BÀI TOÁN CÂY KIM CỦA BUFFON VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

NGUYỄN HOÀNG VŨ[1]

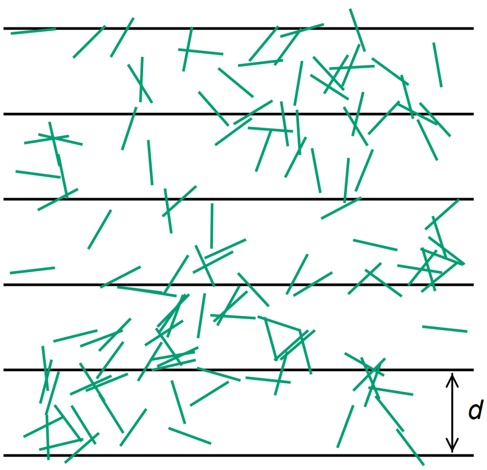
Bài toán cây kim của Buffon vẫn luôn xuất hiện trong sách giáo khoa toán dưới dạng một phương pháp để tính số π. Trong bài này, chúng ta hãy cũng Pi tìm hiểu chi tiết về bài toán này cũng như một số ứng dụng thú vị của nó trong thực tiễn.

1. Bài toán cây kim của Buffon

Georges–Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707 – 1788).

Nhà toán học Pháp thế kỉ 18, Georges Louis Leclerc, được phong Bá tước tại vùng có một ngôi làng tên Buffon nên ông còn có danh hiệu Comte de Buffon (Bá tước Buffon). Do đó các tài liệu thường gọi tắt là Buffon. Bài toán nổi tiếng mang tên ông có nội dung như sau:

"Trên một tờ giấy với các đường kẻ cách đều nhau khoảng cách d, thả ngẫu nhiên một cây kim chiều dài l $(d > l)$, hãy tìm xác suất để cây kim cắt một đường nằm ngang trên trang giấy".



Hình 1. Minh họa bài toán cây kim của Buffon.

Chúng ta hãy xét một lời giải không sử dụng tích phân được E. Barbier đưa ra năm 1860. Do $l < d$ nên chỉ có hai trường hợp xảy ra: cây kim cắt một đường kẻ và cây kim không đè lên đường kẻ nào; không tồn tại trường hợp cây kim cắt nhiều hơn một đường kẻ.

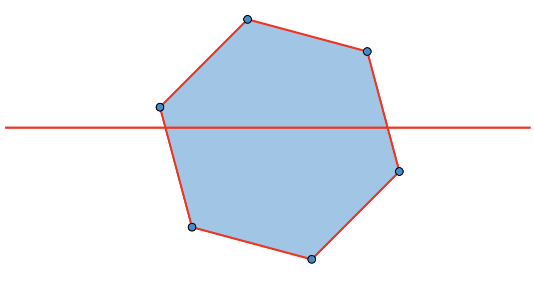
[1] *Viện Sinh thái và Môi trường Đông Dương.*

Gọi $P(l)$ là xác suất để cây kim có độ dài l cắt một đường kẻ khi được thả. Lấy một điểm bất kỳ trên cây kim chia nó thành hai đoạn thẳng độ dài l_1 và l_2. Ta có:

$$P(l) = P(l_1) + P(l_2).$$

Quan hệ trên có thể được mở rộng ra thành dạng $P(l) = n \cdot P(\frac{l}{n})$. Tức là xác suất để một cây kim cắt đường kẻ khi được thả sẽ bằng n lần xác suất này của cây kim có độ dài bằng $\frac{1}{n}$ lần độ dài cây kim ban đầu.

Do đó, $P(l) = c \cdot l$ với c là một hằng số, $c = P(1)$ (khi $l = 1$ và $d > 1$).



Hình 2. Thả một đa giác cạnh l lên tờ giấy với các đường kẻ ngang cách đều nhau.

Ta hãy tiếp tục xét một đa giác đều N cạnh có độ dài mỗi cạnh bằng l (Hình 2). Ta đã biết ở trên rằng xác suất để mỗi cạnh của đa giác cắt một đường kẻ là $P(l)$. Đây cũng chính là giá trị kỳ vọng của số giao điểm của một cạnh với các đường kẻ, vì số giao điểm nói chung chỉ có thể là 0 hoặc 1 tương ứng với không cắt và cắt. Theo tính chất cộng tính của kỳ vọng, giá trị kỳ vọng của số giao điểm của đa giác với các đường kẻ khi thả lên tờ giấy là:

$$\begin{aligned} E &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} P(l) = N \cdot P(l) \\ &= N \cdot c \cdot l = c \cdot L, \end{aligned} \qquad (1)$$

với $L = N \cdot l$ là chu vi của đa giác đều.

Giá trị kỳ vọng

Trong một thí nghiệm ngẫu nhiên, nếu kết quả có giá trị x_i có xác suất xảy ra là p_i thì giá trị kỳ vọng của kết quả thu được được tính theo công thức:

$$E = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n.$$

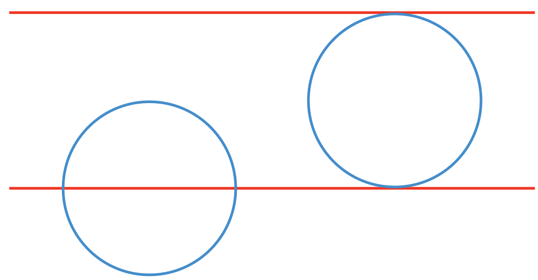
Ví dụ, với thí nghiệm gieo con xúc xắc, giá trị kỳ vọng của số chấm thu được là:

$$E = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \cdots + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3,5.$$

Chú ý rằng giá trị kỳ vọng có thể không trùng với một trong các giá trị có thể xảy ra. Theo định luật số lớn trong xác suất, với số lần thực hiện thí nghiệm càng lớn thì giá trị trung bình của các kết quả sẽ càng đến gần với giá trị kỳ vọng.

Mặt khác, nếu giữ chu vi L của đa giác không đổi, khi $N \to \infty$, đa giác của ta sẽ trở thành một đường tròn có chu vi L và bán kính $\frac{L}{2\pi}$.

Để tính hệ số c, ta xét một trường hợp đặc biệt, khi đường tròn có đường kính đúng bằng khoảng cách d giữa các dòng kẻ. Khi đó, ta có $L = \pi d$.



Hình 3. Đường tròn có đường kính d sẽ luôn cắt một đường kẻ tại hai điểm hoặc tiếp xúc hai đường kẻ.

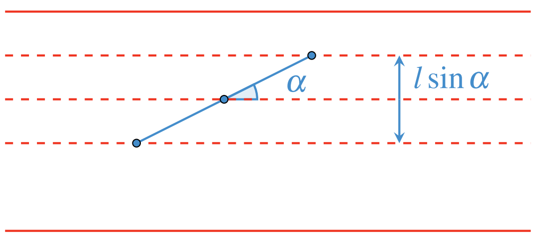
Đường tròn có đường kính d sẽ luôn cắt một đường kẻ tại 2 giao điểm hoặc tiếp xúc với 2 đường kẻ liên tiếp, do đó với đường tròn này $E = 2$. Thay vào (1) ta có:

$$2 = c \cdot \pi d$$

hay $c = \frac{2}{\pi d}$.

Vậy xác suất để một cây kim khi thả cắt đường nằm ngang trên giấy là

$$P(l) = \frac{2l}{\pi d}. \qquad (2)$$



Hình 4. Chứng minh công thức (2) sử dụng tích phân.

Ta cũng có thể thu được đáp án này bằng cách sử dụng tích phân. Cụ thể là ta xây dựng một mô hình xác suất cho vị trí rơi của cây kim. Gọi α $(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$ là góc mà cây kim tạo với phương nằm ngang. Hình chiếu của nó theo phương vuông góc với các đường kẻ sẽ có độ dài $l \sin \alpha$, mà khoảng cách giữa hai đường kẻ là d, do đó xác suất để nó cắt một đường kẻ là $\frac{l \sin \alpha}{d}$. Coi phân bố của α là đều trên khoảng $[0, \frac{\pi}{2}]$, ta tính giá trị trung bình bằng cách lấy tích phân trên khoảng này rồi chia cho $\frac{\pi}{2}$ để thu được (2):

$$\begin{aligned} P(l) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l \sin \alpha}{d} d\alpha = \frac{2}{\pi} \frac{l}{d} [-\cos \alpha] |_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{l}{d}. \end{aligned}$$

Với cây kim có độ dài lớn hơn d, xác suất để nó cắt ít nhất một đường kẻ trong khoảng $\left[\arcsin\left(\frac{d}{l}, \frac{\pi}{2}\right)\right]$ sẽ luôn là 1, do đó:

$$\begin{aligned} &P(l) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)} \frac{l \sin \alpha}{d} + \int_{\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\alpha \right) \\ &= 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{d} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}} \right) - \arcsin \frac{d}{l} \right). \qquad (3) \end{aligned}$$

Bài toán này cũng được Laplace mở rộng cho trường hợp lưới trên tờ giấy là lưới chữ nhật và tính xác suất để cây kim không cắt một đường kẻ dọc hay ngang nào.

Cũng chính Laplace đã đề xuất sử dụng thí nghiệm này để tính giá trị của số π. Đây cũng là khía cạnh được biết đến nhiều nhất về bài toán cây kim của Buffon. Thật vậy, nếu trong M lần thả cây kim, ta thu được m lần mà nó cắt một đường kẻ, công thức (2) cho ta:

$$\pi = \frac{2l}{d \cdot \left(\frac{m}{M}\right)},$$

với $\frac{m}{M}$ là xác suất thực nghiệm của sự kiện cây kim cắt một đường kẻ.

Đề xuất này của Laplace rất gần với phương pháp Monte Carlo của hơn một thế kỉ sau. Tuy vậy, về mặt thực tế, nó gặp phải một số vấn đề. Nhiều thí nghiệm được tiến hành và cho kết quả của π không quá chính xác: $3,1596$; $3,1553$; $3,137$.

Năm 1901, Lazzarini công bố giá trị $3,1415929$ cho 3408 lần thả cây kim, một giá trị khá chính xác (so với giá trị đã biết hiện nay, thì chỉ có chữ số cuối là không đúng). Tuy vậy, một số nghiên cứu đã chỉ ra kết quả này hầu như là ngụy tạo. Theo các lí thuyết về ước lượng tham số, để có độ chính xác đến 6 chữ số sau dấu phẩy, cần phải tiến hành thí nghiệm trên $1,3410^{14}$ lần chứ không phải vài nghìn lần. Đồng thời, số liệu của Lazzarini sử dụng phân số $\frac{355}{113}$, một số hữu tỉ được biết là một xấp xỉ tốt cho π.

Ngay cả với máy tính điện tử thì việc ước lượng π bằng cách sử dụng thí nghiệm Buffon cũng không đạt được độ chính xác quá cao do việc làm tròn số trên máy tính. Đồng thời, các chữ số của π cũng có thể được tính toán một cách chính xác hơn bởi các phương pháp khác.

Tuy vậy, bài toán cây kim của Buffon có một ý nghĩa quan trọng trong lịch sử toán học bởi sự liên hệ giữa xác suất và hình học. Đây là một hướng tiếp cận mới khác với hướng tiếp cận xác suất sử dụng tổ hợp như truyền thống.

Bài tập

1. Chứng minh rằng khi cây kim vô cùng dài thì một cách hầu chắc chắn nó sẽ luôn cắt ít nhất một đường kẻ, tức là biểu thức trong (3) có giới hạn là 1 khi $l \to \infty$.

2. Trên tờ giấy với các đường kẻ ngang cách nhau khoảng d, thả ngẫu nhiên một đường tròn với bán kính $r < \frac{d}{2}$. Hãy tính xác suất để đường tròn cắt và không cắt các đường kẻ.

3. Tương tự bài trên nhưng thả một hình vuông có cạnh $a < d$. Hãy tính xác suất để số giao điểm của các cạnh hình vuông với các đường kẻ ngang là:

a) 0 *b*) 1 *c*) 2 *d*) 3 *e*) 4

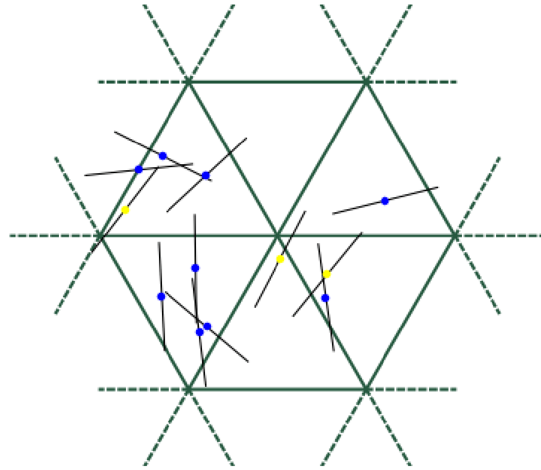
Gợi ý: Xét trường hợp $a < \frac{d}{\sqrt{2}}$ và $a > \frac{d}{\sqrt{2}}$.

4. Trong thí nghiệm Buffon, với cây kim có độ dài $l > d$, hãy chứng minh giá trị kỳ vọng của số giao điểm của cây kim với các đường kẻ ngang là $E = \frac{2l}{\pi d}$. (Gợi ý: Gọi N là số nguyên lớn nhất sao cho $d < \frac{l}{N}$, coi cây kim là hình gồm N đoạn thẳng bằng nhau).

5. Mở rộng của Laplace. Trên một lưới chữ nhật, với mỗi hình chữ nhật có chiều dài a và chiều rộng b, thả ngẫu nhiên một cây kim chiều dài l (biết rằng l nhỏ hơn cả a và b). Hãy tính xác suất để cây kim không chạm bất kỳ cạnh nào của lưới.

6. Lưới Uspensky. Cho một lưới tam giác đều như hình vẽ với d là chiều cao của mỗi tam giác đều. Thả một cây kim chiều dài $l < d$ lên lưới tam giác đều này. Hãy tính xác suất để số giao điểm của cây kim với các đường trong lưới là:

a) 0 *b*) 1 *c*) 2 *d*) 3

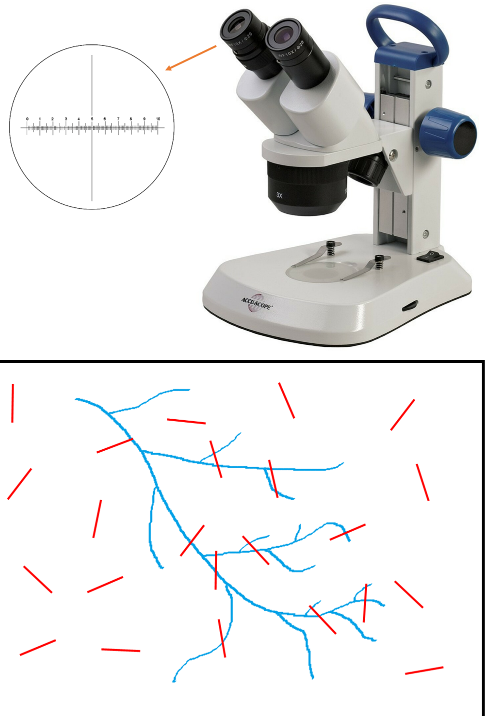


7. Bài toán sợi mì của Buffon. Trên một tờ giấy với các đường kẻ ngang song song cách nhau khoảng d, ném ngẫu nhiên một sợi mì ướt có độ dài l. Chứng minh rằng giá trị kì vọng của số giao điểm của sợi mì với các đường kẻ ngang là $E = \frac{2l}{\pi d}$. Giả sử rằng khi ném sợi mì, chiều dài của nó không đổi nhưng nó có thể uốn thành một đường cong bất kỳ.

2. Đo độ dài bằng phương pháp ngẫu nhiên

Với một số thay đổi, thí nghiệm của Buffon có thể được sử dụng để giải quyết một vấn đề thực tế trong khoa học: đo độ dài của rễ cây (Newman, 1966). Xét một bản thủy tinh mà trên đó một mẫu vật (ví dụ rễ cây) được trải phẳng. Khi quan sát mẫu vật qua kính hiển vi, người ta sử dụng một thị kính với một đường sợi tóc để soi các vùng khác nhau của bản thủy tinh.

Với mỗi lần quan sát, thị kính được quay một góc bất kì và đường sợi tóc cũng được quay theo. Sau đó, số giao điểm của đường sợi tóc với rễ cây sẽ được ghi lại. Cách thức này được lặp lại nhiều lần với các vị trí quan sát ngẫu nhiên khác nhau trên bản thủy tinh. Để tiện lợi hơn, ta có thể đặt bản thủy tinh trên một tấm giấy với các điểm ngẫu nhiên đã được đánh dấu trước. Các điểm quan sát cũng có thể là một lưới ô vuông các điểm cách đều.



Hình 5. Trên: Thị kính của kính hiển vi có đường sợi tóc (đường thẳng đứng). Dưới: minh họa phép đo độ dài rễ cây (màu xanh) với các vị trí và góc quay khác nhau của đường sợi tóc (màu đỏ). Số lượng đường sợi tóc trong hình chỉ mang tính minh họa, trong thực tế, cấu trúc rễ cây càng phức tạp thì số lượng đường sợi tóc cần sử dụng lại càng nhiều. Mỗi lần quan sát qua kính, ta chỉ thấy được một vùng hình tròn có đường kính là đường sợi tóc.

Về mặt bản chất, thay vì đếm số giao điểm của cây kim được thả ngẫu nhiên với các đường kẻ ngang, ta đếm số giao điểm của các đường sợi tóc được phân bố ngẫu nhiên với mẫu vật rễ cây (gồm nhiều đường cong) trên bản thủy tinh.

Độ dài của rễ cây có thể được tính theo công thức:

$$R = \frac{\pi N A}{2H}, \tag{4}$$

với N là số giao điểm đã được đếm, A là diện tích bản thủy tinh và H là tổng độ dài của tất cả các đường sợi tóc.

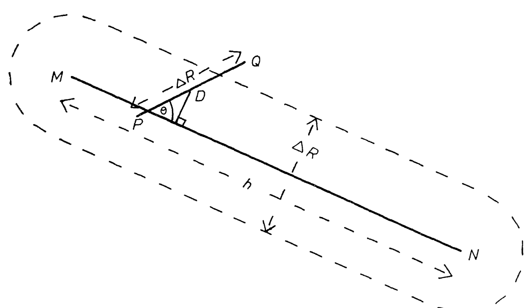
Thật vậy, xét một đoạn rễ cây PQ có chiều dài ΔR và một đường sợi tóc MN chiều dài h. Nếu khoảng cách từ trung điểm D của PQ đến MN lớn hơn $\frac{1}{2}\Delta R$ thì PQ và MN chắc chắn không cắt nhau. Miền giới hạn này được biểu diễn bằng đường nét đứt trong hình. Giả sử $\frac{\Delta R}{h}$ là nhỏ, diện tích miền này có thể được xấp xỉ bằng $\Delta R \cdot h$. Do MN được phân bố ngẫu nhiên trên bản thủy tinh, xác suất để D nằm trong miền này là $\frac{\Delta R \cdot h}{A}$.

Khi D nằm trong miền cách MN một khoảng không quá $\frac{1}{2}\Delta R$, khoảng cách từ D đến MN cần phải không lớn hơn $\frac{1}{2}\Delta R|\sin\theta|$, với θ là góc tạo bởi hai đường thẳng PQ và MN, để PQ và MN cắt nhau. Xác suất để PQ và MN cắt nhau khi D đã nằm trong miền trên là:

$$\frac{\frac{1}{2}\Delta R|\sin\theta|}{\frac{1}{2}\Delta R} = |\sin\theta|.$$

Do đó, theo công thức nhân xác suất, xác suất để PQ và MN cắt nhau là:

$$p = \frac{\Delta R \cdot h}{A}|\sin\theta|.$$



Hình 6. Đoạn rễ cây PQ và đường sợi tóc MN.

Tổng độ dài của các đoạn sợi tóc được phân bố ngẫu nhiên trên miền diện tích A là H. Các góc θ cũng nhận giá trị ngẫu nhiên trong khoảng $[0, 2\pi]$ nên giá trị kì vọng của số giao điểm của PQ với các đường sợi tóc là:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Delta R \cdot H}{A}|\sin\theta| d\theta = \frac{2(\Delta R \cdot H)}{\pi A}.$$

Coi rễ cây là một hình với nhiều đoạn có độ dài ΔR, ta được giá trị kì vọng của số giao điểm của rễ cây với tất cả các đường sợi tóc là:

$$N = \frac{2RH}{\pi A}.$$

Do N là giá trị kỳ vọng nên khi đo đạc người ta cần phải tiến hành nhiều lần quan sát với các vị trí ngẫu nhiên của đường sợi tóc để kết quả thí nghiệm gần với giá trị của N trong công thức.

Ví dụ, với bản thủy tinh 10×20 cm; tiến hành quan sát 40 lần, độ dài đường sợi tóc (đường kính của thị trường vùng quan sát được) là $1{,}88$ cm; số giao điểm quan sát được là 344 thì tổng độ dài của rễ cây là:

$$R - \frac{\pi \cdot 344 \cdot 10 \cdot 20}{2 \cdot 40 \cdot 1{,}88} = 1436 \text{ cm}.$$

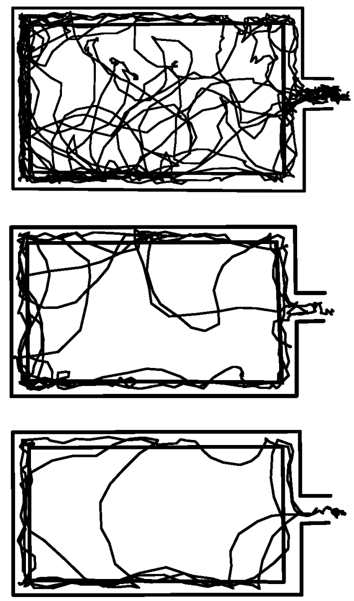
Cách đo độ dài này đã được các nhà thực vật học sử dụng trong nhiều thập kỉ mãi cho đến gần đây mới được thay thế bởi các phần mềm xử lí ảnh từ các camera có độ phân giải cao.

3. Kiến biết đo diện tích bằng xác suất?

Phương pháp đo độ dài ở phần trước cũng có thể được biến đổi để tiến hành đo diện tích.

Một nghiên cứu khá thú vị trên loài kiến *Leptothorax albipennis* đưa ra giả thuyết rằng loài kiến này đã sử dụng xác suất để tính diện tích khi chọn tổ (kiến thường cố gắng chọn tổ có diện tích lớn nhất trong các vị trí khảo sát) (Mallon & Franks, 2000).

Khi sử dụng camera để theo dõi kiến trinh sát trong phòng thí nghiệm, người ta thấy trong lần thứ nhất đến một vị trí để khảo sát, con kiến sẽ đi một cách ngẫu nhiên trong hộp theo một đường cong bao phủ phần lớn các vị trí trong hộp (gọi là đường cong L). Trong những lần tiếp theo (thường nó sẽ quay lại lần thứ hai hoặc có thể là lần thứ 3), nó sẽ đi một đường cong đơn giản hơn (gọi là đường cong S). Đồng thời, khi đến các vị trí đã đi qua (kiến khi di chuyển có thể tiết ra pheromone để đánh dấu đường đi của mình), tức là các giao điểm của L và S, kiến dành thời gian lâu hơn nhiều.



Hình 7. Từ trên xuống: Đường đi của kiến trinh sát khi khảo sát tổ được camera ghi lại trong lần khảo sát thứ nhất, thứ hai và thứ ba.

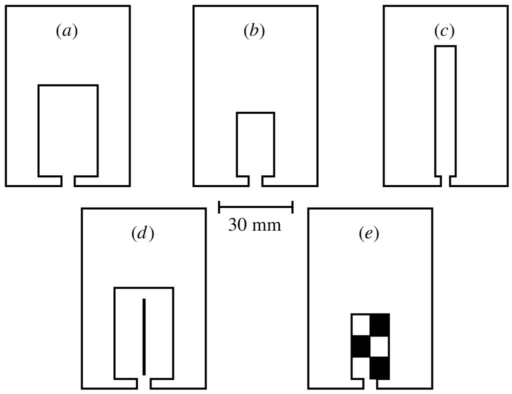
Theo các tác giả, số giao điểm của L và S được kiến trinh sát sử dụng để đánh giá diện tích của một vị trí làm tổ. Trong công thức (4), nếu ta thay các đường sợi tóc bằng một đường cong L và rễ cây R bằng đường cong S, công thức này vẫn đúng và diện tích có thể được xấp xỉ theo

$$A = \frac{2SL}{\pi N}, \tag{5}$$

với N là số giao điểm của S và L.

Để kiểm chứng việc này, thí nghiệm được tiến hành với nhiều con kiến trinh sát khác nhau trên các loại hộp để làm tổ như trong hình vẽ.

Trong thí nghiệm để chọn giữa hai tổ cùng chu vi (hình 8*a* và hình 8*c*), kiến luôn chọn tổ có diện tích lớn hơn sau khi khảo sát cả hai. Do đó, diện tích chứ không phải chu vi mới là tiêu chí chọn tổ. Vì các tổ có một tấm chắn ở giữa (hình 8*d*) cũng được chọn với khả năng tương tự như tổ bình thường, cho thấy số lần va chạm với chướng ngại vật trong tổ cũng không phải nhân tố quyết định.



Hình 8. Các loại tổ được sử dụng trong thí nghiệm về việc chọn tổ của kiến trinh sát. a) tổ tiêu chuẩn; b) tổ đồng dạng và có diện tích bằng một nửa tổ tiêu chuẩn; c) tổ có diện tích bằng một nửa tổ tiêu chuẩn nhưng có cùng chu vi; d) tổ tiêu chuẩn có tấm chắn ở giữa; e) tổ dạng b với một nửa được phủ các tấm đệm có thể nhấc ra.

Thí nghiệm cũng cho thấy khi kiến trở lại lần thứ hai, nếu tổ đã được thay bằng một tổ mới hoặc một tổ đã được một con kiến khác đi qua, nó sẽ tiến hành khảo sát lại như là đang đi qua lần thứ nhất. Điều này cho thấy trong lần khảo sát thứ nhất, kiến sẽ lưu lại pheromone đánh dấu đường đi và pheromone này đặc trưng cho từng cá thể. Việc này cũng cho phép các con kiến không làm ảnh hưởng đến quá trình khảo sát của nhau khi một vị trí có thể được nhiều hơn một con kiến đến thăm dò.

Nếu kiến trở lại lần thứ ba hoặc sau đó, thời gian nó tiến hành khảo sát cũng không khác nhiều lắm so với lần thứ hai, do đó có thể thấy pheromone chỉ được rải ở lần thăm dò thứ nhất còn các lần lặp lại sau để tăng độ chính xác của việc ước lượng.

Loại tổ trong hình 8*e* được thiết kế đồng dạng với tổ trong hình 8*a* nhưng có diện tích bằng một nửa. Đồng thời, ở nền của loại tổ này, một nửa diện tích là các tấm đệm có thể lấy ra. Sau khi kiến khảo sát tổ dạng này lần thứ nhất, người ta sẽ lấy các tấm đệm ra trước khi kiến quay lại lần thứ hai. Khi kiến trở lại, do các vị trí có đệm bị lấy ra không còn pheromone nên số giao điểm của đường đi của nó trong lần thứ hai với đường đi trong lần thứ nhất sẽ giảm một nửa. Trong thí nghiệm chọn giữa tổ dạng 8*a* và dạng 8*e*, một nửa số kiến chọn 8*e* dù diện tích chỉ có một nửa. Thí nghiệm với kích thước tổ lớn gấp đôi cho thấy khoảng cách L của mỗi con kiến là không đổi giữa các tổ với diện tích khác nhau. Kết hợp với với (5), có thể thấy thấy kiến đánh giá diện tích theo tỉ lệ nghịch với tần số gặp giao điểm $\frac{N}{S}$.

Việc nghiên cứu những thuật toán liên quan đến hành vi của kiến không chỉ có ý nghĩa về mặt sinh học mà còn có nhiều ứng dụng khác, ví dụ như trong việc lập trình điều khiển hành vi của robot.

4. Lời kết

Lĩnh vực xác suất hình học còn có nhiều bài toán khác có giá trị về cả mặt lý thuyết lẫn thực tiễn. Pi cũng sẽ tiếp tục giới thiệu các bài toán này đến với độc giả trong tương lai không xa.

Tài liệu tham khảo

[1] Aigner, M., & Ziegler, G. (2004). *Proof from* THE BOOK. Springer–Verlag.

[2] Mallon, E. B., & Franks, N. R. (2000). Ants estimate area using Buffon's needle. *Proc. R. Soc. Lond.* B(267), 765 – 770.

[3] Mugford, S. T., Mallon, E. B., & Franks, N. R. (2001). The accuracy of Buffon's needle: a rule of thumb used by ants to estimate area. *Behavioral Ecology*, 12(6), 655 – 658.

[4] Newman, E. I. (1966). A Method of Estimating the Total Length of Root in a Sample. *Journal of Applied Ecology*, 139 – 145.

[5] Ramaley, J. F. (1969). Buffon's Noodle Problem. *The American Mathematical Monthly*, 78(8), 916 – 918.

VỀ CÁC HUY CHƯƠNG FIELDS NĂM 2022

ĐÀO PHƯƠNG BẮC

Đại hội Toán học thế giới (The International Congress of Mathematicians (ICM)) được tổ chức 4 năm một lần là một sự kiện quan trọng của cộng đồng Toán học. Sau "chiến dịch tranh cử" của những nhà toán học Nga đứng đầu là hai Huy chương Fields A. Okounkov và S. K. Smirnov, nước Nga đã giành quyền đăng cai. Nơi tổ chức Đại hội đã được ấn định từ trước là thành phố cổ kính Saint Petersburg từ ngày 6 đến 14 tháng 7 năm 2022. Tuy nhiên, vì một số yếu tố chính trị liên quan đến cuộc chiến giữa Nga và Ucraina, phiên họp trực tiếp đã không diễn ra, thay vào đó các báo cáo khoa học được để dưới hình thức trực tuyến. Mặc dù vậy phiên họp Đại hội đồng của Liên đoàn Toán học thế giới nhằm bầu ra những vị trí chủ chốt của Liên đoàn Toán học thế giới nhiệm kỳ tiếp theo vẫn được tiến hành trực tiếp ở thủ đô Helsinki của Phần Lan với sự có mặt của các Chủ tịch hội toán học các nước. Tại phiên họp này các Huy chương Fields đã được trao vào ngày 5 tháng 7. Thực tế Helsinki cũng là nơi đăng cai Đại hội Toán học thế giới năm 1978. Như chúng ta đã biết, ngoài điều kiện không quá 40 tuổi, tiêu chí của Huy chương Fields là "trao cho những khám phá xuất sắc trong Toán học đối với những công trình đặc biệt thú vị và hứa hẹn những khám phá tiếp theo". Kết quả là 4 Huy chương Fields năm 2022 đã được trao cho các nhà toán học tài năng sau đây (lần lượt theo vần chữ cái):

- Hugo Duminil–Copin: Anh sinh năm 1985 tại Pháp, là giáo sư tại Đại học Geneva, Thụy Sĩ, đồng thời cũng là giáo sư của Viện nghiên cứu cao cấp về Khoa học tự nhiên (Institut des Hautes Études Scientifiques–IHES), Cộng hòa Pháp . Anh được trao Huy chương Fields vì đã "đã giải quyết những giả thuyết đã có từ lâu trong lý thuyết xác suất của hiện tượng chuyển pha trong Vật lý thống kê, đặc biệt là với số chiều 3 và chiều 4".

- June Huh: Anh sinh năm 1983 tại Mỹ, nhưng là người Hàn Quốc và lớn lên cũng tại Hàn Quốc. Hiện anh là giáo sư tại Đại học Princeton, Hoa Kỳ. Anh nhận được Huy chương Fields vì "việc mang những ý tưởng của lý thuyết Hodge vào tổ hợp, vì chứng minh giả thuyết Dowling–Wilson về các dàn hình học, chứng minh giả thuyết Heron–Rota–Welsh cho các matroids, và phát triển lý thuyết về các đa thức Lorentz, cùng với việc chứng minh giả thuyết Mason dạng mạnh".

- James Maynard: Anh sinh năm 1987 tại Vương Quốc Anh, là giáo sư tại Đại học Oxford. Huy chương Fields của J. Maynard được trao cho việc đã có "những đóng góp trong Lý thuyết số giải tích, dẫn đến những tiến bộ chính trong việc hiểu cấu trúc các số nguyên tố và trong xấp xỉ Diophantine".

• Maryna Viazovska: Chị sinh năm 1984 tại Ucraina, là giáo sư đặc biệt (lãnh đạo nhóm Lý thuyết số) tại Đại học Bách Khoa Lausanne (EPFL), Thụy Sĩ. Chị được Huy chương Fields vì "đã chứng minh được dàn E_8 cung cấp cách sắp xếp các hình cầu giống nhau một cách dày đặc nhất trong không không gian 8 chiều, và những ứng dụng khác cho bài toán cực trị trong giải tích Fourier".

Sau đây là một vài điểm chi tiết hơn một chút về công trình cũng như một vài thông tin khác của những nhà toán học nói trên.

1. Hugo Duminil–Copin: Anh được xem là đã làm thay đổi nền tảng toán học của hiện tượng chuyển pha trong Vật lý thống kê và đã giải quyết một số vấn đề mở đã có từ lâu trong Lý thuyết này, nói riêng trong trường hợp chiều 3, chiều 4 và trường hợp không khả tích khi số chiều bằng 2. Chuyển pha là là một thuật ngữ mô tả sự chuyển tiếp các trạng thái của vật chất như rắn, lỏng, khí, plasma (ví dụ khi đun sôi đến 100 độ C, dưới áp suất thông thường thì nước bắt đầu bay hơi). Mô hình Vật lý để mô tả những hiện tượng này là mô hình của E. Ising (một nhà Vật lý người Đức) trong Vật lý thống kê. Số chiều $2, 3, 4$ nói ở trên là số chiều của mô hình Ising. Công việc của Hugo Duminil–Copin là sự tiếp nối từ công việc của người thầy hướng dẫn của anh, Stanislav Smirnov (Huy chương Fields năm 2010 về những đóng góp trong trường hợp số chiều 2), cho những nền tảng toán học chặt chẽ để giải thích cho hiện tượng chuyển pha trong Vật lý nói trên thông qua mô hình Ising. Thực ra kết quả Toán học quan trọng đầu tiên về những mô hình Ising đã được L. Onsager (nhà bác học được giải Nobel về Hóa học năm 1968) tìm ra.

Cần nói thêm rằng ngay từ khi làm luận án Tiến sĩ, Hugo đã có công trình quan trọng với thầy của mình giải quyết giả thuyết Nienhuis trong Vật lý thống kê về những hằng số liên kết cho những dàn lục giác. Chính kết quả này cũng đã góp phần tạo nên Huy chương Fields năm 2010 của Stanislav Smirnov. Sau khi bảo vệ luận án Tiến sĩ năm 2013, anh đã nhanh chóng trở thành chuyên gia hàng đầu về các khía cạnh xác suất của mô hình Ising. Bên cạnh mô hình Ising, Hugo còn có nhiều đóng góp cho mô hình Potts cũng trong Vật lý thống kê. Ở đây anh cùng với các cộng sự cũng đã giải quyết được một giả thuyết của Baxter đưa ra từ những năm 1970. Vì những kết quả xuất sắc kể trên, khi chỉ ở độ tuổi 30 anh đã là Giáo sư ĐH Geneve (Thụy Sĩ) và là Giáo sư ở Viện nghiên cứu cao cấp (Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS)), Cộng hòa Pháp. Trước khi được trao Huy chương Fields, anh đã nhận được nhiều giải thưởng quan trọng như Giải thưởng của Hội Toán học Châu Âu, Giải thưởng của Viện hàn lâm khoa học Pháp, và một số giải thưởng của chuyên ngành Xác suất như giải thưởng Loeve, Dobrushin, ...

2. James Maynard: Các công việc của anh được xem có tính độc đáo rất cao, thường dẫn đến những kết quả có tính đột phá đáng ngạc nhiên cho những vấn đề quan trọng, tưởng chừng như không thể thực hiện được với những kỹ thuật hiện tại.

Anh là một nhà Toán học người Anh, và được phong giáo sư ở Đại học Oxford danh tiếng vào năm 2017 khi mới vừa tròn 30 tuổi. Trước đó, anh làm dưới sự hướng dẫn của một trong những chuyên gia đầu ngành về Lý thuyết số giải tích là Roger Heath–Brown. Trước khi được trao Huy chương Fields, anh đã dành được một số giải thưởng quan trọng khác như giải thưởng SASTRA Ramanujan năm 2014, giải thưởng Whitehead cho các nhà toán học trẻ của Hội Toán học London năm 2015, giải thưởng của Hội toán học Châu Âu năm 2016.

Như đã biết số nguyên tố là một lĩnh vực cổ điển của Lý thuyết số mà không nhiều người dám thử sức vì khả năng có kết quả tương đối thấp. Ngoại trừ kết quả về vô hạn số nguyên tố có từ thời Eulid, mà chứng minh của nó chỉ vài dòng được giới thiệu trong chương trình cấp hai, thì các kết quả được xem là định lý về số nguyên tố đều có các chứng minh ít nhiều cần đến kiến thức ở bậc đại học trở lên và rất khó. Ở góc nhìn tổng thể về phân bố số nguyên tố, một trong những kết quả quan trọng mở đầu cho những ứng dụng của giải tích trong số nguyên tố là định lý của J. Hadamard và de vallee Poussin năm 1896 (được dự đoán từ hàng trăm năm trước đó bởi A–M. Legendre):

Định lý 1. *Với $\pi(n)$ là số lượng các số nguyên tố nhỏ hơn hay bằng n thì*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{\ln n} = 1.$$

Liên quan đến phân bố số nguyên tố thì dự đoán lớn nhất còn tồn tại có lẽ là giả thuyết Riemann về không điểm của hàm zeta. Bên cạnh đó, một mặt với số n lớn tùy ý luôn tồn tại một dãy n số liên tiếp gồm toàn hợp số (chẳng hạn $(n+1)!+2, (n+1)!+3, \dots, (n+1)!+(n+1)$), nhưng *có thể có* những cặp số nguyên tố sinh đôi $(p, p+2)$ lớn tùy ý, chẳng hạn $(518807, 518809)$. Đó chính là nội dung của câu hỏi về cặp số nguyên tố sinh đôi vẫn còn mở:

Câu hỏi 1. Tồn tại vô hạn cặp số nguyên tố sinh đôi $(p, p+2)$?

Năm 2006, một kết quả quan trọng theo hướng khẳng định giả thuyết về các cặp số nguyên tố sinh đôi của Goldston–Graham–Pintz–Yıldırım đã chỉ ra

Định lý 2. (Goldston–Graham–Pintz–Yıldırım, Proc. Japan Academy 2006). *Ký hiệu p_n là số nguyên tố thứ n thì*

$$\liminf \frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n} = 0.$$

Sau đó, năm 2013 có một bước tiến rất ấn tượng của Y. Zhang như sau.

Định lý 3. (Y. Zhang, Ann. Math. 179 (2014), 1121–1174). *Với một số N nào đó nhỏ hơn 70 triệu, tồn tại vô hạn cặp số nguyên tố sai khác N.*

Cũng cần phải nói thêm Y. Zhang lúc đó chỉ là một giảng viên Toán bình thường ở Đại học New Hampshire. Đây không hẳn là một đại học nghiên cứu (có đào tạo bậc Tiến sĩ về Toán), ở vùng Đông Bắc nước Mỹ. Sở dĩ ông công tác ở một đại học nhỏ như vậy vì kết quả chính trong luận án Tiến sĩ của mình tuy được công bố ở một tạp chí uy tín cao là Duke Math. J. nhưng đã sử dụng một kết quả mà sau này người ta mới biết là sai. Tuy kết quả năm 2014 của Y. Zhang rất ấn tượng nhưng sau đó đã được làm mạnh hơn rất nhiều bởi James Maynard và nhóm của T. Tao (một nhà toán học rất nổi tiếng, Huy chương Fields năm 2006) và các cộng sự. Điển hình là kết quả sau giảm số 70 triệu của định lý trước của Y. Zhang xuống còn 600:

Định lý 4. (James Maynard, Ann. Math. (2015), vol. 181 (no.1) 383–413, nhóm của T. Tao cũng cho một chứng minh độc lập). *Ký hiệu p_n là số nguyên tố thứ n thì*

$$\liminf(p_{n+1}-p_n) \le 600.$$

Nếu thừa nhận giả thuyết Elliot–Halberstam thì

$$\liminf(p_{n+1}-p_n) \le 12,$$

và

$$\liminf(p_{n+2}-p_n) \le 600.$$

Phương pháp mà James Maynard sử dụng phát triển phương pháp "sàng" của nhóm tác giả D. A. Goldston, J. Pintz, C. Y. Yildirim (Ann. Math. 2009). Gốc rễ của phương pháp này chính là sàng Eratosthenes có từ thời cổ đại dùng để lọc ra các số nguyên tố nhỏ hơn một số cho trước. Ngoài kết quả có tính đột phá kể trên, J. Maynard cũng đã có những đóng góp cơ bản trong xấp xỉ Diophantine, cùng với Koukoulopoulos anh đã giải quyết Giả thuyết Duffin–Schaeffer (Ann. Math 2020). Giả thuyết này được đưa ra năm 1941, mô tả việc một số thực có thể được xấp xỉ tốt bởi một số hữu tỷ đến mức độ nào, và bắt nguồn từ bổ đề xấp xỉ nổi tiếng của Dirichlet.

