



TÔPÔ SỐ HỌC: SỐ NGUYÊN TỐ GIỐNG NÚT NHƯ THỂ NÀO? (Phần II)

NGUYỄN MẠNH LINH¹

Lược đồ

Bây giờ, hãy dạo qua thế giới hình học đại số một chút. Với ý tưởng tiên phong của Descartes là nghiên cứu các đối tượng hình học bằng các hệ tọa độ và phương trình đa thức, người ta đã dần dần phát triển hình học đại số. Khác với những người bạn bên tôpô học, các nhà hình học đại số nghiên cứu các đối tượng cứng nhắc hơn: tập nghiệm của các hệ phương trình đa thức. Sau một thời gian, giới toán học nhận ra rằng các trực giác hình học thường mang đến các chứng minh không chặt chẽ và đặc biệt là không giúp gì được ở số chiều cao hơn. Họ đã chuyển sang dùng đại số giao hoán làm công cụ chính để nghiên cứu hình học. Grothendieck, nhà toán học được công nhận rộng rãi là có ảnh hưởng nhất thế kỷ XX, đã cách mạng hóa hình học đại số một lần nữa bằng định nghĩa **lược đồ**.

Ta quay lại với khái niệm trường. Nếu bỏ qua việc luôn làm được phép chia, ta thu được khái niệm **vành**. Chẳng hạn, \mathbb{Z} và $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ là các vành (phép cộng và phép nhân được hiểu theo nghĩa hiển nhiên). Chú ý rằng ta vẫn yêu cầu làm được phép trừ, nên \mathbb{N} không phải là một vành. Với mỗi vành R , ta xây dựng được một không gian tôpô $\text{Spec}(R)$, được

gọi là **phổ** của R . Nếu chỉ nhìn $\text{Spec}(R)$ như một không gian thì ta mất rất nhiều thông tin. Chẳng hạn, phổ của một trường luôn là một điểm. Vì thế, người ta đã làm giàu $\text{Spec}(R)$ một cấu trúc gọi là **bổ**, chúng làm cho $\text{Spec}(R)$ trở thành một lược đồ.

Cũng như việc người ta quan tâm đến các hàm liên tục giữa các không gian tôpô, trong hình học đại số người ta quan tâm đến các **cấu xạ** giữa các lược đồ. Một cấu xạ $\text{Spec}(R) \rightarrow \text{Spec}(S)$ đơn giản được cho bởi một **đồng cấu vành** theo chiều ngược lại $f: S \rightarrow R$, đồng cấu ở đây nghĩa là $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ và $f(1) = 1$. Chẳng hạn, \mathbb{Z} là một vành con của \mathbb{Q} , và phép bao hàm $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ cho ta một cấu xạ $\text{Spec}(\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$. Về mặt tôpô thì $\text{Spec}(\mathbb{Q})$ chỉ có một điểm, nên ảnh của cấu xạ này là một điểm của $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, được gọi là **điểm tổng quát**. Với mỗi số nguyên tố p , phép lấy dư modulo $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_p$ cho ta một cấu xạ $\text{Spec}(\mathbb{F}_p) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$, đó là một **điểm đóng**. Các điểm đóng này và điểm tổng quát tạo nên không gian $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Khác với các không gian Euclid, tôpô trên lược đồ $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ rất thô: điểm tổng quát là một điểm nhưng lại trù mật trong cả không gian (người ta hay nói “điểm tổng quát là điểm nằm ở mọi nơi, nhưng không nằm cụ thể ở đâu cả”).

¹ Université Paris–Saclay.

