TÔPÔ SỐ HỌC: SỐ NGUYÊN TỐ GIỐNG NÚT NHƯ THẾ NÀO? (Phần II)

NGUYỄN MẠNH LINH[1]

Lược đồ

Bây giờ, hãy dạo qua thế giới hình học đại số một chút. Với ý tưởng tiên phong của Descartes là nghiên cứu các đối tượng hình học bằng các hệ tọa độ và phương trình đa thức, người ta đã dần dần phát triển hình học đại số. Khác với những người bạn bên tôpô học, các nhà hình học đại số nghiên cứu các đối tượng cứng nhắc hơn: tập nghiệm của các hệ phương trình đa thức. Sau một thời gian, giới toán học nhận ra rằng các trực giác hình học thường mang đến các chứng minh không chặt chẽ và đặc biệt là không giúp gì được ở số chiều cao hơn. Họ đã chuyển sang dùng đại số giao hoán làm công cụ chính để nghiên cứu hình học. Grothendieck, nhà toán học được công nhận rộng rãi là có ảnh hưởng nhất thế kỷ XX, đã cách mạng hóa hình học đại số một lần nữa bằng định nghĩa **lược đồ**.

Ta quay lại với khái niệm trường. Nếu bỏ qua việc luôn làm được phép chia, ta thu được khái niệm **vành**. Chẳng hạn, $\mathbb{Z}$ và $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ là các vành (phép cộng và phép nhân được hiểu theo nghĩa hiển nhiên). Chú ý rằng ta vẫn yêu cầu làm được phép trừ, nên $\mathbb{N}$ không phải là một vành. Với mỗi vành R, ta xây dựng được một không gian tôpô $\operatorname{Spec}(R)$, được gọi là **phổ** của R. Nếu chỉ nhìn $\operatorname{Spec}(R)$ như một không gian thì ta mất rất nhiều thông tin. Chẳng hạn, phổ của một trường luôn là một điểm. Vì thế, người ta đã làm giàu $\operatorname{Spec}(R)$ một cấu trúc gọi là **bó**, chúng làm cho $\operatorname{Spec}(R)$ trở thành một lược đồ.

Descartes trên tem thư Pháp.

Cũng như việc người ta quan tâm đến các hàm liên tục giữa các không gian tôpô, trong hình học đại số người ta quan tâm đến các **cấu xạ** giữa các lược đồ. Một cấu xạ $\operatorname{Spec}(R) \to \operatorname{Spec}(S)$ đơn giản được cho bởi một **đồng cấu vành** theo chiều ngược lại $f : S \to R$, đồng cấu ở đây nghĩa là $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ và $f(1) = 1$. Chẳng hạn, $\mathbb{Z}$ là một vành con của $\mathbb{Q}$, và phép bao hàm $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ cho ta một cấu xạ $\operatorname{Spec}(\mathbb{Q}) \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$. Về mặt tôpô thì

[1] *Université Paris–Saclay.*

$\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ chỉ có một điểm, nên ảnh của cấu xạ này là một điểm của $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, được gọi là **điểm tổng quát**. Với mỗi số nguyên tố p, phép lấy dư modulo $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ cho ta một cấu xạ $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, đó là một **điểm đóng**. Các điểm đóng này và điểm tổng quát tạo nên không gian $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Khác với các không gian Euclid, tôpô trên lược đồ $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ rất thô: điểm tổng quát là một điểm nhưng lại trù mật trong cả không gian (người ta hay nói "điểm tổng quát là điểm nằm ở mọi nơi, nhưng không nằm cụ thể ở đâu cả").

Grothendieck giảng bài tại IHES 1962.

Quay lại với lý thuyết không gian phủ. Khi áp dụng nó cho lược đồ, ta không thể chỉ xét khía cạnh tôpô ngây thơ được. Ta muốn $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ giống với đường tròn $\mathbb{S}^1$, nhưng $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ lại chỉ có một điểm. Vấn đề với không gian tôpô $\mathrm{Spec}(R)$ là nó có quá ít lân cận, mỗi lân cận đều quá lớn. Cách khắc phục là sáng tạo ra một khái niệm tôpô mới dùng được cho các lược đồ (thứ mà ngày nay gọi là tôpô Grothendieck), với các "lân cận" mới. Một trong những loại tôpô đủ mạnh để phân biệt các "không gian 1 điểm" $\mathrm{Spec}(K)$ (với K là các trường) là **tôpô étale**. Từ "étale" được lấy từ văn học Pháp, mang nghĩa nôm na là trạng thái dịu dàng của biển. Với công cụ mới này, người ta định nghĩa được khái niệm nhóm cơ bản étale của lược đồ. Chẳng hạn, nhóm cơ bản étale của $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ là một nhóm có cùng họ hàng với $\mathbb{Z}$, gọi là "$\mathbb{Z}$ mũ". Điều này giải thích vì sao việc coi $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ như đường tròn $\mathbb{S}^1$ là hợp lý. Tương tự, khái niệm phủ trong thế giới lược đồ phải được hiểu là phủ étale. Đối với các trường, một phủ étale của $\mathrm{Spec}(K)$ đơn giản là $\mathrm{Spec}(L)$, với L/K là một mở rộng bậc hữu hạn. Như vậy, dù $\mathrm{Spec}(K)$ về mặt tôpô chỉ một 1 điểm, nó lại có nhóm cơ bản étale không tầm thường, hay có rất nhiều phủ.

Thực ra khái niệm mở rộng trường và mở rộng vành còn cho ta thêm một chút bên phía tôpô, nó ứng với khái niệm **phủ phân nhánh**. Nói nôm na, một phủ phân nhánh bậc n là một hàm liên tục $p : Y \to X$ sao cho nếu bỏ đi một số hữu hạn điểm của X (và các điểm của Y nằm trên chúng) thì ta thu được một phủ n-tờ. Các điểm bỏ đi kia (cùng các điểm nằm trên) gọi là các **điểm rẽ nhánh** của p. Hiện tượng rẽ nhánh là phiên bản hình học của hiện tượng "nghiệm bội" trong đại số. Ta xét ví dụ khi Y là đường cong elliptic cho bởi phương trình $y^2 = x(x-1)(x-2)$ trong $\mathbb{C}^2$ và $X = \mathbb{C}$. Lấy p là phép chiếu lên trục hoành, $p(x,y) = x$. Khi bỏ đi các điểm $0, 1, 2$ khỏi X (và các điểm $(0,0), (1,0), (2,0)$ khỏi Y), ta thu được một phủ 2–tờ: với mỗi $x \neq 0, 1, 2$ thì phương trình $y^2 = x(x-1)(x-2)$ có hai nghiệm phức phân biệt. Ở các điểm $0, 1, 2$ xảy ra hiện tượng rẽ nhánh, phương trình $y^2 = 0$ có nghiệm kép $y = 0$. Ta nói rằng **chỉ số rẽ nhánh** của p tại các điểm $(0,0), (1,0), (2,0)$ bằng 2.

Lý thuyết số đại số

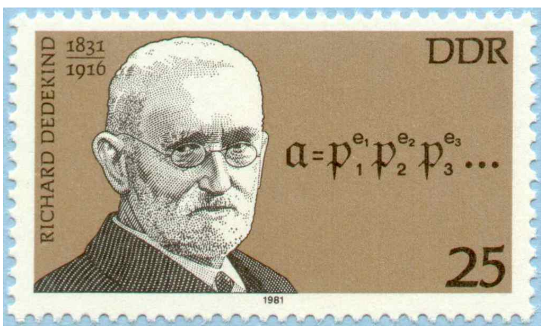
Để tìm hiểu các phủ (étale) phân nhánh của lược đồ $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, ta bắt đầu từ điểm tổng quát: Phủ étale của $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ thì có dạng $\mathrm{Spec}(K)$, với $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, và α là nghiệm của một đa thức bậc n bất khả quy với hệ số hữu tỷ. Số α như vậy được gọi là một **số đại số**, chẳng hạn $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ là các số đại số. Trường K được gọi là một **trường số**, và mọi phần tử của nó đều là số đại số. Ta muốn thứ gì đó trong K đóng vai trò như các số nguyên đối với số hữu tỷ. Đó là các **số nguyên đại số**. Chúng là những phần tử của K mà là nghiệm của một đa thức với hệ số nguyên và hệ số đầu bằng 1. Chẳng hạn $\sqrt{2}$ là một số đại số vì nó là nghiệm của x^2-2. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ cũng là một số nguyên đại số (dù trông không có vẻ vậy) vì nó là nghiệm của x^2-x-1. Các số nguyên đại số trong K tạo thành một vành $\mathcal{O}$. Việc chuyển từ $\mathbb{Z}$ sang $\mathcal{O}$ là chuyển từ lý thuyết số sơ cấp sang lý thuyết số đại số. Một bài tập đơn giản (bằng cách dùng phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố) là: Các số nguyên đại số trong $\mathbb{Q}$ chính là các số nguyên theo nghĩa cổ điển.

Lý thuyết số đại số xuất phát từ nỗ lực chứng minh định lý lớn Fermat của Cauchy, Lamé... Ý tưởng như sau: với phương trình $x^2+y^2=z^2$ chẳng hạn, ta giải bằng cách đưa về $x^2=z^2-y^2=(z-y)(z+y)$, sau đó lập luận (với phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố) rằng $z-y$ và $z+y$ phải là các số chính phương. Bây giờ, xét phương trình $x^p+y^p=z^p$, với p là số nguyên tố lẻ (dễ thấy ta chỉ cần xét trường hợp này). Để phân tích triệt để z^p-y^p thành các nhân tử bậc nhất, ta buộc phải dùng căn bậc p phức của 1. Gọi nó là $\zeta=\cos(\frac{2\pi}{p})+i\cdot\sin(\frac{2\pi}{p})$. Thế thì ζ là một số nguyên đại số (nghiệm của phương trình x^p-1). Và như vậy ta đưa về chứng minh rằng phương trình trên không có nghiệm trong vành mới $\mathbb{Z}[\zeta]$, vành các số nguyên đại số của $\mathbb{Q}(\zeta)$. Sơ hở của cách tiếp cận này là lập luận như trong trường hợp $p=2$ không còn đúng nữa, vì nói chung không có phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố trong $\mathbb{Z}[\zeta]$.

Một ví dụ về sự không tồn tại của phân tích duy nhất là trường số $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. Vành số nguyên đại số của nó là $\mathcal{O}=\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, gồm các số có dạng $a+b\sqrt{-5}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Số 6 có thể phân tích thành $6=2\cdot3=(1+\sqrt{-5})\cdot(-\sqrt{-5})$. Để thấy rằng hai phân tích này là triệt để và thực sự khác nhau, ta định nghĩa **chuẩn** của một số $a+b\sqrt{-5}$ bởi $N(a+b\sqrt{-5})=a^2+5b^2$. Đây là một số tự nhiên, và ta thấy ngay rằng $N(xy)=N(x)N(y)$. Trong phân tích $6=2\cdot3=(1+\sqrt{-5})\cdot(-\sqrt{-5})$, ta có $N(2)=4, N(3)=9, N(1+\sqrt{-5})=N(1-\sqrt{-5})=6$, nên các nhân tử xuất hiện ở hai phân tích thực sự khác nhau. Ngoài ra, về cơ bản ta không thể phân tích thêm được nữa, vì không có phần tử nào có chuẩn bằng 2 hoặc 3 (một tính toán số học đơn giản cho thấy rằng phương trình các $a^2+5b^2=2$ và $a^2+5b^2=3$ đều không có nghiệm nguyên). Điều này cho thấy sự thiếu sót của phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố trong $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Sự sụp đổ của phân tích duy nhất trong $\mathcal{O}$ đã chấm dứt hi vọng chứng minh định lý lớn Fermat bằng lý thuyết số đại số cổ điển. Dù vậy, vành $\mathcal{O}$ vẫn giữ được một tính chất của vành $\mathbb{Z}$; nó là một **vành Dedekind**. Thay vì phân tích duy nhất của các số, người ta định nghĩa khái niệm **số lý tưởng** (cái mà ngày nay gọi là **iđêan**). Đại khái nó là thứ gì đó cho phép nói về quan hệ chia hết cũng như làm phép nhân. Việc $\mathcal{O}$ là vành Dedekind có nghĩa là mọi số lý tưởng đều phân tích một cách duy nhất ra các số lý tưởng nguyên tố. Một số nguyên đại số $a\in\mathcal{O}$ định nghĩa một số lý tưởng (a), được gọi là một số lý tưởng chính. Hai số a và b định nghĩa cùng một số lý tưởng nếu chúng **liên kết**, nghĩa là $a|b$ đồng thời $b|a$. Nói riêng, nếu là $u|1$ thì $(u)=(1)$. Nếu tất cả số lý tưởng nguyên tố đều có dạng trên thì $\mathcal{O}$ có phân tích duy nhất của các số (thực sự). Điều này không đúng trong $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$; cụ thể là khi phân tích $(6)=(2)\cdot(3)=(1+\sqrt{-5})\cdot(1-\sqrt{-5})$, ta vẫn phân tích được tiếp: $(2)=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $(3)=\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4$, $(1+\sqrt{-5})=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3$, $(1-\sqrt{-5})=\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4$, trong đó $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\mathfrak{p}_3,\mathfrak{p}_4$ là các số lý tưởng nguyên tố *không chính*. Chuẩn của chúng lần lượt là $N(\mathfrak{p}_1)=N(\mathfrak{p}_2)=2$ và $N(\mathfrak{p}_3)=N(\mathfrak{p}_4)=3$. Như vậy ta có phân tích duy nhất của (6) thành các số lý tưởng.

Cũng như mỗi số nguyên tố p ứng với các điểm đóng $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)\to\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, mỗi số lý tưởng nguyên tố $\mathfrak{p}$ trong trong $\mathcal{O}$ cho ta một trường hữu hạn $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ (gọi là **trường thặng dư** của $\mathfrak{p}$), cùng một điểm đóng $\operatorname{Spec}(\mathbb{F}_\mathfrak{p}) \to \operatorname{Spec}(\mathscr{O})$. Cùng với điểm tổng quát $\operatorname{Spec}(K)$, chúng tạo thành lược đồ $\operatorname{Spec}(\mathscr{O})$. Vì $\mathbb{Z}$ là một vành con của $\mathscr{O}$, ta có một cấu xạ $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}) \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$, một phủ étale phân nhánh. Mỗi số nguyên tố p trong $\mathbb{Z}$ có thể không còn là số lý tưởng nguyên tố trong $\mathscr{O}$, nó phân rã thành tích của một số hữu hạn số lý tưởng nguyên tố, $(p) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_n$. Các số lý tưởng nguyên tố xuất hiện trong phân tích trên chính xác là những điểm của $\operatorname{Spec}(\mathscr{O})$ nằm trên điểm đóng của $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ ứng với p. Hiện tượng phân nhánh nhánh xảy ra nếu có một số lý tưởng $\mathfrak{p}_i$ xuất hiện nhiều lần trong phân tích trên, ta gọi đó số lần đó là **chỉ số rẽ nhánh** của $\mathfrak{p}_i$, nó đóng vai trò như chỉ số rẽ nhánh trong tôpô cổ điển.



Dedekind trên tem thư CHDC Đức.

Một bất đẳng thức trong lý thuyết số đại số, *chặn Minkowski*, cho phép xác định cụ thể phân tích trên. Hơn thế nữa, nó còn cho ta biết chính xác khi nào thì một số nguyên tố p rẽ nhánh trong $\mathscr{O}$. Một hệ quả của nó là với mọi trường số K, luôn có ít nhất một số nguyên tố p rẽ nhánh trong vành $\mathscr{O}$ các số nguyên đại số trong K, nghĩa là $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ không có phủ étale không rẽ nhánh nào ngoài phủ tầm thường (cho bởi ánh xạ đồng nhất $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$), hay nó là đơn liên.

Nút

Trong thế giới của các không gian tôpô thì có rất nhiều không gian đơn liên, và ta muốn tìm cái nào giống với $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$. Sự đột phá nằm ở các phát hiện sau đây của Mumford, Manin, và sau này là Mazur. Ở phía tôpô, các khái niệm điểm (0–chiều), đường (1–chiều), mặt (2–chiều) được tổng quát lên thành các đa tạp. Một đa tạp 3–chiều là một không gian tôpô mà nhìn địa phương thì giống như không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ (cũng như bề mặt trái đất là một đa tạp 2–chiều, nhìn địa phương thì giống như mặt phẳng).

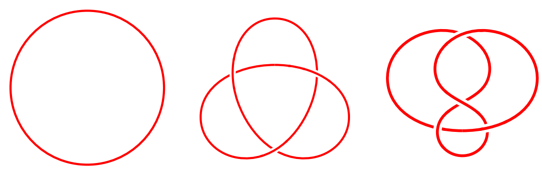
Bên cạnh nhóm cơ bản, tôpô đại số cổ điển còn cung cấp các bất biến đại số khác cho các không gian tôpô, gọi là các **nhóm đồng điều**. Nhóm đồng điều bậc n của một đa tạp X được xây dựng như sau: Xét các tổ hợp tạo thành từ một số đa tạp con n–chiều (chúng được gọi là các **n-dây chuyền**). Nếu chúng tạo thành một vòng kín, ta gọi nó là một **n–chu trình**. Nếu nó tạo thành biên của một đa tạp con $(n+1)$–chiều, ta gọi nó là một **n–biên**. Một n–biên thì luôn là một n–chu trình. Nhóm $H_n(X)$ được định nghĩa là chênh lệch giữa các nhóm các n–chu trình và nhóm các n–biên: một n–chu trình mà không phải n–biên thì nó bao quanh một "lỗ thủng" $(n+1)$–chiều; như vậy các nhóm đồng điều phát hiện các lỗ thủng trên X. Phiên bản đối ngẫu của đồng điều là **đối đồng điều**, các nhóm $H^n(X)$. Về cơ bản thì chúng cũng phát hiện các lỗ thủng. Về mặt kỹ thuật thì chúng dễ tính toán hơn đồng điều một chút, đồng thời có nhiều cấu trúc hơn. *Đối ngẫu Poincaré* nói rằng nếu X là một đa tạp đóng, khả định hướng, d–chiều, thì ta có một đối ngẫu hoàn hảo giữa hai nhóm $H^{d-i}(X)$ và $H^i(X)$ với mỗi $i = 0, 1, \ldots, d$.

Với các lược đồ, các nhóm đối đồng điều nhìn chung không cho thông tin gì (phần lớn chúng bằng 0) khi ta tính theo tôpô thông thường. Một lần nữa nhờ công của Grothendieck, ta có thể tính **đối đồng điều étale**. Trên một trường, chúng được gọi là **đối đồng điều Galois**, một công cụ đã được dùng từ lâu trước đó trong số học. Với các trường hữu hạn, đối đồng điều Galois của chúng rất đơn giản, chúng khác 0 ngoài bậc 0 và 1, và ta có một đối ngẫu hoàn hảo giữa các nhóm đối đồng điều ở hai bậc này. Điều này tương tự với đối ngẫu Poincaré cho các đa tạp 1–chiều, khẳng định thêm niềm tin rằng phổ của trường hữu hạn là phiên bản đại số của đường tròn.

Đối với các lược đồ $\mathrm{Spec}(\mathscr{O})$, với $\mathscr{O}$ là vành số nguyên đại số của một trường số K nào đó, các nhóm đối đồng điều étale thỏa mãn đối ngẫu giữa bậc 0 và bậc 3 cũng như bậc 1 và bậc 2. Các kết quả này được gọi là *đối ngẫu Artin–Verdier*, được khám phá khi áp dụng đối đồng điều étale cho lý thuyết trường các lớp toàn cục, một phần của lý thuyết số. Điều này gợi cho ta rằng phiên bản tôpô của $\mathrm{Spec}(\mathscr{O})$ "nên" là các đa tạp 3–chiều. Vậy $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ứng với đa đạp đóng 3–chiều nào? Ta thấy ở trên rằng $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ đơn liên, và đa tạp đóng 3–chiều đơn liên thì chỉ có thể đồng phôi với mặt (siêu) cầu $\mathbb{S}^3$! Đó là nội dung của *giả thuyết Poincaré*, bài toán duy nhất đã được giải trong 7 bài toán thiên niên kỷ. Tác giả của lời giải, thiên tài lập dị Perelman, đã từ chối cả Huy chương Fields lẫn Giải thưởng Thiên niên kỷ (Millennium Prize) cho công trình vô song của mình.

Sau khi bỏ ra rất nhiều công sức, ta đã thấy được cầu nối mong manh giữa tôpô học và số học, rằng phiên bản số học của $\mathbb{S}^1$ là (phổ của) một trường hữu hạn, và của một đa tạp đóng 3–chiều là vành các số nguyên đại số của một trường số. Bây giờ là lúc chúng ta thu hoạch kết quả, chiêm ngưỡng những sự tương tự đáng ngạc nhiên dựa trên cầu nối này. Một số lý tưởng nguyên tố $\mathfrak{p}$ trong $\mathscr{O}$ cho ta một phép nhúng $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_\mathfrak{p}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathscr{O})$. Về phía tôpô, ta xét các phép nhúng $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow M$, với M là một đa tạp (đóng, khả định hướng) 3-chiều. Chúng được gọi là các **nút** trong M. Nói riêng, phiên bản tôpô của mỗi số nguyên tố p (với phép nhúng tương ứng $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$) là một nút trong $\mathbb{S}^3$ (ta sẽ tập trung vào các nút này). Từ một định lý sâu sắc trong tôpô học, *định lý Borsuk–Ulam*, ta có thể chỉ ra rằng một phép nhúng như thế không thể là toàn ánh, nghĩa là ta có thể xem một nút như một phép nhúng từ $\mathbb{S}^1$ vào $\mathbb{S}^3$ bỏ đi một điểm, nói cách khác chính là không gian Euclid $\mathbb{R}^3$.

Để biểu diễn một nút $K : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ta có thể chiếu nó lên một mặt phẳng sau cho tại mỗi điểm giao nhau chỉ có đúng 2 đường đi qua. Chúng ứng với một **sợi trên** và một **sợi dưới**, ta biểu diễn sợi dưới bằng nét đứt tại giao điểm đó. Đó là một **biểu đồ phẳng** của nút.



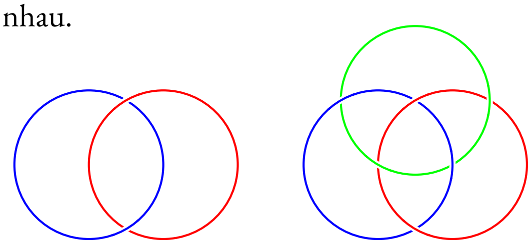
Hình 10: Biểu đồ phẳng của nút tầm thường, nút ba lá, và nút số 8.

Tất nhiên, mọi nút đều đồng phôi với $\mathbb{S}^1$. Ta cần cả thông tin về phép nhúng $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ để phân biệt các nút với nhau. Các nhà lý thuyết nút gọi sự giống nhau của các nút là **đẳng luân**. Một cách trực giác, hai nút đẳng luân nếu ta có thể tháo dỡ một nút rồi buộc thành nút còn lại (mà không cắt được cắt nút ra). Hóa ra, hai nút đẳng luân khi và chỉ khi phần bù của chúng trong $\mathbb{S}^3$ đồng phôi với nhau (*định lý Gordon–Luecke*).

Từ điển M²KR

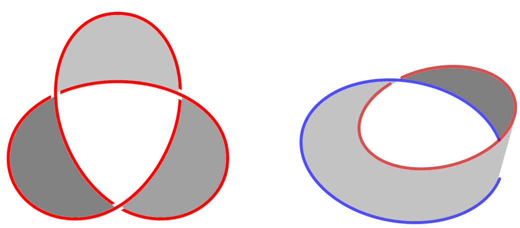
Từ điển Mazur–Morishita–Kapranov–Reznikov (M²KR) là một danh sách những sự tương tự giữa lý thuyết số và hình học của các đa tạp 3–chiều; ở đó các số lý tưởng tưởng ứng với các liên kết, các số lý tưởng nguyên tố ứng với các nút. Sau đây là một số tương ứng giữa tôpô và số học trong từ điển này.

Mỗi số lý tưởng trong $\mathscr{O}$ phân tích thành tích của các số lý tưởng nguyên tố. Phiên bản tôpô của số lý tưởng là **liên kết**: một liên kết trong một đa tạp đóng 3–chiều M là một phép nhúng từ một số hữu hạn bản sao rời rạc của $\mathbb{S}^1$ vào M. Các ví dụ về liên kết trong $\mathbb{S}^3$ là **liên kết Hopf** và **vòng Borromean**, lần lượt được tạo bởi 2 và 3 nút tầm thường lồng nhau.



Hình 11: Biểu đồ phẳng của liên kết Hopf và vòng Borromean.

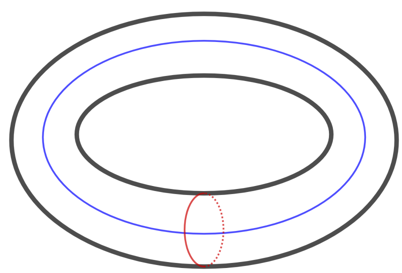
Để thêm phần thuyết phục rằng tại sao M lại tương ứng với (vành số nguyên đại số) một trường số, ta nhắc đến *định lý Alexander*: Mọi đa tạp đóng 3–chiều đều là một phủ phân nhánh của $\mathbb{S}^3$, trong đó các điểm rẽ nhánh trong $\mathbb{S}^3$ tạo thành một liên kết. Tương tự, một mở rộng L/K của trường số có thể được coi như một phủ phân nhánh giữa hai đa tạp đóng 3–chiều.



Hình 12: Mặt Seifert của nút ba lá và của liên kết Hopf (mặt Möbius).

Một số nguyên đại số $a \in \mathscr{O}$ ứng với một mặt compact S (có thể có biên) nhúng trong đa tạp đóng 3–chiều M. Số lý tưởng chính (a) ứng với biên ∂S, đây là một liên kết, và chúng ứng với các 1–đối biên, tức là phần tử 0 trong nhóm đồng điều $H_1(M)$. Các số lý tưởng khác tương ứng với các liên kết, chúng là các 1–chu trình mà không phải biên, đại diện cho các phần tử không tầm thường của $H_1(M)$. Ta biết rằng trong $\mathbb{Z}$ có phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố, hay mọi số lý tưởng nguyên tố đều là số lý tưởng chính. Tương ứng, với $M = \mathbb{S}^3$, ta có $H_1(M) = 0$ (vì $\mathbb{S}^3$ không có lỗ thủng 2–chiều nào), nghĩa là mọi liên kết đều là biên của một mặt nào đó. Seifert đã đưa ra một thuật toán khá đơn giản để xây dựng một mặt với biên cho trước. Chẳng hạn, **mặt Seifert** của liên kết Hopf chính là *mặt Möbius*.

Sự tương tự tiếp theo: với p là một số nguyên tố, ta xét vành $\mathbb{Z}_p$ các số nguyên p–adic cũng như trường $\mathbb{Q}_p$ các số p–adic. So với $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, phổ $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ chỉ còn 2 điểm là điểm tổng quát $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$ và điểm đóng $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$, vì thế ta gọi thao tác này **địa phương hóa** (tập trung nhìn vào số nguyên tố p và quên đi các số nguyên tố khác). Thao tác này ứng với việc lấy **lân cận ống** V của nút, kết quả thu được là một hình xuyến đặc. Dù hình xuyến đặc không đồng phôi với đường tròn, chúng **tương đương đồng luân với nhau**, điều này ứng với việc $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ và $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ **tương đương đồng luân étale với nhau**. Khi bỏ nút ban đầu khỏi V, ta thu được một không gian tương đương đồng luân với mặt xuyến (rỗng). Nhóm cơ bản của mặt xuyến là $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, một nhóm được sinh bởi hai phần tử là hai khuyên như trong Hình 13.



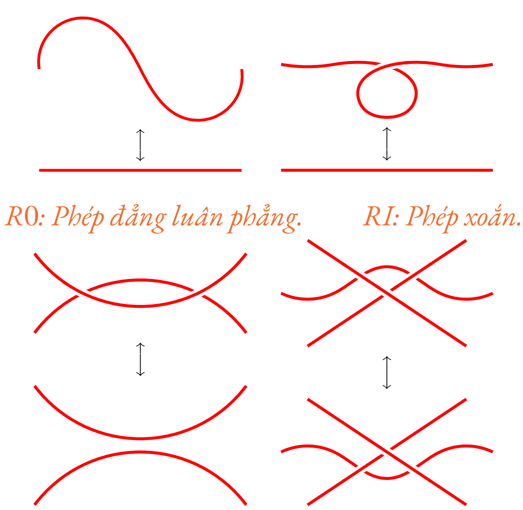
Hình 13: Nhóm cơ bản của mặt xuyến được sinh bởi hai khuyên màu xanh và màu đỏ.

Tương ứng, khi bỏ $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ khỏi $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$, ta thu được $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$, và **nhóm Galois rẽ nhánh yếu** (một phiên bản nhỏ hơn của nhóm cơ bản étale) của $\mathbb{Q}_p$ cũng được mô tả bởi 2 phần tử sinh. Sau cùng, lý thuyết trường các lớp địa phương của Tate cho ta các đối ngẫu hoàn hảo giữa đối đồng điều

Galois của $\mathbb{Q}_p$ ở bậc 0 và bậc 2, cũng như ở bậc 1 và chính nó. Tương ứng, ta có đối ngẫu Poincaré cho mặt xuyến, một đa tạp đóng 2–chiều.

Thao tác trên biểu đồ phẳng

Quay lại với sự đẳng luân của các nút. Một câu hỏi rất tự nhiên là làm thế nào để chứng minh hai nút không đẳng luân? Đẳng luân vốn là một điều kiện tôpô quá khó sử dụng. Một khó khăn khi sử dụng các biểu đồ phẳng là hai nút đẳng luôn có thể cho hai biểu đồ phẳng trông rất khác nhau. Vậy vấn đề đầu tiên là ta cần tìm cách phân biệt hai nút qua biểu đồ phẳng của chúng (bài toán nhận biết nút). Điều này có thể được thực hiện một cách tổ hợp. Cụ thể, hai biểu đồ phẳng biểu diễn hai nút đẳng luân khi và chỉ khi tồn tại một chuỗi hữu hạn các thao tác thuộc một trong 4 kiểu, được gọi là các **chuyển động Reidemeister**.



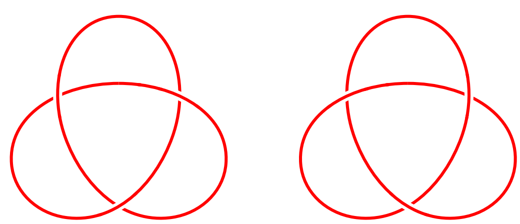
Hình 14: Các chuyển động Reidemeister.

Từ biểu đồ phẳng của nút, ta dùng các đại lượng không đổi qua các chuyển động Reidemeister, các **bất biến nút**. Hai nút có bất biến khác nhau thì phải khác nhau. Một ví dụ như vậy là **bất biến tô màu**. Ta nói một biểu đồ phẳng của nút là **tô được bằng 3 màu** nếu mỗi sợi (phần đường cong liên tục giữa hai giao điểm liên tiếp của nút) đều có thể tô được bằng một trong 3 màu cho trước, sao cho

- ít nhất hai màu phải được dùng;
- tại mỗi giao điểm, sợi trên cùng 2 sợi dưới hoặc là được tô cùng màu, hoặc là được tô 3 màu khác nhau.

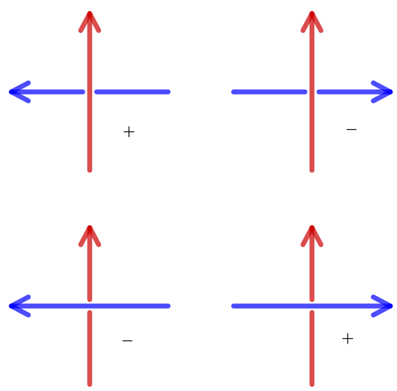
Ví dụ, nút ba lá hiển nhiên tô được bằng 3 màu, nút tầm thường hiển nhiên không tô được bằng 3 màu. Nút số 8 cũng không tô được bằng 3 màu. Vậy ít nhất ta biết rằng nút 3 lá không đẳng luân với nút tầm thường cũng như nút số 8.

Hiển nhiên là bất biến tô màu chỉ cho phép phân loại các nút thành 2 lớp. Ta cần các loại bất biến khác. Ví dụ, xét nút ba lá trái và ảnh gương của nó là nút ba lá phải. Tất nhiên cả hai đều tô được bằng 3 màu. Rất ngạc nhiên, hai nút này không đẳng luân! Hãy thử dùng các chuyển động Reidemeister để gỡ nút này thành nút kia và bạn sẽ sớm bị thuyết phục. Một bất biến cho phép phân biệt hai nút này là **đa thức Alexander**. Đa thức này đến từ *lý thuyết Alexander–Fox*, và người ta phát hiện ra phiên bản số học của nó là *lý thuyết Iwasawa*. Sự song song của chúng cho phép ta dịch các kết quả từ một bên sang bên còn lại.



Hình 15: Nút ba lá trái và nút ba lá phải.