3. June Huh: Anh được xem là đã cùng với một số cộng sự làm thay đổi lĩnh vực hình học tổ hợp thông qua việc dùng các phương pháp của lý thuyết Hodge (phương pháp để nghiên cứu đối đồng điều của những đa tạp Kahler compact), hình học nhiệt đới (tropical), và lý thuyết kỳ dị. Đối tượng tổ hợp chính mà June Huh quan tâm là các matroids. Matroid là một đối tượng gần với ma trận (matrix) và lý thuyết đồ thị, và lý thuyết về chúng có cảm hứng từ việc trừu tượng hóa nhiều khái niệm từ hai lý thuyết nói trên. Cụ thể hơn, matroid M là một cặp $(E,\mathcal{I})$ gồm một tập hữu hạn E và một họ $\mathcal{I}$ khác rỗng các tập con của E thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện:

- Nếu tập con A của E thuộc họ $\mathcal{I}$ thì mọi tập con của nó cũng thuộc $\mathcal{I}$.
- Nếu $A,B\in\mathcal{I}$ và $|A|=|B|+1$, thì tồn tại một phần tử $x\in A\setminus B$ sao cho $B\cup\{x\}\in\mathcal{I}$.

Mô hình cụ thể của một matroid là một ma trận với các cột đánh số bởi tập E và họ $\mathcal{I}$ các tập con mà các cột ứng với tập con đó là độc lập tuyến tính.

Đây là một khái niệm đưa ra bởi một nhà hình học nổi tiếng của thế kỷ trước là H. Whitney sau đó được phát triển nhiều bởi một chuyên gia nổi tiếng về tổ hợp là G–C. Rota. Sau này matroids tìm thấy nhiều ứng dụng trong hình học, tôpô, tổ hợp, ...

Bên cạnh đó, hình học nhiệt đới (tropical) là một biến thể của hình học đại số. Trong khi hình học đại số nghiên cứu những đa tạp đại số là tập nghiệm của một hệ phương trình đa thức thì hình học nhiệt đới thay phép cộng trong đa thức bởi phép lấy giá trị nhỏ nhất và phép nhân thay bằng phép cộng. Ngay trong hình học đại số, lý thuyết hình học mới này đã có nhiều ứng dụng thông qua các công trình của M. Kontsevich (Huy chương Fields năm 1998) và G. Mikhalkin. Tuy xuất phát từ hình học đại số nhưng theo nhận xét của June Huh các đa tạp nhiệt đới rộng hơn nhiều so với việc lấy nhiệt đới hóa (tropicalization) các đa tạp đại số, qua đó cho thấy những nghiên cứu của June Huh chắc sẽ còn hứa hẹn nhiều kết quả quan trọng.

Cụ thể hơn những công trình quan trọng làm nên Huy chương Fields của June Huh bao gồm:

- June Huh đã cùng với Boton Wang sử dụng Hình học đại số và lý thuyết giao để chứng minh giả thuyết Dowling–Wilson về nhận biết các matroids.
- Karim Adiprasito, June Huh, và Eric Katz đã tìm ra một dạng tương tự của lý thuyết Hodge và chứng minh định lý Lefschetz dạng mạnh và quan hệ Hodge–Riemann cho các matroids tùy ý. Họ đã dùng các kết quả này để giải quyết giả thuyết Heron–Rota–Welsh về tính lõm loga của đa thức đặc trưng của một matroid.
- Petter Branden và June Huh đã phát triển lý thuyết về các đa thức Lorentz, liên hệ với giải tích lồi và phiên bản rời rạc của nó thông qua hình học nhiệt đới. Họ đã chứng minh giả thuyết Mason dạng mạnh cho các matroids và tìm ra các ứng dụng khác nhau từ hình học đại số xạ ảnh cho tới mô hình Potts trong cơ học thống kê (đã được đề cập đến trong công việc của Hugo Duminil–Copin).

June Huh có một quá trình đào tạo về Toán không thật chính quy. Anh tự nhận không giỏi Toán khi học phổ thông và học cả chuyên ngành Vật lý ở bậc đại học ở Đại học Quốc Gia Seoul (Hàn Quốc) nhưng bảng điểm không thật tốt. Đến những năm cuối đại học, anh được tham dự các bài giảng về Hình học đại số của H. Hironaka (Huy chương Fields năm 1970 của Nhật Bản, nổi tiếng với định lý giải kỳ dị) khi ông là Giáo sư mời của Đại học Quốc gia Seoul. Lúc này anh bắt đầu có cảm hứng và bắt đầu dành nhiều thời gian hơn cho Toán học. Tốt nghiệp Đại học xong, anh làm luận văn Thạc sĩ với một trong những chuyên gia hàng đầu về Hình học đại số của Hàn Quốc là Young–Hoon Kiem. Sau đó, năm 2009, anh được nhận làm luận án Tiến sĩ Toán ở Mỹ, ban đầu là Đại học Illinois ở Urbana–Champaign, sau đó chuyển sang Đại học Michigan. Anh bảo vệ luận án Tiến sĩ năm 2014 dưới sự hướng dẫn của một chuyên gia nổi tiếng về Hình học đại số là M. Mustata. Tuy bắt đầu làm luận án Tiến sĩ khá muộn, nhưng ngay từ những năm đầu khi làm luận án Tiến sĩ, anh đã dùng những kỹ thuật của hình học đại số để chứng minh giả thuyết Read về hệ số của đa thức sắc số (chromatic polynomials) trong lý thuyết đồ thị. Đây là một giả thuyết từ hơn 40 năm trước xuất phát từ bài toán 4 màu nổi tiếng mà lời giải của nó dài vài trăm trang được đưa ra bởi K. Appel và W. Haken năm 1976 cùng với sự hỗ trợ của máy tính. Bài báo của June Huh ngay lập tức đã được chú ý và in ở một tạp chí hàng đầu là Journal of the American Mathematical Society. Một điều thú vị là chính trong bài báo này, June Huh cũng đã trả lời một câu hỏi liên quan của GS. Ngô Việt Trung và J. K. Verma về số bội trộn trong Đại số giao hoán. Nhờ những kết quả quan trọng trong luận án, anh được nhận học bổng nghiên cứu danh giá của Viện Clay, và nhận vị trí Veblen Instructor, cũng như vị trí giáo sư mời ở Viện nghiên cứu cao cấp Princeton. Đến năm 2020, anh nhận vị trí giáo sư ở Đại học Stanford, nhưng chỉ 1 năm sau đó anh quay lại nhận vị trí giáo sư ở Đại học Princeton.

4. Maryna Viazovska: Như đã nói ở trên được trao huy chương Fields một phần vì những đóng góp trong bài toán xếp hình cầu.

Một vấn đề có từ lâu trong toán học là tìm một cách sắp xếp dày đặc nhất (tối ưu nhất) những hình cầu giống nhau trong không gian với số chiều cho trước. Dày đặc nhất ở đây hiểu là tỉ lệ giữa tổng thể tích các hình cầu và thể tích hình chứa nó là lớn nhất. Bài toán này cũng rất tự nhiên trong thực tế khi ta đi du lịch và cần phải xắp xếp sao cho balo chứa được nhiều đồ vật nhất. Ở chiều 2 ta biết cách sắp xếp theo hình lục lăng (một hình tròn ở giữa, 6 hình tròn đặt xung quanh trong một lục giác đều) cho ta cách xếp dày đặc nhất. Với số chiều 3, từ vài trăm năm trước, J. Kepler đã dự đoán cách xếp các quả cam chứa trong một hình kim tự tháp sẽ cho kết quả tối ưu. Năm 1998, T. Hales chứng minh giả thuyết Kepler với một chứng minh gần 100 trang in ở Annals of Mathematics cùng với sự trợ giúp của máy tính. Bài toán sắp xếp hình cầu không có thêm kết quả gì ở các số chiều khác cho đến năm 2016, M. Viazovska chỉ ra dàn E_8 (dàn (lưới) trong không gian $\mathbb{R}^8$, liên quan đến nhóm Lie dạng E_8) cho cách xếp tối ưu nhất trong chiều 8. Ít lâu sau đó cùng với H. Cohn, A. Kumar, S. Miller và D. Radchenko, M. Viazovska đã chứng minh dàn Leech cho cách sắp xếp dày đặc nhất ở số chiều 24. Dàn Leech nằm trong không gian $\mathbb{R}^{24}$ có nhóm các tự đẳng cấu là nhóm đơn hữu hạn loại lẻ tẻ (sporadic) đưa ra bởi Conway. Lời giải của M. Viazovska dựa trên cách tiếp cận của H. Cohn và N. Elkies (Ann. Math. 2003), những người đã dùng công thức tổng Poisson của giải tích điều hòa để tìm ra một chặn trên cho những khả năng có thể có của mật độ cho bài toán xếp cầu với số chiều tùy ý. Công trình của các nhà toán học này cần đến sự tồn tại của những hàm Schwatz với những tính chất đặc biệt (chẳng hạn hàm đó và biến đổi Fourier của nó triệt tiêu tại những giá trị độ dài của vectơ trong các dàn tương ứng). H. Cohn và N. Elkies nghĩ rằng những hàm có tính chất đặc biệt như thế là tồn tại nhưng chưa có ý tưởng gì để xây dựng. Khi công việc dừng ở đó khoảng 10 năm thì M. Viazovska xuất hiện và đưa ra một phương pháp hoàn toàn mới để đưa ra những hàm này dựa trên lý thuyết về các dạng modular. Như chúng ta đã biết các dạng modular là một lĩnh vực thuộc Lý thuyết số hiện đại và cung cấp những điểm mấu chốt cho lời giải bài toán Fermat của A. Wiles từ khoảng gần 30 năm trước. Sau đó kỹ thuật chọn hàm Schwatz dùng dạng modular cũng đã được H. Cohn khai thác và thu được những kết quả quan trọng gần đây. Việc dùng các dạng modular là một đối tượng rất khác để giải quyết vấn đề nói trên ít nhiều có sự hợp lý nếu chúng ta nhìn vào đào tạo của M. Viazovska. Ngay từ phổ thông, chị đã là một học sinh giỏi Toán, tốt nghiệp Đại học ở Ucraina, sau đó làm luận văn cao học Đức, rồi quay lại Ucraina làm luận án Tiến sĩ và bảo vệ vào năm 2010. Sau đó chị sang Đức làm luận án Tiến sĩ với một trong hai người thầy hướng dẫn là Don Zagier, một chuyên gia về nhiều thứ trong đó có lý thuyết các dạng modular. Một điều đáng ngạc nhiên là mặc dù lời giải bài toán xếp cầu trong trường hợp 3 chiều rất dài và cần đến máy tính kiểm tra nhưng lời giải trong trường hợp 8 chiều và 24 chiều lại khá ngắn gọn (khoảng 20 trang). Vì những kết quả độc đáo này, M. Viazovska đã nhận được giải thưởng nghiên cứu của Viện Clay năm 2017 dành cho những kết quả Toán học xuất sắc nhất trong năm.

Sau lời giải bài toán xếp cầu ở chiều 8 và 24, M. Viazovska đã phát triển tiếp tục ý tưởng của riêng mình. Chị đã cùng với D. Radchenko (2019) chứng minh mọi hàm Schwatz chẵn thỏa mãn hàm đó cùng với biến đổi Fourier triệt tiêu tại các số $\sqrt{n}$ (n là số nguyên không âm) luôn đồng nhất bằng 0. Kết quả này được các chuyên gia đánh giá là rất đáng ngạc nhiên.

Kết luận: Từ những phân tích kể trên ta thấy đóng góp của những giải thưởng Fields luôn rất đặc biệt, thường là lời giải cho những vấn đề quan trọng, và lời giải nhiều khi đến từ những lĩnh vực hoàn toàn khác.

Tài liệu tham khảo

[1] Trang web https://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal/fields-medals-2022

[2] Các trang wikipedia.

CÓ ĐÁNG HỔ THẸN KHI TẶNG MỘT CUỐN SÁCH TOÁN CHO NỮ HOÀNG?*

AMIROUCHE MOKTEFI

(Người dịch: Huệ Chi)

Ai cũng biết rằng Charles Lutwidge Dodgson (bút danh Lewis Carroll, 1832 – 1898; Hình 1), tác giả của *Alice ở xứ xở diệu kỳ*, là một nhà toán học. Dodgson là một giảng viên toán tại trường Christ Church thuộc Đại học Oxford và đã có nhiều công trình toán học về hình học, đại số, logic và lý thuyết bỏ phiếu. Hầu hết mọi đánh giá về toán học của Dodgson đều nhắc đến một câu chuyện thú vị (sau đây gọi là *câu chuyện*) liên quan đến nữ hoàng Victoria. Nữ hoàng được cho là rất thích truyện *Alice*, xuất bản năm 1865, và đã yêu cầu tác phẩm tiếp theo của tác giả. Với sự ngạc nhiên và thất vọng, bà đã nhận được cuốn *Chuyên luận về định thức* của Dodgson, xuất bản năm 1867. Câu chuyện này là một giai thoại kinh điển mà người ta thường bắt gặp trong các tác phẩm về toán học.

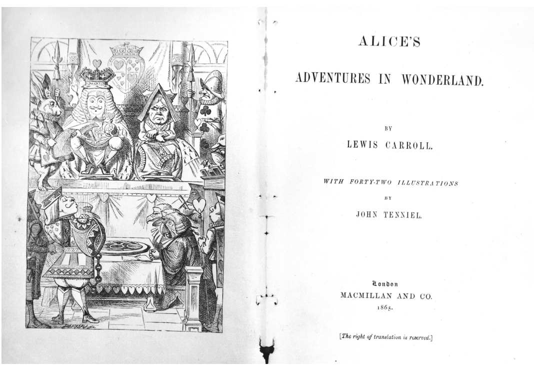
Những bài viết về *câu chuyện* cũng đôi khi nhắc nhở chúng ta rằng chính Dodgson đã phủ nhận nó vào năm 1896, nhưng sự lan rộng của tin đồn dường như không thể ngăn được. Có thể dễ dàng hiểu được sức hấp dẫn của nó, vì nó thể hiện một cách hoàn hảo quan niệm rộng rãi về Dodgson nói riêng và toán học nói chung. Đầu tiên, câu chuyện truyền tải một cái nhìn rộng rãi về Dodgson như một nhân vật kép: một mặt là nhà toán học buồn tẻ và mặt khác là một tiểu thuyết gia giàu trí tưởng tượng. Thứ hai, phản ứng được cho là của nữ hoàng tiêu biểu cho niềm tin rằng toán học và văn học bắt nguồn từ những bộ óc và nền văn hóa khác nhau. Điều thú vị là nhiều lời kể về *câu chuyện* nói rằng nữ hoàng không hài lòng khi nhận được cuốn sách. Người ta cũng nói rằng Dodgson, người rất tôn kính hoàng gia, không thể nào thực hiện một "hành động hoàn toàn ngược với tính cách" như vậy (Beale 1973). Nhưng tặng một cuốn sách toán cho nữ hoàng thì có gì sai?

Hình 1. Charles L. Dodgson (from the Wakeling Collection).

*Nguồn Math. Intellegencer, Số 41.

Câu chuyện lan truyền chóng mặt

Khi *Alice ở xứ xở diệu kỳ* ra mắt (Dodgson 1865, Hình 2), Dodgson là một tác giả vô danh. Ông mới chỉ xuất bản một số tập sách nhỏ về toán học và các tác phẩm nhỏ. Đặc biệt, vào năm 1856, ông đã đóng góp một số bài thơ cho tạp chí *Chuyến tàu*, ở đó ông sử dụng bút danh Lewis Carroll, lấy từ tên của mình (Lewis từ Lutwidge và Carroll từ Charles). Những năm sau đó, ông chủ yếu sử dụng tên thật cho các công trình toán học và bút danh cho các tác phẩm văn học để giữ kín danh tính của mình. Thành công tức thì của cuốn sách *Alice* đã làm cho bút danh văn học của ông được đông đảo công chúng biết đến, nhưng họ không biết được ông có thể là ai.



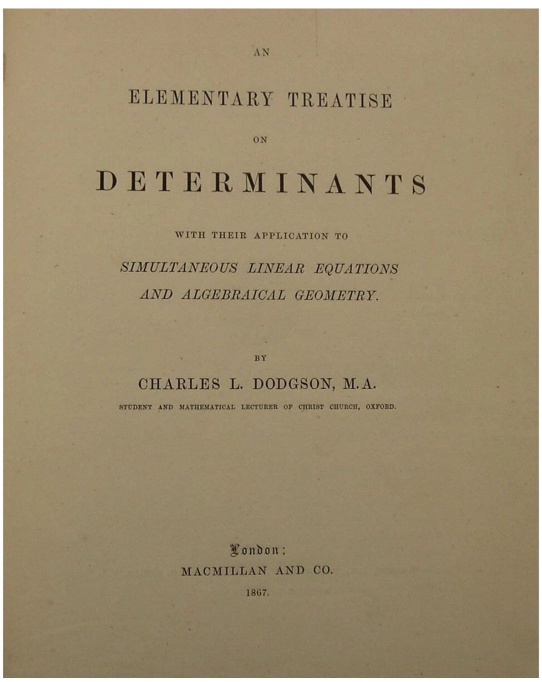
Hình 2. The title page of Dodgson's Alice's Adventures in Wonderland, 1865 (Photo by George Bayntun, Collection of Charlie Lovett).

Cuốn sách cũng được hưởng một nỗ lực quảng bá lớn của cả nhà xuất bản và tác giả. Vô số các bản sao đã được gửi đến các tạp chí để đánh giá, hoặc tặng bạn bè làm quà. Cháu trai, đồng thời là người viết tiểu sử đầu tiên của Dodgson, Stuart D. Collingwood, đã thuật lại rằng bản sao đầu tiên của cuốn sách được gửi đến Alice ngoài đời thực, người đã truyền cảm hứng cho câu chuyện, còn bản thứ hai được gửi đến công chúa Beatrice, con gái út của nữ hoàng Victoria (Collingwood 1898, tr.104) . Đáp lại, Dodgson nhận được một lá thư cho biết "cuốn sách nhỏ mà Bệ hạ rất hài lòng khi cho phép đọc nó cho công chúa Beatrice" (Wakeling 1999, tr. 122).

Với sự khen ngợi của giới phê bình và số lượng lớn sách bán được, ý tưởng về phần tiếp theo hẳn đã nhanh chóng nảy ra với Dodgson và nhà xuất bản của ông. Ngay từ năm 1866, Dodgson đã đề cập đến việc "đang cân nhắc ý tưởng về việc viết một thứ kiểu như phần tiếp theo". Công chúng rõ ràng đã mơ màng về những cuộc phiêu lưu khác, và có tin đồn rằng "Lewis Carroll đang viết tiếp" (Collingwood 1898, tr.129).

Quả thực là Dodgson đang viết. Bên cạnh những thứ khác, ông đang nghiên cứu về thứ có thể là đóng góp quan trọng nhất của ông cho nghiên cứu toán học. Thật vậy, ông đã đưa ra một phương pháp mới để tính toán các định thức, trình bày nó trước Hiệp hội Hoàng gia Luân Đôn vào tháng 5 năm 1866, và sau đó công trình này xuất hiện trong Kỷ yếu của Hiệp hội Hoàng gia Luân Đôn. Trong vòng một năm sau đó, Dodgson đã phát triển bài báo của mình thành một "cuốn sách nhỏ", mà ông ghi lại trong nhật ký của mình là "đã mang lại cho [ông] nhiều rắc rối hơn bất cứ thứ gì mà ông đã từng viết" (Wakeling 1999, 206 – 207). Việc xuất bản cuốn sách bị gián đoạn bởi một chuyến đi đến nước Nga cùng với Henry Parry Liddon từ tháng 7 đến tháng 9 năm 1867. *Chuyên luận về định thức* cuối cùng được xuất bản vào đầu tháng 12 năm đó (Hình 3). Cuốn sách này đã nhận được một số lời khen ngợi về đóng góp và tính mới, nhưng bị chỉ trích vì văn phong logic nặng nề và sự lựa chọn thuật ngữ và ký hiệu gây khó đọc.

Chuyên luận về định thức là cuốn sách đầu tiên của Dodgson kể từ Alice, nhưng nó không có liên hệ gì với cuốn truyện tuyệt vời đó. Trước khi hoàn thành, Dodgson đã thông báo cho nhà xuất bản của mình, Macmillan, trong một bức thư ngày 11 tháng 2 năm 1867, về ý định đề tên thật của mình cho cuốn sách: "Tôi có một cuốn sách nhỏ, sắp hoàn thành, mà tôi muốn các ông xuất bản cho tôi – nhưng tôi e rằng nó không thể được giới thiệu như là của tác giả 'của *Những cuộc phiêu lưu của Alice*'". Độc giả của chuyên luận chắc chắn không có lý do gì để nghi ngờ rằng tác giả của nó thực sự là người đã viết ra *Alice*. Vào thời điểm đó, Dodgson đã giữ được bí mật danh tính của mình và chỉ tiết lộ nó cho một số bạn bè và những người quen may mắn. Những bức thư gửi cho Lewis Carroll được gửi đến nhà xuất bản Macmillan, sau đó nhà xuất bản chuyển tiếp tới ông dưới cái tên Charles L. Dodgson ở Oxford. Khi một cô bé yêu cầu ông viết một câu chuyện Alice khác vào năm 1867, ông hồi âm dưới cái tên Dodgson, khẳng định rằng ông có một thông điệp cho cô ấy "từ một người bạn ... ông Lewis Carroll, một sinh vật kỳ dị, khá thích nói những chuyện vô nghĩa".


AN

ELEMENTARY TREATISE

ON

DETERMINANTS

WITH THEIR APPLICATION TO

SIMULTANEOUS LINEAR EQUATIONS

AND ALGEBRAICAL GEOMETRY.

BY

CHARLES L. DODGSON, M.A.

STUDENT AND MATHEMATICAL LECTURER OF CHRIST CHURCH, OXFORD.

London:

MACMILLAN AND CO.

1867.

Hình 3. The title page of Dodgson's Elementary Treatise on Determinants, 1867 (from the Wakeling Collection)

Khi *Chuyên luận về định thức* ra mắt, có lẽ chỉ có một nhóm nhỏ độc giả có đặc quyền mới biết được bí mật nhỏ của tác giả, và "nó là một phát hiện hoàn toàn bất ngờ với những sinh viên đại học lần đầu tiên được biết rằng ông Dodgson của trường Christ Church và Lewis Carroll chính là một" (Colingwood 1898, tr.110). Một trong những người viết đánh giá về chuyên luận dường như biết điều đó, vì ông ta kết thúc bài đánh giá của mình bằng cách hy vọng "có thêm khảo sát về thế giới thần tiên đại số tùy chọn [của tác giả]". Sự ám chỉ này đến truyện *Alice* chắc hẳn đã khiến Dodgson khó chịu, một người đã rất cố gắng giữ bí mật về danh tính của mình. Dodgson phàn nàn trong một bức thư gửi cho chị dâu của mình, vào ngày 31 tháng 7 năm 1890, rằng ông thấy khá kỳ lạ rằng "mọi người sẽ không hiểu rằng, khi một tác giả sử dụng *bút danh*, thì mục đích là *tránh* việc công khai danh tính cá nhân, điều mà họ luôn cố gắng thúc giục anh ta". Có vẻ như việc Dodgson nhất quyết giữ bí mật danh tính của mình chỉ khiến những "kẻ săn đuổi" ông trở nên đông đảo và quyết tâm hơn. Quả là tình huống đó hẳn đã gợi nên sự tò mò và hấp dẫn, và dễ dàng hình dung được sự ngạc nhiên của một độc giả nhiệt tình của *Alice*, không biết rằng tác giả của nó là một giảng viên toán tại Oxford, khi đối diện với cuốn sách tiếp theo của tác giả, về chủ đề định thức, và được cho biết tác giả thực sự là ai. Những gì đã có thể là một giai thoại thú vị đã trở thành một câu chuyện lan truyền chóng mặt khi độc giả bối rối tình cờ lại chính là nữ hoàng.

Câu chuyện này quá hay và không khó để có thể là sự thật. Thực sự là nữ hoàng biết, và có thể rất thích truyện *Alice*. Bà chỉ cần hỏi, và có thể bà ấy đã hỏi, về cuốn sách tiếp theo của tác giả, để khiến cho *câu chuyện* xảy ra. Đó là một *câu chuyện* tuyệt vời, và sẽ còn tuyệt vời hơn nếu Dodgson không hoàn toàn phủ nhận nó, gần ba mươi năm sau thời điểm mà nó được cho là đã xảy ra.

Phủ nhận

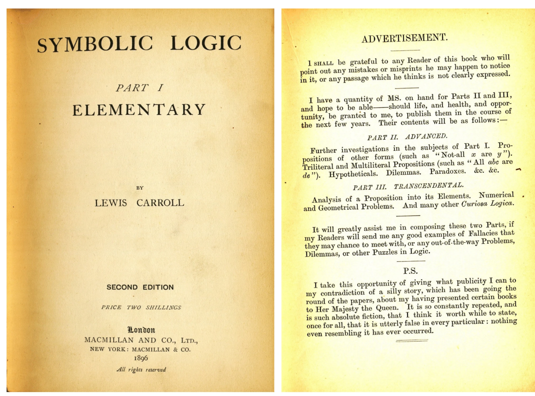
Đến năm 1896, Dodgson là một tác giả nổi tiếng từ chối tận hưởng danh tiếng của mình. Phần tiếp theo của câu chuyện, *Đi qua tấm* *gương*, cũng thành công như truyện *Alice ở xứ sở diệu kỳ*.

Sau đó, ông xuất bản nhiều tác phẩm hư cấu khác, nhưng không có tác phẩm nào thực sự sánh được với hai truyện *Alice*. Là một nhà toán học, ông cũng đã xuất bản nhiều về nhiều chủ đề khác nhau, đặc biệt là bảo vệ một cách đẹp đẽ hình học Euclid trước những sách giáo khoa mới muốn thay thế nó trong các trường trung học và đại học. Trong những năm cuối đời, ông viết một chuyên luận về logic nhằm giúp chủ đề này có thể tiếp cận tới một công chúng rộng rãi. Không giống như các đồng nghiệp của mình tại Đại học Oxford, Dodgson đã chấp nhận lý thuyết logic hình thức mới được phát triển ở Anh bởi George Boole và những người theo trường phái của ông. Phần đầu tiên của chuyên luận của Dodgson, *Logic hình thức*, xuất bản vào tháng 2 năm 1896. Lần tái bản thứ nhất, ra mắt vào đầu tháng 6 cùng năm, có lời tựa được đề ngày 11 tháng 5 năm 1896 (Hình 4). Ngoài một vài thay đổi và sửa chữa nhỏ, nó có một phần tái bút sau trang tiêu đề, với ghi chú sau:

Tôi xin nhân cơ hội này để phủ nhận một cách công khai nhất có thể một câu chuyện ngớ ngẩn, được lan truyền trên báo chí, về việc tôi đã tặng một số cuốn sách nào đó cho Nữ hoàng. Nó được lặp đi lặp lại liên tục, và là thêu dệt hoàn toàn, đến nỗi tôi nghĩ rằng đáng để tuyên bố, một lần dứt điểm, rằng nó tuyệt đối sai trong mọi chi tiết: không có bất kỳ điều gì thậm chí hơi giống như thế đã từng xảy ra cả.

Dodgson đã giữ ghi chú này trong lần tái bản thứ hai của cuốn sách, có lời tựa đề ngày 20 tháng 7 năm 1896, nhưng vì lý do nào đó đã bỏ nó khỏi lần tái bản thứ ba, xuất bản vào đầu năm 1897 nhưng có lời tựa vào Giáng sinh năm 1896.

Trong ghi chú này, Dodgson đã mạnh mẽ phủ nhận một "câu chuyện ngớ ngẩn" về việc ông đã tặng một số cuốn sách cho nữ hoàng. Có thể lưu ý rằng giải thích của Dodgson là rất ít ỏi và có thể đề cập đến một sự việc khác, nhưng có vẻ như chỉ đơn giản là ông không muốn kể chi tiết về giai thoại để không quảng bá thêm về nó. Dodgson rõ ràng không thấy thích thú gì với *câu chuyện*. Vì tin đồn đề cập đến các sự kiện được cho là diễn ra vào năm 1867, một số tác giả tự hỏi tại sao Dodgson phải mất gần ba mươi năm để phủ nhận nó (Wakeling 2015, tr. 315). Derek Hudson cho rằng Dodgson có thể đã dùng thời gian này để tranh luận "với chính bản thân mình liệu có đúng khi phản bác câu chuyện hay không (Hudson 1976, tr.133). Một lời giải thích hợp lý hơn có thể là Dodgson chỉ đơn giản là phủ nhận câu chuyện khi nó được lan truyền rộng ra, vì không có lý do gì để cho rằng tin đồn được bắt đầu trong cùng thời kỳ mà những sự việc được kể lại trong *câu chuyện* được cho là đã xảy ra.


SYMBOLIC LOGIC

PART I

ELEMENTARY

BY

LEWIS CARROLL

SECOND EDITION

PRICE TWO SHILLINGS

London

MACMILLAN AND CO., LTD.,

NEW YORK: MACMILLAN & CO.

1896

All rights reserved

ADVERTISEMENT.

I shall be grateful to any Reader of this book who will point out any mistakes or misprints he may happen to notice in it, or any passage which he thinks is not clearly expressed.

I have a quantity of MS. on hand for Parts II and III, and hope to be able——should life, and health, and opportunity, be granted to me, to publish them in the course of the next few years. Their contents will be as follows:—

PART II. ADVANCED.

Further investigations in the subjects of Part I. Propositions of other forms (such as "Not-all *x* are *y*"). Triliteral and Multiliteral Propositions (such as "All *abc* are *de*"). Hypotheticals. Dilemmas. Paradoxes. &c. &c.

PART III. TRANSCENDENTAL.

Analysis of a Proposition into its Elements. Numerical and Geometrical Problems. And many other *Curiosa Logica*.

It will greatly assist me in composing these two Parts, if my Readers will send me any good examples of Fallacies that they may chance to meet with, or any out-of-the-way Problems, Dilemmas, or other Puzzles in Logic.

P.S.

I take this opportunity of giving what publicity I can to my contradiction of a silly story, which has been going the round of the papers, about my having presented certain books to Her Majesty the Queen. It is so constantly repeated, and is such absolute fiction, that I think it worth while to state, once for all, that it is utterly false in every particular: nothing even resembling it has ever occurred.

Hình 4. The title page of Dodgson's Symbolic Logic, second edition, 1896, and the Advertisement page, which includes a denial of the story (from the Wakeling Collection).

Trên thực tế, có vẻ như không biết tin đồn đã bắt đầu từ khi nào. Trong một thời gian dài, người ta thậm chí đã nghĩ rằng không có bằng chứng văn bản nào về sự tồn tại của tin đồn trước sự phủ nhận của chính Dodgson vào năm 1896. Tuy nhiên, trong những năm gần đây, một số bài báo trước đó về nó đã được tìm thấy, và giờ đây mọi thứ trở nên rõ ràng rằng tin đồn đã lan truyền khá rộng vào quãng thời gian mà Dodgson phủ nhận nó. Tin đồn chắc chắn tồn tại ít nhất từ năm 1892, vì nó được tìm thấy trên một số tờ báo thời đó, chẳng hạn như *Sporting Times*. Nó dường như đã được lan truyền rộng rãi hơn sau năm 1895, đặc biệt là sau khi nó được Ethel Mackenzie McKenna kể lại trong số tháng 8 năm 1895 của *Tạp chí Ladies' Home*:

"Trong thời kỳ mới mẻ của sự thành công rực rỡ, "Alice" nằm trên tay của mọi người và những chuyến phiêu lưu vào thế giới thần tiên của cô là niềm vui thích của người lớn cũng như trẻ em. Nữ hoàng Victoria đã gửi một thông điệp đến tác giả, xin ông gửi cho bà cuốn sách tiếp theo của mình. Giống như tất cả các thần dân của mình, bà nóng lòng muốn nghe nhiều hơn về đứa trẻ thú vị, mà nguyên mẫu là con gái của hiệu trưởng của trường Christ Church. Bà đã rất kinh ngạc khi không lâu sau đó nhận được một cuốn "*Chuyên luận về định thức*" của C. L. Dodgson, vì khi đó, ông vẫn giữ bí mật về danh tính của mình, và Nữ hoàng, cũng như cả thế giới, đã tin rằng ông chỉ đơn thuần là một người hài hước."

Tạp chí của Mỹ này có lượng độc giả rộng lớn và ngày càng tăng vào thời Dodgson, và vào năm 1904, nó trở thành tạp chí đầu tiên đạt được số lượng một triệu người đặt báo. Lời kể của McKenna về *câu chuyện* được đăng lại trên các tạp chí khác của Mỹ, nhất là trong các mục tin đồn, tin vắn và tin tức văn học. *Câu chuyện* hẳn cũng đã lan tới một số tờ báo của Anh, vì nó được đăng trên tờ *Newcastle Weekly Courant*. Đúng là *câu chuyện* không được tìm thấy trên các tờ báo lớn của Anh, một sự thật có thể được giải thích là do họ không muốn xuất bản những bài viết tiết lộ danh tính của Dodgson. Được biết, Dodgson không hài lòng với những bài viết như vậy và đã liên tục viết thư phàn nàn đến những tạp chí và nhà xuất bản của Anh đã tiết lộ hoặc muốn tiết lộ tên thật đằng sau bút danh của ông. Các tạp chí nước ngoài hiển nhiên nằm ngoài tầm ảnh hưởng của Dodgson, như ông thừa nhận trong một bức thư gửi cho Falconer Madan vào ngày 8 tháng 12 năm 1880: "Tôi e rằng các ấn phẩm của Mỹ nằm ngoài tầm khiếu nại của các nhà văn Anh: chỉ ở Anh, người ta mới có thể hy vọng ngăn tên mình được công bố."

Vào năm 1895, *câu chuyện* rõ ràng là đã "lan truyền trên báo chí" và được "lặp đi lặp lại liên tục", như Dodgson đã viết trong lời phủ nhận của mình. Người ta lập luận rằng "không chắc Dodgson đã xem tạp chí [*Tạp chí Ladies' Home*] này" (Wakeling 2005, tr. 257); tuy nhiên, ông có thể đã thấy một trích dẫn về nó được đăng lại trên các tờ báo của Anh. Chúng ta cũng biết rằng Edward Bok, chủ bút của *Tạp chí Ladies' Home*, đã đến thăm Dodgson ở Oxford để thuyết phục ông đóng góp bài cho tạp chí. Chuyến thăm này được ghi lại trong tự truyện của Bok, nhưng ngày tháng không được nêu rõ ràng. Tuy nhiên, lời kể đó gợi ý rằng nó trùng hợp với lần Bok đến thăm Rudyard Kipling, người đã được thuyết phục đóng góp câu chuyện "William the Conqueror" của mình cho tạp chí. Do câu chuyện của Kipling xuất bản vào cuối năm 1895, sẽ khá hợp lý khi cho rằng chuyến thăm diễn ra trước đó. Điều thú vị là Bok kể về việc ông đã hỏi Dodgson về câu chuyện gửi tặng cuốn sách *Chuyên luận về định thức* cho nữ hoàng, một câu hỏi mà Dodgson không bình luận, nhưng "khuôn mặt của ông ấy hoàn toàn không có biểu hiện gì ngoài vẻ trắc ẩn nhằm nói với người chủ bút rằng ông ta đang mắc một sai lầm khủng khiếp" (Bok 1920, tr. 222 – 223). Trước sự thất vọng lớn của Bok, Dodgson chỉ đơn giản phủ nhận việc mình là tác giả của hai cuốn sách *Alice*. Nếu lời kể của Bok là sự thật, ông ta đã sớm được chứng kiến Dodgson bác bỏ câu chuyện, trước khi ông phủ nhận bằng văn bản, trong cuốn sách. Nhưng chúng ta có nên tin Dodgson không?

Liệu rằng nó đã xảy ra?

Việc tìm hiểu sự thật về *câu chuyện* có vẻ là việc làm kỳ quái và thiếu tôn trọng bởi vì Dodgson đã phủ nhận nó một cách rõ ràng. Tuy nhiên, chúng ta không được quên rằng Dodgson thường xuyên phủ nhận (một cách không đúng) rằng ông là tác giả của *Alice*, vì vậy chúng ta không có thêm lý do gì để tin vào sự thật của lời phủ nhận này so với tất cả những lời phủ nhận khác mà chúng ta biết là không đúng. Câu chuyện của chúng ta kết nối tác giả của *Alice* với tác giả của *Chuyên luận về định thức*. Dodgson không có lựa chọn nào khác ngoài việc phủ nhận nó, bất kể sự thật là gì, nếu ông ấy muốn – và chúng ta biết rằng ông thực sự muốn – giữ bí mật về danh tính của mình.

Chúng ta hầu như không thể nhấn mạnh đủ mức độ quan trọng của việc giữ kín danh tính đối với Dodgson. Các tiểu sử về ông chứa nhiều mẩu chuyện về việc ông từ chối là tác giả của truyện *Alice* khi được hỏi về nó. Dodgson cũng từ chối lời mời tham dự các buổi chiêu đãi do nhà xuất bản của ông tổ chức, nơi "hầu như không thể giữ được sự ẩn danh". Khi những lá thư được gửi đến trường Christ Church cho ông dưới cái tên Lewis Carroll , ông đã gửi trả lại chúng mà không mở. Năm 1890, ông thậm chí còn ban hành một thông cáo để gửi cho những người đã gửi thư đến như sau:

"Ông Dodgson thường xuyên bị những người lạ gửi thư đến với giả định khá trái phép rằng ông tuyên bố, hoặc trong một chừng mực nào đó thừa nhận quyền tác giả của những cuốn sách không được xuất bản dưới tên ông, đến mức ông thấy cần phải tuyên bố điều này, một lần dứt điểm, như một câu trả lời cho tất cả các bức thư như vậy. Ông ta không tuyên bố hay thừa nhận bất kỳ mối liên hệ nào với bất kỳ bút danh nào, hoặc với bất kỳ cuốn sách nào không được xuất bản dưới tên của chính ông ta. Do đó, không có quyền giữ lại, hoặc thậm chí đọc thư bên trong, ông ta gửi trả lại nó cho người viết thư đã viết sai địa chỉ."

Lưu ý rằng Dodgson không chính thức phủ nhận là tác giả của các truyệnAlice trong thông cáo này; ông chỉ đơn thuần từ chối việc đòi hoặc thừa nhận quyền tác giả đó. Nhưng Lloyd Humberstone khuyến cáo một cách đúng đắn rằng "Chúng ta không nên coi trọng những lời phủ nhận [của Dodgson] hơn những lời phủ nhận của một nghi phạm bị bắt trong cuộc truy tìm Jack the Ripper của cảnh sát, người khẳng định rằng anh ta không muốn được biết đến với cái tên đó, rằng anh ta không tuyên bố – hay thừa nhận – đã thực hiện bất kỳ vụ giết người nào, v.v." (Humberstone 1995, tr. 498).

Đúng là bí mật về danh tính của Dodgson dần dần được hé lộ và có lẽ nó đã trở thành một bí mật công khai vào những năm cuối đời của ông. Các tờ báo thỉnh thoảng có đề cập đến danh tính của ông, và từ điển các bút danh thường liệt kê ông. Khá hợp lý khi cho rằng bí mật có lẽ được lan truyền qua số đông bạn bè và người quen của ông. Tuy nhiên, Dodgson vẫn từ chối thừa nhận là tác giả của những truyện *Alice* khi những người lạ tiếp cận ông hoặc viết thư cho ông về nó. Những nỗ lực nhiệt thành của Dodgson để bảo vệ bí mật của mình, thậm chí ngay cả sau này khi danh tính của ông đã được biết đến rộng rãi, hẳn đã khiến những người cùng thời của ông phải tò mò. Các cuốn tiểu sử về ông thuật lại cái cách mà trong suốt cuộc đời của mình, ông ấy là "*mục tiêu thường xuyên của những lời đồn đại*".

Việc phủ nhận *câu chuyện* của Dodgson cần phải được hiểu trong bối cảnh này: *câu chuyện* chỉ là một trong số rất nhiều tin đồn về tác giả của *Alice* và sự phủ nhận chỉ là một trong số rất nhiều tình huống mà Dodgson cố gắng giữ bí mật danh tính của mình. Tuy nhiên, có một nét nổi bật về việc Dodgson phủ nhận *câu chuyện* trong cuốn *Logic Hình thức* của ông. Dodgson tin tưởng vào lợi ích xã hội của logic hình thức và muốn cuốn sách của mình dễ tiếp cận đối với rộng rãi độc giả. Để quảng bá rộng rãi hơn cho cuốn sách chuyên luận của mình, ông đã dùng bút danh văn học của mình thay vì tên thật, vốn thường được sử dụng cho các công trình toán học. Vì vậy, lời phủ nhận mà ông đưa vào chuyên luận có thể là dịp duy nhất mà Dodgson, dưới cái tên Lewis Carroll, phủ nhận mối liên hệ của ông với Charles L. Dodgson.

