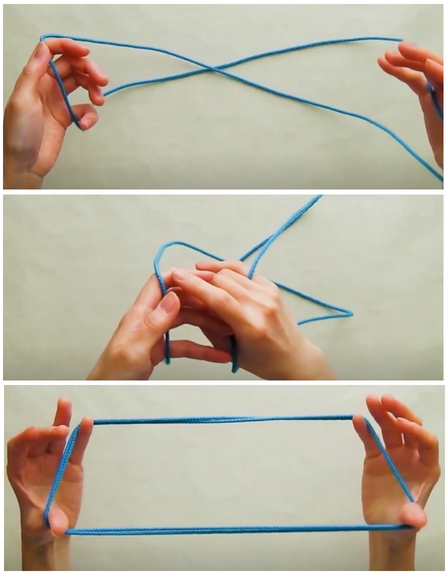
CÙNG CHƠI VỚI CÁC HÌNH ĐỐI XỨNG

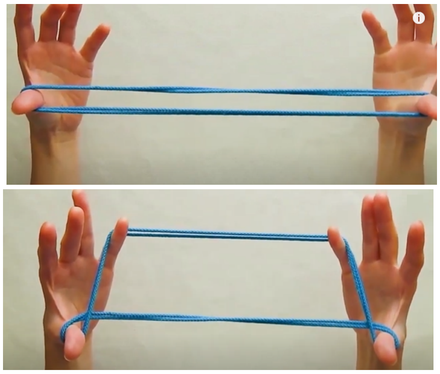
NGUYỄN THỤY VIỆT ANH[1]

Ayatori (hay trò chơi dây) là một trò chơi mà khi nhắc đến chắc chắn những người hâm mộ bộ truyện tranh Doraemon đều biết đến và nhớ ngay tới nhân vật Nobita. Trò chơi Ayatori là một trò chơi rất thú vị, người chơi sẽ sử dụng một sợi dây được buộc thành hình tròn, sau đó dùng những ngón tay của mình đan xen các sợi dây để tạo ra nhiều hình dạng khác nhau từ đơn giản đến phức tạp. Hôm nay, em hãy thử xếp hình ngôi sao thông qua trò chơi Ayatori nhé!

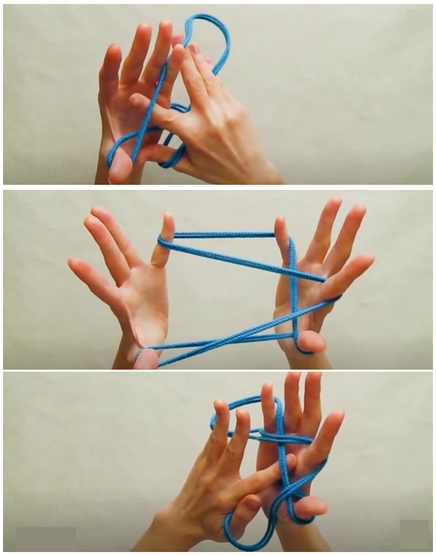
Bước 1: Cách cầm dây khi mới bắt đầu chơi trò chơi Ayatori là giữ sợi dây trong ngón cái và ngón út bằng hai tay, rồi kéo ngang để chuẩn bị chơi.



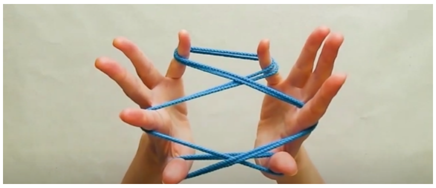
Bước 2: Thả dây ở hai ngón tay út. Sau đó dùng hai ngón tay út luồn phía dưới sợi dây ở hai ngón cái để kéo sợi dây ra như hình vẽ.



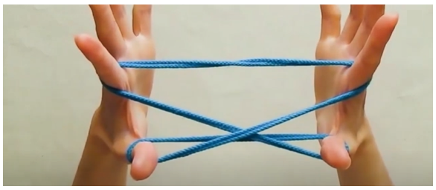
Bước 3: Lấy ngón trỏ tay phải móc vào phần dây giữa ngón cái và ngón út của tay trái. Thực hiện tương tự với ngón trỏ tay trái.



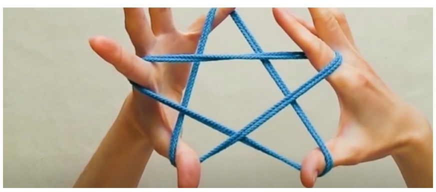
[1] *Trường Liên cấp Hội nhập Quốc tế iSchool Quảng Trị.*



Bước 4: Thả dây ở hai ngón tay út.



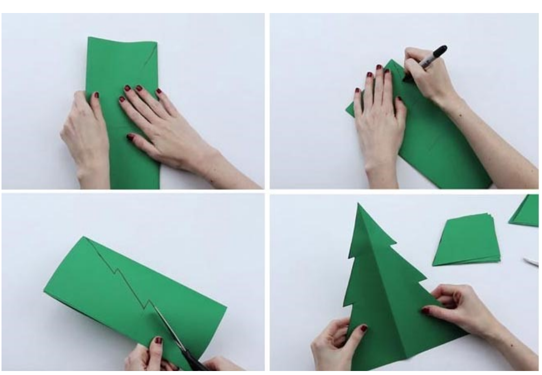
Bước 5: Dùng ngón út để kéo sợi dây ở dưới cùng lên và chúng ta sẽ hoàn hành ngôi sao năm cánh.



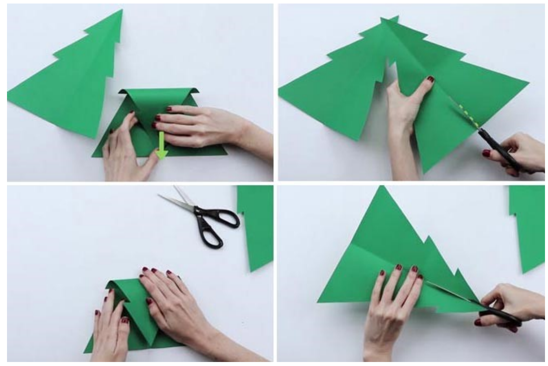
Hãy thử suy ngẫm xem hình ngôi sao năm cánh em vừa tạo ra có bao nhiêu trục đối xứng?

Làm cây thông Noel

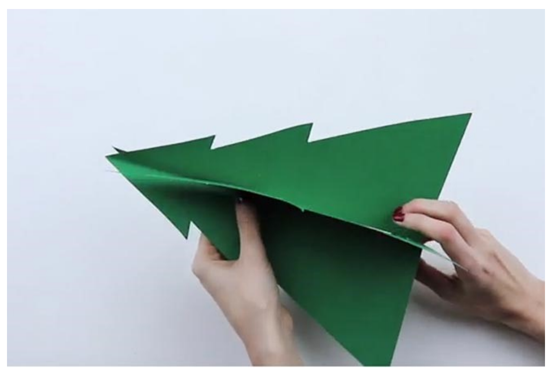
Bước 1: Xếp hai tờ giấy màu cứng chồng lên nhau rồi gấp đôi lại cho đều nhau. Sau đó lấy bút vẽ phác họa hình cây thông lên mặt ngoài của tờ giấy rồi dùng kéo cắt theo các đường đã vẽ sẵn. Lúc mở ra, em sẽ có hai cây thông với kích thước giống nhau.



Bước 2: Gấp đôi cây thông theo chiều ngang, gấp đầu nhọn xuống dưới để xác định tâm của mỗi cây thông. Tiếp đến dùng kéo cắt một đường từ đỉnh cây thông xuống điểm vừa đánh dấu. Cây thông còn lại thì cắt từ đáy lên điểm vừa đánh dấu.