Quay lại với lý thuyết không gian phủ. Khi áp dụng nó cho lược đồ, ta không thể chỉ xét khía cạnh tôpô ngay thơ được. Ta muốn $\text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ giống với đường tròn \mathbb{S}^1 , nhưng $\text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ lại chỉ có một điểm. Vấn đề với không gian tôpô $\text{Spec}(R)$ là nó có quá ít lân cận, mỗi lân cận đều quá lớn. Cách khắc phục là sáng tạo ra một khái niệm tôpô mới dùng được cho các lược đồ (thứ mà ngày nay gọi là tôpô Grothendieck), với các “lân cận” mới. Một trong những loại tôpô đủ mạnh để phân biệt các “không gian 1 điểm” $\text{Spec}(K)$ (với K là các trường) là **tôpô étale**. Từ “étale” được lấy từ văn học Pháp, mang nghĩa nôm na là trạng thái dịu dàng của biển. Với công cụ mới này, người ta định nghĩa được khái niệm nhóm cơ bản étale của lược đồ. Chẳng hạn, nhóm cơ bản étale của $\text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ là một nhóm có cùng họ hàng với \mathbb{Z} , gọi là “ \mathbb{Z} mũ”. Điều này giải thích vì sao việc coi $\text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ như đường tròn \mathbb{S}^1 là hợp lý. Tương tự, khái niệm phủ trong thế giới lược đồ phải được hiểu là phủ étale. Đối với các trường, một phủ étale của $\text{Spec}(K)$ đơn giản là $\text{Spec}(L)$, với L/K là một mở rộng bậc hữu hạn. Như vậy, dù $\text{Spec}(K)$ về mặt tôpô chỉ một 1 điểm, nó lại có nhóm cơ bản étale không tầm thường, hay có rất nhiều phủ.

Thực ra khái niệm mở rộng trường và mở rộng vành còn cho ta thêm một chút bên phía tôpô, nó ứng với khái niệm **phủ phân nhánh**. Nói nôm na, một phủ phân nhánh bậc n là một hàm liên tục $p: Y \rightarrow X$ sao cho nếu bỏ đi một số hữu hạn điểm của X (và các điểm của Y nằm trên chúng) thì ta thu được một phủ n -tờ. Các điểm bỏ đi kia (cùng các điểm nằm trên) gọi là các **điểm rẽ nhánh** của p . Hiện tượng rẽ nhánh là phiên bản hình học của hiện tượng “nghiệm bội” trong đại số. Ta xét ví dụ khi Y là đường cong elliptic cho bởi phương trình $y^2 = x(x-1)(x-2)$ trong \mathbb{C}^2 và $X = \mathbb{C}$. Lấy p là phép chiếu lên trục hoành, $p(x, y) = x$. Khi bỏ đi các điểm $0, 1, 2$ khỏi X (và các điểm

$(0, 0), (1, 0), (2, 0)$ khỏi Y), ta thu được một phủ 2-tờ: với mỗi $x \neq 0, 1, 2$ thì phương trình $y^2 = x(x-1)(x-2)$ có hai nghiệm phức phân biệt. Ở các điểm $0, 1, 2$ xảy ra hiện tượng rẽ nhánh, phương trình $y^2 = 0$ có nghiệm kép $y = 0$. Ta nói rằng **chỉ số rẽ nhánh** của p tại các điểm $(0, 0), (1, 0), (2, 0)$ bằng 2.

Lý thuyết số đại số

Để tìm hiểu các phủ (étale) phân nhánh của lược đồ $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, ta bắt đầu từ điểm tổng quát: Phủ étale của $\text{Spec}(\mathbb{Q})$ thì có dạng $\text{Spec}(K)$, với $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, và α là nghiệm của một đa thức bậc n bất khả quy với hệ số hữu tỷ. Số α như vậy được gọi là một **số đại số**, chẳng hạn $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ là các số đại số. Trường K được gọi là một **trường số**, và mọi phần tử của nó đều là số đại số. Ta muốn thứ gì đó trong K đóng vai trò như các số nguyên đối với số hữu tỷ. Đó là các **số nguyên đại số**. Chúng là những phần tử của K mà là nghiệm của một đa thức với hệ số nguyên và hệ số đầu bằng 1. Chẳng hạn $\sqrt{2}$ là một số đại số vì nó là nghiệm của $x^2 - 2$. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ cũng là một số nguyên đại số (dù trông không có vẻ vậy) vì nó là nghiệm của $x^2 - x - 1$. Các số nguyên đại số trong K tạo thành một vành \mathcal{O} . Việc chuyển từ \mathbb{Z} sang \mathcal{O} là chuyển từ lý thuyết số sơ cấp sang lý thuyết số đại số. Một bài tập đơn giản (bằng cách dùng phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố) là: Các số nguyên đại số trong \mathbb{Q} chính là các số nguyên theo nghĩa cổ điển.

