



- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục “Thách thức kỳ này” cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ **B**, **A**, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ **B** không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ **A** không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P711–P720: trước ngày 15/7/2023.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P691. (Mức *B*) Tìm tất cả các số có sáu chữ số, trong đó chữ số hàng trăm nghìn bằng $\frac{1}{6}$ tổng năm chữ số còn lại; chữ số hàng chục nghìn bằng $\frac{1}{6}$ tổng bốn chữ số nằm bên phải nó.

Lời giải (dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Chánh Thiện, lớp 8/14, trường THCS Lê Quý Đôn, Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh).

Giả sử \overline{abcdef} là số có sáu chữ số thỏa mãn điều kiện đề bài. Khi đó, ta có $a \neq 0$,

$$a, b, c, d, e, f \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}, \quad (1)$$

$$6a = b + c + d + e + f,$$

$$6b = c + d + e + f. \quad (2)$$

Suy ra

$$6a = b + 6b = 7b.$$

Do đó, $b \neq 0$ (vì $a \neq 0$), $6a$ chia hết cho 7 và $7b$ chia hết cho 6. Mà $(6, 7) = 1$ nên a chia hết cho 7 và b chia hết cho 6. Từ đây, do (1) và $a, b \neq 0$, ta có $a = 7$ và $b = 6$. Vì thế, từ (2), ta được

$$c + d + e + f = 36. \quad (3)$$

Từ (1) và (3), với lưu ý $36 = 4 \cdot 9$, suy ra, $c = d = e = f = 9$.

Như vậy, $\overline{abcdef} = 769999$.

Ngược lại, bằng cách kiểm tra trực tiếp, dễ thấy, số 769999 thỏa mãn điều kiện đề bài. Vì vậy, đó là số duy nhất cần tìm theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Trong số tất cả lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có ba lời giải không hoàn chỉnh, do người giải bài lập luận thiếu chặt chẽ, khi khẳng định $a = 7$ và $b = 6$ (theo ký hiệu ở Lời giải trên).

Lê Huy

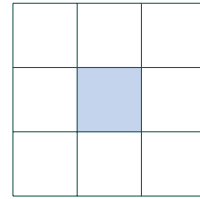
P692. (Mức *B*) Ở mỗi ô vuông con của bảng ô vuông kích thước 3×3 , có 4 viên bi. Bạn Hà lấy bi ra khỏi bảng, theo quy tắc: Mỗi lần,

lấy hai viên bi nằm ở hai ô vuông con kề nhau, ở mỗi ô lấy một viên. Hỏi, bạn Hà có thể lấy ra khỏi bảng tối đa bao nhiêu viên bi?

(Hai ô vuông được gọi là kề nhau, nếu chúng có cạnh chung.)

Lời giải (đáp án của Ban tổ chức VMTC 2023).

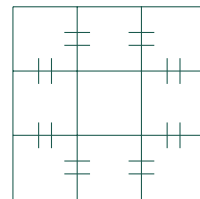
Tô đen ô vuông nằm ở chính giữa bảng 3×3 (xem Hình 1).



Hình 1.

Dễ thấy, trong hai ô vuông kề nhau bất kỳ, luôn có đúng một ô kề với ô đen. Do đó, ở mỗi lần lấy bi ra khỏi bảng, Hà luôn lấy đúng 1 viên nằm ở 4 ô kề với ô đen. Mà ở 4 ô đó, có $4 \cdot 4 = 16$ viên bi, nên số lần Hà lấy bi ra khỏi bảng không vượt quá 16 lần. Vì thế, số bi Hà có thể lấy ra khỏi bảng không vượt quá $2 \cdot 16 = 32$ viên.

Xét cách lấy bi được thể hiện ở Hình 2 dưới đây (mỗi đoạn thẳng kết nối 2 ô kề nhau thể hiện một lần lấy bi):



Hình 2.

Dễ thấy, ở cách lấy bi nêu trên, số bi được lấy ra khỏi bảng đúng bằng 32 viên.