Bước 3: Sau khi đã hoàn thành việc cắt hai cây thông, em hãy ghép chúng lại với nhau theo các khe đã cắt, chú ý để các góc không bị cong. Nếu sau khi ráp cây thông bị lung lay các em có thể cố định lại bằng keo dán.



Bước 4: Cuối cùng các em chỉ cần điều chỉnh sao cho cây thông đứng vững, trang trí thêm các dây ruy băng hay rắc kim tuyến,... hoặc vẽ họa tiết lên cây thông Noel để nhìn đẹp hơn.

Ảnh: Internet.

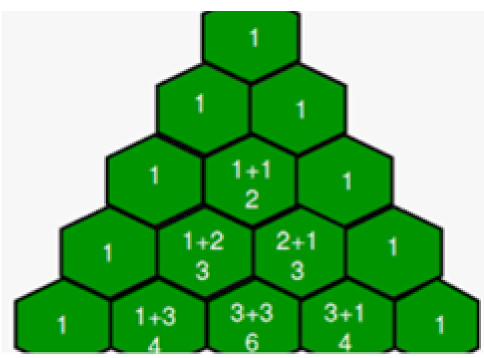
MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TỔ HỢP ĐẾM (COUNTING) TRONG KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TIỂU HỌC

NGÔ VĂN MINH

Trong chương trình phổ thông của Việt Nam, toán tổ hợp đếm được giới thiệu ở cấp THPT. Tuy nhiên trong một số cuộc thi học sinh giỏi toán dành cho cấp tiểu học và đầu cấp PTCS thì phần tổ hợp đếm đã được đưa vào nội dung bài thi khá nhiều, ví dụ như một số cuộc thi khá phổ biến ở Việt Nam hiện nay như IMAS (International Mathematics Assessment), Apmops (The Asia Pacific Mathematical Olympiad for Primary Schools), IMSO (The International Mathematics and Science Olympiad)...

Trong bài viết này chúng ta cùng làm quen với một số bài toán về đếm tổ hợp trong một số cuộc thi học sinh giỏi cấp tiểu học và lớp 6 THCS.

Trước hết chúng ta làm quen với một số khái niệm cơ bản trong phần toán tổ hợp đếm.



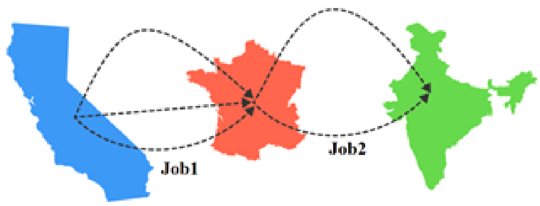
Quy tắc cộng trong tam giác Pascal.

Quy tắc cộng, quy tắc nhân: Quy tắc cộng và quy tắc nhân là hai quy tắc đếm cơ bản, có nội dung có thể được mô tả như sau:

Có hai công việc gọi là Job 1 và Job 2 (có thể mở rộng ra nhiều hơn 2 công việc) được thực hiện một cách độc lập nhau. Có m cách thực hiện Job 1 và n cách thực hiện Job 2, khi đó hai quy tắc đếm cơ bản được phát biểu như sau:

Quy tắc cộng: Có $m+n$ cách để thực hiện Job 1 hoặc Job 2.

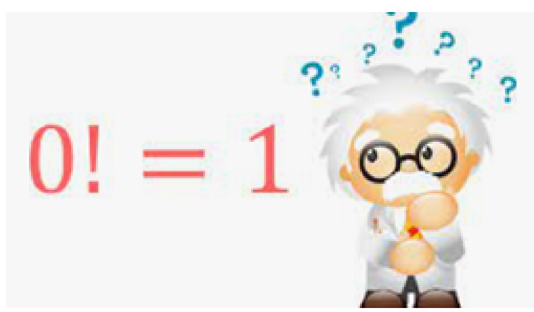
Quy tắc nhân: Có $m \times n$ cách để thực hiện Job1 và Job2 (thực hiện cả hai công việc).



Quy tắc nhân trong bài toán đếm đường đi.

Giai thừa: của n là số cách sắp xếp thứ tự của n phần tử trong một tập hợp, được ký hiệu là $n!$ và có công thức là: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$.

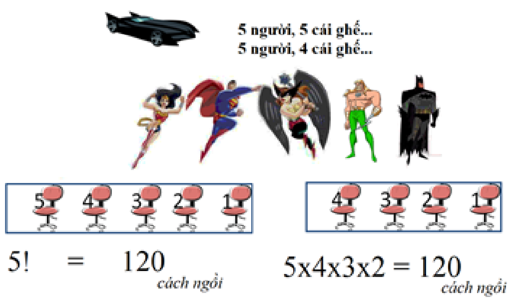
Ghi chú: $0! = 1$



Hoán vị (Permutation): Có n người và chỉ có k cái ghế trên một hàng ($k \leq n$), ta cần xếp đủ k người từ nhóm n người vào k cái ghế. Khi đó số cách xếp gọi là hoán vị và ký hiệu là:

$$P(n,k) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

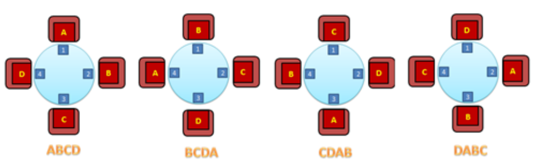
Trong trường hợp có n người và có đúng n cái ghế khi đó ta có số cách sắp xếp n người này chính là định nghĩa của $n!$ (số cách sắp xếp các phần tử của một tập hợp n phần tử): $P(n,n) = n!$



Hoán vị vòng tròn (Circular Permutation): Xung quanh một bàn tròn có n người ngồi. Hai hoán vị được coi là như nhau nếu chúng có thể chồng khít vào nhau bằng phép xuay. Số cách sắp xếp n người xung quanh một cái bàn tròn cố định là: (*cố định: có nghĩa là ta không thể nhấc nó ra để lật ngược lại được*)

$$P_n = (n-1)!$$

Số là $(n-1)!$ thay vì $n!$ vì có n cách xoay bàn và n hoán vị do xoay bàn từ 1 vị trí là như nhau.



Hoán vị vòng tròn 4 người ngồi xung quanh một cái bàn hình tròn.

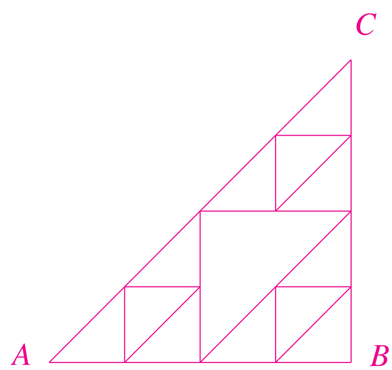
Tổ hợp (Combonation): Đếm số cách để chọn k người từ một nhóm n người là một trong những bài toán tổ hợp đếm cơ bản, và nó được gọi bằng một cái tên đặc biệt: TỔ HỢP và được ký hiệu $C(n,k)$; C_n^k và có công thức là:

$$\begin{aligned} C_n^k = C(n,k) &= \frac{P(n,k)}{k!} \\ &= \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n!}{k!\times(n-k)!} \end{aligned}$$

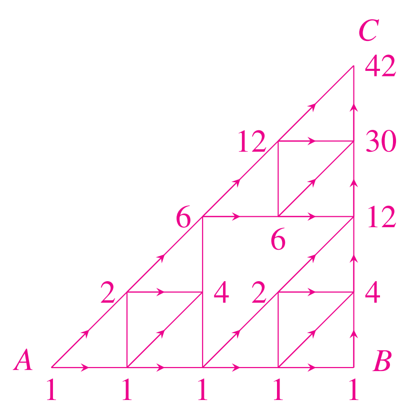
Bài toán số 1: (IMAS)

Sơ đồ dưới đây gồm nhiều tam giác vuông cân.