Chúng tôi đã nói ở trên rằng *câu chuyện* thực sự không khó để có thể là thật. Thật vậy, có những lý do chính đáng để tin rằng *câu chuyện* đã thực sự xảy ra, và người ta sẽ không ngạc nhiên nếu nó đã xảy ra. Tuy nhiên, Thomas B. Strong, một người bạn của Dodgson, trong hồi ký viết năm 1932, đưa ra hai lý do để không tin vào điều đó:

"Thật trái ngược với toàn bộ thái độ của Dodgson đối với Hoàng gia và với cung cách đúng mực của ông ấy nếu ông ấy giễu cợt Nữ hoàng như vậy. Và nó hoàn toàn trái ngược với thái độ của ông ấy đối với những cuốn sách của mình. Ông ấy luôn từ chối thừa nhận với bất kỳ người nào, ngoại trừ một số những người có đặc quyền đặc biệt, rằng ông ấy là Lewis Carroll."

Có vẻ như Strong không nhận thấy rằng hai lý do ông ấy đưa ra có phần trái ngược nhau. Thật vậy, Dodgson hoặc phải gửi cuốn sách tiếp theo của mình, và do đó tiết lộ danh tính của ông, hoặc từ chối gửi nó, và do đó từ chối yêu cầu của nữ hoàng, mặc dù ông có thể đã lập luận rằng cuốn sách tiếp theo của Lewis Carroll hoàn toàn không phải là cuốn sách tiếp theo của Charles Dodgson.

Lưu ý rằng lý do đầu tiên mà Strong đưa ra cho thấy rằng việc Dodgson gửi tặng một cuốn sách toán cho nữ hoàng là điều đáng hổ thẹn và thô lỗ. Nhưng lý do thứ hai có vẻ như không đúng, vì chúng ta có thể tưởng tượng Dodgson hẳn sẽ vui vẻ coi nữ hoàng là một trong số "những người có đặc quyền" được ông đã tiết lộ danh tính của mình, và chắc chắn ông đã tiết lộ điều đó để được giao thiệp với một số nhân vật nổi tiếng cùng thời.

Dodgson không đáng tin cậy lắm khi ông phủ nhận những *câu chuyện* tiết lộ danh tính của mình; thậm chí chỉ cần nhìn qua danh sách những phủ nhận của ông là đủ để ủng hộ việc không tin vào ông. Nhưng có thể có một lý do chính đáng để tin Dodgson một lần. Thật vậy, việc Dodgson phủ nhận *câu chuyện* sẽ không ảnh hưởng đến niềm tin của chúng ta về nó nếu nhân vật liên quan không phải là nữ hoàng. Tôi không tin rằng việc tặng một cuốn sách toán học cho nữ hoàng sẽ đi ngược lại cách hành xử đúng mực của Dodgson. Tuy nhiên, việc công khai phủ nhận một câu chuyện liên quan đến nữ hoàng, câu chuyện có thể sẽ được nữ hoàng công nhận là thật, có thể sẽ bị coi là đáng hổ thẹn đối với một thần dân thời Victoria, một người "yêu nước nồng nàn và là một tín đồ trung thành của những hoạt động của hoàng gia" (Hudson 1976, 133).

Được biết, Dodgson rất kính trọng nữ hoàng và hoàng gia. Trong suốt cuộc đời mình, ông đã có một số dịp gặp gỡ các thành viên của hoàng gia, và ông chắc chắn đã quen với một số người trong họ. Ông đã tường thuật chi tiếttrong nhật ký của mình chuyến thăm trường Christ Church của nữ hoàng, vào tháng 12 năm 1860. Trong các chuyến thăm Oxford của các thành viên hoàng gia, ông tìm cách được giới thiệt để chụp ảnh họ. Dodgson là một nhiếp ảnh gia có tiếng, được nhiều nhân vật nổi tiếng cùng thời làm mẫu. Đáng chú ý, ông đã chụp được ảnh Hoàng tử Frederick của Đan Mạch vào năm 1863 và Hoàng tử Leopold (con trai út của nữ hoàng) vào năm 1875. Theo Collingwood, một số bức ảnh của Dodgson "đã được nữ hoàng xem, và bà nói rằng rất thích chúng" (Collingwood 1898, tr. 102 – 104).

Đúng là trong thư từ cá nhân của mình, Dodgson đã bịa ra một số câu chuyện liên quan đến nữ hoàng để mua vui cho các bạn thư của ông. Một lần, ông đã "soạn một bức thư giả của nữ hoàng Victoria mời mình đến một bữa tiệc trong vườn". Một lần khác, ông giả vờ rằng nữ hoàng đã hỏi xin ông một bức ảnh, nhưng ông từ chối vì "nguyên tắc của ông là không bao giờ cho ảnh của mình, ngoại trừ cho những cô gái *trẻ*" (Cohen và Green 1979, tr. 135 – 136 và 116). Edward Wakeling đã nhận xét tinh tế rằng "đó dĩ nhiên chính là cách mà những câu chuyện và tin đồn bắt đầu" (Wakeling 2015, tr. 316). Vì vậy, có thể *câu chuyện* của chúng ta cũng được bắt đầu bởi chính Dodgson, để đùa vui một số người bạn gần gũi, trước khi trò đùa trở thành một tin đồn không thể ngăn chặn.

Tác giả của *Alice*

Đương nhiên, sự phủ nhận của Dodgson về *câu chuyện* vào năm 1896 không làm nó ngừng lan truyền. Ví dụ, nó được tìm thấy vào năm sau đó trong mục về Dodgson trong cuốn sách đầy tham vọng *Thư viện về Văn học hay nhất thế giới*, trong đó chủ biên nhận xét rằng

"hiếm khi một bộ óc kép như vậy – khi thì viết những điều hoàn toàn ngớ ngẩn và rất dí dỏm, khi thì lại khám phá những điều phức tạp của toán học cao cấp – lại có một thể hiện kỳ lạ hơn (Warner 1897, tr. 309).

Câu chuyện cũng được tìm thấy vào năm 1897 trong chuyên mục tin ngắn của tờ *Northern Echo*, kèm theo một số câu thơ lấy cảm hứng từ đó.

Kể từ đó, *câu chuyện* được kể thường xuyên đến mức có đến mấy bản khác nhau của nó. Một số phiên bản cho rằng Dodgson đã gửi cho nữ hoàng cả một bộ sách chứ không chỉ là cuốn *Chuyên luận về định thức*. Một số phiên bản khác cho rằng thực ra người bán sách của nữ hoàng mới là người được yêu cầu giao sách của Dodgson cho nữ hoàng. Bất chấp sự khác biệt của chúng, tất cả các lời kể đều thống nhất ở một điểm trọng tâm: nữ hoàng đã yêu cầu một tác phẩm khác của tác giả của một câu chuyện thiếu nhi và thật ngạc nhiên, bà đã nhận được một cuốn sách toán.

Không khó để hiểu được sự thành công của "giai thoại hấp dẫn không chịu phai nhạt, mặc dù nó khá sai sự thật" này (Hudson 1976, tr. 132). "Riêng việc nó trùng khớp quá mức với hình ảnh phổ biến" về tính cách kép đã đủ giải thích cho sự dai dẳng của nó (Heath 1974, tr.3). Từ lâu, công việc chính của các nhà viết tiểu sử của Dodgson là giải quyết điều mà họ coi là một nghịch lý: "Bằng cách nào mà Lewis Carroll, một nhà toán học khó tính, dè dặt và sùng đạo sâu sắc thời Victoria, lại có thể tạo ra những câu chuyện đã trở thành những tác phẩm thiếu nhi kinh điển được yêu thích nhất trong văn học Anh?" (Cohen 1995, tr. 19).

Nhiều nhà nghiên cứu đã cố gắng giải quyết bí ẩn này và chứng minh sự thống nhất (hoặc ít nhất là sự tương đồng) giữa hai mặt của thiên tài của Dodgson. Một số người đã diễn giải quá mức các câu chuyện Alice nhằm tìm kiếm những chân lý toán học ẩn náu mà chỉ một nhà toán học mới có thể lồng vào đó. Một số người khác đã phóng đại phần toán học giải trí của Dodgson mà chỉ một nhà văn hài hước mới có thể tạo ra. Nhưng từ lâu, chiến lược chính của các người theo chủ nghĩa Carroll là làm cho cái tên Dodgson trở nên mờ nhạt, chìm về phía sau vì cho rằng "những công trình của Charles Dodgson kém thú vị hơn những tác phẩm của Lewis Carroll".

Việc hạ thấp Dodgson để ủng hộ Carroll đã bắt đầu từ khi Dodgson còn sống. Ví dụ, một người viết nhận xét về cuốn sách *Pillow–Problems* của Dodgson, một tập hợp các bài toán mà ông ký bằng tên thật của mình, đã bày tỏ một cách rõ ràng thị hiếu của mình:

"Và, sau cùng, thế giới cần Lewis Carroll, người một mình hiểu được "trí thông minh siêu hình" của trẻ nhỏ, và tức thì đưa người lớn tuổi nhất trong chúng ta đi dạo qua vùng đất mơ ước của chúng, hơn là ông Dodgson, người không có vẻ gì là một người du hành trong biển sâu của tư tưởng (Newton, Kelvin là vậy) mà chỉ là một nhà toán học tao nhã."

Ngoài sự bực bội khi thấy danh tính của mình bị tiết lộ, người ta có thể tưởng tượng được Dodgson có thể đã cảm thấy khó chịu như thế nào khi danh tiếng văn học can thiệp vào việc đánh giá các công trình toán học của ông. Tuy nhiên, sự cám dỗ của việc liên kết hai cái tên là rất mạnh, và nhiều đồng nghiệp làm toán của Dodgson chắc chắn đã không cưỡng lại được. Ví dụ, Hugh MacColl, người đã đã viết nhận xét về một số cuốn sách toán của Dodgson trong tạp chí *Athenaeum* đã đề cử cuốn sách *Lý thuyết mới của sự song song* của Dodgson, mà ông thấy "cũng thú vị như những điều kỳ lạ cô bé Alice đã gặp ở xứ sở diệu kỳ". Một ví dụ khác xảy ra vào năm 1894, khi một bài toán logic do Dodgson nghĩ ra được lưu truyền giữa các nhà logic học người Anh. John Venn muốn thảo luận về nó trên báo in và xin phép Dodgson. Ông đồng ý nhưng yêu cầu Venn "không được đề cập với bất kỳ ai *tên thật* [của ông], một cách có liên quan đến bút danh [của ông]". Venn hẳn đã rất bối rối, vì ông đã không đề cập đến cả hai cái tên trong cuốn sách của mình, mà chỉ gọi bài toán logic đang được thảo luận là Bài toán Alice, "người đề xuất nó, đối với độc giả nói chung, được biết đến nhiều hơn trong một nhánh văn học rất khác."

Tình hình sau đó không có nhiều thay đổi. Trong cuốn *Cơ sở về Lịch sử toán* học, Nicolas Bourbaki gọi *Chuyên luận về định thức* của Dodgson là "một cuốn sách khó hiểu, với sự cẩn thận và tỉ mỉ đặc trưng của ông, tác giả nổi tiếng của *Alice ở xứ sở diệu kỳ*" mà không nêu tên tác giả của nó; chỉ cần biết rằng chuyên luận được viết bởi tác giả của *Alice*. Sự nổi tiếng ngày nay của Dodgson trong giới toán học chắc chắn đã được hưởng lợi từ vị thế văn học của ông. Ngày nay, có một nhánh nghiên cứu đáng nể chuyên về Dodgson trong cộng đồng các nhà sử học toán học, không như nhiều đồng nghiệp đã bị lãng quên của ông. Dodgson có lẽ sẽ không bao giờ thiếu độc giả, nhưng ông luôn đối mặt với nguy cơ không được đọc một cách nghiêm túc. Độc giả hiện đại của Dodgson biết rằng họ đang đọc "tác giả của Alice." Thật vậy, có lẽ phần lớn độc giả của Dodgson đọc sách của ông chính là vì họ biết ông là tác giả của *Alice*. Như vậy, họ thường mong gặp những điều huyền ảo ở những nơi không có nhiều, và khi không có nhiều, đôi khi họ thêm thắt một chút.

Thật là xấu hổ cho nữ hoàng nếu bài viết này kết thúc mà không có một vài lời về cách bà được miêu tả trong *câu chuyện*. Mọi người dễ dàng hiểu được sự ngạc nhiên của bà khi nhận được chuyên luận về định thức của Dodgson, nếu bà quả thựcnhận được cuốn sách, với lý do rằng "nữ hoàng, giống như phần còn lại của thế giới, tin rằng ông ấy chỉ đơn thuần là một người hài hước" (McKenna 1895, tr. 8). Bà có lẽ cũng sẽ phản ứng tương tự nếu nhận được một chuyên luận về thực vật nhiệt đới hoặc một nghiên cứu về nghệ thuật thời trung cổ, khi tất cả những gì bà mong đợi là một câu chuyện cho trẻ em. Tuy nhiên, sự đặc biệt của *câu chuyện* rõ ràng nảy ra từ định kiến sáo mòn rằng toán học và văn học thuộc về các lĩnh vực tách biệt và không thể dung hòa. Nữ hoàng đã rất ngạc nhiên vì bà mong đợi tác giả là "một người hài hước", nhưng điều khiến cho sự ngạc nhiên của bà vô cùng thú vị là nếu như bà đã kỳ vọng tác giả là bất kỳ ai khác khác ngoài "một người hài hước", có lẽ bà sẽ không thể ngờ ông ta là một nhà toán học.

Ngoài sự ngạc nhiên, nhiều phiên bản của *câu chuyện* cho rằng nữ hoàng không hề cảm thấy thích thú. Chúng ta đã thấy một số nhà bình luận phủ nhận câu chuyện với lý do rằng việc tặng một cuốn sách như vậy là vô lễ. Nếu *câu chuyện* quả thực đã xảy ra, những nhà bình luận như vậy cho rằng nữ hoàng sẽ cảm thấy bị xúc phạm. Chúng tôi không biết năng lực toán học của nữ hoàng, nhưng giả sử rằng bà không phải là một người yêu thích toán học, chúng ta vẫn thấy không có lý do gì để bà cảm thấy không hài lòng hoặc không được tôn trọng (mặc dù có thể đã thất vọng). Đầu tiên, chúng ta có thể tưởng tượng rằng nữ hoàng cảm thấy thích thú với sự cố nhỏ này, cũng như cách nó đã khiến nhiều thế hệ độc giả sau này thích thú. Và thứ hai, lời buộc tội thiếu tôn trọng dường như tận dụng niềm tin rộng rãi rằng toán học là một thứ buồn tẻ, không phù hợp với những nghi thức xã giao, và do đó không thích hợp để làm một món quà chân thành.

Câu chuyện Dodgson tặng một cuốn sách toán cho nữ hoàng Victoria là một giai thoại kinh điển trong thế giới toán học. Nó bảo chúng ta rằng một tiểu thuyết gia thành công khó có thể là một nhà toán học chuyên nghiệp và các nữ hoàng có lẽ không hứng thú với những cuốn sách toán. Không cần phải xem xét nó một cách quá nghiêm túc. Nhưng thành công của nó chắc chắn phản ánh những điều cũ rích nhưng còn mãi về toán học là gì, nhà toán học là ai, và sự sáng tạo toán học bắt nguồn từ đâu.

Tài liệu tham khảo

[1] Beale, Tony (1973). C. L. Dodgson: mathematician. In Denis Crutch, ed. *Mr. Dodgson*, pp. 26 – 33. London: The Lewis Carroll Society.

[2] Bok, Edward (1920). *The Americanization of Edward Bok: The Autobiography of a Dutch Boy Fifty Years Later*. New York: Charles Scribner's sons.

[3] Cohen, Morton N. (1995). *Lewis Carroll: A Biography*. New York: Alfred A. Knopf.

[4] Cohen, Morton N., and Roger Lancelyn Green, eds. (1979). *The Letters of Lewis Carroll*. New York: Oxford University Press.

[5] Collingwood, Stuart Dodgson (1898). *The Life and Letters of Lewis Carroll (Rev. C. L. Dodgson)*. London: T. Fisher Unwin.

[6] Heath, Peter, ed. (1974). The Philosopher's Alice. London: Academy Editions.

[7] Hudson, Derek (1976). *Lewis Carroll: An Illustrated Biography*. London: Constable.

[8] Humberstone, Lloyd (1995). Names and pseudonyms. *Philosophy* 70 (274), 487 – 512.

[9] McKenna, Ethel Mackenzie (August 1895). The author of "Alice in Wonderland." *Ladies' Home Journal* 8.

[10] Wakeling, Edward, ed. (1999). *Lewis Carroll's Diaries: The Private Journals of Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll)*, vol. 5. The Lewis Carroll Society, Bedfordshire: Luton Press.

[11] Wakeling, Edward, ed. (2005). *Lewis Carroll's Diaries: The Private Journals of Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll)*. Vol. 9, The Lewis Carroll Society, Herefordshire: Clifford Press.

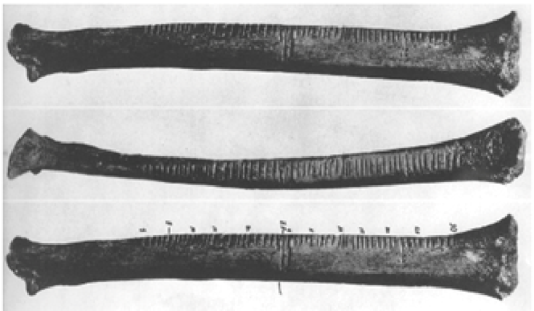
[12] Wakeling, Edward (2015). *Lewis Carroll: The Man and His Circle*. London: I. B. Tauris.

[13] Warner Charles Dudley, ed. (1897). *A Library of the Wold's Best Literature: Ancient and Modern*. Vol. 8. New York: The international Society.

MỘT SỐ CÁCH GHI SỐ THỜI CỔ ĐẠI

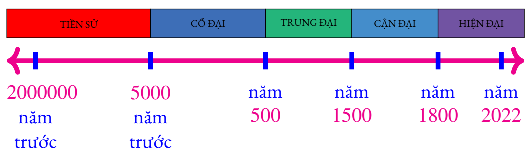
PHAN THANH HỒNG

Mặc dù ngày nay, một số bộ lạc thổ dân sống ở rừng rậm Amazon chỉ có những từ: "một", "hai" và "nhiều" để nói về số lượng hay một số bộ lạc khác chỉ đếm từ 1 đến 5, từ xa xưa người tiền sử đã đếm những số lớn hơn bằng cách đánh dấu lên đá hay xương động vật.



Hình 1: Những mảnh xương chó sói có các khía, được cho là ra đời cách đây 30000 năm và là công cụ để đếm của người thời tiền sử.

Từ hàng nghìn năm trước, ở những nền văn minh khác nhau, con người đã phát minh ra những hệ thống số để phục vụ mục đích đầu tiên là ghi nhớ những đại lượng lớn. Những con số đó chính là khởi nguồn của toán học. Trong bài viết này chúng ta hãy cùng tìm hiểu về những cách ghi số của những nền văn minh khác nhau thời cổ đại nhé.



Trước tiên, các bạn hãy quan sát 5 cụm ký tự trong hình 2. Chúng cùng nói về một thứ. Bạn có đoán được không?

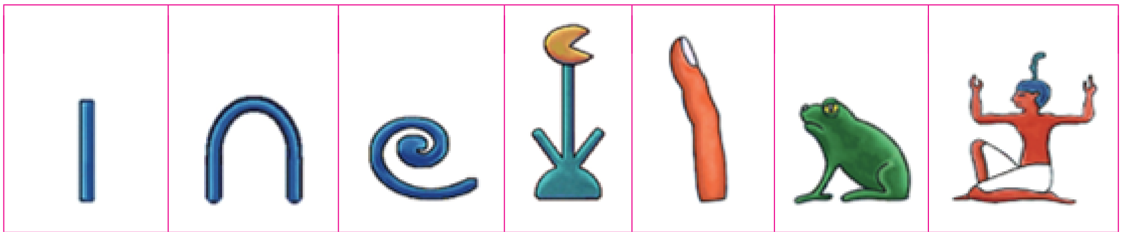
Hình 2: Số 23 trong một số hệ ghi số cổ đại.

Đó là những cách ghi số cổ của số 23. Em có thể đoán xem những ký hiệu nào biểu diễn hàng chục, hàng đơn vị tương ứng với cách chúng ta viết số 23 ngày nay?

Số Ai Cập cổ

Ai Cập cổ đại, một trong những cái nôi văn minh của nhân loại, là vùng đất nằm dọc hai bên sông Nile, phía Bắc của châu Phi. Toán học đã xuất hiện ở đây cách đây hơn 5000 năm. Những thành tựu toán học là một trong những yếu tố quan trọng giúp người Ai Cập cổ xây dựng nên những kim tự tháp mà một số vẫn còn tồn tại đến ngày nay.

Người Ai Cập cổ sử dụng những ký hiệu bằng hình ảnh để viết các số (được gọi là chữ viết *tượng hình*). Những chữ số của họ như sau.

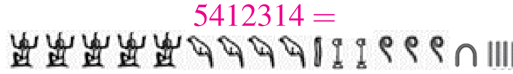


1	10	100	1000	10000	100000	1000000
Gạch đứng	Móng ngựa	Cuộn dây	Hoa sen	Ngón tay	Con ếch	Vị thần

Số 4 được viết là |||| còn ||||||| là số 7. Để viết các số từ 10 trở lên, người ta dùng thêm ký hiệu ∩ (để biểu diễn số 10), chẳng hạn số 17 được viết là ∩||||||| và số 27 được viết là ∩∩|||||||. Số lượng các ký hiệu ∩ cho biết có bao nhiêu chục, số các ký hiệu | cho biết có bao nhiêu đơn vị trong số được biểu diễn. Với những số từ 100 trở đi họ dùng ký hiệu 𓍢 (biểu diễn số 100) và viết các số theo cách tương tự; và cứ như vậy cho những số lớn hơn. Để biết giá trị của số được biểu diễn ta cộng các giá trị ứng với những ký hiệu biểu diễn nó. Chẳng hạn, 𓍢𓍢∩∩∩||| $= 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 233$.

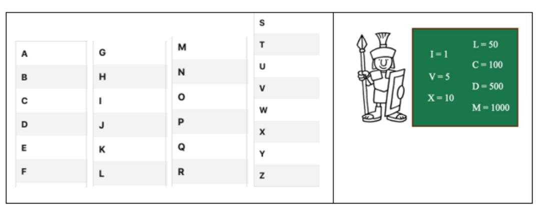
Ngày nay, ta dùng các hàng khác nhau để biểu diễn số: hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm,... Hàng chục đứng ngay trước hàng đơn vị và lớn gấp 10 lần hàng đơn vị, hàng trăm đứng ngay trước hàng chục và lớn gấp 10 lần hàng chục,... Đó là cách ghi số trong hệ "cơ số 10" hay "*thập phân*". Cách ghi số của người Ai Cập cổ cũng vậy nhưng việc viết các số phức tạp hơn so với cách viết ngày nay của chúng ta, nhất là với những số lớn. Chẳng hạn để viết số 5412314, người Ai Cập cổ cần dùng 20 ký hiệu!

5412314 =



Số La Mã

Các bạn có nhìn thấy các ký hiệu I, II, ..., X trên mặt đồng hồ, trong sách vở, trên bảng khi thầy cô giáo đánh số các mục trong bài giảng? Đó là các số La Mã. La Mã là tên gọi một đế chế cổ đại thuộc châu Âu mà có thời kỳ từng thống trị một vùng đất rộng lớn của châu lục này. Người La Mã sử dụng một số chữ cái từ bảng chữ cái của họ để biểu diễn những chữ số.



Các chữ cái và chữ số La Mã

Số 4 được viết là IV, còn số 6 là VI. Khi một chữ số lớn được viết ngay trước một chữ số nhỏ hơn hay bằng nó, ta cộng chúng lại với nhau để được con số cần biểu diễn, như trường hợp số 6 = VI. Ngược lại, ta thực hiện phép trừ, giống như trường hợp số 4 = IV.

IV = 4: V – I = IV 5 – 1 = 4	VI = 6: V + I = VI 5 + 1 = 6

Tương tự, ta có:

XXXII = 32:	X+X+X+I+I = XXXII 10 + 10 + 10 + 1 + 1 = 32
XL = 40:	L – X = XL 50 – 10 = 40

Theo cách người La Mã viết số, khi một chữ số nhỏ đứng trước chữ số số lớn hơn, ta trừ số lớn cho số bé. Trong đó I, V chỉ được trừ từ những giá trị không quá X. Ví dụ, ta có thể viết IX nhưng không thể viết IL; X, L chỉ được trừ bởi những chữ số không vượt quá C; C, D chỉ được trừ cho những chữ số không vượt quá M. Ngoài ra, còn có những quy tắc khác như sau:

– Luôn viết số bằng cách dùng ít ký hiệu nhất, chẳng hạn ta viết XX để biểu diễn 20 thay vì VVVV.

– Không có nhiều hơn 3 ký tự giống nhau trong một hàng (đơn vị, chục, trăm,...). Ví dụ ta viết XIV thay vì XIIII để biểu diễn 14.

– Để biểu diễn số gấp hơn 1000 lần, người La Mã dùng vạch ngang phía trên các dãy chữ số, ví dụ $\overline{\mathrm{VI}}\mathrm{II} = 6 \times 1000 + 2 = 6002$. Ở đây, VI có thêm vạch ngang trên đầu biểu diễn giá trị $6 \times 1000 = 6000$. Những chữ số có vạch ngang trên đầu đứng trước các chữ số còn lại.

– Không đặt nhiều hơn 1 số nhỏ đứng trước 1 số lớn. Ví dụ ta không viết IIX để biểu diễn 8.

Để dễ dàng viết số La Mã, ta viết theo từng hàng từ lớn đến nhỏ (như các số mà ngày nay chúng ta dùng). Ví dụ, để viết số 645, ta viết 600 trước (DC), rồi 40 (XL) và cuối cùng là 5 (V). Vậy DCXLV = 645. Số La Mã là hệ số cổ duy nhất còn được dùng ngày nay nhưng cũng chỉ mang ý nghĩa tượng trưng hay để trang trí.

Số Babylon

Người Babylon, sống vào khoảng 5000 năm trước ở vùng đất Lưỡng Hà (một khu vực ở phía Tây của Châu Á). Họ đã tạo ra những công cụ tính toán thiên văn, hình học đáng kinh ngạc và họ đã phát minh ra bàn tính.

Để ghi số, ban đầu người Babylon chỉ sử dụng hai ký hiệu

𒁹	1
𒌋	10

để viết số từ 1 tới 60, chẳng hạn số 7 là , số 27 là 𒌋𒌋.

Những ký hiệu này được sử dụng tương tự như những chữ số La Mã (bằng cách cộng các ký hiệu xuất hiện trong số được biểu diễn). Số 𒌋𒌋 được viết bởi 2 ký hiệu 𒌋 để biểu diễn 2 chục, và 7 ký hiệu 𒁹 cho 7 đơn vị. Do vậy 𒌋𒌋 = 27.

Sau đó, một ký hiệu mới được sử dụng để biểu diễn chữ số 0 (các bạn có thấy nó là ký tự chỉ chữ số 1 được viết ngiêng?)

Để viết những số từ 60 trở đi, người Babylon xếp các ký hiệu theo các nhóm. Điều này giống như ngày nay các bạn viết 159 bằng cách viết số 1 đầu tiên ứng với hàng trăm, số

5 tiếp theo ở hàng chục và cuối cùng là số 9 ở hàng đơn vị. Như vậy $159 = 1 \times 100 + 5 \times 10 + 9$.

Để viết số 63, người Babylon viết ký hiệu 𒁹 ở hàng 60 và ba ký hiệu 𒁹 ở hàng đơn vị và để khoảng trống để phân biệt hai nhóm.

𒁹 𒁹𒁹𒁹 = 63. Trong cách viết này, ta thấy có 4 ký hiệu 𒁹 nhưng ký hiệu đầu tiên được viết tách biệt so với 3 cái còn lại để biểu diễn 1 lần 60 tức 60, 3 ký hiệu còn lại biểu diễn số 3, và như vậy ta có số $60 + 3 = 63$.

Điều này giống như chúng ta viết chữ số 1 ở hàng chục và chữ số 1 ở hàng đơn vị để biểu diễn số 11: nó có nghĩa là 1 chục và 1 đơn vị. Trong cách ghi số Babylon cổ, nó có nghĩa là 1 lần 60 và 1.

Để hiểu rõ hơn, ta hãy viết số chín mươi ba theo hệ ghi số hiện đại. Việc này thật dễ dàng phải không? Tuy nhiên để hiểu cách viết của người Babylon, ta sẽ thực hiện theo cách như sau: do các số của chúng ta ngày nay sử dụng hệ cơ số 10, ta chia chín mươi ba cho 10 được thương là 9, nên ta viết 9 vào hàng chục

x 10 x 10	x 10	x 1
	9	

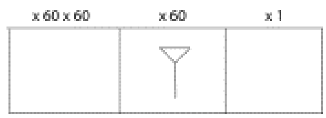
Phép chia đó có số dư 3 nên ta viết 3 vào hàng đơn vị

x 10 x 10	x 10	x 1
	9	3

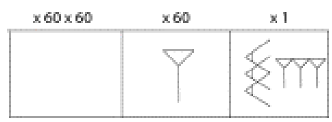
Vậy là ta viết: 93.

Thế còn người Babylon viết số 93 trong hệ thống số của họ như thế nào?

Hệ thống số Babylon sử dụng hệ cơ số 60: ta chia 93 cho 60 được thương là 1 nên ta viết 1 ở hàng 60

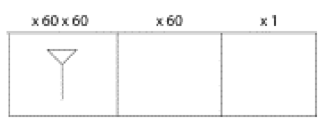


Phép chia có số dư là 33, nên ta sẽ viết 33 ở hàng đơn vị. Số 33 được biểu diễn bởi 3 ký tự mười cộng với 3. Nên ta đặt 3 ký tự 𒌋 và 3 ký tự 𒁹 vào hàng đơn vị như sau

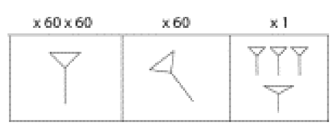


Vậy 𒁹 𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹 = 93.

Tiếp theo, chúng ta hãy thử viết số lớn hơn. Chúng ta hãy cùng viết số 3604 bằng các chữ số Babylon nhé. Số 3604 lớn hơn $60 \times 60 = 3600$, nên ta cần biểu diễn số này từ hàng thứ ba tính từ hàng đơn vị. Ta chia số 3604 cho 3600 được thương là 1 nên ta viết ký hiệu 𒁹 vào hàng 60×60



Số dư của phép chia là 4 nhỏ hơn 60 nên ta viết ký hiệu 𒌋 vào hàng 60, và 4 ký hiệu 𒁹 vào hàng đơn vị.



Vậy, số 3604 được người Babylon viết như sau:

Cách ghi Số của người Ai Cập cổ, La Mã hay chúng ta ngày nay dùng cơ số 10 còn cách ghi số của người Babylon sử dụng cơ số 60. Do số 60 chia hết cho nhiều số: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30$ và 60, nên việc chia các đại lượng được thực hiện dễ dàng hơn, ít phải dùng đến các phân số. Việc sử dụng đơn vị thời gian: 1 phút $= 60$ giây, 1 giờ $= 60$ phút ngày nay là một ảnh hưởng của người Babylon đấy.

Số Maya

Kim tự tháp Tikal của người Maya

Người Maya được cho là đã xuất hiện từ rất xa xưa. Họ đã xây dựng hệ thống lịch chính xác và toán học của họ là đại diện tiêu biểu cho toán học của dân cư ở châu Mỹ thời cổ đại.

Nói về cách ghi số, người Maya cổ dùng hệ cơ số 20, gồm 3 ký hiệu: , •, — ứng với $0, 1, 5$ và biểu diễn số theo chiều dọc. Chữ số ở hàng cao hơn được viết phía trên, chữ số ở hàng thấp hơn được viết phía dưới. Điều này tương tự chúng ta viết số ngày nay: ta đặt số ở hàng cao hơn bên trái còn số ở hàng thấp hơn bên phải.

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$	hàng nghìn
$10^2 = 10 \times 10 = 100$	hàng trăm
$10^1 = 10$	hàng chục
$10^0 = 1$	hàng đơn vị

Do sử dụng hệ cơ số 20, số Maya được biểu diễn trong phần bên phải của bảng trong Hình 3 chính là số $1 \times 8000 + 0 \times 400 + 10 \times 20 + 7 \times 1 = 8207$. Bởi vì, ta thấy •, , $=$, •• ứng với $1, 0, 10, 7$ lần lượt ở các hàng 8000, 400, 20 và đơn vị. Chú ý rằng, trong một hàng, số có giá trị cao hơn lại được viết phía dưới số có giá trị lớn hơn chẳng hạn ••: hai ký tự • (số 1) được viết bên trên ký tự — (số 5). Ký hiệu để biểu diễn 0 ở một hàng giống như ta viết 101 và giúp ta phân biệt số 101 với số 11. Điều này cũng tương tự như cách ghi số Babylon.

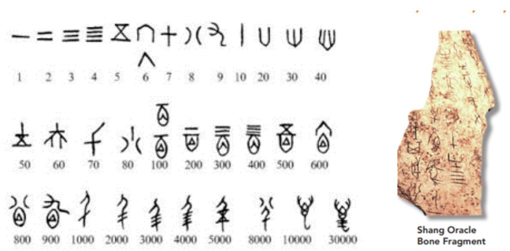
$20 \times 20 \times 20 = 8000$	•
$20 \times 20 = 400$	
20	$=$
1	••

Hình 3.

Người ta cho rằng hệ cơ số 10 được dùng phổ biến vì con người có 10 ngón tay, còn người Maya vốn không đi giày nên họ đếm bằng cả các ngón chân nữa. Họ dùng hệ cơ số 20 là vì thế!

Số Trung Hoa cổ

Trung Hoa cổ đại cũng là một trong những nền văn minh cổ lớn của thế giới. Khoảng 3500 năm trước, người Trung Hoa khắc lên những mảnh mai rùa những ký hiệu khác nhau thể hiện số và chữ. Một số trong đó như sau:



Một số ký hiệu viết trên một mảnh mai rùa.

Cách ghi số Trung Hoa cổ tương tự như cách ghi số La Mã: Các chữ số giá trị lớn được đặt bên trái các chữ số có giá trị nhỏ hơn, số được biểu diễn có giá trị bằng tổng các chữ số trong biểu diễn của nó. Ví dụ  biểu diễn số $10000 + 500 + 30 + 5 = 10535$. Những biểu tượng khắc trên những mảnh mai rùa phát triển theo thời gian và hình thành nên chữ viết của người Trung Hoa ngày nay.

Các bạn có thấy rằng cách biểu diễn số của người Ai Cập, La Mã và Trung Hoa cổ có điểm tương đồng? Người ta nói đó là những hệ thống số "*đơn phân*". Mỗi ký hiệu thể hiện một giá trị không thay đổi cho dù nó đứng ở vị trí nào. Mỗi số viết ra biểu diễn một đại lượng được xác định bằng cách cộng (hay trừ như ở số La Mã) những giá trị tương ứng với các ký hiệu được sử dụng trong đó. Số mà chúng ta dùng ngày nay là một hệ thống số "*sắp theo hàng*" vì các ký hiệu có giá trị phụ thuộc vào hàng mà nó được xếp vào. Ở hàng chục, số 1 có nghĩa là một chục, nhưng số 1 ở hàng đơn vị có nghĩa là 1 đơn vị. Trong khi đó, số của người Babylon và Maya là một dạng hỗn hợp vừa được "*sắp theo hàng*" vừa cần cộng những ký hiệu trong mỗi hàng để biết giá trị của số được biểu diễn.

Vậy là qua bài viết này chúng ta đã biết những cách ghi số từ thời xa xưa con người ở những nơi khác nhau trên Trái Đất. Những đại lượng phức tạp hơn như phân số chẳng hạn cũng đã được người cổ đại viết ra và sử dụng. Chúng ta sẽ tìm hiểu thêm về những thành tựu toán học của loài người ở những thời kỳ trước đây trong những số báo sắp tới nhé.

Tài liệu, nguồn tham khảo

[1] R. L. Cooke, History of math, Wiley, 2013.

[2] https://www.britannica.com/

[3] https://www.penn.museum/

[4] https://www.cemc.uwaterloo.ca

BÁC NÔNG DÂN TỐT BỤNG

GIA DƯƠNG

Một lần nọ, thám tử Xuân Phong lên đường để truy tìm một kẻ tội phạm có biệt hiệu là Bắp Cải đang lẩn trốn trong một khu lán trại hẻo lánh có tên là Vườn Ngô. Xuân Phong vừa đi vừa hỏi đường vì bản đồ không chỉ rõ khu Vườn Ngô ở đâu, chắc hẳn đó là một địa điểm mới trong vùng. Thám tử đang lơ ngơ tìm đường thì bỗng nhiên một bác nông dân vui tính, tay cầm cuốc, mồ hôi nhễ nhại, xuất hiện trước mặt. Bác hồ hởi vừa nói vừa đưa tay ra hiệu: “Tôi biết đường đến khu Vườn Ngô chứ, tôi đã từng đến đó rồi. Lần đó, tôi đi mất tận 4 ngày và 4 đêm. Ngày và đêm đầu tiên tôi đi trên đường cái thẳng về phía bắc, và đi được một phần ba quãng đường. Sau đó tôi quay về phía tây và gắng sức đi xuyên qua rừng mất một ngày một đêm nữa, và đi được quãng đường chỉ bằng nửa của ngày đêm đầu tiên. Ngày và đêm thứ ba tôi lại phải đi xuyên qua rừng tiếp, và đi về phía nam và cuối cùng lại đi ra đường cái dẫn về phía đông. Tôi đi rảo bước theo con đường đó cả ngày cả đêm thứ tư, đi hết 30 km và thế là đặt chân đến được khu Vườn Ngô, nơi mà thám tử đang tìm. Đấy, thám tử cứ đi theo con đường sáng suốt như tôi đã đi là thế nào sang tới ngày thứ 5 sẽ tới được Vườn Ngô”.

Xuân Phong suy nghĩ một chút rồi xua tay trả lời “Cảm ơn bác nhé. Nếu mọi thứ cứ đúng như bác nói thì ngay ngày mai tôi đã có thể đặt chân tới Vườn Ngô và bắt được tên Bắp Cải.”

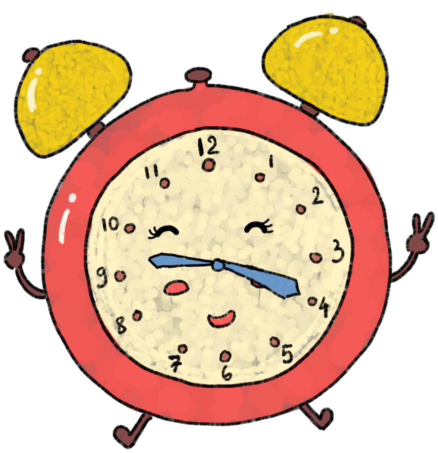
Xuân Phong có lập luận đúng không nhỉ? Theo em, bác nông dân đã đi bao nhiêu km để tới Vườn Ngô, còn Xuân Phong thì nghĩ sẽ cần phải đi hết bao nhiêu km?

CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

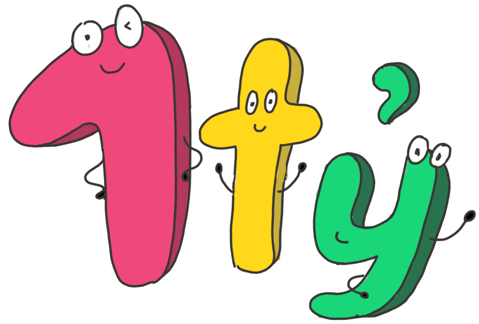
1. Một lần nọ, sau cơn mưa, bác Tuấn đi vào rừng để hái nấm. Bác bê khệ nệ được cả một sọt nấm nặng trĩu về. Nhưng thật buồn cho bác là về đến nhà, bác mới biết là trong số nấm tươi mới hái được thì có tới tận 90% thành phần là nước, nên hoá ra bác mất công mang nước về suốt cả một quãng đường dài. Sau khi nấm được hong khô đi chút, khối lượng của đống nấm bị giảm đi 15 kg, và bây giờ nước chỉ chiếm 60% khối lượng. Hỏi lúc đầu bác Tuấn đã mang được bao nhiêu ki–lô–gam nấm từ rừng về nhà?

2. Ông Ninh cùng với con trai mình và ông Phúc cùng với con trai mình đi ra hồ câu cá. Ông Ninh bắt được số con cá bằng với số con cá mà con trai ông bắt được. Còn ông Phúc lại bắt được số con cá nhiều gấp ba lần số con cá mà con trai ông bắt được. Họ bắt được tổng cộng 35 con. Con trai của ông Ninh cùng đi câu cá tên là Giao. Hỏi con ông Phúc tên là gì và mỗi người hôm đó bắt được bao nhiêu con cá?

