



MỘT SỐ CÁCH GHI SỐ THỜI CỔ ĐẠI

PHAN THANH HỒNG

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 4 năm 2022)

1. Trong một giải thi đấu bóng chuyền, mỗi đội sẽ lần lượt thi đấu với các đội còn lại hai lần. Cuối cùng người ta thấy rằng **80%** các đội có ít nhất một trận thắng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đội đã tham gia trong giải đấu đó biết rằng các trận đấu bóng chuyền không có tỷ số hoà?



Lời giải. Do trong môn bóng chuyền không có trận hoà, nên đội nào không thắng ít nhất một trận có nghĩa là đội đó thua tất cả các đội còn lại. Nhưng chỉ có thể có duy nhất một đội là như vậy, vì không thể có hai đội **A, B** mà **A** thua **B** đồng thời **B** thua **A** trong cùng trận đấu. Vì thế **20%** số các đội bao gồm đúng duy nhất **1** đội, có nghĩa là chỉ có đúng **5** đội tham gia giải đấu đó.

2. Một buổi cắm trại có **9** học sinh nam và **10** học sinh nữ tham gia. Trước đó, mỗi học sinh nam đều đã quen với cùng một số lượng các học sinh nữ tham gia buổi cắm trại đó, còn tất cả các học sinh nữ đều quen số lượng học sinh nam hoàn toàn khác nhau (không có hai em nữ nào có số lượng bạn nam quen biết giống nhau). Hỏi điều này có thể xảy ra hay không?



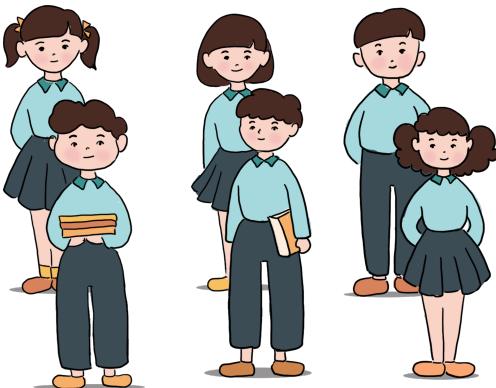
Lời giải. Giả sử mỗi học sinh nam quen **k** học sinh nữ, thì khi đó có tất cả **9k** mối quen biết. Do các bạn nữ có số bạn nam quen biết là hoàn toàn khác nhau, nên điều này chỉ có thể xảy ra nếu một bạn quen với tất cả **9** bạn nam, một bạn quen với **8** bạn nam, vv... và cuối cùng có một bạn không quen bạn nam nào. Vì thế số mối quen biết sẽ là $9 + 8 + 7 + \dots + 1 + 0 = 45$. Do đó **9k = 45**, tức là **k = 5**. Có thể dễ dàng chỉ ra một sơ đồ quen biết như sau. Ở bảng dưới đây, dấu “**+**” biểu diễn học sinh nam và học sinh nữ quen biết nhau với số thứ tự được chỉ ra theo chiều ngang và chiều dọc tương ứng.

	Bạn nữ									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bạn nam		+	+	+	+					+
1										
2			+	+	+				+	+
3				+	+			+	+	+
4					+		+	+	+	+
5						+	+	+	+	+
6						+	+	+	+	+
7						+	+	+	+	+
8						+	+	+	+	+
9						+	+	+	+	+

3. Trên bảng có ghi ít nhất hai số nguyên đối một khác nhau. Hơn nữa tổng của hai số bất kỳ trong chúng cũng được ghi trên đó. Hỏi có bao nhiêu số được viết ra trên bảng?

Lời giải. Ta sẽ chỉ ra rằng trên bảng không thể có nhiều hơn 1 số nguyên dương. Thực vậy, giả sử M là số nguyên dương lớn nhất trong các số được viết trên bảng, hơn nữa giả sử có thêm một số nguyên dương m nữa nhỏ hơn, tức là $0 < m < M$. Khi đó trên bảng phải có cả số $m+M$, lớn hơn M , và điều này là không thể. Tương tự cũng chỉ ra được rằng trên bảng có không quá 1 số nguyên âm. Như vậy trên bảng hoặc có 2, hoặc có 3 số được viết ra. Ví dụ như 2 số $\{0, 4\}$, hoặc 3 số $\{-4, 0, 4\}$.

4. Một số các bạn học sinh lớp 7 đứng xếp thành hàng ngang. Trước mặt mỗi bạn lại có một học sinh lớp 6 thấp hơn mình. Em hãy chứng tỏ rằng nếu hai hàng ngang của các học sinh hai lớp được xếp lại tăng dần theo chiều cao ở mỗi hàng, thì ở hai hàng mới, mỗi học sinh lớp 7 lại vẫn có trước mặt một học sinh lớp 6 thấp hơn mình.