Có bao nhiêu cách một con kiến có thể đi từ A đến C nếu nó chỉ được phép di chuyển lên trên, sang phải hay theo đường chéo?



Phân tích bài toán: Tại mỗi điểm nút trên hình vẽ, số cách đi từ A đến nó sẽ bằng tổng số cách đi từ A đến các điểm nút ngay đằng trước nó theo chiều mũi tên được phép đi (phải, lên trên và đi chéo).



Vậy nên ta có để điền mũi tên hướng đi và áp dụng quy tắc cộng để giải quyết các bài toán dạng này.

Lời giải: Theo quy tắc cộng thể hiện trên hình vẽ bên dưới ta có tổng số cách đi từ A đến C là 42.

Bài toán số 2: (IMAS)

8 ký tự $2,0,1,5,I,M,A,S$ được xếp trên 1 hàng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho các chữ số đứng đằng trước các chữ cái, chữ số 0 không đứng đầu tiên.

Lời giải. Có 8 vị trí để xếp 8 ký tự, các chữ số đứng đằng trước các chữ cái nên 4 vị trí đầu tiên là các chữ số và 4 vị trí sau cùng. Ta thực hiện 2 công việc là xếp chữ số và xếp chữ cái:

+ Có $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ cách xếp các chữ số (chữ số 0 không đứng ở đầu nên vị trí đầu chỉ có 3 cách chọn chữ số).

+ Có $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ cách xếp 4 chữ cái.

Theo quy tắc nhân (hai quy tắc cơ bản trong đếm tổ hợp là quy tắc cộng và quy tắc nhân) ta có số cách xếp 8 ký tự là: $18 \times 24 = 432$.

(Ta có thể lập luận: ta thực hiện 3 công việc theo thứ tự là Job 1 là viết chữ số đầu tiên, Job 2 là viết 3 chữ số tiếp theo, Job 3 là viết 4 chữ cái, và theo quy tắc nhân ta có kết quả là: $P(3,1) \times P(3,3) \times P(4,4) = 3 \times 3! \times 4! = 432$)

Mở rộng bài toán số 2, các bạn thử sức với bài toán số 3 nhé.

Bài toán số 3:

8 ký tự $2, 0, 1, 5, I, M, A, S$ được xếp trên 1 hàng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

$a)$ Không có hai chữ cái nào đứng cạnh nhau.

$b)$ Chữ số 0 nằm giữa hai chữ cái I và S.

$c)$ Chữ số 0 và chữ số 1 không đứng cạnh nhau.

$d)$ 4 chữ cái luôn đứng cạnh nhau.

Bài toán số 4: (IMAS)

Có bao nhiêu số có 3 chữ số không chứa chữ số 3 và chia hết cho 3.

Phân tích bài toán:

Gọi số có 3 chữ số là $\overline{abc}$:

Thử từ số nhỏ để tìm quy luật:

$$102, 105, 108$$
$$111, 114, 117$$
$$120, 126, 129$$
$$132, 135, 138$$
$$141, 144, 147$$
$$150, 156, 159 \ldots$$

Ta nhận thấy chữ số c lặp theo nhóm $(2,5,8)$, $(1,4,7)$, $(0,6,9)$ và mỗi nhóm này xuất hiện phụ thuộc vào số dư chi 3 của số $\overline{ab}$ từ đó ta có lời giải như sau:

Lời giải

Nếu $\overline{ab}$ chia 3 dư 0 ta có 3 cách chọn $c = \{0, 6, 7\}$

Nếu $\overline{ab}$ chia 3 dư 1 ta có 3 cách chọn $c = \{2, 5, 8\}$

Nếu $\overline{ab}$ chia 3 dư 2 ta có 3 cách chọn $c = \{1, 4, 7\}$

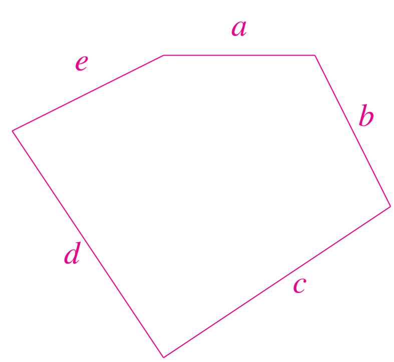
Vậy mỗi số $\overline{ab}$ ta luôn có 3 cách chọn chữ số c.

Ta có 9×10 cách tạo ra số $\overline{ab}$.

Vậy số số có 3 chữ số không chứa chữ số 3 và chia hết cho 3 là: $9 \times 10 \times 3 = 270$ (số);

Bài toán số 5: (APMOPS)

Mỗi cạnh của hình ngũ giác có cạnh a, b, c, d, e tương ứng được tô bằng một trong 3 mầu xanh, đỏ, vàng. Hỏi có bao nhiêu cách tô mầu cách cạnh của hình ngũ giác này sao cho không có 2 cạnh nào kề nhau có cùng mầu.



Phân tích bài toán: Nếu ta tô thứ tự a, b, c, d, e thì a và b có tương ứng 3 và 2 cách tô. Đến tô c thông thường sẽ có 2 cách tô, d cũng 2 cách tô, nhưng nếu như vậy thì e sẽ không xác định được số cách tô vì nó phụ thuộc vào 2 cạnh a và d, bởi vậy ta cần xét đến mầu cụ thể của c cũng như của d để tính được số cách tô mầu c. Vậy ta có thể tiếp cận bài toán bằng hai cách sau đây.

Lời giải 1:

Tô a, có 3 cách tô, tô b, có 2 cách tô.

Tô c:

Trường hợp 1: c cùng mầu với a, c có 1 cách tô, d có 2 cách tô, e có 1 cách tô, số cách tô ngũ giác là: $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 12$ (1).

Trường hợp 2: c khác mầu với a, c có 1 cách tô (vì c khác với cạnh b kề với nó), xét 2 khả năng tô d:

2.1 d cùng mầu với a, d có 1 cách tô, e có 2 cách tô. Số cách tô ngũ giác là $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 12$ (2).

2.2 d khác mầu a, d có 1 cách tô (vì c khác mầu a), e có 1 cách tô. Số cách tô ngũ giác là: $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 6$ (3).

Từ (1),(2),(3) ta có số cách tô cần tìm là: $12 + 12 + 6 = 30$.

Lời giải 2:

Tô a, có 3 cách tô. Tô c, xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: c cùng mầu a, c có 1 cách tô, b có 2 cách tô, d có 2 cách tô, e có 1 cách tô. Số cách tô ngũ giác là: $3 \times 1 \times 2 \times 2 \times 1 = 12$ (1).

Trường hợp 2: c khác mầu a, c có 2 cách tô, b có 1 cách tô. Xét 2 khả năng tô d.

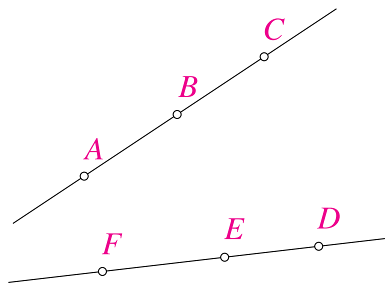
2.1 d cùng mầu với a, d có 1 cách tô, e có 2 cách tô. Số cách tô ngũ giác là: $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2 = 12$ (2).

2.2 d khác mầu a, d có 1 cách tô (do c khác mầu a), e có 1 cách tô. Số cách tô ngũ giác là: $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 6$ (3).

Từ (1),(2),(3) ta có số cách tô cần tìm là: $12 + 12 + 6 = 30$.