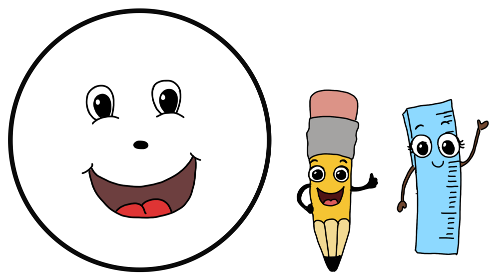
3. Chiếc đồng hồ treo tường nhà bạn Lâm chỉ 9 giờ 20 phút. Hỏi lúc đó góc tạo bởi kim giờ và kim phút bằng bao nhiêu độ (góc tương ứng với một vòng tròn là 360 độ)?



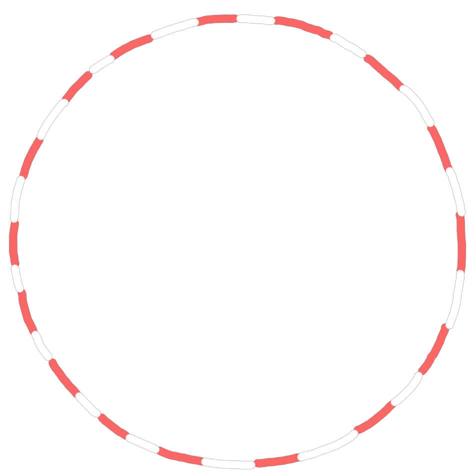
4. Tích của một tỷ số tự nhiên bằng đúng 1 tỷ. Hỏi giá trị lớn nhất của tổng của chúng bằng bao nhiêu?



5. Làm thế nào để xác định tâm của một hình tròn nếu chỉ có một cái bút chì và một cái thước kẻ thông thường có hai cạnh song song (chiều rộng của thước kẻ nhỏ hơn đường kính của hình tròn).

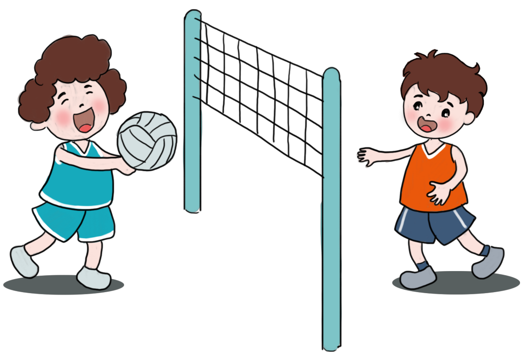


6. Tất cả các điểm của một đường tròn được tô bằng hai màu: trắng hoặc đỏ. Em hãy chứng tỏ rằng luôn có một tam giác cân có các đỉnh nằm trên đường tròn đã cho sao cho các đỉnh của nó đều được tô bởi cùng một màu.



LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 4 năm 2022)

1. Trong một giải thi đấu bóng chuyền, mỗi đội sẽ lần lượt thi đấu với các đội còn lại hai lần. Cuối cùng người ta thấy rằng 80% các đội có ít nhất một trận thắng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đội đã tham gia trong giải đấu đó biết rằng các trận đấu bóng chuyền không có tỷ số hoà?



Lời giải. Do trong môn bóng chuyền không có trận hoà, nên đội nào không thắng ít nhất một trận có nghĩa là đội đó thua tất cả các đội còn lại. Nhưng chỉ có thể có duy nhất một đội là như vậy, vì không thể có hai đội A, B mà A thua B đồng thời B thua A trong cùng trận đấu. Vì thế 20% số các đội bao gồm đúng duy nhất 1 đội, có nghĩa là chỉ có đúng 5 đội tham gia giải đấu đó.

2. Một buổi cắm trại có 9 học sinh nam và 10 học sinh nữ tham gia. Trước đó, mỗi học sinh nam đều đã quen với cùng một số lượng các học sinh nữ tham gia buổi cắm trại đó, còn tất cả các học sinh nữ đều quen số lượng học sinh nam hoàn toàn khác nhau (không có hai em nữ nào có số lượng bạn nam quen biết giống nhau). Hỏi điều này có thể xảy ra hay không?

Lời giải. Giả sử mỗi học sinh nam quen k học sinh nữ, thì khi đó có tất cả $9k$ mối quen biết. Do các bạn nữ có số bạn nam quen biết là hoàn toàn khác nhau, nên điều này chỉ có thể xảy ra nếu một bạn quen với tất cả 9 bạn nam, một bạn quen với 8 bạn nam, vv... và cuối cùng có một bạn không quen bạn nam nào. Vì thế số mối quen biết sẽ là $9+8+7+\cdots+1+0=45$. Do đó $9k=45$, tức là $k=5$. Có thể dễ dàng chỉ ra một sơ đồ quen biết như sau. Ở bảng dưới đây, dấu "$+$" biểu diễn học sinh nam và học sinh nữ quen biết nhau với số thứ tự được chỉ ra theo chiều ngang và chiều dọc tương ứng.

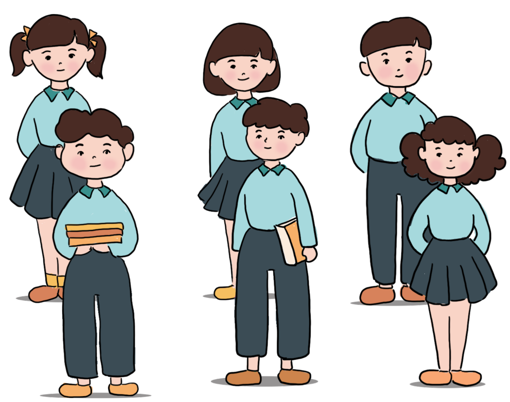
Bạn nữ (theo chiều ngang), Bạn nam (theo chiều dọc)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		+	+	+	+					+
2			+	+	+				+	+
3				+	+			+	+	+
4					+		+	+	+	+
5						+	+	+	+	+
6						+	+	+	+	+
7						+	+	+	+	+
8						+	+	+	+	+
9						+	+	+	+	+

3. Trên bảng có ghi ít nhất hai số nguyên đôi một khác nhau. Hơn nữa tổng của hai số bất kỳ trong chúng cũng được ghi trên đó. Hỏi có bao nhiêu số được viết ra trên bảng?

Lời giải. Ta sẽ chỉ ra rằng trên bảng không thể có nhiều hơn 1 số nguyên dương. Thật vậy, giả sử M là số nguyên dương lớn nhất trong các số được viết trên bảng, hơn nữa giả sử có thêm một số nguyên dương m nữa nhỏ hơn, tức là $0 < m < M$. Khi đó trên bảng phải có cả số $m+M$, lớn hơn M, và điều này là không thể. Tương tự cũng chỉ ra được rằng trên bảng có không quá 1 số nguyên âm. Như vậy trên bảng hoặc có 2, hoặc có 3 số được viết ra. Ví dụ như 2 số $\{0,4\}$, hoặc 3 số $\{-4,0,4\}$.

4. Một số các bạn học sinh lớp 7 đứng xếp thành hàng ngang. Trước mặt mỗi bạn lại có một học sinh lớp 6 thấp hơn mình. Em hãy chứng tỏ rằng nếu hai hàng ngang của các học sinh hai lớp được xếp lại tăng dần theo chiều cao ở mỗi hàng, thì ở hai hàng mới, mỗi học sinh lớp 7 lại vẫn có trước mặt một học sinh lớp 6 thấp hơn mình.



Lời giải. Ta sẽ thực hiện cách đổi chỗ từng cặp học sinh một như sau: bắt đầu từ bạn lớp 6 cao nhất, đổi chỗ bạn cao nhất cho bạn hiện tại đang đứng ở vị trí thứ nhất; tiếp theo bạn cao thứ nhì đổi chỗ cho bạn đang đứng ở vị trí thứ 2. Cứ mỗi lần đổi chỗ hai bạn lớp 6 để sắp xếp theo thứ tự giảm dần, các bạn học sinh lớp 7 đứng đối diện hai bạn đó cũng được đổi giống như vậy. Sau khi các bạn lớp 6 đã được xếp theo thứ tự "đúng", có nghĩa là giảm dần theo chiều cao thì ở hàng của các bạn lớp 7, vị trí còn khá lộn xộn, chưa được xếp "đúng chỗ". Tuy nhiên vì mỗi lần đổi chỗ 2 bạn lớp 6 ta lại đổi 2 bạn lớp 7 đứng đối diện, nên các cặp đứng đối diện vẫn giữ nguyên chưa thay đổi sau khi sắp xếp các bạn lớp 6 theo thứ tự giảm dần.

Bây giờ ta giữ nguyên hàng của các bạn lớp 6, và tiến hành xếp các bạn lớp 7 theo thứ tự chiều cao giảm dần. Đầu tiên bạn cao nhất sẽ được đổi chỗ cho bạn đứng ở vị trí thứ nhất, rồi tiếp tới bạn cao nhì ... Các em có thể thấy ngay cứ sau mỗi lần đổi chỗ như thế ở hàng của lớp thì trước mặt mỗi bạn lớp 7 vẫn có một bạn lớp 6 có chiều cao thấp hơn. Vì vậy cuối cùng sau khi xếp ngay ngắn hàng lớp 7 giảm dần theo chiều cao thì điều kiện đặt ra của bài toán vẫn được đảm bảo.

5. Trên một bàn cờ vua người ta đặt một số quân cờ mà ở mỗi một hàng ngang và mỗi hàng dọc của bàn cờ đều có một số lẻ các quân cờ. Em hãy chứng tỏ rằng có một số chẵn các quân cờ đứng ở các ô màu đen của bàn cờ đó.

Lời giải. Đánh số bàn cờ các cột dọc, hàng ngang từ 1 tới 8 như trong hình minh hoạ sau. Tại các cột đánh số lẻ (các cột 1, 3, 5, 7), ta đặt chữ A vào các ô đen, tại các cột còn lại (2, 4, 6, 8) ta lại đặt chữ B vào mỗi ô đen. Tại các hàng ngang đánh số chẵn (hàng 2, 4, 6, 8), ta đặt chữ C vào mỗi ô trắng.

Số các quân cờ đặt tại các ô A được ký hiệu là n, số quân cờ đặt tại các ô B là m, và tại các ô C là k.

Các chữ A, C phủ kín các hàng $2, 4, 6, 8$. Mà tại mỗi hàng đó: tổng số quân cờ là số lẻ theo giả thiết.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		B		B		B		B
2	A	C	A	C	A	C	A	C
3		B		B		B		B
4	A	C	A	C	A	C	A	C
5		B		B		B		B
6	A	C	A	C	A	C	A	C
7		B		B		B		B
8	A	C	A	C	A	C	A	C

Vậy $n+k$ là tổng số quân cờ tại bốn hàng đánh số chẵn và là tổng của 4 số lẻ, nên nó là một số chẵn.

Lập luận tương tự tại các cột $2, 4, 6, 8,$ ta có $m+k$ là số chẵn. Vì thế số các quân cờ đặt tại các ô đen là $m+n$ và là một số chẵn.

6. Bốn chú lùn cùng đi chẻ củi để chuẩn bị cho một mùa đông có nàng Bạch Tuyết tới ở cùng, họ chẻ mất 3 tiếng đồng hồ. Nếu như chú lùn thứ nhất làm nhanh gấp đôi, còn chú thứ hai làm chậm một nửa, thì 4 chú cũng sẽ hoàn thành trong từng đó thời gian. Còn nếu như, ngược lại, chú thứ nhất làm chậm một nửa, còn chú thứ hai làm nhanh gấp đôi, thì họ sẽ xoay sở đống củi chỉ trong 2 tiếng.

Hỏi 3 chú lùn đầu tiên sẽ chẻ hết đống củi trong bao nhiêu lâu mà không cần sự trợ giúp của chú thứ tư?

Lời giải. Ký hiệu a là số phần của đống củi mà chú lùn thứ nhất chẻ được trong 1 tiếng, tương tự b, c, d là số phần đống củi mà các chú lùn còn lại chẻ được trong một tiếng. Khi đó ta có

$$a+b+c+d=\frac{1}{3},$$
$$2a+\frac{b}{2}+c+d=\frac{1}{3},$$
$$\frac{a}{2}+2b+c+d=\frac{1}{2}.$$

Từ hai hệ thức đầu ta thấy $2a=b$.

Trừ hệ thức thứ 3 cho hệ thức thứ nhất ta có $b-\frac{a}{2}=\frac{1}{6}$.

Suy ra $a=\frac{1}{9}$, và $b=\frac{2}{9}$. Thay vào một trong hai hệ thức đầu ta tìm ra $c+d=0$. Có nghĩa là 2 chú lùn thứ 3 và thứ 4 không động chân động tay làm gì hết ($c=d=0$, do c, d là các số không âm). Vì thế có vắng chú nào trong hai chú này thì thời gian chẻ củi cũng không bị ảnh hưởng. Vậy ba chú lùn đầu vẫn sẽ chẻ xong đống củi trong thời gian 3 tiếng như vậy.

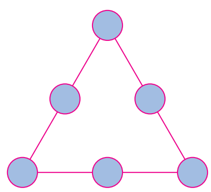
MAGIC TRIANGLE

TÁC GIẢ[1]

A Magic Triangle is an arrangement of the integers from 1 to n on the sides of a triangle such that each side has the same number of integers, called the order of the triangle, and that the sum of integers on each side is a constant, called the magic sum of the triangle. A Magic Triangle is also called a Perimeter Magic Triangle.

Now let's try to build some Magic Triangles!

Problem 1 (Magic Triangle of order 3 and magic sum 9)**.** Arrange the numbers from 1 to 6 into the circles in the triangle below so that the magic sum is equal to 9.



Solution: Let a, b, c be the numbers on the vertices of the triangle and S be the sum of all numbers in a side (the magic sum).

Summing the 3 sides of the triangle, we get:

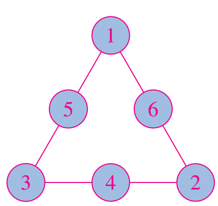
$$\begin{aligned}3S &= 3\times 9\\ &= (1+2+3+4+5+6)+(a+b+c),\end{aligned}$$

whence

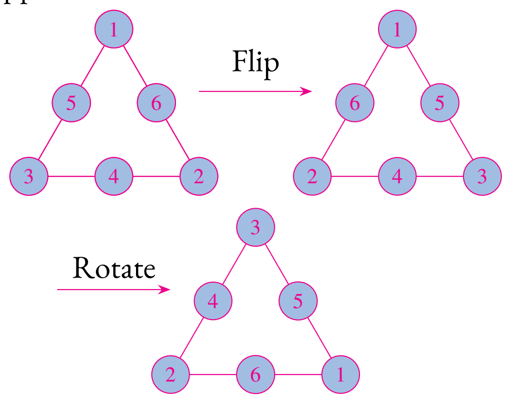
$$a+b+c = 27-21 = 6.$$

There is only one three–number set $(1,2,3)$ which sums up to 6.

We place $1,2,3$ to the vertices of the triangle. Since the magic sum is 9, we can compute the other numbers right away.



We can either flip or rotate a given Magic Triangle and a new set of Magic Triangles will appear:



Problem 2. Arrange the numbers from 1 to 6 to make a Magic Triangle of order 3 so that the sum of each side is equal to 13.

Solution: Arguing as above, we have the following equation:

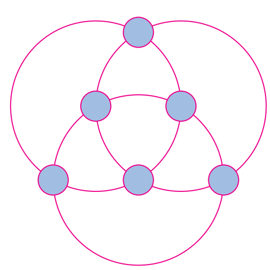
$$\begin{aligned}3S &= 3\times 13\\ &= (1+2+3+4+5+6)+(a+b+c),\end{aligned}$$

whence

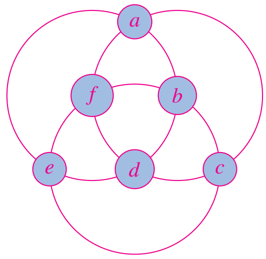
$$a+b+c = 39-21 = 18.$$

There are apparently no three–number subset of $\{1,2,3,4,5,6\}$ which sums up to 18 (the largest sum is: $6+5+4=15$). This means that there is no Magic Triangle with magic sum 13.

Problem 3. In the picture below, there are three big circles, each of which intersects the other two at four small cirles (colored gray). Arrange the numbers from 1 to 6 into the small circles so that the sum of numbers on each big circle is equal to 14.



Solution:



As shown in the diagram, we call the numbers in the small circles a, b, c, d, e, f, g, h. Thus, we have:

$$a+b+c+d+e+f=21, \qquad (1)$$
$$a+b+d+e=14, \qquad (2)$$
$$a+f+d+c=14. \qquad (3)$$

Adding Equations (2) and (3), we get:

$$(a+b+d+e)+(a+f+d+c)=28,$$

or

$$(a+b+c+d+e+f)+(a+d)=28.$$

Combining this equation with (1), we get:

$$a+d=7. \qquad (4)$$

Plugging (4) in (3) and (2), we have:

$$c+f=7,$$

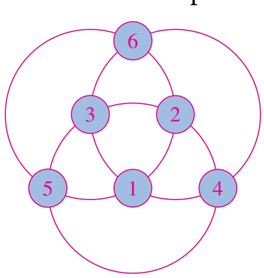
and

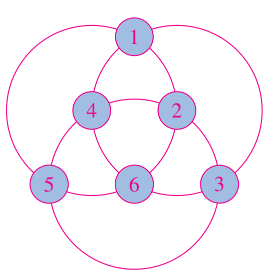
$$e+b=7.$$

We remark that each of the pairs (a,d), (c,f), (b,e) is at the intersections of a pair of big circles. There are only three partitions of 7 into sums of two positive integers:

$$7=1+6=2+5=3+4.$$

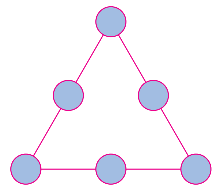
Therefore, we could fill in the two–number sets $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$ in any order into the pairs of white circles (a,d), (c,f), (e,b), and we will get a different result for each choice. Two such examples are:



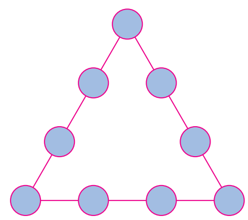


Now, solve some exercises yourself!

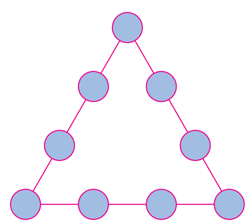
Exercise 1. Arrange the numbers from 1 to 6 into the circles on the triangle so that the magic sum is equal to 10.



Exercise 2. Arrange the numbers from 1 to 9 into the circles so that each side of the triangle sums up to 17.



Exercise 3. Fill the numbers from 1 to 9 into the circles so that each side of the triangle sums up to N. Find the range of N so that solutions exist.



New words

Magic Triangle: Tam giác ma thuật

vertex (n, plural vertices): đỉnh

appear (v): xuất hiện

order (n): cấp (bậc)

arrange (v): sắp xếp

analysis (n): sự phân tích

arrangement (n): cách sắp xếp

partition: phân hoạch

- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm (nếu là bài sưu tầm, cần ghi rõ nguồn).
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P621–P630: trước ngày 15/9/2022.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P621. (Mức B) Xét ba số nguyên tố có tổng bằng 242. Hỏi, tích của chúng lớn nhất bằng bao nhiêu?

Duy Minh, Hà Nội

P622. (Mức B) Cho x, y, z là các số thực khác 0 thoả mãn

$$\frac{x^2+y}{y^2}=\frac{y^2+z}{z^2}=\frac{z^2+x}{x^2}=2.$$

Chứng minh rằng, $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}$ là một số nguyên.

Trần Quốc Luật, Tp. Hồ Chí Minh

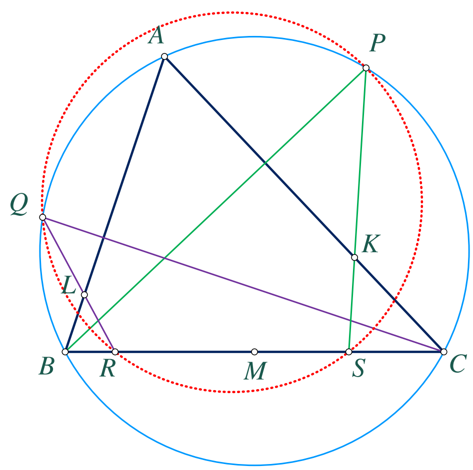
P623. (Mức B) Mỗi ô của bảng ô vuông kích thước 2023×2023. Ban đầu mỗi ô của bảng ghi số 1. Người ta thực hiện việc ghi xoá và ghi thêm số theo quy tắc sau: mỗi lần chọn ra 3 ô trong cùng một hàng hoặc một cột; mỗi ô được chọn, nếu ô đó đang ghi số N, người ta xoá đi và ghi số $N+1$ vào ô đó.

Hỏi sau một số hữu hạn lần thực hiện ghi và xoá số như vậy, người ta có thể làm cho tất cả các số được ghi trong bảng là các số chẵn được hay không?

Tường Thanh, Nghệ An (st)

P624. (Mức B) Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao xuất phát từ các đỉnh B, C của tam giác, tương ứng, cắt (O) tại các điểm thứ hai P, Q. Gọi

M là trung điểm của cạnh BC, và gọi K, L tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên AC, AB. Các đường thẳng QL, PK cắt đường thẳng BC tương ứng tại R, S. Chứng minh rằng, bốn điểm P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn.



Nguyễn Tiến Dũng, Hà Nội

P625. (Mức B) Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{b}{a+c}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 \geq \frac{b^2-bc+c^2}{a^2+bc}.$$

Nguyễn Việt Hùng, Hà Nội

P626. (Mức B) Xét các tam giác vuông mà độ dài các cạnh là các số nguyên dương và một trong các cạnh góc vuông có độ dài là 2021^{22}. Hỏi có bao nhiêu tam giác như vậy?

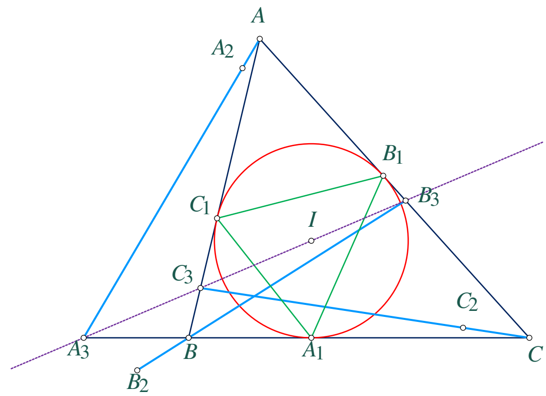
Phạm Nhật Nguyệt, Hải Phòng (st)

P627. (Mức A) Xét x, y là hai số thực dương thoả mãn $xy \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}-\frac{3}{4(x+y)}.$$

Đỗ Xuân Trọng, Hà Nội

P628. (Mức A) Cho tam giác không cân ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi A_1, B_1, C_1 tương ứng là tiếp điểm của BC, CA, AB với (I); A_2, B_2, C_2 lần lượt là đối xứng của A_1, B_1, C_1 tương ứng qua các đường thẳng B_1C_1, C_1A_1 và A_1B_1. Các đường thẳng AA_2, BC cắt nhau tại A_3; BB_2 và CA cắt nhau tại B_3; CC_2 và AB cắt nhau tại C_3. Chứng minh rằng, A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.



Đậu Anh Hùng, Quảng Trị

P629. (Mức A) Cho n là một số nguyên dương có tính chất: không tồn tại các số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng, tồn tại các số nguyên không âm u, v sao cho: $n=u^2+v^2$.

Phạm Công Tài, Hà Nội

P630. (Mức A) Bạn Pi ghi lên bảng một số 1; sau đó, thực hiện việc xoá và ghi thêm số, theo qui tắc: Mỗi lần, xoá một số N tuỳ ý đang có trên bảng, rồi ghi thêm lên bảng số $N+1$, hoặc số $3N$.

Pi thực hiện việc xoá và ghi thêm số, để trên bảng có một số chia hết cho 47, và Pi dừng việc xoá–ghi thêm số ngay sau khi ghi được một số như vậy.

Mỗi lần xoá số N và ghi số $3N$, Pi được nhận một viên kẹo xốp, còn nếu ghi số $N+1$ thì được nhận một viên kẹo dẻo. Vì không thích kẹo dẻo, nên trong quá trình xoá-ghi thêm số, Pi luôn cố gắng để được nhận kẹo xốp. Hỏi, Pi phải nhận ít nhất bao nhiêu viên kẹo dẻo?

Trần Nguyễn Nam Hưng, Tp. Hồ Chí Minh

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P591. (Mức B) Xét bốn số thực phân biệt có tính chất: Mỗi số 189, 264, 287, 320 đều là tổng của hai trong bốn số ấy. Hỏi, tổng của bốn số đó có thể lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải (*phỏng theo ý giải của bạn Trần Minh Hoàng, lớp 9E, trường THCS Nguyễn Trãi, Huyện Nghi Xuân, Tỉnh Hà Tĩnh*).

Gọi a, b, c, d là bốn số thực có tính chất đã nêu trong đề bài.

Khi đó, 189, 264, 287, 320 là bốn trong sáu số: $a+b$, $c+d$, $a+c$, $b+d$, $a+d$, $b+c$. Do đó, bốn số vừa nêu thuộc ba nhóm số $\{a+b; c+d\}$, $\{a+c; b+d\}$ và $\{a+d; b+c\}$. Suy ra, phải có hai trong bốn số ấy thuộc cùng một nhóm. Do hai số đó là hai số phân biệt nên tổng của chúng chính là tổng của hai số trong nhóm. Từ đây, vì tổng của hai số cùng nhóm nào cũng bằng $a+b+c+d$, nên suy ra trong bốn số 189, 264, 287, 320 phải có hai số có tổng bằng $a+b+c+d$. Vì thế, ta có:

$$\begin{aligned} a+b+c+d &\le 287+320 \\ &= 607. \end{aligned}$$

Hơn nữa, nhận thấy, bốn số 83, 106, 181, 237 có tính chất đã nêu trong đề bài (vì $189=83+106$, $264=83+181$, $287=106+181$, $320=83+237$) và tổng của chúng bằng

$$83+106+181+237=607.$$

Vì vậy, tổng của bốn số có tính chất đã nêu trong đề bài có thể lớn nhất bằng 607.

Bình luận và Nhận xét

Ngoài lời giải của bạn *Trần Minh Hoàng*, Tạp chí đã nhận được hai lời giải nữa; trong đó, có một lời giải sai, và một lời giải không được chấp nhận là lời giải hoàn chỉnh, vì mắc lỗi logic (cụ thể, người giải bài đã khẳng định, giá trị lớn nhất của tổng $a+b+c+d$ bằng 607 ngay sau khi mới chỉ chứng minh được tổng đó không vượt quá 607).

Lê Huy

P592. (Mức B) Tìm chữ số hàng đơn vị của số

$$\begin{aligned} A=&\left(1+2^2+3^3+\cdots+2022^{2022}\right) \\ &\times\left(5^5+15^{15}+25^{25}+\cdots+2025^{2025}\right). \end{aligned}$$

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Hà Mạnh Hùng, lớp 7A, trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, Tp. Hà Nội*).

Đặt $B=1+2^2+3^3+\cdots+2022^{2022}$ và $C=5^5+15^{15}+25^{25}+\cdots+2025^{2025}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} B=&\left(1+2^2\right)+\left(3^3+4^4\right)+\cdots \\ &+\left(2021^{2021}+2022^{2022}\right). \end{aligned}$$

Dễ thấy, tổng của hai số trong mỗi "ngoặc đơn" là một số lẻ, và có tất cả $2022:2=1011$ "ngoặc đơn". Do đó, B là tổng của một số lẻ các số lẻ. Vì thế, B là một số lẻ. (1)

Tiếp theo, nhận thấy, mỗi số hạng của tổng C là một số lẻ chia hết cho 5, và tổng đó có $(2025-5):10+1=203$ số hạng. Do đó, C là tổng của một số lẻ các số lẻ chia hết cho 5. Vì thế, C là một số lẻ, chia hết cho 5. (2)

Từ (1) và (2) suy ra, $A=B\cdot C$ là một số lẻ, chia hết cho 5. Vì thế, chữ số tận cùng, hay chữ số hàng đơn vị, của A là 5.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều có ý giải đúng. Tuy nhiên, một số lời giải trong số đó không được chấp nhận là lời giải hoàn chỉnh do người giải bài đã tính sai số số hạng của tổng C (trong lời giải trên), hoặc lời giải được trình bày quá vắn tắt, thiếu các lý giải cần thiết.

Lưu Thị Thanh Hà

P593. (Mức B) Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng, nếu $4n+1$ và $20n+1$ là các số chính phương thì $20n+21$ là một hợp số.

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Trần Minh Hoàng, lớp 9E, trường THCS Nguyễn*

Trãi, Huyện Nghi Xuân, Tỉnh Hà Tĩnh).

Ta biết rằng, khi chia một số chính phương cho 3 sẽ được số dư là 0 hoặc 1. Vì thế, từ giả thiết $4n+1$ và $20n+1$ là các số chính phương, suy ra, hoặc $4n+1$ và $20n+1$ cùng chia hết cho 3 (tức, chia 3 dư 0), hoặc trong hai số $4n+1$ và $20n+1$ có ít nhất một số chia 3 dư 1.

Nếu $4n+1$ và $20n+1$ cùng chia hết cho 3 thì

$$(20n+1)-(4n+1)=16n$$

chia hết cho 3. Suy ra, n chia hết cho 3 (do 16 và 3 nguyên tố cùng nhau). Vì thế, $4n$ và $20n$ chia hết cho 3; suy ra, 1 chia hết cho 3, là điều vô lý. Vì vậy, phải có: trong hai số $4n+1$ và $20n+1$ có ít nhất một số chia 3 dư 1. Khi đó, trong hai số $4n$ và $20n$ có ít nhất một số chia hết cho 3. Từ đây, vì 4 và 3 nguyên tố cùng nhau, 20 và 3 nguyên tố cùng nhau, suy ra, n chia hết cho 3. Vì thế, $20n+21$ chia hết cho 3. Mà $20n+21>3$, nên $20n+21$ là hợp số.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có một lời giải sai, do người giải bài đã mắc ***lỗi*** sau: "Với a, b, c là các số nguyên dương, từ $a=b\cdot c$ và $b>1$, suy ra, a là hợp số.". (*Khẳng định vừa nêu hiển nhiên sai, nếu $c=1$ và b là số nguyên tố.*). Ngoài lời giải sai vừa nêu, tất cả các lời giải còn lại đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Lưu Thị Thanh Hà

P594. (Mức B) Giải phương trình:

$$\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}$$
$$=(1+3x)\sqrt{1-3x}+(1-3x)\sqrt{1+3x}.$$

Lời giải (*dựa theo cách giải của bạn Nguyễn Đức Khải, lớp 10T2, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tỉnh Nam Định*).

Điều kiện xác định của phương trình:

$$-\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{3}.$$

Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}$$
$$=\sqrt{1-9x^2}\left(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x}\right).$$

Vì thế, giả sử x_0 là nghiệm của phương trình đã cho, ta có $-\frac{1}{3}\le x_0\le\frac{1}{3}$ và

$$\sqrt{1+2x_0}+\sqrt{1-2x_0}$$
$$=\sqrt{1-9x_0^2}\left(\sqrt{1+3x_0}+\sqrt{1-3x_0}\right). \quad (1)$$

Ký hiệu VP là vế phải của (1).

Do $0\le\sqrt{1-9x_0^2}\le 1$ nên

$$VP\le\sqrt{1+3x_0}+\sqrt{1-3x_0}.$$

Do đó, từ (1) suy ra

$$\sqrt{1+2x_0}+\sqrt{1-2x_0}\le\sqrt{1+3x_0}+\sqrt{1-3x_0}.$$

Ta có:

$$(2)\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-4x_0^2}\le 2+2\sqrt{1-9x_0^2}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{1-4x_0^2}\le\sqrt{1-9x_0^2}$$
$$\Leftrightarrow 1-4x_0^2\le 1-9x_0^2\Leftrightarrow x_0^2\le 0.$$

Vì thế, $x_0=0$.

Ngược lại, bằng cách thử trực tiếp, ta thấy, $x=0$ nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy, phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=0$.

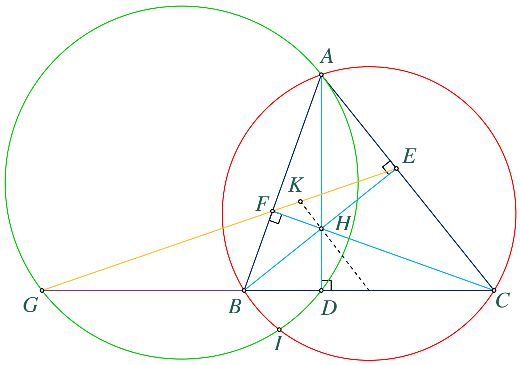
Bình luận và Nhận xét

1. Hầu hết các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải theo cách sử dụng phép bình phương hai vế của phương trình để thực hiện các biến đổi tương đương. Lời giải theo cách này khá dài dòng và cồng kềnh.

2. Tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Lê Huy

P595. (Mức B) Cho tam giác nhọn, không cân ABC, nội tiếp đường tròn (O), có các đường cao AD, BE, CF. Gọi G là giao điểm của các đường thẳng BC, EF. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADG cắt (O) tại điểm thứ hai I (khác A). Các đường thẳng AI và EF cắt nhau tại K. Chứng minh rằng, đường thẳng nối K và trực tâm của tam giác ABC đi qua trung điểm của BC.



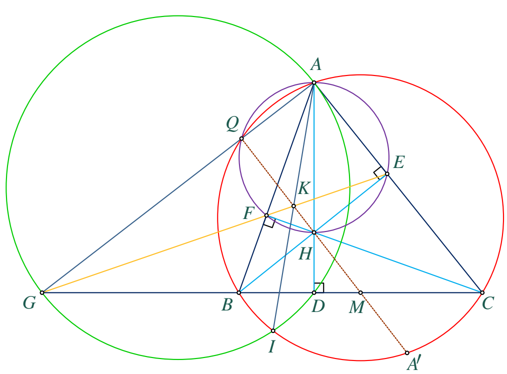
Lời giải (*của người chấm bài*).

Trước hết, ta nhắc lại (không chứng minh) hai kết quả cơ bản sau:

Kết quả 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác đó; gọi M là trung điểm cạnh BC; và gọi N là điểm đối xứng với H qua M. Khi đó, AN là một đường kính của (O).

Kết quả 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi E, F, tương ứng, là chân các đường cao kẻ từ B, C của tam giác đó; ta có $AO \perp EF$.

Trở lại bài toán.



Gọi H là trực tâm của tam giác ABC; gọi M là trung điểm cạnh BC; và gọi N là điểm đối xứng với H qua M.

Theo Kết quả 1, AN là một đường kính của (O). (1)

Do đó, $\angle AIN = 90^\circ$ (2)

Từ định nghĩa điểm D suy ra, AG là đường kính của đường tròn (ADG). Vì thế, $\angle AIG = 90^\circ$. kết hợp với (2), suy ra, ba điểm G, I, N thẳng hàng, Do đó, $AI \perp GN$. (3)

Tiếp theo, theo Kết quả 2, ta có $AN \perp GE$. Từ đây và (3) suy ra, K là trực tâm tam giác AGN. Do đó, $NK \perp AG$. (4)

Gọi L là giao điểm thứ hai (khác A) của AG và (O). Từ (1) suy ra, $\angle ALN = 90^\circ$. (5)

Từ định nghĩa của các điểm H, E, F dễ thấy, $BCEF$ và $HEAF$ là các tứ giác nội tiếp. Xét phương tích của điểm G đối với các đường tròn (O), $(BCEF)$ và $(HEAF)$, ta có:

$$GL \cdot GA = P_{G/(O)} = GB \cdot GC = P_{G/(BCEF)} = GE \cdot GF = P_{G/(HEAF)}.$$

Suy ra, L thuộc đường tròn $(HEAF)$; mà AH là đường kính của đường tròn này, nên $\angle ALH = 90^\circ$. Kết hợp với (3), suy ra, ba điểm N, H, L thẳng hàng; do đó, $NH \perp AG$. (6)

Từ (4) và (6) suy ra, ba điểm N, H, K thẳng hàng. Mà N, H, M là ba điểm thẳng hàng nên M, H, K là ba điểm thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Với các giả thiết của bài ra, ta còn có thể chứng minh được: $GH \perp AM$, và đường thẳng KD đi qua giao điểm hai tiếp tuyến tại B, C của (O).

2. Tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Hạ Vũ Anh

P596. (Mức B) Cho các số thực không âm a, b, c, thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Chứng minh rằng

$$8(2-a-b)(2-b-c)(2-c-a) \geq (abc)^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải (*dựa theo cách giải của đa số lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).

Từ giả thiết của bài ra, ta có:

$$\begin{aligned}
&2\,(2-a-b)\\
=&4-2a-2b\\
=&a^2+b^2+c^2-2a-2b+2\\
=&(a-1)^2+(b-1)^2+c^2 \geq c^2. \quad (1)
\end{aligned}$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$2\,(2-b-c) \geq a^2. \qquad (2)$$

$$2\,(2-c-a) \geq b^2. \qquad (3)$$

Vì các vế của các bất đẳng thức cùng chiều (1), (2), (3) đều là các số không âm (do a^2, b^2, $c^2 \geq 0$), nên nhân các bất đẳng thức đó, vế theo vế, ta nhận được bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu đề bài.

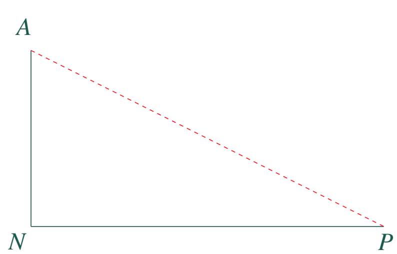
Dễ thấy, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có hai số bằng 1 và số còn lại bằng 0.

Bình luận và Nhận xét

Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có một lời giải không được chấp nhận là lời giải hoàn chỉnh, do người giải bài chưa nêu câu trả lời cho câu hỏi "Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?" của đề bài. Tất cả các lời giải còn lại đều là lời giải hoàn chỉnh.

Lê Huy

P597. (Mức A) Một nhà địa chất đang ở vị trí A trong sa mạc, cách con đường thẳng $10km$ ($AN = 10km$). Trên con đường đó, xe của nhà địa chất có thể chạy với vận tốc tối đa $50km/h$, nhưng trên sa mạc nó chỉ chạy được với vận tốc tối đa $30km/h$.



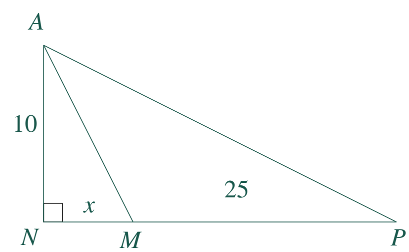
Nhà địa chất đang rất khát nước, và ông biết rằng, có một trạm xăng P ở vị trí xuôi theo đường $25km$ ($NP = 25km$), và ở đó có bán nước giải khát.

$a)$ Nhà địa chất cần ít nhất bao nhiêu phút, để đi từ A đến P theo đường sa mạc?

$b)$ Nếu nhà địa chất đi từ A đến N, rồi đi theo con đường thẳng để đến P thì có nhanh hơn không?

$c)$ Hãy tìm một cách đi nhanh hơn cho nhà địa chất. Cách của bạn đã là nhanh nhất chưa?

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Võ Khắc Minh Hoàng, lớp* 10 *Toán* 2*, trường THPT chuyên Quốc học Huế, Tỉnh Thừa Thiên – Huế*).



$a)$ Vì ANP là tam giác vuông tại N nên ta có:

$$AP = \sqrt{AN^2+NP^2} = \sqrt{10^2+25^2} = 5\sqrt{29}\,(\text{km}).$$

Do xe của nhà địa chất chỉ có thể chạy với vận tốc tối đa $30km/h$ trên sa mạc, nên để đi từ A đến P theo đường sa mạc, nhà địa chất cần đi trong ít nhất

$$\frac{5\sqrt{29}}{30} = \frac{\sqrt{29}}{6} \approx 0,898(\text{h}) \approx 54\,(\text{phút}).$$

$b)$ Nếu nhà địa chất đi từ A đến N, rồi đi theo con đường thẳng để đến P, thì thời gian đi tối thiểu là:

$$\frac{10}{30}+\frac{25}{50} = \frac{5}{6}(\text{h}) = 50\,(\text{phút}).$$

Như vậy, nếu đi theo cách này thì nhà địa chất sẽ nhanh tới P hơn, so với cách đi thẳng từ A đến P theo đường sa mạc.

$c)$ Từ kết quả của câu $b)$ suy ra, cách đi nhanh nhất từ A đến P sẽ nằm trong số các cách đi sau: Đi thẳng theo đường sa mạc từ A đến một địa điểm trên đoạn đường NP, rồi đi thẳng từ điểm đó đến P.

Xét điểm M tùy ý thuộc đoạn NP. Gọi x (km) là độ dài quãng đường NM (xem Hình vẽ ở trên). Khi đó, thời gian tối thiểu t (tính theo đơn vị giờ) để đi thẳng từ A đến M, theo đường sa mạc, rồi đi tiếp đến P, theo đường thẳng, sẽ là:

$$t = \frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30} + \frac{25 - x}{50}.$$

Ta cần xác định x để t nhận giá trị nhỏ nhất có thể.