Lý thuyết số đại số xuất phát từ nỗ lực chứng minh định lý lớn Fermat của Cauchy, Lamé... Ý tưởng như sau: với phương trình $x^2 + y^2 = z^2$ chẳng hạn, ta giải bằng cách đưa về $x^2 = z^2 - y^2 = (z-y)(z+y)$, sau đó lập luận (với phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố) rằng $z-y$ và $z+y$ phải là các số chính phương. Bây giờ, xét phương trình $x^p + y^p = z^p$, với p là số nguyên tố lẻ (để thấy ta chỉ cần xét trường hợp này). Để phân tích triệt để

$x^p - y^p$ thành các nhân tử bậc nhất, ta buộc phải dùng căn bậc p phức của 1. Gọi nó là $\zeta = \cos(\frac{2\pi}{p}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{p})$. Thế thì ζ là một số nguyên đại số (nghiệm của phương trình $x^p - 1$). Và như vậy ta đưa về chứng minh rằng phương trình trên không có nghiệm trong vành mới $\mathbb{Z}[\zeta]$, vành các số nguyên đại số của $\mathbb{Q}(\zeta)$. Sơ hở của cách tiếp cận này là lập luận như trong trường hợp $p = 2$ không còn đúng nữa, vì nói chung không có phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố trong $\mathbb{Z}[\zeta]$.

Một ví dụ về sự không tồn tại của phân tích duy nhất là trường số $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. Vành số nguyên đại số của nó là $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, gồm các số có dạng $a + b\sqrt{-5}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Số 6 có thể phân tích thành $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (-\sqrt{-5})$. Để thấy rằng hai phân tích này là triệt để và thực sự khác nhau, ta định nghĩa **chuẩn** của một số $a + b\sqrt{-5}$ bởi $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$. Đây là một số tự nhiên, và ta thấy ngay rằng $N(xy) = N(x)N(y)$. Trong phân tích $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (-\sqrt{-5})$, ta có $N(2) = 4, N(3) = 9, N(1 + \sqrt{-5}) = N(1 - \sqrt{-5}) = 6$, nên các nhân tử xuất hiện ở hai phân tích thực sự khác nhau. Ngoài ra, về cơ bản ta không thể phân tích thêm được nữa, vì không có nhân tử nào có chuẩn bằng 2 hoặc 3 (một tính toán số học đơn giản cho thấy rằng phương trình các $a^2 + 5b^2 = 2$ và $a^2 + 5b^2 = 3$ đều không có nghiệm nguyên). Điều này cho thấy sự thiếu sót của phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố trong $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Sự sụp đổ của phân tích duy nhất trong \mathcal{O} đã chấm dứt hi vọng chứng minh định lý lớn Fermat bằng lý thuyết số đại số cổ điển. Dù vậy, vành \mathcal{O} vẫn giữ được một tính chất của vành \mathbb{Z} ; nó là một **vành Dedekind**. Thay vì phân tích duy nhất của các số, người ta định nghĩa khái niệm **số lý tưởng** (cái mà ngày nay gọi là **idean**). Đại khái nó là thứ gì đó cho phép nói về quan hệ chia hết cũng như làm phép nhân. Việc \mathcal{O} là vành Dedekind có

nghĩa là mọi số lý tưởng đều phân tích một cách duy nhất ra các số lý tưởng nguyên tố. Một số nguyên đại số $a \in \mathcal{O}$ định nghĩa một số lý tưởng (a) , được gọi là một số lý tưởng chính. Hai số a và b định nghĩa cùng một số lý tưởng nếu chúng **liên kết**, nghĩa là $a|b$ đồng thời $b|a$. Nói riêng, nếu là $u|1$ thì $(u) = (1)$. Nếu tất cả số lý tưởng nguyên tố đều có dạng trên thì \mathcal{O} có phân tích duy nhất của các số (thực sự). Điều này không đúng trong $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$; cụ thể là khi phân tích $(6) = (2) \cdot (3) = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$, ta vẫn phân tích được tiếp: $(2) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2$, $(3) = \mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_4$, $(1 + \sqrt{-5}) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_3$, $(1 - \sqrt{-5}) = \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_4$, trong đó $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$ là các số lý tưởng nguyên tố *không chính*. Chuẩn của chúng lần lượt là $N(\mathfrak{p}_1) = N(\mathfrak{p}_2) = 2$ và $N(\mathfrak{p}_3) = N(\mathfrak{p}_4) = 3$. Như vậy ta có phân tích duy nhất của (6) thành các số lý tưởng.