Bài toán số 6: (Apmops)

A, B, C, D, E và F là các điểm nằm trên 2 đường thẳng như hình vẽ. Có bao nhiêu tam giác được tạo bởi 3 trong 6 điểm đã cho.



Phân tích bài toán:

Trên mặt phẳng cứ 3 điểm phân biệt không thẳng hàng luôn tạo ra một tam giác, còn 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì không tạo ra một tam giác thông thưởng mà thường được gọi là tam giác suy biến (degenerate triangle). Tương tự như thế, nếu có các đường thẳng đôi một cắt nhau, mà không có 3 đường thẳng nào cắt nhau tại 1 điểm (3 đường đồng quy) thì cứ 3 đường thẳng tạo ra được 1 đoạn thẳng. Cứ 3 đường thẳng đồng quy thì nó tạo ra một tam giác suy biến (có 3 đỉnh trùng vào nhau). Các tính chất này có thể được áp dụng để giải bài toán trên và các bài toán mở rộng ở phần dưới.

Lời giải 1:

Xét 2 trường hợp, trường hợp 1: tam giác có đáy nằm ở đường thẳng phía dưới, đỉnh nằm ở đường thẳng phía trên, có $C(3,2)$ cách chọn đáy và $C(3,1)$ cách chọn đỉnh, theo quy tắc nhân, số tam giác đếm được là: $C(3,2) \times C(3,1)$. Tương tự, trường hợp 2: tam giác có đáy nằm ở đường thẳng phía trên, đỉnh nằm ở đường thẳng phía dưới, có $C(3,2)$ cách chọn đáy và $C(3,1)$ cách chọn đỉnh, theo quy tắc nhân, số tam giác đếm được là: $C(3,2) \times C(3,1)$.

Vậy số tam giác cần tìm là: $2 \times C(3,2) \times C(3,1) = 2 \times 3 \times 3 = 18$.

Lời giải 2:

Số cách chọn ra 3 điểm là: $C(6,3) = 6 \times 5 \times 4/3! = 20$

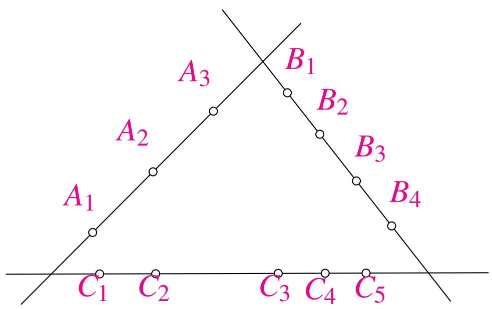
Số tam giác suy biến là: $3 \times C(3,3) = 2$

Vậy số tam giác là: $20 - 2 = 18$

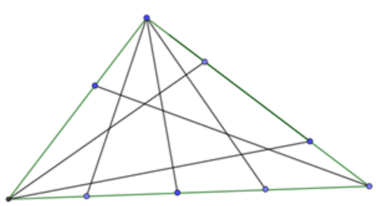
Mở rộng bài toán số 5, các bạn thử sức của mình xem sao nhé.

Bài toán 6.1 (Apmops)

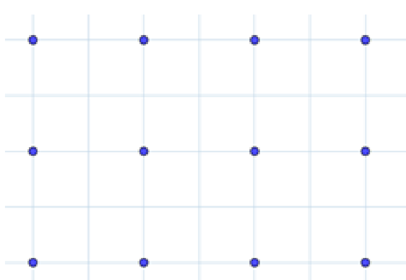
Cho các điểm $A1$, $A2$, $A3$, $B1$, $B2$, $B3$, $B4$, $C1$, $C2$, $C3$, $C4$ và $C5$ nằm trên 3 đường thẳng như hình vẽ. Có bao nhiêu tam giác được tạo bởi 3 trong các đỉnh đã cho?



Bài toán 6.2 Có bao nhiêu tam giác trong hình vẽ?



Bài toán 6.3 Có bao nhiêu tam giác được tạo bởi 3 trong 12 điểm đã cho trên lưới ô vuông như hình vẽ?



Bài toán số 7: (Apmops)

Có bao nhiêu cách để tô 6 mặt của một hình lập phương bằng 6 màu, mỗi mặt được tô bằng 1 màu sao cho không có hai mặt nào có cùng màu? (Hai cách tô màu được coi là như nhau nếu chúng nhìn giống hệt nhau sau một phép xoay hình).

Phân tích bài toán: Hướng đi thứ nhất, ta hình dung nếu cố định hình lập phương lại và mỗi cách nhìn khác nhau ở mỗi phía được coi là khác nhau, như thế thì số cách tô sẽ như tô theo hàng ngang (6 người ngồi trên 6 cái ghế trên 1 hàng) và sẽ là $6! = 720$ cách. Do hình lập phương này xoay được nên ta xem mỗi một kiểu tô có bao nhiêu cách xoay nó xung quanh chính nó. Do có 6 mầu ta có 6 cách xuay để có đáy khác mầu. Mỗi cách đặt đáy với 1 mầu ta có 4 cách xoay xung quanh chính nó (do hình lập phương có 4 cạnh bên), từ đó ta có hướng giải quyết bài toán.

Hướng đi thứ 2, do hình lập phương xoay được nên ta có thể cố định mầu ở những vị trí ta có thể xuay nó về và ta sẽ có hướng giải quyết bài toán như lời giải 2.

Hướng đi thứ 3 gần giống với hướng thứ 2, ta có thể hình dung mình có thể tô mầu ở đáy bằng mầu tùy thích do hình lập phương xoay được, mặt đối diện trên đỉnh sẽ còn 5 cách tô, 4 mặt xung quanh ta sẽ hình dung nó như 4 người ngồi xung quanh một cái bàn tròn nên ta có thể áp dụng bài toán hoán vị vòng tròn để giải quyết.

Lời giải 1:

Giả sử hình lập phương cố định, khi đó ta có $6! = 720$ cách tô.

Mỗi cách tô ta có 6 cách đặt các mặt khác mầu nhau xuống đáy, khi đặt rồi ta có 4 cách xoay xung quanh nó, vậy ứng với mỗi cách tô mầu ta có $6 \times 4 = 24$ cách xoay nó xung quanh chính nó. Vậy số cách tô mầu là: $720 : 24 = 30$ (cách).

Lời giải 2:

Đầu tiên ta tô mầu 1 mặt (mầu ta thích), rồi đặt nó xuống đáy, khi đó ở mặt đối diện trên đỉnh có 5 cách tô.

Tiếp theo ta tô mầu 1 mặt xung quanh (mầu ta thích trong 4 mầu còn lại), rồi xoay nó sang bên trái, khi đó mặt bên phải có 3 cách tô, còn 2 mặt còn lại (trước và sau) có $2!$ cách tô, vậy số cách tô mầu là: $1 \times 5 \times 1 \times 3 \times 2! = 30$ (cách)

Lời giải 3:

Tương tự như lời giải 2, đầu tiên ta tô mầu 1 mặt (mầu ta thích), rồi đặt nó xuống đáy, khi đó ở mặt đối diện trên đỉnh có 5 cách tô.

Còn 4 mặt xung quanh, do xoay được nên theo bài toán hoán vị vòng tròn ta có $4!/4 = 6$ cách tô.

Vậy số cách tô mầu hình lập phương là: $5 \times 6 = 30$ (cách).

Bài toán số 8: (IMSO)

Một hình lập phương được tô các mặt bằng 6 mầu, mỗi mặt 1 mầu khác nhau và được đánh số từ 1 đến 6 sao cho tổng hai mặt đối diện bằng 7. Hỏi có bao nhiêu cách tô mầu và đánh số hình lập phương này? (Hai cách tô mầu, đánh số được coi là như nhau nếu chúng nhìn giống hệt nhau sau một phép xoay hình).