Vậy, Hà có thể lấy ra khỏi bảng tối đa 32 viên bi.

Bình luận và Nhận xét

1. Để lấy được 32 viên bi ra khỏi bảng, ngoài cách được nêu ở Lời giải trên, còn có nhiều cách khác.

2. Trong số các lời giải Tập chí nhận được từ bạn đọc, chỉ có hai lời giải đúng và hoàn chỉnh; các lời giải còn lại đều có chung một nhược điểm (đã được nhắc nhở nhiều lần trong mục Giải bài kỳ trước của Tập chí): khẳng định số bi tối đa có thể lấy ra khỏi bảng là 32 viên, *ngay sau khi* mới chỉ chứng minh được số bi có thể lấy ra khỏi bảng không vượt quá 32 viên.

Lê Huy

P693. (Mức B) Cho các số thực phân biệt a, b, c thỏa mãn

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{23}{20}.$$

Tính

$$S = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}.$$

Lời giải (đáp án của Ban tổ chức VMTC 2023).

Đặt $x = \frac{a-b}{a+b}$, $y = \frac{b-c}{b+c}$ và $z = \frac{c-a}{c+a}$.

Ta có:

$$1-x = \frac{2b}{a+b}, 1+x = \frac{2a}{a+b};$$

$$1-y = \frac{2c}{b+c}, 1+y = \frac{2b}{b+c};$$

$$1-z = \frac{2a}{c+a}, 1+z = \frac{2c}{c+a}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & (1-x)(1-y)(1-z) \\ &= (1+x)(1+y)(1+z). \end{aligned} \quad (1)$$

Để thấy

$$(1) \Leftrightarrow x+y+z+xyz=0. \quad (2)$$

Từ (2) và giả thiết $xyz = \frac{20}{23}$, suy ra

$$x+y+z = -\frac{20}{23}.$$

Vì vậy

$$S = \frac{1}{2}(x+y+z+3) = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{20}{23}\right) = \frac{49}{46}.$$

Bình luận và Nhận xét

1. Ngoài cách giải nêu trên, bài toán còn có thể được giải theo các cách khác. Tuy nhiên, các cách này đều đòi hỏi phải thực hiện các tính toán cồng kềnh, phức tạp.

2. Bài đã ra là một bài toán nhẹ nhàng, không khó.

3. Có nhiều bạn đọc đã gửi lời giải tới Tập chí, và rất tiếc, có một bạn đã cho lời giải sai, do nhầm lẫn trong các tính toán.

Võ Quốc Bá Cẩn

P694. (Mức B) Cho tập hợp S gồm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số. Chứng minh rằng, trong 106 số đôi một khác nhau tùy ý thuộc S , luôn tồn tại 8 số, sao cho có thể phân chia 8 số này thành 4 nhóm, mỗi nhóm có hai số, và các tổng hai số cùng nhóm bằng nhau.

Lời giải (của người chấm bài).

Xét 106 số đôi một khác nhau tùy ý thuộc S .

Từ 106 số này, ta lập được $\frac{106 \cdot 105}{2} = 5565$ nhóm đôi một khác nhau, mỗi nhóm gồm đúng hai số trong 106 số ấy.

Vì mỗi số đều là số có ba chữ số, nên tổng hai số cùng nhóm thuộc tập gồm các số nguyên dương, trong phạm vi từ $100 + 101 = 201$ đến $998 + 999 = 1997$. Vì thế, theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại

$$\left[\frac{5565}{1997 - 201 + 1} \right] + 1 = 4$$

nhóm có tính chất: các tổng hai số cùng nhóm bằng nhau.

Hơn nữa, bốn nhóm nêu trên đôi một không có phần tử chung, vì nếu ngược lại, tồn tại hai nhóm có phần tử chung, giả sử là $\{x, t\}$ và $\{y, t\}$, thì từ $x+t = y+t$ suy ra $x = y$, mâu thuẫn với việc hai nhóm đó khác nhau.