Cũng như mỗi số nguyên tố p ứng với các điểm đóng $\text{Spec}(\mathbb{F}_p) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$, mỗi số lý tưởng nguyên tố \mathfrak{p} trong \mathcal{O} cho ta một trường hữu hạn $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ (gọi là **trường thặng dư** của \mathfrak{p}), cùng một điểm đóng $\text{Spec}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O})$. Cùng với điểm tổng quát $\text{Spec}(K)$, chúng tạo thành lược đồ $\text{Spec}(\mathcal{O})$. Vì \mathbb{Z} là một vành con của \mathcal{O} , ta có một cấu xạ $\text{Spec}(\mathcal{O}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$, một phủ étale phân nhánh. Mỗi số nguyên tố p trong \mathbb{Z} có thể không còn là số lý tưởng nguyên tố trong \mathcal{O} , nó phân rã thành tích của một số hữu hạn số lý tưởng nguyên tố, $(p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n$. Các số lý tưởng nguyên tố xuất hiện trong phân tích trên chính xác là những điểm của $\text{Spec}(\mathcal{O})$ nằm trên điểm đóng của $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ ứng với p . Hiện tượng phân nhánh nhánh xảy ra nếu có một số lý tưởng \mathfrak{p}_i xuất hiện nhiều lần trong phân tích trên, ta gọi đó số lần đó là **chỉ số rẽ nhánh** của \mathfrak{p}_i , nó đóng vai trò như chỉ số rẽ nhánh trong tôpô cổ điển.

Một bất đẳng thức trong lý thuyết số đại số, *chặn Minkowski*, cho phép xác định cụ thể phân tích trên. Hơn thế nữa, nó còn cho ta biết chính xác khi nào thì một số nguyên tố

p rẽ nhánh trong \mathcal{O} . Một hệ quả của nó là với mọi trường số K , luôn có ít nhất một số nguyên tố p rẽ nhánh trong vành \mathcal{O} các số nguyên đại số trong K , nghĩa là $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ không có phủ étale không rẽ nhánh nào ngoài phủ tầm thường (cho bởi ánh xạ đồng nhất $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$), hay nó là đơn liên.

Nút

Trong thế giới của các không gian tô pô thì có rất nhiều không gian đơn liên, và ta muốn tìm cái nào giống với $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Sự đột phá nằm ở các phát hiện sau đây của Mumford, Manin, và sau này là Mazur. Ở phía tô pô, các khái niệm điểm (0-chiều), đường (1-chiều), mặt (2-chiều) được tổng quát lên thành các đa tạp. Một đa tạp 3-chiều là một không gian tô pô mà nhìn địa phương thì giống như không gian Euclid \mathbb{R}^3 (cũng như bề mặt trái đất là một đa tạp 2-chiều, nhìn địa phương thì giống như mặt phẳng).

Bên cạnh nhóm cơ bản, tô pô đại số cổ điển còn cung cấp các bất biến đại số khác cho các không gian tô pô, gọi là các **nhóm đồng điều**. Nhóm đồng điều bậc n của một đa tạp X được xây dựng như sau: Xét các tổ hợp tạo thành từ một số đa tạp con n -chiều (chúng được gọi là các **n -dây chuyền**). Nếu chúng tạo thành một vòng kín, ta gọi nó là một **n -chu trình**. Nếu nó tạo thành biên của một đa tạp con $(n+1)$ -chiều, ta gọi nó là một **n -biên**. Một n -biên thì luôn là một n -chu trình. Nhóm $H_n(X)$ được định nghĩa là chênh lệch giữa các nhóm các n -chu trình và nhóm các n -biên: một n -chu trình mà không phải n -biên thì nó bao quanh một “lỗ thủng” $(n+1)$ -chiều; như vậy các nhóm đồng điều phát hiện các lỗ thủng trên X . Phiên bản đối ngẫu của đồng điều là **đối đồng điều**, các nhóm $H^n(X)$. Về cơ bản thì chúng cũng phát hiện các lỗ thủng. Về mặt kỹ thuật thì chúng dễ tính toán hơn đồng điều một chút, đồng thời có nhiều cấu trúc hơn. *Đối ngẫu Poincaré* nói rằng nếu X là một đa tạp đóng, khả định hướng, d -chiều, thì ta

có một đối ngẫu hoàn hảo giữa hai nhóm $H^{d-i}(X)$ và $H^i(X)$ với mỗi $i = 0, 1, \dots, d$.