Phân tích bài toán: Bài toán này là tương đối khó khi các bạn lớp $5, 6$ đi thi gặp phải, và đúng là trong năm thi đó đoàn học sinh Việt Nam chỉ có đúng 1 bạn làm được, tuy nhiên nếu chia bài toán làm hai bước, bước 1 tô mầu, bước 2 điền số thì ta có thể giải quyết được bài toán một cách tương đối dễ dàng.

Lời giải:

Bước 1: Tô mầu hình lập phương, theo bài toán số 7, ta có 30 cách tô mầu hình lập phương này.

Bước 2: Đánh số, ta đánh theo thứ tự:

Đánh số 1, có 6 cách. Đánh số 6 ở mặt đối diện số 1, có 1 cách.

Đánh số 2, có 4 cách (do còn 4 mặt chưa đánh số). Đánh số 5 ở mặt đối diện, có 1 cách.

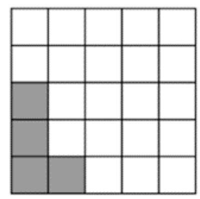
Đánh số 3, có 2 cách (do còn 2 mặt chưa đánh số). Đánh số 4 ở mặt đối diện, có 1 cách.

Vậy ta có $6 \times 1 \times 4 \times 1 \times 2 \times 1 = 48$ cách đánh số.

Theo quy tắc nhân ta có số cách tô mầu và đánh số là: $30 \times 48 = 1440$ (cách).

Bài toán số 9: (IMAS)

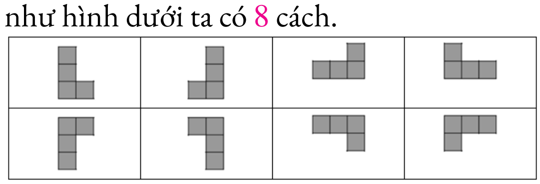
Một bàn cờ hình vuông 5×5 được xếp một hình chữ L chiếm 4 ô như hình vẽ. Ta có thể xoay hoặc lật hình chữ L này. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hình chữ L này vào bàn cờ hình vuông đã cho?



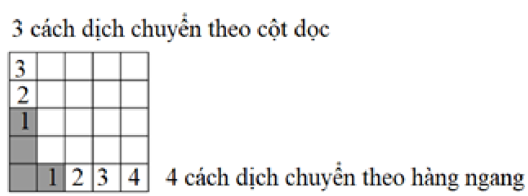
Phân tích bài toán: Ta nhận thấy hình chữ L tô đen có thể xoay hoặc lật được, nên ta sẽ xem nó có thể có bao nhiêu cách biến hình (xoay hoặc lật). Ứng với mỗi phép biến hình bằng xoay, lật ta xem có bao nhiêu cách trượt nó theo hàng ngang và hàng dọc, từ đó ta có cách giải quyết bài toán.

Lời giải:

Ta tính số cách xoay, lật hình chữ L tô đậm, như hình dưới ta có 8 cách.



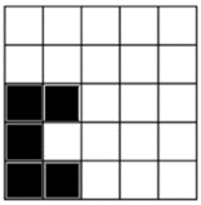
Ứng với mỗi cách biến hình này, ta xem có bao nhiêu cách dời hình theo hàng ngang và hàng dọc, và ta tính được số cách dời hình bằng trượt (tịnh tiến) theo hai chiều ngang, dọc là: $3 \times 4 = 12$.



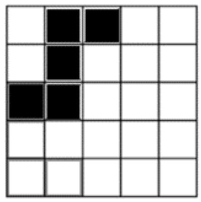
Theo quy tắc nhân, ta có số cách đặt chữ L vào ô vuông 5×5 là: $8 \times 12 = 96$ (cách)

Mở rộng bài toán số 9. Các bạn thử sức mình xem nhé.

Bài toán số 9.1: Đề bài giống như bài toán số 9, hình được xếp vào được thay đổi như sau:



a)

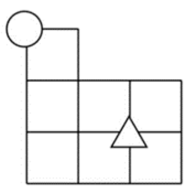


b)

Bài toán số 10: (IMSO).

Một hình tròn và một tam giác được xếp trên các điểm cắt của lưới ô vuông như hình vẽ sao cho tam giác và hình tròn không cùng nằm trên một hàng hay một cột.

Hỏi có bao nhiêu cách xếp tam giác và hình tròn vào lưới ô vuông như hình vẽ này. Trên hình vẽ là một ví dụ về cách xếp tam giác và hình tròn.



Phân tích bài toán: Bài toán này các bạn nhỏ lớp $4,5$ trong câu lạc bộ toán UMC đã làm được theo nhiều cách khác nhau, các bạn quan sát sẽ thấy ngoài hai điểm ở hàng trên cùng thi bên dưới cứ mỗi hình chữ nhật sẽ có $2! \times 2! = 4$ cách đặt hình tròn và tam giác (do mỗi cặp đỉnh không kề nhau của 1 hình chữ nhật sẽ có $2!$ cách đặt hình tròn và tam giác). Sau đây là một số cách giải của các bạn.

Lời giải 1*:* (Lê Kỳ Nam, Vĩnh Giang)

Nếu đường tròn nằm trên hàng đầu tiên (có 2 vị trí), thì ở mỗi vị trí sẽ có $14-4-1=9$ cách chọn tam giác, tổng số cách chọn là: $9 \times 2 = 18$.

Nếu đường tròn đi vào phần còn lại của 2 cột đầu tiên, thì ở mỗi vị trí, số cách chọn tam giác là $14-3-3-1=7$, tổng số cách chọn là $6 \times 7 = 42$.

Nếu đường tròn đi ở 2 cột cuối cùng, thì ở mỗi vị trí, tam giác sẽ có $14-3-2-1=8$ lựa chọn, tổng số cách chọn là $6 \times 8 = 48$.

Tổng số cách xếp hình tròn và hình tam giác là: $18+42+48=108$.

Đáp số: 108

Lời giải 2*:* (Nguyễn Gia Tuấn)

Nếu hình tròn và hình tam giác không được đặt trên hình vuông trên cùng thì có $3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72$ cách chọn.

Nếu một trong các tam giác hoặc hình tròn được đặt trên hình vuông trên cùng thì có $2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$ cách chọn.

Tổng cộng có $72+36=108$ cách chọn.

Lời giải 3*:* (Nguyễn Trọng Cường).

Tổng số các cách có thể đặt hình tròn và tam giác vào 2 điểm bất kỳ của hình là: $14 \times 13 = 182$ cách

Nếu hình tròn và tam giác nằm trên cùng 1 cột, hoặc 1 hàng, thì 2 điểm sẽ tạo nên 1 đoạn thẳng. Ta đếm số đoạn thẳng của hình trên.

Số đoạn thẳng của hình là :

$$\begin{aligned}&1+(1+2+3)\times 3+(1+2+3)\times 2\\&+(1+2)\times 2=37\end{aligned}$$

Hình tròn và tam giác ở 2 đầu đoạn thẳng, đổi chỗ được cho nhau $\Rightarrow$ có $37 \times 2 = 74$ cách ko thỏa mãn

Số cách thỏa mãn đề bài là $182-74=108$ cách.

Lời giải 4*:* (Nguyễn Gia Tuấn). – Dùng phần bù:

Với lưới ô vuông 3×3 thì ta có $C(4,2) \times C(4,2) \times 4 = 144$ cách chọn. (Do mỗi hình chữ nhật có 4 cách đặt tam giác và hình tròn).