Một kiểu bất biến khác cho liên kết là **số liên kết**. Xét một liên kết được tạo bởi hai nút. Giữa hai nút L và K, ta có thể định nghĩa **số liên kết** qua biểu đồ phẳng của chúng như sau. Chẳng hạn, tô màu đỏ cho L và màu xanh cho K, đồng thời định hướng cho chúng (mỗi nút có thể có 1 trong 2 hướng). Tại các điểm trên biểu đồ phẳng mà có một sợi của nút này nằm trên một sợi của nút kia hoặc ngược lại, ta đánh dấu $+$ hoặc $-$ theo quy tắc ở Hình 16. Sau đó ta lấy số dấu cộng trừ đi số dấu trừ, và lấy kết quả chia đôi. Kết quả cuối cùng thu được được gọi là số liên kết $\operatorname{lk}(L,K)$. Chẳng hạn, số liên kết của hai nút trong liên kết Hopf là 1 hoặc -1, tùy theo cách định hướng hai nút.



Hình 16: Quy tắc tính số liên kết.

Nhiều tính toán cho thấy rằng số liên kết thỏa mãn các tính chất tương tự như **ký hiệu Legendre** $\left(\frac{p}{q}\right)$ giữa hai số nguyên tố p,q trong lý thuyết thặng dư bậc hai. Ta có thể chứng minh rằng $\operatorname{lk}(K,L)=\operatorname{lk}(L,K)$. Tương ứng, ta có luật tương hỗ bậc hai, nói rằng

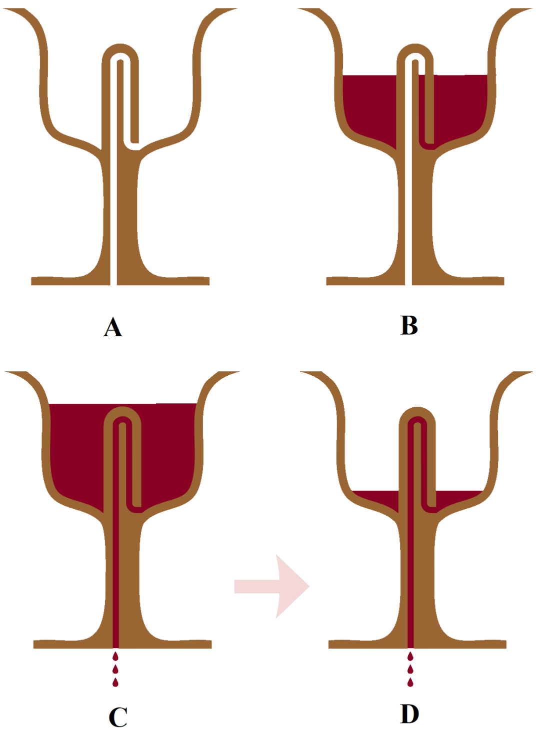
$$\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}\left(\frac{q}{p}\right).$$

Bài toán trung tâm của tôpô số học có lẽ là câu hỏi tự nhiên nhất: số nguyên tố nào ứng với nút nào? Đây vẫn là một câu hỏi mở. Nếu một ngày người ta xây dựng được một tương ứng $1-1$ tốt giữa chúng, theo nghĩa mỗi kết quả với số nguyên tố thì ta có kết quả với các nút tương ứng, một số lượng khổng lồ bài toán tôpô học sẽ được giải bằng các kết quả tương tự ở lý thuyết số, và ngược lại.
Có thể nói, tôpô số học là một trong những ví dụ điển hình nhất về tư tưởng toán học thống nhất, rằng tất cả những đại số, giải tích, hình học, số học... đều chỉ là một.

CHIẾC CỐC PYTHAGORAS

NGUYỄN HOÀNG VŨ

Người ta kể lại rằng nhà toán học Pythagoras đã thiết kế một loại cốc đặc biệt dành cho các học trò của mình (Hình 1). Ở phần giữa của nó có một lỗ thông xuống đáy được che lại bởi một cấu trúc tạo thành bình thông nhau.

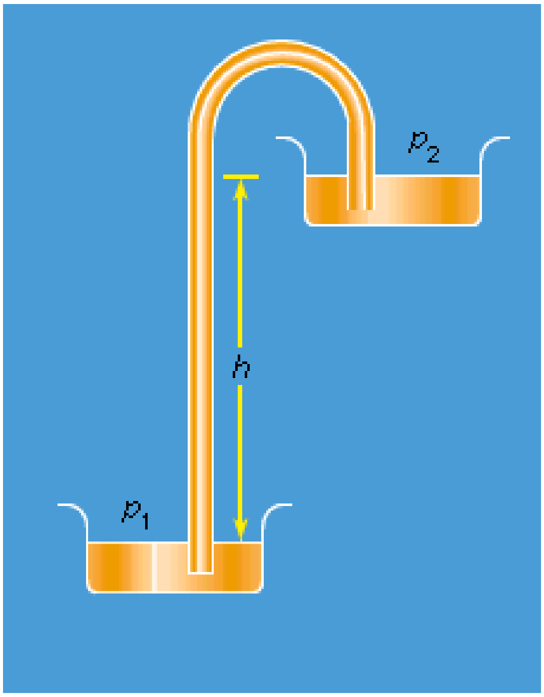


Hình 1. Chiếc cốc của Pythagoras. Khi rót đầy chất lỏng vượt ngưỡng, toàn bộ chất lỏng trong cốc sẽ bị chảy ra ngoài

Khi đổ dần rượu vào cốc, mực rượu sẽ dâng lên ở trong cốc cũng như nhánh thông với nó (Hình 1B). Đến khi mực rượu vượt ngưỡng chứa của nhánh này, nó bắt đầu sẽ bị chảy ra ngoài (Hình 1C). Nhưng thay vì chỉ rút xuống mức tới hạn trước khi rượu bắt đầu chảy ra, toàn bộ chất lỏng trong cốc lại vẫn tiếp tục tạo thành dòng chảy ra ngoài cho đến khi chảy hết rượu. Những kẻ tham lam sẽ không còn lại gì cả!

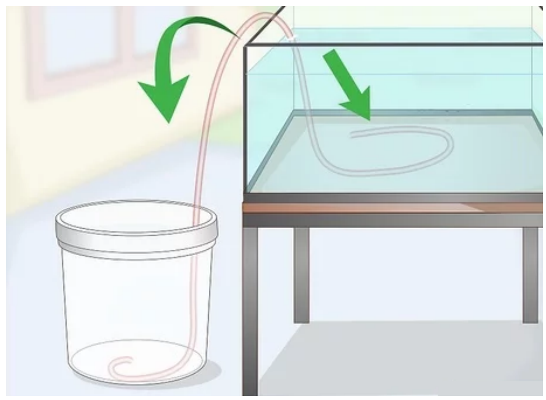
Đây là một bài học của Pythagoras cho các học trò của mình về việc phải có chừng mực trong cuộc sống, không được thái quá. Vậy còn bài học về vật lý ở đây là gì? Tại sao rượu lại có thể tiếp tục chảy ngược ra ngoài dù mực rượu trong phần ống cao hơn trong cốc? Những gì ta đã biết về bình thông nhau có bị vi phạm?

Thực chất của hiện tượng xảy ra trong chiếc cốc của Pythagoras giống với quy trình hoạt động của ống xi phông (Hình 2). Ống này có dạng ống chữ U ngược với hai đầu đặt ở hai khối chất lỏng khác nhau, một đầu cao hơn đầu còn lại. Chất lỏng trong ống xi phông có thể chảy từ khối chất lỏng cao ngược lên đỉnh chữ U rồi chảy xuống khối chất lỏng ở dưới. Để bắt đầu dòng chảy, người ta cần hút không khí ra khỏi đầu dưới của ống để tạo sự chênh lệch với áp suất khí quyển ở đầu còn lại. Hai mô hình được đưa ra để giải thích hiện tượng này. Trong mô hình thứ nhất, khi chất lỏng chảy vượt qua đỉnh của chữ U ngược, nó tạo ra một vùng áp suất thấp nên áp suất khí quyển từ đầu đường ống sẽ tiếp tục đẩy chất lỏng đi. Mô hình thứ hai dựa trên lực liên kết phân tử, trong đó sự kết dính giữa các khối nước sẽ kéo chúng theo nhau tạo thành dòng chảy. Việc mô hình nào là chính xác vẫn còn là một vấn đề đang được khoa học nghiên cứu.

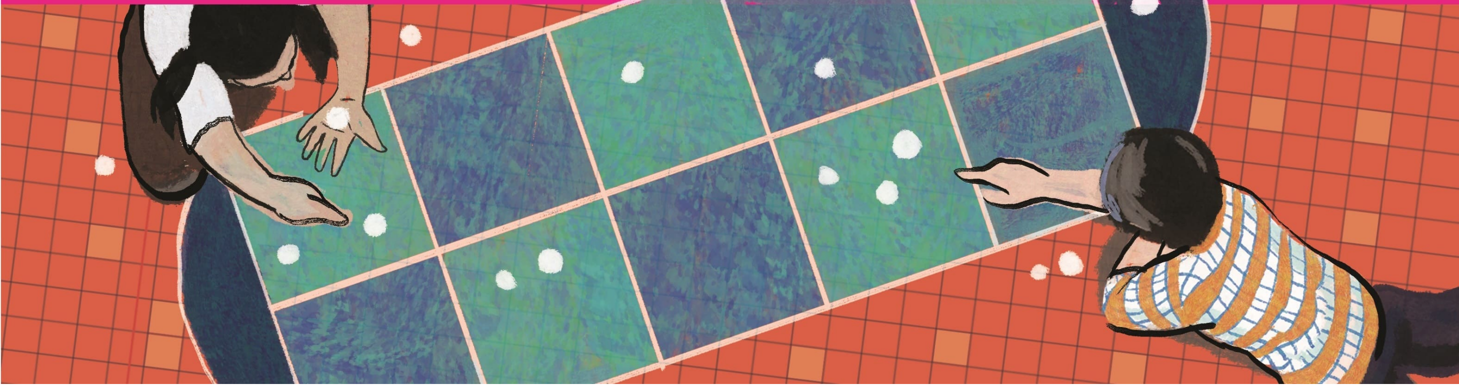


Hình 2. Ống xi phông có thể tạo dòng chảy đi lên ngược với chiều của trọng lực nếu hai đầu của chữ U ngược có độ cao khác nhau.

Nếu nhìn lại vào cấu tạo của chiếc cốc Pythagoras, ta có thể thấy ngay một đoạn chữ U ngược tương tự như ống xi phông với một đầu nối với lòng cốc và đầu còn lại nối với chân cốc. Trong thực tế, ống xi phông được sử dụng thường xuyên trong đời sống để tháo nước khỏi các bình chứa, lấy bia ra khỏi thùng bia, rút nước khỏi các mái nhà có diện tích lớn, hay trong khay đựng bột giặt của các máy giặt, ... Một số nghiên cứu khảo cổ cũng cho thấy ống xi phông đã được sử dụng từ thời Ai Cập cổ đại trong nhiều công việc như dẫn nước thủy lợi hay chế biến đồ uống.



Hình 3. Ống xi phông dùng để rút nước khỏi bể chứa.

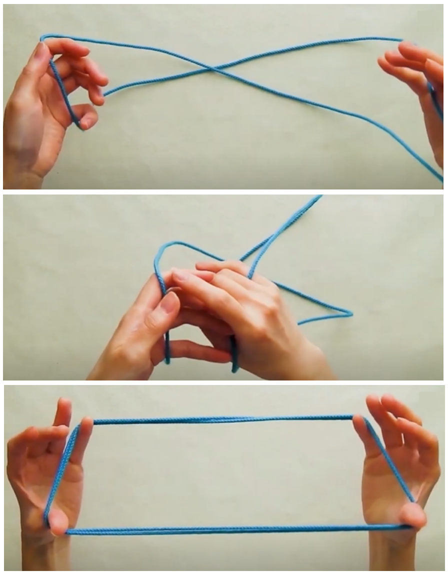


CÙNG CHƠI VỚI CÁC HÌNH ĐỐI XỨNG

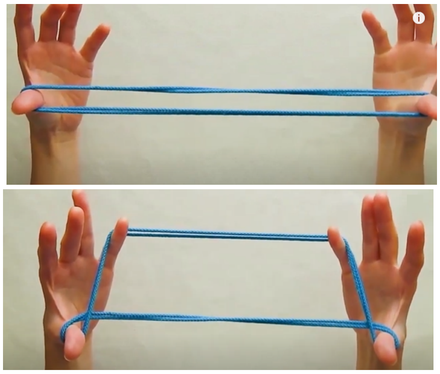
NGUYỄN THỤY VIỆT ANH[1]

Ayatori (hay trò chơi dây) là một trò chơi mà khi nhắc đến chắc chắn những người hâm mộ bộ truyện tranh Doraemon đều biết đến và nhớ ngay tới nhân vật Nobita. Trò chơi Ayatori là một trò chơi rất thú vị, người chơi sẽ sử dụng một sợi dây được buộc thành hình tròn, sau đó dùng những ngón tay của mình đan xen các sợi dây để tạo ra nhiều hình dạng khác nhau từ đơn giản đến phức tạp. Hôm nay, em hãy thử xếp hình ngôi sao thông qua trò chơi Ayatori nhé!

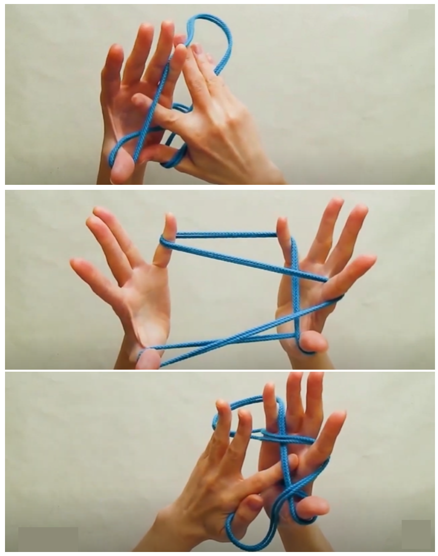
Bước 1: Cách cầm dây khi mới bắt đầu chơi trò chơi Ayatori là giữ sợi dây trong ngón cái và ngón út bằng hai tay, rồi kéo ngang để chuẩn bị chơi.



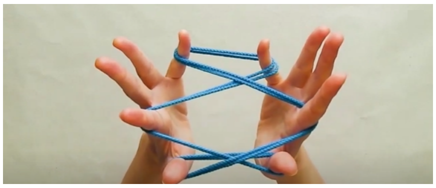
Bước 2: Thả dây ở hai ngón tay út. Sau đó dùng hai ngón tay út luồn phía dưới sợi dây ở hai ngón cái để kéo sợi dây ra như hình vẽ.



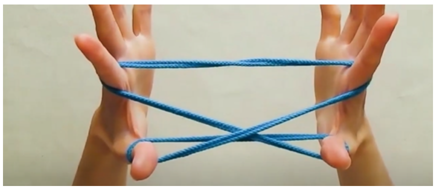
Bước 3: Lấy ngón trỏ tay phải móc vào phần dây giữa ngón cái và ngón út của tay trái. Thực hiện tương tự với ngón trỏ tay trái.



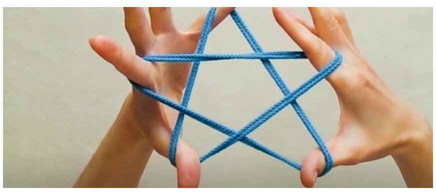
[1] *Trường Liên cấp Hội nhập Quốc tế iSchool Quảng Trị.*



Bước 4: Thả dây ở hai ngón tay út.



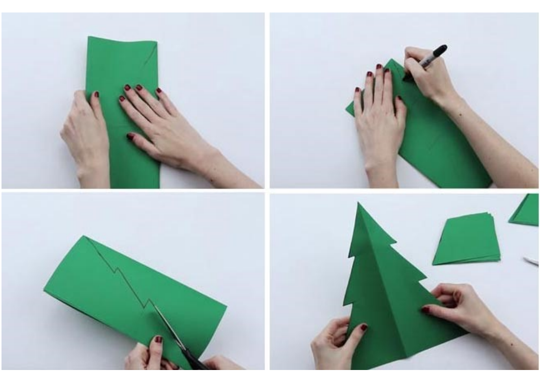
Bước 5: Dùng ngón út để kéo sợi dây ở dưới cùng lên và chúng ta sẽ hoàn hành ngôi sao năm cánh.



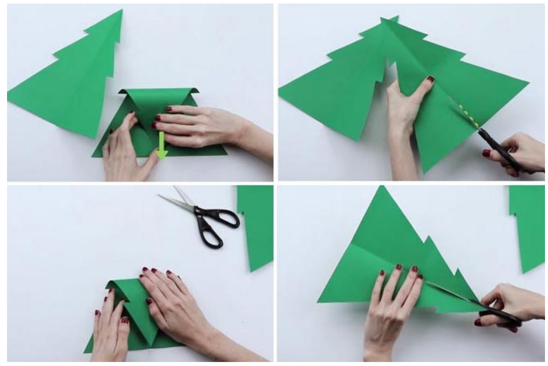
Hãy thử suy ngẫm xem hình ngôi sao năm cánh em vừa tạo ra có bao nhiêu trục đối xứng?

Làm cây thông Noel

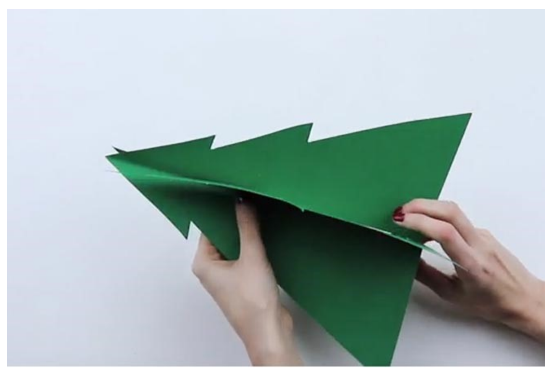
Bước 1: Xếp hai tờ giấy màu cứng chồng lên nhau rồi gấp đôi lại cho đều nhau. Sau đó lấy bút vẽ phác họa hình cây thông lên mặt ngoài của tờ giấy rồi dùng kéo cắt theo các đường đã vẽ sẵn. Lúc mở ra, em sẽ có hai cây thông với kích thước giống nhau.



Bước 2: Gấp đôi cây thông theo chiều ngang, gấp đầu nhọn xuống dưới để xác định tâm của mỗi cây thông. Tiếp đến dùng kéo cắt một đường từ đỉnh cây thông xuống điểm vừa đánh dấu. Cây thông còn lại thì cắt từ đáy lên điểm vừa đánh dấu.



Bước 3: Sau khi đã hoàn thành việc cắt hai cây thông, em hãy ghép chúng lại với nhau theo các khe đã cắt, chú ý để các góc không bị cong. Nếu sau khi ráp cây thông bị lung lay các em có thể cố định lại bằng keo dán.



Bước 4: Cuối cùng các em chỉ cần điều chỉnh sao cho cây thông đứng vững, trang trí thêm các dây ruy băng hay rắc kim tuyến,... hoặc vẽ họa tiết lên cây thông Noel để nhìn đẹp hơn.

Ảnh: Internet.

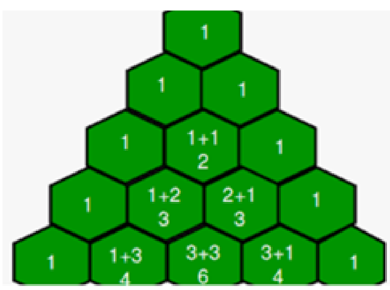
MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TỔ HỢP ĐẾM (COUNTING) TRONG KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TIỂU HỌC

NGÔ VĂN MINH

Trong chương trình phổ thông của Việt Nam, toán tổ hợp đếm được giới thiệu ở cấp THPT. Tuy nhiên trong một số cuộc thi học sinh giỏi toán dành cho cấp tiểu học và đầu cấp PTCS thì phần tổ hợp đếm đã được đưa vào nội dung bài thi khá nhiều, ví dụ như một số cuộc thi khá phổ biến ở Việt Nam hiện nay như IMAS (International Mathematics Assessment), Apmops (The Asia Pacific Mathematical Olympiad for Primary Schools), IMSO (The International Mathematics and Science Olympiad)...

Trong bài viết này chúng ta cùng làm quen với một số bài toán về đếm tổ hợp trong một số cuộc thi học sinh giỏi cấp tiểu học và lớp 6 THCS.

Trước hết chúng ta làm quen với một số khái niệm cơ bản trong phần toán tổ hợp đếm.



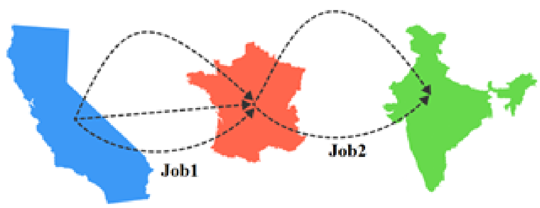
Quy tắc cộng trong tam giác Pascal.

Quy tắc cộng, quy tắc nhân: Quy tắc cộng và quy tắc nhân là hai quy tắc đếm cơ bản, có nội dung có thể được mô tả như sau:

Có hai công việc gọi là Job 1 và Job 2 (có thể mở rộng ra nhiều hơn 2 công việc) được thực hiện một cách độc lập nhau. Có m cách thực hiện Job 1 và n cách thực hiện Job 2, khi đó hai quy tắc đếm cơ bản được phát biểu như sau:

Quy tắc cộng: Có $m+n$ cách để thực hiện Job 1 hoặc Job 2.

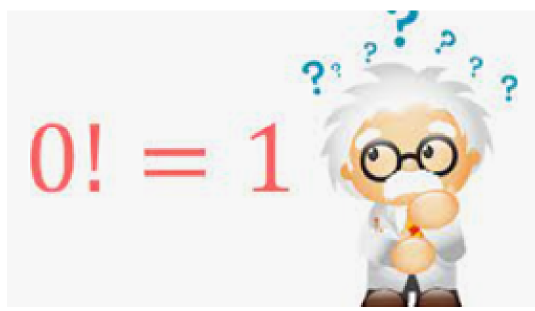
Quy tắc nhân: Có $m\times n$ cách để thực hiện Job1 và Job2 (thực hiện cả hai công việc).



Quy tắc nhân trong bài toán đếm đường đi.

Giai thừa: của n là số cách sắp xếp thứ tự của n phần tử trong một tập hợp, được ký hiệu là $n!$ và có công thức là: $n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times n$.

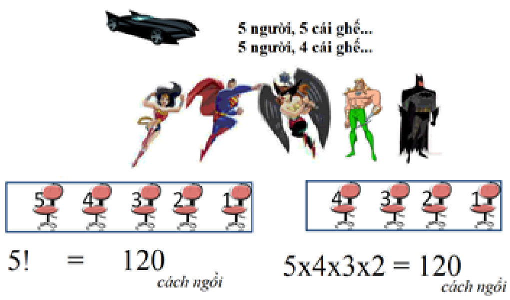
Ghi chú: $0! = 1$



Hoán vị (Permutation): Có n người và chỉ có k cái ghế trên một hàng ($k\le n$), ta cần xếp đủ k người từ nhóm n người vào k cái ghế. Khi đó số cách xếp gọi là hoán vị và ký hiệu là:

$$P(n,k) = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

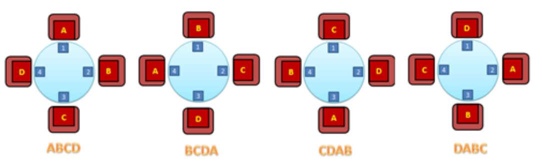
Trong trường hợp có n người và có đúng n cái ghế khi đó ta có số cách sắp xếp n người này chính là định nghĩa của $n!$ (số cách sắp xếp các phần tử của một tập hợp n phần tử): $P(n,n) = n!$



Hoán vị vòng tròn (Circular Permutation): Xung quanh một bàn tròn có n người ngồi. Hai hoán vị được coi là như nhau nếu chúng có thể chồng khít vào nhau bằng phép xoay. Số cách sắp xếp n người xung quanh một cái bàn tròn cố định là: (*cố định: có nghĩa là ta không thể nhấc nó ra để lật ngược lại được*)

$$P_n = (n-1)!$$

Số là $(n-1)!$ thay vì $n!$ vì có n cách xoay bàn và n hoán vị do xoay bàn từ 1 vị trí là như nhau.



Hoán vị vòng tròn 4 người ngồi xung quanh một cái bàn hình tròn.

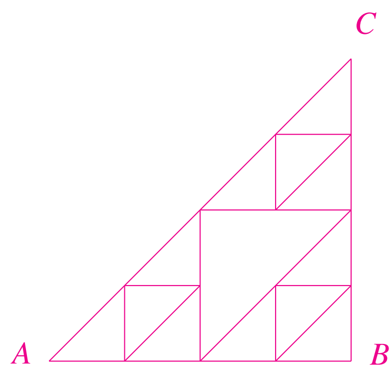
Tổ hợp (Combonation): Đếm số cách để chọn k người từ một nhóm n người là một trong những bài toán tổ hợp đếm cơ bản, và nó được gọi bằng một cái tên đặc biệt: TỔ HỢP và được ký hiệu $C(n,k)$; C_n^k và có công thức là:

$$\begin{aligned} C_n^k = C(n,k) &= \frac{P(n,k)}{k!} \\ &= \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n!}{k!\times(n-k)!} \end{aligned}$$

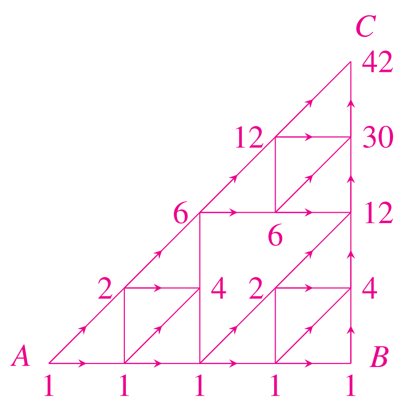
Bài toán số 1: (IMAS)

Sơ đồ dưới đây gồm nhiều tam giác vuông cân.

Có bao nhiêu cách một con kiến có thể đi từ A đến C nếu nó chỉ được phép di chuyển lên trên, sang phải hay theo đường chéo?



Phân tích bài toán: Tại mỗi điểm nút trên hình vẽ, số cách đi từ A đến nó sẽ bằng tổng số cách đi từ A đến các điểm nút ngay đằng trước nó theo chiều mũi tên được phép đi (phải, lên trên và đi chéo).



Vậy nên ta có để điền mũi tên hướng đi và áp dụng quy tắc cộng để giải quyết các bài toán dạng này.

Lời giải: Theo quy tắc cộng thể hiện trên hình vẽ bên dưới ta có tổng số cách đi từ A đến C là 42.

Bài toán số 2: (IMAS)

8 ký tự $2, 0, 1, 5, I, M, A, S$ được xếp trên 1 hàng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho các chữ số đứng đằng trước các chữ cái, chữ số 0 không đứng đầu tiên.

Lời giải. Có 8 vị trí để xếp 8 ký tự, các chữ số đứng đằng trước các chữ cái nên 4 vị trí đầu tiên là các chữ số và 4 vị trí sau cùng. Ta thực hiện 2 công việc là xếp chữ số và xếp chữ cái:

+ Có $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ cách xếp các chữ số (chữ số 0 không đứng ở đầu nên vị trí đầu chỉ có 3 cách chọn chữ số).

+ Có $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ cách xếp 4 chữ cái.

Theo quy tắc nhân (hai quy tắc cơ bản trong đếm tổ hợp là quy tắc cộng và quy tắc nhân) ta có số cách xếp 8 ký tự là: $18 \times 24 = 432$.

(Ta có thể lập luận: ta thực hiện 3 công việc theo thứ tự là Job 1 là viết chữ số đầu tiên, Job 2 là viết 3 chữ số tiếp theo, Job 3 là viết 4 chữ cái, và theo quy tắc nhân ta có kết quả là: $P(3,1) \times P(3,3) \times P(4,4) = 3 \times 3! \times 4! = 432$)

Mở rộng bài toán số 2, các bạn thử sức với bài toán số 3 nhé.

Bài toán số 3:

8 ký tự $2,0,1,5,I,M,A,S$ được xếp trên 1 hàng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

$a)$ Không có hai chữ cái nào đứng cạnh nhau.

$b)$ Chữ số 0 nằm giữa hai chữ cái I và S.

$c)$ Chữ số 0 và chữ số 1 không đứng cạnh nhau.

$d)$ 4 chữ cái luôn đứng cạnh nhau.

Bài toán số 4: (IMAS)

Có bao nhiêu số có 3 chữ số không chứa chữ số 3 và chia hết cho 3.

Phân tích bài toán:

Gọi số có 3 chữ số là $\overline{abc}$:

Thử từ số nhỏ để tìm quy luật:

$$102, 105, 108, 111, 114, 117$$
$$120, 126, 129, 132, 135, 138$$
$$141, 144, 147, 150, 156, 159\ldots$$

Ta nhận thấy chữ số c lặp theo nhóm $(2,5,8)$, $(1,4,7)$, $(0,6,9)$ và mỗi nhóm này xuất hiện phụ thuộc vào số dư chi 3 của số $\overline{ab}$ từ đó ta có lời giải như sau:

Lời giải

Nếu $\overline{ab}$ chia 3 dư 0 ta có 3 cách chọn $c = \{0,6,7\}$

Nếu $\overline{ab}$ chia 3 dư 1 ta có 3 cách chọn $c = \{2,5,8\}$

Nếu $\overline{ab}$ chia 3 dư 2 ta có 3 cách chọn $c = \{1,4,7\}$

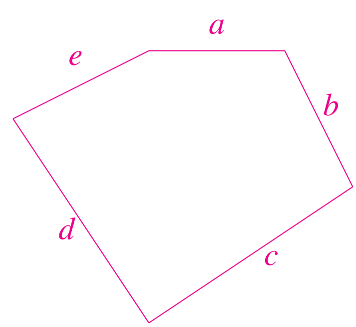
Vậy mỗi số $\overline{ab}$ ta luôn có 3 cách chọn chữ số c.

Ta có 9×10 cách tạo ra số $\overline{ab}$.

Vậy số số có 3 chữ số không chứa chữ số 3 và chia hết cho 3 là: $9 \times 10 \times 3 = 270$ (số);

Bài toán số 5: (APMOPS)

Mỗi cạnh của hình ngũ giác có cạnh a,b,c,d,e tương ứng được tô bằng một trong 3 mầu xanh, đỏ, vàng. Hỏi có bao nhiêu cách tô mầu cách cạnh của hình ngũ giác này sao cho không có 2 cạnh nào kề nhau có cùng mầu.



Phân tích bài toán: Nếu ta tô thứ tự a,b,c,d,e thì a và b có tương ứng 3 và 2 cách tô. Đến tô c thông thường sẽ có 2 cách tô, d cũng 2 cách tô, nhưng nếu như vậy thì e sẽ không xác định được số cách tô vì nó phụ thuộc vào 2 cạnh a và d, bởi vậy ta cần xét đến mầu cụ thể của c cũng như của d để tính được số cách tô mầu c. Vậy ta có thể tiếp cận bài toán bằng hai cách sau đây.

Lời giải 1:

Tô a, có 3 cách tô, tô b, có 2 cách tô.

Tô c:

Trường hợp 1: c cùng mầu với a, c có 1 cách tô, d có 2 cách tô, e có 1 cách tô, số cách tô ngũ giác là: $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 12$ (1).

Trường hợp 2: c khác mầu với a, c có 1 cách tô (vì c khác với cạnh b kề với nó), xét 2 khả năng tô d:

2.1 d cùng mầu với a, d có 1 cách tô, e có 2 cách tô. Số cách tô ngũ giác là $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 12$ (2).

2.2 d khác mầu a, d có 1 cách tô (vì c khác mầu a), e có 1 cách tô. Số cách tô ngũ giác là: $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 6$ (3).

Từ (1),(2),(3) ta có số cách tô cần tìm là: $12 + 12 + 6 = 30$.

Lời giải 2:

Tô a, có 3 cách tô. Tô c, xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: c cùng mầu a, c có 1 cách tô, b có 2 cách tô, d có 2 cách tô, e có 1 cách tô. Số cách tô ngũ giác là: $3 \times 1 \times 2 \times 2 \times 1 = 12$ (1).

Trường hợp 2: c khác mầu a, c có 2 cách tô, b có 1 cách tô. Xét 2 khả năng tô d.

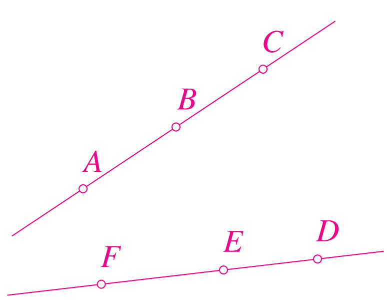
2.1 d cùng mầu với a, d có 1 cách tô, e có 2 cách tô. Số cách tô ngũ giác là: $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2 = 12$ (2).

2.2 d khác mầu a, d có 1 cách tô (do c khác mầu a), e có 1 cách tô. Số cách tô ngũ giác là: $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 6$ (3).

Từ (1),(2),(3) ta có số cách tô cần tìm là: $12 + 12 + 6 = 30$.

Bài toán số 6: (Apmops)

A, B, C, D, E và F là các điểm nằm trên 2 đường thẳng như hình vẽ. Có bao nhiêu tam giác được tạo bởi 3 trong 6 điểm đã cho.



Phân tích bài toán:

Trên mặt phẳng cứ 3 điểm phân biệt không thẳng hàng luôn tạo ra một tam giác, còn 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì không tạo ra một tam giác thông thường mà thường được gọi là tam giác suy biến (degenerate triangle). Tương tự như thế, nếu có các đường thẳng đôi một cắt nhau, mà không có 3 đường thẳng nào cắt nhau tại 1 điểm (3 đường đồng quy) thì cứ 3 đường thẳng tạo ra được 1 đoạn thẳng. Cứ 3 đường thẳng đồng quy thì nó tạo ra một tam giác suy biến (có 3 đỉnh trùng vào nhau). Các tính chất này có thể được áp dụng để giải bài toán trên và các bài toán mở rộng ở phần dưới.

