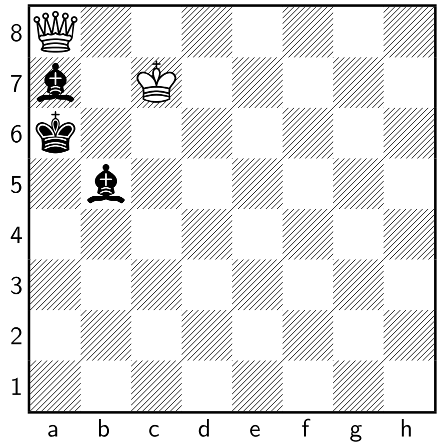
*Hình 2.*

4...Tb6 5.Hc8+ Va7 6.Hg8 Vb7 7.Hd5+

---

[1] *Đại kiện tướng quốc tế.*

Va6 8.Ha8+ Ta7 9.Vc7!



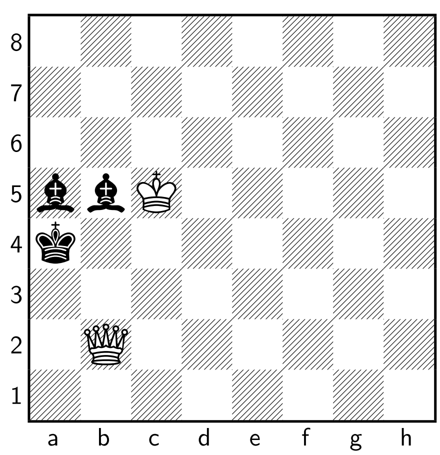
*Hình 3.*

Đen sẽ buộc phải di chuyển Tượng khỏi ô b5 và Trắng sẽ chiếu bắt mất Tượng sau vài nước

**4.Hc7+ Va6 5.Vd5** Trắng tạo cho Vua đen hết nước đi, từ đó bắt buộc một trong hai tượng của đen phải di chuyển ra xa vua của mình.

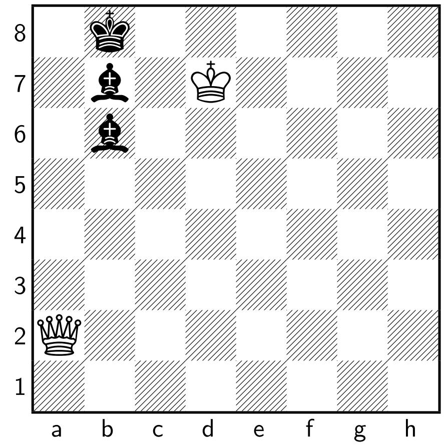
**5...Tb6 6.Hc8+ Va7** Nếu 6...Va5 7.Ha8+ Ta6 (7...Vb4 8.Hf8+ Ka4 9.He7! Ta5 10.Ha7! Vb4 11.Hc5+ Va4 12.Hc2+ Va3 13.Hc1+ Vb3 14.Hb1+ Va4 15.Ha2+ Vb4 16.Hb2+ Va4 17.Vc5

Trắng thắng



*Hình 4.*

**7.Vd6! Ta6 8.Hc2 Tb7 9.Ha2+ Vb8 10.Vd7!**



*Hình 5.*

Các phương án tiếp theo Đen sẽ thua vì không thể tránh khỏi mất tượng.

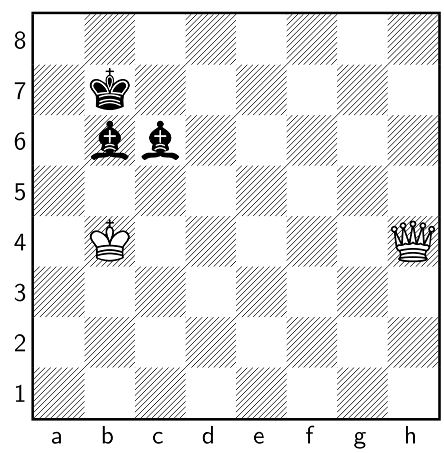
**10...Td4 11.Hb3! Te5** Nếu 11...Va8 12.Ha4+ Ta7 13.Vc7; 11...Tf2 12.Hg8+ Va7 13.Ha2+; 11...Tg1 12.Hg8+; 11...Tf6 12.Hg3+ Va7 13.Vc7 trắng thắng