Trong lưới 3×3 đó, nếu đặt hình tròn hoặc tam giác vào 2 điểm trên cùng ở bên phải thì có $2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$ cách chọn.

Vậy ta có $144-36=108$ cách chọn để xếp hình tròn và hình tam giác.

Trả lời: 108 lựa chọn.

THÁM TỬ VÀ 50 TÊN CƯỚP

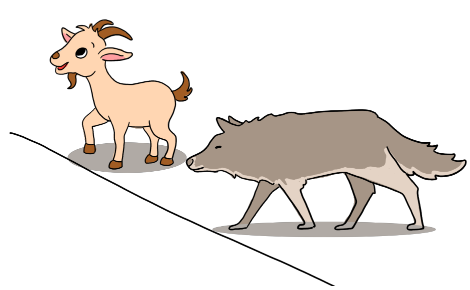
GIA DƯƠNG

Cùng với cảnh sát thành phố, thám tử Xuân Phong đã tóm gọn được một băng cướp gồm 50 tên. Tuy nhiên khi tra hỏi, tên cướp nào cũng muốn làm giảm nhẹ tội lỗi của mình. Qua điều tra, Xuân Phong biết rằng tất cả 50 tên chưa từng cùng tham gia một vụ cướp, tuy nhiên cứ hai tên bất kỳ trong số chúng đều đã gặp gỡ nhau tại các vụ cướp bóc chung duy nhất đúng một lần. Khi khai nhận, tất cả các tên cướp đều trả lời rằng, chúng chỉ mới đi trộm cắp cướp giật và số vụ cướp mà mỗi tên tham gia đều ít hơn 8 vụ. Xuân Phong nghe lời khai của chúng đã xác định được ngay có ít nhất một tên cướp đã nói dối. Em có biết vì sao Xuân Phong lại kết luận được như vậy hay không?

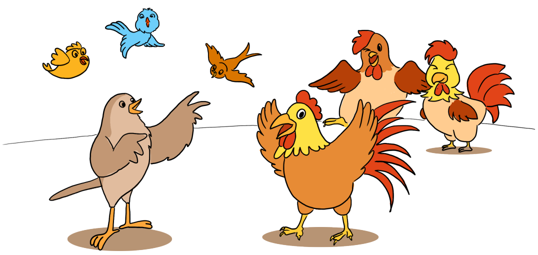
CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

1. Ở nhà một mình, bé Hoa rót ra một cốc sữa đầy và uống hết một nửa. Sau đó Hoa rót thêm nước ép táo vào cho đầy cốc, rồi lại uống hết một nửa. Cuối cùng, bé lại rót thêm nước ép táo vào đầy cốc rồi uống hết sạch cả cốc. Hỏi bé Hoa đã uống thứ gì nhiều hơn: sữa hay nước ép táo?

2. Dê con và Sói cùng thi xem ai chạy từ nhà tới bờ suối và quay ngược lại nhanh hơn. Biết rằng khoảng cách từ nhà tới bờ suối là 100 bước nhảy của Dê con. Một bước nhảy của Sói dài gấp 3 lần một bước nhảy của Dê con. Tuy nhiên trong khoảng thời gian Sói nhảy được một bước thì Dê con lại nhảy được 3 bước. Hỏi ai sẽ chiến thắng?



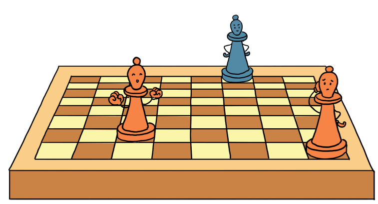
3. Có tất cả 25 chú chim cúc cu và gà trống cùng tham gia một cuộc thi hùng biện giữa các loài vật. Trong số 15 chú chim bất kỳ luôn có ít nhất một chú gà trống, và trong số 12 chú chim bất kỳ luôn có ít nhất một chú chim cúc cu. Hỏi trong cuộc thi đó có bao nhiêu chú gà trống và bao nhiêu chú chim cúc cu tham gia?



4. Người ta trồng trong công viên hai loài cây gồm phượng vĩ và sấu. Trong đó phượng vĩ chiếm 60% tổng số hai loài. Vào mùa xuân cây sấu được trồng thêm trong công viên, do đó cây phượng vĩ chỉ còn chiếm 20% tổng số cây. Sang mùa thu người ta lại trồng thêm phượng vĩ, vì thế cây phượng vĩ lại chiếm 60% tổng số cây hai loài. Hỏi sau hai lần trồng thì số cây trong công viên tăng lên bao nhiêu lần?

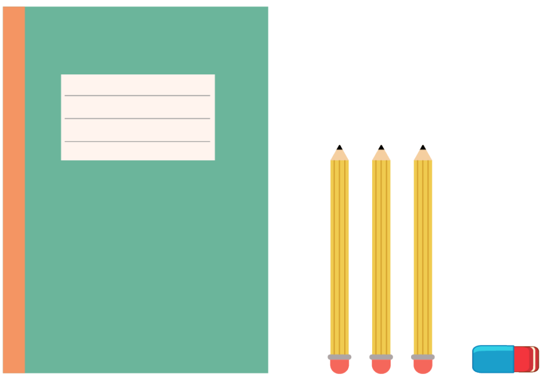
5. Alibaba đột nhập vào một hang động, trong đó có 100 chiếc bao vải đựng đầy những đồng tiền. Một chiếc bao vải trong số đó chỉ đựng toàn đồng tiền giả. Khối lượng của một đồng tiền thật là 10 gram, trong khi khối lượng của một đồng tiền giả là 9 gram. Hỏi Alibaba làm thế nào để chỉ cân một lần duy nhất (bằng một cái cân chính xác có hiển thị số) tìm ra được bao vải chứa các đồng tiền giả?

6. Trên một bàn cờ 8×8 người ta xếp một số lớn nhất có thể các quân Tượng sao cho không có hai quân Tượng nào "ăn" lẫn nhau. Em hãy chứng minh rằng số các cách xếp khác nhau như vậy là một số chính phương (tức là bình phương của một số tự nhiên).



LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 3 năm 2023)

1. Bạn Công đã trả 24 nghìn đồng để mua được 1 cuốn vở, 2 chiếc bút chì và 1 cái tẩy. Bạn Nam thì trả tận 54 nghìn đồng để mua được 2 cuốn vở, 3 chiếc bút chì và 3 cái tẩy. Hỏi bạn An đã trả bao nhiêu tiền để mua được 2 cuốn vở, 5 chiếc bút chì và 1 cái tẩy?



Lời giải. Cả 3 bạn Công, Nam và An đã mua 5 cuốn vở, 10 chiếc bút chì và 5 cái tẩy, bằng đúng 5 lần số lượng mà Công đã mua. Vì thế 3 bạn đã trả số tiền là

$$24 \times 5 = 120(\text{nghìn đồng}).$$

Công và Nam đã trả 78 nghìn đồng. Suy ra An đã trả

$$120 - 78 = 42(\text{nghìn đồng}).$$

2. Bác Tuyết mang sữa đựng đầy trong hai chiếc thùng ra chợ bán. Lượng sữa trong thùng to nhiều gấp 3 lần lượng sữa trong chiếc thùng nhỏ. Khi trong chiếc thùng nhỏ còn có 15 lít sữa, còn thùng to còn 35 lít sữa, bác Tuyết đổ dồn một lượng sữa từ thùng to cho đầy chiếc thùng nhỏ. Khi đó trong chiếc thùng to lượng sữa còn lại đầy tới một nửa thùng. Hỏi bác Tuyết đã đổ bao nhiêu sữa từ thùng to sang thùng nhỏ, và dung tích của mỗi thùng là bao nhiêu?