Lời giải 1:

Xét 2 trường hợp, trường hợp 1: tam giác có đáy nằm ở đường thẳng phía dưới, đỉnh nằm ở đường thẳng phía trên, có $C(3,2)$ cách chọn đáy và $C(3,1)$ cách chọn đỉnh, theo quy tắc nhân, số tam giác đếm được là: $C(3,2) \times C(3,1)$. Tương tự, trường hợp 2: tam giác có đáy nằm ở đường thẳng phía trên, đỉnh nằm ở đường thẳng phía dưới, có $C(3,2)$ cách chọn đáy và $C(3,1)$ cách chọn đỉnh, theo quy tắc nhân, số tam giác đếm được là: $C(3,2) \times C(3,1)$.

Vậy số tam giác cần tìm là: $2 \times C(3,2) \times C(3,1) = 2 \times 3 \times 3 = 18$.

Lời giải 2:

Số cách chọn ra 3 điểm là: $C(6,3) = 6 \times 5 \times 4/3! = 20$

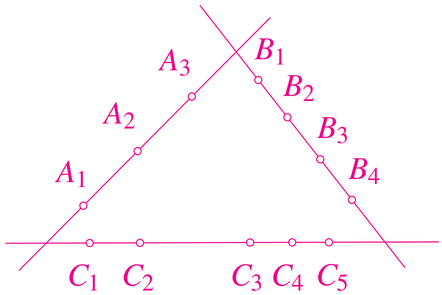
Số tam giác suy biến là: $3 \times C(3,3) = 2$

Vậy số tam giác là: $20 - 2 = 18$

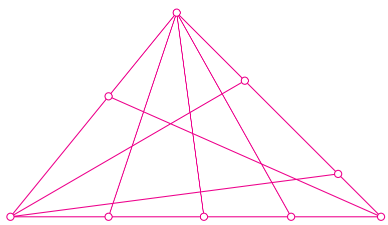
Mở rộng bài toán số 5, các bạn thử sức của mình xem sao nhé.

Bài toán 6.1 (Apmops)

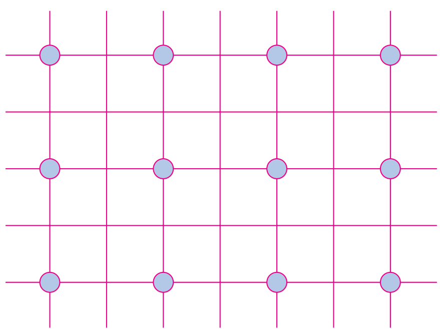
Cho các điểm $A1$, $A2$, $A3$, $B1$, $B2$, $B3$, $B4$, $C1$, $C2$, $C3$, $C4$ và $C5$ nằm trên 3 đường thẳng như hình vẽ. Có bao nhiêu tam giác được tạo bởi 3 trong các đỉnh đã cho?



Bài toán 6.2 Có bao nhiêu tam giác trong hình vẽ?



Bài toán 6.3 Có bao nhiêu tam giác được tạo bởi 3 trong 12 điểm đã cho trên lưới ô vuông như hình vẽ?



Bài toán số 7: (Apmops)

Có bao nhiêu cách để tô 6 mặt của một hình lập phương bằng 6 màu, mỗi mặt được tô bằng 1 màu sao cho không có hai mặt nào có cùng màu? (Hai cách tô màu được coi là như nhau nếu chúng nhìn giống hệt nhau sau một phép xoay hình).

Phân tích bài toán: Hướng đi thứ nhất, ta hình dung nếu cố định hình lập phương lại và mỗi cách nhìn khác nhau ở mỗi phía được coi là khác nhau, như thế thì số cách tô sẽ như tô theo hàng ngang (6 người ngồi trên 6 cái ghế trên 1 hàng) và sẽ là $6! = 720$ cách. Do hình lập phương này xoay được nên ta xem mỗi một kiểu tô có bao nhiêu cách xoay nó xung quanh chính nó. Do có 6 màu ta có 6 cách xoay để có đáy khác màu. Mỗi cách đặt đáy với 1 màu ta có 4 cách xoay xung quanh chính nó (do hình lập phương có 4 cạnh bên), từ đó ta có hướng giải quyết bài toán.

Hướng đi thứ 2, do hình lập phương xoay được nên ta có thể cố định màu ở những vị trí ta có thể xuay nó về và ta sẽ có hướng giải quyết bài toán như lời giải 2.

Hướng đi thứ 3 gần giống với hướng thứ 2, ta có thể hình dung mình có thể tô màu ở đáy bằng màu tùy thích do hình lập phương xoay được, mặt đối diện trên đỉnh sẽ còn 5 cách tô, 4 mặt xung quanh ta sẽ hình dung nó như 4 người ngồi xung quanh một cái bàn tròn nên ta có thể áp dụng bài toán hoán vị vòng tròn để giải quyết.

Lời giải 1:

Giả sử hình lập phương cố định, khi đó ta có $6! = 720$ cách tô.

Mỗi cách tô ta có 6 cách đặt các mặt khác màu nhau xuống đáy, khi đặt rồi ta có 4 cách xoay xung quanh nó, vậy ứng với mỗi cách tô màu ta có $6 \times 4 = 24$ cách xoay nó xung quanh chính nó. Vậy số cách tô màu là: $720 : 24 = 30$ (cách).

Lời giải 2:

Đầu tiên ta tô màu 1 mặt (màu ta thích), rồi đặt nó xuống đáy, khi đó ở mặt đối diện trên đỉnh có 5 cách tô.

Tiếp theo ta tô màu 1 mặt xung quanh (màu ta thích trong 4 màu còn lại), rồi xoay nó sang bên trái, khi đó mặt bên phải có 3 cách tô, còn 2 mặt còn lại (trước và sau) có 2! cách tô, vậy số cách tô màu là: $1 \times 5 \times 1 \times 3 \times 2! = 30$ (cách)

Lời giải 3:

Tương tự như lời giải 2, đầu tiên ta tô màu 1 mặt (màu ta thích), rồi đặt nó xuống đáy, khi đó ở mặt đối diện trên đỉnh có 5 cách tô.

Còn 4 mặt xung quanh, do xoay được nên

theo bài toán hoán vị vòng tròn ta có $4!/4 = 6$ cách tô.

Vậy số cách tô mầu hình lập phương là: $5 \times 6 = 30$ (cách).

Bài toán số 8: (IMSO)

Một hình lập phương được tô các mặt bằng 6 mầu, mỗi mặt 1 mầu khác nhau và được đánh số từ 1 đến 6 sao cho tổng hai mặt đối diện bằng 7. Hỏi có bao nhiêu cách tô mầu và đánh số hình lập phương này? (Hai cách tô mầu, đánh số được coi là như nhau nếu chúng nhìn giống hệt nhau sau một phép xoay hình).

Phân tích bài toán: Bài toán này là tương đối khó khi các bạn lớp 5, 6 đi thi gặp phải, và đúng là trong năm thi đó đoàn học sinh Việt Nam chỉ có đúng 1 bạn làm được, tuy nhiên nếu chia bài toán làm hai bước, bước 1 tô mầu, bước 2 điền số thì ta có thể giải quyết được bài toán một cách tương đối dễ dàng.

Lời giải:

Bước 1: Tô mầu hình lập phương, theo bài toán số 7, ta có 30 cách tô mầu hình lập phương này.

Bước 2: Đánh số, ta đánh theo thứ tự:

Đánh số 1, có 6 cách. Đánh số 6 ở mặt đối diện số 1, có 1 cách.

Đánh số 2, có 4 cách (do còn 4 mặt chưa đánh số). Đánh số 5 ở mặt đối diện, có 1 cách.

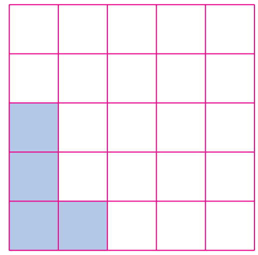
Đánh số 3, có 2 cách (do còn 2 mặt chưa đánh số). Đánh số 4 ở mặt đối diện, có 1 cách.

Vậy ta có $6 \times 1 \times 4 \times 1 \times 2 \times 1 = 48$ cách đánh số.

Theo quy tắc nhân ta có số cách tô mầu và đánh số là: $30 \times 48 = 1440$ (cách).

Bài toán số 9: (IMAS)

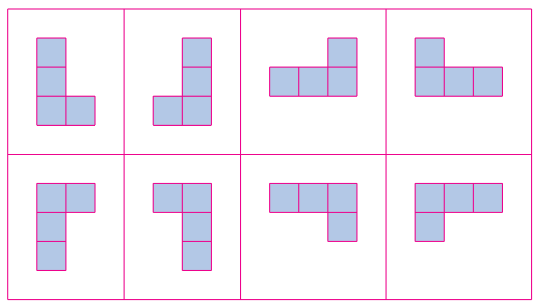
Một bàn cờ hình vuông 5×5 được xếp một hình chữ L chiếm 4 ô như hình vẽ. Ta có thể xuay hoặc lật hình chữ L này. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hình chữ L này vào bàn cờ hình vuông đã cho?



Phân tích bài toán: Ta nhận thấy hình chữ L tô đen có thể xoay hoặc lật được, nên ta sẽ xem nó có thể có bao nhiêu cách biến hình (xoay hoặc lật). Ứng với mỗi phép biến hình bằng xoay, lật ta xem có bao nhiêu cách trượt nó theo hàng ngang và hàng dọc, từ đó ta có cách giải quyết bài toán.

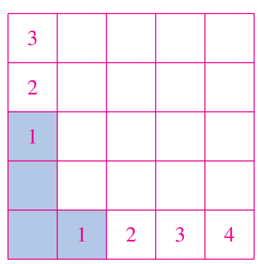
Lời giải:

Ta tính số cách xoay, lật hình chữ L tô đậm, như hình dưới ta có 8 cách.



Ứng với mỗi cách biến hình này, ta xem có bao nhiêu cách dời hình theo hàng ngang và hàng dọc, và ta tính được số cách dời hình bằng trượt (tịnh tiến) theo hai chiều ngang, dọc là: $3 \times 4 = 12$.

3 cách di chuyển theo cột dọc

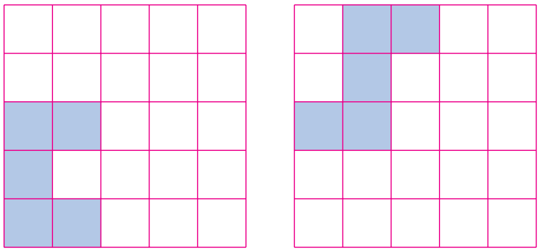


4 cách di chuyển theo hàng ngang

Theo quy tắc nhân, ta có số cách đặt chữ L vào ô vuông 5×5 là: $8 \times 12 = 96$ (cách)

Mở rộng bài toán số 9. Các bạn thử sức mình xem nhé.

Bài toán số 9.1: Đề bài giống như bài toán số 9, hình được xếp vào được thay đổi như sau:

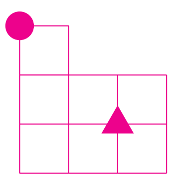


a) *b)*

Bài toán số 10: (IMSO).

Một hình tròn và một tam giác được xếp trên các điểm cắt của lưới ô vuông như hình vẽ sao cho tam giác và hình tròn không cùng nằm trên một hàng hay một cột.

Hỏi có bao nhiêu cách xếp tam giác và hình tròn vào lưới ô vuông như hình vẽ này. Trên hình vẽ là một ví dụ về cách xếp tam giác và hình tròn.



Phân tích bài toán: Bài toán này các bạn nhỏ lớp $4, 5$ trong câu lạc bộ toán UMC đã làm được theo nhiều cách khác nhau, các bạn quan sát sẽ thấy ngoài hai điểm ở hàng trên cùng thì bên dưới cứ mỗi hình chữ nhật sẽ có $2! \times 2! = 4$ cách đặt hình tròn và tam giác (do mỗi cặp đỉnh không kề nhau của 1 hình chữ nhật sẽ có $2!$ cách đặt hình tròn và tam giác). Sau đây là một số cách giải của các bạn.

Lời giải 1*:* (Lê Kỳ Nam, Vĩnh Giang)

Nếu đường tròn nằm trên hàng đầu tiên (có 2 vị trí), thì ở mỗi vị trí sẽ có $14 - 4 - 1 = 9$ cách chọn tam giác, tổng số cách chọn là: $9 \times 2 = 18$.

Nếu đường tròn đi vào phần còn lại của 2 cột đầu tiên, thì ở mỗi vị trí, số cách chọn tam giác là $14 - 3 - 3 - 1 = 7$, tổng số cách chọn là $6 \times 7 = 42$.

Nếu đường tròn đi ở 2 cột cuối cùng, thì ở mỗi vị trí, tam giác sẽ có $14 - 3 - 2 - 1 = 8$ lựa chọn, tổng số cách chọn là $6 \times 8 = 48$.

Tổng số cách xếp hình tròn và hình tam giác là: $18 + 42 + 48 = 108$.

Đáp số: 108

Lời giải 2*:* (Nguyễn Gia Tuấn)

Nếu hình tròn và hình tam giác không được đặt trên hình vuông trên cùng thì có $3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72$ cách chọn.

Nếu một trong các tam giác hoặc hình tròn được đặt trên hình vuông trên cùng thì có $2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$ cách chọn.

Tổng cộng có $72 + 36 = 108$ cách chọn.

Lời giải 3*:* (Nguyễn Trọng Cường).

Tổng số các cách có thể đặt hình tròn và tam giác vào 2 điểm bất kỳ của hình là: $14 \times 13 = 182$ cách

Nếu hình tròn và tam giác nằm trên cùng 1 cột, hoặc 1 hàng, thì 2 điểm sẽ tạo nên 1 đoạn thẳng. Ta đếm số đoạn thẳng của hình trên.

Số đoạn thẳng của hình là :

$$1 + (1+2+3) \times 3 + (1+2+3) \times 2 + (1+2) \times 2 = 37$$

Hình tròn và tam giác ở 2 đầu đoạn thẳng, đổi chỗ được cho nhau $\Rightarrow$ có $37 \times 2 = 74$ cách ko thỏa mãn

Số cách thỏa mãn đề bài là $182 - 74 = 108$ cách.

Lời giải 4*:* (Nguyễn Gia Tuấn). – Dùng phần bù:

Với lưới ô vuông 3×3 thì ta có $C(4,2) \times C(4,2) \times 4 = 144$ cách chọn. (Do mỗi hình chữ nhật có 4 cách đặt tam giác và hình tròn).

Trong lưới 3×3 đó, nếu đặt hình tròn hoặc tam giác vào 2 điểm trên cùng ở bên phải thì có $2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$ cách chọn.

Vậy ta có $144 - 36 = 108$ cách chọn để xếp hình tròn và hình tam giác.

Trả lời: 108 lựa chọn.

THÁM TỬ VÀ 50 TÊN CƯỚP

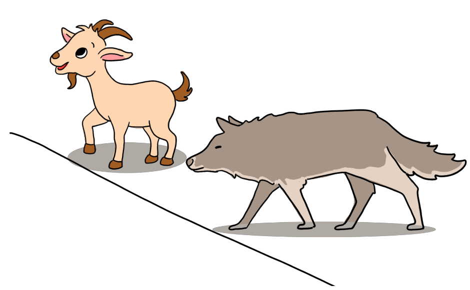
GIA DƯƠNG

Cùng với cảnh sát thành phố, thám tử Xuân Phong đã tóm gọn được một băng cướp gồm 50 tên. Tuy nhiên khi tra hỏi, tên cướp nào cũng muốn làm giảm nhẹ tội lỗi của mình. Qua điều tra, Xuân Phong biết rằng tất cả 50 tên chưa từng cùng tham gia một vụ cướp, tuy nhiên cứ hai tên bất kỳ trong số chúng đều đã gặp gỡ nhau tại các vụ cướp bóc chung duy nhất đúng một lần. Khi khai nhận, tất cả các tên cướp đều trả lời rằng, chúng chỉ mới đi trộm cắp cướp giật và số vụ cướp mà mỗi tên tham gia đều ít hơn 8 vụ. Xuân Phong nghe lời khai của chúng đã xác định được ngay có ít nhất một tên cướp đã nói dối. Em có biết vì sao Xuân Phong lại kết luận được như vậy hay không?

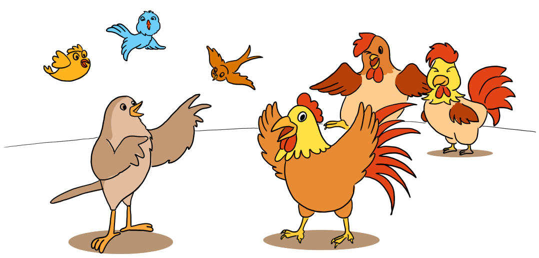
CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

1. Ở nhà một mình, bé Hoa rót ra một cốc sữa đầy và uống hết một nửa. Sau đó Hoa rót thêm nước ép táo vào cho đầy cốc, rồi lại uống hết một nửa. Cuối cùng, bé lại rót thêm nước ép táo vào đầy cốc rồi uống hết sạch cả cốc. Hỏi bé Hoa đã uống thứ gì nhiều hơn: sữa hay nước ép táo?

2. Dê con và Sói cùng thi xem ai chạy từ nhà tới bờ suối và quay ngược lại nhanh hơn. Biết rằng khoảng cách từ nhà tới bờ suối là 100 bước nhảy của Dê con. Một bước nhảy của Sói dài gấp 3 lần một bước nhảy của Dê con. Tuy nhiên trong khoảng thời gian Sói nhảy được một bước thì Dê con lại nhảy được 3 bước. Hỏi ai sẽ chiến thắng?



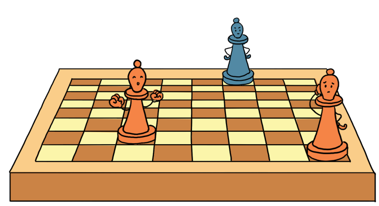
3. Có tất cả 25 chú chim cúc cu và gà trống cùng tham gia một cuộc thi hùng biện giữa các loài vật. Trong số 15 chú chim bất kỳ luôn có ít nhất một chú gà trống, và trong số 12 chú chim bất kỳ luôn có ít nhất một chú chim cúc cu. Hỏi trong cuộc thi đó có bao nhiêu chú gà trống và bao nhiêu chú chim cúc cu tham gia?



4. Người ta trồng trong công viên hai loài cây gồm phượng vĩ và sấu. Trong đó phượng vĩ chiếm 60% tổng số hai loài. Vào mùa xuân cây sấu được trồng thêm trong công viên, do đó cây phượng vĩ chỉ còn chiếm 20% tổng số cây. Sang mùa thu người ta lại trồng thêm phượng vĩ, vì thế cây phượng vĩ lại chiếm 60% tổng số cây hai loài. Hỏi sau hai lần trồng thì số cây trong công viên tăng lên bao nhiêu lần?

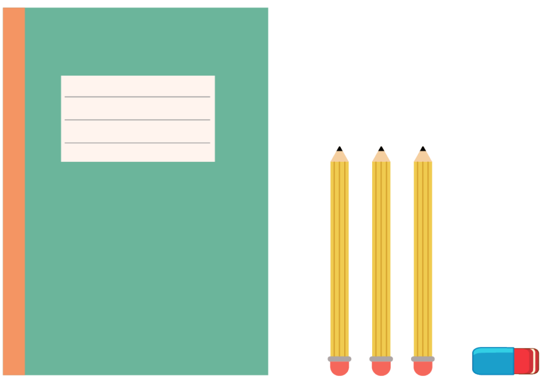
5. Alibaba đột nhập vào một hang động, trong đó có 100 chiếc bao vải đựng đầy những đồng tiền. Một chiếc bao vải trong số đó chỉ đựng toàn đồng tiền giả. Khối lượng của một đồng tiền thật là 10 gram, trong khi khối lượng của một đồng tiền giả là 9 gram. Hỏi Alibaba làm thế nào để chỉ cân một lần duy nhất (bằng một cái cân chính xác có hiển thị số) tìm ra được bao vải chứa các đồng tiền giả?

6. Trên một bàn cờ 8×8 người ta xếp một số lớn nhất có thể các quân Tượng sao cho không có hai quân Tượng nào "ăn" lẫn nhau. Em hãy chứng minh rằng số các cách xếp khác nhau như vậy là một số chính phương (tức là bình phương của một số tự nhiên).



LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 3 năm 2023)

1. Bạn Công đã trả 24 nghìn đồng để mua được 1 cuốn vở, 2 chiếc bút chì và 1 cái tẩy. Bạn Nam thì trả tận 54 nghìn đồng để mua được 2 cuốn vở, 3 chiếc bút chì và 3 cái tẩy. Hỏi bạn An đã trả bao nhiêu tiền để mua được 2 cuốn vở, 5 chiếc bút chì và 1 cái tẩy?



Lời giải. Cả 3 bạn Công, Nam và An đã mua 5 cuốn vở, 10 chiếc bút chì và 5 cái tẩy, bằng đúng 5 lần số lượng mà Công đã mua. Vì thế 3 bạn đã trả số tiền là

$$24 \times 5 = 120 (\text{nghìn đồng}).$$

Công và Nam đã trả 78 nghìn đồng. Suy ra An đã trả

$$120 - 78 = 42 (\text{nghìn đồng}).$$

2. Bác Tuyết mang sữa đựng đầy trong hai chiếc thùng ra chợ bán. Lượng sữa trong thùng to nhiều gấp 3 lần lượng sữa trong chiếc thùng nhỏ. Khi trong chiếc thùng nhỏ còn có 15 lít sữa, còn thùng to còn 35 lít sữa, bác Tuyết đổ dồn một lượng sữa từ thùng to cho đầy chiếc thùng nhỏ. Khi đó trong chiếc thùng to lượng sữa còn lại đầy tới một nửa thùng. Hỏi bác Tuyết đã đổ bao nhiêu sữa từ thùng to sang thùng nhỏ, và dung tích của mỗi thùng là bao nhiêu?

Lời giải. Các em nhận thấy, sau khi đổ dồn sữa, số sữa còn lại trong thùng to sẽ gấp rưỡi số sữa trong thùng nhỏ. Gọi số sữa đã đổ dồn sang thùng nhỏ là a (lít) thì ta có

$$1.5 \times (15 + a) = 35 - a.$$

Từ đây suy ra $a = 5$. Do đó dung tích của thùng bé là 20 lít và thùng to là 60 lít.

Cách giải khác. Lượng sữa bác Tuyết có lúc đổ từ thùng to thùng nhỏ là 50 và bằng 2.5 lần dung tích thùng nhỏ. Vậy dung tích thùng nhỏ là

$$50 : 2.5 = 20 (\text{lít}).$$

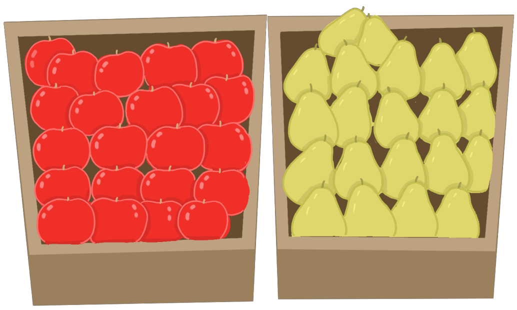
Số sữa được đổ từ thùng to sang thùng nhỏ là:

$$25 - 20 = 5 (\text{lít}).$$

Và dung tích thùng to là

$$3 \times 20 = 60 (\text{lít}).$$

3. Một tấn hoa quả được chở tới siêu thị: táo được đóng theo các thùng gỗ 48 kg/thùng, lê được đóng trong các thùng gỗ 20 kg/thùng, mận đựng trong hộp giấy theo 14 kg/hộp còn nho đựng trong các hộp giấy theo 10 kg/hộp. Biết rằng số kg táo được chở tới nhiều gấp đôi số kg lê, còn số kg mận và nho là bằng nhau, hỏi số lượng mỗi loại hoa quả đã được vận chuyển tới cửa hàng là bao nhiêu?



Lời giải. Gọi số thùng táo là a, số hộp mận là b. Suy ra số thùng lê là

$$\frac{48 \times a}{40} = \frac{6 \times a}{5}.$$

Số hộp nho là

$$\frac{14 \times b}{10} = \frac{7 \times b}{5}.$$

Theo đề bài ta có tổng số kg các loại quả là:

$$48a + 24a + 14b + 14b = 1000.$$

Có nghĩa là

$$72a + 28b = 1000.$$

Chia cả hai vế cho 4, ta nhận được

$$18a + 7b = 250.$$

Vì $\frac{6 \times a}{5}$ là số nguyên, suy ra a chia hết cho 5. Tương tự b chia hết cho 5. Đặt $a = 5m, b = 5n$ (trong đó m, n là các số nguyên dương), ta rút ra được hệ thức

$$18m + 7n = 50.$$

Từ đây suy ra $1 \leq m \leq 2$.

Thử trực tiếp, với $m = 1$ suy ra $7n = 32$ (loại, do n là số nguyên).

Với $m = 2$ suy ra $n = 2$. Vậy $a = 10, b = 10$.

Đáp số: 10 thùng táo, 12 thùng lê, 14 hộp nho và 10 hộp mận.

4. Bạn An khởi hành đi bộ từ làng A tới làng B lúc 8h sáng. Đồng thời vào lúc đó, bạn Bình cũng đi bộ từ làng B tới làng A. Hai bạn đều đi với vận tốc không đổi, nhưng có thể không bằng nhau. Khi gặp nhau ở giữa đường, bạn An còn phải đi thêm 32 phút nữa, còn Bình phải đi thêm 18 phút nữa thì mới tới nơi. Hỏi hai bạn đã gặp nhau sau bao lâu tính từ lúc khởi hành?

Lời giải. Gọi a (m/phút) là vận tốc của An, còn b (m/phút) là vận tốc của Bình. Giả sử sau khoảng thời gian là t (phút) tính từ lúc khởi hành hai bạn đã gặp nhau. Suy ra

$$32a = tb$$

và

$$18b = ta.$$

Nhân hai vế các đẳng thức này với nhau và rút gọn cho ab ta có

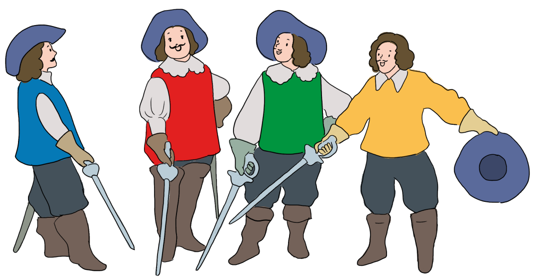
$$t^2 = 574.$$

Từ đó suy ra $t = 24$. Vậy các bạn đã gặp gỡ nhau sau 12 phút tính từ lúc khởi hành.

Cách khác: Kí hiệu C là điểm hai bạn gặp nhau, do quãng đường tỷ lệ thuận với thời gian đi của mỗi bạn nên tỷ số quãng đường AC và CB là $t : 18$ đồng thời cũng là $32 : t$.

Suy ra $t = 24$. Vậy các bạn đã gặp gỡ nhau sau 12 phút tính từ lúc khởi hành.

5. Trong một cuộc thi thể thao do nhà vua Pháp tổ chức, 3 chàng ngự lâm pháo thủ là Athos, Porthos và Aramis cùng D'Artagnan chia nhau bốn vị trí đầu tiên: 1, 2, 3, 4 (ứng với giải thưởng: nhất, nhì, ba, bốn). Tổng ba số chỉ vị trí mà Athos, Porthos và D'Artagnan giữ là bằng 6. Tổng hai số chỉ vị trí mà Porthos và Aramis giữ cũng bằng 6. Hỏi mỗi chàng ngự lâm đã chiếm các giải nào, biết Porthos chiếm được giải cao hơn Arthos?



Lời giải. Tổng số vị trí của 4 chàng ngự lâm là

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Từ điều kiện đầu tiên suy ra Aramis giữ vị trí thứ

$$10 - 6 = 4.$$

Từ điều kiện thứ hai suy ra Porthos giữ vị trí số 2. Từ điều kiện cuối cùng suy ra Arthos giữ vị thứ thứ 3, còn D'Artagnan giữ vị trí số 1.

6. Tại một khách sạn nọ, nhân viên trực quản lý điều hành phải làm việc từ 8h sáng tới 8h tối (phương án *A*), hoặc từ 8h tối tới 8h sáng (phương án *B*), hoặc làm trọn cả ngày 24h bắt đầu từ 8h (sáng hoặc tối) (phương án *C*). Nếu làm theo phương án *A*, nhân viên trực quản lý sẽ được nghỉ không ít hơn 1 ngày (24h). Nếu làm theo phương án *B*, nhân viên trực quản lý sẽ được nghỉ không ít hơn 1 ngày rưỡi (36h). Còn nếu làm theo phương án *C*, nhân viên trực quản lý sẽ được nghỉ không ít hơn hai ngày rưỡi (60h).

Hỏi khách sạn phải cần có ít nhất bao nhiêu nhân viên trực quản lý để đảm bảo lịch làm việc, nghỉ ngơi ở trên được tuân thủ?

Lời giải. Rõ ràng thấy rằng khách sạn có thể chỉ cần 4 nhân viên quản lý để điều hành theo sơ đồ làm việc "một ngày làm, 3 ngày nghỉ" theo phương án C–C–C–C.

Ta sẽ chỉ ra rằng không thể bố trí với số nhân viên ít hơn 4 người. Thật vậy, nếu có ai đó phải làm cả ngày (24h) thì trong thời gian anh ta nghỉ, vì không ai làm việc được quá 1 ngày liền (24h), nên suốt thời gian nghỉ của anh ta là 2.5 ngày, phải có ít nhất 3 người khác thay phiên nhau làm việc.

Nếu không có ai làm quá nửa ngày, thì do phải có ai đó làm việc vào ca đêm, nên khi anh ta nghỉ (ít nhất là 1.5 ngày) phải có thêm ít nhất 3 nhân viên quản lý khác phải làm thay thế.

Vậy khách sạn cần có ít nhất 4 nhân viên quản lý trực.

A STRAIGHT LINE IS THE SHORTEST DISTANCE BETWEEN TWO POINTS

NGHIA DOAN[1]

In this article, we explore some basic properties of broken lines.

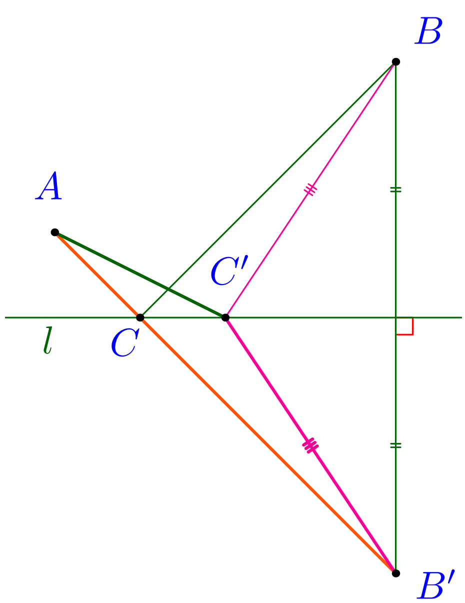
Fact (Triangle Inequality). For any three points A, B, C,

$$AB + BC \geq AC,$$

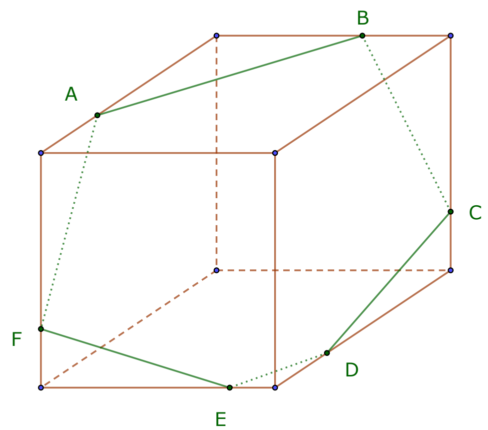
The equality holds if and only if A, B, and C are collinear.

Fact (Broken Line Inequality). For any points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$. The equality holds if and only if $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, and A_n are collinear.

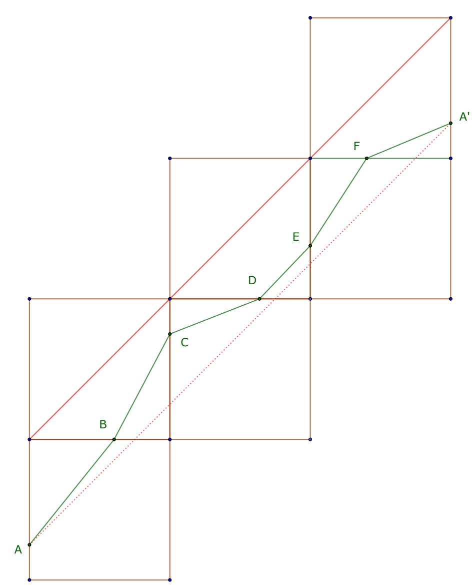
Lemma (Heron's Problem). Two points A and B lie on one side of a straight line l. C is a point on on l. The sum $CA + CB$ is minimal if and only if $C = BC' \cap \ell$, where B' is the reflection of B over l.