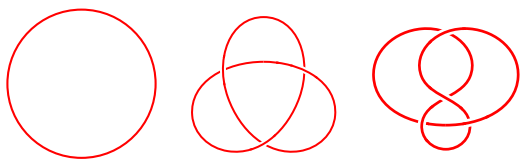
Với các lược đồ, các nhóm đối đồng điều nhìn chung không cho thông tin gì (phần lớn chúng bằng 0) khi ta tính theo tô pô thông thường. Một lần nữa nhờ công của Grothendieck, ta có thể tính **đối đồng điều étale**. Trên một trường, chúng được gọi là **đối đồng điều Galois**, một công cụ đã được dùng từ lâu trước đó trong số học. Với các trường hữu hạn, đối đồng điều Galois của chúng rất đơn giản, chúng khác 0 ngoài bậc 0 và 1, và ta có một đối ngẫu hoàn hảo giữa các nhóm đối đồng điều ở hai bậc này. Điều này tương tự với đối ngẫu Poincaré cho các đa tạp 1-chiều, khẳng định thêm niềm tin rằng phổ của trường hữu hạn là phiên bản đại số của đường tròn.

Đối với các lược đồ $\text{Spec}(\mathcal{O})$, với \mathcal{O} là vành số nguyên đại số của một trường số K nào đó, các nhóm đối đồng điều étale thỏa mãn đối ngẫu giữa bậc 0 và bậc 3 cũng như bậc 1 và bậc 2. Các kết quả này được gọi là *đối ngẫu Artin-Verdier*, được khám phá khi áp dụng đối đồng điều étale cho lý thuyết trường các lớp toàn cục, một phần của lý thuyết số. Điều này gợi cho ta rằng phiên bản tô pô của $\text{Spec}(\mathcal{O})$ “nên” là các đa tạp 3-chiều. Vậy $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ ứng với đa tạp đóng 3-chiều nào? Ta thấy ở trên rằng $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ đơn liên, và đa tạp đóng 3-chiều đơn liên thì chỉ có thể đồng phôi với mặt (siêu) cầu S^3 ! Đó là nội dung của *giả thuyết Poincaré*, bài toán duy nhất đã được giải trong 7 bài toán thiên niên kỷ. Tác giả của lời giải, thiên tài lập dị Perelman, đã từ chối cả Huy chương Fields lẫn Giải thưởng Thiên niên kỷ (Millennium Prize) cho công trình vô song của mình.

Sau khi bỏ ra rất nhiều công sức, ta đã thấy được cầu nối mong manh giữa tô pô học và số học, rằng phiên bản số học của S^1 là (phổ của) một trường hữu hạn, và của một đa tạp đóng 3-chiều là vành các số nguyên đại số của một trường số. Bây giờ là lúc chúng

ta thu hoạch kết quả, chiêm ngưỡng những sự tương tự đáng ngạc nhiên dựa trên cầu nối này. Một số lý tưởng nguyên tố \mathfrak{p} trong \mathcal{O} cho ta một phép nhúng $\text{Spec}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O})$. Về phía tôpô, ta xét các phép nhúng $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow M$, với M là một đa tạp (đóng, khả định hướng) 3-chiều. Chúng được gọi là các **nút** trong M . Nói riêng, phiên bản tôpô của mỗi số nguyên tố p (với phép nhúng tương ứng $\text{Spec}(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$) là một nút trong \mathbb{S}^3 (ta sẽ tập trung vào các nút này). Từ một định lý sâu sắc trong tôpô học, *định lý Borsuk–Ulam*, ta có thể chỉ ra rằng một phép nhúng như thế không thể là toàn ánh, nghĩa là ta có thể xem một nút như một phép nhúng từ \mathbb{S}^1 vào \mathbb{S}^3 bỏ đi một điểm, nói cách khác chính là không gian Euclid \mathbb{R}^3 .

Để biểu diễn một nút $K : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ta có thể chiếu nó lên một mặt phẳng sao cho tại mỗi điểm giao nhau chỉ có đúng 2 đường đi qua. Chúng ứng với một **sợi trên** và một **sợi dưới**, ta biểu diễn sợi dưới bằng nét đứt tại giao điểm đó. Đó là một **biểu đồ phẳng** của nút.



Hình 10: Biểu đồ phẳng của nút tầm thường, nút ba lá, và nút số 8.