**12.Hb4! Tg7** Các phương án khác cũng không thể tốt tránh khỏi nước chiếu bắt tượng 12...Th2 13.Hf8+ Va7 14.Hf2+; 12...Ta1 13.Hf8+ Va7 14.Ha3+

**13.He7! Ta1** Nếu 13...Tc3 14.Hf8+ Va7 15.Ha3+; 13...Tb2 14.Hf8+ Va7 15.Hf2+

**14.Hf8+ Va7 15.Ha3+** Trắng thắng

**G. Lolli 1763**



*Hình 6.*

Trong một vài tính huống đặc biệt, bên có hai tượng có thể gỡ hòa nhờ xây dựng các “bong ke” hay “lô cốt” không cho vua bên có

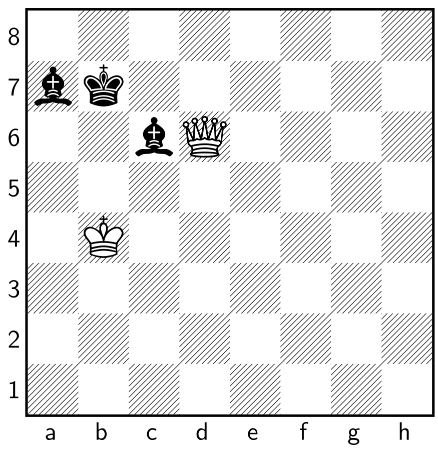
Hâu tiếp cận hai tượng. Tuy nhiên bên có hai tượng phải phòng thủ rất chính xác.

**1.He7+ Vb8!** Biện pháp phòng thủ tốt nhất cho đen.

Nếu 1...Tc7 2.Vc5! Th1 3.Hh7 Tg2 4.Hg6 Tf3 5.Hb1+ Vc8 6.Hf5+ Đen mất tượng

2.Hd6+ Vb7 3.Vc4 Ta7 4.He7+ Vb6 5.Hd8+ Vb7 6.Vb4 Tb6 7.Hd6 Ta7!

Đen kiên quyết không rời tượng ra khỏi vua. Hai tượng đen tạo ra 1 hàng rào ngăn vua trắng tiếp cận vua đen

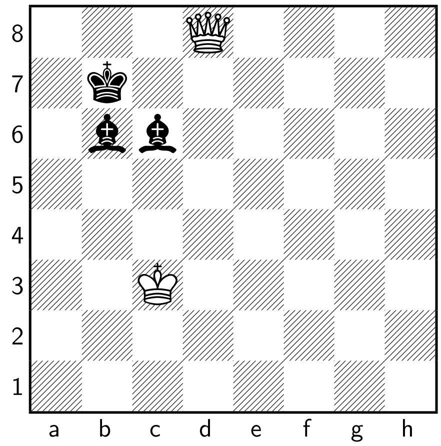


*Hình 7.*

**8.He7+ Vb6 9.Hd8+ Vb7 10.Va5 Tc5! 11.Hf6 Tb6+ 12.Vb4 Vc7**

**13.Vc4 Vb7 14.Hd6 Ta7 15.He7+ Vb6 16.Hd8+ Vb7 17.Vc3 Tb6 =**

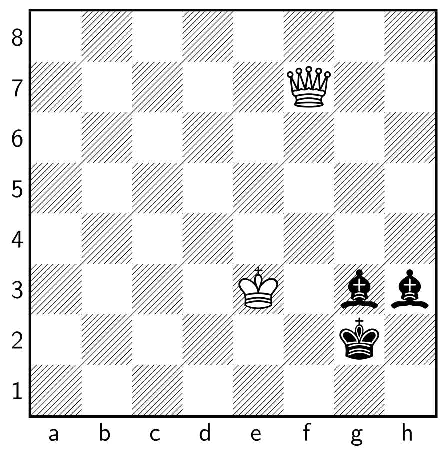
Đen chơi chiến thuật chờ đợi.Trắng không thể có cách nào đưa vua tiếp cận hai tượng cũng như buộc bên đen phải di chuyển tượng khỏi vua.



*Hình 8.*

**Bài tập về nhà**

Trắng đi trước và thắng. NN



*Hình 9.*