Vì vậy, bốn nhóm nêu trên cho ta 8 số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Có thể dễ dàng tìm ra lời giải trên, nếu biết nhìn nhận điều phải chứng minh dưới dạng tương đương sau: Trong tất cả các nhóm hai

số, có thể tạo ra được từ 106 số đôi một khác nhau tùy ý thuộc S , tồn tại 4 nhóm đôi một không có số chung, sao cho các tổng hai số cùng nhóm bằng nhau.

2. Tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, đều là lời giải không đúng, do người giải bài đã lập luận không đúng, khi chứng minh 8 số, thuộc 4 nhóm có các tổng hai số cùng nhóm bằng nhau, là 8 số đôi một phân biệt.

Nguyễn Khắc Minh

P695. (Mức B) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + 16 = 5^y$.

Lời giải (dựa theo ý giải của đa số lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc).

Giả sử $(x; y)$ là cặp số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu đề bài; nghĩa là, ta có:

$$x^2 + 16 = 5^y. \quad (1)$$

Để thấy, $x, y > 0$, vì:

– Nếu $x = 0$ thì theo (1), $5^y = 16$, là điều vô lý;

– Nếu $y = 0$ thì $5^y = 5^0 = 1 < 16$, mâu thuẫn với (1).

Vì $16 \equiv 0 \pmod{8}$ nên từ (1) suy ra

$$x^2 \equiv 5^y \pmod{8}. \quad (2)$$

Vì $x^2 \not\equiv 5 \pmod{8}$ với mọi $x \in \mathbb{N}^*$, và $5^y \equiv 5 \pmod{8}$ với mọi y lẻ, nên từ (2) suy ra, y là số chẵn. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow (5^{\frac{y}{2}} - x)(5^{\frac{y}{2}} + x) = 2^4.$$

Suy ra, $5^{\frac{y}{2}} - x$ và $5^{\frac{y}{2}} + x$ là các lũy thừa với số mũ tự nhiên của 2. Từ đây, do các số vừa nêu có cùng tính chẵn lẻ và

$$5^{\frac{y}{2}} - x < 5^{\frac{y}{2}} + x \quad (\text{do } x > 0),$$

nên $5^{\frac{y}{2}} - x = 2$ và $5^{\frac{y}{2}} + x = 2^3$. Do đó, $2x = 6$ và $5^{\frac{y}{2}} = 5$; vì thế, $x = 3$ và $y = 2$.

Bằng cách kiểm tra trực tiếp, dễ thấy cặp số tự nhiên $(x; y)$ vừa nêu trên thỏa mãn (1).

Vậy, có duy nhất cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài, là $(x; y) = (3; 2)$.

Bình luận và Nhận xét

1. Tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều cho đáp số đúng.

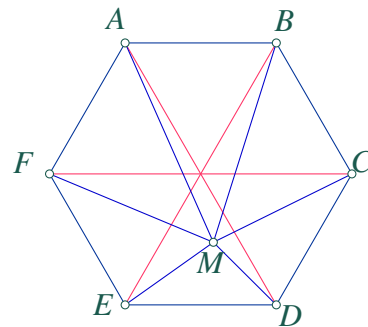
2. Rất tiếc, có ba lời giải mắc nhược điểm “thiếu phần thử lại cặp số $(x; y)$ tìm được”. Những lời giải này, đương nhiên, không thể được coi là lời giải hoàn chỉnh.

Lưu Thị Thanh Hà

P696. (Mức B) Cho lục giác đều $ABCDEF$ có cạnh bằng 1 và M là một điểm tùy ý nằm trong lục giác đó. Chứng minh rằng, trong 6 tam giác MAB, MBC, MCD, MDE, MEF và MFA có ít nhất 3 tam giác có chu vi không nhỏ hơn 3.

Lời giải (của người chấm bài).

Ở lời giải này, P_{XYZ} ký hiệu chu vi của tam giác XYZ .