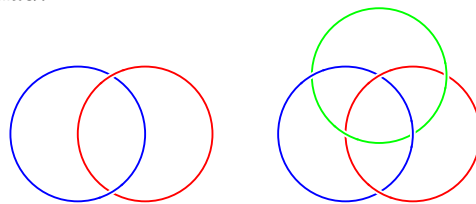
Tất nhiên, mọi nút đều đồng phôi với \mathbb{S}^1 . Ta cần cả thông tin về phép nhúng $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ để phân biệt các nút với nhau. Các nhà lý thuyết nút gọi sự giống nhau của các nút là **đẳng luân**. Một cách trực giác, hai nút đẳng luân nếu ta có thể tháo dỡ một nút rồi buộc thành nút còn lại (mà không cắt được cắt nút ra). Hóa ra, hai nút đẳng luân khi và chỉ khi phần bù của chúng trong \mathbb{S}^3 đồng phôi với nhau (*định lý Gordon–Luecke*).

Từ điển M^2KR

Từ điển Mazur–Morishita–Kapranov–Reznikov (M^2KR) là một danh sách những

sự tương tự giữa lý thuyết số và hình học của các đa tạp 3-chiều; ở đó các số lý tưởng tương ứng với các liên kết, các số lý tưởng nguyên tố ứng với các nút. Sau đây là một số tương ứng giữa tôpô và số học trong từ điển này.

Mỗi số lý tưởng trong \mathcal{O} phân tích thành tích của các số lý tưởng nguyên tố. Phiên bản tôpô của số lý tưởng là **liên kết**: một liên kết trong một đa tạp đóng 3-chiều M là một phép nhúng từ một số hữu hạn bản sao rời rạc của \mathbb{S}^1 vào M . Các ví dụ về liên kết trong \mathbb{S}^3 là **liên kết Hopf** và **vòng Borromean**, lần lượt được tạo bởi 2 và 3 nút tầm thường lồng nhau.

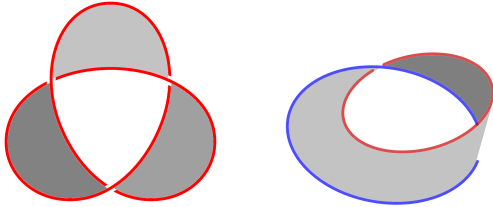


Hình 11: Biểu đồ phẳng của liên kết Hopf và vòng Borromean.

Để thêm phần thuyết phục rằng tại sao M lại tương ứng với (vành số nguyên đại số) một trường số, ta nhắc đến *định lý Alexander*: Mọi đa tạp đóng 3-chiều đều là một phủ phân nhánh của \mathbb{S}^3 , trong đó các điểm rẽ nhánh trong \mathbb{S}^3 tạo thành một liên kết. Tương tự, một mở rộng L/K của trường số có thể được coi như một phủ phân nhánh giữa hai đa tạp đóng 3-chiều.

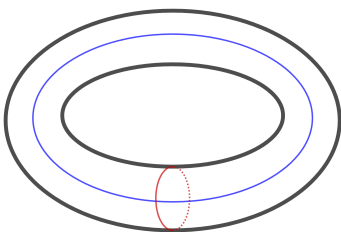
Một số nguyên đại số $a \in \mathcal{O}$ ứng với một mặt compact S (có thể có biên) nhúng trong đa tạp đóng 3-chiều M . Số lý tưởng chính (a) ứng với biên ∂S , đây là một liên kết, và chúng ứng với các 1–đối biên, tức là phần tử 0 trong nhóm đồng điều $H_1(M)$. Các số lý tưởng khác tương ứng với các liên kết, chúng là các 1–chu trình mà không phải biên, đại diện cho các phần tử không tầm thường của $H_1(M)$. Ta biết rằng trong \mathbb{Z} có phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố, hay mọi số lý tưởng nguyên tố đều là số lý tưởng chính.

Tương ứng, với $M = S^3$, ta có $H_1(M) = 0$ (vì S^3 không có lỗ thủng 2-chiều nào), nghĩa là mọi liên kết đều là biên của một mặt nào đó. Seifert đã đưa ra một thuật toán khá đơn giản để xây dựng một mặt với biên cho trước. Chẳng hạn, **mặt Seifert** của liên kết Hopf chính là **mặt Möbius**.