Example (Cross–section of a cube). Lilian cuts a cube with side length 1. She got a with a hexagon cross–section as shown below. What is the minimal value of the hexagon perimeter $AB + BC + CD + DE + EF + FA$?



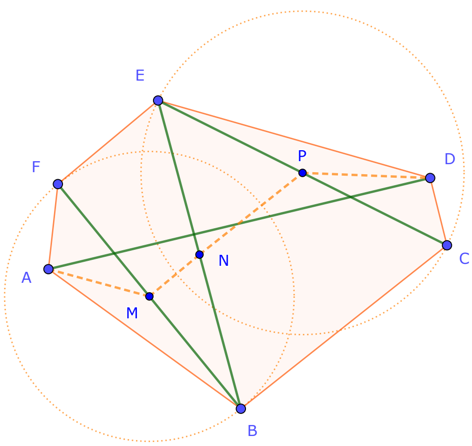
Solution. The diagram below is obtained by unfolding the cube into a net. The hexagon perimeter forms a broken line $ABCDEFA'$.



[1] *Ottawa, Canada.*

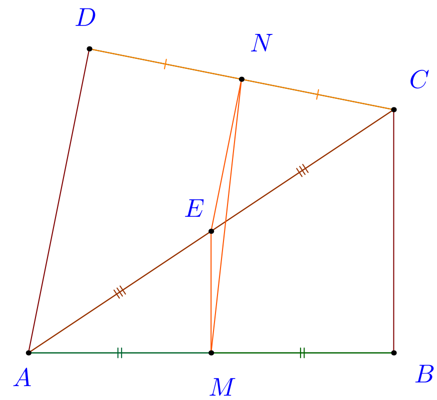
This is always larger or equal the distance AA', which is same as three times the diagonal of the unit square. Hence the perimeter is always at least $3\sqrt{2}$.

Example (Diagonal of a hexagon). $ABCDEF$ is a convex hexagon, where $\angle A \geq 90^\circ$ and $\angle D \geq 90^\circ$. Prove that $BC+CE+EF+FB \geq 2AD$.



Proof. Let M, N, and P be the midpoints of BF, BE, and CE, respectively. Since any broken line is longer or equal the distance between two endpoints, so $AD \leq AM + MN + NP + PD$. MN is the median segment in $\triangle BEF$, thus $FE = 2MN$. Similarly $BC = 2NP$. In $\triangle ABF$, $\angle A \geq 90^\circ$, thus $BF \geq 2AM$. Similarly $CE \geq 2DP$. Therefore $BC + CE + EF + FB \geq 2(AM + MN + NP + PD) = 2AD$.

Example (Romanian Math Olympiad). Let $ABCD$ be a convex quadrilateral. It is known that the circles with diameter AB and CD are externally tangent, and so are the circles with diameters AD and BC. Prove that $ABCD$ is a rhombus.



Proof. We first prove a claim.

Claim. Let M and N be the midpoint of AB and CD, respectively, then $AD + BC \geq 2MN$.

Proof. Let E be the midpoint of AC. It is easy to see that

$$MN \leq ME + EN = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} = \frac{AD+BC}{2}$$

The equality can happen if and only if MN intersect AC at the midpoint of AC, so $MN \parallel AD \parallel BC$.

By the claim $AD + BC \geq 2MN$, similarly $AB + CD \geq 2PQ$, thus

$$AB+BC+CD+DA \geq 2(MN+PQ). \quad (*)$$

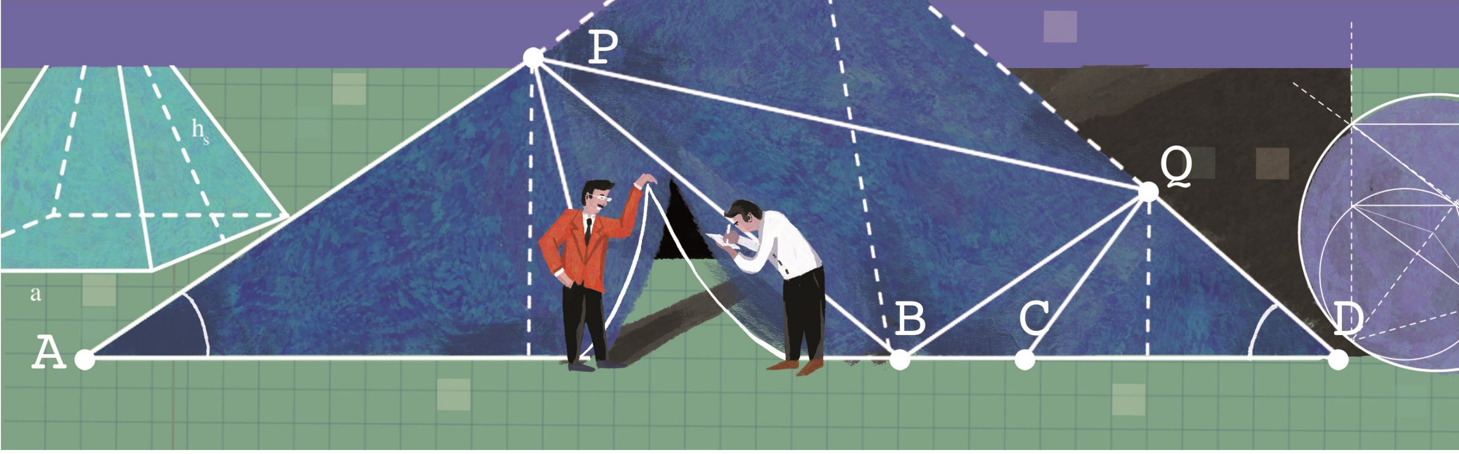
Now, let P and Q be the midpoints of BC and AD, respectively. Since the circles of diameters AB and CD are externally tangent so $AB + CD = 2MN$, similarly $AD + BC = 2$. Thus

$$AB+BC+CD+DA = 2(MN+PQ). \quad (**)$$

$(**)$ implies the existence of equality in $(*)$, so $MN \parallel AD \parallel BC$ and $PQ \parallel AB \parallel CD$. Thus $ABCD$ is a parallelogram, and $MN = AD = BC$. Similarly $AB = CD$. Since $AB + CD = 2MN$ (see above), therefore

$$AD = BC = MN = AB = CD.$$

Hence, $ABCD$ is a rhombus.



NỘI SUY VÀ ĐA THỨC ĐỐI XỨNG

PHÙNG HỒ HẢI

1. Đa thức và hàm đa thức

1.1. Đa thức. Đa thức là một biểu thức đại số nhận được một cách hình thức từ các biến số và các hệ số thông qua các phép tính cộng, trừ và nhân.

Các hệ số là phần tử thuộc một tập hợp nào đó, thông thường là một tập hợp số (ví dụ $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) nhưng cũng có thể là một tập tổng quát hơn mà trên đó đã xác định các phép toán cộng, trừ, nhân.

Biến số là các ký tự hình thức (ví dụ $x, y, X, Y, \ldots$) mà ta có thể thay thế chúng bằng những phần tử trong tập hợp chứa các hệ số hoặc một tập hợp lớn hơn mà trên đó cũng xác định các phép toán cộng, trừ và nhân.

Đa thức một biến có thể được mô tả bằng biểu thức dạng

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Như vậy thông tin về các đa thức một biến bao gồm hai loại: số tự nhiên n được gọi là bậc của nó, ký hiệu là $\deg P(x)$, và các số (nguyên, hữu tỷ, thực hay phức) $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – các hệ số của nó.

> Thông tin về đa thức một biến với bậc (không quá) n là một dãy có thứ tự gồm $n+1$ *đơn vị thông tin.*

Dưới đây ta sẽ chỉ xét các đa thức một biến với hệ số nằm trong một tập số như $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

1.2. Phép chia có dư. Đối với đa thức hệ số thực ta có thể thực hiện được phép chia có dư, tương tự như đối với các số nguyên. Cho các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ với $Q(x) \neq 0$, khi đó tồn tại duy nhất các đa thức $P_1(x)$ và $R(x)$ với $\deg R(x) < \deg Q(x)$ sao cho

$$P(x) = Q(x)P_1(x) + R(x).$$

Ta nói đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$ nếu $R(x) = 0$.

Chú ý. Ta có thể thay thế điều kiện "hệ số thực" bởi điều kiện "hệ số phức" hay "hệ số hữu tỷ". Nhưng ta không thể áp dụng với điều kiện "hệ số nguyên".

Ví dụ, ta không thể thực hiện được phép chia có dư của đa thức $x^2 + 1$ cho đa thức $2x$ trong tập hợp đa thức hệ số nguyên!

1.3. Hàm đa thức. Xét các đa thức một biến với hệ số nằm trong một tập số. Khi đó, bằng cách thay thế biến số bằng các giá trị trong tập số đó ta thu được một hàm số. Hàm số thu được bằng cách này gọi là hàm đa thức. Chúng thường được mô tả ở dạng

$$y = P(x),$$

trong đó $P(x)$ là một đa thức theo biến x.

Nguyên lý đồng nhất của Đại số học nói rằng nếu hai hàm đa thức (trên tập số thực) bằng nhau tại mọi giá trị của biến số thì các đa thức xác định chúng bằng nhau. Nói cách khác, mỗi hàm đa thức được xác định bởi một đa thức duy nhất.

Ta chú ý rằng tính đúng đắn của nguyên lý này phụ thuộc vào miền giá trị của biến số (và hệ số). Ví dụ nguyên lý đồng nhất sai nếu xét đa thức trên tập các lớp đồng dư.

1.4. Nghiệm của đa thức. Nghiệm, hay còn gọi là không điểm, của một đa thức $P(x)$ là những giá trị của biến số x mà tại đó $P(x)$ nhận giá trị 0. Sử dụng phép chia có dư của $P(x)$ cho $x-a$ ta có

$$P(x) = (x-a)P_1(x) + P(a).$$

Như vậy nếu a là nghiệm của $P(x)$ thì $P(x)$ chia hết cho $x-a$. Từ đó ta kết luận một đa thức bậc n có không quá n nghiệm.

Định lý cơ bản của Đại số học khẳng định mọi đa thức với hệ số phức với bậc lớn hoặc bằng 1 luôn có nghiệm phức. Từ đó suy ra, một đa thức bậc $n \geq 1$ luôn có thể viết được ở dạng

$$P(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - x_i), \quad x_i \in \mathbb{C}.$$

Chú ý rằng các số (phức) x_i có thể bằng nhau – trong trường hợp đó ta nói $P(x)$ có *nghiệm bội*.

> Nghiệm bội của một đa thức luôn là nghiệm chung của đa thức đó với đạo hàm của nó.

1.5. Các tính chất cơ bản của đa thức dẫn tới nguyên lý nội suy.

– Hai đa thức bằng nhau nếu chúng xác định hai hàm số bằng nhau (trên các tập số nguyên, hữu tỷ, thực hay phức);

– Hai đa thức bằng nhau nếu giá trị chúng bằng nhau tại "đủ nhiều giá trị của biến số", phát biểu một cách tương đương là, một đa thức sẽ đồng nhất bằng 0 nếu nó bằng 0 tại "đủ nhiều giá trị của biến số";

– Một đa thức được xác định duy nhất bởi giá trị của nó tại "đủ nhiều giá trị của biến số", "đủ nhiều" được xác định là nhiều hơn bậc của đa thức. Ví dụ một tập vô hạn luôn là "đủ nhiều".

2. Nội suy Lagrange

Bài toán nội duy Lagrange là xác định một đa thức bậc (không quá) $n-1$ từ các giá trị của đa thức tại n vị trí khác nhau.

> **Bài toán nội suy Lagrange.** Cho các số $y_1, \ldots, y_n$ và các số phân biệt $x_1, \ldots, x_n$. Xác định đa thức $P(x)$ bậc không quá $n-1$ thỏa mãn:
>
> $$P(x_i) = y_i, \text{ với mọi } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Nhận xét. Nếu tồn tại đa thức $P(x)$ (với bậc không quá $n-1$) nhận giá trị y_i tại điểm x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, thì $P(x)$ là duy nhất. Từ đó suy ra tính chất tuyến tính của bài toán nội suy Lagrage:

– Giả sử $Q(x)$ là đa thức được xây dựng từ bộ số $(z_1, \ldots, z_n)$:

$$Q(x_i) = z_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

thì đa thức $P(x) + Q(x)$ được xác định từ bộ số

$$(y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n).$$

– Bộ số $(\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n)$ xác định đa thức $\lambda P(x)$ (λ là một số bất kỳ).

Trên cơ sở của tính chất tuyến tính, ta sẽ xây dựng đa thức $P(x)$ bắt đầu từ những bộ số $(y_1, \ldots, y_n)$ đơn giản nhất.

– Nếu tất cả các giá trị y_i đều bằng 0, ta có $P(x) = 0$.

– Nếu $y_1 = 1, y_2 = \ldots = y_n = 0$ thì đa thức $P_1(x)$ tương ứng sẽ nhận các giá trị $x_2, \ldots, x_n$ làm nghiệm. Do $P_1(x)$ có bậc không quá $n-1$ nên

$$P(x) = c(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Thay $x = x_1$ ta suy ra

$$c = \frac{1}{(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)}.$$

Từ đó

$$P_1(x) = \frac{(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)}.$$

– Tương tự, với bộ $y_1 = \dots = y_{i-1} = y_{i+1} = \dots = y_n = 0$, $y_i = 1$, đa thức tương ứng là

$$P_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Theo nguyên lý tuyến tính nêu trên, ta có lời giải bài toán tổng quát như sau. Đa thức

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \qquad (1)$$

thỏa mãn $P(x_i) = y_i$.

Chú ý. Bậc của $P(x)$ có thể bé hơn hẳn $n - 1$.

Bài toán 2.1. Giả sử A, B và C là phần dư của đa thức $P(x)$ khi chia cho $x - a, x - b$ và $x - c$. Tìm phần dư của phép chia đa thức đó cho $(x - a)(x - b)(x - c)$.

Bài toán 2.2. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là đa thức bậc nhỏ hơn n thì phân thức

$$\frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}$$

trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các giá trị khác nhau, luôn biểu diễn được ở dạng

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}.$$

với các số $A_1, A_2, \dots, A_n$ nào đó.

Bài toán 2.3. Cho $x_1, \dots, x_n$ là các số thực phân biệt. Đặt $g(x) := \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$. Chứng minh rằng

$$\sum_i \frac{x_i^k}{g'(x_i)} = \begin{cases} 0 & \text{với } k = 0, 1, \dots, n-2; \\ 1 & \text{với } k = n-1. \end{cases}$$

Nhận xét. Trong bài toán trên ta thực sự có các đồng nhất thức, nghĩa là ta có thể coi x_i như là các biến số, tuy nhiên việc chứng minh trực tiếp đồng nhất thức này bằng các biến đổi đại số là rất phức tạp.

Lời giải. Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \qquad (2)$$

ta thu được:

$$g'(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i}^{n} (x - x_j).$$

Từ đó

$$g'(x_i) = \prod_{j \neq i}(x_i - x_j). \qquad (3)$$

Áp dụng công thức nội duy Lagrange cho đa thức x^k ta thu được

$$x^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

So sánh hệ số của x^{n-1} ở hai vế cho ta các hệ thức cần chứng minh cho $k \leq n - 1$.

Bài toán 2.4. Tính

$$h_k := \sum_i \frac{x_i^{n+k-1}}{g'(x_i)},$$

với $k = 1, 2, 3$.

Lời giải. Xét công thức Viète

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = x^n - e_1 x^n + \dots + (-1)^n e_n.$$

Các hệ số e_i là các đa thức đối xứng cơ bản theo các biến $x_1, \dots, x_n$.

Nhân theo vế đẳng thức $g(x_i) = 0$ với x_i^k ta thu được

$$x_i^{n+k} - e_1 x_i^{n+k-1} + \dots + (-1)^n e_n x_i^k = 0.$$

Chia theo vế cho $\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)$ và lấy tổng theo i, ta thu được

$$h_{k+1}-e_1h_k+\ldots+(-1)^n e_n h_{k+1-n}=0,$$

với quy ước $h_0=1$ và $h_k=0$ nếu $k<0$. Công thức trên cho phép ta tính các đa thức h_k. Cụ thể ta có:

$$\begin{aligned} h_1&=e_1=\sum_i x_i\\ h_2&=e_1h_1-e_2=\sum_{i\leq j}x_ix_j\\ h_3&=e_1h_2-e_2h_1+e_3=\sum_{i\leq j\leq k}x_ix_jx_k. \end{aligned}$$

Nhận xét. Trong lời giải trên ta sử dụng hai kỹ thuật. Thứ nhất là thế $x=x_i$ vào $g(x)$ để thu được một hệ thức giữa x_i và các hệ số e_j. Thứ hai là nhân hệ thức đó theo các trọng số.

Bài toán 2.5. Chứng minh công thức tổng quát sau với mọi $k=4,5,\ldots$

$$h_k=\sum_{i_1\leq i_2\leq\ldots\leq i_k}x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}.$$

Các đa thức h_k được gọi là *đa thức đối xứng toàn phần* theo các biến $x_1,\ldots,x_n$.

2.1. Hệ số của đa thức nhận được từ công thức nội suy Lagrange. Trong bài tập 2.1 ta đã sử dụng phương pháp so sánh hệ số trong công thức nội suy Lagrange. Một câu hỏi tự nhiên là: có thể mô tả cụ thể được các hệ số của $P(x)$ từ các giá trị y_i và x_i hay không?

Từ đẳng thức

$$\begin{aligned} P(x)&=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\\ &=\sum_{i=1}^n y_i\frac{\prod_{j\neq i}^n(x-x_i)}{g'(x_i)}, \end{aligned}\qquad (6)$$

so sánh hệ số ta thu được:

$$a_0=\sum_{i=1}^n\frac{y_i}{g'(x_i)},$$

và

$$a_1=\sum_{i=1}^n\frac{y_i(x_i-e_1)}{g'(x_i)}=\sum_{i=1}^n\frac{y_ix_i}{g'(x_i)}-a_0e_1.$$

Bài toán 2.6. Đặt

$$b_k:=\sum_i\frac{y_ix_i^k}{g'(x_i)}.$$

Chứng minh rằng các hệ số của đa thức $P(x)$ được tính bởi công thức

$$a_k=\sum_{j=0}^k(-1)^ie_jb_{k-j}.$$

2.2. Đạo hàm bậc hai. Trong các tính toán ở trên ta đã sử dụng các giá trị của đạo hàm bậc nhất của $g'(x)$. Vậy đạo hàm bậc hai có ý nghĩa gì?

Bài toán 2.7. Giả thiết rằng các số x_i phân biệt, khi đó $g''(x_i)=0$ khi và chỉ khi

$$\sum_{j\neq k}^n\frac{1}{x_i-x_j}=0.$$

Lời giải. Tính đạo hàm hai lần của $g(x)$. Ta có

$$g''(x)=\sum_{k\neq j}\prod_{i\neq k,j}(x-x_i)=\sum_{k\neq j}\frac{g(x)}{(x-x_k)(x-x_j)}.$$

Từ đó ta có, với mỗi $1\leq i\leq n$:

$$g''(x_i)=2\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)\sum_{j\neq i}^n\frac{1}{x_i-x_j}.$$

Vậy $g''(x_i)=0$ khi và chỉ khi

$$\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_i-x_j}=0.$$

Bài toán 2.8. Cho các số $0=x_0<x_1<\ldots<x_{n+1}=1$ thỏa mãn

$$\sum_{j=0,j\neq i}^{n+1}\frac{1}{x_i-x_j}=0,$$

với mọi $i=1,2,\ldots,n$. Chứng minh rằng với mọi i, $x_i=1-x_{n+1-i}$.

3. Hàm sinh

Hàm sinh là một công cụ dùng để phát biểu nhiều vấn đề của số học hay tổ hợp theo ngôn ngữ đại số, trên cơ sở đó sử dụng các phương pháp đại số (và giải tích) để giải quyết vấn đề.

Để xác định, hay tìm hiểu tính chất của một dãy số $a_0, a_1, \ldots$, thay vì nghiên cứu từng số hạng riêng rẽ, người ta tập hợp tất cả chúng trong một *tổng hình thức* hay một chuỗi lũy thừa:

$$A(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Nếu dãy đã cho hữu hạn, thì $A(x)$ là một đa thức. Như vậy các chuỗi số có thể coi như một *khái niệm mở rộng của đa thức.*

Tương tự như với đa thức, ta có thể quy ước các phép tính cộng, trừ hay nhân các hàm sinh.

Phép cộng và trừ được thực hiện theo thành phần (nghĩa là tương ứng với phép cộng, trừ hai dãy số).

Phép nhân được thực hiện tương tự nhân đa thức. Với hai hàm sinh

$$A(t) = \sum_0^\infty a_i x^i, \quad B(t) = \sum_0^\infty b_i x^i,$$

tích của chúng là hàm sinh $C(t) = \sum_0^\infty c_i x^i$, với các hệ số c_i cho bởi công thức

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}.$$

3.1. Ví dụ.

– Với

$$A(x) = 1 - x,$$
$$B(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

ta có

$$A(x) \cdot B(x) = 1.$$

Nghĩa là ta có đẳng thức

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

Từ đó ta cũng có

$$\begin{aligned} B(x)^2 &= 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots \\ &= \frac{1}{1 - 2x + x^2}. \end{aligned}$$

– Hàm sinh cho dãy các đa thức đối xứng cơ bản của $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là:

$$E(x) = 1 + e_1 x + \ldots + e_n x^n = \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i x).$$

Xét hệ thức

$$\begin{aligned} \frac{1}{E(-x)} &= \prod_i \frac{1}{1 - x_i x} \\ &= \prod_i (1 + x_i x + \ldots + x_i^n x^n + \ldots) \\ &= 1 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + \ldots \qquad (7) \end{aligned}$$

$$h_r = \sum_{i_1 \le \ldots \le i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_r}.$$

– Các đa thức h_r là các đa thức đối xứng toàn phần theo $x_1, \ldots, x_n$. Từ trên ta rút ra hệ thức sau giữa các đa thức e_i và h_i:

$$\begin{aligned} &h_k - e_1 h_{k-1} + \ldots + (-1)^k e_k = 0, \\ &\text{với mọi } 1 \le k \le n; \\ &h_k - e_1 h_{k-1} + \ldots + (-1)^n e_n h_{k-n} = 0, \\ &\text{với mọi } k \ge n. \end{aligned}$$

3.2. Đạo hàm của hàm sinh. Ngoài các phép toán đại số nêu trên, ưu thế quan trọng của hàm sinh là ta có thể thực hiện phép *đạo hàm* trên chúng.

Nếu $A(x) = \sum a_n x^n$ thì

$$A'(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Bài tập dưới đây cho thấy hai phép toán định nghĩa như trên thỏa mãn các tính chất quen biết của phép toán đạo hàm và tích phân.

Bài toán 3.1. Kiểm tra các hệ thức sau:

$$(A(t)\cdot B(t))' = A(t)'\cdot B(t) + A(t)\cdot B(t)'$$
$$\left(\frac{1}{A(t)}\right)' = -\frac{A(t)'}{A(t)^2}$$

Bài toán 3.2. Hàm mũ exp và hàm logarit ln được định nghĩa như sau:

$$\exp(x) = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (8)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \ldots \quad (9)$$

Chứng minh rằng

– $\exp(x)' = \exp(x)$, $\ln(x)' = \frac{1}{1+x}$;

– với mỗi hàm sinh $A(x)$ với hệ số đầu tiên bằng 0, nghĩa là $A(0) = 0$, thì $\exp(A(x))$ cũng là một hàm sinh;

– với mỗi hàm sinh $A(x)$với hệ số đầu tiên bằng 0, nghĩa là $A(0) = 1$, thì $\ln(A(x))$ cũng là một hàm sinh;

– $\exp(\ln(1+x)) = 1 + x$, $\ln(\exp(x)) = x$.

4. Đa thức đối xứng

Đa thức theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là đối xứng nếu nó không thay đổi khi ta hoán vị các biến. Ta đã làm quen với các đa thức đối xứng sau:

– Đa thức đối xứng cơ bản

$$e_r = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_r}, \quad r = 1, 2, \ldots, n.$$

– Đa thức đối xứng toàn phần

$$h_r = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_r}, \quad r = 1, 2, \ldots, n.$$

– Ngoài ra ta còn đó tổng lũy thừa

$$p_r = \sum_i x_i^r, r = 1, 2, \ldots$$

Ứng với mỗi loại đa thức đối xứng ở trên ta sẽ xét hàm sinh của nó. Như ở phần trên ta có

$$E(x) = \sum_{i=0}^{n} e_i x^i = \prod (1 + x_i x),$$
$$H(x) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i x^i = \prod \frac{1}{1 - x_i x},$$
$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i+1} x^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - x_i x}.$$

Từ hệ thức (7) ta có $E(-x)\cdot H(x) = 1$. Mặt khác, xét đạo hàm của $\ln E(x)$ ta có

$$\ln(E(x))' = \frac{E'(x)}{E(x)} = \sum_i \ln(1 + x_i x)'$$
$$= \sum_i \frac{x_i}{1 + x_i x}.$$

Từ đó ta suy ra hệ thức:

$$E'(x) = E(x)\cdot P(-x).$$

Đây chính là hệ thức Newton đối với các tổng lũy thừa. So sánh hệ số của x^k ở hai vế ta có.

– Với $0 \le k \le n-1$:

$$(k+1)e_{k+1} = e_k p_1 - e_{k-1} p_2 + \ldots + (-1)^{k-1} e_1 p_k + (-1)^k p_{k+1}$$

hay là

$$p_{k+1} = e_1 p_k + \ldots + (-1)^{k-1} e_k p_1 + (-1)^k (k+1) e_{k+1}.$$

– Với $k \ge n$:

$$0 = e_n p_{k+1-n} - e_{n-1} p_{k+2-n} + \ldots + (-1)^{n-1} e_1 p_k + (-1)^n p_{k+1}$$

hay là

$$p_{k+1} = e_1 p_k + \ldots + (-1)^{n-1} e_n p_{k+1-n}.$$

Bài toán 4.1. Chứng minh trực tiếp hệ thức Newton. (Với trường hợp $k \ge n$, sử dụng phương pháp trong lời giải bài toán 2.4. Với trường hợp $k < n$, sử dụng quy nạp theo số biến).

Bài toán 4.2. Giả thiết $x_1,\dots,x_n$ là các nghiệm (thực hoặc phức) của đa thức

$$x^n-\binom{m}{1}x^{n-1}+\dots+(-1)^n\binom{m}{n}$$

với m là số tự nhiên bất kỳ. Tính tổng

$$\sum x_i^k,\quad k=1,2,\dots,n.$$

Bài toán 4.3. Cho các số thực $a_1,\dots,a_n$ và các số nguyên dương $b_1,\dots,b_n$. Giả thiết tồn tại đa thức $f(x)$ sao cho:

$$(1-x)^n f(x)=1+\sum_i a_i x^{b_i}$$

Tính $f(1)$ qua b_i và n.

5. Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Cho trước các số $e_1,e_2,\dots,e_n$. Ta xét dãy vô hạn (a_k), $k=0,1,\dots$ các số thỏa mãn hệ thức truy hồi

$$a_{n+k}=e_1a_{n+k-1}-e_2a_{n+k-2}+\dots+(-1)^n e_n a_k,\quad k=0,1,\dots$$

với các giá trị $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}$ cho trước.

– Dãy (a_n) được xác định duy nhất bởi hệ thức trên, và các số hạng $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}$ được gọi là điều kiện ban đầu.

– Bài toán xác định một dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi như trên còn được gọi là bài toán *giải phương trình sai phân*.

– Đa thức

$$g(x)=x^n-e_1x^{n-1}+\dots+(-1)^n e_n$$

được gọi là đa thức đặc trưng của phương trình trên.

5.1. Nghiệm tổng quát. Việc xác định dãy từ hệ thức truy hồi và điều kiện ban đầu được thực hiện theo hai bước.

– Xác định tất cả các dãy thỏa mãn hệ thức truy hồi – đây gọi là các nghiệm tổng quát của bài toán;

– Kết hợp với điều kiện ban đầu để xác định dãy cần tìm trong số các dãy ở trên – đây gọi là nghiệm riêng của bài toán.

Gọi t là một nghiệm của $g(x)$. Khi đó dãy $(\lambda t^k)_{k\ge 0}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi ở trên, với mọi số λ.

Giả thiết $g(x)$ có n nghiệm phân biệt $x_1,\dots,x_n$ (có thể là nghiệm phức). Khi đó với mọi bộ số $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, dãy (a_k) cho bởi

$$a_k=\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k$$

thỏa mãn hệ thức truy hồi ở trên.

5.2. Nghiệm riêng. Các hệ số λ_i được tính cụ thể thông qua điều kiện ban đầu $a_0,\dots,a_{n-1}$ bằng cách giải hệ phương trình

$$\sum \lambda_i x_i^k=a_k,\quad k=0,1,\dots,n-1.\qquad (10)$$

Chúng ta sẽ mô tả nghiệm $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ của hệ này nhờ bài toán nội suy. Cụ thể, ta tìm λ_i ở dạng

$$\lambda_i=\frac{P(x_i)}{g'(x_i)},$$

với $P(x_i)$ là một đa thức bậc $n-1$:

$$P(x)=b_0x^{n-1}-b_1x^{n-2}+\dots+(-1)^{n-1}b_{n-1}.$$

Nghĩa là

$$a_k=\sum_i P(x_i)\frac{x_i^k}{g'(x_i)},\quad \text{với } k=0,1,\dots,n-1.$$

Thế giá trị của $P(x_i)$ và sử dụng kết quả của bài tập 2.3 ta có

$$\begin{aligned}a_k&=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j b_j\sum_i\frac{x_i^{n-1-j+k}}{g'(x_i)}\\&=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j b_j h_{k-j}.\end{aligned}$$

Vậy, sử dụng hệ thức (5) giữa e_i và h_j ta thu được:

$$b_k=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j a_j e_{k-j}.\qquad (11)$$

Cụ thể

$$\begin{aligned}
&b_0 = a_0\\
&b_1 = a_0e_1 - a_1\\
&b_2 = a_0e_2 - a_1e_1 + a_2\\
&\dots\\
&b_{n-1} = a_0e_{n-1} - a_1e_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n-1}.
\end{aligned}$$

Ta cũng có cách mô tả khác cho $P(x)$ như sau:

$$\begin{aligned}
P(x) =& a_0(x^{n-1} - e_1x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}e_{n-1})\\
&+ a_1(x^{n-2} - e_1x^{n-3} + \ldots + (-1)^{n-2}e_{n-2})\\
&+ \ldots + a_{n-1}.
\end{aligned}$$

Bài toán 5.1. Chứng minh rằng với mỗi $k = 1, 2, \ldots, n-1$, giá trị của đa thức

$$c_k(x) := (-1)^k(x^k - e_1x^{k-1} + \ldots + (-1)^ke_k)$$

tại x_i là đa thức đối xứng thứ k theo $n-1$ biến x_j, $j \neq i$.

Từ bài toán 5.1 ta có công thức sau cho các hệ số λ_i:

$$\lambda_i = \frac{1}{g'(x_i)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k e_{n-k-1,(x_i=0)}.$$

Trong đó $e_{k,(x_i=0)}$ ký hiệu đa thức đối xứng thứ k theo các biến $x_j, j \neq i$ (nhận được từ e_k bằng cách cho $x_i = 0$). Ví dụ:

– $n = 2$. Ta có

$$\lambda_1 = \frac{a_1 - a_0x_2}{x_1 - x_2}, \quad \lambda_2 = \frac{a_1 - a_0x_1}{x_2 - x_1}.$$

– $n = 3$. Ta có

$$\lambda_i = \frac{a_0x_jx_k - a_1(x_j + x_k) + a_2}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)},$$

trong đó (i, j, k) là một hoán vị của $(1, 2, 3)$.

5.3. Sử dụng hàm sinh. Ta có thể dùng hàm sinh để thu được công thức (11) cho các hệ số của $P(x)$ như sau. Xét hàm sinh của dãy $(a_n)_{n\geq 0}$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Xét đa thức

$$\begin{aligned}
G(x) := x^ng(1/x) &= 1 - e_1x + \ldots + (-1)^ne_nx^n\\
&= \prod_i (1 - x_ix).
\end{aligned}$$

Hệ thức truy hồi suy ra:

$$A(x) \cdot G(x) = B(x),$$

với đa thức $B(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}$ được cho bởi

$$b_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j a_j e_{k-j}.$$

Vậy

$$A(x) = \frac{B(x)}{G(x)}.$$

Nhận xét rằng công thức trên cho hàm $A(x)$ đúng cả khi các giá trị x_i không phân biệt.

Nếu các giá trị x_i là phân biệt, do $\deg B(x) \leq n-1$, theo bài toán 2.2 ta có khai triển

$$\frac{B(x)}{G(x)} = \sum_i \frac{\lambda_i}{1 - x_ix}.$$

Nhân cả hai vế hệ thức trên với $(1 - x_ix)$ và thay $x = 1/x_i$ ta thu được

$$\lambda_i = \frac{B(1/x_i)}{\prod_{j\neq i}(1 - x_j/x_i)} = \frac{x_i^{n-1}B(x_i)}{g'(x_i)}.$$

Dễ thấy $x^{n-1}B(1/x) = P(x)$.

Bài toán 5.2. Ký hiệu x_n là số các số n chữ số trong đó chỉ có các chữ số $2, 3, 5, 7$ xuất hiện và 5 không đứng ngay sau 2. Chứng minh rằng với mọi $r \geq 1$ và $m \geq 2$, ta luôn có x_{rm-1} chia hết cho x_{m-1}.