Lời giải. Các em nhận thấy, sau khi đổ dồn sữa, số sữa còn lại trong thùng to sẽ gấp rưỡi số sữa trong thùng nhỏ. Gọi số sữa đã đổ dồn sang thùng nhỏ là a (lít) thì ta có

$$1.5 \times (15 + a) = 35 - a.$$

Từ đây suy ra $a = 5$. Do đó dung tích của thùng bé là 20 lít và thùng to là 60 lít.

Cách giải khác. Lượng sữa bác Tuyết có lúc đổ từ thùng to thùng nhỏ là 50 và bằng 2.5 lần dung tích thùng nhỏ. Vậy dung tích thùng nhỏ là

$$50 : 2.5 = 20(\text{lít}).$$

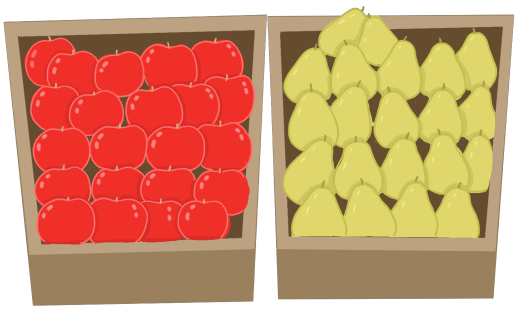
Số sữa được đổ từ thùng to sang thùng nhỏ là:

$$25 - 20 = 5(\text{lít}).$$

Và dung tích thùng to là

$$3 \times 20 = 60(\text{lít}).$$

3. Một tấn hoa quả được chở tới siêu thị: táo được đóng theo các thùng gỗ 48 kg/thùng, lê được đóng trong các thùng gỗ 20 kg/thùng, mận đựng trong hộp giấy theo 14 kg/hộp còn nho đựng trong các hộp giấy theo 10 kg/hộp. Biết rằng số kg táo được chở tới nhiều gấp đôi số kg lê, còn số kg mận và nho là bằng nhau, hỏi số lượng mỗi loại hoa quả đã được vận chuyển tới cửa hàng là bao nhiêu?



Lời giải. Gọi số thùng táo là a, số hộp mận là b. Suy ra số thùng lê là

$$\frac{48\times a}{40}=\frac{6\times a}{5}.$$

Số hộp nho là

$$\frac{14\times b}{10}=\frac{7\times b}{5}.$$

Theo đề bài ta có tổng số kg các loại quả là:

$$48a+24a+14b+14b=1000.$$

Có nghĩa là

$$72a+28b=1000.$$

Chia cả hai vế cho 4, ta nhận được

$$18a+7b=250.$$

Vì $\frac{6\times a}{5}$ là số nguyên, suy ra a chia hết cho 5. Tương tự b chia hết cho 5. Đặt $a=5m, b=5n$ (trong đó m, n là các số nguyên dương), ta rút ra được hệ thức

$$18m+7n=50.$$

Từ đây suy ra $1\le m\le 2$.

Thử trực tiếp, với $m=1$ suy ra $7n=32$ (loại, do n là số nguyên).

Với $m=2$ suy ra $n=2$. Vậy $a=10, b=10$.

Đáp số: 10 thùng táo, 12 thùng lê, 14 hộp nho và 10 hộp mận.

4. Bạn An khởi hành đi bộ từ làng A tới làng B lúc 8h sáng. Đồng thời vào lúc đó, bạn Bình cũng đi bộ từ làng B tới làng A. Hai bạn đều đi với vận tốc không đổi, nhưng có thể không bằng nhau. Khi gặp nhau ở giữa đường, bạn An còn phải đi thêm 32 phút nữa, còn Bình phải đi thêm 18 phút nữa thì mới tới nơi. Hỏi hai bạn đã gặp nhau sau bao lâu tính từ lúc khởi hành?

Lời giải. Gọi a (m/phút) là vận tốc của An, còn b (m/phút) là vận tốc của Bình. Giả sử sau khoảng thời gian là t (phút) tính từ lúc khởi hành hai bạn đã gặp nhau. Suy ra

$$32a=tb$$

và

$$18b=ta.$$

Nhân hai vế các đẳng thức này với nhau và rút gọn cho ab ta có

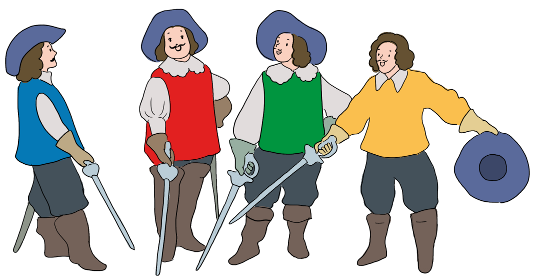
$$t^2=574.$$

Từ đó suy ra $t=24$. Vậy các bạn đã gặp gỡ nhau sau 12 phút tính từ lúc khởi hành.

Cách khác: Kí hiệu C là điểm hai bạn gặp nhau, do quãng đường tỷ lệ thuận với thời gian đi của mỗi bạn nên tỷ số quãng đường AC và CB là $t:18$ đồng thời cũng là $32:t$.

Suy ra $t = 24$. Vậy các bạn đã gặp gỡ nhau sau 12 phút tính từ lúc khởi hành.

5. Trong một cuộc thi thể thao do nhà vua Pháp tổ chức, 3 chàng ngự lâm pháo thủ là Athos, Porthos và Aramis cùng D'Artagnan chia nhau bốn vị trí đầu tiên: 1, 2, 3, 4 (ứng với giải thưởng: nhất, nhì, ba, bốn). Tổng ba số chỉ vị trí mà Athos, Porthos và D'Artagnan giữ là bằng 6. Tổng hai số chỉ vị trí mà Porthos và Aramis giữ cũng bằng 6. Hỏi mỗi chàng ngự lâm đã chiếm các giải nào, biết Porthos chiếm được giải cao hơn Arthos?



Lời giải. Tổng số vị trí của 4 chàng ngự lâm là

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Từ điều kiện đầu tiên suy ra Aramis giữ vị trí thứ

$$10 - 6 = 4.$$

Từ điều kiện thứ hai suy ra Porthos giữ vị trí số 2. Từ điều kiện cuối cùng suy ra Arthos giữ vị thứ thứ 3, còn D'Artagnan giữ vị trí số 1.

6. Tại một khách sạn nọ, nhân viên trực quản lý điều hành phải làm việc từ 8h sáng tới 8h tối (phương án A), hoặc từ 8h tối tới 8h sáng (phương án B), hoặc làm trọn cả ngày 24h bắt đầu từ 8h (sáng hoặc tối) (phương án C). Nếu làm theo phương án A, nhân viên trực quản lý sẽ được nghỉ không ít hơn 1 ngày (24h). Nếu làm theo phương án B, nhân viên trực quản lý sẽ được nghỉ không ít hơn 1 ngày rưỡi (36h). Còn nếu làm theo phương án C, nhân viên trực quản lý sẽ được nghỉ không ít hơn hai ngày rưỡi (60h).

Hỏi khách sạn phải cần có ít nhất bao nhiêu nhân viên trực quản lý để đảm bảo lịch làm việc, nghỉ ngơi ở trên được tuân thủ?

Lời giải. Rõ ràng thấy rằng khách sạn có thể chỉ cần 4 nhân viên quản lý để điều hành theo sơ đồ làm việc "một ngày làm, 3 ngày nghỉ" theo phương án C–C–C–C.

Ta sẽ chỉ ra rằng không thể bố trí với số nhân viên ít hơn 4 người. Thật vậy, nếu có ai đó phải làm cả ngày (24h) thì trong thời gian anh ta nghỉ, vì không ai làm việc được quá 1 ngày liền (24h), nên suốt thời gian nghỉ của anh ta là 2.5 ngày, phải có ít nhất 3 người khác thay phiên nhau làm việc.