Hình 12: Mặt Seifert của nút ba lá và của liên kết Hopf (mặt Möbius).

Sự tương tự tiếp theo: với p là một số nguyên tố, ta xét vành \mathbb{Z}_p các số nguyên p -adic cũng như trường \mathbb{Q}_p các số p -adic. So với $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, phổ $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ chỉ còn 2 điểm là điểm tổng quát $\text{Spec}(\mathbb{Q}_p)$ và điểm đóng $\text{Spec}(\mathbb{F}_p)$, vì thế ta gọi thao tác này **địa phương hóa** (tập trung nhìn vào số nguyên tố p và quên đi các số nguyên tố khác). Thao tác này ứng với việc lấy **lân cận ống V** của nút, kết quả thu được là một hình xuyên đặc. Dù hình xuyên đặc không đồng phôi với đường tròn, chúng **tương đương đồng luân với nhau**, điều này ứng với việc $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ và $\text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ **tương đương đồng luân étale với nhau**. Khi bỏ nút ban đầu khỏi V , ta thu được một không gian tương đương đồng luân với mặt xuyên (rỗng). Nhóm cơ bản của mặt xuyên là $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, một nhóm được sinh bởi hai phần tử là hai khuyên như trong Hình 13.

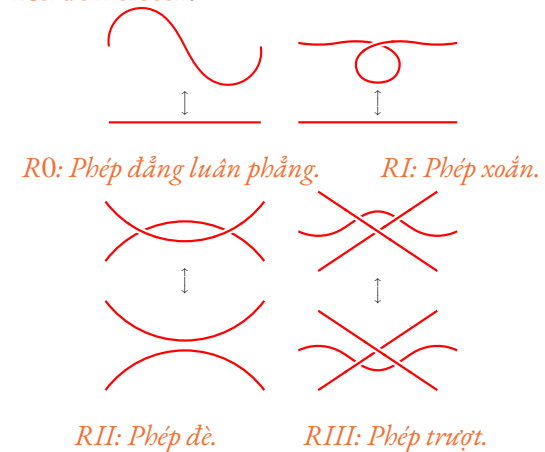


Hình 13: Nhóm cơ bản của mặt xuyên được sinh bởi hai khuyên màu xanh và màu đỏ.

Tương ứng, khi bỏ $\text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ khỏi $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$, ta thu được $\text{Spec}(\mathbb{Q}_p)$, và **nhóm Galois rẽ nhánh yếu** (một phiên bản nhỏ hơn của nhóm cơ bản étale) của \mathbb{Q}_p cũng được mô tả bởi 2 phần tử sinh. Sau cùng, lý thuyết trường các lớp địa phương của Tate cho ta các đối ngẫu hoàn hảo giữa đối đồng điều Galois của \mathbb{Q}_p ở bậc 0 và bậc 2, cũng như ở bậc 1 và chính nó. Tương ứng, ta có đối ngẫu Poincaré cho mặt xuyên, một đa tạp đóng 2-chiều.

Thao tác trên biểu đồ phẳng

Quay lại với sự đẳng luân của các nút. Một câu hỏi rất tự nhiên là làm thế nào để chứng minh hai nút không đẳng luân? Đẳng luân vốn là một điều kiện tô pô quá khó sử dụng. Một khó khăn khi sử dụng các biểu đồ phẳng là hai nút đẳng luân có thể cho hai biểu đồ phẳng trông rất khác nhau. Vậy vấn đề đầu tiên là ta cần tìm cách phân biệt hai nút qua biểu đồ phẳng của chúng (bài toán nhận biết nút). Điều này có thể được thực hiện một cách tổ hợp. Cụ thể, hai biểu đồ phẳng biểu diễn hai nút đẳng luân khi và chỉ khi tồn tại một chuỗi hữu hạn các thao tác thuộc một trong 4 kiểu, được gọi là các **chuyển động Reidemeister**.



Hình 14: Các chuyển động Reidemeister.