Bài toán 5.3. Xét dãy (f_n):

$$f_n = af_{n-1} + bf_{n-2}, \quad f_0 = c, f_1 = d$$

và p là số nguyên tố, $p > 2$. Chứng minh rằng, theo modulo p:

– nếu a^2+4b chính phương thì $f_p \equiv d$;

– nếu a^2+4b không chính phương thì $f_p \equiv ca-d$;

–nếu $a^2+4b \equiv 0$ thì $2f_p \equiv ac$.

Bài toán 5.4. Cho $x_0 = 4$, $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 3$,

$$x_{n+4} = x_{n+1} + x_n.$$

Chứng minh rằng x_p chia hết p với mọi p nguyên tố.

6. Lời giải và gợi ý

6.1. Lời giải bài 2.5. Sử dụng hệ thức (5) và các kết quả trong ví dụ 3.1.

6.2. Lời giải bài 2.6. Từ hệ thức (6) ta có

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \\ &= g(x)\sum_i \frac{y_i}{g'(x_i)(x-x_i)}. \end{aligned}$$

Thay x bằng $1/x$ trong hệ thức trên và nhân theo vế với x^{n-1} ta thu được

$$\begin{aligned} x^nP(1/x) &= \prod_i(1-x_ix)\sum_i \frac{y_i}{g'(x_i)(1-x_ix)} \\ &= E(-x)\sum_{k=0}^{\infty} b_ix^k. \end{aligned}$$

Hay là

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} = E(-x)\sum_{k=0}^{\infty} b_ix^k.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

6.3. Lời giải bài 4.3. Cho $x = 1$ ta thu được

$$\sum_i a_i = -1. \tag{12}$$

Đạo hàm cả hai vế rồi cho $x = 1$ ta thu được

$$\sum_i a_ib_i = 0. \tag{13}$$

Đạo hàm hai lần cả hai vế rồi cho $x = 1$ ta thu được $\sum_i a_ib_i(b_i-1) = 0$. Kết hợp với (13) ta thu được

$$\sum_i a_ib_i^2 = 0. \tag{14}$$

Tương tự ta thu được các đẳng thức với $k = 2, 3, \ldots, n-1$:

$$\sum_i a_ib_i^k = 0. \tag{15}$$

Đạo hàm n lần cả hai vế rồi cho $x = 1$ ta thu được

$$(-1)^n n! f(1) = \sum_i a_ib_i^n.$$

Vậy bài toán đưa về tính tổng $\sum_i a_ib_i^n$ theo các số n và b_i, biết rằng

$$\begin{cases} \sum_i a_i &= -1 \\ \sum_i a_ib_i &= 0 \\ \quad \cdots\cdots\cdots & \\ \sum_i a_ib_i^{n-1} &= 0. \end{cases}$$

Xét $P(x) = \prod(x-b_i) = x^n - e_1x^{n-1} + \ldots + (-1)^ne_n$. Nhân theo vế với a_i ta có

$$a_ib_i^n - a_ie_1b_i^{n-1} + \ldots + (-1)^na_ie_n = 0.$$

Lấy tổng theo i suy ra

$$\sum_i a_ib_i^n = (-1)^n\prod_i b_i.$$

GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày lời giải của các bài toán trong kỳ thi Olympic Toán học trẻ khối Pháp ngữ năm 2022 đăng trong số báo $3/2022$.

OC34. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ là ước của n.

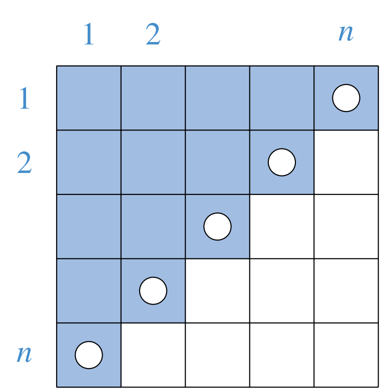
Chú ý: $\lfloor x \rfloor$ ký hiệu phần nguyên của một số thực x, được định nghĩa là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x. Ví dụ: $\lfloor 1.4 \rfloor = 1$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, và $\lfloor 2.9 \rfloor = 2$.

Lời giải. Đặt $k := \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, theo định nghĩa phần nguyên ta có $k \leq \sqrt{n} < k+1$. Do đó $k^2 \leq n < (k+1)^2$, ta nhận được $k^2 \leq n \leq k^2 + 2k$. Như vậy $k \leq \frac{n}{k} \leq k+2$. Do k là ước của n, ta suy ra $\frac{n}{k}$ bằng một trong ba giá trị $k, k+1$ hoặc $k+2$. Tức là n có phải có dạng $k^2, k(k+1)$ hoặc $k(k+2)$. Dễ đang kiểm tra các số n có dạng này đều thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: từ bất đẳng thức $k^2 \leq n \leq k^2 + 2k$ ta cũng có thể lý luận như sau. Do $0 \leq n - k^2 \leq 2k$ và $n - k^2$ là bội của k nên $n - k^2$ nhận một trong ba giá trị $0, k$ hoặc $2k$. Từ đó cũng nhận được kết luận như trên.

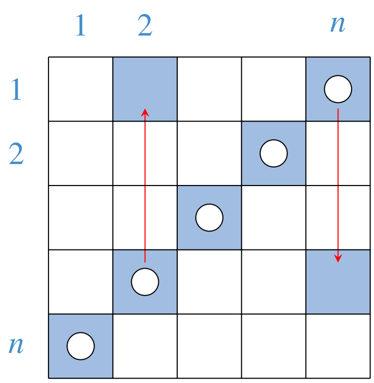
OC35. Cho một bảng ô vuông cỡ $n \times n$ với $n \geq 1$. Aya muốn tô màu k ô của bảng sao cho chỉ có duy nhất một cách để đặt n đồng xu trên các ô vuông được tô màu sao cho không có hai đồng xu nào nằm trên cùng một hàng hoặc cột. Hỏi giá trị tối đa có thể của k là bao nhiêu?

Lời giải. Giả sử Aya tô màu tất cả $\frac{n(n+1)}{2}$ ô nằm từ đường chéo trở lên như trong hình vẽ minh họa. Ta đánh số các hàng và cột như trong hình vẽ. Từ giả thiết, ta suy ra trên mỗi hàng và mỗi cột phải có đúng một đồng xu của Aya. Như vậy, trên hàng cuối phải đặt đồng xu vào cột 1. Do đó trên hàng $n-1$ chỉ có một lựa chọn duy nhất là đặt đồng xu vào cột 2. Tiếp tục lý luận như vậy ta suy ra chỉ có một cách duy nhất là đặt các đồng xu lên đường chéo như trong hình vẽ.



Giả sử Aya có thể tô màu k thỏa mãn đầu bài. Nhận xét rằng khi đổi chỗ các hàng của bảng thì tập các ô được tô màu vẫn thỏa mãn đầu bài. Ta có thể đổi chỗ các hàng để n ô chứa đồng xu là các ô đường chéo như trong hình vẽ bên dưới. Với các ô nằm ngoài đường chéo ta chia thành $\frac{n(n-1)}{2}$ cặp đối xứng nhau qua đường chéo. Nếu có một cặp mà cả 2 ô trong đó đều được tô màu thì ta có thể chuyển 2 đồng xu sang 2 ô này như hình vẽ mà n đồng xu vẫn nằm trên n hàng và n cột phân biệt. Điều này mâu thuẫn với giả thiết rằng chỉ có duy nhất một cách xếp n đồng xu vào các ô được tô màu.

Như vậy trong mỗi cặp chỉ có tối đa một ô được tô màu và ta nhận được $k \leq n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Do đó giá trị lớn nhất của k thỏa mãn đầu bài là $\frac{n(n+1)}{2}$.



OC36. Cho tam giác ABC và D là giao điểm của đường phân giác của góc $\angle BAC$ và đường trung trực của cạnh AC. Đường thẳng đi qua B và song song với AC, cắt đường thẳng AD tại X. Đường thẳng đi qua B và song song với CX, cắt đường thẳng AC tại Y. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABY cắt đường thẳng BX tại E. Chứng minh rằng ba điểm C, D và E thẳng hàng.

Lời giải. Do bốn điểm A, Y, B, E cùng nằm trên một đường tròn ta có $\angle AYB + \angle AEB = 180^\circ$. Mặt khác do YB song song với CX nên ta cũng có $\angle AYB = \angle ACX$. Từ đó ta suy ra $\angle AEB + \angle ACX = 180^\circ$, tức là tứ giác $EACX$ nội tiếp đường tròn. Ta thu được

$$\angle ACE = \angle AXE. \qquad (1)$$

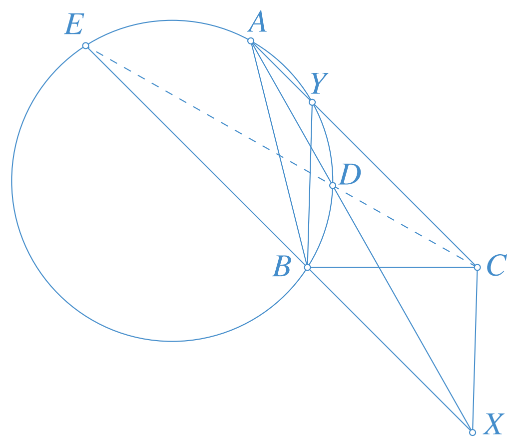
Mặt khác do AC song song với BX, ta có

$$\angle AXE = \angle DAC. \qquad (2)$$

Hơn nữa do D thuộc trung trực của cạnh AC nên

$$\angle DAC = \angle ACD. \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta thu được $\angle ACE = \angle ACD$. Do đó C, D và E thẳng hàng.

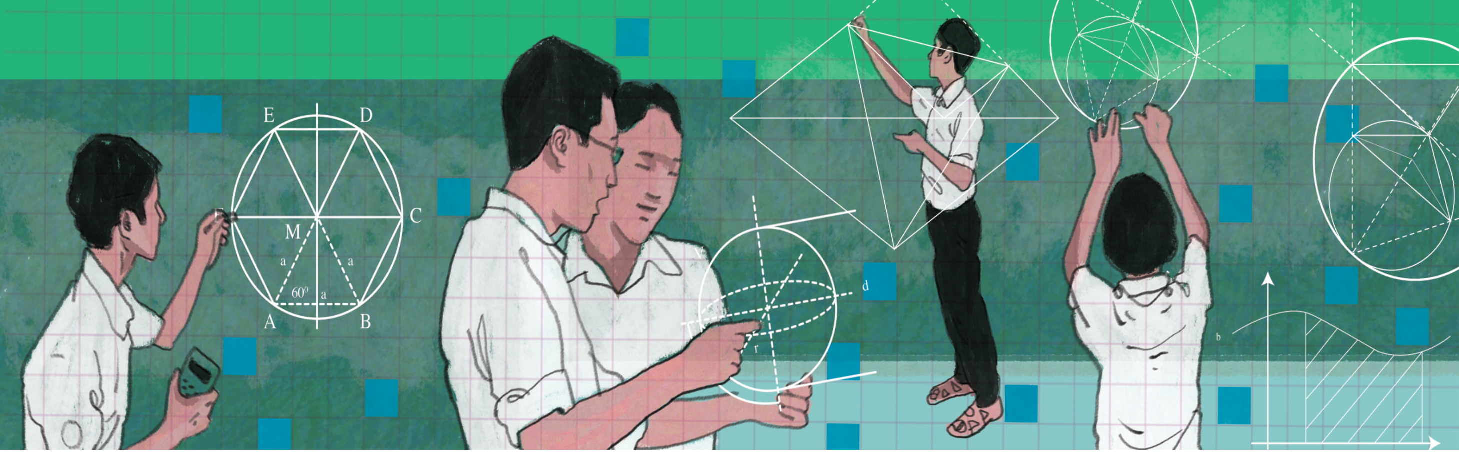


Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc ba bài toán trong kỳ thi Olympic Toán học trẻ của Áo năm 2022. Các bài toán này phù hợp với trình độ học sinh lớp $7-9$.

OC43. Người ta muốn lát kín một bảng ô vuông kích thước 2×13 (2 hàng, 13 cột) bằng các tấm bìa kích thước 1×2 và 1×3 sao cho các tấm bìa không được chồng lên nhau hay phủ ra ngoài bảng. Có bao nhiêu cách lát nếu ta được phép xoay các tấm bìa nhưng cạnh dài của tất cả các tấm đều phải song song với nhau? (số lượng mỗi tấm không hạn chế).

OC44. Cho đoạn thẳng AB với trung điểm M. Dựng nửa đường tròn tâm M, đường kính AB. Cho P là một điểm trên nửa đường tròn (P khác với A, B) và Q là trung điểm của cung AP. Gọi giao điểm của đường thẳng BP với đường thẳng đi qua M song song PQ là S. Chứng minh rằng $PM = PS$.

OC45. Tìm tất các các số nguyên tố p, q và r thỏa mãn $p + q^2 = r^4$.



BỔ ĐỀ HAI ĐOẠN THẲNG VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

NGUYỄN HỮU TÂM[1]

LTS. *Kỳ thi Bài giảng và bài viết về Toán học, lần thứ* 2*, năm* 2023*, do Tạp chí Pi tổ chức, với sự phối hợp của Hội Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, là một diễn đàn dành cho độc giả của Pi và những người yêu Toán nói chung. Kỳ thi đã nhận được nhiều bài viết có chất lượng chuyên môn cao. Tạp chí Pi số này xin trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc bài viết được trao giải Nhất trong hạng mục Chuyên đề Toán học.*

Bài viết này trình bày về hai bổ đề liên quan đến mô hình hai đoạn thẳng và một vài ứng dụng trong việc tiếp cận, khai thác một số bài toán hình học phẳng.

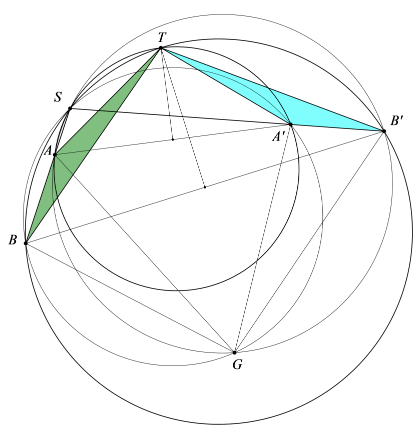
1. Bổ đề về hai đoạn thẳng

Trong các bài toán hình học phẳng, chúng ta khá thường xuyên gặp tình huống có hai đoạn thẳng bằng nhau. Điều đó có thể gợi đến kết quả sau đây, mà chúng tôi tạm gọi là *Bổ đề hai đoạn thẳng*.

Bổ đề 1. Cho hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ trong mặt phẳng sao cho AB không cùng phương với $A'B'$ và $AB = A'B'$. Khi đó tồn tại một phép quay biến A thành A' và B thành B'. đồng thời cũng tồn tại một phép quay biến A thành B' và biến B thành A'.

Trước khi đi vào chứng minh, bạn đọc có thể nhận thấy rằng, bằng cách đổi vai trò của A' và B', ta suy ra tồn tại phép quay thứ hai biến A thành B' và B thành A'.

Chứng minh. Gọi S là giao điểm của AB và $A'B'$. Giả sử các đường trung trực của AA' và BB' cắt nhau tại T, dễ thấy hai tam giác TAB và $TA'B'$ bằng nhau (c.c.c). Do đó $(BA, BT) = (B'A', B'T) \pmod{\pi}$, hay $(BS, BT) = (B'S, B'T) \pmod{\pi}$; suy ra bốn điểm S, T, B, B' đồng viên. Tương tự thì bốn điểm S, T, A, A' cũng đồng viên. Rõ ràng phép quay tâm T, góc quay $(TA, TA') = (TB, TB')$, biến A, B tương ứng thành A', B'. Trong trường hợp AA' và BB' song song thì từ giả thiết ta có hình thang cân $ABB'A'$. Lúc này T trùng S và ta cũng thu được kết quả như trên.



[1] *THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định.*

Chú ý rằng bổ đề trên dẫn đến kết quả sau đây.

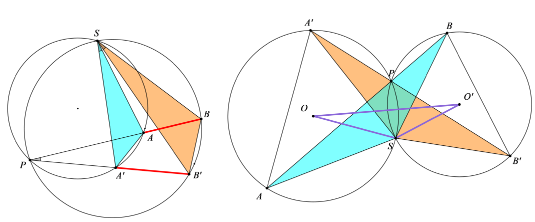
Hệ quả. Cho tam giác ABC cố định, các điểm M,N thay đổi lần lượt thuộc các cạnh AB,AC sao cho $BM = CN$. Khi đó đường tròn (AMN) luôn đi qua một điểm cố định khác A.

Chứng minh. Theo giả thiết ta có $BM = CN$ nên theo chứng minh của Bổ đề 1 thì các đường tròn (AMN) và (ABC) cắt nhau tại T (khác A) là giao điểm của các đường trung trực của các đoạn thẳng MN và BC, tức là trung điểm cung BC (chứa A) của đường tròn (ABC). Mà (ABC) cố định nên T cố định. Vậy, khi M,N thay đổi thì đường tròn (AMN) luôn đi qua một điểm cố định T (khác A).

Bổ đề 1 có một mở rộng tự nhiên như sau, trong đó giả thiết bằng nhau của các đoạn thẳng được bỏ đi và phép quay được thay bằng phép vị tự quay. Vì lý do này, chúng tôi cũng gọi kết quả sau là *Bổ đề hai đoạn thẳng*.

Bổ đề 2. Cho hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ trong mặt phẳng sao cho hai đường thẳng AB và $A'B'$ cắt nhau tại P. Khi đó tồn tại một phép vị tự quay biến A thành A' và B thành B'. Ngoài ra, tâm của phép vị tự quay này là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (PAA') và (PBB').

Tương tự, bằng cách hoán đổi vai trò của các điểm, dễ thấy rằng cũng tồn tại một phép vị tự quay biến A thành B' và B thành A' (tâm của phép vị tự quay này là giao điểm thứ hai của các đường tròn (PAB') và (PBA')).



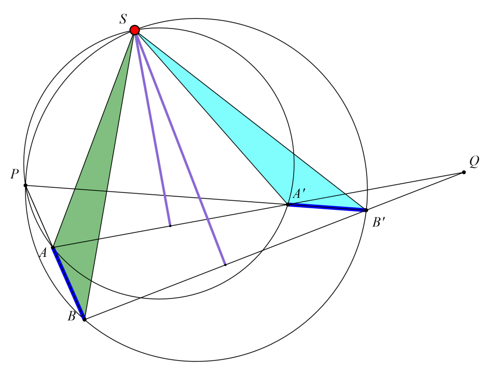
Chứng minh. Gọi S là giao điểm thứ hai của các đường tròn (PAA') và (PBB'). Ta có $(AS,AP) = (A'S,A'P)(\bmod \pi)$, $(BS,BP) = (B'S,B'P)(\bmod \pi)$ nên hai tam giác SAB và $SA'B'$ đồng dạng. Như vậy, S là tâm của phép vị tự quay biến đoạn AB thành đoạn $A'B'$.

Nhận xét. Ta có một số quan sát sau:

1) Nếu S là tâm phép vị tự quay biến đoạn AB thành đoạn $A'B'$ thì dễ thấy hai tam giác SAB và $SA'B'$ đồng dạng nên S cũng là tâm của phép vị tự quay biến đoạn AA' thành đoạn BB'.

2) Nếu hai đường tròn (PAA'), (PBB') có tâm lần lượt là O, O' thì S cũng là tâm của phép vị tự quay biến đường tròn (O) thành đường tròn (O'). Do đó ta có các tam giác $SAB, SA'B'$ và SOO' đồng dạng.

3) Nếu AA' cắt BB' tại Q thì các điểm Q,S,A,B đồng viên và các điểm Q,S,A',B' đồng viên. Điểm S chính là điểm Miquel của tứ giác toàn phần xác định bởi $ABB'A'$.



4) Với hai đoạn thẳng $AB, A'B'$ không cùng phương, luôn có hai phép vị tự quay biến đoạn thẳng này thành đoạn thẳng kia.

5) Trong trường hợp đặc biệt khi $AB = A'B'$, ta thu lại được kết quả của Bổ đề 1 ở trên.

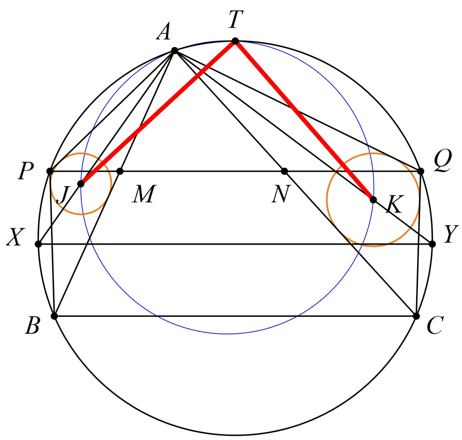
2. Một số áp dụng

Bổ đề 1 và 2 tỏ ra khá hữu ích trong một số tình huống. Trong bài viết này, chúng tôi xin giới thiệu ứng dụng của chúng trong việc chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau, chỉ ra một đường thẳng hoặc đường tròn đi qua điểm cố định và chứng minh một số đường tròn đồng quy.

2.1. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

Ví dụ đầu tiên được lấy từ một bài toán Vô địch Liên bang Nga năm 2006.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Hai điểm M,N thay đổi trên AB,AC sao cho $MN \parallel BC$, MN cắt (O) tại P,Q (M nằm giữa P và N). Gọi J,K tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác APB, AQC và T là trung điểm của cung BC chứa A của đường tròn (O). Chứng minh rằng $TJ = TK$.



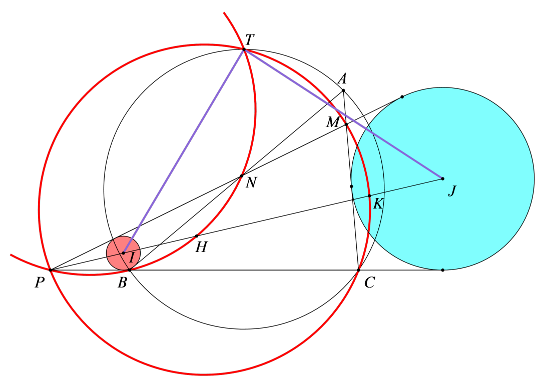
Phân tích: Đề bài xuất hiện mô hình trung điểm cung T và yêu cầu chứng minh $TJ = TK$. Đây là dấu hiệu khá rõ để ta vận dụng kết quả của Bổ đề 1. Ta cần tìm ra hai đoạn thẳng bằng nhau có các đầu mút là J, K. Để ý tới giả thiết MN song song với BC và tính chất của tâm đường tròn nội tiếp là ta có thể tiếp cận được bài toán.

Lời giải. Giả sử AJ,AK cắt (ABC) tương ứng tại X, Y. Dễ thấy X, Y tương ứng là trung điểm của các cung PB, QC của đường tròn (ABC). Theo một kết quả quen thuộc thì $XB = XP = XJ$ và $YC = YQ = YK$. Mà $YC = XB$ nên $KY = XJ$. Áp dụng Bổ đề 1 cho tam giác AXY, với hai điểm J,K thỏa $XJ = YK$, ta suy ra đường trung trực của đoạn thẳng JK đi qua trung điểm T của cung BC chứa A của đường tròn (ABC). Vậy $TJ = TK$.

Ví dụ sau đây, được lấy từ kỳ thi Vô địch Liên bang Nga năm 2014, cũng có thể được giải quyết bằng cách tương tự.

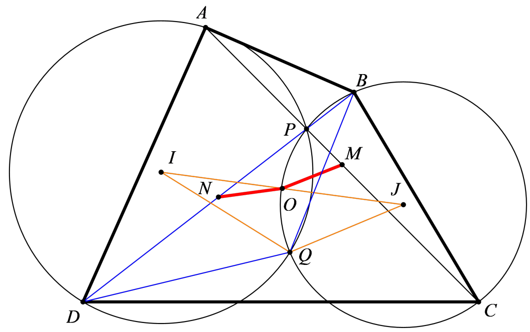
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AB > AC$. Các điểm M,N tương ứng nằm trên các cạnh AC,AB sao cho $BN = CM$. Đường thẳng MN cắt BC tại P. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PNB, J là tâm đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác PMC và T là trung điểm cung BC chứa A. Chứng minh rằng $TI = TJ$.

Phân tích: Đề bài tiếp tục xuất hiện mô hình trung điểm cung T và hai đoạn thẳng BN,CM bằng nhau nên cũng gợi ý đến việc vận dụng Bổ đề 1. Tuy nhiên ý tưởng chứng minh $TI = TJ$ không giống như lời giải của ví dụ ở trên mà phải dùng đến một phép quay phù hợp. với tâm là trung điểm T của cung BC chứa A.

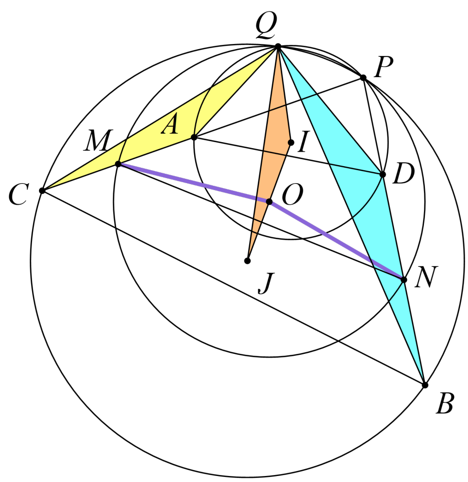


Lời giải. Theo Bổ đề 1 thì tồn tại phép quay tâm T biến B, N lần lượt thành C, M, do đó tam giác TNB biến thành tam giác TMC, đường tròn (TNB) biến thành đường tròn (TMC) suy ra H biến thành K (H,K lần lượt là trung điểm cung BN,CM). Dễ chứng minh được $HB = HN = HI$; $KC = KM = KJ$. Mà $BN = CM$ nên ta có $HI = KJ$, từ đó suy ra được $TI = TJ$.

Ví dụ 3. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại P. Gọi I,J lần lượt là tâm các đường tròn (PAD), (PBC). Gọi M,N,O lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AC,BD,IJ. Chứng minh $OM = ON$.



Phân tích. Bài toán xuất hiện mô hình hai đoạn thẳng cắt nhau: AC và BD cắt nhau tại P; ngoài ra, hai đường tròn (PAD) và (PBC) cắt nhau tại điểm thứ hai là Q nên chúng là các dấu hiệu để áp dụng Bổ đề 2 trong việc tiếp cận bài toán. Điểm Q chính là tâm của phép vị tự quay mà ta quan tâm.



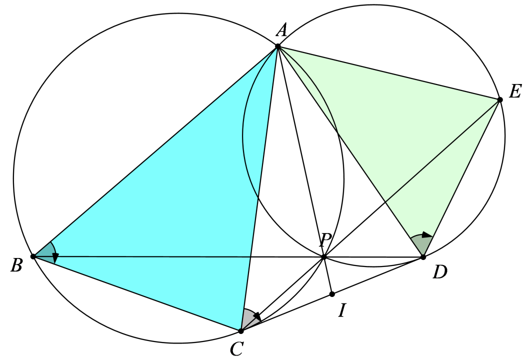
Lời giải. Áp dụng Bổ đề 2 cho hai đoạn thẳng AC và BD, do chúng cắt nhau tại P, ta biết rằng tồn tại phép vị tự quay f với tâm Q là giao điểm thứ hai (khác P) của các đường tròn (PAD) và (PBC). Phép vị tự quay f biến A thành C, biến D thành B. Ngoài ra, ta biết rằng cũng tồn tại phép vị tự quay g với tâm là Q biến A thành D, biến C thành B; do đó đoạn AC biến thành đoạn DB, dẫn đến g biến M thành N. Như vậy, các đường tròn (PAD), (PBC), (PMN) cùng đi qua Q. Vì f biến A thành C, D thành B và I thành J nên các tam giác QDB, QAC, QIJ đồng dạng với nhau. Từ đó suy ra các tam giác QDN, QAM và QIO đồng dạng. Do đó tồn tại một phép vị tự quay tâm Q biến D thành N, A thành M và I thành O. Khi đó O chính là tâm đường tròn (QMN) nên ta có $OM = ON$.

Nhận xét. Kết luận của bài toán vẫn còn đúng khi A, B, C, D là bốn điểm bất kỳ sao cho AC và BD cắt nhau.

2.2. Chứng minh tính thẳng hàng, đồng quy

Bài toán sau đây, được lấy từ các bài toán đề nghị thi Toán quốc tế năm 2006, minh họa một ứng dụng khác của các Bổ đề 1 và 2.

Ví dụ 4. Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ thỏa mãn $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$, $\angle CBA = \angle DCA = \angle EDA$. Gọi P là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng AP đi qua trung điểm của CD.



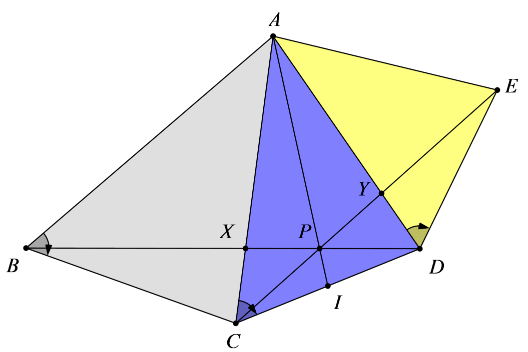
Phân tích. Trong bài toán này, dấu hiệu nhận biết việc áp dụng Bổ đề 2 là hai đoạn thẳng BD và CE cắt nhau tại P và các tam giác ABC, ADE có chung đỉnh A và đồng dạng với nhau. Khi đó, giao điểm thứ hai của các đường tròn (PBC) và (PDE) chính là tâm của phép vị tự quay.

Lời giải 1. Một mặt, theo giả thiết thì hai tam giác ABC và ADE đồng dạng nên có một phép vị tự quay tâm A biến B thành C, biến D thành E, và đoạn thẳng BD biến thành đoạn thẳng CE. Áp dụng Bổ đề 2 cho hai đoạn thẳng BD và CE ta thấy rằng phép vị tự quay này có tâm là giao điểm thứ hai của các đường tròn (PBC) và (PDE), vì thế A là giao điểm thứ hai của (PBC) và (PDE).

Mặt khác, vì các tam giác ABC, ACD, ADE đồng dạng (g.g) nên ta có $\angle ABC = \angle ACD, \angle ADC = \angle AED$. Do đó CD là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (PBC) và (PDE). Mà hai đường tròn này có trục đẳng phương là AP nên nó chia đôi CD.

Để so sánh với lời giải sử dụng Bổ đề 1 trên đây, chúng tôi trình bày một lời giải thứ hai.

Lời giải 2. Gọi X là giao điểm của AC và BD, Y là giao điểm của AD và CE. Theo *Lời giải 1*, tồn tại phép vị tự quay f tâm A biến B, C, D tương ứng thành C, D, E. Vì thế, f biến các đoạn thẳng AC và BD tương ứng thành AD và CE. Suy ra giao điểm của AC và BD biến thành giao điểm của AD và CE, tức là f biến X thành Y.



Từ đó ta có

$$\frac{XA}{XC} = \frac{YA}{YD}. \qquad (*)$$

Gọi I là giao điểm của AP với CD và áp dụng định lý Ceva cho tam giác ACD với điểm đồng quy P, ta có

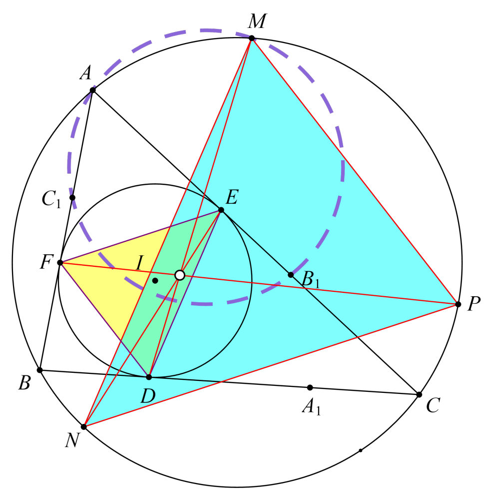
$$\frac{XA}{XC} \cdot \frac{IC}{ID} \cdot \frac{YD}{YA} = 1.$$

Từ đó, kết hợp $(*)$, ta suy ra $IC = ID$.

Nhận xét. Lời giải 2 không dùng đến Bổ đề về hai đoạn thẳng mà dùng đến kết quả của phép vị tự quay. Việc phát hiện ra hệ thức $(*)$ là điều không hề dễ. Theo quan sát trong thực tế dạy học của tác giả, rất ít học sinh nghĩ ra lời giải theo hướng này. Mặt khác, sau khi biết về bổ đề hai đoạn thẳng thì đa số học sinh dễ dàng phát hiện ra dấu hiệu và áp dụng vào bài toán một cách dễ dàng.

Bài toán sau đây được lấy từ một kỳ thi Vô địch Liên bang Nga.

Ví dụ 5. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 tương ứng là tiếp điểm của các đường tròn bàng tiếp góc A với BC, góc B với CA, góc C với AB. Các đường tròn (AB_1C_1), (BC_1A_1), (CA_1B_1) cắt lại (ABC) tại M, N, P. Gọi D, E, F là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với BC, CA, AB. Chứng minh rằng MD, NE, PF đồng quy.



Phân tích. Bằng hình vẽ ta dễ phát hiện ra rằng M, N, P tương ứng là các trung điểm cung BC, CA, AB của đường tròn (ABC) và đây là dấu hiệu để ta nghĩ đến cách tiếp cận bài toán dựa vào Bổ đề 1. Như vậy ta phải tìm những cặp đoạn thẳng bằng nhau, tuy nhiên điều này không quá khó khi dựa vào tính chất tiếp tuyến và tiếp điểm của các đường tròn nội tiếp, bàng tiếp.