Theo bất đẳng thức Buniacopxki, ta có:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30} + \frac{25 - x}{50} \\ &= \frac{\sqrt{10^2 + x^2} \cdot \sqrt{10^2 + 7,5^2}}{30 \cdot \sqrt{10^2 + 7,5^2}} + \frac{25 - x}{50} \\ &\geq \frac{10 \cdot 10 + 7,5x}{30 \cdot 12,5} + \frac{25 - x}{50} = \frac{23}{30}. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức ở bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi $x = 7,5$.

Vì vậy, cách đi nhanh nhất từ A đến P là, đi thẳng theo đường sa mạc từ A đến địa điểm M, nằm giữa N và P, và cách N $7,5$km, sau đó đi tiếp theo đường thẳng từ M đến P. Đi theo cách này, thời gian đi tối thiểu sẽ là h, hay 46 phút.

Bình luận và Nhận xét

1. Cách "chính tắc", quen thuộc để tìm giá trị nhỏ nhất của t ở câu $c)$ là: coi t là hàm số của x, và khảo sát hàm số đó trên nửa đoạn $[0;25)$. Có 60% số bạn gửi lời giải tới Tạp chí đã giải câu $c)$ theo cách này (điều đáng suy nghĩ là, trong số đó có một bạn học sinh lớp 7!).

2. Đánh giá giá trị của các biểu thức có chứa căn thức, bằng cách sử dụng bất đẳng thức Buniacopxki (còn gọi là bất đẳng thức Cauchy – Schwarz), là một kỹ thuật đại số phổ dụng. Vì thế, nghĩ tới việc sử dụng bất đẳng thức vừa nêu để đánh giá giá trị của t ở bài toán này là một cách tiếp cận tự nhiên. Điểm mấu chốt trong việc xử lý theo hướng này là tìm ra biểu thức thích hợp, cần mang nhân với biểu thức $\sqrt{10^2 + x^2}$. Có thể thấy, nếu t đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = a$ thì dựa vào điều kiện xảy ra dấu bằng ở bất đẳng thức Buniacopxki, ta sẽ nghĩ đến biểu thức $\sqrt{10^2 + a^2}$. Thử nghiệm biểu thức này, ta thu được đánh giá:

$$t \geq \frac{10 \cdot 10 + ax}{30 \cdot \sqrt{10^2 + a^2}} + \frac{25 - x}{50}.$$

Câu hỏi đặt ra: a là số làm cho biểu thức ở vế phải của bất đẳng thức trên là biểu thức hằng, hay để tìm đến giá trị nhỏ nhất của t còn cần các đánh giá tiếp theo? Nói một cách khác, liệu a có phải là số sao cho

$$\frac{a}{3 \cdot \sqrt{10^2 + a^2}} - \frac{1}{5} = 0?$$

Lẽ dĩ nhiên, để trả lời được câu hỏi này, cần xem đẳng thức trên như một phương trình ẩn a, rồi giải phương trình ấy.

Những điều vừa nêu trên chính là các suy diễn giúp tìm ra lời giải cho câu $c)$, đã trình bày ở trên.

3. Tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng.

Trần Nam Dũng

P598. (Mức A) Chứng minh rằng, tồn tại số tự nhiên có 2022 chữ số, được tạo thành từ hai chữ số 4, 5, và chia hết cho 2^{2022}.

Lời giải 1 (*dựa theo cách giải của bạn Hà Mạnh Hùng, lớp 7A, trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, Tp. Hà Nội*).

Trước hết, ta có Nhận xét sau:

Nhận xét. Với $A = \overline{a_{2021}a_{2020}\ldots a_1a_0}$ là số tùy ý có 2022 chữ số, ta có

$$A \equiv \overline{a_{n-1}\ldots a_0} \pmod{2^n},$$

với mọi $n \in \{1;2;\ldots;2021\}$.

Chứng minh. Với mọi $n \in \{1;2;\ldots;2021\}$, ta có:

$$A = \overline{a_{2021}a_{2020}\ldots a_n} \cdot 10^n + \overline{a_{n-1}\ldots a_0}.$$

Từ đó, do $10^n \equiv 0 \pmod{2^n}$, hiển nhiên suy ra khẳng định đã nêu ở Nhận xét.

Trở lại bài toán.

Ký hiệu S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 2022 chữ số, có thể lập được từ hai chữ số 4, 5.

Xét hai số $x = \overline{x_{2021}x_{2020}\ldots x_1x_0}$, $y = \overline{y_{2021}y_{2020}\ldots y_1y_0}$ tùy ý thuộc S.

Giả sử $x \equiv y \left(\bmod 2^{2022}\right)$. (1)

Khi đó, hiển nhiên có $x \equiv y\,(\bmod 2)$. Vì thế, theo Nhận xét, ta có

$$x_0 \equiv x \equiv y \equiv y_0\,(\bmod 2);$$

mà $x_0, y_0 \in \{4;5\}$ nên $x_0 = y_0$. (2)

Giả sử đã có $x_i = y_i$ với mọi số tự nhiên i mà $0 \leq i \leq k$, với k là một số tự nhiên không vượt quá 2020. Khi đó, do $x \equiv y \left(\bmod 2^{k+2}\right)$ (suy ra từ (1)), và do

$$\overline{x_{k+1}x_k\ldots x_0} = x_{k+1}\cdot 10^{k+1} + \overline{x_k\ldots x_0},$$
$$\overline{y_{k+1}y_k\ldots y_0} = y_{k+1}\cdot 10^{k+1} + \overline{y_k\ldots y_0},$$

nên theo Nhận xét, ta có:

$$x_{k+1}\cdot 10^{k+1} \equiv y_{k+1}\cdot 10^{k+1} \left(\bmod 2^{k+2}\right).$$

Suy ra

$$x_{k+1}\cdot 2^{k+1} \equiv y_{k+1}\cdot 2^{k+1} \left(\bmod 2^{k+2}\right);$$

mà $x_{k+1}, y_{k+1} \in \{4;5\}$ nên $x_{k+1} = y_{k+1}$.

Vì thế, xuất phát từ (2), ta được $x_i = u_i$ với mọi $i \in \{0;1;\ldots;2021\}$. Do đó, $x = y$.

Như vậy, với mọi $x, y \in S, x \neq y$, ta có $x \not\equiv y \left(\bmod 2^{2022}\right)$. Từ đây, do S là tập gồm 2^{2022} số đôi một phân biệt nên S là một hệ thặng dư đầy đủ modulo 2^{2022}. Vì thế, tồn tại số $a \in S$ sao cho $a \equiv 0 \left(\bmod 2^{2022}\right)$. Do

$$\underbrace{44\ldots4}_{2022cs4} \not\equiv 0 \left(\bmod 2^{2022}\right)$$

$$\text{và } \underbrace{55\ldots5}_{2022cs5} \not\equiv 0 \left(\bmod 2^{2022}\right),$$

nên a là số mà trong biểu diễn thập phân của nó có cả chữ số 4 và chữ số 5; vì thế, a là số tự nhiên có 2022 chữ số, được tạo thành từ hai chữ số $4, 5$.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Lời giải 2 (*dựa theo cách giải của một bạn học sinh cấp THCS và hai bạn học sinh cấp THPT*).

Trước hết, ta chứng minh Khẳng định sau:

Khẳng định. Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu S là tập hợp tất cả các số có n chữ số, có thể lập được từ hai chữ số $4, 5$. Khi đó, với mọi số nguyên dương n, trong tập S_n luôn có một số chia hết cho 2^n.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh Khẳng định bằng phương pháp quy nạp theo n.

◇ Với $n = 1$, ta có $S_1 = \{4;5\}$. Vì 4 chia hết cho 2^1 nên kết luận của Khẳng định là đúng, với $n = 1$.

◇ Giả sử kết luận của Khẳng định là đúng, với $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Nghĩa là, trong tập S_k tồn tại số A chia hết cho 2^k.

◇ Xét $n = k+1$.

Do $A \in S_k$ nên $\overline{4A}, \overline{5A} \in S_{k+1}$. (1)

Nếu A chia hết cho 2^{k+1} thì

$$\overline{4A} = 4\cdot 10^k + A = 2^{k+2}\cdot 5^k + A$$
$$\equiv 0 \left(\bmod 2^{k+1}\right). \quad (2)$$

Nếu A không chia hết cho 2^{k+1} thì $A \equiv 2^k \left(\bmod 2^{k+1}\right)$; do đó

$$\overline{5A} = 5\cdot 10^k + A$$
$$= 2^k\cdot\left(5^{k+1}-1\right) + \left(A - 2^k\right)$$
$$\equiv 0 \left(\bmod 2^{k+1}\right). \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra, trong S_{k+1} tồn tại số chia hết cho 2^{k+1}.

Như thế, kết luận của Khẳng định là đúng, với $n = k+1$.

◇ Theo nguyên lý quy nạp, Khẳng định được chứng minh.

Áp dụng Khẳng định cho $n = 2022$, ta được: Trong S_{2022} tồn tại số X chia hết cho 2^{2022}. Do

$$\underbrace{44\ldots4}_{2022cs4} \not\equiv 0 \left(\bmod 2^{2022}\right)$$

$$\text{và } \underbrace{55\ldots5}_{2022cs5} \not\equiv 0 \left(\bmod 2^{2022}\right),$$

nên X là số mà trong biểu diễn thập phân của nó có cả chữ số 4 và chữ số 5; vì thế, X là số tự nhiên có 2022 chữ số, được tạo thành từ hai chữ số 4, 5.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Rất tiếc, bạn học sinh cấp THCS và hai bạn học sinh cấp THPT, có ý giải như ở Lời giải 2, có lời giải không đúng, do các bạn chưa chứng minh được số tự nhiên, thuộc S_{2022} (theo ký hiệu trong Lời giải 2) và chia hết cho 2^{2022} là số mà trong biểu diễn thập phân của nó có cả chữ số 4 và chữ số 5 (tức, là số được tạo thành từ hai chữ số 4, 5).

Lưu ý rằng, trong tiếng Việt, *ta nói "số N* ***được tạo thành*** *từ các chữ số ..." khi và chỉ khi trong biểu diễn thập phân của N có và chỉ có các chữ số ấy*. (Không ai nói, 1 là số được tạo thành từ hai chữ số 1, 2 (chẳng hạn)!)

2. Lời giải của bạn *Hà Mạnh Hùng* là lời giải đúng duy nhất, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc.

3. Dễ thấy, bằng phương pháp của Lời giải 1, dễ dàng chứng minh được kết quả khái quát sau:

Kết quả khái quát. Cho a là một chữ số chẵn khác 0, và b là một chữ số lẻ. Khi đó, với mọi số nguyên dương n, trong số các số tự nhiên có n chữ số, có thể lập được từ hai chữ số a, b, có đúng một số chia hết cho Kết quả khái quát nêu trên có Hệ quả hiển nhiên sau:

Hệ quả. *Cho b là một chữ số lẻ. Khi đó:*

1) *Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, tồn tại duy nhất số tự nhiên có n chữ số,* ***được tạo thành*** *từ hai chữ số 2, b, và chia hết cho 2^n.*

2) *Với mọi số nguyên dương $n \geq 3$, tồn tại duy nhất số tự nhiên có n chữ số,* ***được tạo thành*** *từ hai chữ số 4, b, và chia hết cho 2^n.*

3) *Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, tồn tại duy nhất số tự nhiên có n chữ số,* ***được tạo thành*** *từ hai chữ số 6, b, và chia hết cho 2^n.*

4) *Với mọi số nguyên dương $n \geq 4$, tồn tại duy nhất số tự nhiên có n chữ số, được tạo thành từ hai chữ số 8, b, và chia hết cho 2^n.*

Nguyễn Khắc Minh

P599. (Mức A) Cho các số thực dương a, b, c có tổng bằng 7. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+abc \geq ab+bc+ca-2.$$

Lời giải (*theo Đáp án do Tạp chí cung cấp*).

Với $f(x,y,z)$ là biểu thức của ba biến x,y,z, ký hiệu

$$\sum f(x,y,z)=f(x,y,z)+f(y,z,x)+f(z,x,y).$$

Theo bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân cho hai số thực không âm, ta có:

$$\frac{a}{b}+\frac{ab(a-b+2c)^2}{49} \geq \frac{2}{7}a(a-b+2c).$$

$$\frac{b}{c}+\frac{bc(b-c+2a)^2}{49} \geq \frac{2}{7}b(b-c+2a).$$

$$\frac{c}{a}+\frac{ca(c-a+2b)^2}{49} \geq \frac{2}{7}c(c-a+2b).$$

Cộng ba bất đẳng thức trên, vế theo vế, ta được:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\sum\frac{ab(a-b+2c)^2}{49} \geq \frac{2}{7}\sum a(a-b+2c). \quad (1)$$

Tiếp theo, với lưu ý $a+b+c=7$, ta có:

$$\begin{aligned}&\sum ab(a-b+2c)^2\\ &=\sum ab\left(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca\right.\\ &\quad\left.+3c^2-2bc+6ca\right)\\ &=(ab+bc+ca)\left(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca\right)\\ &\quad+abc\sum(6a-2b+3c)\\ &=(ab+bc+ca)(a+b+c)^2-4(ab+bc+ca)^2\\ &\quad+7abc(a+b+c)\\ &=49(ab+bc+ca)-4(ab+bc+ca)^2\\ &\quad+49abc. \quad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum a(a-b+2c)\\ &=(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)\\ &=49-(ab+bc+ca). \quad (3)\end{aligned}$$

Thế (2) và (3) vào (1), ta được:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+(ab+bc+ca)-\frac{4}{49}(ab+bc+ca)^2$$
$$+abc \geq 14-\frac{2}{7}(ab+bc+ca).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+abc\\ &\geq \frac{4}{49}(abbc+ca)^2-\frac{9}{7}(ab+bc+ca)+14\\ &=\frac{4}{49}(ab+bc+ca-14)^2+ab+bc+ca-2\\ &\geq ab+bc+ca-2.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức của đề bài được chứng minh.

Bình luận và Nhận xét

1. Với sự trợ giúp của phần mềm máy tính, có thể chứng minh được rằng, dấu đẳng thức ở bất đẳng thức của đề bài xảy ra khi và chỉ khi (a,b,c) là một hoán vị vòng quanh của $\left(4\sin^2\frac{3\pi}{7}, 4\sin^2\frac{2\pi}{7}, 4\sin^2\frac{\pi}{7}\right)$.

2. Điểm mấu chốt ở lời giải trên là "nhìn" ra ba bất đẳng thức dẫn đến bất đẳng thức (1) (trong lời giải đó). Theo đánh giá của người chấm bài, để thấy các bất đẳng thức đó phải là tác giả của bài toán, vì rất rất khó để tìm ra một gợi ý nào, dẫn đến các bất đẳng thức ấy. Vì thế, có thể nói, lời giải trên đây là một lời giải rất không tự nhiên, thiếu thuyết phục.

3. Cách xử lý tự nhiên để chứng minh bất đẳng thức của đề bài là sử dụng phép đổi biến $q = ab+bc+ca$, $r = abc$. Tuy nhiên, bằng phương pháp này, bạn sẽ gặp phải các biến đổi hết sức cồng kềnh, phức tạp, rất khó thực hiện chỉ bằng "giấy, bút". Bạn *Trần Minh Hoàng* (lớp 9E, trường THCS Nguyễn Trãi, Huyện Nghi Xuân, Tỉnh Hà Tĩnh) đã giải bài toán theo cách vừa nêu. Các biến đổi trong lời giải của bạn Hoàng quả thực rất phức tạp, các hệ số trong các biến đổi rất lớn, rất khó có thể tính được bằng tay. Vì thế, khó có thể loại trừ khả năng lời giải đó đã được tìm ra với sự hỗ trợ đáng kể của các phần mềm máy tính.

4. Từ những điều nêu trên, người chấm bài cho rằng, bài đã ra là một bài toán quá khó, mang tính "đánh đố", không phù hợp với việc giải toán chỉ bằng "giấy, bút".

5. Lời giải của bạn *Trần Minh Hoàng* là lời giải duy nhất Tạp chí nhận được từ bạn đọc; và là một lời giải đúng.

Võ Quốc Bá Cẩn

P600. (Mức A) Cho A là một tập con có 100 phần tử của tập hợp gồm 178 số nguyên dương đầu tiên. Chứng minh rằng, với mỗi số n thuộc tập hợp gồm 24 số nguyên dương đầu tiên, đều tồn tại hai số thuộc A, có hiệu bằng n.

Lời giải (*phỏng theo ý giải của Đáp án do Tạp chí cung cấp*).

Trong phần trình bày dưới đây, $|X|$ ký hiệu số phần tử của tập hữu hạn X.

Ta sẽ giải bài đã ra bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử ngược lại, tồn tại số n thuộc tập hợp gồm 24 số nguyên dương đầu tiên, sao cho với mọi $x, y \in A$, $x \neq y$, đều có $|x-y| \neq n$.

Phân hoạch tập gồm 178 số nguyên dương đầu tiên thành n tập con $S_1, S_2, \ldots, S_n$, sao cho hai số thuộc cùng một tập con khi và chỉ khi chúng đồng dư với nhau theo modulo n.

Trong mỗi tập S_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sắp xếp các số theo thứ tự tăng dần; khi đó, hai số thuộc S_i có hiệu bằng n khi và chỉ khi chúng là hai số liên tiếp trong sắp xếp đó. Vì thế, ở mỗi tập S_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, có không quá $\left[\frac{|S_i|+1}{2}\right]$ số thuộc A. Do đó

$$100 = |A| \leq \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{|S_i|+1}{2}\right] \qquad (1)$$

Giả sử $178 = nq + r$, trong đó, q là một số nguyên dương, và r là một số tự nhiên, $0 \leq r \leq n-1$. Khi đó, trong phân hoạch nêu trên có r tập con, mà mỗi tập con có $q+1$ số, và $n-r$ tập con, mà mỗi tập con có q số. Vì thế, theo (1), ta có:

$$100 \leq r \cdot \left[\frac{q+2}{2}\right] + (n-r) \cdot \left[\frac{q+1}{2}\right]. \qquad (2)$$

Xảy ra hai trường hợp sau:

◇ *Trường hợp 1. q là số chẵn.*

Khi đó, từ (2), ta có:

$$100 \leq r \cdot \frac{q+2}{2} + (n-r) \cdot \frac{q}{2} = \frac{nq}{2} + r = \frac{178+r}{2};$$

suy ra, $r \geq 22$. Do đó, $n \geq r+1 \geq 23$, và $nq = 178 - r \leq 178 - 22 = 156$. Suy ra

$$q \leq \frac{156}{n} \leq \frac{156}{23} = 6\frac{18}{23};$$

từ đó, do $q \in \mathbb{N}^*$ ta có $q \leq 6$. Vì vậy

$$178 = nq + r \leq 6n + r < 7n \text{ (do } r < n);$$

suy ra, $n > \dfrac{178}{7} > 25$, mâu thuẫn với giả thiết $n \in \{1; 2; \ldots; 24\}$.

◇ *Trường hợp 2. q là số lẻ.*

Khi đó, từ (2), ta có:

$$100 \leq r \cdot \frac{q+1}{2} + (n-r) \cdot \frac{q+1}{2} = n \cdot \frac{q+1}{2} = \frac{178+n-r}{2}; \qquad (3)$$

suy ra, $n - r \geq 22$. Do đó, $n \geq 22 + r \geq 22$; vì vậy, $178 \geq nq \geq 22q$. Suy ra

$$q \leq \frac{178}{22} = 8\frac{1}{11};$$

từ đó, do q là số nguyên dương lẻ nên $q \leq 7$. Vì vậy, từ (3), ta có:

$$n \geq \frac{200}{q+1} \geq \frac{200}{8} = 25,$$

mâu thuẫn với giả thiết $n \in \{1; 2; \ldots; 24\}$.

Các mâu thuẫn nhận được từ việc xét hai trường hợp trên cho thấy, giả sử phản chứng là sai. Vì thế, ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Theo tác giả bài toán, với n là số nguyên dương lớn hơn 24, sẽ tồn tại tập con A có 100 phần tử của tập hợp 178 số nguyên dương đầu tiên, sao cho với mọi $x, y \in A$, $x \neq y$, đều có $|x - y| \neq n$.

2. Theo đánh giá của người chấm bài, bài đã ra là một bài toán nhẹ nhàng (vì có dạng quen thuộc), và thú vị. Tiếc rằng, cho đến thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí vẫn chưa nhận được một lời giải nào từ bạn đọc.

Nguyễn Khắc Minh

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI HOÀN CHỈNH

Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải hoàn chỉnh.

KHỐI THCS

• Trường **THCS Sơn Đồng**, Huyện Hoài Đức, Tp. Hà Nội: *Nguyễn Đăng Dũng* (lớp 9A1; P593, P595).

• Trường **THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam**, Tp. Hà Nội: *Hà Mạnh Hùng* (lớp 7A; P591, P592, P593, P597, P598).

• Trường **THCS Nguyễn Trãi**, Huyện Nghi Xuân, Tỉnh Hà Tĩnh: *Trần Minh Hoàng* (lớp 9E; P591, P592, P593, P594, P595, P596, P597, P599).

• Trường **THCS Nguyễn Trãi**, Huyện Đại Lộc, Tỉnh Quảng Nam: *Nguyễn Châu Tuấn Kiệt* (lớp 9/7; P593, P595, P596).

• Trường **THCS Chu Văn An**, Tỉnh Thừa Thiên – Huế: *Phan Đặng Hữu Toàn* (lớp 9A; P595).

KHỐI THPT

• Trường **THPT số 2 Phù Cát**, Tỉnh Bình Định: *Nguyễn Hữu Trí* (lớp 10A1; P594, P595, P596).

• Trường **THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu**, Tỉnh Đồng Tháp: *Nguyễn Chí Việt Khang* (lớp 11T1; P593, P594, P595), *Đỗ Duy Quang* (lớp 10T1; P595), *Lâm Nhật Tiến* (lớp 10T1; P595).

• Trường **THPT Gia Định**, Tp. Hồ Chí Minh: *Lê Anh Khoa* (lớp 10CT; P594), *Nguyễn Hà Ngọc Uyên* (lớp 11CT; P595).

• Trường **THPT chuyên Hưng Yên**, Tỉnh Hưng Yên: *Trần Hữu Dương* (lớp 10 Toán 1; P596), *Vũ Quang Hòa* (lớp 10 Toán 1; P593), *Nguyễn Gia Khánh* (lớp 10 Toán 1; P597).

• Trường **THPT chuyên Thăng Long**, Tỉnh Lâm Đồng: *Lương Nguyễn Gia Bảo* (lớp 10 Toán; P592, P594, P596), *Đặng Nguyễn Trường Giang* (lớp 10 Toán; P596), *Nguyễn Anh Khoa* (lớp 10 Toán; P592, P594, P595, P596, P597).

• Trường **THPT chuyên Lê Hồng Phong**, Tỉnh Nam Định: *Nguyễn Đức Khải* (lớp 10 Toán 2; P593, P594, P595, P596), *Ninh Thị Mai Linh* (lớp 11 Toán 1; P594), *Trần Đình Nam* (lớp 10 Toán 2; P592, P593, P594).

• Trường **THPT chuyên Hùng Vương**, Tỉnh Phú Thọ: *Vũ Công Tâm* (lớp 10 Toán; P595).

• Trường **THPT chuyên Quốc học Huế**, Tỉnh Thừa Thiên – Huế: *Võ Khắc Minh Hoàng* (lớp 10 Toán 2; P596, P597), *Trần Thị Thanh Thư* (lớp 11 Toán 1; P592, P593, P594).

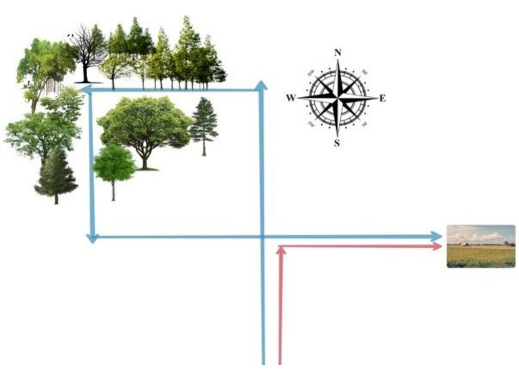
• Trường **THPT chuyên Khoa học tự nhiên**, ĐH Khoa học tự nhiên – ĐHQG Hà Nội: *Nguyễn Cung Thành* (lớp 10A1 Toán; P595, P596).

• Trường **THPT chuyên Sư phạm**, ĐH Sư phạm Hà Nội: *Hồ Trần Khánh Linh* (lớp 11 Toán 2; P595).

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Bác nông dân tốt bụng

Do bác nông dân đi xuyên qua rừng với vận tốc bằng nửa so với vận tốc đi trên đường cái, nên trong hai ngày đêm (thứ hai và thứ ba) bác chỉ đi được quãng đường bằng quãng đường đi được trong cả ngày đêm thứ nhất, có nghĩa là một phần ba quãng đường. Vì thế 30 km đi được trong ngày và đêm thứ tư cũng chính là $1/3$ quãng đường. Vậy bác nông dân đã đi hết 90 km. Con đường đi của bác nông dân được biểu diễn bằng màu xanh như trên hình vẽ.



Xuân Phong đã lập luận như sau: nếu chỉ đi nửa đoạn đường lên phía bắc rồi quay ngay sang hướng đông, thì chỉ hết nửa ngày nữa là thám tử đã đến Vườn Ngô, sau khi đi nửa quãng đường về phía bắc và nửa quãng đường về phía đông, có nghĩa là thám tử chỉ cần đi có 30 km (theo con đường màu đỏ).

Đố vui

Có thể dễ dàng chỉ ra rằng với hai chiếc máy bay, Pi không thể thực hiện được kế hoạch của mình. Với ba chiếc máy bay thì Pi có thể thực hiện được, chẳng hạn với chiến lược sau đây.

Đầu tiên, ba máy bay, một chiếc của Pi và hai chiếc khác để hỗ trợ Pi, cùng xuất phát từ sân bay. Sau khi đi được $1/8$ vòng Trái Đất, một máy bay tiếp nhiên liệu cho cả máy bay của Pi và chiếc còn lại, mỗi chiếc $1/4$ bình (nếu coi mỗi chiếc máy bay có 1 bình nhiên liệu) và giữ lại cho mình $1/4$ bình. Khi này, hai chiếc máy bay có đầy bình và một chiếc có $1/2$ bình (vừa đủ để có thể quay lại sân bay ban đầu).

(*Xem tiếp trang ...*)

VỀ KỲ THI OLYMPIC TOÁN LẦN THỨ 22 TẠI PHÁP

BÙI VĂN BIÊN - NGUYỄN THỊ THOA

Vài nét về kỳ thi

Đây là kỳ thi được tổ chức lần đầu tiên vào năm 2000, do bộ Giáo dục và Đào tạo Pháp và hiệp hội Animath khởi xướng, nhằm mục đích phát triển sự tò mò, khả năng tìm tòi cũng như tư duy phản biện của học sinh thông qua việc xử lý hoặc cá nhân hoặc theo nhóm một số bài toán cụ thể. Bên cạnh đó, kỳ thi còn nhằm mục đích phát triển và nâng cao văn hóa khoa học và công nghệ, nhằm mục đích kích thích sự sáng tạo và chủ động của học sinh, khơi dậy trong học sinh niềm yêu thích với bộ môn Toán. Đối tượng mà kỳ thi hướng tới là những học sinh khối lớp 11 theo chương trình phổ thông Pháp, ở cả trong và ngoài nước.

Học sinh sẽ trải qua hai bài thi độc lập, mỗi bài thi kéo dài 120 phút. Tùy theo chương trình mà học sinh theo học, chương trình chuyên biệt hay chương trình phổ quát, học sinh chọn hai trong ba bài tập được đưa ra. Bài thi thứ nhất là phần thi cá nhân bao gồm những bài tập thuộc cấp quốc gia. Bài thi số hai gồm các bài tập thuộc cấp tỉnh, điểm đặc biệt của bài thi này là học sinh có thể chọn hoặc thi đơn hoặc thi theo nhóm từ 2 tới 3 thí sinh thậm chí các thành viên trong nhóm có thể tới từ những lớp khác nhau trong cùng một khối, đây là một trong những điểm đổi mới của kỳ thi Olympic Toán so với những kỳ thi Toán khác nhằm mục đích khuyến khích và phát huy khả năng làm việc nhóm của học sinh.

Hội đồng chấm thi được chỉ định và chia thành hai cấp: quốc gia và cấp tỉnh. Trong đó hội đồng cấp tỉnh một mặt chấm bài thi cấp tỉnh của các thí sinh ở tỉnh đó nhằm chọn ra những bài làm xuất sắc nhất để trao huy chương, bên cạnh đó còn chọn lựa chọn từ những bài thi cấp quốc gia của tỉnh mình những bài làm xuất sắc nhất để gửi lên hội đồng cấp quốc gia. Qua đó, hội đồng cấp quốc gia xem xét và chọn ra trong những đề cử từ các tỉnh khác nhau những bài làm xuất sắc nhất để trao huy chương.

Kỳ thi Olympic Toán lần thứ 22 tại Pháp, diễn ra vào ngày 14/03/2022 đã thu hút sự tham gia của 22000 học sinh khối 11 từ các trường trung học trên các tỉnh thành của khắp nước Pháp, cũng như từ những trường trung học Pháp ở nước ngoài. Sau khi thảo luận thống nhất vào ngày 25/05/2022, hội đồng cấp quốc gia đã chọn ra 50 bài làm xuất sắc nhất để trao giải nhất, nhì, ba cùng các huy chương và giấy chứng nhận của Bộ Giáo dục và Đào tạo Pháp. Dưới sự tài trợ của hiệp hội Animath, Viện nghiên cứu Tin học và Tự động INRIA, Trường Bách Khoa Paris, các tập đoàn Texas instrument, Casio, Credit mutuel, cũng như từ các trường trung học có thí sinh tham gia, những học sinh đạt giải cấp quốc gia cùng gia đình và giáo viên Toán đã được mời tham dự lễ tổng kết trao giải đã diễn ra vào ngày 08/06/2022 tại Viện nghiên cứu về thế giới Ả rập, Paris. Qua đó, học sinh có cơ hội để tìm hiểu về lịch sử của kỳ thi Olympic Toán, gặp gỡ những nhà toán học hàng đầu nước Pháp, nghe báo cáo của các giáo sư và nghiên cứu sinh đang nghiên cứu về Toán ...

Đề thi Olympic Toán quốc gia năm 2022 dành cho khu vực Pháp – Châu Âu – Châu Phi – Đông Ấn

Để đáp ứng các tiêu chí đã nêu của kỳ thi Olympic Toán, các đề thi được chọn lựa kỹ càng sao cho mỗi học sinh đều cảm thấy hứng thú trong việc tìm kiếm lời giải cho những bài toán mở cũng như góp phần vào việc phát huy khả năng tìm tòi, sáng tạo của từng học sinh. Vì việc lệch múi giờ giữa các địa điểm thi nên ban ra đề thi đã soạn ra ba đề thi khác nhau, tương ứng với các khu vực địa lý khác nhau, bao gồm khu vực Pháp – Châu Âu – Châu Phi – Đông Ấn, khu vực Châu Mỹ – Antilles – Guyana và khu vực Châu Á – Thái Bình Dương. Trong khuôn khổ của bài viết, các tác giả chỉ giới thiệu tới bạn đọc đề thi dành cho khu vực Pháp – Châu Âu – Châu Phi – Đông Ấn, độc giả có nhu cầu tìm hiểu thêm có thể tham khảo tại đường dẫn dưới đây:

https://www.freemaths.fr/annales-olympiades-mathematiques-premieres-scientifiques-s/mathematiques-olympiades-epreuve-nationale-enonce-2022.pdf

Bài 1 (Chung cho tất cả thí sinh)

Dán nhãn duyên dáng của một hình

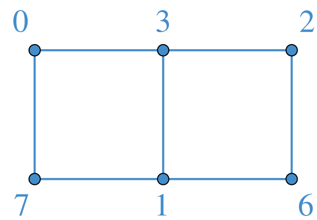
Xét một tập hợp hữu hạn các điểm. Ta nối một số điểm trong số những điểm đã cho bởi những đoạn thẳng. Tập hợp được tạo ra theo cách đó được gọi là *hình*.

Ta thực hiện việc *dán nhãn* của một hình gồm n đoạn thẳng bằng cách gắn mỗi đỉnh của hình đó với một số tự nhiên đôi một khác nhau trong khoảng từ 0 tới n.

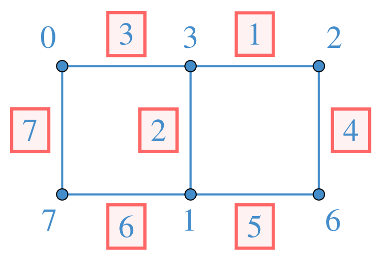
Mỗi đoạn thẳng được gán với giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số tự nhiên được gắn cho hai đầu mút của đoạn thẳng đó. Giá trị tuyệt đối thu được là một số tự nhiên, được gọi là *trọng số* của đoạn thẳng.

Ta nói rằng sự dán nhãn của một hình là *duyên dáng* nếu n trọng số nhận được trên các đoạn thẳng là những số tự nhiên từ 1 tới n.

Dưới đây là một ví dụ về sự dán nhãn duyên dáng cho một hình gồm 6 điểm và 7 đoạn thẳng.



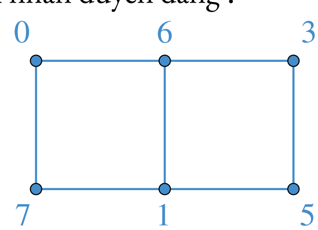
Hình được dán nhãn.

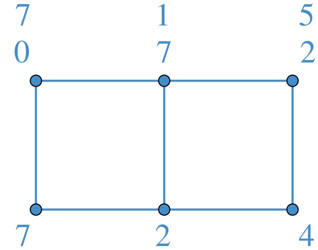


Hình được dán nhãn và trọng số.

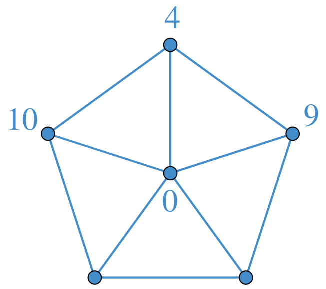
A. Một vài ví dụ

1. Trong các hình dưới đây, hình nào cho ta một dán nhãn duyên dáng ?





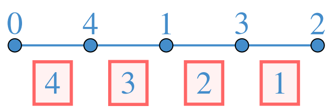
2. Bổ sung hình sau để được một dán nhãn duyên dáng.



B. Trường hợp thẳng hàng

Với mỗi số tự nhiên dương n, ta xét hình L_n gồm $n+1$ điểm thẳng hàng và n đoạn thẳng được tạo thành từ các điểm kề nhau.

Ta đề xuất sự gán nhãn duyên dáng của những điểm của hình L_4 như sau :



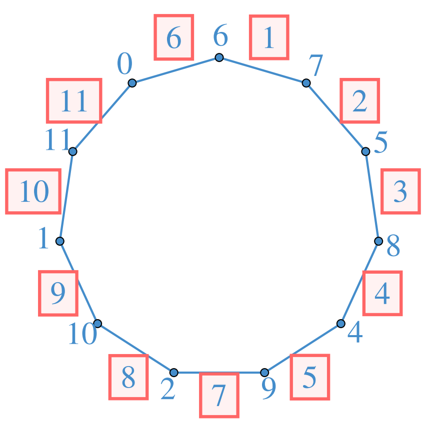
1. Chứng minh rằng tồn tại một dán nhãn duyên dáng cho mỗi hình L_5, L_6 và L_7.

2. Ta chấp nhận mà không chứng minh rằng tồn tại một dán nhãn duyên dáng đối với hình L_{2022} sao cho điểm ngoài cùng bên trái được gắn số 0. Hãy mô tả sự dán nhãn này.

C. Trường hợp đa giác

1. Chứng minh rằng mọi tam giác và tứ giác đều có thể được dán nhãn một cách duyên dáng.

2. Dựa vào dán nhãn duyên dáng của hình đa giác 11 cạnh dưới đây, hãy chỉ ra một cách dán nhãn duyên dáng của đa giác 12 cạnh.



3. Xác định tính chẵn lẻ đối với trọng số của một đoạn thẳng khi mà các số được gán cho các đầu mút của nó:

a. Khác nhau về tính chẵn lẻ.

b. Cùng tính chẵn lẻ.

4. Từ đó suy ra rằng hình ngũ giác không thể có dán nhãn duyên dáng.

D. Một hình đa giác với số cạnh lớn

Ta ký hiệu K_{2022} là hình được tạo thành từ 2022 điểm sao cho mỗi cặp điểm bất kỳ trong chúng được nối với nhau bằng một đoạn thẳng duy nhất.

1. Chứng minh rằng K_{2022} được tạo thành từ 2043231 đoạn thẳng.

2. Giả sử rằng tồn tại một dán nhãn duyên dáng đối với hình K_{2022}.

a. Có bao nhiêu đoạn thẳng mang trọng số là số lẻ?

b. Ta ký hiệu p là số điểm được dán nhãn là một số chẵn. Biểu diễn theo tham số p, số đoạn thẳng mà ở đó trọng số là một số lẻ.

3. Chứng minh rằng hình K_{2022} không thể có dán nhãn duyên dáng.

Bài 2 (Dành cho thí sinh theo chương trình chuyên)

Những số phân chia được

Phần A

Ta nói rằng một số tự nhiên là *phân chia được đơn nguyên* nếu như số đó lớn hơn hoặc bằng 3 và viết được dưới dạng : $1+2+3+\cdots+p$, trong đó p là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 2. Ví dụ, 3 và 10 là những số tự nhiên phân chia được đơn nguyên bởi vì: $3=1+2$ và $10=1+2+3+4$.

Ta nhắc lại rằng, tổng các số tự nhiên từ 1 tới n được cho bởi công thức:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

1. *a*. Chứng minh rằng 21 và 136 là những số tự nhiên phân chia được đơn nguyên.

1. *b.* Số tự nhiên 1850 có phân chia được đơn nguyên không?

2. Xét a là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 3. Hãy xác định điều kiện cần và đủ sao cho a là một số tự nhiên phân chia được đơn nguyên.

Phần B

Ta nói rằng một số tự nhiên là phân chia được nếu nó có thể viết dưới dạng tổng của hai hoặc nhiều hơn số nguyên dương liên tiếp. Ví dụ, 24 và 25 là những số tự nhiên phân chia được vì $24 = 7+8+9$ và $25 = 12+13$. Tuy nhiên 4 không phải là số tự nhiên phân chia được vì $1+2 < 4 < 1+2+3$ và $2+3 > 4$.

1. Chứng minh rằng 9 và 15 là những số tự nhiên phân chia được nhưng 16 thì không.

2. Chứng minh rằng mọi số nguyên lẻ lớn hơn hoặc bằng 3 là phân chia được.

Xét k và q là những số tự nhiên với $k \geq 2$. Đặt $S = (q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$. Chứng minh rằng: $2S = k(k+1+2q)$.

4. Chứng minh rằng mọi lũy thừa của 2 đều không phân chia được.

5. Chúng ta quan tâm đến những số nguyên dương chẵn và không phải là lũy thừa của 2. Gọi n là một số như thế. Ta chấp nhận rằng tồn tại duy nhất một cặp số tự nhiên (r, m) trong đó m là một số tự nhiên lẻ lớn hơn hoặc bằng 3 và r một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1, sao cho $n = 2^r \times m$.

a. Xác định r và m khi $n = 56$. Từ đó chỉ ra rằng 56 là một số phân chia được và hãy viết nó dưới dạng tổng của các số tự nhiên dương liên tiếp.

b. Chứng minh rằng 44 là phân chia được.

c. Chứng minh rằng mọi số nguyên dương chẵn và không phải là lũy thừa của 2 là phân chia được.

6. Từ những kết quả trên, hãy xác định tập hợp tất cả các số tự nhiên phân chia được.

Phần C

Một số tự nhiên được gọi là phân chia được một cách duy nhất nếu số đó được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tổng của hai hoặc nhiều hơn số tự nhiên dương liên tiếp.

1. Chứng minh rằng 13 là số phân chia được một cách duy nhất. Số 25 có phải là số phân chia được một cách duy nhất không?

2. *a.* Xét số tự nhiên n là tổng của k số tự nhiên dương liên tiếp, với $k\ ge3$. Ta có thể viết n dưới dạng $n = (q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$, với q là số tự nhiên. Chứng minh rằng n không phải là số nguyên tố.

b. Từ đó suy ra rằng mọi số nguyên tố lớn hơn hoặc bằng 3 là phân chia được một cách duy nhất.

Bài 3 (Dành cho các thí sinh không theo chương trình chuyên)

Số ba

Ta xây dựng một dãy số tự nhiên dựa trên quy tắc sau.

Quy tắc

Số hạng đầu tiên của dãy là 4.

Từ một số hạng, để có số hạng tiếp theo, ta thực hiện một trong những phép toán sau:

- Nhân số đó với 3;
- Nhân số với 3 rồi cộng kết quả nhận được với 2;
- Nếu là số chẵn thì chia cho 2.

Nếu một trong các dãy được xây dựng theo cách này có số hạng nào đó bằng N, thì ta nói rằng N là *số có thể đạt được.*

Ví dụ, số 11 có thể đạt được: thật vậy, ta bắt đầu từ số 4, nhân 4 với 3 để được 12, sau đó ta chia 12 cho 2 hai lần liên tiếp để được 3, sau đó nhân 3 với 3 rồi cộng 2 ta được kết quả là 11.