Do $ABCDEF$ là lục giác đều cạnh 1 nên theo tính chất của lục giác đều,

$$AD = BE = CF = 2 \cdot 1 = 2. \quad (*)$$

Xét hai tam giác MAB và MDE , với lưu ý tới giả thiết $AB = DE = 1$ và (*), ta có:

$$\begin{aligned} P_{MAB} + P_{MDE} &= (AB + MA + MB) + (DE + MD + ME) \\ &= AB + DE + (MA + MD) + (MB + ME) \\ &\geq AB + DE + AD + BE \\ &= 1 + 1 + 2 + 2 = 6. \end{aligned}$$

Suy ra, $P_{MAB} \geq 3$ hoặc $P_{MDE} \geq 3$; nghĩa là, trong hai tam giác MAB, MDE , có ít nhất một tam giác có chu vi không nhỏ hơn 3.

Xét một cách hoàn toàn tương tự đối với các cặp tam giác (MBC, MEF) và

(MCD, MFA), ta sẽ được: trong mỗi cặp tam giác đó, đều có ít nhất một tam giác có chu vi không nhỏ hơn 3.

Vì vậy, trong sáu tam giác $MAB, MDE, MBC, MEF, MCD, MFA$, có ít nhất ba tam giác có chu vi không nhỏ hơn 3. Đây là điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Bài đã ra là một bài toán đơn giản, giúp người giải bài ghi nhớ một tính chất rất cơ bản của lục giác đều, và rèn luyện kỹ năng vận dụng bất đẳng thức tam giác, khi giải các bài toán với yêu cầu đánh giá tổng độ dài của các đoạn thẳng.

2. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, chỉ có lời giải của bạn *Phùng Việt Cường* (lớp 11 Toán 2, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định) là lời giải đúng và hoàn chỉnh. Các lời giải còn lại đều là lời giải không đúng, do hoặc thiếu xét trường hợp điểm M trùng với tâm của lục giác đều đã cho, hoặc có những khẳng định mang tính cảm tính, không chính xác.

Hà Thanh

P697. (Mức A) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{yz}{x^5 - x + 8}} + \sqrt[3]{\frac{zx}{y^5 - y + 8}} + \sqrt[3]{\frac{xy}{z^5 - z + 8}} \leq \frac{3}{2}.$$

Lời giải (dựa theo đa số lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc).

Do $x > 0$ nên theo bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân, ta có:

$$x^5 + x^5 + 1 + 1 + 1 \geq 5x^2, \\ x^2 + 1 \geq 2x.$$

Suy ra

$$x^5 \geq \frac{5x^2 - 3}{2} \text{ và } -x \geq -\frac{x^2 + 1}{2}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} & x^5 - x + 8 \\ & \geq \frac{5x^2 - 3}{2} - \frac{x^2 + 1}{2} + 8 \\ & = 2(x^2 + 3) = 2(x^2 + x^2 + y^2 + z^2) \\ & \geq 2(x^2 + xy + yz + zx) \\ & = 2(x + y)(x + z) > 0 \quad (\text{do } x, y, z > 0). \end{aligned}$$

Từ đó, do $y, z > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{yz}{x^5 - x + 8}} & \leq \sqrt[3]{\frac{yz}{2(x + y)(x + z)}} \\ & \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{x + y} + \frac{z}{x + z} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$\sqrt[3]{\frac{zx}{y^5 - y + 8}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{y + z} + \frac{x}{y + x} \right), \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{\frac{xy}{z^5 - z + 8}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{z + x} + \frac{y}{z + y} \right). \quad (3)$$

Cộng các bất đẳng thức (1), (2), (3), vế theo vế, ta thu được bất đẳng thức phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Từ việc chứng minh các bất đẳng thức (1), (2), (3) ở Lời giải trên, dễ thấy, dấu đẳng thức ở bất đẳng thức của đề bài xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

2. Lời giải trên đây thể hiện một cách tiếp cận tự nhiên đối với các bài toán yêu cầu chứng minh các bất đẳng thức có dạng như bất đẳng thức ở bài ra. Đó là, biến đổi, hoặc đánh giá, các mẫu thức, nhằm tạo ra thế có thể dùng bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân để đánh giá các căn thức.

3. Tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Võ Quốc Bá Cẩn

P698. (Mức A) Cho số nguyên $m > 1$. Chứng minh rằng

a) Tồn tại m số thực dương x_1, \dots, x_m ,

không đồng thời bằng 1, sao cho

$$\sqrt[n]{x_1} + \dots + \sqrt[n]{x_m}$$

là số nguyên, với mọi $n = 1, 2, \dots, 100$.

b) Không tồn tại m số thực dương x_1, \dots, x_m , không đồng thời bằng 1, sao cho

$$\sqrt[n]{x_1} + \dots + \sqrt[n]{x_m}$$

là số nguyên, với mọi số nguyên dương n .

Lời giải (phỏng theo ý giải của hai bạn học sinh cấp THPT đã gửi lời giải về Tạp chí).

a) Chọn $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 2^{100!}$, ta có m số thực dương không đồng thời bằng 1, và

$$\sqrt[n]{x_1} + \sqrt[n]{x_2} + \dots + \sqrt[n]{x_m} = m \cdot 2^{\frac{100!}{n}}$$

là một số nguyên, với mọi $n = 1, 2, \dots, 100$ (do $\frac{100!}{n} \in \mathbb{N}$, với mọi $n = 1, 2, \dots, 100$).

b) Giả sử ngược lại, tồn tại m số thực dương x_1, \dots, x_m , không đồng thời bằng 1, sao cho

$$\sqrt[n]{x_1} + \sqrt[n]{x_2} + \dots + \sqrt[n]{x_m}$$

là một số nguyên, với mọi số nguyên dương n .

Do hàm số mũ là hàm liên tục trên \mathbb{R} và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, nên

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{x_1} + \sqrt[n]{x_2} + \dots + \sqrt[n]{x_m}) \\ &= \sum_{i=1}^m \lim_{n \rightarrow +\infty} x_i^{\frac{1}{n}} = \sum_{i=1}^m x_i^0 = m. \end{aligned}$$

Vì thế, tồn tại số nguyên dương N , sao cho với mọi số nguyên dương $n \geq N$, đều có

$$m - \frac{1}{2} < \sqrt[n]{x_1} + \sqrt[n]{x_2} + \dots + \sqrt[n]{x_m} < m + \frac{1}{2}.$$

Mà $\sqrt[n]{x_1} + \sqrt[n]{x_2} + \dots + \sqrt[n]{x_m}$ là một số nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên

$$\sqrt[n]{x_1} + \sqrt[n]{x_2} + \dots + \sqrt[n]{x_m} = m, \forall n \geq N. \quad (1)$$

Xét số nguyên dương $k > 1$ tùy ý.

Do $kN > N$ nên theo (1),

$$\sqrt[kN]{x_1} + \sqrt[kN]{x_2} + \dots + \sqrt[kN]{x_m} = m. \quad (2)$$

Vì $0 < \frac{1}{k} < 1$ và $\sqrt[k]{x_i} - 1 > -1$ (do $\sqrt[k]{x_i} > 0$) với mọi $i = 1, 2, \dots, m$, nên theo bất đẳng

thức Bernoulli, với mọi $i = 1, 2, \dots, m$, ta có:

$$\sqrt[kN]{x_i} = (1 + (\sqrt[k]{x_i} - 1))^{\frac{1}{k}} \leq 1 + \frac{1}{k} (\sqrt[k]{x_i} - 1);$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt[k]{x_i} = 1$ ($\Leftrightarrow x_i = 1$).

Vì thế, do x_1, \dots, x_m không đồng thời bằng 1, và

$$\sqrt[N]{x_1} + \sqrt[N]{x_2} + \dots + \sqrt[N]{x_m} = m \text{ (theo (1))},$$

nên

$$\begin{aligned} & \sqrt[kN]{x_1} + \sqrt[kN]{x_2} + \dots + \sqrt[kN]{x_m} \\ & < m + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^m (\sqrt[k]{x_i} - 1) = m, \end{aligned}$$

mâu thuẫn với (2).

Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ giả sử phản chứng ở trên là sai. Do đó, ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có:

– Hai lời giải sai, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau:

+ Khẳng định sai rằng, với a là một hằng số thực thuộc khoảng $(0; 1)$, ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 0;$$

+ Không chú ý tới khả năng xảy ra dấu “=” ở bất đẳng thức Bernoulli.

– Một lời giải không được coi là lời giải hoàn chỉnh, do người giải bài đã mắc lỗi “chính tả”, khi thực hiện các tính toán.

Lưu Thị Thanh Hà

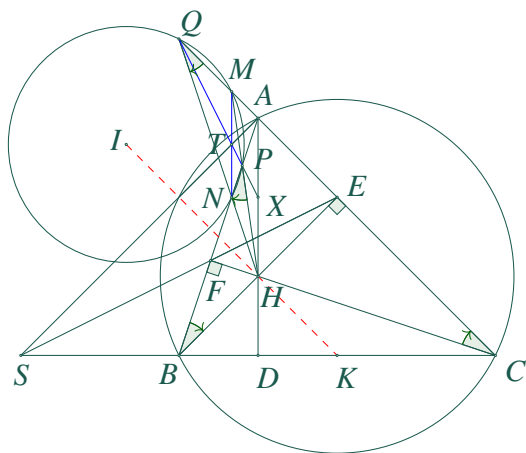
P699. (Mức A) Cho tam giác không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) và có hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Giả sử $\angle BAC$ khác $60^\circ, 90^\circ$ và 120° . Gọi P, Q là các điểm, tương ứng, đối xứng với B, C qua F, E . Các đường thẳng HP, HQ , tương ứng, cắt AC, AB tại M, N . Gọi K là trung điểm của BC . Chứng minh rằng, các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng HK .

Lời giải (của người chấm bài).

Trước hết, ta nhắc lại (không chứng minh) kết quả quen biết sau:

Định lý Brokard. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi R là giao điểm hai đường chéo của tứ giác đó. Giả sử các đường thẳng AB, CD cắt nhau tại P , các đường thẳng AD, BC cắt nhau tại Q . Khi đó, O là trực tâm của tam giác PQR .

Trở lại bài toán.



Do $\angle ABC$ khác 60° , 90° và 120° , nên bốn điểm M, N, P, Q đôi một phân biệt.

Do BE, CF là các đường cao của tam giác ABC , nên bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC . (1)

Vì thế, với lưu ý tới tính đối xứng của các cặp điểm (P, B) , (Q, C) , ta có:

$$\begin{aligned}(PM;PN) &\equiv (PH;PB) \equiv (BP;BH) \\ &\equiv (BF;BE) \equiv (CF;CE) \\ &\equiv (CH;CQ) \equiv (QC;QH) \\ &\equiv (QM;QN) \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Do đó, bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Gọi I là tâm của đường tròn $(MNPQ)$.

Gọi T là giao điểm của MN và PQ ; gọi S, D , tương ứng, là giao điểm của BC và AT, AH .

Gọi X là giao điểm của PQ và AH . Theo tính chất của tứ giác toàn phần, $(TX, PQ) = -1$. Từ đây, do phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỷ

số kép, suy ra $(BC, SD) = -1$. Vì thế, theo tính chất của tứ giác toàn phần, $S \in EF$.

Do (1) và do K là trung điểm của BC (giả thiết), nên áp dụng định lý Brocard cho tứ giác nội tiếp $BCEF$, ta được K là trực tâm của tam giác ASH . Suy ra, $KH \perp AS$. (2)

Áp dụng định lý Brokard cho tứ giác nội tiếp $MPNQ$, ta được I là trực tâm của tam giác AHT . Suy ra, $IH \perp AT$, hay $IH \perp AS$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra, ba điểm H, K, I thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả lời giải Tập chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng.