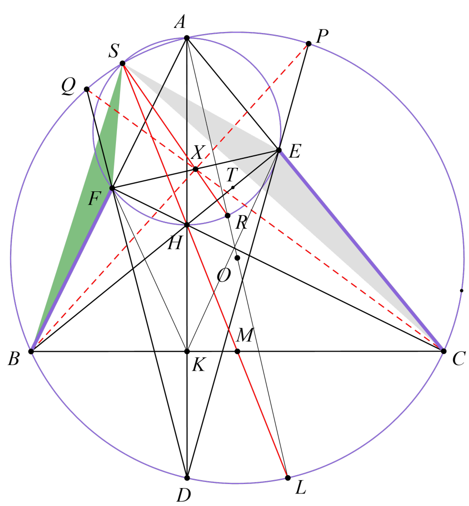
Lời giải. Dễ thấy $CB_1 = AE = AF = BC_1$. Áp dụng Bổ đề 1 ta có M là trung điểm cung BC chứa A của (ABC); tương tự với N, P. Ta dễ thấy rằng hai tam giác DEF và MNP có các cặp cạnh tương ứng song song (chẳng hạn NP và EF cùng vuông góc với phân giác trong góc A). Vì vậy tồn tại một phép vị tự biến D, E, F tương ứng thành M, N, P. Vậy

MD, NE, PF đồng quy tại tâm vị tự của hai tam giác trên.

Bài toán sau đây được trích từ kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia năm 2017 của Việt Nam. **Ví dụ 6.** Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H, AH cắt (O) tại D (khác A). Các đường thẳng DE, DF cắt lại (O) tương ứng P, Q (khác D). Đường tròn (AEF) cắt (O) và AO tương ứng tại R, S (khác A). Chứng minh rằng BP, CQ và RS đồng quy.

Chúng ta sẽ giới thiệu hai lời giải, một lời giải sử dụng phép biến đổi góc và lời giải còn lại sử dụng Bổ đề 2.

Lời giải 1. Gọi X là trung điểm của EF và K là giao điểm của AD và BC. Dễ thấy hai tam giác BFE và KHE đồng dạng (g.g). Gọi T là trung điểm của HE. Khi đó, do X là trung điểm FE nên ta suy ra hai tam giác BFX và KHT đồng dạng. Vì K là trung điểm DH nên tam giác KHT và tam giác DHE đồng dạng, dẫn đến các tam giác BFX và DHE là đồng dạng. Suy ra $\angle FBX = \angle HDE$, kết hợp với $\angle HDE = \angle ADP = \angle ABP = \angle FBP$ ta được $\angle FBX = \angle FBP$. Từ đây ta có B, P, X thẳng hàng. Tương tự ta có C, X, Q thẳng hàng.



Kẻ đường kính AL của (O). Dễ thấy SH đi qua L và do tứ giác $HBLC$ là hình bình hành nên HL đi qua trung điểm M của BC. Dễ thấy hai tam giác SEC và SFB đồng dạng (g.g) nên hai tam giác SEF và SCB đồng dạng (c.g.c). Mà hai tam giác này có các trung tuyến tương ứng là SX và SM nên ta suy ra $\angle FSX = \angle BSM$. Tương tự, do hai tam giác SFB và SRL đồng dạng (g.g) nên hai tam giác SFR và SBL đồng dạng (c.g.c), dẫn đến $\angle FSR = \angle BSL = \angle BSM = \angle FSX$. Từ đó suy ra S, X, R thẳng hàng. Vậy, SR, BP, CQ đồng quy tại trung điểm X của EF.

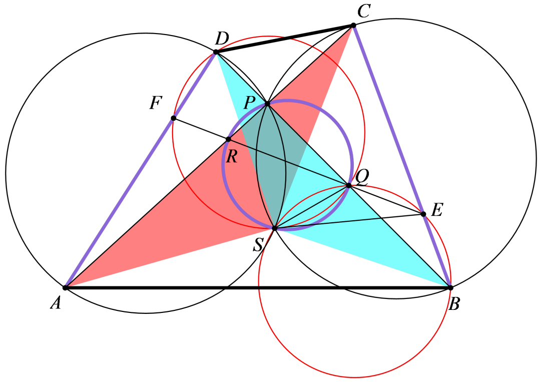
Lời giải 2. Gọi X là trung điểm của EF. Tương tự như *Lời giải* 1, ta cũng chứng minh được BP và CQ đi qua X. Ta cần chứng minh SR cũng đi qua X. Kẻ đường kính AL. Áp dụng Bổ đề 2 cho hai đoạn thẳng BF và CE (và để ý rằng chúng cắt nhau tại A) ta suy ra S là tâm của phép vị tự quay f biến đoạn FE thành đoạn BC và biến X biến thành M. Từ đó f biến (AEF) thành (ABC). Kết hợp với việc A, R, L thẳng hàng, ta suy ra f biến R thành L. Các điểm S, L, M tương ứng biến thành S, R, X. Mà S, L, M thẳng hàng nên S, R, X thẳng hàng. Vậy, SR, BP, CQ đồng quy tại X.

Nhận xét. Ở lời giải thứ nhất, để chứng minh SR đi qua X, ta đã sử dụng phép biến đổi góc dựa vào việc tìm ra những cặp tam giác đồng dạng khá phức tạp. Tuy nhiên ở lời giải thứ hai thì việc áp dụng Bổ đề 2 cho ta cách tiếp cận dễ dàng hơn nhiều. Dấu hiệu nhận biết ở đây là việc hai đường tròn (O) và (AEF) cắt nhau tại A, S và có BF cắt CE tại A.

2.3. Chứng minh đường thẳng hoặc đường tròn luôn qua điểm cố định

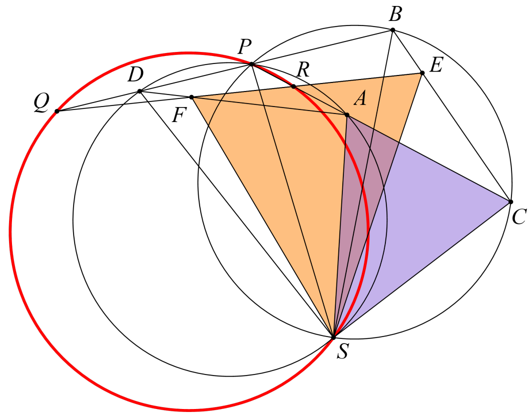
Bài toán sau đây được lấy từ đề thi Toán quốc tế (IMO) năm 2005.

Ví dụ 7. Cho $ABCD$ là tứ giác lồi có $AD = BC$ và AD, BC không song song. Gọi E, F tương ứng là các điểm trên BC, AD sao cho $BE = DF$. Các đường thẳng AC và BD cắt nhau tại P, các đường thẳng BD và EF cắt nhau tại Q, các đường thẳng EF và AC cắt nhau tại R. Chứng minh rằng, khi E và F thay đổi, đường tròn (PQR) đi qua một điểm cố định khác P.



Lời giải 1. Theo Bổ đề 1, áp dụng cho hai đoạn thẳng $AD = BC$ có AC cắt BD tại P, ta có giao điểm S của hai đường tròn (PAD) và (PBC) là tâm phép quay (góc $\angle BSD$) biến A thành C và biến D thành B, do đó ta có các tam giác cân SAC, SBD đồng dạng. Vì $FD/FA = EB/EC$ nên phép quay này biến F thành E, do đó ta có $SF = SE$ và $(FS,FR) = (FS,FE) = (AS,AC) = (AS,AR) \pmod{\pi}$. Do đó A,S,R,F đồng viên. Tương tự, B,E,Q,S đồng viên và D,F,S,Q đồng viên. Từ đó $(RS,RP) = (FS,FA) = (FS,FD) = (QS,QP) \pmod{\pi}$. Suy ra (PQR) đi qua điểm S cố định.

Lời giải 2. Theo Bổ đề 2, tồn tại phép vị tự quay f biến A thành C và biến D thành B. Khi đó f biến F thành E (do $FD/FA = EB/EC$), và đoạn DF biến thành đoạn BE. Do đó hai tứ giác $ACBD$ và $EFDB$ có chung điểm Miquel. Tâm của phép vị tự quay f là giao điểm thứ hai S của hai đường tròn (PAD) và (PCB), cũng là điểm Miquel chung của các tứ giác toàn phần $ACBD$ và $EFDB$. Do đó S thuộc các đường tròn (QEB) và (QFD). Dễ thấy S cũng là điểm Miquel chung của các tứ giác toàn phần $DFRP$ và $CEQP$, do đó S thuộc (PQR). Vì các đường tròn (PAD) và (PBC) cố định nên S cố định. Vậy, đường tròn (PQR) luôn đi qua điểm S cố định.



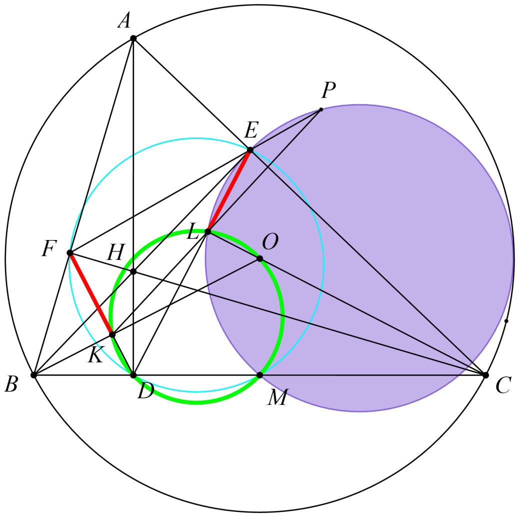
Nhận xét. 1) Điều thú vị là đối với bài toán này lại, chúng ta vừa có thể áp dụng Bổ đề 1, vừa có thể áp dụng Bổ đề 2 để giải. Điều đó cho thấy sự đa dạng và phạm vi vận dụng rộng rãi của hai bổ đề mà chúng ta đã đề cập. Trong bài toán trên, dấu hiệu để phát hiện và tiếp cận theo hướng Bổ đề 1 là sự xuất hiện của hai đoạn thẳng bằng nhau. Mặt khác, dấu hiệu để tiếp cận và vận dụng bổ đề 2 là có mô hình hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại P, đồng thời hai đường tròn (PAD), (PBC) cắt nhau tại P và S. Hơn nữa, bài toán cũng xuất hiện hai điểm E,F chia các đoạn thẳng với tỷ lệ bằng nhau nên ta nghĩ đến phép vị tự quay biến F thành E; tâm của phép vị tự quay chính là điểm S.

2) Nếu thay giả thiết tứ giác $ABCD$ lồi thành bốn điểm A,B,C,D bất kỳ ta vẫn thu được kết luận tương tự và các lời giải trên vẫn còn đúng.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với B,C là các điểm cố định và điểm A thay đổi trên (O). Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H, BO và CO tương ứng cắt DF, DE tại K, L, KL cắt EF tại P. Chứng minh rằng đường tròn (PEL) luôn qua một điểm cố định.

Phân tích. Để ý rằng các điểm E,F,K,L cùng với P,D lập thành một tứ giác toàn phần, vì vậy khi xét điểm cố định mà đường tròn (EPL) đi qua, ta quan tâm đến điểm Miquel của tứ giác toàn phần $EFKLPD$. Lại có

(EFD) chính là đường tròn Euler của tam giác ABC, và trung điểm M của BC là trung điểm cung EF chứa D của đường tròn này. Như vậy, ta chỉ cần chứng minh M chính là điểm Miquel của tứ giác toàn phần đã nêu. Để chỉ ra điều đó, ta đưa về mô hình hai đoạn thẳng bằng nhau và áp dụng Bổ đề 1. Từ đó ta có thể tiếp cận bài toán như sau.



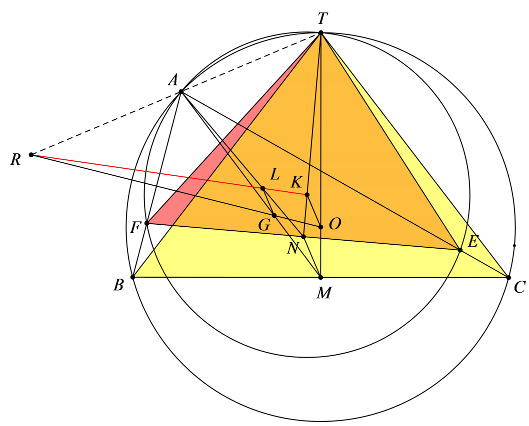
Lời giải. Vì BH, BO đẳng giác trong góc B nên BO vuông góc với FD. Tương tự, CO vuông góc với ED. Để ý rằng B, C tương ứng là tâm các đường tròn bàng tiếp góc E, F của tam giác DEF nên ta dễ chứng minh được $KF = LE$. Gọi M là trung điểm BC. Dễ thấy $ME = MF$ nên M là trung điểm của cung FE chứa D của đường tròn (FDE), đường tròn Euler của tam giác ABC. Do đó theo Bổ đề 1 thì M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $EFKLDP$. Vì thế đường tròn (LEP) luôn qua điểm M cố định khi A di động trên O.

Bài toán sau đây do tác giả Trần Quang Hùng đề xuất.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC. Các điểm E, F tương ứng thay đổi trên AC, AB sao cho $CE = BF$. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác AEF luôn đi qua một điểm cố định.

Phân tích. Rõ ràng bài toán này có mô hình hai đoạn thẳng bằng nhau là $CE = BF$ nên ta có thể vận dụng Bổ đề 1 để tiếp cận. Theo Bổ đề 1 thì hai đường tròn (AEF) và (ABC) cắt nhau tại trung điểm cung của mỗi đường tròn, từ đó ta có thêm thông tin để giải bài toán.

Lời giải. Gọi G, L tương ứng là trọng tâm các tam giác ABC, AEF. Gọi (O) và (K) tương ứng là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AEF. Khi đó LK, GO tương ứng là đường thẳng Euler của các tam giác AEF, ABC. Gọi giao điểm của LK và GO là R. Ta sẽ chứng minh R là một điểm cố định. Thật vậy, theo Bổ đề 1 thì (O) và (K) cắt nhau tại T trên các đường trung trực EF, BC. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng BC, EF. Ta thấy rằng các tam giác cân TEF, TBC đồng dạng, do đó ta suy ra được $\dfrac{TK}{TN} = \dfrac{KO}{MN} = \dfrac{TO}{TM}$, là tỷ số không đổi.



Suy ra $MN \parallel KO$. Ta lại có $\dfrac{GL}{MN} = \dfrac{2}{3}$ và $GL \parallel MN$, do đó $GL \parallel KO$ và

$$\frac{GL}{KO} = \frac{GL}{MN} \cdot \frac{MN}{KO} = \frac{2}{3} \cdot \frac{TM}{TO}.$$

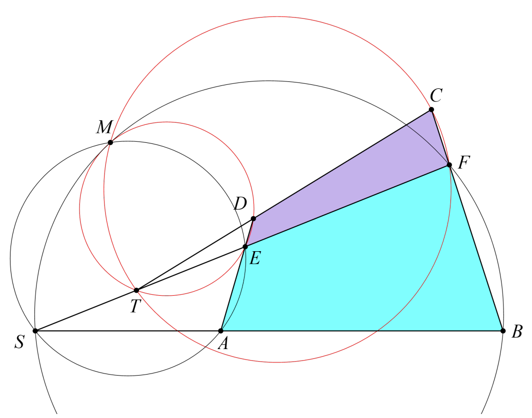
Từ đó, tỷ số $\dfrac{RG}{RO} = \dfrac{GL}{KO}$ là không đổi, do đó điểm R là cố định. Vậy KL luôn đi qua điểm R cố định.

2.4. Chứng minh nhiều đường tròn đồng quy

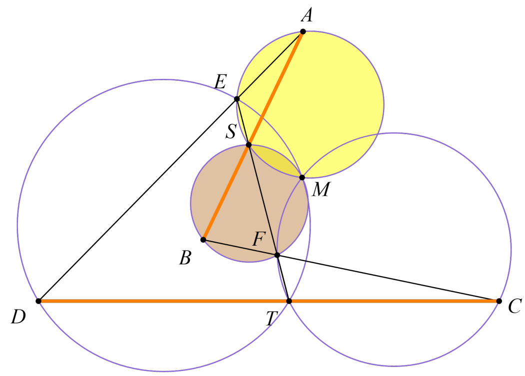
Bài toán sau đây xuất hiện trong đề thi Olympic Toán quốc gia của Mỹ năm 2006.

Ví dụ 10. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song và E, F lần lượt là các điểm trên các cạnh AD và BC sao cho $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$, EF cắt AB, CD lần lượt tại S, T. Chứng minh các đường tròn (SAE), (SBF), (TCF), (TDE) cùng đi qua một điểm.

Phân tích. Đề bài cho tứ giác toàn phần $ABCD$ và các điểm E, F lần lượt chia các đoạn AD, BC theo cùng tỷ số nên ta có thể liên tưởng đến mô hình hai đoạn thẳng. Hơn nữa, yêu cầu bài toán là chứng minh các đường tròn đồng quy nên ta có thể nghĩ đến điểm Miquel của tứ giác toàn phần, cũng chính là tâm của phép vị tự quay trong Bổ đề 2.



Lời giải. Gọi M là tâm của phép vị tự quay f biến A thành B, biến D thành C, do đó biến AD thành BC. Vì các điểm E, F chia các đoạn thẳng này theo cùng tỷ số nên phép vị tự quay này cũng biến E thành F. Do đó f biến AE thành BF và biến ED thành FC. Như vậy, tâm M là điểm Miquel chung của các tứ giác toàn phần $ABFE$ và $EFCD$ (cũng như tứ giác $ABCD$). Vậy, các đường tròn (SAE), (SBF), (TCF), (TDE) cùng đi qua điểm Miquel M.



Nhận xét: Nếu thay giả thiết tứ giác $ABCD$ lồi bởi bốn điểm A, B, C, D bất kỳ thì ta cũng thu được kết quả tương tự.

2.5. Một số bài tập

Để kết thúc bài viết, chúng tôi xin mời độc giả thử sức mình với một số bài toán mà lời giải có thể sử dụng các Bổ đề 1 và 2.

Bài 1 (Chọn đội tuyển Mỹ năm 2007). Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại P, Q. Qua P vẽ hai cát tuyến PAB và PCD sao cho A, C thuộc (O) và B, D thuộc (O'). Tia BD cắt đoạn AC tại X. Lấy điểm Y thuộc (O) và Z thuộc (O') sao cho $PY \parallel BD, PZ \parallel AC$. Chứng minh Q, X, Y, Z thẳng hàng.

Bài 2. Cho tam giác ABC, các điểm E, F di chuyển trên AC, AB sao cho $CE = BF$. Chứng minh rằng tâm đường tròn Euler của tam giác AEF luôn thuộc một đường thẳng cố định khi E, F di chuyển.

Bài 3. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I, J lần lượt là tâm các đường tròn $(AMB), (AMC), O$ là tâm đường tròn (ABC). Chứng minh AO là đường đối trung của tam giác AIJ.

Bài 4 (Olympic Iran 1997). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm P di chuyển trên cung BC không chứa A, gọi I, J lần lượt là tâm nội tiếp các tam giác APB, APC. Chứng minh đường tròn (PIJ) luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Một cát tuyến thay đổi qua A

cắt $(O),(O')$ lần lượt tại D,E. Tiếp tuyến của (O) tại D và tiếp tuyến của (O') tại E cắt nhau tại P. Chứng minh rằng trung trực của đoạn BP luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài 6 (Olympic Canada 2013). Cho tam giác ABC vuông tại C có trọng tâm G, gọi P là điểm trên AG sao cho $\angle CPA = \angle CAB$, Q là điểm trên BG sao cho $\angle CQB = \angle ABC$. Chứng minh rằng các đường tròn (AQG) và (BPG) cắt nhau tại một điểm thuộc cạnh AB.

Bài 7. Cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H và nội tiếp đường tròn (O). Trung trực AH cắt AB,AC lần lượt tại D,E. Chứng minh rằng OA là phân giác của góc $\angle DOE$.

Bài 8 (Olympic Trung Quốc 1992). Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O),AC$ cắt BD tại P, các đường tròn (PAB) và (PCD) cắt nhau tại Q khác P và O. Chứng minh QO vuông góc với QP.

Bài 9 (Olympic Toán quốc tế 2004). Cho tứ giác lồi $ABCD$, đường chéo BD không là phân giác các góc $\angle ABC, \angle CDA$. Điểm P nằm trong tứ giác sao cho $\angle PBC = \angle DBA, \angle DBC = \angle BDA$. Chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp được khi và chỉ khi $PA = PC$.

Bài 10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O),N$ là trung điểm cung BC chứa A của $(O),M$ là một điểm bất kỳ trên trung trực đoạn BC. Gọi I,J lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của các tam giác ABM,ACM. Chứng minh I,J,A,N đồng viên.

Tài liệu tham khảo

[1] Lê Bá Khánh Trình, *Hình học tĩnh và động*, tạp chí Pi, số 8, tháng 8/2019.

[2] Trần Quang Hùng. *Ứng dụng một số bổ quen thuộc vào các bài toán hình học thi Olympic*.

[3] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Hình học 10*, NXB Giáo dục, 2008.

[4] Nguyễn Văn Ban, Hoàng Chúng, *Hình học của tam giác*, NXB Giáo dục.

[5] V.V. Praxolov, *Các bài toán về hình học phẳng, Tập II*, NXB Hải Phòng, 2002.

[6] Johnson, A. R, *Advanced Euclidean Geometry*, Publications, Inc, Mineola, New York, 2007.

DẠY TOÁN, VIỆC ĐẦU TIÊN LÀ DẠY TOÁN!

THƯ HIÊN[1]

Với những ai quan tâm kỳ thi Bài giảng và bài viết về Toán học mang tên Hoàng Tụy, không chỉ là xem các thí sinh thuyết trình bài giảng, mà hơn thế, được nghe các thầy giám khảo chia sẻ quan điểm về dạy toán.

Theo nhận định của nhiều người theo dõi, điều lôi cuốn người xem nhất ở vòng chung khảo kỳ thi Bài giảng và bài viết về Toán học, mang tên Hoàng Tụy, là phần nhận xét của các thành viên hội đồng giám khảo. Nội dung các nhận xét này không chỉ đơn giản chỉ là những lời khen chê. Quan trọng hơn, đó là những chia sẻ về quan điểm dạy toán từ những giáo sư toán có sự am hiểu sâu sắc về toán phổ thông, thậm chí nhiều người trong

[1] *Tòa soạn Hà Nội, Báo Thanh Niên.*

đó đóng vai trò chủ chốt trong việc việc tham gia biên soạn chương trình phổ thông 2018 như GS Đỗ Đức Thái, GS Phùng Hồ Hải.

Dạy toán ứng dụng không dễ

Bài thuyết trình *Lý thuyết đồ thị và một số cấu trúc đáng chú ý* của tác giả Hà Trung (Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định) nhận được sự quan tâm đặc biệt của hội đồng giám khảo. Đây là chuyên đề (không bắt buộc) sẽ được dạy cho học sinh lớp 11 của chương trình phổ thông 2018 (bắt đầu được triển khai từ năm học 2023 – 2024). Nhưng theo tác giả Hà Trung, lý do ông chọn chuyên đề này bởi nó có nhiều kiến thức thú vị, có nhiều ứng dụng trong cuộc sống (ví dụ bản đồ mạng lưới bay của hàng không, mạng tương tác gene).

Theo GS Phùng Hồ Hải thì việc tác giả "gói" ba nội dung (sơ lược về lý thuyết đồ thị; đồ thị lưỡng phân; đồ thị cây, rừng) trong một chuyên đề là hơi ôm đồm. Hơn nữa, đối tượng mà người dạy là hướng đến học sinh giỏi toán, thì không cần thiết phải mất quá nhiều thời gian vòng vo về những ứng dụng mà nên đi thẳng sâu vào bản chất nội dung.

GS Ngô Việt Trung cho rằng, tác giả cần lựa chọn bài toán phù hợp với kiến thức đồ thị để giảng dạy. Không nên nhắc tới những vấn đề chỉ mang tính minh họa. Bài toán về chủ đề đồ thị thì mình phải áp dụng kiến thức đồ thị để giải quyết vấn đề. Chẳng hạn như nói về mạng thì kiến thức đồ thị đóng vai trò quan trọng. Ví dụ ChatGPT chắc chắn là phải dùng đồ thị để xác định những gì gắn với nhau.

Còn theo GS Đỗ Đức Thái, điều khiến cho đồ thị quan trọng hơn đối với toán học và đối với cuộc sống bây giờ là những thuật toán để từ đó giúp chúng ta tìm được câu trả lời. Chẳng hạn, người ta có thể mô tả ở chu trình Ơ le thì có cái này, hoặc ở đồ thị lưỡng phân thì sẽ có cái thứ như thế này... Trong khi cái quan trọng phải là có thuật toán để tìm những cái đấy thế nào. Và thuật toán đó phải mô phỏng được, phải lập trình được để thành ra những cái chạy được trên máy tính. "Có lẽ đến một lúc nào đó chúng ta nên dạy học sinh những cái như thế. Còn cứ gieo vào đầu học sinh, nhất là học sinh giỏi toán, rằng dùng cái này suy ra những cái trừu tượng này..., thì mãi cũng sẽ chẳng đi đến đâu. Cho nên tôi nghĩ nên chọn những bài toán, vẫn là toán hoàn toàn, vẫn khó như thường, nhưng cho phép người ta lập trình được, gắn vào một thuật toán nào đó coding được nó", GS Thái gợi ý.

Dạy cho tử tế toán!

Với phần trình bày của tác giả Nguyễn Thế Minh (Trường Trung học Vinschool Imperia, Hải Phòng), chủ đề *Tích hợp tư duy công dân số trong bài giảng môn Toán*, GS Đỗ Đức Thái cho rằng, bài giảng phù hợp với xu hướng tích hợp mà Chương trình phổ thông 2018 muốn thúc đẩy. Thông qua kiến thức về toán, người dạy muốn mang đến cho người học những gợi mở ứng dụng trong lĩnh vực tin học, đó là ưu điểm của bài giảng.

GS. Đỗ Đức Thái, Đại học Sư phạm Hà Nội.

Tuy nhiên, cũng từ bài giảng này, GS Thái đã cảnh báo về nguy cơ dạy học xa rời cái cốt lõi, dạy toán, mà nhiều giáo viên có thể mắc phải vì say sưa với cái gọi là "tích hợp". Cái mà những người biên soạn Chương trình phổ thông 2018 môn toán quan tâm là thầy cô giáo dạy toán cho học sinh, chứ không phải ra sức tô vẽ cho các bài dạy để bài học trông cho có vẻ hấp dẫn, nhưng lại không đọng lại được trong trí não người học kiến thức toán. "Dạy toán, việc đầu tiên là dạy toán! Dạy cho tử tế toán! Rồi muốn làm việc gì thì làm sau. Học sinh học môn toán thì trước hết các em phải được học toán", GS Thái khẳng định.

Phải tuân thủ những chuẩn mực

Với phần trình bày của tác giả Nguyễn Thụy Việt Anh (Trường Liên cấp Hội nhập Quốc tế Ischool, Quảng Trị), về *Hình có trục đối xứng*, GS Đỗ Đức Thái cảnh báo, người giáo viên luôn cần xác định một bài học cụ thể thuộc dạng nào trong lý thuyết dạy học. Trong trường sư phạm, giáo sinh được dạy cách xác định dạng bài điển hình trong lý thuyết dạy học. Bởi mỗi dạng bài điển hình sẽ có một nguyên tắc dạy học mà người dạy phải bám theo nguyên tắc đó, giống như đi đường thì phải đi bên phải.

"Dạy toán có những chuẩn mực về mặt sự phạm. Đây là bài học về dạy khái niệm mới, định nghĩa mới. Ở bài này, GV dạy một khái niệm rất khó với học sinh, đó là hình có trục đối xứng, hay nói cách khác, đối xứng trục mà lại không được phép định nghĩa phép đối xứng trục (vì lên đến lớp 10 học sinh mới được học kiến thức này ở chuyên đề). Nguyên tắc dạy bài học khái niệm mới, định nghĩa mới, bao gồm nhiều bước, trong đó bước cuối cùng là làm nổi bật lên được là chốt lại, neo lại trong đầu học sinh khái niệm mới đó là cái gì", GS Thái phát biểu.

Học toán để làm gì?

Ngay từ bài giảng đạt giải cao nhất (giải nhì, không có giải nhất) trong phần *Tìm hiểu về môn Toán trong "Chương trình giáo dục phổ thông mới" thông qua một chủ đề cụ thể*, các thí sinh và người theo dõi cuộc thi cũng được nhận những chia sẻ thấu đáo về quan điểm dạy toán của những người tham gia biên soạn chương trình môn toán. Đây là bài giảng *Giải bài toán tập hợp bằng phương pháp "ô ăn quan"*, của nhóm tác giả Ngô Quốc Trung, Nguyễn Thị Hiền (Trường Liên cấp Hermann Gmeiner Vinh, Nghệ An). Phần đầu bài giảng, các tác giả dùng phương pháp ô ăn quan để giải các bài toán ở tiểu học (thường được gọi là bài toán giả thiết tạm). "Tôi thấy phần đó rất thú vị, rất sáng tạo. Nó cho học sinh thấy một cơ chế mà thoát ra khỏi bản chất giải phương trình. Tôi hoàn toàn cho điểm 10 ở phần đó", GS Thái nhận xét.

Nhưng với phần thứ hai, các tác giả dùng phương pháp này với nội dung tổ hợp ở lớp 10, thì các tác giả không thuyết phục được ban giám khảo. "Nói cho cùng, học toán là học cách nghĩ, cách suy luận, cách khám phá ra một cái gì đó. Từ nó dẫn người ta đến tư duy, đến những thuật toán chung, để khái quát nó lên, giải quyết những mô hình trong cuộc sống mà nó tương tự như thế. Việc dùng một phương pháp thiên về mô tả cho nội dung tổ hợp ở lớp 10 của các tác giả vừa khiến cho bài giảng cầu kỳ, vừa không phù hợp. Học sinh lớp 10, 15 – 16 tuổi rồi, không phải lúc nào cũng cầm nắm sờ mó với mô tả được. Một lúc nào đó, anh phải chuyển từ *cụ thể* lên đến *hình ảnh*, rồi lên đến *biểu tượng hoá* chứ.", GS Thái chia sẻ.

Cuối tháng Ba vừa qua, trong trong khuôn khổ sự kiện "Toán học cho mọi người", vòng chung khảo kỳ thi Bài giảng và bài viết về Toán học, mang tên Hoàng Tụy, lần thứ hai, đã được diễn ra. Trước đó, hội đồng giám khảo đã tiến hành chấm các hồ sơ dự thi ở vòng sơ khảo, lựa chọn được 8 hồ sơ tốt nhất để tranh tài tại vòng chung khảo. Tại vòng chung khảo (diễn ra ở hội trường Hoàng Tụy, Viện Toán học Việt Nam), đại diện nhóm tác giả hoặc các tác giả đã thuyết trình các bài giảng và bài viết trước hội đồng giám khảo, trước sự theo dõi (trực tiếp và trực tuyến) của những người quan tâm tới kỳ thi. Theo hội đồng giám khảo, chất lượng hồ sơ dự thi năm nay cao hơn hẳn năm trước, vì thế mà phần trình bày của 8 thí sinh được lựa chọn thuyết trình trong vòng chung khảo ít nhiều đều tạo sự thú vị cho người theo dõi.

Trọng tâm nội dung của kỳ thi lần thứ hai là Tìm hiểu về môn Toán trong "Chương trình giáo dục phổ thông mới" thông qua một chủ đề cụ thể. Bên cạnh đó là một số nội dung truyền thống như: Tìm hiểu về Toán sơ cấp, lịch sử Toán học và Toán học trong cuộc sống.

Hội đồng giám khảo năm nay gồm GS Ngô Việt Trung, Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, nguyên Viện trưởng Viện Toán học; GS Đỗ Đức Thái, Trường ĐH Sư phạm Hà Nội; GS Phùng Hồ Hải, Phó chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, nguyên Viện trưởng Viện Toán học; GS Hà Huy Khoái, nguyên Viện trưởng Viện Toán học; TS Trần Nam Dũng, Phó hiệu trưởng Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐH Quốc gia TP.HCM; PGS Phó Đức Tài, Trưởng Khoa Toán-Cơ-Tin học, Trường ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐH Quốc gia Hà Nội.