1. Chứng tỏ rằng tất cả các số tự nhiên từ 1 đến 12 đều có thể đạt được bằng quy tắc nêu trên.

2. Chứng tỏ rằng 2022 có thể đạt được bằng quy tắc nêu trên.

3. Giả sử rằng tồn tại các số tự nhiên không

thể đạt được bằng cách áp dụng quy tắc nêu trên. Gọi m là số nhỏ nhất như vậy.

a. Chứng tỏ rằng m không phải là bội của 3.

b. Chứng tỏ rằng $m-2$ không phải là bội của 3.

c. Chứng tỏ rằng $m-1$ cũng không phải là bội của 3.

d. Dựa vào kết quả trên, hãy đưa ra kết luận.

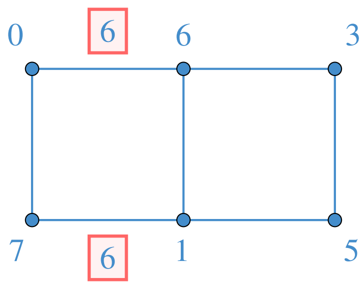
Lời giải

Bài 1 (Chung cho tất cả thí sinh).

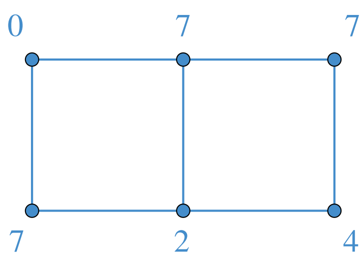
Sự dán nhãn duyên dáng của một hình.

Một vài ví dụ.

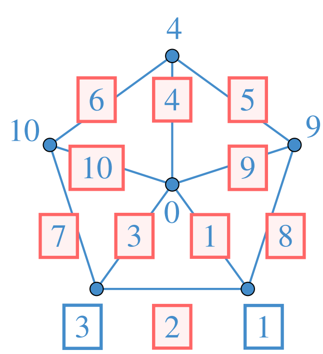
1. Hình thứ nhất không phải là một dán nhãn duyên dáng bởi vì có hai trọng số giống nhau.



Hình thứ hai cũng không phải là một dán nhãn duyên dáng bởi vì có hai nhãn 7 bằng nhau.

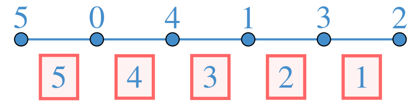


2. Hình đã cho có thể được bổ sung như sau:

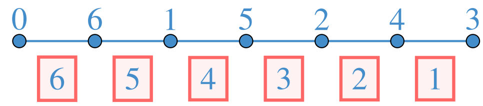


B. Trường hợp thẳng hàng

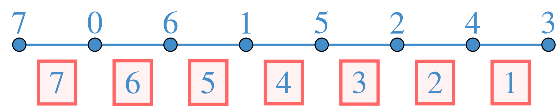
1. Một dán nhãn duyên dáng của hình L_5



Một dán nhãn duyên dáng của hình L_6



Sự dán nhãn duyên dáng của hình L_7



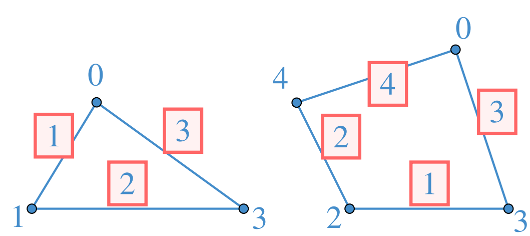
2. Tương tự như các dán nhãn của hình L_4 và L_6 phía trên, ta có thể dán nhãn hình L_{2022} như sau: ta đánh số các điểm từ trái qua phải dựa vào dãy sau:

$$0, 2022, 1, 2021, 2, 2020, 3, 2019, 4, 2018 \ldots, 1000, 1012, 1011$$

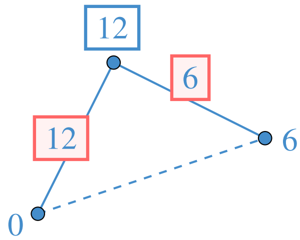
Với cách dán nhãn trên, ta nhận được các trọng số từ trái qua phải là: $2022, 2021, \ldots, 4, 3, 2, 1$. Đó là một dán nhãn duyên dáng của hình L_{2022}.

C. Trường hợp đa giác

1. Ta có thể dán nhãn tam giác và tứ giác một cách duyên dáng như sau:



2. Bằng cách thêm đỉnh số 12 như hình dưới vào một đa giác 11 cạnh cho trước ta nhận được một dán nhãn duyên dáng của đa giác 12 cạnh.

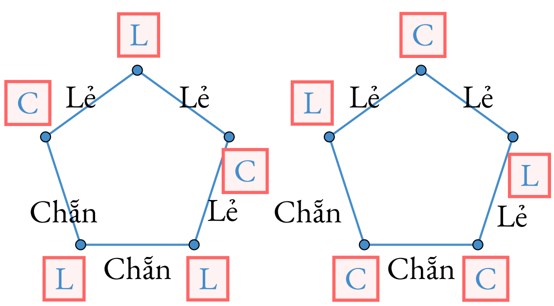


$3a$. Nếu hai đỉnh kề nhau khác tính chẵn lẻ thì hiệu của chúng là một số lẻ, do đó trọng số là số lẻ.

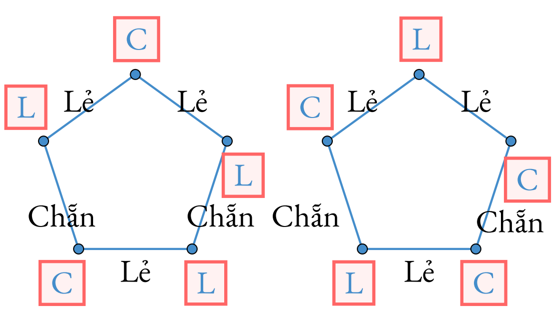
$3b$. Hoàn toàn tương tự như trên, nếu hai đỉnh kề nhau có cùng tính chẵn lẻ thì trọng số của đoạn thẳng nối hai đỉnh đó là một số chẵn.

4. Giả sử phản chứng rằng tồn tại dán nhãn duyên dáng đối với hình ngũ giác. Khi đó trọng số các cạnh sẽ là các số tự nhiên từ 1 tới 5, trong đó có 3 số lẻ và 2 số chẵn. Đối với 3 cạnh có trọng số lẻ thì các đỉnh liên kết phải khác tính chẵn lẻ, nếu không trọng số sẽ là số chẵn theo chứng minh trên. Ta có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: 3 cạnh trọng số lẻ kề nhau.



Trường hợp 2: 2 cạnh trọng số lẻ kề nhau liền kề với một cạnh có trọng số chẵn.



Khi đó sẽ tồn tại hai đỉnh được dán nhãn khác tính chẵn lẻ nhưng lại cho trọng số là số chẵn như minh họa phía trên. Điều này mâu thuẫn với tính chất đã chứng minh ở phần trước. Do vậy, không tồn tại bất cứ dán nhãn duyên dáng cho hình ngũ giác.

D. Một hình đa giác với số cạnh lớn

1. Số các đoạn thẳng bằng số cách chọn ra 2 điểm từ 2021 điểm, nghĩa là $\frac{1}{2} \times 2022 \times 2021 = 2043231$. Vậy, hình K_{2022} được tạo thành từ 2043231 đoạn thẳng.

$2a$. Số đoạn thẳng mang trọng số lẻ chính là số những số tự nhiên lẻ của tập hợp $\{1, 2, \ldots, 2043231\}$, nghĩa là bằng 1021616.

$2b$. Vì có p điểm được dán nhãn là số chẵn nên số điểm được dán nhãn là số lẻ là $2022 - p$. Số những đoạn thẳng có trọng số lẻ chính là số cặp điểm được dán nhãn khác nhau về tính chẵn lẻ, do đó có tất cả $p(2022 - p)$ đoạn.

3. Giả sử hình K_{2022} có một dán nhãn duyên dáng. Khi đó có 1021616 đoạn thẳng mang trọng số lẻ. Suy ra tồn tại một số tự nhiên p sao cho: $p(2022 - p) = 1021616$, nghĩa là $p^2 - 2022p + 1021616 = 0$. Phương trình này không có nghiệm nguyên, mâu thuẫn.

Bài 2 (Dành cho thí sinh theo chương trình chuyên)

Phần A

$1a$. Các số 21 và 136 là phân chia được đơn nguyên vì: $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ và $136 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$.

$1b$. Nếu 1850 là phân chia được đơn nguyên thì tồn tại số tự nhiên n sao cho:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = 1850.$$

Suy ra

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1850.$$

Hay, $n^2 + n - 3700 = 0$. Phương trình bậc hai này không có nghiệm nguyên, mâu thuẫn.

Do đó 1850 không phải là số phân chia được đơn nguyên.

$2.$ Số tự nhiên a lớn hơn hoặc bằng 3 là một số phân chia được đơn nguyên khi và chỉ khi phương trình: $n^2+n-2a=0$ có ít nhất một nghiệm nguyên dương. Điều đó có nghĩa là biệt thức $\Delta=1+8a$ là một số chính phương và ít nhất một trong hai nghiệm $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1+8a}}{2}$ và $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1+8a}}{2}$ là nguyên dương. Từ đó ta suy ra rằng điều kiện cần và đủ để a là số phân chia được đơn nguyên là $1+8a$ là một số chính phương.

Phần B

$1.$ Các số 9 và 15 là phân chia được vì $9=4+5$ và $15=7+8=4+5+6=1+2+3+4+5$. Tuy nhiên số 16 thì không phân chia được vì:

$$1+2+3+4+5<16<1+2+3+4+5+6;$$
$$2+3+4+5<16<2+3+4+5+6;$$
$$3+4+5<16<3+4+5+6;$$
$$4+5+6<16<4+5+6+7;$$
$$5+6<16<5+6+7; 6+7<16<6+7+8;$$
$$7+8<16<7+8+9 \text{ và } 8+9>16.$$

$2.$ Gọi n là số tự nhiên là lẻ và lớn hơn hoặc bằng 3. Đặt $n=2k+1$. Khi đó $n=k+(k+1)$ do đó là phân chia được.

$3.$ $S=(q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)=(q+q+\cdots+q)+(1+2+\cdots+k)=kq+\dfrac{k(k+1)}{2}$.

Từ đó suy ra: $2S=2kq+k(k+1)=k(2q+k+1)$.

$4.$ Giả sử $N=2^p$ là một lũy thừa của 2 và là phân chia được. Theo kết câu trên, tồn tại các số tự nhiên k và q lớn hơn hoặc bằng 2 sao cho: $2N=k(2q+k+1)$. Điều này là vô lý vì vế trái là một luỹ thừa của 2 còn vế phải là tích của một số chẵn và một số lẻ lớn hơn 1.

$5a.$ Ta có $56=2^3\times 7$ nên $r=3$ và $m=7$. Hơn nữa $2\times 56=2^4\times 7=7(2\times 4+7+1)$. Do đó 56 được viết dưới dạng tổng được định nghĩa ở ý $3)$ phần $B)$ với $k=7$ và $q=4$. Cụ thể hơn $56=5+6+7+8+9+10+11$, từ đó suy ra 56 là số tự nhiên phân chia được.

$5b.$ Tương tự như trên $2\times 44=8\times 11=8(2\times 1+8+1)$. Do đó $44=2+3+4+5+6+7+8+9$. Ta kết luận rằng 44 là số tự nhiên phân chia được.

$5c.$ Gọi n là một số tự nhiên dương chẵn và không phải là lũy thừa của 2. Đặt $n=2^r\times m$, với m là một số nguyên lẻ lớn hơn hoặc bằng 3 và r một số nguyên dương. Ta suy ra $2n=2^{r+1}\times m$. Ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1: Nếu $m>2^{r+1}$, tức là $m\geq 2^{r+1}+1$ và vì m là một số tự nhiên lẻ nên ta suy ra tồn tại một số tự nhiên $l\geq 0$ sao cho $m=2^{r+1}+1+2l$. Khi đó $2n=2^{r+1}(2l+2^{r+1}+1)$. Do đó n được viết dưới dạng tổng được định nghĩa ở ý $3)$ phần $B)$ với $k=2^{r+1}$ và $q=l$. Hay nói cách khác n là số tự nhiên phân chia được.

Trường hợp 2: Nếu $m<2^{r+1}$ tức là $m+1\leq 2^{r+1}$ và vì 2^{r+1} là một số tự nhiên chẵn nên ta suy ra tồn tại một số tự nhiên $l\geq 0$ sao cho $2^{r+1}=m+1+2l$. Khi đó $2n=m(2l+m+1)$. Do đó n được viết dưới dạng tổng được định nghĩa ở ý $3)$ phần $B)$ với $k=m$ và $q=l$. Ta kết luận rằng n là số tự nhiên phân chia được.

Lưu ý rằng trường hợp $m=2^{r+1}$ không thể xảy ra vì m là số lẻ.

$6.$ Từ những kết quả nhận được ở câu hỏi $2)$ và câu hỏi $5)$ ta suy ra rằng tập hợp những số tự nhiên phân chia được gồm những số tự nhiên lẻ lớn hơn hoặc bằng 3 và những số tự nhiên chẵn không viết được dưới dạng lũy thừa của 2.

Phần C

$1.$ 13 là số tự nhiên lẻ lớn hơn 3, nên theo kết quả trên 13 là số tự nhiên phân chia được, hơn nữa $2\times 13=2(2\times 5+2+1)$ nên 13 được viết dưới dạng tổng được định nghĩa ở ý $3)$ phần $B)$ với $k=2$ và $q=5$. Tức là

$13 = (5+1)+(5+2)$. Giả sử tồn tại một biểu diễn khác của 13, ta suy ra tồn tại những số tự nhiên k' $ge2$ và q' sao cho $13 = (q'+1)+(q'+2)+\cdots+(q'+k')$. Theo kết quả phần B), ta có $2\times 13 = k'(2q'+k'+1)$. Vì $2q'+k'+1 > k'$ nên ta suy ra $k' < 13$. Vì 13 là số nguyên tố, nên ta suy ra $k' \geq 2$ là ước của 2. Hay nói cách khác $k' = 2 = k$. Thay vào đẳng thức ta được $q' = 5 = q$. Do đó 13 là số tự nhiên phân chia được một cách duy nhất. Tương tự 25 là số tự nhiên phân chia được, tuy nhiên $2\times 25 = 2\times(2\times 11+2+1) = 5(2\times 2+5+1)$, nên theo kết quả ở phần B), số tự nhiên 25 có thể được biểu diễn dưới dạng tổng theo 2 cách $25 = 12+13$ và $25 = 3+4+5+6+7$ nên nó không phải là số tự nhiên phân chia được một cách duy nhất.

$2a$. Ta có $n = (q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k) = k\times q+\dfrac{k(k+1)}{2}$. Nếu k là số tự nhiên chẵn thì $\dfrac{k}{2}$ là một số tự nhiên, do đó $n = \dfrac{k}{2}(2q+k+1)$. Nếu k là một số tự nhiên lẻ thì $\dfrac{k}{2}$ là một số tự nhiên, do đó $n = k(q+\dfrac{k+1}{2})$. Từ đó ta kết luận rằng n không phải là số nguyên tố.

$2b$. Gọi p là tố lớn hơn hoặc bằng 3, vì p là số lẻ nên theo kết quả phần B) p là số tự nhiên phân chia được. Hơn nữa $p = (q+1)+(q+2)$ với $q = \dfrac{p-3}{2}$. Để ý rằng q là một số tự nhiên vì p là một số lẻ lớn hơn hoặc bằng 3. Ta sẽ chứng minh biểu diễn này là duy nhất. Tương tự câu 1) giả sử tồn tại một biểu diễn khác của 13, ta suy ra tồn tại những số tự nhiên $k' \geq 2$ và q' sao cho $p = (q'+1)+(q'+2)+\cdots+(q'+k')$. Theo kết quả phần B), ta có $2\times p = k'(2q'+k'+1)$. Vì $2q'+k'+1 > k'$ nên ta suy ra $k' < p$. Vì p là số nguyên tố, nên ta suy ra k' là ước của 2. Hay nói cách khác $k' = 2$. Thay vào đẳng thức ta được $q' = q$. Ta kết luận rằng mọi số nguyên tố lớn hơn hoặc bằng 3 đều phân chia được một cách duy nhất.

Bài 3 (Dành cho các thí sinh không theo chương trình chuyên)

Số ba

1. Dựa vào những sơ đồ dưới đây, ta có thể khẳng định rằng cả các số tự nhiên từ 1 đến 12 đều có thể đạt được bằng quy tắc nêu trên.

$$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{:2} 1, \qquad 4 \xrightarrow{:2} 2,$$
$$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{:2} 3, \qquad 4,$$
$$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{:2} 1 \xrightarrow{\times 3} 3 \xrightarrow{+2} 5,$$
$$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{\times 3} 6,$$
$$4 \xrightarrow{\times 3} 12 \xrightarrow{+2} 14 \xrightarrow{:2} 7,$$
$$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{+2} 8,$$
$$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{:2} 1 \xrightarrow{\times 3} 3 \xrightarrow{\times 3} 9,$$
$$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{\times 3} 18 \xrightarrow{+2} 20 \xrightarrow{:2} 10,$$
$$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{:2} 1 \xrightarrow{\times 3} 3 \xrightarrow{\times 3} 9 \xrightarrow{+2} 11,$$
$$4 \xrightarrow{\times 3} 12.$$

2. Dựa vào kết quả trên, ta có thể thực hiện các phép toán sao cho kết quả là 8. Sau đó ta tiếp tục áp dụng liên tiếp các phép toán sau:

$$8 \xrightarrow{\times 3} 24 \xrightarrow{\times 3} 72 \xrightarrow{+2} 74 \xrightarrow{\times 3} 222$$
$$222 \xrightarrow{+2} 224 \xrightarrow{\times 3} 672 \xrightarrow{+2} 674 \xrightarrow{\times 3} 2022.$$

Ta kết luận rằng 2022 là số tự nhiên có thể đạt được theo các quy tắc đã nêu.

$3a$. Giả sử phản chứng rằng m là bội của 3. Đặt $m = 3a$. Do m là số không đạt được nhỏ nhất. nhỏ nhất nên a là số đạt được. Thế nhưng khi đó, ta chỉ cần áp dụng thêm phép toán Nhân 3 với kết quả a để đạt được m. Hay nói cách khác m là số tự nhiên đạt được, mâu thuẫn. Chứng tỏ rằng giả sử phản chứng là sai, nói cách khác m không phải là bội của 3.

$3b$. Giả sử $m-2$ là bội của 3, đặt $m=3b+2$. Do m là số không đạt được nhỏ nhất nên b là đạt được. Khi đó, chỉ cần áp dụng thêm 2 phép toán liên tiếp Nhân 3 rồi Cộng 2 với từ b ta thu được m. Hay nói cách khác m là số tự nhiên đạt được, mâu thuẫn. Vậy $m-2$ không phải là bội của 3.

$3c$. Nếu $m-1$ là bội của 3, thì tồn tại số tự nhiên dương c sao cho $m=3c+1>c$. Ta suy ra $2m=3\times 2c+2$. Nếu $2c$ là số tự nhiên không đạt được bằng cách áp dụng các quy tắc như trên, thì vì m là nhỏ nhất trong những số không thể đạt được nên $m\ le 2c$, hay $3c+1\leq 2c \Leftrightarrow +1\leq 0$. Điều này mâu thuẫn với điều kiện c là số tự nhiên. Ngược lại, nếu $2c$ là số tự nhiên đạt được, ta áp dụng thêm 3 phép toán liên tiếp Nhân 3 rồi Cộng 2 rồi Chia 2 với kết quả $2c$ ta thu được m. Hay nói cách khác m cũng là số tự nhiên đạt được. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của m. Chứng tỏ rằng $m-1$ không phải là bội của 3.

$3d$. Vì trong ba số tự nhiên liên tiếp luôn có một số là bội của 3. Nên dựa vào những kết quả trên, nếu tồn tại những số tự nhiên không đạt được bằng cách áp dụng các quy tắc đã nêu với m là số tự nhiên nhỏ nhất trong số chúng, khi đó $m-2, m-1$ và m đều không phải là bội của 3. Điều này mâu thuẫn với tính chất đã nêu. Chứng tỏ, mọi số tự nhiên dương đều đạt được bằng cách áp dụng các quy tắc đã nêu.

Tài liệu tham khảo

[1] Les Olympiades nationales de mathématiques | Ministère de l'Education Nationale et de la Jeunesse

[2] https://www.freemaths.fr/annales-olympiades-mathematiques-premieres-scientifiques-s/nationales/2022

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Sau đó, hai máy bay có đầy bình tiếp tục hành trình của mình còn chiếc còn $1/2$ bình quay trở lại sân bay ban đầu.

Sau khi tiếp tục đi được $1/8$ vòng Trái Đất, nghĩa là được $1/4$ vòng kể từ điểm xuất phát, chiếc còn lại chuyển $1/4$ bình nhiên liệu cho Pi. Khi này Pi có đầy bình và chiếc còn lại có $1/4$ bình, vừa đủ để quay trở lại. Bây giờ, Pi tiếp tục hành trình của mình còn chiếc máy bay kia quay trở lại sân bay ban đầu. Với đầy bình, Pi có thể đi được $3/4$ vòng Trái Đất kể từ điểm xuất phát.

Máy bay đầu tiên, với đầy bình bay theo hướng ngược lại (so với hướng ban đầu) để gặp máy bay của Pi ở vị trí $3/4$ vòng Trái Đất, khi đó máy bay đầu tiên còn $1/2$ bình sẽ tiếp cho máy bay của Pi $1/4$ bình, sao cho cả hai máy bay có $1/4$ bình, đủ để đi đến vị trí $7/8$ vòng Trái Đất. Khi hai chiếc máy bay này gặp nhau, chiếc còn lại bắt đầu xuất phát từ sân bay ban đầu với đầy bình và bay theo hướng ngược lại để gặp máy bay của Pi và chiếc thứ hai ở vị trí $7/8$ vòng Trái Đất và tiếp cho mỗi chiếc $1/4$ bình. Khi này, mỗi chiếc có đúng $1/4$ bình, vừa đủ để bay về sân bay ban đầu.

Góc cờ

Bài 1. 1.Vd4 Vb4 2.Xg2 Mh3 [2...Md1 3.Xd2]

3.Ke3 Mã đen bị bắt.

Bài 2. 1.Vc4 Vc6 [1...Mh3 2.Xg4 Mf2 3.Xh4]

2.Xh4 Vd6 3.Vd4 Ve6 4.Ve3 Md1+ 5.Vd2 Mb2 [5...Mf2 6.Ve2]

6.Xb4

Bài 3. 1.Xd4!! Mb6 [1...Mb2 2.Ve3 Vf5 3.Vd2 Ve5 4.Xb4]

2.Ve5 Mc8 3.Ve6 Ma7 4.Vd7 Mb5 [4...Vf5 5.Xa4 Mb5 6.Xa5; 4...Vg6 5.Xd5]

5.Xd5+

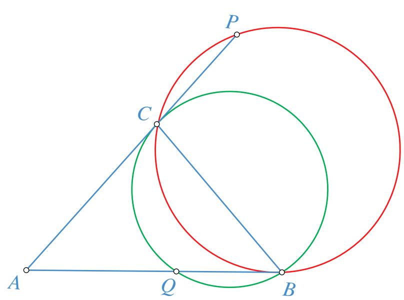
1 – 0

GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày lời giải của các bài toán trong cuộc thi Olympic toán Maclaurin năm 2021 tại Vương quốc Anh đăng trong số báo $4/2022$.

OC7. Cho tam giác ABC như trong hình vẽ. Một đường tròn, đi qua điểm C và tiếp xúc với AB tại B, cắt đường thẳng AC tại P. Đường tròn thứ hai, đi qua điểm B và tiếp xúc với AC tại C, cắt đường thẳng AB tại Q. Chứng minh rằng

$$\frac{AP}{AQ} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3.$$



Lời giải. Ta nối PB và QC và khai thác tính chất: góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng góc nội tiếp chắn cung đó. Ta nhận được $\angle BPC = \angle ABC = \angle QCA$.

Như vậy các tam giác ACQ, ABC and APB đồng dạng vì có hai góc bằng nhau. Do đó

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AP}.$$

Từ đây, ta nhận được $AP = \frac{AB^2}{AC}$ và $AQ = \frac{AC^2}{AB}$ và suy ra đẳng thức cần chứng minh.

OC8. Một dãy số nguyên $a_1, a_2, a_3, \cdots$ được xác định bởi:

$$a_1 = k, a_{n+1} = a_n + 8n$$
$$\text{với mọi số nguyên } n \geq 1.$$

Tìm tất cả các giá trị của k sao cho mọi số hạng trong dãy đều là số chính phương.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $a_1 = k$ và $a_2 = k + 8$ là các số chính phương, giả sử $k = m^2$. Do chênh lệch giữa 2 số chính phương $(m+3)^2$ và m^2 là $(m+3)^2 - m^2 = m^2 + 6m + 9 - m^2 = 6m + 9 > 8$ nên $k + 8$ chỉ có thể bằng $(m+1)^2$ hoặc $(m+2)^2$. Tuy nhiên, nếu $k + 8 = (m+1)^2$ thì vô lý vì khi đó $8 = (m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$ là số lẻ.

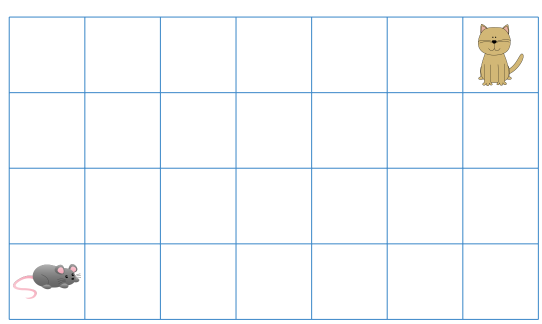
Như vậy, chỉ còn lại khả năng duy nhất là $k + 8 = (m+2)^2$. Ta suy ra $8 = (m+2)^2 - m^2 = 4m + 4$, tức là $m = 1$, hay $k = 1$.

Ta kiểm tra lại rằng $k = 1$ thỏa mãn đầu bài. Thật vậy, khi đó, ta dễ dàng tính được $a_n = 1 + 8(1 + 2 \cdots (n-1)) = 1 + 4n(n-1) = (2n-1)^2$, luôn là số chính phương.

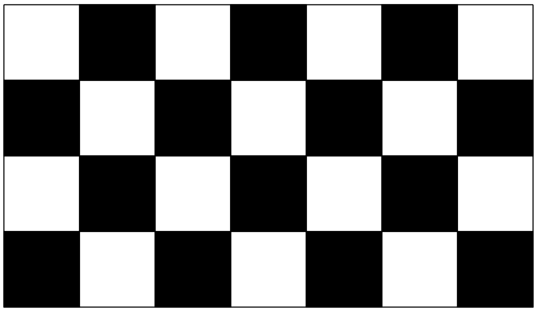
Như vậy $k = 1$ là giá trị duy nhất thỏa mãn đầu bài.

OC9. Một con mèo và một con chuột lần lượt ở tại các ô trên cùng bên phải và dưới cùng bên trái của một bảng ô vuông kích thước $m \times n$, trong đó $m, n > 1$. Mỗi giây cả hai đều di chuyển chéo một ô (sang một trong các ô có chung đúng 1 đỉnh với ô hiện tại).

Với những cặp (m, n) nào thì mèo và chuột có thể đồng thời đi đến cùng một ô?



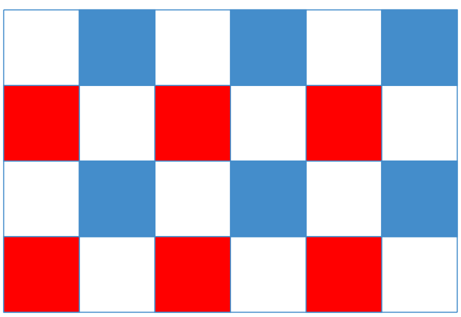
Lời giải. Ta tô màu các ô vuông đen, trắng như bàn cờ vua.



Khi $m+n$ lẻ, ô xuất phát của mèo và chuột có màu khác nhau. Do đó, tại bất kỳ thời điểm nào, mèo và chuột luôn ở những ô khác màu và chúng không thể đến cùng một ô.

Khi $m+n$ chẵn, Ta tô màu xanh, đỏ luân phiên những ô trên đường đi của mèo và chuột như trên hình vẽ.

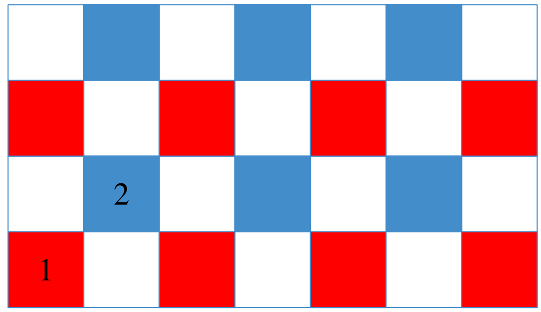
Trước tiên ta xét trường hợp cả m và n đều chẵn.



Như vậy, ban đầu chuột ở ô đỏ, mèo ở ô xanh và mỗi bước chúng đều di chuyển đến những ô khác màu với ô hiện tại. Do đó mèo và chuột luôn ở những ô khác màu và không bao giờ có thể đến cùng một ô.

Còn lại trường hợp cả m và n đều lẻ. Có cách như sau để mèo và chuột đến được cùng một ô: chuột chỉ đi tới, lui giữa ô đỏ (đánh số 1) và ô xanh (đánh số 2) ở góc như trong hình bên dưới, còn mèo tiến dần về phía chuột.

Chú ý rằng, ban đầu mèo và chuột xuất phát từ các ô cùng màu nên tại mọi thời điểm chúng luôn ở những ô cùng màu. Do đó khi mèo đi đến ô xanh số 2 thì chuột cũng phải ở một ô xanh, tức là chuột cũng ở chính ô này.



Như vậy mèo và chuột có thể đến được cùng một ô khi và chỉ khi cả m và n đều lẻ.

Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc ba bài toán trong kỳ thi Olympic Toán học trẻ của Ba Lan năm 2022. Các bài toán này phù hợp với trình độ học sinh khối lớp $6-8$.

OC16. Trong lớp của Marek có 17 học sinh và tất cả đều làm một bài kiểm tra. Biết rằng điểm của Marek cao hơn 17 điểm so với điểm trung bình của các học sinh còn lại trong lớp. Hỏi điểm của Marek cao hơn điểm trung bình của cả lớp là bao nhiêu?

OC17. Giả sử mỗi ô vuông trong bảng dưới đây được điền một số nguyên dương từ 1 đến 17 sao cho:

– Các số được điền đôi một phân biệt;

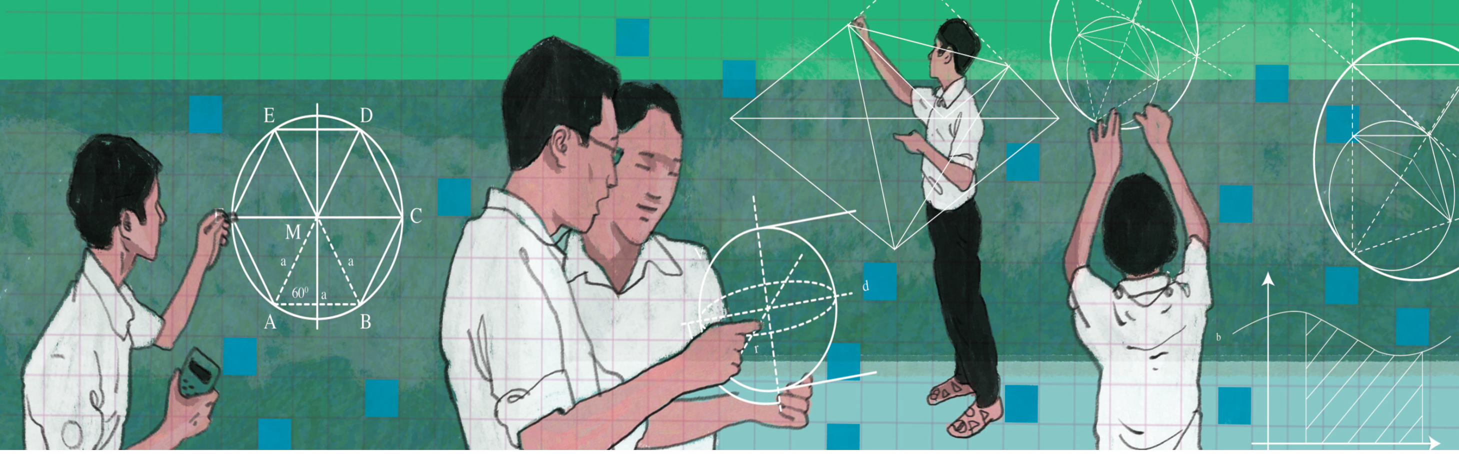
– Tổng của các số trong mỗi cột đều bằng nhau và tổng các số ở hàng trên cùng gấp đôi tổng các số ở hàng dưới cùng.

Hỏi trong các số từ 1 đến 17, số nào không được điền vào bảng? Vì sao?

OC18. Các điểm K, L, M lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác đều ABC và thỏa mãn các điều kiện sau:

$$KM = LM, \angle KML = 90^\circ \text{ và } AM = BK.$$

Chứng minh rằng $\angle CKL = 90^\circ$.



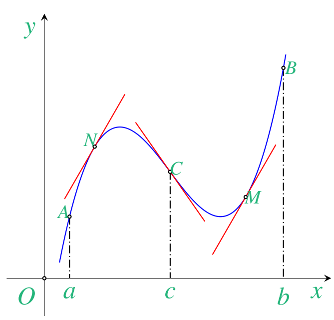
DÙNG TIẾP TUYẾN ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

TRẦN VĂN LÂM[1]

Trong bài viết này, tác giả xin giới thiệu với bạn đọc phương pháp sử dụng tiếp tuyến để giải một số bài toán về phương trình, bất phương trình thông qua tính lồi, lõm của hàm số.

1. Khái niệm về tính lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị

Xét đồ thị ACB của hàm số $y = f(x)$ biểu diễn trong hình dưới đây. Ta giả thiết rằng tại mọi điểm của nó, đồ thị đã cho đều có tiếp tuyến. Tại mọi điểm của cung AC tiếp tuyến luôn luôn ở *phía trên* của AC, ta nói AC là một ***cung lồi***. Nếu a là hoành độ của A và c là hoành độ của C, thì khoảng $(a;c)$ được gọi là một khoảng lồi của đồ thị. Tại mỗi điểm của cung CB tiếp tuyến luôn luôn ở *phía dưới* của CB. Ta nói CB là một ***cung lõm***. Nếu c là hoành độ của C, b là hoành độ của B thì khoảng $(c;b)$ được gọi là một khoảng lõm của đồ thị.



Điểm phân cách giữa cung lồi và cung lõm được gọi là ***điểm uốn***. Điểm C của đồ thị trong hình là điểm uốn.

Nói cách khác thì: Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (I). Ta nói rằng

$a)$ Đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ lồi trên khoảng (I) nếu tiếp tuyến của (C) tại mỗi điểm của nó đều nằm phía trên đồ thị.

$b)$ Đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ lõm trên khoảng (I) nếu tiếp tuyến của nó tại mỗi điểm của nó đều nằm phía dưới đồ thị.

Nhận xét: Đồ thị hàm lồi có hình dạng giống như một cái mũ $\cap$ còn của hàm lõm thì có hình dạng giống như một cái cốc $\cup$.

2. Dấu hiệu lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị

Ta thừa nhận dấu hiệu lồi, lõm sau đây:

Định lý: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên khoảng I.

$1)$ Nếu $f''(x) < 0$ với mọi $x \in I$ thì đồ thị của hàm số ***lồi*** trên khoảng đó.

$2)$ Nếu $f''(x) > 0$ với mọi $x \in I$ thì đồ thị của hàm số ***lõm*** trên khoảng đó.

Định lý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên một khoảng I chứa điểm x_0. Nếu $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x qua điểm

[1] *Thái Nguyên.*

x_0 thì $U(x_0; f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Tại điểm uốn tiếp tuyến đi xuyên qua đồ thị.

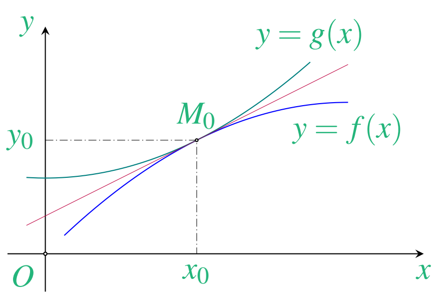
3. Điều kiện để hai đường cong tiếp xúc nhau

Điều kiện để hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc nhau là hệ phương trình sau có nghiệm và nghiệm của hệ là hoành độ giao điểm của hai đường cong đó

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \qquad (*)$$

Vậy f và g tiếp xúc nhau khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của hệ $(*)$.

Nếu hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tính lồi lõm trái ngược nhau, ngoài ra có chung nhau tiếp tuyến thì khi đó phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất.



Cần phải chú ý rằng nhiều tài liệu trong và ngoài nước hiện nay định nghĩa về tính lồi (convex), lõm (concave) của đồ thị hàm số khác như đã nêu ở trên. Cụ thể là hàm lồi trong bài viết này được gọi là hàm lõm trong một số tài liệu, còn hàm lõm trong bài viết này thì lại được họ gọi là hàm lồi.

Ta sẽ vận dụng những tính chất và nhận xét trên để ứng dụng trong việc giải một số bài toán về phương trình, bất phương trình, đây cũng chính là cơ sở của phương pháp tiếp tuyến trên.

Trong bài viết này chúng ta viết tắt VT cho vế trái, VP cho vế phải. Việc kiểm tra dấu hiệu lồi, lõm của hàm số bằng cách tính đạo hàm cấp hai trong một số ví dụ sẽ được dành cho bạn đọc.

4. Các ví dụ

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$x^2 - 2x + 5 = \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}.$$

Lời giải. Điều kiện $-3 \le x \le 5$. Vế trái là hàm lõm còn vế phải là hàm lồi (bạn đọc tự kiểm tra), chúng có chung tiếp tuyến tại $x = 1$ là $y = 4$. Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất.

Nhận xét: Bài tập kiểu như trên rất quen thuộc với nhiều bạn đọc, phương pháp thường dùng là đánh giá bất đẳng thức. Ở đây, chúng ta sử dụng tiếp cận mới thông qua tiếp tuyến.

Ta sẽ đến với những ví dụ khác, đòi hỏi đến cả kỹ năng nhẩm nghiệm.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt[6]{6x-5} = \frac{x^7}{8x^2 - 10x + 3}.$$

Lời giải. Điều kiện $x \ge \frac{5}{6}$. Với $x \ge \frac{5}{6}$ thì VT là hàm lồi, liên tục, vì vậy đồ thị hàm số nằm dưới tất cả các tiếp tuyến của nó tại điểm $x = 1$ là $y = x + 1$. Với $x \ge \frac{5}{6}$ thì VP là hàm lõm, liên tục, vì vậy đồ thị hàm số nằm trên tất cả các tiếp tuyến của nó tại điểm $x = 1$ là $y = x + 1$.

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 3. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ được xác định như sau: $f(x) = \sqrt{13x^2 - 6x + 10} + \sqrt{5x^2 - 13x + \frac{17}{2}} + \sqrt{17x^2 - 48x + 36}$ và $g(x) = \frac{1}{2}(36x - 8x^2 - 21)$.

Giải phương trình $f(x) = g(x)$.

Lời giải. Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$

Không khó để chỉ ra $h(x)$ là hàm lõm, liên tục.

Nhận thấy $h(\frac{3}{2}) = 0$ và $h'(\frac{3}{2}) = 0$, do đó đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành tại điểm $x=\frac{3}{2}$.

Vậy $x=\frac{3}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình của bài toán.

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$x\sqrt{x^2+6}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+7}=\frac{13}{5}(2x+1)$$

Lời giải. Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $g(x)=x\sqrt{x^2+6}$ và $f(x)=g(x+1)+g(x)$.

Ta dễ kiểm tra thấy rằng:

$a)$ $g(x)$ là hàm lẻ và $g''(x)$ cũng là hàm lẻ; hơn nữa ta cũng có $f(-\frac{1}{2})=f''(-\frac{1}{2})=0$.

$b)$ $g(x)$ và $g''(x)$ là hàm đồng biến, suy ra $f(x)$ và $f''(x)$ cũng là hàm đồng biến.

$c)$ Tiếp tuyến $f(x)$ tại $x=-\frac{1}{2}$ là $y=\frac{13}{5}(2x+1)$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ nằm dưới tiếp tuyến của nó khi $x<-\frac{1}{2}$ và đồ thị hàm số $f(x)$ nằm trên tiếp tuyến của nó khi $x>-\frac{1}{2}$.

Vậy $x=-\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Chú ý: Ở ví dụ này nghiệm của phương trình chính là điểm uốn của đồ thị.

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$3\left(x^3+\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\right)+2 =\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{(1-x)^3}.$$

Lời giải. Điều kiện xác định $x\in[-1;1]$. Nhận xét rằng $x=0$ là một nghiệm của phương trình. Đặt $f(x)=x+(1+x)^{-\frac{3}{2}}$ và $g(x)=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}+(1-x)^{\frac{3}{2}}-2}{x}$.