Lời giải. Ta sẽ thực hiện cách đổi chỗ từng cặp học sinh một như sau: bắt đầu từ bạn lớp 6 cao nhất, đổi chỗ bạn cao nhất cho bạn hiện tại đang đứng ở vị trí thứ nhất; tiếp theo bạn cao thứ nhì đổi chỗ cho bạn đang đứng ở vị trí thứ 2. Cứ mỗi lần đổi chỗ hai bạn lớp 6 để sắp xếp theo thứ tự giảm dần, các bạn học sinh lớp 7 đứng đối diện hai bạn đó cũng được đổi giống như vậy. Sau khi các bạn lớp

6 đã được xếp theo thứ tự “đúng”, có nghĩa là giảm dần theo chiều cao thì ở hàng của các bạn lớp 7, vị trí còn khía lỗn xộn, chưa được xếp “đúng chỗ”. Tuy nhiên vì mỗi lần đổi chỗ 2 bạn lớp 6 ta lại đổi 2 bạn lớp 7 đứng đối diện, nên các cặp đứng đối diện vẫn giữ nguyên chưa thay đổi sau khi sắp xếp các bạn lớp 6 theo thứ tự giảm dần.

Bây giờ ta giữ nguyên hàng của các bạn lớp 6, và tiến hành xếp các bạn lớp 7 theo thứ tự chiều cao giảm dần. Đầu tiên bạn cao nhất sẽ được đổi chỗ cho bạn đứng ở vị trí thứ nhất, rồi tiếp tới bạn cao nhì ... Các em có thể thấy ngay cứ sau mỗi lần đổi chỗ như thế ở hàng của lớp thì trước mặt mỗi bạn lớp 7 vẫn có một bạn lớp 6 có chiều cao thấp hơn. Vì vậy cuối cùng sau khi xếp ngay ngắn hàng lớp 7 giảm dần theo chiều cao thì điều kiện đặt ra của bài toán vẫn được đảm bảo.

5. Trên một bàn cờ vua người ta đặt một số quân cờ mà ở mỗi một hàng ngang và mỗi hàng dọc của bàn cờ đều có một số lẻ các quân cờ. Em hãy chứng tỏ rằng có một số chẵn các quân cờ đứng ở các ô màu đen của bàn cờ đó.



Lời giải. Các chữ A, C phủ kín các hàng 2, 4, 6, 8. Mà tại mỗi hàng đó: tổng số quân cờ là số lẻ theo giả thiết.

	1	2	3	4	5	6	7	8
8		<i>B</i>		<i>B</i>		<i>B</i>		<i>B</i>
7	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>C</i>
6		<i>B</i>		<i>B</i>		<i>B</i>		<i>B</i>
5	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>C</i>
4		<i>B</i>		<i>B</i>		<i>B</i>		<i>B</i>
3	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>C</i>
2		<i>B</i>		<i>B</i>		<i>B</i>		<i>B</i>
1	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>C</i>

Vậy $n + k$ là tổng số quân cờ tại bốn hàng đánh số chẵn và là tổng của 4 số lẻ, nên nó là một số chẵn.

Lập luận tương tự tại các cột 2, 4, 6, 8, ta có $m + k$ là số chẵn. Vì thế số các quân cờ đặt tại các ô đen là $m + n$ và là một số chẵn.

6. Bốn chú lùn cùng đi chẻ củi để chuẩn bị cho một mùa đông có nàng Bạch Tuyết tới ở cùng, họ chẻ mất 3 tiếng đồng hồ. Nếu như chú lùn thứ nhất làm nhanh gấp đôi, còn chú thứ hai làm chậm một nửa, thì 4 chú cũng sẽ hoàn thành trong từng đó thời gian. Còn nếu như, ngược lại, chú thứ nhất làm chậm một nửa, còn chú thứ hai làm nhanh gấp đôi, thì họ sẽ xoay sở đống củi chỉ trong 2 tiếng.



Hỏi 3 chú lùn đầu tiên sẽ chẻ hết đống củi

trong bao nhiêu lâu mà không cần sự trợ giúp của chú thứ tư?

Lời giải. Ký hiệu a là số phần của đống củi mà chú lùn thứ nhất chẻ được trong 1 tiếng, tương tự b, c, d là số phần đống củi mà các chú lùn còn lại chẻ được trong một tiếng. Khi đó ta có

$$a + b + c + d = \frac{1}{3},$$

$$2a + \frac{b}{2} + c + d = \frac{1}{3},$$

$$\frac{a}{2} + 2b + c + d = \frac{1}{2}.$$

Từ hai hệ thức đầu ta thấy $2a = b$.

Trừ hệ thức thứ 3 cho hệ thức thứ nhất ta có

$$b - \frac{a}{2} = \frac{1}{6}.$$

Suy ra $a = \frac{1}{9}$, và $\frac{2}{9}$. Thay vào một trong hai hệ thứ đầu ta tìm ra $c + d = 0$. Có nghĩa là 2 chú lùn thứ 3 và thứ 4 không động chân động tay làm gì hết ($c = d = 0$, do c, d là các số không âm). Vì thế có vắng chú nào trong hai chú này thì thời gian chẻ củi cũng không bị ảnh hưởng. Vậy ba chú lùn đầu vẫn sẽ chẻ xong đống củi trong thời gian 3 tiếng như vậy.