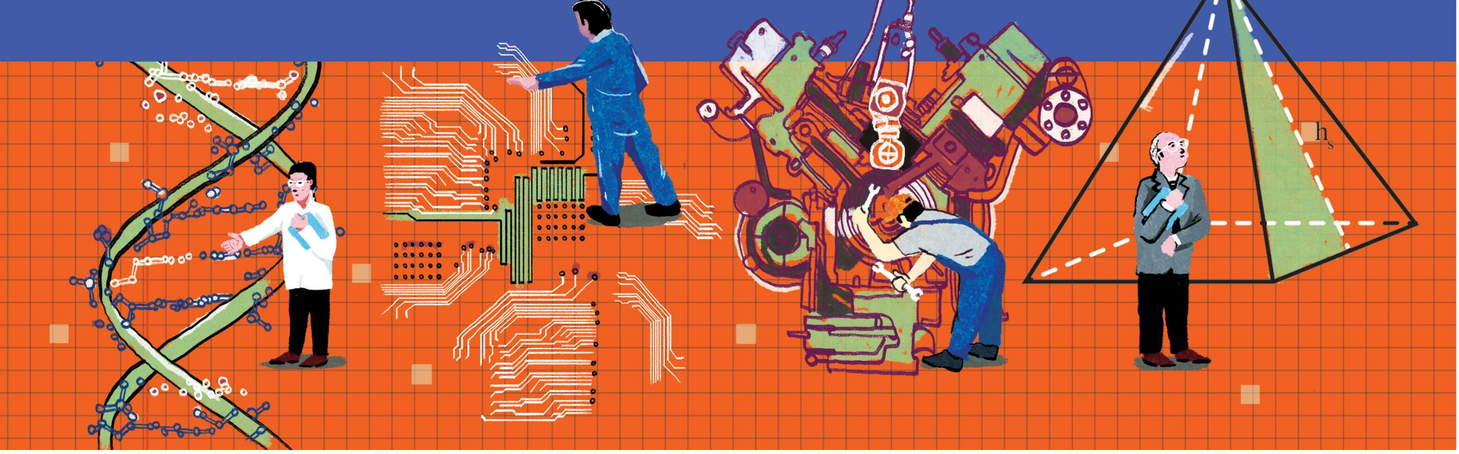
Kết quả chung cuộc như sau:

Nội dung "Tìm hiểu về môn Toán trong "Chương trình giáo dục phổ thông mới" thông qua một chủ đề cụ thể":

- Giải nhì (không có giải nhất): Bài giảng "Giải bài toán tập hợp bằng phương pháp "ô ăn quan" của nhóm tác giả Ngô Quốc Trung, Nguyễn Thị Hiền, Trường Liên cấp Hermann Gmeiner Vinh, Nghệ An.
- Giải ba: Bài viết "Một cách thiết kế dạy học Toán theo hướng gắn liền với thực tiễn", tác giả Phạm Đức Quang, Trường ĐH Sư phạm Hà Nội 2.
- Giải khuyến khích: Bài giảng "Hình có trục đối xứng", tác giả Nguyễn Thụy Việt Anh, Trường Liên cấp Hội nhập Quốc tế Ischool, Quảng Trị; Bài giảng "Tích hợp tư duy công dân số trong bài giảng môn Toán", tác giả Nguyễn Thế Minh, Trường Trung học Vinschool Imperia, Hải Phòng.

Các nội dung khác:

- Giải nhất: Bài giảng "Bổ đề hai đoạn thẳng và một số ứng dụng", tác giả Nguyễn Hữu Tâm, Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định.
- Giải nhì: Bài giảng "Mập mờ công thức Euler", tác giả Nguyễn Quang Minh, Biên Hoà, Đồng Nai.
- Giải ba: Bài giảng "Lý thuyết đồ thị và một số cấu trúc đáng chú ý", tác giả Hà Trung, Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định.
- Giải khuyến khích: Bài giảng "Nét đẹp của phương pháp đếm dưới góc nhìn của số Fibonacci", tác giả Nguyễn Tuấn Anh, Trường PTTH chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp.



NGUYÊN LÝ PASCAL VỀ ÁP SUẤT TRONG LÒNG CHẤT LỎNG

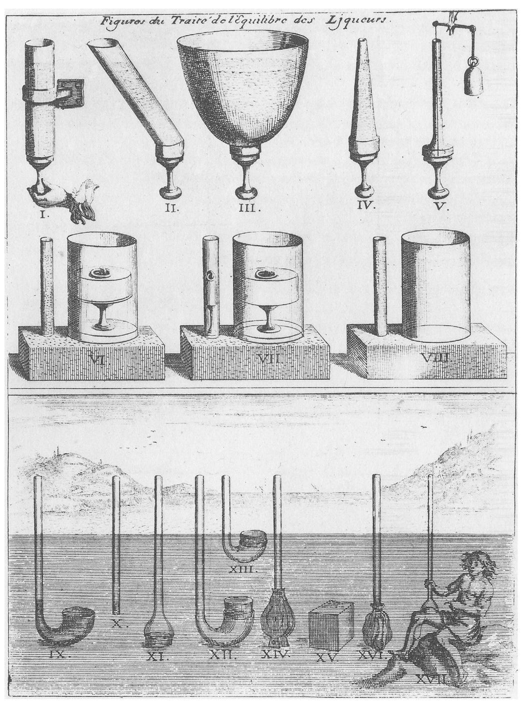
NGUYỄN HOÀNG VŨ[1]

Pascal không chỉ là một nhà toán học lớn mà còn có nhiều đóng góp trong ngành vật lý. Nhân dịp kỷ niệm 400 năm ngày sinh của Pascal (1623 – 2023), chúng ta hãy cùng Pi tìm hiểu nguyên lý mang tên ông về áp suất trong lòng chất lỏng cùng những thí nghiệm của Pascal xung quanh vấn đề này.

Blaise Pascal (1623 – 1662).

1. Các thí nghiệm của Pascal về áp suất trong chất lỏng

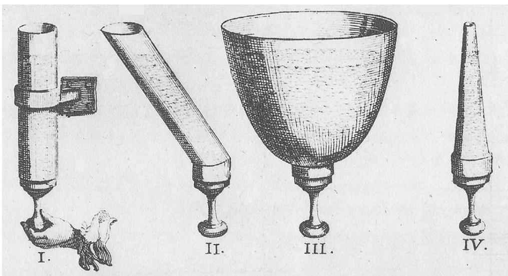
Từ năm 1644, khi Torricelli tiến hành đo áp suất khí quyển với áp kế thủy ngân, nhiều nhà khoa học khác ở châu Âu cũng bắt đầu quan tâm đến vấn đề này. Các tranh cãi chủ yếu xoay quanh sự tồn tại của chân không cũng như sự thay đổi của áp suất theo độ cao. Nhiều thí nghiệm được thực hiện ở Pháp bởi Pascal cũng như Roberval để kiểm chứng các nhận định đã có cũng như đưa ra các kết quả mới. Bạn đọc có thể xem lại các vấn đề về áp suất khí quyển liên quan đến Pascal và Torricelli trong Pi số 11 năm 2020.



Hình 1. Bảng hình vẽ số 1 trong Traité de l'équilibre des liqueurs của Pascal.

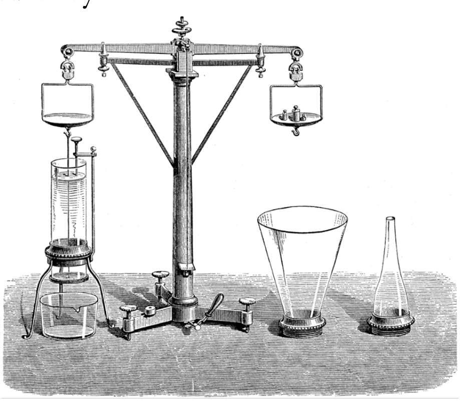
[1] *Hà Nội.*

Không chỉ dừng lại ở áp suất khí quyển, Pascal còn tiếp tục nghiên cứu sâu hơn về áp suất ở trong lòng của một chất lỏng. Cuốn sách *Traité de l'équilibre des liqueurs (Về sự cân bằng của chất lỏng)* của ông đã trình bày nhiều thí nghiệm đa dạng về chủ đề này. Những thí nghiệm liên quan được ông tổng kết trong một hình vẽ tóm tắt (Hình 1).



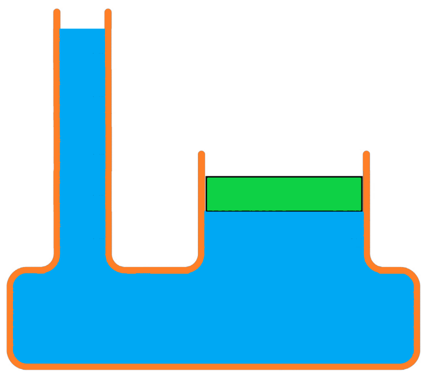
Hình 2. Với cùng một mực chất lỏng, áp suất ở đáy bình với các hình dạng khác nhau đều sẽ bằng nhau.

Các thí nghiệm I đến IV minh họa phát biểu thứ nhất của Pascal về áp suất trong lòng chất lỏng: áp suất do chất lỏng gây ra phụ thuộc vào độ cao của cột chất lỏng và độc lập với tổng khối lượng của chất lỏng. Các bình chứa với hình dạng khác nhau được đổ nước đến cùng một độ cao và khi đó áp suất tại vị trí được bịt lại ở đáy của chúng đều bằng nhau (Hình 2). Thí nghiệm V mô tả cách đo áp suất này.



Hình 3. Sơ đồ thí nghiệm đo áp suất ở đáy bình tương tự như trong thí nghiệm V. Lực do áp suất nước tác dụng lên khối chặn ở đáy bình sẽ cân bằng với trọng lượng của các vật trên đĩa cân ở phía đối diện.

Trong thí nghiệm V, bình chứa có dạng một ống hẹp với lỗ mở to ở đáy. Một khối chặn ở đáy bình được nối với một đòn bẩy có một quả cân ở phía đối diện sao cho hai tay đòn bằng nhau. Khi lực do áp suất nước tác dụng lên khối chặn và trọng lực của quả cân cân bằng với nhau ở hai phía của đòn bẩy, ta có thể thiết lập được sự phụ thuộc giữa áp suất và độ cao của cột nước. Nếu với cũng lượng nước đó nhưng được làm cho đông đặc thì khối lượng của quả cân chỉ bằng $1/100$ so với trường hợp nước lỏng. Do đó, quan hệ về áp suất và chiều cao ở trên chỉ áp dụng với chất lỏng và không đúng với chất rắn.

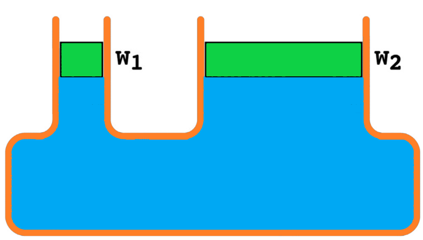


Hình 4. Thí nghiệm VI của Pascal: một cột nước ở một nhánh của bình chứa cân bằng với một pít tông ở nhánh còn lại.

Trong thí nghiệm VI, Pascal sử dụng một bình chứa có hai lỗ ở mặt trên, lỗ bé có diện tích chỉ bằng $1/100$ diện tích của lỗ lớn. Ở mỗi lỗ, ta gắn một ống kim loại. Nếu ống nhỏ được đổ đầy nước và một pít tông được đặt trên ống còn lại thì pít tông cần có khối lượng rất lớn để ngăn cho nước không đẩy lên. Cách đo này tương tự như việc sử dụng quả cân để đo áp suất ở đáy bình chứa trong thí nghiệm V. Điều khác biệt là lúc này áp suất tạo lực đẩy hướng lên trên. Nếu cột nước bên ống nhỏ có chiều cao tăng gấp đôi thì khối lượng của pít tông cần đặt bên ống lớn cũng phải tăng gấp đôi. Những kết quả quan sát vẫn đúng ngay cả khi pít tông chặn được đặt ở mặt bên của bình chứa. Pascal tổng kết các thí nghiệm trên bằng kết luận: *áp suất do cột nước gây ra phụ thuộc vào độ cao của nó*, chứ không phải độ rộng.

Công thức cho sự phụ thuộc của áp suất theo độ sâu là: $p = \rho g h$ với ρ là khối lượng riêng của chất lỏng còn g là gia tốc trọng trường[2].

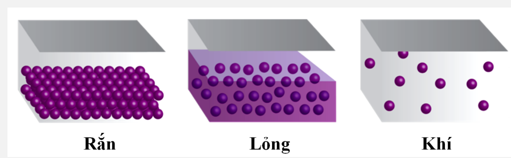
Trong thí nghiệm VII, cột nước ở ống bé cũng được thay bằng một pít tông để cân bằng với pít tông bên ống lớn. Tỷ lệ khối lượng 2 pít tông cũng bằng tỷ lệ của diện tích hai lỗ, tức là pít tông ở lỗ nhỏ chỉ cần có khối lượng bằng $1/100$ pít tông ở lỗ lớn. Nếu ta ấn một pít tông thì cái còn lại sẽ dịch chuyển một đoạn tương ứng ngược với tỷ lệ diện tích: nếu ta dịch chuyển pít tông ở lỗ nhỏ một đoạn thì pít tông ở lỗ lớn chỉ dịch đi một đoạn bằng $1/100$ đoạn này mà thôi. Như Pascal đã giải thích, tính không nén được của nước làm cho thể tích nước bị dịch chuyển ở hai phía là như nhau. Pascal đã liên hệ sự tương quan này với các máy cơ học đơn giản khác như đòn bẩy và ròng rọc, trong đó nếu ta lợi về lực thì sẽ phải chịu đoạn dịch chuyển dài hơn và ngược lại. Nói cách khác thì tích của lực và đường đi luôn không đổi, hay công sẽ không đổi.



Hình 5. Thí nghiệm VII của Pascal: Sự cân bằng áp suất của hai pít tông. Hai pít tông có khối lượng khác nhau nhưng tỷ lệ với diện tích thiết diện ống sẽ cân bằng nhau ở hai nhánh của bình chứa.

Khi so sánh thí nghiệm VI và VII, Pascal nhận thấy sự tương đương giữa cột nước ở VI và pít tông bên ống bé ở VII, chúng có cùng khối lượng. Phân tích tương tự cũng có thể áp dụng cho thí nghiệm V: cột nước ở phần ống có thiết diện bé tương đương với một pít tông sao cho khối lượng của nó và quả cân sẽ tỷ lệ với tỷ số diện tích của ống và diện tích phần đáy.

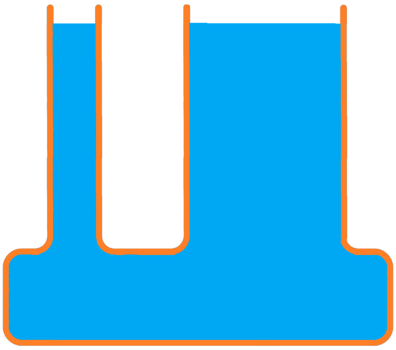
Những thí nghiệm nảy giúp Pascal đưa ra một phát biểu quan trọng thứ hai: *áp suất do cột nước hoặc một lực bên ngoài gây ra sẽ được truyền nguyên vẹn trong lòng chất lỏng theo mọi hướng*. Pascal giải thích rằng hiện tượng này xảy ra do tính liên tục và tính lỏng của các chất lỏng.



Ngày nay ta đã biết hiện tượng trong phát biểu trên của Pascal có nguyên nhân là do cấu tạo ở cấp độ phân tử của chất lỏng. Trong khi chất rắn có các phân tử chỉ dịch chuyển được quanh các vị trí cố định thì các phân tử chất lỏng có thể dịch chuyển tự do hơn nhưng vẫn liên kết với nhau. Do đó, chất lỏng có thể thay đổi hình dạng nhưng thể tích không thay đổi. Việc này dẫn đến chất lỏng không nén được và áp suất sẽ được truyền đi trong lòng nó theo tương tác giữa các phân tử. Còn với chất khí, các phân tử chuyển động hỗn loạn không ngừng và hoàn toàn có thể tách rời nhau nên áp suất sẽ không được truyền đi nguyên vẹn mà phụ thuộc vào các định luật về chất khí như trong phần nhiệt học của sách giáo khoa Vật lý lớp 10.

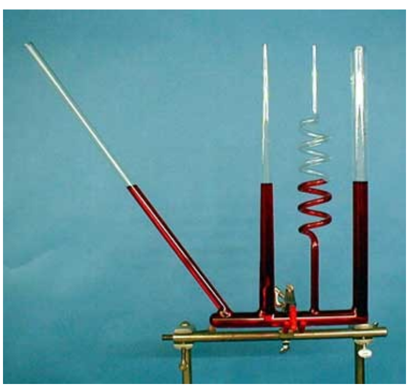
Cuốn sách của Pascal còn trình bày nhiều thí nghiệm khác nhau liên quan đến phát biểu trên.

[2] *Vào thời của Pascal, vật lý chưa có khái niệm về áp suất cũng như gia tốc trọng trường. Pascal đã đưa ra khái niệm lực trên một đơn vị diện tích nhưng chưa gọi nó là áp suất.*



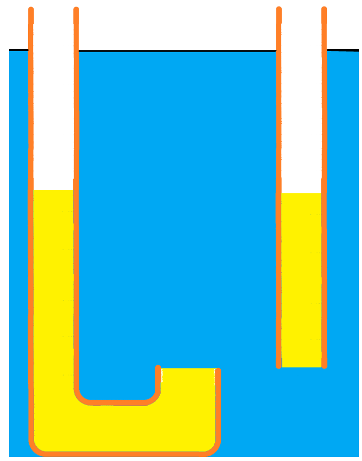
Hình 6. Thí nghiệm VIII của Pascal: Hai cột chất lỏng ở hai nhánh của bình thông nhau luôn có mực chất lỏng bằng nhau khi cân bằng.

Trong thí nghiệm VIII, cả hai pít tông đều được thay bằng các ống thẳng chứa nước. Hệ cân bằng khi mực nước ở cả hai ống ngang bằng nhau. Quan hệ giữa khối lượng của chúng cũng giống như trong trường hợp hai pít tông: tỷ lệ với diện tích của lỗ ở mỗi ống. Đây cũng chính là *bình thông nhau* mà ta đã quen thuộc trong sách giáo khoa vật lý. Nếu ta sử dụng hai chất lỏng khác nhau, ví dụ như nước và thủy ngân, ở mỗi bên ống, chúng sẽ cân bằng khi chiều cao của hai cột chất lỏng tỷ lệ nghịch với mật độ của chúng.

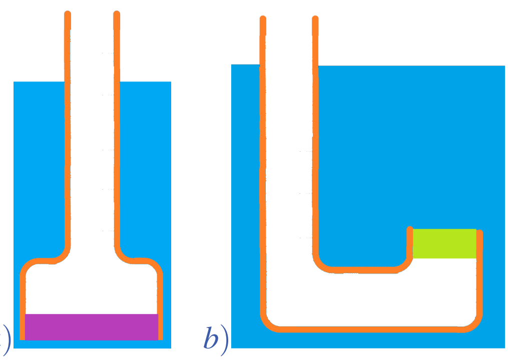


Hình 7. Với bình thông nhau có nhiều nhánh, mực chất lỏng ở các nhánh cũng vẫn luôn bằng nhau.

Tính đẳng hướng của việc lan truyền áp suất cũng được thể hiện ở việc khi cho một ống thẳng vào nước với đầu trên và đầu dưới đều hở, độ cao của cột thủy ngân trong ống độc lập với việc đầu phía dưới của ống hướng xuống, bị bẻ cong 90 độ thành hướng nằm ngang hay cong lên (thí nghiệm IX và X). Trong một thí nghiệm khác, một quả bóng đầy nước sẽ phồng lên hoặc co lại đồng đều khi nó được nâng lên hay hạ xuống trong nước. Pascal giải thích rằng đây là do áp suất do nước tác động vào quả bóng tại tất cả mọi phía và hướng vào tâm.



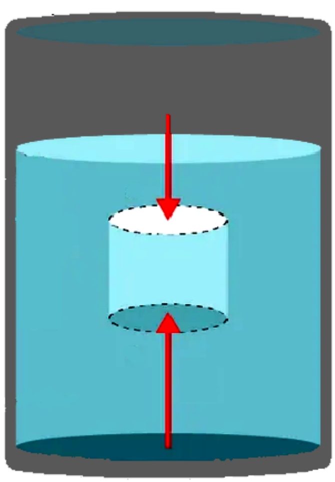
Hình 8. Thí nghiệm IX và X của Pascal: cột thủy ngân có chiều cao như nhau trong cả hai trường hợp dù đáy ống có hình dạng khác nhau.



Hình 9. a) Thí nghiệm XI của Pascal: áp suất của nước giữ cho xi lanh bằng đồng cân bằng trong ống. b) Thí nghiệm XII của Pascal: một xi lanh bằng gỗ không nổi lên được khỏi ống do áp suất nước từ phía trên nó.

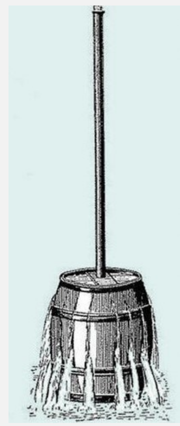
Trong thí nghiệm XI, một xi lanh bằng đồng đặt trong một ống mở rộng ở phía dưới sẽ nằm cân bằng trong ống do áp suất của nước tác dụng từ phía dưới lên. Trong khi đó, một xi lanh hình trụ bằng gỗ (có mật độ "nhẹ hơn" nước) sẽ bị ấn xuống vào một ống cong do áp suất của nước tác dụng lên phía trên nó (thí nghiệm XII).

Đặc biệt, Pascal đã sử dụng lý thuyết mới của mình để giải thích về lực đẩy Archimedes (thí nghiệm XV). Trong các thí nghiệm trước, nước ở phía trên vật sẽ đẩy vật xuống, nước ở phía dưới vật sẽ đẩy vật lên và đẩy vật từ các mặt bên. Trong cùng một mặt phẳng ngang, áp suất là như nhau do cột nước có cùng độ cao nên lực đẩy từ các vị trí mặt bên khác nhau sẽ cân bằng nhau. Do sự chênh lệch độ cao giữa mặt đáy và mặt trên của vật nên với một vật ngập hoàn toàn trong nước, lực đẩy vật ở mặt dưới sẽ lớn hơn lực ấn nó xuống ở mặt trên. Sự chênh lệch này tỷ lệ với chênh lệch độ sâu của hai vị trí. Pascal kết luận rằng lực tác dụng của nước lên vật sẽ đẩy vật lên và có độ lớn bằng đúng trọng lượng của khối nước có thể tích bằng với thể tích của vật.



Hình 10. Các lực do áp suất chất lỏng tác dụng lên vật sẽ tạo thành lực đẩy Archimedes.

Một điểm đáng chú ý là không phải tất cả các thí nghiệm mà Pascal trình bày trong cuốn sách đều được chính tay ông thực hiện. Nhiều thí nghiệm đã có từ trước đó, trong các tài liệu của Simon Stevin và các nhà khoa học khác. Tuy nhiên, Pascal đã có vai trò quan trọng khi ông đưa ra một lý thuyết mới có thể giải thích được những hiện tượng quan sát được từ các thí nghiệm này, đặc biệt là sự tương đương giữa tác động của một cột nước và một pít tông như trong thí nghiệm VIII. Những nghiên cứu về áp suất chất lỏng của Pascal được Boyle và Newton tiếp tục phát triển và hoàn thiện ở nửa sau thế kỷ 17 và trong thế kỷ 18.



Có một thí nghiệm tương đối thú vị tuy không phải là của Pascal nhưng vẫn được một số tài liệu gán cho ông. Trong thí nghiệm này, người ta gắn một ống dài có thiết diện nhỏ vào một thùng gỗ chứa đầy nước. Khi nước trong ống đạt một độ cao nhất định, nó sẽ gây áp suất đủ lớn lên thành của thùng gỗ và làm nứt nó. Thí nghiệm này cho thấy độ cao cột nước mới là yếu tố quyết định chứ không phải khối lượng nước ở trong ống.

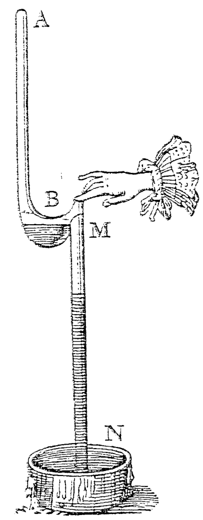
2. Chất lỏng, chất khí và chân không

Trong chuyên luận thứ 2, mang tên "Về trọng lực của khối khí", Pascal đã chỉ ra sự giống nhau cũng như khác nhau về áp suất giữa chất lỏng và chất khí. Ông đã xây dựng được hệ thống lý thuyết hoàn chỉnh cho những gì mà Torricelli đã đề xuất. Trước hết, ta có thể khẳng định rằng không khí có khối lượng. Minh chứng rõ ràng nhất là một quả bóng khi bơm đầy sẽ nặng hơn so với khi chưa được bơm. Do đó, toàn bộ khối khí trong khí quyển cũng có khối lượng và khối lượng này là hữu hạn. Tương tự như việc lượng nước trong biển cả ép xuống Trái đất phía dưới nó, khối lượng của không khí trong khí quyển cũng gây ra áp suất ép lên bề mặt đất. Cột không khí càng cao gây ra áp suất càng lớn. Do đó áp suất ở đỉnh núi thấp hơn ở các thung lũng, như trong các thí nghiệm với áp kế thủy ngân Torricelli mà Pascal và nhiều nhà khoa học khác đã tiến hành.

Khi vật thể ngập trong nước, nó sẽ bị áp suất tác dụng từ mọi phía. Vật thể trong không khí cũng như vậy. Việc ta không cảm thấy áp suất khí quyển này cũng giống như việc cá không bị áp suất nước đè chết: áp suất cả trong lẫn ngoài sẽ cân bằng nhau.

Trong khi một cột nước có mật độ đồng đều tại mọi vị trí, cột không khí sẽ nặng hơn ở phần đáy và nhẹ hơn ở các vị trí cao hơn. Ta có thể thí nghiệm việc này bằng cách mang một quả bóng bay được bơm đầy một nửa lên đỉnh núi, nó sẽ nở ra nhiều hơn so với khi ở dưới mặt đất. Do áp suất giảm theo độ cao nên theo Pascal, khi ta đi lên bên trên của khí quyển hay ở vị trí không có không khí, tất cả các hiện tượng liên quan đến áp suất khí quyển sẽ không còn xảy ra nữa. Chiều cao của cột thủy ngân trong một áp kế Torricelli sẽ giảm dần theo độ cao và nếu ta đưa áp kế lên vị trí nằm bên trên khí quyển, cột thủy ngân sẽ không còn dâng lên trong ống. Tuy nhiên, ta không có một căn phòng hoàn toàn không có không khí để kiểm chứng việc này. Thay vào đó, Pascal đã đưa ra một thí nghiệm mang tên "thí nghiệm về chân không trong chân không".

Một ống thủy tinh cong có đầu A đóng và đầu B hở. Ống còn lại có dạng thẳng và hở ở cả hai đầu M, N. Đầu M được nối thông vào với phần cong của ống AB. B được chặn bởi ngón tay của người làm thí nghiệm và ban đầu cả hai ống được đổ đầy thủy ngân sau đó lật ngược lại sao cho N chìm vào trong một chậu thủy ngân. Khi đó thủy ngân sẽ chảy hoàn toàn ra khỏi phần trên của ống AB chỉ còn lại một phần ở phần cong gần B, còn thủy ngân trong ống MN sẽ dâng lên với độ cao giống như khi đo áp suất khí quyển. Ở đây, cột thủy ngân dâng lên trong MN để cân bằng với áp suất khí quyển tác dụng lên thủy ngân trong chậu (do tại M là chân không). Mặc khác, ở cả A và B ta đều có chân không nên không có hiện tượng cột thủy ngân dâng lên ở đầu A. Nếu ta bỏ ngón tay khỏi B để hở lỗ ra, không khí sẽ đi vào B và thủy ngân ở phần cong sẽ dâng lên để cân bằng với áp suất khí quyển.



Hình 11. Thí nghiệm về chân không trong chân không của Pascal

Sự thay đổi của áp suất khí quyển cũng được Pascal sử dụng để tính độ cao của nước được bơm lên ở các độ cao khác nhau. Những thí nghiệm cũng như lập luận của ông cho thấy rằng áp suất khí quyển là nguyên nhân gây ra tất cả các hiện tượng mà trước đó được cho là do tự nhiên "sợ chân không" (trước Pascal, người ta cho rằng các hiện tượng như sự dâng lên của cột thủy ngân trong áp kế xảy ra do bản chất tự nhiên muốn tránh sự tồn tại của chân không và tìm cách triệt tiêu nó). Vấn đề đã được Pascal làm sáng tỏ bằng cách liên kết các thí nghiệm và hiện tượng đa dạng liên quan đến chất lỏng và chất khí với các nguyên lý tĩnh học để đưa ra lý thuyết mới dựa trên cơ sở thực nghiệm.

3. Kết luận

Trong mỗi lĩnh vực mà Pascal tham gia vào, ông đều để lại những dấu ấn quan trọng. Với vấn đề áp suất cũng vậy, những lý thuyết và thí nghiệm của Pascal đã thể hiện rõ sức mạnh của khoa học trong việc giúp con người tìm hiểu và giải thích các hiện tượng tự nhiên. Nguyên lý Pascal cũng có nhiều ứng dụng trong thực tiễn mà chúng ta sẽ tìm hiểu trong bài viết sau về chủ đề này trên Pi.

Phụ lục: Mối liên hệ giữa áp suất chất lỏng và lực đẩy Archimedes theo giải tích

Xét một vật chiếm thể tích V chìm trong chất lỏng và $S = \partial V$ là bề mặt ngoài của nó. Tại mỗi vị trí có độ sâu z ($z = 0$ tại mặt chất lỏng và có giá trị âm trong lòng chất lỏng), áp suất tác dụng lên bề mặt vật là:

$$p = -\rho g z + p_0$$

với ρ là mật độ của chất lỏng, p_0 là áp suất khí quyển.

Tại mỗi phần bề mặt dS của vật với vector pháp tuyến đơn vị $\boldsymbol{n}$, lực tác dụng lên phần bề mặt này là $-pdS\boldsymbol{n}$ (lực do áp suất chất lỏng gây ra sẽ hướng vào phía trong vật thay vì hướng ra ngoài như vector pháp tuyến nên ta phải có dấu âm). Tổng hợp lực do chất lỏng tác dụng lên vật sẽ được biểu diễn theo dạng:

$$\boldsymbol{F} = \oiint_S (-p\boldsymbol{n})dS.$$

Chú ý rằng ở đây $-p \cdot \boldsymbol{n}$ là một vector nên thực chất ta có ba tích phân mặt cho ba thành phần của $\boldsymbol{F}$ trong ba chiều không gian.

Thành phần hợp lực theo trục z là:

$$F_z = \oiint_S (-pn_z) \cdot dS$$

với n_z là thành phần của $\boldsymbol{n}$ dọc theo trục z.

Xét trường vector $\boldsymbol{Q} = -p \cdot \boldsymbol{k}$ với $\boldsymbol{k}$ là vector đơn vị của trục z, ta có:

$$\oiint_S (\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{n}) \cdot dS = \oiint_S (-pn_z) \cdot dS.$$

Mặt khác, theo định lý Gauss:

$$\oiint_S (\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{n}) \cdot dS = \iiint_V div(\boldsymbol{Q})dV$$

$$= \iiint_V -\frac{\partial p}{\partial z} dV = \iiint_V \rho g dV = \rho g V.$$

Giá trị này bằng với trọng lượng của khối chất lỏng mà vật chiếm chỗ và cũng chính là biểu thức của lực đẩy Archimedes khi vật nằm trong lòng chất lỏng. Áp dụng cách làm tương tự như trên cho hai trục x và y được $F_x = 0$, $F_y = 0$. Lực đẩy Archimedes sẽ luôn có chiều thẳng đứng và hướng lên trên.

Tài liệu tham khảo

[1] Anselmo, D H A L, et al. “Pascal’s Principle Revisited: A Critical Review of Physics Undergraduate Textbooks.” *European Journal of Physics*, vol. 41, no. 6, 16 Oct. 2020, p. 063001, https://doi.org/10.1088/1361-6404/aba646.

[2] Arnold, Keith. “Pascal’s Great Experiment.” *Dialogue*, vol. 28, no. 3, 1989, pp. 401 – 416, https://doi.org/10.1017/s0012217300015936. Accessed 18 Dec. 2019.

[3] Chalmers, Alan F. “Qualitative Novelty in Seventeenth–Century Science: Hydrostatics from Stevin to Pascal.” *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, vol. 51, June 2015, pp. 1 – 10, https://doi.org/10.1016/j.shpsa.2015.01.001. Accessed 9 Nov. 2022.

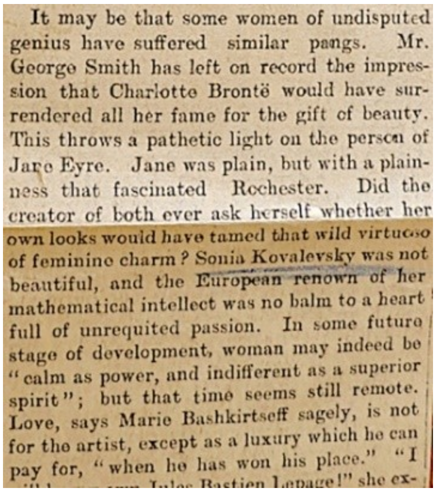
[4] Hammond, Nicholas. *The Cambridge Companion to Pascal*. Cambridge, Cambridge University Press, 2003.