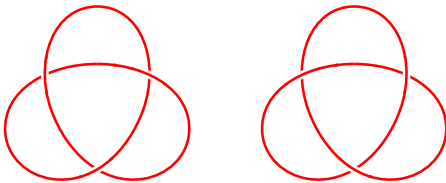
Từ biểu đồ phẳng của nút, ta dùng các đại lượng không đổi qua các chuyển động Reidemeister, các **bất biến nút**. Hai nút có bất biến khác nhau thì phải khác nhau. Một

ví dụ như vậy là **bất biến tô màu**. Ta nói một biểu đồ phẳng của nút là **tô được bằng 3 màu** nếu mỗi sợi (phần đường cong liên tục giữa hai giao điểm liên tiếp của nút) đều có thể tô được bằng một trong 3 màu cho trước, sao cho

- ít nhất hai màu phải được dùng;
- tại mỗi giao điểm, sợi trên cùng 2 sợi dưới hoặc là được tô cùng màu, hoặc là được tô 3 màu khác nhau.

Ví dụ, nút ba lá hiển nhiên tô được bằng 3 màu, nút tầm thường hiển nhiên không tô được bằng 3 màu. Nút số 8 cũng không tô được bằng 3 màu. Vậy ít nhất ta biết rằng nút 3 lá không đẳng luân với nút tầm thường cũng như nút số 8.

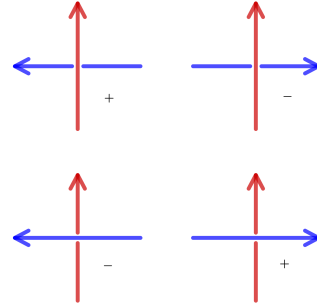
Hiển nhiên là bất biến tô màu chỉ cho phép phân loại các nút thành 2 lớp. Ta cần các loại bất biến khác. Ví dụ, xét nút ba lá trái và ảnh gương của nó là nút ba lá phải. Tất nhiên cả hai đều tô được bằng 3 màu. Rất ngạc nhiên, hai nút này không đẳng luân! Hãy thử dùng các chuyển động Reidemeister để gỡ nút này thành nút kia và bạn sẽ sớm bị thuyết phục. Một bất biến cho phép phân biệt hai nút này là **đa thức Alexander**. Đa thức này đến từ *lý thuyết Alexander-Fox*, và người ta phát hiện ra phiên bản số học của nó là *lý thuyết Iwasawa*. Sự song song của chúng cho phép ta dịch các kết quả từ một bên sang bên còn lại.



Hình 15: Nút ba lá trái và nút ba lá phải.

Một kiểu bất biến khác cho liên kết là **số liên kết**. Xét một liên kết được tạo bởi hai nút. Giữa hai nút L và K , ta có thể định nghĩa **số liên kết** qua biểu đồ phẳng của chúng như sau. Chẳng hạn, tô màu đỏ cho L và màu xanh cho K , đồng thời định hướng cho chúng (mỗi nút có thể có 1 trong 2 hướng).

Tại các điểm trên biểu đồ phẳng mà có một sợi của nút này nằm trên một sợi của nút kia hoặc ngược lại, ta đánh dấu $+$ hoặc $-$ theo quy tắc ở Hình 16. Sau đó ta lấy số dấu cộng trừ đi số dấu trừ, và lấy kết quả chia đôi. Kết quả cuối cùng thu được được gọi là số liên kết $lk(L, K)$. Chẳng hạn, số liên kết của hai nút trong liên kết Hopf là 1 hoặc -1 , tùy theo cách định hướng hai nút.



Hình 16: Quy tắc tính số liên kết.

Nhiều tính toán cho thấy rằng số liên kết thỏa mãn các tính chất tương tự như **ký hiệu Legendre** $\left(\frac{p}{q}\right)$ giữa hai số nguyên tố p, q trong lý thuyết thặng dư bậc hai. Ta có thể chứng minh rằng $lk(K, L) = lk(L, K)$. Tương ứng, ta có luật tương hỗ bậc hai, nói rằng

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}} \left(\frac{q}{p}\right).$$

Bài toán trung tâm của tô pô số học có lẽ là câu hỏi tự nhiên nhất: số nguyên tố nào ứng với nút nào? Đây vẫn là một câu hỏi mở. Nếu một ngày người ta xây dựng được một tương ứng $1-1$ tốt giữa chúng, theo nghĩa mỗi kết quả với số nguyên tố thì ta có kết quả với các nút tương ứng, một số lượng khổng lồ bài toán tô pô học sẽ được giải bằng các kết quả tương tự ở lý thuyết số, và ngược lại.

Có thể nói, tô pô số học là một trong những ví dụ điển hình nhất về tư tưởng toán học thống nhất, rằng tất cả những đại số, giải tích, hình học, số học... đều chỉ là một.