Giả sử $x\neq 0$. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $3f(x^2)=g(x)$.

Chú ý rằng:

Một mặt, $g(x)$ là hàm lẻ, nhận giá trị âm trên $[-1;0)$ và dương trên $(0,1]$ và đồng biến trên mỗi khoảng này (bạn đọc tự kiểm tra), nên $g(x)\le g(1)=2\sqrt{2}-1<1$ với mọi $0\neq x\in[-1,1]$.

Mặt khác, $f(x)$ là hàm lõm trên $[0,1]$ (bạn đọc tự kiểm tra), vì vậy đồ thị hàm số nằm trên tiếp tuyến của nó tại điểm $x=0: f(x)\ge 1-\frac{x}{2}\ge\frac{1}{2}$.

Vậy $f(x^2)\ge\frac{1}{2}$, suy ra $3f(x^2)\ge\frac{3}{2}>1\ge g(x)$, do đó phương trình không còn nghiệm nào nữa.

Vậy $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 6. Cho số lẻ $n>1$. Giải phương trình

$$n^{x^n-1}+n^{\frac{1}{x}}=n+1.$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x\neq 0$. Nếu $x<0$ thì VT$<2<$VP nên trường hợp này phương trình vô nghiệm.

Xét trường hợp $x>0$. Xét hàm số $f(x):\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x)=n^{x^n-1}+n^{\frac{1}{x}}-n-1$$

Ta lần lượt có:

$$f'(x)=n(\ln n)x^{n-1}n^{x^n-1}-\frac{\ln n}{x^2}n^{\frac{1}{x}}.$$

$$f''(x)=n(\ln n)\left(n(\ln n)x^{2n-2}+(n-1)x^{n-2}\right)\times n^{x^n-1}+\ln n\left(\frac{\ln n}{x^4}+\frac{2}{x^3}\right)n^{\frac{1}{x}}.$$

Nhận thấy rằng $f(1)=f'(1)=0$, do đó tiếp tuyến của hàm số $f(x)$ tại điểm $x=1$ là trục hoành.

Vì $f(x)$ là hàm lõm và liên tục $(f''(x)>0)$ do đó $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 7. Giải bất phương trình

$$45x^3-17x^2-37x+25\ge 4\sqrt{(x+1)(5x-3)^3}.$$

Lời giải. Bất phương trình đã cho được viết lại thành

$$(x+1)(45x^2-62x+25) \geq 4\sqrt{(x+1)(5x-3)^3}.$$

Nhận thấy rằng một nghiệm là $x=-1$; các nghiệm khác phải thỏa mãn $x>-1$ (trái lại thì VT$<0\leq$ VP), và thật ra $x \geq \frac{3}{5}$ (trái lại thì VP không xác định).

Khi đó (với điều kiện $x \geq \frac{3}{5}$) bất phương trình trở thành

$$45x^2-62x+25 \geq 4(5x-3)\sqrt{\frac{5x-3}{x+1}}.$$

Nhận thấy một nghiệm thứ hai là $x=\frac{3}{5}$. Vậy với $x>\frac{3}{5}$ bất phương trình trở thành

$$\frac{45x^2-62x+25}{4(5x-3)} \geq \sqrt{\frac{5x-3}{x+1}}.$$

VT là hàm lõm (bạn đọc tự kiểm tra) với tiếp tuyến $y=x$ tại $x=1$, VP là hàm lồi (bạn đọc tự kiểm tra) với tiếp tuyến $y=x$ tại $x=1$. Vậy đồ thị hàm số VT luôn nằm trên đồ thị của VP, do đó bất phương trình luôn đúng.

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x \in \{-1\} \cup \left[\frac{3}{5}, +\infty\right)$

5. Bài tập đề nghị

Bài 1. Giải các phương trình sau trên tập số thực

a) $\sqrt[4]{x}=\frac{3}{8}+2x$.

b) $8x^2+\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{5}{2}$.

c) $16x^4+5=6\sqrt[3]{4x^3+x}$.

d) $2\sqrt[4]{\frac{x^2}{3}+4}=1+\sqrt{\frac{3x}{2}}$.

e) $x^2+2x+4=3\sqrt{x^3+4x}$.

f) $2^{x^2}+3^{x^2}+4^{x^2}+5^{x^2}=4^{1-x^2}$.

g) $x^2+x=(6x-x^2-2)\sqrt{x-1}$.

h) $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=0$.

i) $x^3+x^2-15x+30=4\sqrt[4]{27(x+1)}$.

j) $2\sqrt[4]{27x^2+24x+\frac{28}{3}}=1+\sqrt{\frac{27x}{2}+6}$.

k) $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2$.

l) $x^2-2x+3=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{1+3x-3x^2}$.

m) $\sqrt{x^2+x+19}+\sqrt{7x^2+22x+28}$
$+\sqrt{13x^2+43x+37}=3\sqrt{3}(x+3)$.

n) $\log_2\frac{2x+1}{4x}=\log_x\frac{2x+1}{2}$.

Bài 2. Tồn tại hay không các cặp số thực âm (x,y) thoả mãn phương trình $x2^y+y2^{-x}=x+y$?

Bài 3. Tìm tất cả các số thực a sao cho bất phương trình $a^x \geq 1+x\log_{11}12$ đúng với mọi số thực x.

Tài liệu tham khảo

[1] Ngô Thúc Lanh (chủ biên), *Giải tích* 12 (SGK), Nhà xuất bản Giáo Dục (2006).

[2] Nguyễn Huy Đoan (chủ biên), *Giải tích 12 nâng cao* (SGK), Nhà xuất bản Giáo Dục (2008).

[3] Phan Đức Chính (chủ biên), *Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp (Tập 2)*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội (2003).

[4] Nguyễn Quang Nam, *Kỹ thuật tạo nhân tử kép*, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Nhà xuất bản Giáo Dục (Số 511, tháng 1/2020).

[5] https://artofproblemsolving.com/community

HUY CHƯƠNG FIELDS NÊN TRỞ VỀ VỚI GIÁ TRỊ BAN ĐẦU*

MICHAEL BARANY

(Người dịch: Nguyễn Mạnh Toàn[1])

Những hồ sơ bị lãng quên về giải thưởng danh giá nhất của toán học lưu giữ những bài học cho tương lai của ngành này, lập luận của nhà sử học Michael Barany.

Olga Ladyzhenskaya lọt vào danh sách rút gọn Huy chương Fields năm 1958. Nguồn: Karl Nickel – Oberwolfach Photo Collection.

Cũng giống như huy chương Thế vận hội hay cúp vàng bóng đá thế giới, giải thưởng danh giá nhất ngành Toán học chỉ được trao bốn năm một lần. Ngay từ bây giờ, các khoa toán trên toàn thế giới đang xôn xao với những tin đồn, bởi 2018 là năm của huy chương Fields.

Trong niềm hân hoan hướng tới buổi lễ công bố của năm nay, tôi đã nhìn về quá khứ với sự quan tâm thậm chí còn lớn hơn. Trong các tập tài liệu lưu trữ bị lãng quên từ lâu, tôi đã tìm thấy những chi tiết về các bước ngoặt trong quá khứ của huy chương này mà theo quan điểm của tôi, là bài học cho những người đang cân nhắc sẽ công nhận ai vào tháng 8 tới tại Đại hội toán học thế giới 2018 (International Congress of Mathematicians–ICM) ở Rio de Janeiro ở Brazil, và cả sau đó nữa.

Từ cuối những năm 1960, huy chương Fields đã được so sánh một cách rộng rãi với giải Nobel, nơi không có hạng mục nào dành cho toán học [1]. Trên thực tế, cả hai rất khác nhau về thủ tục, tiêu chí, tiền thưởng và nhiều mặt khác nữa. Đặc biệt, giải Nobel thường được trao cho những nhà khoa học lỗi lạc, những người được vinh danh thường hàng thập kỷ sau những cống hiến. Ngược

* *Bản gốc có thể xem tại The Fields Medal should return to its roots. Nature 553, 18 January 2018, pp. 271 – 273'*

[2] *Đại học Osnabrück.*

lại, những người nhận huy chương Fields lại ở độ tuổi mà, trong hầu hết các ngành khoa học, một sự nghiệp đầy hứa hẹn chỉ mới vừa cất cánh.

Ý tưởng trao một giải thưởng danh giá cho những ngôi sao đang lên, những người đã tạo được dấu ấn lớn khi còn khá trẻ – bằng sự xuất sắc, may mắn và hợp thời – là một sự tình cờ của lịch sử. Nó không phản ánh bất kỳ mối liên hệ đặc biệt nào giữa toán học và tuổi trẻ – một truyền thuyết[3] không được các số liệu xác nhận [2, 3]. Như một số nhà toán học đã nhận ra từ lâu [4], chính sự tình cờ này đã làm tổn hại đến toán học. Nó củng cố những định kiến trong ngành cũng như trong quan điểm của công chúng về công việc, con đường sự nghiệp, các giá trị trí tuệ và xã hội của các nhà toán học. Tất cả 56 người đoạt giải cho đến nay đều là những nhà toán học phi thường, nhưng vì những thành kiến như vậy mà 55 người trong số họ là nam giới[4], hầu hết đến từ Hoa Kỳ, Châu Âu và hầu hết làm việc trong một nhóm các chủ đề nghiên cứu được cho là không đại diện cho toàn bộ ngành.

Được khởi xướng vào những năm 1930, huy chương Fields ban đầu có những mục tiêu rất khác. Nó tập trung chủ yếu vào việc làm xoa dịu những xung đột quốc tế hơn là tôn vinh các học giả xuất sắc. Trên thực tế, các ủy ban thời kỳ đầu đã tránh để cố tìm ra những nhà toán học trẻ giỏi nhất mà thay vào đó tìm cách nâng đỡ những cá nhân còn chưa được thừa nhận rộng rãi. Điều tôi muốn nhấn mạnh ở đây là, họ sử dụng huy chương để định hình tương lai của ngành, không chỉ để đánh giá quá khứ và hiện tại của nó.

Khi Toán học ngày càng phát triển và lan rộng, số lượng nhà toán học và sự đa dạng trong các lĩnh vực nghiên cứu của họ khiến cho việc thống nhất xem ai đáp ứng được tiêu chuẩn mơ hồ là có triển vọng nhưng chưa phải là ngôi sao trở nên khó khăn hơn. Năm 1966, ủy ban huy chương Fields đã lựa chọn một tiêu chí, được sử dụng cho đến ngày nay, là chỉ trao giải cho những nhà toán học dưới 40 tuổi. Và danh tiếng, thay vì được sử dụng để loại bỏ những ứng viên, lại trở thành một điều kiện tiên quyết.

Tôi cho rằng huy chương Fields nên trở về với ý nghĩa ban đầu của nó. Những tiến bộ trong toán học định hình thế giới của chúng ta theo nhiều cách hơn bao giờ hết. Ngành này đang ngày càng lớn hơn và đa dạng hơn, đồng thời các vấn đề về bất bình đẳng giới, sắc tộc (demographic issues), cũng như các thách thức về thể chế của nó cũng trở nên cấp bách hơn. Huy chương Fields đóng một vai trò quan trọng trong việc xác định ai và cái gì là quan trọng trong toán học.

Ủy ban nên tận dụng vai trò này bằng cách trao huy chương trên cơ sở những gì toán học có thể và nên trở thành trong tương lai, không phải cho những gì đang phát triển nhanh nhất và nổi tiếng nhất bằng những chuẩn mực và cấu trúc cứng nhắc. Bằng việc thử thách tự hỏi bản thân bốn năm một lần xem lĩnh vực toán học và nhà toán học nào chưa được công nhận sẽ trở thành tâm điểm, những người trao giải có thể đóng một vai trò tích cực hơn cho tương lai ngành của mình.

Ra đời từ mâu thuẫn

Việc ra đời trong thời kỳ của những xung đột sâu sắc trong cộng đồng toán học quốc tế đã góp phần hình thành nên các quan niệm về mục tiêu của huy chương Fields. Kiến trúc sư trưởng của nó là John Charles Fields, một nhà toán học Canada, người đã bắt đầu sự

---

[3] *Nhà toán học Godfrey Harold Hardy từng nói: "Toán học, hơn bất kỳ lĩnh vực khoa học và nghệ thuật nào, là cuộc chơi của những người trẻ tuổi".*

[4] *Tính đến ICM 2022, đã có 64 nhà toán học đã giành được giải Fields, trong đó có 2 nhà toán học nữ.*

[5] *Fin de siècle: cuối thế kỷ, ám chỉ cuối thế kỷ 19. Giai đoạn này được nhiều người cho là thời kỳ suy thoái xã hội, nhưng đồng thời cũng là thời kỳ của hy vọng cho một khởi đầu mới.*

nghiệp trong cộng đồng toán học châu Âu *fin de siècle*[5], nơi chỉ mới bắt đầu nhận thức Toán học như một lĩnh vực hợp tác toàn cầu [5].

Đại hội toán học thế giới đầu tiên diễn ra vào năm 1897 tại Zurich (Thụy Sĩ), tiếp theo là Paris (Pháp) năm 1900, Heidelberg (Đức) năm 1904, Rome (Italia) năm 1908 và Cambridge (Vương quốc Anh) năm 1912. Chiến tranh thế giới thứ nhất đã làm đổ vỡ kế hoạch ICM 1916 ở Stockholm (Thụy Điển) và đẩy cộng đồng toán học rơi vào tình trạng khủng hoảng.

Khi cơn cuồng phong qua đi, những nhà khoa học bất bình đến từ Pháp và Bỉ đã nắm quyền lãnh đạo và khẳng định rằng người Đức cũng như các đồng minh của họ trong thế chiến không được tham gia vào các hợp tác quốc tế mới, các đại hội hay bất kỳ điều gì. Họ lên kế hoạch tổ chức ICM đầu tiên sau chiến tranh vào năm 1920 tại Strasbourg, một thành phố vừa được sát nhập về Pháp sau nửa thế kỷ nằm dưới sự cai trị của Đức.

Tại Strasbourg, phái đoàn Hoa Kỳ đã giành được quyền đăng cai ICM tiếp theo. Tuy nhiên, khi các thành viên trở về nước để bắt đầu gây quỹ, họ nhận thấy rằng quy tắc loại trừ người Đức đã làm mất lòng nhiều người ủng hộ tiềm năng. Fields đã tận dụng cơ hội này để đưa ICM đến Canada. Trên phương diện tham dự của cộng đồng quốc tế, đại hội Toronto 1924 là một thảm họa, nhưng nó đã kết thúc với một thặng dư tài chính khiêm tốn. Ý tưởng về một huy chương quốc tế đã xuất hiện trong các cuộc thảo luận giữa những nhà tổ chức nhiều năm sau đó về việc phải làm gì với những khoản tiền còn lại.

Fields thúc đẩy vấn đề này ngay trên giường bệnh trước khi qua đời vào năm 1932, nhấn mạnh tầm quan trọng của việc phải trao hai huy chương tại mỗi kỳ ICM. Đại hội năm 1932 ở Zurich đã chỉ định một ủy ban để lựa chọn những ứng viên cho năm 1936, nhưng không để lại hướng dẫn về cách thức ủy ban nên tiến hành. Thay vào đó, các ủy ban thời kỳ đầu được chỉ dẫn bởi một bản ghi nhớ mà Fields đã viết ngay trước khi qua đời có tiêu đề "Huy chương quốc tế cho những khám phá xuất sắc trong toán học" (International Medals for Outstanding Discoveries in Mathematics).

Nhà toán học John Charles Fields. Nguồn: Wikipedia.

Phần lớn của bản ghi nhớ mang tính thủ tục: cách xử lý kinh phí, chỉ định một ủy ban, thông báo quyết định, thiết kế huy chương, v.v. Trên thực tế, Fields đã viết rằng ủy ban "nên được càng tự do càng tốt" để quyết định người chiến thắng. Nhằm giảm thiểu sự ganh đua giữa các quốc gia, Fields quy định rằng huy chương không được đặt theo tên của bất kỳ cá nhân hay địa điểm nào, và không bao giờ có ý định đặt nó theo tên của chính mình. Lời chỉ dẫn nổi tiếng nhất của ông, sau này được sử dụng để giải thích cho giới hạn độ tuổi, là giải thưởng nên vừa là "sự công nhận những việc đã làm được" vừa là "sự khích lệ cho những thành tựu xa hơn nữa". Nhưng trong hoàn cảnh thời bấy giờ, chỉ dẫn này có một mục đích khác: "để tránh những so sánh ngầm" giữa các nhóm theo chủ nghĩa dân tộc về việc ai xứng đáng giành chiến thắng.

Những huy chương đầu tiên được trao vào năm 1936 cho hai nhà toán học Lars Ahlfors của Phần Lan và Jesse Douglas của Hoa Kỳ. Chiến tranh thế giới thứ hai đã làm trì hoãn các huy chương tiếp theo cho đến năm 1950. Kể từ đó đến nay chúng được trao đều đặn bốn năm một lần.

Máu và nước mắt

Quy trình lựa chọn huy chương Fields cần được giữ bí mật, nhưng các nhà toán học cũng là con người. Họ nói chuyện phiếm và đôi khi – thật may mắn cho các nhà sử học – lơ là trong việc bảo vệ những tài liệu mật, đặc biệt là trong những năm đầu của huy chương Fields, trước khi Liên đoàn toán học thế giới (International Mathematical Union–IMU) chính thức tham gia vào quá trình lựa chọn. Những phù du (ephemera) như vậy có lẽ là những tài liệu duy nhất còn sót lại.

Ahlfors, một trong những nhà toán học được trao giải năm 1936, đã phục vụ trong ủy ban lựa chọn huy chương Fields năm 1950. Bản sao những thư từ trao đổi của ủy ban được chuyển thành một khối tài liệu liên quan đến ICM năm 1950, phần lớn được lưu trữ tại Khoa Toán của Ahlfors tại Đại học Harvard (Cambridge, bang Massachusetts); những tài liệu này hiện vẫn đang nằm trong kho lưu trữ của đại học này.

Ủy ban huy chương Fields năm 1950 đến từ nhiều quốc gia. Chủ tịch của ủy ban là Harald Bohr (em trai của nhà vật lý Niels Bohr) đến từ Copenhagen (Đan Mạch). Các thành viên còn lại gồm Karol Borsuk (Warsaw, Ba Lan), Maurice Fréchet (Paris, Pháp), William Hodge (Cambridge, Anh), Damodar Kosambi (Tata, Ấn Độ) và Marston Morse (Princeton, Hoa Kỳ).[6] Họ liên lạc yếu thông qua các bức thư gửi cho Bohr, người sẽ tóm tắt những điểm chính trong các bức thư đó và gửi lại. Ủy ban đã tiến hành hầu hết các cuộc trao đổi này vào nửa cuối năm 1949 và thống nhất về hai người chiến thắng vào tháng 12 năm đó.

Các bức thư chỉ ra rằng Bohr đã tham gia vào quá trình tuyển chọn với một quan điểm mạnh mẽ về việc ai nên giành được một trong những huy chương: đó là nhà toán học người Pháp Laurent Schwartz, người đã gây ấn tượng mạnh với Bohr bằng một lý thuyết mới đầy thú vị tại một hội nghị vào năm 1947 [6]. Chiến tranh thế giới thứ hai đồng nghĩa với việc sự nghiệp của Schwartz đã có một khởi đầu đặc biệt khó khăn: là một người Do Thái theo chủ nghĩa Trotsky[7] sống dưới chế độ Vichy của Pháp[8], ông đã phải ẩn náu và dùng một cái tên giả che giấu thân phận. Cuốn sách chuyên khảo được chờ đợi từ lâu của ông cho đến cuối năm 1949 vẫn chưa được xuất bản, cũng như có ít kết quả mới quan trọng được công bố.

Bohr nhìn thấy ở Schwartz hình ảnh một nhà lãnh đạo toán học đầy lôi cuốn, người có thể đưa ra những cây cầu mới kết nối các lĩnh vực thuần túy và ứng dụng. Lý thuyết của Schwartz không hoàn toàn có được những tác động mang tính cách mạng như Bohr dự đoán, nhưng bằng cách quảng bá nó với huy chương Fields, Bohr đã thực hiện một sự can thiệp manh tính quyết định tới tương lai của Toán học.

Bohr xác định cách tốt nhất để đảm bảo chiến thắng cho Schwartz là liên minh với Marston Morse của Viện Nghiên cứu Cao cấp Princeton, người về phần mình đang ủng hộ đồng nghiệp người Na Uy Atle Selberg. Con đường thuyết phục những thành viên còn lại của ủy ban không hề đơn giản, và các cuộc tranh luận của họ tiết lộ rất nhiều về suy nghĩ của các thành viên về huy chương Fields.

---

[6] *Nhà toán học Xô Viết Andrey Kolmogoroff được mời nhưng đã không tham gia ủy ban.*

[7] *Hệ tư tưởng chính trị được phát triển và kế thừa từ chủ nghĩa Marx.*

[8] *Chính phủ Phát xít Pháp* (10.07.1940 – 09.08.1944).

Các thành viên ủy ban bắt đầu bằng việc thảo luận về các tiêu chí như tuổi và lĩnh vực nghiên cứu, thậm chí trước khi đề xuất những ứng viên. Hầu hết nghĩ rằng việc tập trung vào các nhánh cụ thể của toán học là không thể tránh khỏi. Họ đưa ra một loạt các cân nhắc về độ tuổi tiềm năng, chẳng hạn dưới 30, cho đến một nguyên tắc chung rằng những người được đề cử nên đạt được thành tựu toán học trong khoảng thời gian từ ICM 1936 cho đến thời điểm bấy giờ. Bohr đã gợi ý một cách khó hiểu rằng 42 tuổi "sẽ là một giới hạn tự nhiên của tuổi tác".

Đề cử nhà toán học Pháp André Weil đã chia rẽ ủy ban huy chương Fields năm 1950. Nguồn: buscabiografias.com.

Vào thời điểm danh sách đề cử đầu tiên lộ diện, gợi ý của Bohr trở nên sáng tỏ hơn rất nhiều. Rõ ràng mối đe dọa hàng đầu đối với các kế hoạch của ông dành cho Schwartz là một nhà toán học người Pháp khác, André Weil, người bước sang tuổi 43 vào tháng 5 năm 1949. Tất cả mọi người, kể cả Bohr và Morse, đều đồng ý rằng Weil là nhà toán học xuất sắc hơn. Nhưng Bohr đã sử dụng yếu tố về tuổi tác để đảm bảo rằng Weil sẽ không giành chiến thắng. Với tư cách là chủ tịch, Bohr có một số quyền kiểm soát đối với các trao đổi và thường ám chỉ quan điểm lên các thành viên rằng các nhà toán học "trẻ" nên được ưu tiên trong khi xem Schwartz là ví dụ điển hình của tuổi trẻ. Ông khẳng định rằng Weil đã "quá nổi tiếng" và thu hút sự chú ý của mọi người vào lập luận của Ahlfors rằng việc trao huy chương cho Weil "có thể là thảm họa" bởi vì "nó sẽ tạo ấn tượng rằng ủy ban đã cố gắng chọn ra một thiên tài toán học vĩ đại nhất".

Mục tiêu chính của ủy ban là tránh xung đột quốc tế và những so sánh tiềm ẩn. Nếu họ có thể phủ nhận việc đã cố gắng chọn ra những người xuất sắc nhất thì họ không thể bị buộc tội là đã bỏ qua ai đó tốt hơn.

Tuy nhiên, Weil vẫn là một vấn đề. Ủy viên Damodar Kosambi nghĩ rằng sẽ là "vô lý" nếu từ chối trao huy chương cho Weil – một bình luận mà Bohr đã kể lại với một đồng nghiệp Đan Mạch nhưng không chia sẻ với các thành viên ủy ban khác. Ủy viên William Hodge lo lắng "liệu chúng ta có thể trốn tránh trách nhiệm của mình hay không" nếu Weil không chiến thắng. Thậm chí Ahlfors còn cho rằng họ nên mở rộng giải thưởng cho bốn người để có thể bao gồm Weil. Bohr đã viết lại một lần nữa cho người đồng nghiệp Đan Mạch của mình rằng "cần có nỗ lực phi thường" (blood and tears) để đem đến chiến thắng cho Schwartz và Selberg.

Bohr thắng thế bằng cách cắt ngắn cuộc tranh luận. Ông lập luận rằng một chiến thắng cho Weil sẽ mở ra một cánh cửa để xem xét các nhà toán học cây đa cây đề, và yêu cầu ủy ban bỏ phiếu thuận hoặc chống đối với cặp Schwartz và Selberg. Cuối cùng, tại lễ trao giải ICM năm 1950, Bohr ca ngợi Schwartz vì đã truyền cảm hứng cho thế hệ các nhà toán học trẻ hơn – điều ông cho rằng Weil không làm được.[9]

Những khích lệ thêm

Những hồ sơ từ kho lưu trữ của Harvard cho thấy những cân nhắc vào năm 1950 phản

[9] *Bohr đã dẫn trong thư gửi ủy ban: "Anh ấy [Weil] là kiểu người luôn chỉ trích môi trường xung quanh dù anh ấy ở đâu".*

ánh những cái nhìn rộng hơn đối với huy chương Fields của các thành viên chứ không chỉ đơn thuần là của một vị chủ tịch nhiệt thành. Nhà toán học Harvard Oscar Zariski cũng lưu giữ các bức thư từ nhiệm kỳ của ông tại ủy ban năm 1958 trong bộ sưu tập cá nhân.

Ủy ban của Zariski do nhà toán học Heinz Hopf thuộc Viện Công nghệ Liên bang Thụy Sĩ ở Zurich (ETH Zürich) chủ trì. Vòng đề cử sơ bộ đã chọn ra đươc 38 cái tên. Friedrich Hirzebruch là người có lợi thế rõ ràng và được đề cử bởi 5 ủy viên.

Hopf bắt đầu bằng việc gạch tên hai ứng viên lớn tuổi nhất là Lars Gårding và Lipman Bers. Động thái tiếp theo của ông đã chứng minh rằng không phải tuổi tác, mà sự công nhận trước mới thực sự là yếu tố bị loại: Hopf đã loại Hirzebruch và một người nữa, những người gần đây đã nhận được ghế giáo sư tại các học viện danh tiếng, bởi họ "không cần khuyến khích thêm". Không ai trong ủy ban phản ứng dù chỉ là một chút.

Trong số những người còn lại, ủy ban đồng ý rằng Alexander Grothendieck là người tài năng nhất, nhưng lại có ít kết quả đã được công bố. Vì vậy họ xem ông là ứng viên tiềm năng nhất cho 4 năm sau (1962). John Nash, sinh cùng năm với Grothendieck (1928), đứng thứ ba trong vòng bỏ phiếu cuối cùng. Mặc dù danh sách rút gọn năm 1958 có Olga Ladyzhenskaya và Harish–Chandra, nhưng phải đến năm 2014 huy chương Fields mới thuộc về một phụ nữ (Maryam Mirzakhani)[10] hoặc một nhà toán học gốc Ấn Độ (Manjul Bhargava)[11]. Cuối cùng, giải thưởng năm 1958 đã được trao cho Klaus Roth và René Thom. Cả hai đều được ủy ban đánh giá là đầy hứa hẹn nhưng chưa quá thành công – bởi vậy ít có khả năng gây ra những so sánh ngầm.

Maryam Mirzakhani, nhà toán học nữ đầu tiên được trao huy chương Fields. Nguồn: MaryamMirzakhani.

Bước ngoặt đột ngột

Đến năm 1966, tiêu chuẩn các nhà toán học trẻ giỏi nhưng không phải quá giỏi đã trở nên khó khăn để đánh giá. Năm đó, chủ tịch của ủy ban là Georges de Rham đã thông qua giới hạn độ tuổi 40, con số làm tròn nhỏ nhất bao trùm tuổi của tất cả những người giành được Fields trước đó.

Vậy là đột nhiên các nhà toán học mà trước đây được coi là quá thành công giờ lại đủ tiêu chuẩn. Grothendieck, người có lẽ bị loại vào năm 1962 vì đã quá nổi tiếng, được trao huy chương vào năm 1966. Tuy nhiên ông đã từ chối nhận giải vì lý do chính trị.

Trong danh sách chiến thắng năm 1966 còn có một nhà toán học hoạt động chính trị khác là Stephen Smale.[12] Ông đã đến Moscow nhận huy chương thay vì đứng điều trần trước Ủy ban Hạ viện Kiểm tra Hành

[10] *Tại lễ trao giải 2022 cách đây ít ngày, Maryna Viazovska đã trở thành nhà toán học nữ thứ hai giành huy chương Fields.*

[11] *Năm 2018, Akshay Venkatesh là nhà toán học gốc Ấn Độ thứ hai được vinh danh.*

[12] *1966 là năm đầu tiên có 4 người được trao huy hương Fields. Danh sách đầy đủ: Michael Atiyah, Paul Cohen, Alexander Grothendieck và Stephen Smale.*

động chống Hoa Kỳ (The US House Un–American Activities Committee) về hoạt động phản đối Chiến tranh Việt Nam của mình. Những nỗ lực của các đồng nghiệp để bảo vệ hành động này thu hút các hãng truyền thông lớn, và biệt danh "giải Nobel toán học" cũng được ra đời từ đó.

Sự trùng hợp ngẫu nhiên này – so sánh huy chương Fields với một giải thưởng danh tiếng hơn đồng thời thay đổi quy tắc cho phép những người đã thành danh đạt huy chương – đã có tác động lâu dài lên toán học cũng như lên hình ảnh của giải thưởng trong mắt công chúng. Nó đã viết lại hoàn toàn mục đích của huy chương, tách nó ra khỏi mục tiêu ban đầu là hòa giải quốc tế và dựa trên đúng những tiêu chuẩn mà Fields nghĩ sẽ chỉ làm gia tăng sự ganh đua.

Mặt trước huy chương Fields. Nguồn: Wikipedia.

Bất kỳ phương pháp nào để chọn ra một số ít người được vinh danh từ một lĩnh vực rộng lớn như Toán học sẽ luôn có những thiếu sót và tranh cãi. Tuy nhiên, hoàn cảnh mang tính thể chế và xã hội có ảnh hưởng lớn đến việc ai có cơ hội để tiến xa trong lĩnh vực này ở mọi giai đoạn, từ tiểu học đến khi đã trở thành giáo sư. Bản thân các ủy ban tuyển chọn cần phải đa dạng và phù hợp với những giá trị và vai trò phức tạp của toán học trong xã hội.

Tuy có những sai sót, các quy trình trước năm 1966 đã buộc một ủy ban gồm các nhà toán học ưu tú phải suy nghĩ nghiêm túc về tương lai lĩnh vực nghiên cứu của mình. Các ủy ban đã sử dụng huy chương như một công cụ phân phối lại, để tạo động lực cho những người mà họ cảm thấy không có mọi lợi thế nhưng vẫn đang làm công việc quan trọng.

Hiểu biết hiện tại của chúng ta về tác động xã hội của toán học cũng như các rào cản để đa dạng hóa nó hoàn toàn khác với các nhà toán học giữa thế kỷ 20. Nếu các ủy ban ngày nay cũng được trao quyền quyết định như những gì xảy ra vào thời kỳ đầu, họ có thể tập trung vào những nhà toán học mà công trình và tên tuổi của họ chưa được ghi nhận xứng đáng trong giới tinh hoa của ngành. Nhờ đó, họ có thể thúc đẩy những lĩnh vực nghiên cứu dựa trên những điều tốt đẹp mà chúng sẽ đưa đến cho thế giới, chứ không phải chỉ chú trọng vào độ khó của những định lý chúng đưa ra.

Theo quan điểm của tôi, lịch sử của huy chương Fields là lời mời gọi các nhà toán học ngày nay suy nghĩ một cách sáng tạo về tương lai cũng như về những thông điệp mà họ muốn truyền tải thông qua giải thưởng danh tiếng nhất của mình.

Tài liệu tham khảo

[1] Barany, M. J. Not. Am. Math. Soc. 62, 15 – 20 (2015).

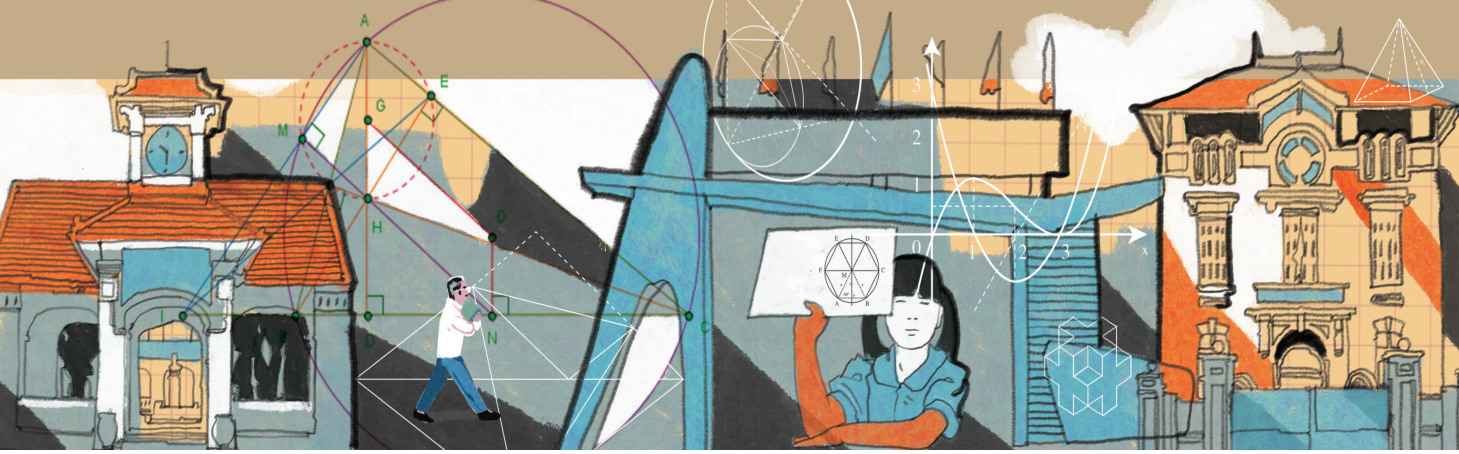
[2] Stern, N. Soc. Stud. Sci. 8, 127 – 140 (1978).

[3] Hersh, R. and John–Steiner, V. Loving + Hating Mathematics: Challenging the Myths of Mathematical Life 251 – 272 (Princeton Univ. Press, 2011).

[4] Henrion, C. AWM Newsletter 25 (6), 12 – 16 (1995).

[5] Riehm, E. M. and Hoffman, F. Turbulent Times in Mathematics: The Life of J.C. Fields and the History of the Fields Medal (American Mathematical Society & Fields Institute, 2011).

[6] Barany, M. J, Paumier, A.–S. and Lützen, J. Hist. Math. 44, 367 – 394 (2017)



ĐẠI HỘI TOÁN HỌC QUỐC TẾ: VÌ MỘT CỘNG ĐỒNG, VÌ MỘT KHOA HỌC

NGUYỄN ĐĂNG HỢP

Đại hội Toán học Quốc tế (International Congress of Mathematicians, sau đây sẽ viết tắt là ICM) là sự kiện khoa học quan trọng hàng đầu của các nhà toán học trên thế giới. Nhiều người trong chúng ta đã quen thuộc với Kỳ thi Olympic Toán quốc tế (IMO). Vậy ICM có gì giống và khác với IMO? Mục đích của ICM là gì? Những hoạt động chính tại một kỳ ICM là gì? ICM 2022 có những dấu ấn gì đặc biệt? Chúng tôi sẽ thử giải đáp các câu hỏi này.

1. ICM có gì giống và khác với IMO?

Cũng giống như IMO, ICM là một hoạt động cộng đồng hướng đến mục tiêu phát triển sự quan tâm đến toán học. Có lịch sử lâu đời hơn IMO một chút, ICM đầu tiên được tổ chức từ năm 1897 tại Zürich, Thụy Sĩ, nhưng trong khi IMO được tổ chức hầu như hằng năm, thì ICM được tổ chức bốn năm một lần. Nếu IMO tập trung vào việc giải các bài toán, thì ICM hướng đến trình bày những thành tựu nghiên cứu toán học đáng kể nhất gần đây. Không có sự khác biệt đáng kể giữa nghiên cứu toán học và giải các bài toán Olympic, vì cả hai công việc đều đòi hỏi kỹ năng giải quyết vấn đề. Chúng ta biết rằng có những bài toán mở nổi tiếng trong toán học, như định lý lớn Fermat (là bài toán mở đến trước 1994), giả thuyết về số nguyên tố sinh đôi, hay giả thuyết Riemann (cả hai hiện vẫn chưa được giải quyết). Những tiến bộ về các bài toán mở nổi tiếng, nếu có, cũng là một điểm nhấn quan trọng của những kỳ ICM. Nhưng so với việc thi olympic, có thể nói các nhà toán học có nhiều tự do hơn trong việc làm nghiên cứu của mình, họ không nhất thiết phải làm việc với một vấn đề có sẵn. Có những nhà toán học lớn theo đuổi một vấn đề hàng năm, thậm chí hàng chục năm trời. Việc một nhà số học ngồi nghe một bài giảng hình học đại số, hay một nhà đại số dự một bài giảng vật lý toán, để mở mang kiến thức, cũng là một việc thường xảy ra và được ICM khuyến khích.

2. Vì sao cần tổ chức ICM?

Mục đích chính của ICM là để tạo điều kiện cho các nhà toán học từ khắp nơi trên thế giới gặp gỡ những chuyên gia hàng đầu, và để tôn vinh những thành tựu toán học nổi bật nhất gần đây.

Các nhà toán học gặp gỡ nhau? Chẳng phải các nhà toán học chỉ cần có giấy bút (và máy tính) để làm việc đó sao? Đúng là phần lớn các nhà toán học có thiên hướng lý thuyết, không cần nhiều trang thiết bị để làm việc. Nhưng ngoài giấy bút và máy tính, họ cũng thường cần một người đồng nghiệp ăn ý để thử nghiệm những ý tưởng chợt đến, tranh cãi về một chứng minh trong một bài báo, hay đơn giản tán gẫu về trận bóng tối qua.

Như bất cứ ngành khoa học có truyền thống nào, toán học ngày càng đa dạng hóa và chuyên môn hóa cao độ, với rất nhiều phân ngành khác nhau. ICM đầu tiên năm 1897 chỉ có năm tiểu ban, mỗi tiểu ban phụ trách một chuyên môn, gồm có số học và đại số, giải tích và lý thuyết hàm, hình học, cơ học và vật lý toán, lịch sử và thư mục toán học. Nửa thế kỷ sau, ICM 1958 mới có tám tiểu ban[1]. Đến ICM 2022, ta có đến hai mươi tiểu ban: logic, đại số, hình học đại số và hình học phức, tôpô, lý thuyết Lie và các mở rộng, giải tích, động lực học, phương trình vi phân, vật lý toán... Mỗi tiểu ban ngày nay lại có nhiều tiểu mục nhỏ hơn, ví dụ tiểu ban đại số có bốn tiểu mục. Ngay từ ICM năm 1908 ở Rome, Poincaré đã nhận ra: "Khi một khoa học càng phát triển, ta càng khó nắm bắt được toàn bộ khoa học đó. Từ đó người ta phải chia nhỏ khoa học ấy ra nhiều phần, và bằng lòng với việc chỉ quan tâm tới đúng một trong các phần đó, nói cách khác là phải chuyên môn hóa. Chuyên môn hóa quá sâu sẽ làm cản trở nghiêm trọng đến tiến bộ chung của khoa học (...) Chính nhờ những tương tác bất ngờ giữa các hướng nghiên cứu khác nhau mà khoa học mới có thể phát triển."[2] Nhà toán học nổi tiếng Hoàng Tụy (1927 – 2019) sinh thời thường cảnh báo về nguy cơ của chủ nghĩa tỉnh lẻ, khi một nhà khoa học làm việc trong tinh thần bế quan tỏa cảng và khiến bản thân thui chột. Gặp gỡ và tương tác với những chuyên gia hàng đầu tại những sự kiện lớn như ICM là cách giúp một nhà khoa học "mở con mắt hướng ra những bờ cõi khoa học nơi những người khác đang chiếm cứ, và buộc ta phải so sánh thành tựu của mình với họ, qua đó nhận ra ngôi làng mình đang sống nhỏ bé chừng nào", theo lời của Poincaré[3].

3. Hoạt động chính ở các ICM là gì?

Hoạt động chính của ICM là các bài giảng của các chuyên gia, và phần trao giải thưởng ghi nhận những thành tựu toán học cao nhất đã đạt được giữa hai kỳ đại hội. Các bài giảng của chuyên gia gồm hai loại là các bài giảng toàn thể (khoảng 20 bài) và các bài giảng tiểu ban (khoảng 180 bài). Được đọc bài giảng tại một ICM là một vinh dự lớn, nếu ta biết rằng mỗi năm có khoảng gần một trăm nghìn công trình toán học được xuất bản trên các tạp chí chuyên ngành. Các giải thưởng được trao ở các kỳ ICM gần đây là huy chương Fields (cho nhà toán học trẻ xuất sắc), giải thưởng Nevanlinna (khía cạnh toán học trong tin học), giải Gauss (toán ứng dụng), huy chương Chern (những người có thành tựu toán học xuất chúng, không hạn chế tuổi tác), và giải Leelavati (phổ biến kiến thức và quảng bá toán học). Trong số này, huy chương Fields nói chung được coi là giải thưởng danh giá nhất.