Nếu không có ai làm quá nửa ngày, thì do phải có ai đó làm việc vào ca đêm, nên khi anh ta nghỉ (ít nhất là 1.5 ngày) phải có thêm ít nhất 3 nhân viên quản lý khác phải làm thay thế.

Vậy khách sạn cần có ít nhất 4 nhân viên quản lý trực.

A STRAIGHT LINE IS THE SHORTEST DISTANCE BETWEEN TWO POINTS

NGHIA DOAN[1]

In this article, we explore some basic properties of broken lines.

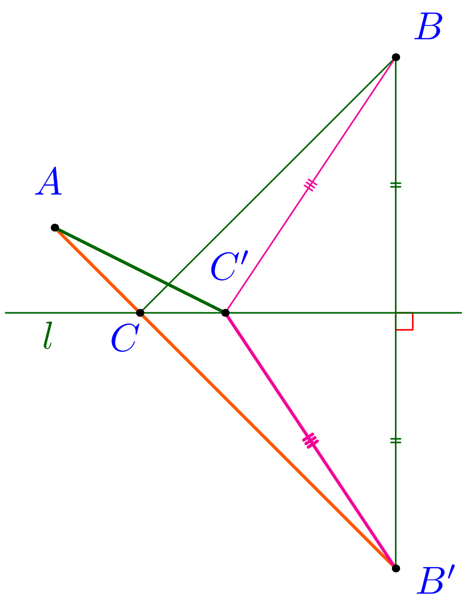
Fact (Triangle Inequality). For any three points A, B, C,

$$AB + BC \geq AC,$$

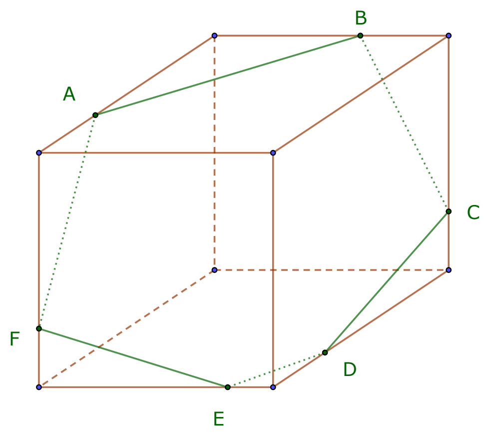
The equality holds if and only if A, B, and C are collinear.

Fact (Broken Line Inequality). For any points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$. The equality holds if and only if $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, and A_n are collinear.

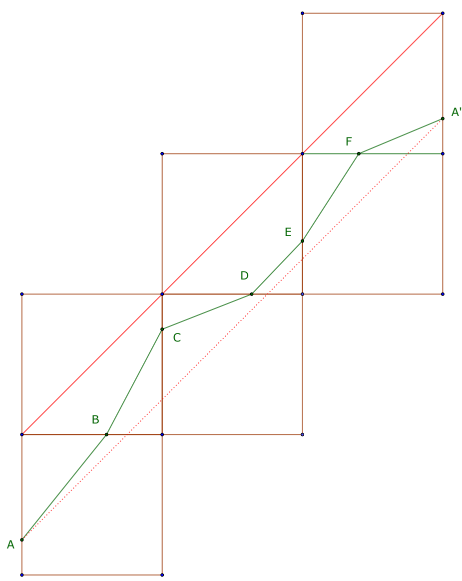
Lemma (Heron's Problem). Two points A and B lie on one side of a straight line l. C is a point on on l. The sum $CA + CB$ is minimal if and only if $C = BC' \cap \ell$, where B' is the reflection of B over l.



Example (Cross–section of a cube). Lilian cuts a cube with side length 1. She got a with a hexagon cross–section as shown below. What is the minimal value of the hexagon perimeter $AB + BC + CD + DE + EF + FA$?



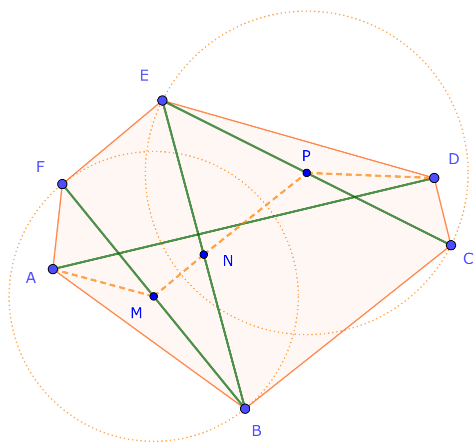
Solution. The diagram below is obtained by unfolding the cube into a net. The hexagon perimeter forms a broken line $ABCDEFA'$.



[1] *Ottawa, Canada.*

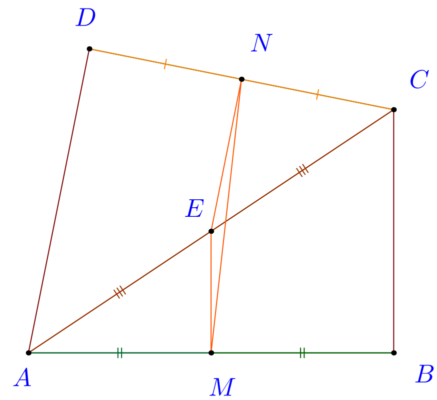
This is always larger or equal the distance AA', which is same as three times the diagonal of the unit square. Hence the perimeter is always at least $3\sqrt{2}$.

Example (Diagonal of a hexagon). $ABCDEF$ is a convex hexagon, where $\angle A \geq 90^\circ$ and $\angle D \geq 90^\circ$. Prove that $BC + CE + EF + FB \geq 2AD$.



Proof. Let M, N, and P be the midpoints of BF, BE, and CE, respectively. Since any broken line is longer or equal the distance between two endpoints, so $AD \leq AM + MN + NP + PD$. MN is the median segment in $\triangle BEF$, thus $FE = 2MN$. Similarly $BC = 2NP$. In $\triangle ABF$, $\angle A \geq 90^\circ$, thus $BF \geq 2AM$. Similarly $CE \geq 2DP$. Therefore $BC + CE + EF + FB \geq 2(AM + MN + NP + PD) = 2AD$.

Example (Romanian Math Olympiad). Let $ABCD$ be a convex quadrilateral. It is known that the circles with diameter AB and CD are externally tangent, and so are the circles with diameters AD and BC. Prove that $ABCD$ is a rhombus.



Proof. We first prove a claim.

Claim. Let M and N be the midpoint of AB and CD, respectively, then $AD + BC \geq 2MN$.

Proof. Let E be the midpoint of AC. It is easy to see that

$$MN \leq ME + EN = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} = \frac{AD + BC}{2}$$

The equality can happen if and only if MN intersect AC at the midpoint of AC, so $MN \parallel AD \parallel BC$.

By the claim $AD + BC \geq 2MN$, similarly $AB + CD \geq 2PQ$, thus

$$AB + BC + CD + DA \geq 2(MN + PQ). \quad (*)$$

Now, let P and Q be the midpoints of BC and AD, respectively. Since the circles of diameters AB and CD are externally tangent so $AB + CD = 2MN$, similarly $AD + BC = 2$. Thus

$$AB + BC + CD + DA = 2(MN + PQ). \quad (**)$$

$(**)$ implies the existence of equality in $(*)$, so $MN \parallel AD \parallel BC$ and $PQ \parallel AB \parallel CD$. Thus $ABCD$ is a parallelogram, and $MN = AD = BC$. Similarly $AB = CD$. Since $AB + CD = 2MN$ (see above), therefore

$$AD = BC = MN = AB = CD.$$

Hence, $ABCD$ is a rhombus.