SOFIA KOVALEVSKAYA - MỘT NHÀ THƠ TRONG TÂM HỒN*

(Người dịch: Phạm Triều Dương)

Lời người dịch: *Nhắc tới nhà toán học nữ Kovalevskaya, người ta hay miêu tả một cuộc đời khổ đau và bất hạnh, bên cạnh những vinh quang khoa học. Vào năm 1976, cuốn tiểu thuyết về Kovalevskaya – Một số phận vinh quang và cay đắng của tác giả Lyubov Vorolsova cũng đã được giới thiệu với các độc giả ở Việt Nam. Tuy nhiên, có phải thực sự số phận của Kovalevskaya chỉ toàn vị đắng mà không có những tia nắng ấm áp? Cũng cần nhắc lại rằng, bên cạnh những thành tích vẻ vang trong khoa học, Sofia Kovalevskaya còn là một nhà văn và nhà biên kịch. Trong những năm tháng cuối đời bà quay lại với công việc viết văn từng say mê từ thời niên thiếu thông qua viết những dòng hồi ức, soạn kịch bản. Tại Stockholm, có một thời gian Sofia sống tại nhà của Mittag–Leffler và có một tình bạn gắn bó với em gái của nhà toán học là Anna Leffler. Chính Anna đã động viên Sofia trau dồi thêm kỹ năng viết văn, và họ đã cùng sáng tác một số vở kịch, trong đó có một vở mang tên Đấu tranh với Hạnh phúc. Sofia cũng đã viết các cuốn hồi ký về tuổi thơ của mình ở nước Nga và một cuốn tiểu thuyết bán tự truyện mang tên Cô gái Hư vô. Trong một cuốn hồi ký được xuất bản sau khi bà qua đời, Kovalevskaya viết "Không thể là một nhà toán học mà không phải là một nhà thơ trong tâm hồn". Trong bài viết này, tác giả Eva Kaufholz–Soldat giúp chúng ta phần nào hiểu rõ hơn về nguồn gốc ra đời những chủ điểm vốn được mặc định gán cho cuộc đời của nhà nữ toán học tài ba, bao gồm cả sự bất hạnh và vẻ ngoài không hấp dẫn của Sofia Kovalevskaya.*

Một bài báo cũ trích từ The Daily Chronicle (London), ngày 6 tháng 5 năm 1901, cho thấy một bức tranh phản ánh nguồn gốc lịch sử của các định kiến xã hội về những phụ nữ nổi tiếng trong các lĩnh vực sáng tạo do nam giới thống trị.



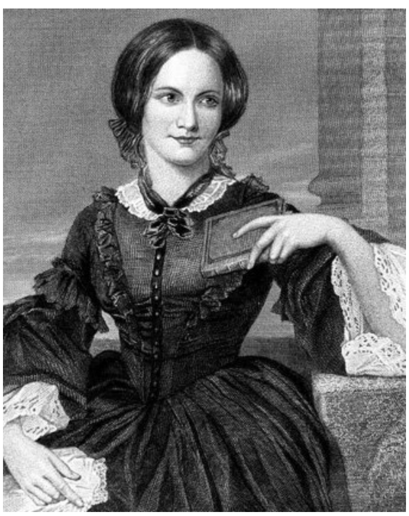
It may be that some women of undisputed genius have suffered similar pangs. Mr. George Smith has left on record the impression that Charlotte Brontë would have surrendered all her fame for the gift of beauty. This throws a pathetic light on the person of Jane Eyre. Jane was plain, but with a plainness that fascinated Rochester. Did the creator of both ever ask herself whether her own looks would have tamed that wild virtuoso of feminine charm? Sonia Kovalevsky was not beautiful, and the European renown of her mathematical intellect was no balm to a heart full of unrequited passion. In some future stage of development, woman may indeed be "calm as power, and indifferent as a superior spirit"; but that time seems still remote. Love, says Marie Bashkirtseff sagely, is not for the artist, except as a luxury which he can pay for, "when he has won his place." "I ... Jules Bastien Lepage!" she ex-

"Có thể một số phụ nữ với tài năng không thể tranh cãi đã phải chịu đựng những nỗi đau tương tự. Ngài George Smith đã để lại trong

---

** Bài viết của Eva Kaufholz–Soldat về những điểm kết nối một nhà toán học, một hoạ sĩ và một nhà văn.*

ghi chép một ấn tượng rằng Charlotte Brontë sẽ từ bỏ tất cả danh tiếng của mình để có được món quà sắc đẹp. Điều này đã phủ một ánh sáng đáng thương hại lên con người của Jane Eyre. Jane giản dị, nhưng với vẻ giản dị khiến Rochester mê mẩn. Người tạo ra cả hai nhân vật có bao giờ tự hỏi mình liệu vẻ ngoài của chính cô ta có thể chế ngự được đức hạnh hoang dã đó của sự quyến rũ nữ tính hay không? Sonia Kovalevsky [Sofia Kovalevskaya] không xinh đẹp, và sự nổi tiếng ở châu Âu về trí tuệ toán học của cô không phải là liều thuốc bổ cho một trái tim đầy niềm đam mê không được đáp lại. Trong một giai đoạn phát triển nào đó trong tương lai, những người phụ nữ thực sự có thể "bình tĩnh như một quyền lực, và thờ ơ như một tinh thần cao thượng"; nhưng thời điểm đó dường như vẫn còn xa vời. Marie Bashkirtseff nói một cách khôn ngoan rằng tình yêu không dành cho người nghệ sĩ, ngoại trừ như một thứ xa xỉ mà anh ta có thể trả tiền để có được, "khi anh ta đã giành được vị trí của mình"."



Charlotte Brontë.

Tên của ba người phụ nữ được trích dẫn là: Marie Bashkirtseff (1858 – 1884), người đạt tới danh vọng của một họa sĩ sau khi được đào tạo tại Académie Julian ở Paris; Charlotte Brontë (1816 – 1855), tác giả nổi tiếng với Jane Eyre, và Sofia Kovalevskaya (1850 – 1891), một trong những nhà toán học lừng danh. Đây là những người phụ nữ phi thường, có vị trí trong thế giới nghệ thuật hoặc toán học, những lĩnh vực được coi là do nam giới thống trị vào đầu thế kỷ 19 và 20. Ông George Smith được nhắc tới là nhà biên tập khắt khe của nữ văn sỹ Brontë.

Marie Bashkirtseff.

Tất cả chúng ta chắc cũng đã biết tới một loại ấn phẩm có thể được gọi là "bảng liệt kê bách khoa toàn thư", dạng ấn phẩm liệt kê tên của những người phụ nữ xuất sắc trong khoa học hoặc nghệ thuật nhằm vào nhóm độc giả trẻ tuổi, thông qua tường thuật về những cuộc đời phi thường này để khuyến khích độc giả, đặc biệt là các em gái, theo đuổi sự nghiệp trong các ngành khoa học và công nghệ. Các ấn phẩm dạng bách khoa như vậy cũng được xuất bản thường xuyên vào đầu thế kỷ 20, đặc biệt là trên báo chí hoặc trong các công trình thảo luận về phụ nữ và vai trò của họ trong xã hội. Bài báo nổi bật được trích dẫn ở trên đây là một ví dụ. Nhưng giọng văn của đoạn báo được trình bày ở đây dường như khó hòa hợp với các câu chuyện tiểu sử về những người phụ nữ phi thường làm hình mẫu cho các cô gái trẻ. Kovalevskaya, Bashkirtseff và Brontë trên thực tế không hề được miêu tả theo cách tích cực trong đoạn trích này. Nó nói nhiều hơn về sự đau khổ của họ ("cơn đau"), nỗi đau của họ (ở đây theo nghĩa tâm lý), trước khi thảo luận chi tiết về vóc dáng bề ngoài có vẻ kém hấp dẫn của họ.

Sofia Kovalevskaya.

Đoạn trích trên nhằm cảnh báo các cô gái trẻ không nên đi theo vết chân của Kovalevskaya, Bashkirtseff và Brontë, ba người phụ nữ thường được nhắc đến nhiều nhất trong các cuộc tranh luận với những dụng ý trái ngược nhau. Những người phụ nữ này thực sự được liên kết với nhau bởi nhiều thứ khác ngoài nghề nghiệp vốn đặc biệt của họ vào thời điểm đó. Vào thời điểm bài báo năm 1901 xuất hiện, cả ba người đều đã qua đời khi còn khá trẻ. Brontë qua đời năm 1855 ở tuổi 38, có thể là do biến chứng khi mang thai, Bashkirtseff qua đời vì bệnh lao năm 1884 ở tuổi 25, trong khi Kovalevskaya chết vì nhiễm trùng phổi sau sinh nhật lần thứ 41 vào năm 1891. Một số bài báo ra mắt sau khi họ qua đời đã viết về mỗi người trong số họ, và khác xa với việc mô tả họ là những người phụ nữ tiên phong và thành đạt, các bài báo đó lại trình bày họ như những minh chứng áp đặt chỉ ra sự thất bại không thể tránh khỏi của những người phụ nữ mưu cầu tới một sự nghiệp khác ngoài vai trò làm vợ và làm mẹ.

"*Tình yêu viên mãn là mục tiêu thực sự trong cuộc đời người phụ nữ*". Câu nói này có nguồn gốc từ cuốn tiểu sử về Kovalevskaya của tác giả Anna Charlotte Leffler (1849 – 1892), bà là em gái của Gösta Mittag–Leffler và vừa là bạn thân của nhà nữ toán học, nhưng cũng là một tác giả nổi tiếng trên văn đàn quốc tế. Như phụ đề của cuốn sách – *Những gì tôi học được với cô ấy và những gì cô ấy nói với tôi về bản thân* – đã chỉ ra, bài thuật được viết vào năm 1892 của Anna Leffler dựa trên những kinh nghiệm được chia sẻ, những câu chuyện do Kovalevskaya kể cũng như những đoạn trích từ thư từ được trích dẫn trực tiếp. Tất nhiên, điều này không có nghĩa đây là một bài thuật khách quan. Bản thân Leffler đã mô tả cuốn tiểu sử của mình như một "bài thơ". Ta không khó để nhận ra rằng, Anna, một mặt đã sử dụng những giai thoại và trích dẫn có chủ đích, nhưng mặt khác cũng đưa vào đánh giá cá nhân thường được bộc lộ một cách cởi mở của chính bà, đã hoàn toàn không muốn viết ra một cuốn chân dung của một người phụ nữ chiến thắng trong một lĩnh vực dành cho nam giới. Dựa trên kinh nghiệm của bản thân, Leffler giải thích rằng tình yêu viên mãn là mục tiêu tối cao trong cuộc sống của phụ nữ và chẩn đoán rằng đây chính là điều mà Kovalevskaya chưa bao giờ đạt được, mặc dù đó là mong muốn lớn nhất của cô. Vì vậy, Leffler trình bày cuộc sống của người bạn thân của mình như là một người phụ nữ chịu thất bại, bị giằng xé giữa khát khao của trái tim và nghề nghiệp lựa chọn của mình, và vì lý do này mà cuối cùng cô ấy đã chết.

Chính tại đây đã bắt nguồn truyền thuyết về một Kovalevskaya bất hạnh, một mô–típ thậm chí còn trở nên được phổ biến hơn bởi *Cuốn sách về phụ nữ* của Laura Marholm vào năm 1894, một tác phẩm mà thành công của nó có lẽ cũng là do tính chất gây tranh cãi của nó đem tới. Mặc dù chưa bao giờ gặp nhà toán học, Marholm tin chắc rằng bà đã hiểu rõ bản chất của phụ nữ đến mức chỉ có mình mới biết lời giải thích thực sự cho sự bất hạnh của Kovalevskaya. Theo Marholm, chính trí thông minh vượt trội của Kovalevskaya đã ngăn cản cô tìm được một người đàn ông có khả năng trao cho cô tình yêu chân thành mà cô hằng mong ước. Laura Marholm là người chú trọng nhất đến ngoại hình của Kovalevskaya. Ví dụ, theo nhu cầu phân loại rộng rãi vào thời điểm đó, phụ nữ Nga được chia ra thành hai loại. Theo Marholm, một mặt, có những phụ nữ gợi cảm và nữ tính, đó cũng là những người có nhiều phẩm chất lôi cuốn người khác giới. Nhóm còn lại, trong đó Laura liệt kê ra Kovalevskaya, thì hoàn toàn ngược lại. Marholm vẽ nên bức tranh về những người phụ nữ sở hữu những thuộc tính nam giới – những đặc điểm thường được huy động trong lý thuyết về tính cách giới tính: họ rõ ràng, can đảm, mạnh mẽ và "biết lý lẽ". Nhưng điều này cũng được phản ánh trong vẻ ngoài của họ, không được nữ tính cho lắm: "*Có một cái gì đó trung lập về họ; có thể nói là người ta không nhận thức được rằng họ là phụ nữ*" [5][tr. 168]. Nói tóm lại, một quý cô có thể suy nghĩ như đàn ông thì không thể trông giống một phụ nữ.

Sau Marholm, trong một thời gian dài không có ấn phẩm nào xuất hiện trong đó vẻ ngoài của Kovalevskaya được trình bày một cách tích cực. Tuy nhiên, trong khi sự xấu xí được gán cho Brontë (mặc dù thực tế là hầu như không có bức chân dung nào về nữ văn sỹ được kiểm chứng) đã được thảo luận lại nhiều lần trong các tài liệu gần đây [3][tr. 55 – 59], có một bước ngoặt hoàn toàn trong việc đánh giá cao nhà nữ toán học đã diễn ra từ những năm 1930. Nó có lẽ bắt nguồn từ một cáo phó viết vào năm 1935 bởi Hermann Weyl (1885 – 1955) về đồng nghiệp của ông là Emmy Noether (1882 – 1935). Weyl nâng Kovalevskaya lên hàng ngũ hiện thân của nữ tính, cả về hình thức bên ngoài và liên quan đến các thuộc tính tính cách về giới tính vẫn còn thịnh hành lúc đó. Weyl lưu ý rằng Kovalevskaya không chỉ sở hữu "vẻ quyến rũ nữ tính" mà còn có "nhân cách hoàn thiện nhất", "một nhân cách của một người phụ nữ", trong đó bao gồm cả khía cạnh cảm xúc mà Noether còn thiếu: "Với [Kovalevskaya], bạn thấy sự căng thẳng giữa tâm trí sáng tạo của cô ấy, cuộc sống và niềm đam mê của cô ấy, và tinh thần tự chế giễu bản thân một cách mỉa mai trước cuộc xung đột tuyệt vọng của chính cô. Điều này là quá xa vời đối với khả năng của Emmy!" Do đó, Kovalevskaya là một phản đề của Noether, người mà Weyl đã mô tả là trông nam tính. Noether đã được giới thiệu là một nhà toán học giỏi hơn, nhưng Weyl nói về bà đúng như những gì Ellen Key, một nhà sư phạm danh tiếng đã nói về Kovalevskaya khoảng ba mươi năm trước: "Không ai có thể nói rằng Ân Huệ đã đứng gần cái nôi của bà (lúc mới chào đời)" [6][tr. 219]. Chắc chắn không phải ngẫu nhiên mà Eric Temple Bell (1883 – 1960) đã mô tả Kovalevskaya là "xinh đẹp" và nói về một "phụ nữ trẻ rực rỡ" trong tác phẩm có tựa đề hoàn toàn không phù hợp *Những người đàn ông của Toán học* của ông xuất bản hai năm sau đó [1][tr. 424]. Tuy nhiên, thậm chí ngay cả ngày nay, Kovalevskaya không chỉ được mô tả là xinh đẹp mà thậm chí còn được coi là "chắc chắn là nhà toán học xinh đẹp nhất của cả hai giới tính" [2][tr. 78].

Theo cách thể hiện hiện đại, Kovalevskaya không đơn thuần là một hình mẫu. Bà thường được đặt trên bục tượng đài cao vời vợi, không nhất thiết theo một cách có ý thức, và được thể hiện như một nhân vật mang tính biểu tượng, người phải bác bỏ mọi định kiến về các nhà khoa học nữ. Do đó, điều này không chỉ được coi là bằng chứng cho thấy phụ nữ có khả năng đạt được những thành tích cao nhất trong toán học, mà còn chứng minh rằng họ không nhất thiết phải có ngoại hình xấu xí thì mới quan tâm đến nghiên cứu. Kovalevskaya, cũng như Bashkirtseff và Brontë, ngày nay được tôn sùng như những người tiên phong và những nữ anh hùng, là những người phụ nữ mà nhờ những thành tích đặc biệt của họ, đã có thể thành công trong các lĩnh vực hầu như chỉ dành cho nam giới như toán học, hội họa hoặc văn học. Không ai còn có thể nghĩ đến việc quy kết cái chết sớm của họ cho bất cứ điều gì khác ngoài việc chăm sóc y tế không đạt tiêu chuẩn, hoặc coi sự lựa chọn nghề nghiệp của họ là nguồn gốc của một cuộc sống dành cho đam mê bị chối bỏ.

Và cũng do vậy, Bashkirtseff, Brontë và Kovalevskaya đã trở thành những tấm vải vẽ, trên đó các tác giả khác nhau đã phóng chiếu những luận đề tương ứng của họ về vị trí của phụ nữ trong khoa học và nghệ thuật, như đã từng diễn ra hồi đầu thế kỷ 20. Mặc dù, tất nhiên, không nên quên rằng ngày nay chắc chắn có nhiều bức chân dung đa dạng hơn về ba người phụ nữ phi thường này, thì cũng có nhiều người theo đuổi một mục đích được vạch ra rõ ràng, điều này đặc biệt đúng đối với các dạng ấn phẩm liệt kê bách khoa toàn thư hiện đại đã được đề cập ở trên. Mục đích đằng sau hình thức phóng chiếu thể hiện này, cụ thể là trình bày những tiểu sử chi tiết hơn của những người phụ nữ phi thường làm hình mẫu cho các học sinh nữ noi theo, chắc chắn là đáng khen ngợi từ quan điểm hiện đại. Nhưng có một số yếu tố chỉ ra rằng hành động này có thể có phản tác dụng:

Huyền thoại và lối hùng biện làm suy yếu khoa học và, theo tôi, giúp cho nó xa lánh những người trẻ tuổi (và đặc biệt là các học sinh nữ): chúng tạo ra niềm tin ít nhiều có ý thức rằng: phụ nữ hoặc các em gái phải đặc biệt tốt và anh hùng mới có thể cống hiến hết mình cho khoa học hoặc toán học. (xem [4][tr. 309])

Điều này không có nghĩa là kể từ bây giờ những người phụ nữ trẻ nên tránh xa những cuốn tiểu sử kiểu tụng ca như vậy. Tuy nhiên, cần phải kết hợp cách tiếp cận này với một cuộc thảo luận về những định kiến mới đã nảy sinh, đồng thời trình bày các mô hình thực tế hơn, để các phụ nữ trẻ thấy được những điều kiện tiên quyết thực sự và các cơ hội nghề nghiệp khác nhau trong toán học là gì, và do đó có được sự nhiệt tình về môn học này.

Về tác giả: Eva Kaufholz–Soldat học Toán và Lịch sử Khoa học tại Đại học Hamburg. Sau khi lấy được bằng tiến sĩ từ Đại học Johannes Gutenberg Mainz, cô hiện vừa là giám đốc Trung tâm viết về Khoa học Tự nhiên và Toán học, vừa là nhà nghiên cứu, tập trung vào những người phụ nữ trong toán học vào thời điểm chuyển giao sang thế kỷ 20, tại Đại học Goethe, Frankfurt. Bài báo này đã được đăng bằng tiếng Pháp trên tạp chí Images des Mathématiques với nhan đề "Le Thème de la Triste et Laide Kovalevskaya...".

Tài liệu tham khảo

[1] Bell, Eric Temple (1937). Men of Mathematics. The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré, New York: Simon und Schuster

[2] Derman, Emanuel (2004). My life as a Quant. Reflections on Physics and Finance, Hoboken: Wiley.

[3] Franklin, Sophie (2016). Charlotte Brontë Revisited. A View from the Twenty-First Century, Glasgow: Saraband.

[4] Govoni, Paola (2020), "Hearsay, Not-So-Big Data and Choice: Understanding Science and Maths Through the Lives of Men Who Supported Women", in Eva Kaufholz–Soldat and Nicola Oswald (eds), Against All Odds. Women in Mathematics (Europe, 19th and 20th Centuries) , Springer Verlag.

[5] Marholm, Laura (1895). Das Buch der Frauen. Zeitpsychologische Porträts, Paris u.a.: Albert Langen.

[6] Weyl, Hermann (1935). "Emmy Noether", Scripta Mathematica, vol. 3, p. 201 – 220.

QUÂN VÀ THẾ

TRẦN VĂN DŨNG[1]

Quân và *Thế* là 2 yếu tố quan trọng không thể tách rời trong mỗi cuộc cờ. Khi nhắc đến *Quân* là nhắc đến sức mạnh về vật chất: bên nào số lượng quân hơn, binh chủng đa dạng hơn thì hiển nhiên bên đó đang chiếm ưu thế. Trong khi đó, *Thế* là một khái niệm chung chung, có vẻ khá mơ hồ, bao gồm nhiều yếu tố như: lộ quân thông thoáng, các quân lực trái – phải, tiền – hậu phối hợp hài hòa, đội hình ưu việt, nắm quyền chủ động… Như vậy, một cách đầy đủ và khái quát nhất, *Thế* sẽ bao gồm cả vị trí lẫn mối liên quan của nó với các quân khác (kể cả quân đối phương). Chúng ta cùng nhau xét lần lượt các vấn đề then chốt:

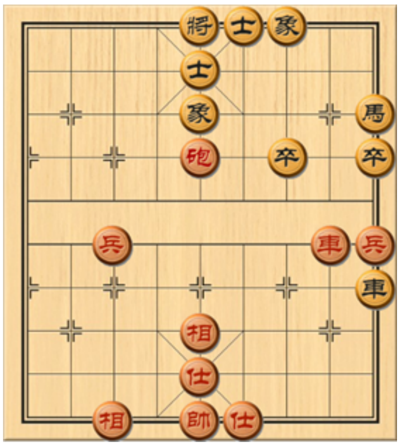
Về vị trí: Trên bàn cờ luôn luôn tồn tại những vị trí tốt và vị trí xấu. Nếu có được vị trí tốt thì sức mạnh cũng như tính chiến đấu của các quân sẽ được phát huy hiệu quả; ngược lại, chỗ đứng chưa tốt thì những yếu tố đó sẽ bị hạn chế. Những quân chủ lực dù cơ động, linh hoạt nhưng đứng ở chỗ tối, trong góc hoặc đường biên thì chẳng thể gây nguy hiểm lên trận địa đối phương mà còn có thể trở thành điểm công kích cho đối thủ: Xe, Pháo nằm ở các lộ 4, 5, 6 sẽ có tính uy hiếp cao; Quân Mã nằm ở giữa bàn cờ rõ ràng linh hoạt hơn rất nhiều khi khống chế được 8 điểm. Do vậy, khởi đầu mỗi ván đấu, đôi bên cần nhanh chóng đưa các quân chủ lực đến vị trí xung yếu nhằm kiểm soát thế trận, hạn chế đưa quân vào những vị trí yếu đồng thời cũng tìm cách phong tỏa tối đa sức mạnh cũng như tầm hoạt động của quân đối phương.

Về sự phối hợp các quân: Là mối liên quan giữa các quân với nhau (Liệu chúng có liên kết phối hợp, hỗ trợ nhau để trở nên vững chắc hơn hơn, hay cản trở, hạn chế khả năng hoạt động của nhau ?). Sau giai đoạn khai cuộc và bước vào tiền trung cuộc là thời điểm đôi bên gần như đã bố trí xong đội hình, các quân cùng nhau phối hợp để trở thành một khối thống nhất, có mục tiêu chung. Sức mạnh của khối này có thể sẽ tăng hay giảm tùy theo diễn biến thực tế của mỗi ván đấu.

Về mối liên quan với quân đối phương: Là sự xung khắc, mâu thuẫn để nhằm hạn chế sức mạnh, tầm hoạt động của các quân giữa 2 bên với nhau. Nếu mâu thuẫn lên đến đỉnh điểm, sẽ xảy ra các tình huống đổi quân, tiêu diệt lẫn nhau. Điều này cũng dẫn đến quy luật: các quân bên này phát huy càng cao sức mạnh của mình thì càng hạn chế sức mạnh của các quân phía đối thủ và ngược lại. Tất nhiên, trong trường hợp hai bên đều có những nước đi chính xác thì thế cờ sẽ dần đi vào trạng thái cân bằng. Chung quy lại, mối liên quan này thực chất là một cuộc đấu tranh quyết liệt để giành giật không gian bàn cờ, nhằm chiếm quyền chủ động, mục đích

[1] *Tp. Hồ Chí Minh.*

cuối cùng là lời quân, lời chất, để rồi giành lấy thắng lợi. Để hiểu hơn những vấn đề này, tác giả sẽ gửi tới bạn đọc của Pi vài ví dụ tiêu biểu nói về những điểm yếu thường gặp và cách khai thác để có thể áp dụng trong những ván đấu thực chiến:



Hình 1.

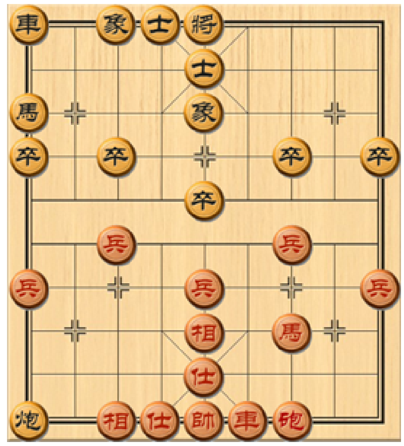
1. Hình 1, Quân lực 2 bên hoàn toàn tương đồng, cục diện có vẻ bình ổn. Tuy nhiên, khi xét kỹ thì sẽ thấy, bên Đen lộ ra một điểm yếu chết người đó là trục lộ 4 (trục lộ 6 của Đỏ). Đỏ được quyền đi trước và chớp lấy thời cơ như sau:

1) X2 – 6 X9 – 2 **2)** Tg5 – 6 X2/6 (∗) **3)** C7.1 M9/8 **4)** P5/1 M8.7 (∗∗) **5)** X6.2 C7.1 **6)** C7.1 M7.6 **7)** C7.1 M6.5 **8)** X4/3 M5.7 **9)** C7.1 M7/6 **10)** X4.3 (∗∗∗) (Đỏ chiếm ưu lớn).

(∗): *Nhận thấy yếu điểm, Đỏ nhanh chóng bình Xe rồi bình Tướng nhằm tạo sát cục, buộc Đen phải đem xe về tuyến đáy phòng thủ.*

(∗∗): *Đỏ tiếp tục đem chốt sang sông trợ chiến. Vì Xe không thể di chuyển nên lúc này phương án duy nhất Đen có thể chơi là điều Mã biên để đuổi Pháo của Đỏ.*

(∗∗∗): *Những diễn biến vừa rồi, Đỏ liên tục đẩy Chốt tiến sát cửu cung của Đen. Mặc dù Đen cũng rất nỗ lực trong việc đưa Mã lên quấy rối nhưng Đỏ có những nước điều Xe hóa giải cùng đơn giản. Nước tiếp theo Đỏ có nước C7.6 dọa sát, dù cho Đen nhìn thấy nhưng cũng rất khó để chống đỡ, chiến thắng dành cho Đỏ chỉ còn là vấn đề về thời gian.*



Hình 2.

2. Hình 2, quân lực và thể loại binh chủng của đôi bên là ngang nhau, Đen đang có Pháo cắm đáy ở phía trên nhưng chưa thể phối hợp, liên kết với Xe, Mã ở hậu phương. Tuy Đỏ chưa có quân nào xâm nhập phòng tuyến của địch nhưng đang có cơ hội phối hợp tác chiến, nhận thấy cánh trái của Đen đang hoàn toàn trống trải, Đỏ đi trước và ra đòn như sau:

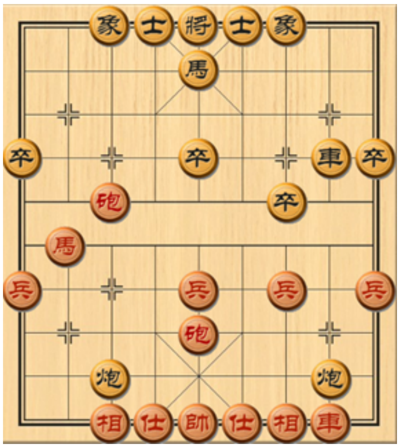
1) P3 – 2 X1 – 2 **2)** P2.9 X2.2 **3)** P2 – 1 T5.3 **4)** X4 – 2 X2 – 6 **5)** X2.9 S5/6 (∗) **6)** M3.2 T3/5 **7)** M2.3 X6 – 7 **8)** M3/5 (∗∗) S4.5 **9)** Tg5 – 4 Tg5 – 4 **10)** X2 – 4 Tg4.1 **11)** X4 – 7 X7/2 (∗∗∗) **12)** X7/2 X7 – 9 **13)** X7 – 9 (∗∗∗∗) (1 – 0)

(∗): *Nhận thấy tuyến đáy của Đen là điểm có thể công kích, Đỏ ngay lập tức điều Pháo và Xe uy hiếp, sẵn sàng chờ cơ hội để chiếu rút. Ở chiều hướng ngược lại, Đen cũng nhanh chóng đưa Xe ra nhằm chiếm lấy trục lộ quan trọng.*

(∗∗): *Chỉ với Xe và Pháo chưa thể tạo ra sát cục, Đỏ tiếp tục đem Mã lên dồn lực tấn công. Bộ ba Xe Pháo Mã của Đen nằm tản mác, không thể liên kết phòng thủ, Đen ở "tình thế ngàn cân treo sợi tóc".*

(∗∗∗): *Đỏ tiếp tục đem Tướng ra hỗ trợ dọa sát, giúp chiến Xe thoải mái càn quét tuyến đáy* *của Đen, đặt nền tảng cho chiến thắng.*

(∗∗∗∗): *Đen cố gắng thoái Xe mời đổi nhằm giảm bớt áp lực nhưng vẫn không thể thay đổi được cục diện. Sau khi ăn Mã, Đỏ chuẩn bị có những đòn phối hợp Xe Mã tạo sát, Đen rất khó chống đỡ.*



Hình 3.

3. Hình 3, quân lực đôi bên khá đồng đều, Xe Đỏ đang bị phong tỏa, chốt đầu của Đen đang được giữ chặt. Điểm yếu duy nhất của Đen là Mã nhập cung, nếu tiếp theo Đen có thể tung Mã lên tham chiến thì chắc chắn Đỏ sẽ khó lòng chống đỡ. Tuy nhiên, Đỏ được quyền đi trước và có những nước đi bất ngờ xoay chuyển tình thế:

1) X2.1 X8.5 **2)** P5.4 T7.5 (∗) **3)** M8.6 X8/6 (∗∗) **4)** P7 – 3 X8 – 7 **5)** M6.8 (∗∗∗) P3 – 4 **6)** M8.6 (1 – 0)

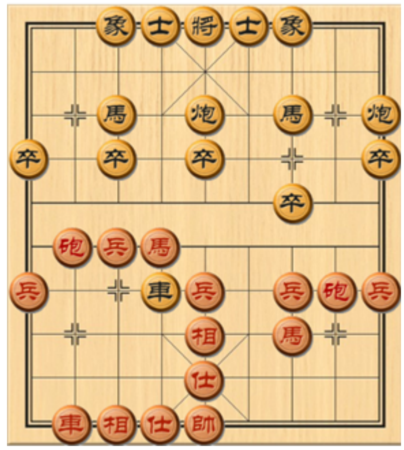
(∗): *Nhận thấy điểm yếu Mã nhập cung của Đen, Đỏ tung đòn phế Xe một cách dứt khoát và uy lực. Đen buộc phải dùng Xe bắt lại Xe Đỏ và hệ quả là Chốt đầu không còn quân bảo vệ, Đỏ liền tấn Pháo chiếu Tướng uy hiếp. Lúc này Đen không thể di chuyển Mã vì Đỏ sẽ đi P7 – 5 sát cục Pháo trùng ngay lập tức.*

(∗∗): *Đỏ tiếp tục đưa Mã xâm nhập, gây áp lực lớn lên trận địa đối phương, Đen buộc phải đưa xe về phòng thủ một cách bị động.*

(∗∗∗): *Đỏ lần lượt điều Pháo rồi lại tung Mã liên tục uy hiếp, dọa chiếu bí. Điểm yếu Mã nhập cung với Pháo đầu đóng chặt là quá lớn, Đen mặc dù nhìn thấy trước nhưng vô phương chống đỡ. Đỏ giành chiến thắng.*

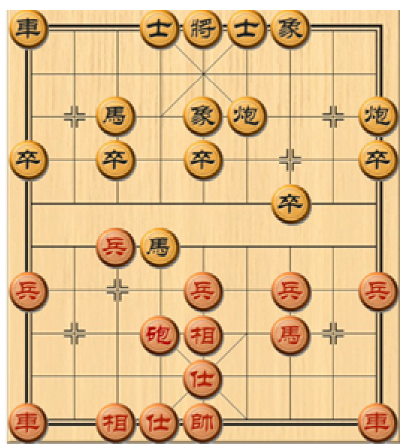
Chú thích: C: Chốt, X: Xe, M: Mã, P: Pháo, Tg: Tướng, S: Sĩ, T: Tượng.

Câu đố kỳ này: Đỏ được quyền đi trước, làm thế nào để khai thác những điểm yếu của đối phương để giành lấy ưu thế?



Hình 4.

Đáp án tham khảo: **1)** C3.1 X4.2 **2)** X8.3 P5 – 6 **3)** P2 – 4 M7.6 **4)** P4.4 M6.4 **5)** P4/6 (Đen mất xe, Đỏ chiếm ưu thế lớn).



Hình 5.

Đáp án tham khảo: **1)** X1 – 4 S4.5 **2)** X4.4 M4.3 **3)** X9.2 M3.2 **4)** X9 – 8 X1 – 2 **5)** X8.7 M3/2 **6)** C7.1 Ms.1 **7)** X4 – 7 C3.1 **8)** X7/3 C1.1 **9)** X7 – 8 (Đen chết Mã, Đỏ ưu thế lớn).