4. Ai có thể giành được huy chương Fields?

Huy chương Fields được trao cho những nhà toán học dưới 40 tuổi với thành tựu xuất sắc và tiềm năng phát triển lớn. Nhìn vào những người đoạt huy chương Fields gần đây, ta thấy họ nói chung là những người tài năng, được đào tạo bài bản (có bằng tiến sĩ), và theo đuổi những lĩnh vực quan trọng

---

[1] *Xem Guillermo P. Curbera,* Mathematicians of the World, Unite!, *Wellesley, Massachusetts: A.K. Peters, Ltd (2009), trang* 14 *và* 141.

[2] *"In proportion as the science develops, it becomes more difficult to take it in its entirety. Then an attempt is made to cut it in pieces and to be satisfied with one of these pieces – in a word, to specialize. Too great a movement in this direction would constitute a serious obstacle to the progress of science. As I have said, it is by unexpected concurrences between its different parts that it can make progress." Xem The Mathematical Intelligencer, Tập* 34, *số* 2 (2012), *trang* 15 – 29.

[3] *Tài liệu đã dẫn, trang* 20.

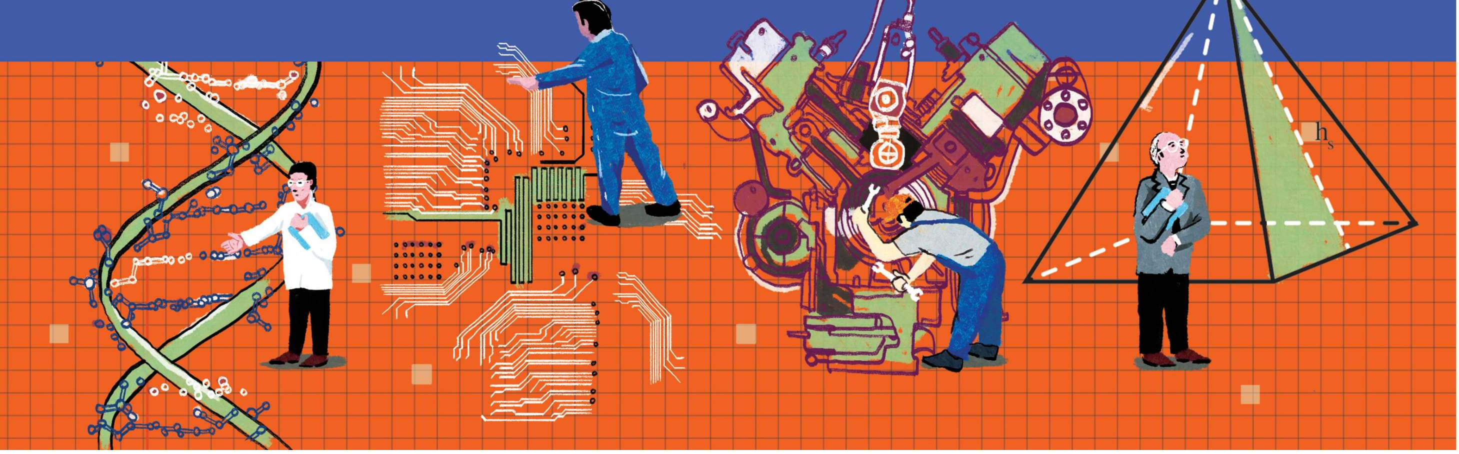
hoặc những bài toán quan trọng trong một thời gian dài. Có lẽ cách chắc chắn nhất để *không* giành được giải Fields là lao vào những bài toán nổi tiếng, nhiều người biết, như giả thuyết Collatz, hay giả thuyết Riemann, bằng tay không, không quan tâm đến việc tích lũy kiến thức và các kỹ thuật cơ bản dần dần. Những huy chương Fields, ngoài sự dũng cảm tấn công những vấn đề khó khăn, còn ghi dấu ấn cụ thể, thuyết phục với những bài báo với nhiều người đọc, được bình duyệt chặt chẽ, trên những tạp chí toán học uy tín. Thông thường họ đã có một công chúng rộng lớn, những ý tưởng của họ đã có ích lợi đáng kể cho công việc của nhiều người khác, *trước khi* được vinh danh với huy chương Fields, chứ không phải ngược lại. Tất nhiên không có quy tắc chung cho những tài năng đặc biệt, họ thường phá vỡ những quy tắc mà chúng ta coi như hiển nhiên.

5. Đại hội Toán học Quốc tế 2022 có gì đặc biệt?

ICM 2022 được tổ chức từ ngày mùng 6 đến 14/7/2022. Lễ trao các giải thưởng được tổ chức trực tiếp tại Helsinki, Phần Lan vào ngày 5/7. Về hình thức, sau 125 năm lịch sử, đây là lần đầu tiên chương trình khoa học của ICM được tổ chức theo hình thức trực tuyến. Tại ICM năm nay, huy chương Fields đã được trao cho Hugo Dominil–Copin (Pháp), June Huh (Hàn Quốc), James Maynard (Vương quốc Anh), và Maryna Viazovska (Ukraina). Đây đều là những tên tuổi hàng đầu của toán học đương đại, những người sẽ còn tiếp tục ảnh hưởng lâu dài đến toán học. Nếu bạn nghĩ một bài giảng toán học là đối cực của một tiểu thuyết hấp dẫn/một bộ phim hay? Mời bạn xem bài giảng hết sức sáng sủa với đoạn cao trào tuyệt vời của June Huh, một người làm toán (những bài toán không hề đơn giản!) với hồn thơ đặc biệt. Nếu bạn, sau khi sở hữu một cỗ máy tiêu diệt hàng loạt các loại bài toán khó muôn hình vạn trạng, nghĩ quảng bá toán học là một việc nhàm chán và không cần công phu gì? Mời bạn xem bài giảng của Nikolai Andreev (giải Leelavati 2022) và trang mạng độc đáo của ông[4].

Trong một thế giới còn rất nhiều xung đột và đối kháng, các kỳ ICM và Liên đoàn Toán học Quốc tế (IMU) hướng đến gắn kết con người bằng toán học và tinh thần quốc tế, vượt qua những giới hạn về tư tưởng, ngôn ngữ, văn hóa, mặc cảm thượng đẳng/mặc cảm thấp kém thường ám ảnh con người. Từ khi kỳ ICM đầu tiên được tổ chức đến nay, toán học đã gánh chung tác động của hai thế chiến, chiến tranh lạnh, kỳ thị và phân biệt đối xử, với những hoạt động khác của con người. Vượt qua những khó khăn đó, cộng đồng toán học đã tiếp tục đi tới với lý tưởng bình đẳng, nhân văn, và chủ nghĩa quốc tế, di sản to lớn của những nhà toán học hàng đầu trong quá khứ. Chúng ta hy vọng vào thành công trong tương lai của toán học và của những lý tưởng này.

[4] *https://etudes.ru/*



CLAIR PATTERSON: THÍ NGHIỆM ĐO TUỔI CỦA TRÁI ĐẤT VÀ VẤN ĐỀ Ô NHIỄM CHÌ

NGUYỄN HOÀNG VŨ[1]

Trái đất được hình thành khi nào là một câu hỏi mà từ xa xưa con người đã sáng tạo các câu chuyện mang đậm màu sắc huyền thoại lẫn tôn giáo. Cuối thế kỉ 19, nhiều nhà khoa học đã đưa ra các giả thuyết về bằng nhiệt hay lượng muối tích tụ ở biển. Tuy nhiên, câu trả lời chính xác chỉ xuất hiện vào giữa thế kỉ 20 với các đo đạc đồng vị chì do phóng xạ của Clair Patterson. Quá trình này cũng giúp ông khám phá một vấn đề môi trường nghiêm trọng của thế kỷ 20. Chúng ta hãy cùng tìm hiểu câu truyện của Patterson trong bài viết này.

1. Đường isochron và tuổi của Trái đất

Năm 1944, Clair Patterson, khi vừa tốt nghiệp thạc sĩ chuyên ngành hóa học, bị bắt buộc tham gia dự án Manhattan (dự án chế tạo bom nguyên tử của quân đội Mỹ) dù ông không tình nguyện. Trong quá trình này, ông đã tiếp xúc với các thí nghiệm về các đồng vị của uranium cũng như phương pháp phổ khối lượng để đo hàm lượng các đồng vị.

Đồng vị là gì?

Các nguyên tử của cùng một nguyên tố có số lượng proton trong hạt nhân giống nhau nhưng số lượng neutron có thể khác nhau, tạo thành các đồng vị. Ví dụ, carbon có các đồng vị với nguyên tử khối khối là 12, 13 và 14 (kí hiệu là ^{12}C, ^{13}C và ^{14}C).

Hình 1. Tinh thể zircon ($ZrSiO_4$)

Sau chiến tranh, Patterson quay lại làm nghiên cứu sinh ở Đại học Chicago. Ở đây, ông gặp được giáo sư Harrison Brown và tham gia nghiên cứu về việc xác định tuổi của Trái đất sử dụng phép đo đồng vị phóng xạ cùng với George Tilton, một nghiên cứu sinh khác của Brown. Cả hai bắt đầu tiến hành các thí nghiệm xác định tuổi của mẫu vật với các tinh thể zircon. Các tinh thể rất nhỏ này thường xất hiện trong các loại đá núi lửa thông thường. Khi các loại đá này

---

[1] *Viện Sinh thái và Môi trường Đông Dương.*

hình thành do magma nóng chảy đông đặc lại, các tinh thể zircon sẽ lẫn vào trong. Do cấu tạo, zirconium trong tinh thể zircon có thể được thay thế bởi uranium nên các tinh thể zirconium thường có một lượng nhỏ uranium bên trong.

Phân rã phóng xạ

Một số nguyên tử không ổn định có thể bị phân rã thành nguyên tử khác kèm theo giải phóng một số hạt (hạt nhân helium, electron, photon). Các đồng vị phóng xạ khác nhau khi phân rã tạo thành các sản phẩm đồng vị khác nhau. Ví dụ với uranium, một chất phóng xạ phổ biến, ^{238}U phân rã thành đồng vị chì ^{206}Pb còn ^{207}U phân rã thành ^{207}Pb. Nếu tại thời điểm ban đầu có N_0 nguyên tử chất phóng xạ thì số lượng nguyên tử của nó sẽ giảm theo hàm mũ theo phương trình:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

với λ là hằng số phân rã (đặc trưng cho từng đồng vị phóng xạ). Sau mỗi chu kì bán rã: $t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ thì số nguyên tử sẽ giảm đi một nửa. Mặt khác, khi uranium phân rã theo thời gian tạo thành chì, lượng uranium trong tinh thể giảm dần còn sản phẩm chì này sẽ bị đẩy ra ngoài tinh thể. Các đồng vị chì hình thành do quá trình phân rã của uranium có nguyên tử khối khác với chì thông thường do đó nếu đo khối lượng của các đồng vị này cùng lượng uranium còn lại trong tinh thể, ta có thể xác định tuổi của tinh thể nhờ chu kì bán rã của uranium.

Patterson và Tilton phải làm việc với các tinh thể zircon chỉ bé bằng đầu cây kim và đo các khối lượng nhỏ hơn 1000 lần so với những thí nghiệm trước thời điểm đó. Những tinh thể trong các thí nghiệm được lấy từ những mẫu đá với số tuổi đã được xác định từ tuổi địa chất của chúng (vị trí trong các lớp địa tầng). Trong khi các đo đạc uranium của Tilton tiến hành thuận lời thì các số liệu đồng vị chì của Patterson không khớp với tính toán.

Sau khi kiểm tra các tính toán với số liệu cũng như thử các kỹ thuật thí nghiệm khác nhau, Patterson phát hiện ra rằng kết quả đo lượng chì bị tăng vọt ra do môi trường thí nghiệm bị nhiễm chì từ bên ngoài. Các dụng cụ thí nghiệm, sơn tường, quần áo và tóc của người làm thí nghiệm đều bị nhiễm một lượng chì nhỏ nhưng đủ để làm hỏng các thí nghiệm của Patterson. Ông đã phải tìm cách chế tạo các phòng sạch để tránh nhiễm chì từ môi trường cũng như tiến hành tẩy chì khỏi các dụng cụ thí nghiệm. Trong quá trình này, Patterson cũng trở thành chuyên gia trong việc đo hàm lượng chì nồng độ thấp ở các vật dụng khác nhau. Các kết quả cho thấy lượng chì trong chúng cao hơn nhiều so với các kết quả trước đó. Khi nhận bằng tiến sĩ năm 1951, Patterson, cùng với Tilton, đã hoàn thiện được phương pháp tính tuổi của tinh thể zircon, một trong những phương pháp chính xác định tuổi của đá trong địa chất. Trong những năm sau đó, ông tham gia chương trình sau tiến sĩ nhờ tài trợ mà Brown xin được từ Ủy ban Nguyên tử Mỹ và bắt đầu tiến hành quá trình đo tuổi của Trái đất.

Do Trái đất luôn trải qua các quá trình biến động địa chất liên tục, các loại đá sẽ có những giai đoạn bị chôn vùi trong lớp magma dưới lòng đất và tái tạo lại khi núi lửa phun trào. Do đó, việc tìm được những mẫu đá cùng tuổi với Trái đất là rất khó. Do đó, việc xác định tuổi của Trái đất cần phải dựa vào các mẫu đá lấy từ các thiên thạch. Patterson đưa ra các giả thuyết sau: các thiên thạch và Trái đất được hình thành cùng lúc trong quá trình phát triển của hệ Mặt trời; các thiên thạch tồn tại dưới dạng hệ cô lập và kín; vào thời điểm hình thành các thiên thạch có tỉ lệ giữa các đồng vị chì giống với như Trái đất lúc đó; các thiên thạch có tỉ lệ giữa các đồng vị uranium giống với Trái đất.

Các mẫu thiên thạch mà Patterson sử dụng gồm hai loại: thiên thạch sắt và thiên thạch đá. Các thiên thạch sắt, được coi là giống với các vật liệu hình thành lõi từ của Trái đất, khi hình thành bị mất hết uranium nên có tỉ lệ các đồng vị chì giống với thời điểm mà Trái đất hình thành. Các thiên thạch đá khi hình thành cũng có tỉ lệ các đồng vị chì như vậy nhưng do có một lượng uranium nhất định nên tỉ lệ giữa các đồng vị chì của chúng thay đổi theo thời gian. Mối liên hệ giữa các tỉ lệ đồng vị chì này được biểu diễn thông qua mô hình Holmes – Houtermans.

Giả sử có một hệ kín từ thời điểm T_0 (khi Trái đất hình thành) so với hiện tại cho đến thời điểm hiện tại ($t = 0$). Tại thời điểm hiện tại, số nguyên tử các đồng vị uranium đo được trong mẫu này là ^{238}U và ^{235}U còn số nguyên tử các chì đo được là ^{206}Pb, ^{207}Pb và ^{204}Pb.

Tại thời điểm t bất kì (tính ngược từ hiện tại trở về trước), ta có các phương trình phân rã phóng xạ (với λ_{238} và λ_{235} lần lượt là hằng số phân rã của các đồng vị uranium tương ứng):

$$^{238}U(t) = {}^{238}U_0 e^{-\lambda_{238}(T_0 - t)} \qquad (1)$$

$$^{235}U(t) = {}^{235}U_0 e^{-\lambda_{235}(T_0 - t)} \qquad (2)$$

Lượng các đồng vị chì cũng bằng lượng ban đầu cộng với lượng được sinh ra do phân rã (số nguyên mỗi đồng vị chì sinh ra bằng số nguyên tử của đồng vị uranium sinh ra nó bị hụt đi):

$$^{206}Pb(t) = {}^{206}Pb_0 + \left({}^{238}U_0 - {}^{238}U(t)\right) \qquad (3)$$

$$^{207}Pb(t) = {}^{207}Pb_0 + \left({}^{235}U_0 - {}^{235}U(t)\right) \qquad (4)$$

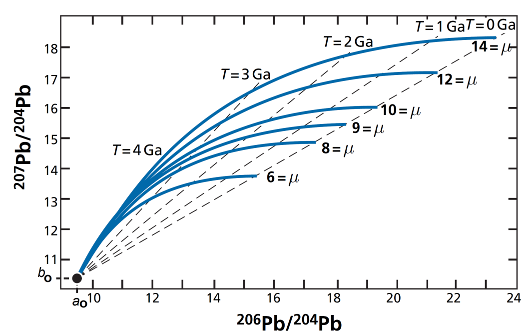
Đặt $r_1(t) = \frac{^{206}Pb(t)}{^{204}Pb}, r_2(t) = \frac{^{207}Pb(t)}{^{204}Pb(t)}$ (lượng chì thông thường ^{204}Pb không thay đổi theo thời gian) và biết rằng ở thời điểm hiện tại ($t = 0$), $\frac{^{235}U}{^{238}U} = \frac{1}{137,88}$ với tất cả mẫu đá trên Trái đất; sau một số biến đổi ta được:

$$\frac{r_2(t) - b_0}{r_1(t) - a_0} = \frac{1}{137,88} \cdot \frac{e^{-\lambda_{235}T_0} - e^{-\lambda_{235}t}}{e^{-\lambda_{238}T_0} - e^{-\lambda_{238}t}} \qquad (5)$$

với b_0 và a_0 là các giá trị của r_2 và r_1 tại T_0.

Quan hệ trên cho ta liên hệ giữa r_2 và r_1 không phụ thuộc vào số nguyên tử uranium. Nó cho thấy rằng, những mẫu vật khác nhau với cùng tỉ lệ các đồng vị chì ở thời điểm ban đầu và lượng uranium ban đầu khác nhau thì đều nằm trên cùng một đường thẳng trên biểu đồ biểu diễn theo quan hệ giữa r_2 và r_1. Đường thẳng này còn gọi là đường isochron ứng với thời điểm t.

Trong thí nghiệm của mình, Patterson đã tiến hành đo đạc các đồng vị chì trong 5 mẫu thiên thạch (2 thiên thạch sắt và 3 thiên thạch đá). Kết quả (công bố năm 1953) cho thấy chúng đều nằm trên cùng một đường isochron ứng với $T_0 = 4,55$ tỉ năm ($t = 0$ ứng với thời điểm hiện tại). Đây cũng là số liệu chính xác đầu tiên về tuổi của Trái đất. Hiện tại, số liệu của Patterson, với chu kì bán rã của uranium mới cập nhật, cho ta kết quả $4,48$ tỉ năm. Tỉ lệ đồng vị chì Patterson đo được trong thiên thạch sắt thu được ở Canyon Diablo (Mỹ) được sử dụng làm các giá trị cho a_0 và b_0 trong (5) để vẽ các đường isochron ứng với các thời điểm t khác. Khi đó, mô hình Holmes – Houtermans cũng có thể áp dụng cho các loại quặng bị mất toàn bộ uranium khi hình thành vào thời điểm $t = T$. Chúng sẽ nằm trên đường isochron ứng với thời điểm T này.



Hình 2. Mô hình Holmes – Hautermans. Những mẫu đá có cùng tỉ lệ đồng vị chì ban đầu nhưng hàm lượng uranium khác nhau sẽ đi theo những đường cong khác nhau nhưng tại mỗi thời điểm, các điểm biểu diễn chúng đều nằm trên một đường isochron.

Cùng thời điểm với Patterson, nhiều nhà khoa học vẫn đang thử các phương pháp xác định tuổi của Trái đất sử dụng các phương pháp phân rã phóng xạ khác như kali – argon và rubidium – strontium. Patterson đã vượt lên trước những nghiên cứu khác do ông có thể loại bỏ các nguồn chì tạp chất khi tiến hành thí nghiệm.

Hình 3. Patterson trong phòng thí nghiệm (1952).

2. Vấn đề ô nhiễm chì

Tiếp theo đó, Harrison Brown lại tìm được một nguồn tài trợ mới cho các nghiên cứu của Patterson: các công ty dầu mỏ. Việc đo đạc đồng vị chị trong các mẫu trầm tích ở đáy biển có thể giúp xác định loại đá của lớp trầm tích, giúp đánh giá khả năng của sự tồn tại mỏ dầu tại vị trí khoan thăm dò. Kết quả đánh giá theo mô hình Holmes – Hautermans cho thấy một số mẫu trầm tích dưới đáy biển cũng nằm trên cùng một đường isochron với các kết quả đo đạc với các thiên thạch.

Tuy nhiên, các thí nghiệm lại cho Patterson thấy một vấn đề nghiêm trọng hơn khi xét đến lượng chì tích tụ trong các lớp trầm tích. Trong khi phần lớn chì ở đáy biển đến từ các hạt đất sét chảy từ các con sông ra biển, một lượng chì nhỏ hơn nhiều được hình thành do các sinh vật phù du. Chúng hấp thụ chì hòa tan trong nước biển khi còn sống và khi xác của chúng chìm xuống lớp trầm tích, các tinh thể chứa chì sẽ hình thành. Việc đo đạc lượng chì từ các tinh thể này có thể cung cấp thông tin về lượng chì trong các đại dương của Trái đất trong thời gian kéo dài hàng triệu năm.

Cùng lúc đó, một số nghiên cứu đo đạc lượng chì ở nhiều con sông cho kết quả gấp nhiều lần so với lượng chì tích tụ ở đáy biển trong quá khứ mà Patterson đo được. Để kiểm chứng việc này, Patterson đã tiến hành các thí nghiệm lấy mẫu nước ở các độ sâu khác nhau trong lòng biển. Sau khi tiến hành các tính toán, Patterson nhận thấy một khả năng: lượng chì tăng vọt trong nước biển có thể là do nguồn chì trong không khí từ việc đốt xăng dầu. Ngay sau khi Patterson công bố bài báo về việc này, nguồn tài trợ từ các công ty dầu mỏ lập tức chấm dứt!

Xăng pha chì

Năm 1921, Thomas Midgley và Charles Kettering, khi đó đang làm việc ở General Motors, phát hiện rằng việc cho phụ gia chì tetraethyl (TEL) vào trong xăng sẽ giúp loại bỏ hiện tượng nhiên liệu cháy trước khi động cơ đánh lửa, giúp công suất của các động cơ ô tô tăng lên. Năm 1923, một loạt vụ ngộ độc chì với biểu hiện rối loạn thần kinh dẫn đến tử vong ở nhiều nhà máy sử dụng TEL xảy ra. Midgley và các công ty lớn làm mọi cách để trấn an dư luận về sự an toàn của sản phẩm này và các biện pháp an toàn được tiến hành để giảm thiểu phơi nhiễm của công nhân ở các nhà máy. Mặt khác, Charles Kettering thuê Robert Kehoe, một chuyên gia về độc chất học, để sản xuất các công bố khoa học chứng tỏ rằng phơi nhiễm chì từ xăng không ảnh hưởng đến sức khỏe cộng đồng trong suốt vài chục năm.

Quảng cáo xăng pha chì năm 1933. Các tập đoàn lớn như General Motors, Dupont và Standard Oil tiến hành quảng cáo rầm rộ cho sản phẩm này đồng thời với việc cố gắng phủ định tác hại của nó.

Patterson vẫn không hề nản chí và tiếp tục tìm các nguồn tài trợ cũng như các hợp tác khoa học để tiếp tục điều tra về vấn đề ô nhiễm chì. Các mẫu tuyết lấy từ các độ sâu khác nhau gần Bắc Cực và New Zealand mà Patterson thu được cho thấy nồng độ chì tăng từ 200 đến 300 lần so với 300 năm trước đó. Việc đo lượng chì rất nhỏ này được tiến hành với các kĩ thuật cải tiến từ thời kì Patterson làm việc với Harrison Brown. Patterson cũng bắt đầu xét đến khía cạnh y học của chì. Trong giai đoạn tham gia dự án chế tạo bom nguyên tử, Patterson đã biết đến các thí nghiệm về quá trình đào thải barium phóng xạ ở sinh vật. Tỉ lệ barium phóng xạ trong sữa của con bò thí nghiệm thấp hơn rất nhiều lần so với tỉ lệ barium trong cỏ mà nó ăn do phần lớn bị cơ thể đào thải. Do đó, Patterson cũng tò mò về hiệu quả đào thải chì của cơ thể. Trong thời gian làm giáo sư thỉnh giảng ở đại học MIT, ông thường xuyên đến thư viện Y khoa của đại học Havard. Các dữ liệu cho thấy cơ thể người không đào thải chì một cách hiệu quả. Các kiến thức về địa chất giúp Patterson có một cái nhìn mới về quá trình này. Tỉ lệ chì/calcium trong xương người gần với tỉ lệ này trong các mẫu đá trong tự nhiên! Cũng có nghĩa là, phần lớn lượng chì được hấp thụ vào xương cùng với calcium.

Patterson đã có một hành trình đi khắp thế giới để đo nồng độ chì từ các nguồn khác nhau: đại dương, lõi băng ở các cực Trái đất, động thực vật. Ông còn tiến hành đo nồng độ chì trong các xác ướp cổ xưa ở Peru. Các đo đạc của Patterson cho thấy mức độ chì được coi là “bình thường” trong các nghiên cứu y khoa lúc đó thật sự cao hơn rất nhiều lần so với trạng thái tự nhiên. Ông cũng tham gia các nghiên cứu khảo cổ học cho thấy việc khai thác các mỏ bạc thời Hy Lạp và La Mã cổ đại đã gây ra các giai đoạn tương ứng với hàm lượng chì trong khí quyển Trái đất cao hơn nhiều so với trước đó.

Ô nhiễm chì thời La Mã

Hiện nay vẫn có nhiều tranh cãi về mức độ ảnh hưởng của chì đối với xã hội La Mã. Nhiều đường ống dẫn nước trong các thành phố La Mã được làm bằng chì. Do chưa có đường mía, người La Mã nấu quả nho trong các nồi chì (do các nồi đồng sẽ có mùi tanh) để làm các chất tạo ngọt, đặc biệt khi uống với rượu vang. Đã có giả thuyết được đưa ra cho rằng mức độ nhiễm độc chì cao ở tầng lớp cai trị dẫn đến các câu chuyện trong lịch sử về sự điên khùng của các hoàng đế La Mã, góp phần dẫn đến sự sụp đổ của đế quốc.

3. Giảm thiểu ô nhiễm chì

Những nghiên cứu của Patterson và nhiều nhà khoa học khác là tiền đề cho các phong trào đấu tranh giảm thiểu ô nhiễm chì, đặc biệt là xăng pha chì trong thập niên 1970. Nhiều nghiên cứu tiếp theo đã khẳng định tác hại của xăng pha chì vẫn luôn bị hệ thống công nghiệp tìm cách phủ định thông qua các nghiên cứu được tài trợ. Tuy vấp phải sự chống đối từ các tập đoàn lớn, quá trình giảm chì trong xăng bắt đầu ở Mỹ vào năm 1983. Năm 1986, Nhật Bản là nước đầu tiên cấm hoàn toàn xăng pha chì. Năm 2001, Việt Nam cũng ngừng sử dụng xăng pha chì. Năm 2021, Algeria là nước cuối cùng tiến hành chuyển sang sử dụng xăng không chì.

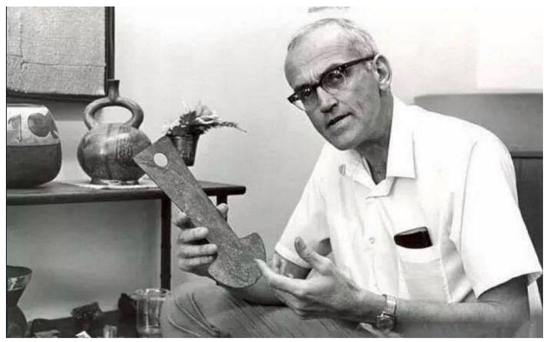
Chì trong sơn cũng là một nguồn gây ngộ độc chì cho con người. Chì thường được cho vào sơn để giảm ăn mòn và giúp cho sơn khô nhanh hơn. Nó đặc biệt nguy hại với trẻ nhỏ vì chúng thời chơi gần mặt đất và dễ tiếp xúc với sơn tường. Nhiều nước, trong đó có Việt Nam, cũng đã có các quy định về việc quản lí lượng chì trong sơn. Ở nhiều nước khác, chì vẫn chưa được loại bỏ khỏi sơn do chi phí chuyển đổi công nghệ.

Các nỗ lực giảm thiểu chì đã có hiệu quả đáng kể. Ở Mỹ, nồng độ chì trung bình trong máu trẻ em năm 2016 giảm 95% so với năm 1978. Tuy nhiên, với những người đã bị phơi nhiễm chì với lượng lớn từ trước đó, hậu quả lâu dài thực sự vẫn rất khó đánh giá. Một nghiên cứu mới đây ước tính có 170 triệu người Mỹ đang sống bị phơi nhiễm chì ở mức độ cao ở thời kì trẻ em và mức độ sụt giảm trí tuệ trung bình do chì là khoảng 2.6 điểm IQ. Ảnh hưởng của phơi nhiễm chì với các bộ phận khác trong cơ thể cũng là một đề tài được các nghiên cứu y học quan tâm.

Hiện nay, chì vẫn xuất hiện trong đời sống trong nhiều sản phẩm như ắc quy chì, mỹ phẩm, thiết bị điện tử, ... Phơi nhiễm chì do tiếp xúc trực tiếp hoặc từ chì trong đất và nước ngầm vẫn là một vấn đề đáng quan tâm.

4. Lời kết

Tại Mỹ, xăng pha chì chỉ bị cấm hoàn toàn vào năm 1996, nhiều tháng sau khi Patterson mất. Câu chuyện của Clair Patterson cho thấy sự cần thiết của các nghiên cứu khoa học độc lập để tránh sự mất kiểm soát của công nghệ khi chỉ chạy theo mục đích lợi nhuận. Bản thân Patterson cũng là một tấm gương của một nhà khoa học nghiêm túc với ý thức về sự đóng góp của các nghiên cứu cho lợi ích chung của cộng đồng.



Clair Patterson (1922 – 1995).

Tài liệu tham khảo

[1] Allgegre, C. (2008). Isotope Geology. Cambridge University Press.

[2] Patterson, C. (1956). Age of meteorites and the earth. *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 10, 230 – 237.

[3] Patterson, C. (1965). Contaminated and Natural Lead Environments of Man. *Environmental Health: An International Journal.*

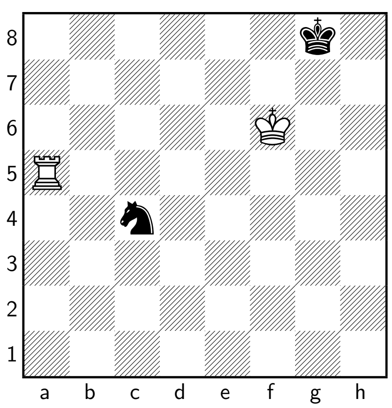
XE CHỐNG MÃ (Phần II)

BÙI VINH[1]

Lý thuyết cơ bản của cờ tàn Xe chống Mã khi hai bên không còn Tốt thường được đánh giá là hòa cờ cơ bản. Nếu như Vua và Mã luôn đứng cạnh nhau hoặc ở giữa bàn cờ, bên có Xe không thể giành chiến thắng. Tuy nhiên trên thực tế rất nhiều các kỳ thủ rất mạnh cũng đôi khi mắc phải những sai lầm nghiêm trọng trong thi đấu dẫn đến thua cờ.

Trong phần I bài viết này, chúng ta đã xem xét một số trường hợp khi Vua và Mã đối phương nằm ở hàng ngang cuối 1 và 8 hoặc ở cột *a* và *h*. Trong các trường hợp Mã đứng sai vị trí hoặc đứng tách rời khỏi Vua của mình, cơ hội giành chiến thắng của bên có Xe sẽ dễ dàng rất nhiều.

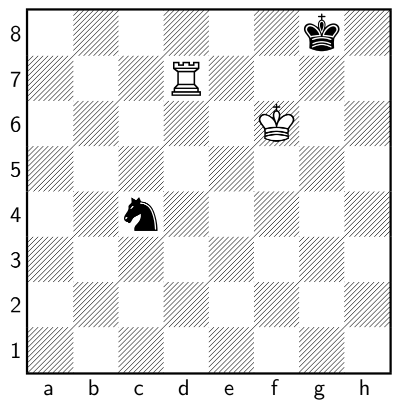
Chúng ta nghiên cứu một số ví dụ dưới đây.



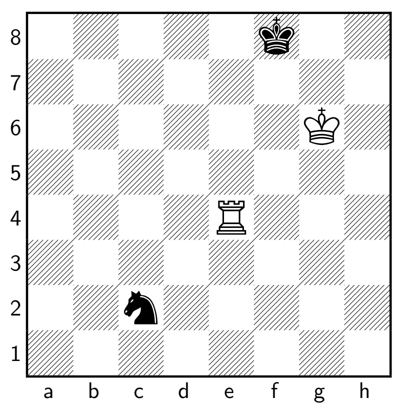
Hình 1.

1.Xa8+ Vh7 2.Xa7+ Vg8 [2...Vh6 3.Xa4 Me3 4.Xh4#; 2...Vh8 3.Xc7 Me3 4.Vg6]

3.Xd7! (H5) Kỹ thuật cơ bản của trắng lúc này là vừa đe dọa chiếu hết và tách Mã đen khỏi Vua. **Me3** [3...Vh8 4.Xd4 Mb6 5.Vf7; 3...Mb6 4.Xd4 Vh7 5.Vf7 Vh6 6.Xd6+]



Hình 2.



Hình 3.

4.Vg6 Vf8 5.Xd4 Mc2 6.Xe4 Xe trắng khống chế hoàn toàn các ô cờ di chuyển của

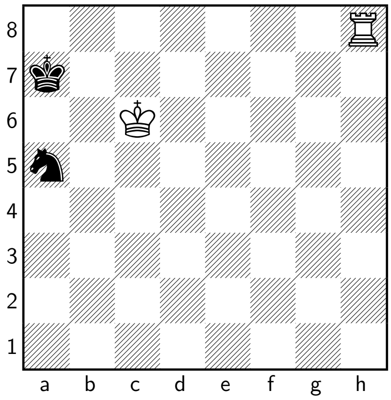
[1] *Đại kiện tướng quốc tế.*

Mã đen. **Ma3** [6...Ma1 7.Vf6 Vg8 8.Xg4+ Vh7 9.Xg7+ Vh8 10.Vg6 Mc2 11.Xc7]

7.Vf6!! Vg8 8.Xg4+ Vh7 9.Xg7+ Vh8 [9...Vh6 10.Xg3]

10.Vg6 Mc4 11.Xe7 Trắng thắng

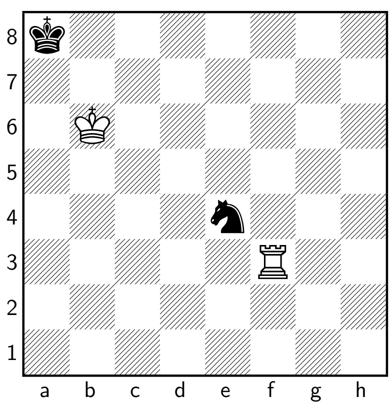
Ví dụ tiếp theo cho thấy ngay cả khi Mã và bên yếu đứng cạnh nhau, nhưng vị trí Mã yếu vẫn có thể dẫn đến thua cờ.



Hình 4.

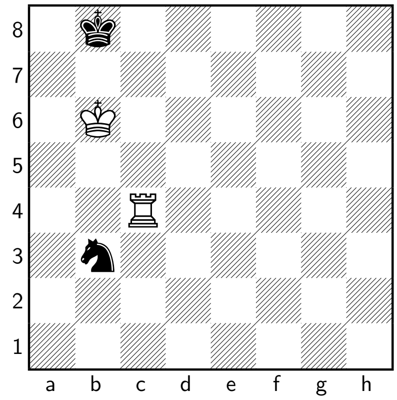
1.Vb5 Mb7 [1...Mb3 2.Xd8 Vb7 3.Xd1]

2.Xf8! Md6+ 3.Vc6 Mc4 [Phương án 3...Mb7 4.Xf7 Va8 5.Vb6; 3...Me4 4.Xf7+ Vb8 5.Xb7+ Va8 6.Xb4 Mf6 7.Xf4 Mh5 8.Xf5 Mg3 (8...*Mg7* 9.*Xf8*+ *Va7* 10.*Xf7*+) 9.Xf3 Me4 10.Vb6]



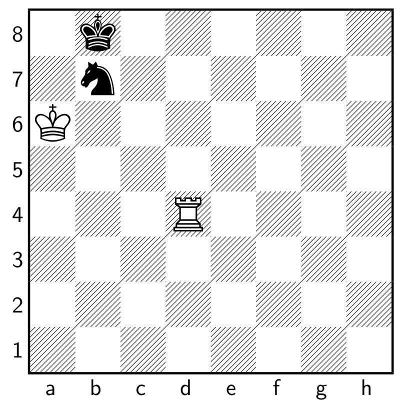
Hình 5. Đen không thể ngăn cản nước chiếu hết ở hàng ngang số 8.

4.Xf4 Ma5+ [Phương án khác 4...Md2 5.Xa4+ Vb8 6.Vb6 Xc8 7.Xf4 Mb3 8.Xf3 Md2 (8...*Md4* 9.*Xc3*+ *Vb8* 10.*Xd3* *Me6* 11.*Xd6*) 9.Xc3+ Vb8 10.Xc6 Mb3 11.Xc4]

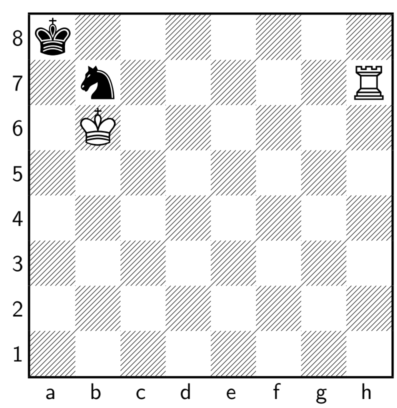


Hình 6. Mã đen bị hết nước đi.

5.Vb5 Mb7 6.Xd4 Vb8 7.Va6! Bằng các nước đi Vua khéo léo, Vua và Xe trắng phối hợp kiểm soát chặt chẽ các ô cờ di chuyển của Mã đen. Đồng thời không cho phép Mã đen có thời gian chuyển đến các có thể gỡ hòa như c8. Vc7 [Nếu 7...Mc5+ 8.Vb6 Me6 (8...*Mb7* 9.*Xd7* *Va8* 10.*Xh7*) 9.Xd6]



Hình 7.



Hình 8.

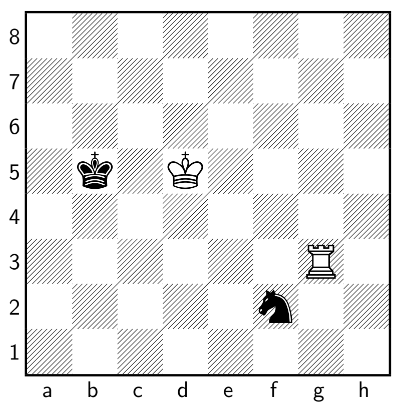
8.Xc4+ Vb8 9.Xb4 Va8 10.Vb6! Vb8 [10...Md6 11.Xh4 Vb8 12.Xh8+ Mc8+ 13.Mc6]

11.Vc6 Va8 12.Xh4 Vb8 [12...Md8+ 13.Vc7 Me6+ 14.Vb6]

13.Xh8+ Va7 14.Xh7 Va8 15.Vb6

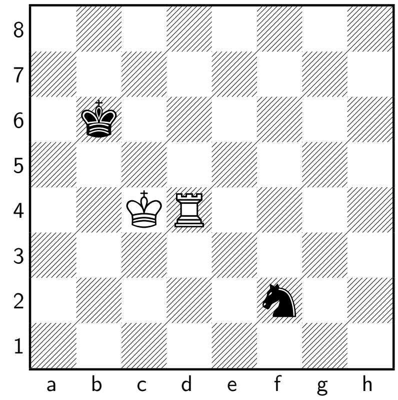
Như vậy qua xem xét một số ví dụ, chúng ta thấy lý thuyết về Vua và Xe chống Vua và Mã khi hai bên không còn Tốt hầu hết đều cho rằng đó là thế cờ hòa cơ bản. Tuy nhiên trên thực tế, nếu khi chơi các kỳ thủ không nắm chắc kiến thức vẫn có thể thua cờ.

Bài tập 1:



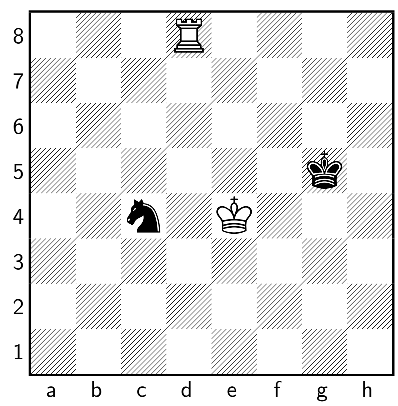
Hình 9. Trắng đi trước thắng.

Bài tập 2: (Reti, 1929)



Hình 10. Trắng đi trước thắng.

Bài tập 3: (A. Karpov – L. Ftacnik, Thessalonniki olympiad (men) 1988)



Hình 11. Trắng đi trước thắng.