Hạ Vũ Anh

(Mức A) Cho số nguyên dương n . Lần lượt ghi các số $n^3, n^3 + 1, \dots, n^3 + n$ lên $n + 1$ tấm thẻ trắng, trên mỗi thẻ ghi đúng một số. Người ta xếp tất cả $n + 1$ tấm thẻ đó vào hai chiếc hộp xanh và đỏ, sao cho mỗi hộp có ít nhất một thẻ và tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp xanh chia hết cho tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp đỏ. Chứng minh rằng, số các tấm thẻ trong hộp xanh chia hết cho số các tấm thẻ trong hộp đỏ.

Lời giải (dựa trên ý tưởng của bạn Hoàng Nguyễn Gia Bảo, lớp 11T1, trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, tỉnh Đồng Tháp).

Quy ước, gọi tấm thẻ mà trên đó có ghi số i là thẻ i .

- Với $n = 1$, hiển nhiên ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

- Xét $n > 1$.

Xét một cách xếp $n + 1$ tấm thẻ vào hai hộp xanh, đỏ tùy ý, thỏa mãn điều kiện đề bài.

Gọi m là số tấm thẻ được xếp vào hộp xanh, và k là số tấm thẻ được xếp vào hộp đỏ; ta có, $m, k \in \mathbb{N}^*$ và $m + k = n + 1$.

Ký hiệu S_x là tổng các số được ghi trên m tấm thẻ trong hộp xanh, và S_d là tổng các số được ghi trên k tấm thẻ trong hộp đỏ; ta có,

$S_x, S_d \in \mathbb{N}^*$ và

$$\begin{aligned} S_x + S_d &= (n+1)n^3 + 1 + 2 + \dots + n \\ &= (n+1)n^3 + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} (2n^2 + 1). \end{aligned} \quad (1)$$

Giả sử m tấm thẻ trong hộp xanh là $n^3 + x_1, \dots, n^3 + x_m$; và k tấm thẻ trong hộp đỏ là $n^3 + d_1, \dots, n^3 + d_k$.

Đặt $X = x_1 + \dots + x_m$ và $D = d_1 + \dots + d_k$; ta có:

$$X, D \in \mathbb{N} \text{ và } X + D = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (2)$$

$$S_x = m \cdot n^3 + X \text{ và } S_d = k \cdot n^3 + D. \quad (3)$$

Do $S_x : S_d$ (giả thiết), nên tồn tại $q \in \mathbb{N}^*$ sao cho $S_x = qS_d$. (4)

Hơn nữa, từ $S_x : S_d$, dễ dàng suy ra, không thể xảy ra trường hợp trong một trong hai hộp xanh, đỏ, chỉ có duy nhất tấm thẻ n^3 . Do đó, từ (2) ta có

$$X, D \in \mathbb{N}^* \text{ và } X, D < \frac{n(n+1)}{2}. \quad (5)$$

Vì thế, từ (3) suy ra, $S_d > n^3$. (6)

Từ (1), (4) và (6), ta có:

$$(q+1)n^3 < (q+1)S_d = \frac{n(n+1)}{2} (2n^2 + 1).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} q+1 &< \frac{(n+1)(2n^2+1)}{2n^2} \\ &< n+2 \text{ (do } n > 1); \end{aligned}$$

do đó, $q < n+1$. Mà $q \in \mathbb{N}^*$ nên

$$0 < q \leq n. \quad (7)$$

Từ (3) và (4), ta có:

$$m \cdot n^3 + X = qk \cdot n^3 + qD;$$

suy ra

$$qD - X = (m - qk)n^3. \quad (8)$$

Do đó, $qD - X$ chia hết cho n^3 . (9)

Do (5), (7), và $n > 1$, nên

$$qD - X < qD < \frac{n^2(n+1)}{2} < n^3, \quad (10)$$

$$qD - X > -X > -\frac{n(n+1)}{2} > -n^3. \quad (11)$$

Từ (9), (10) và (11), suy ra $qD - X = 0$. Vì thế, từ (8) ta được $m = qk$; do đó, m chia hết cho k . Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Dĩ nhiên, bài đã ra chỉ có ý nghĩa, khi tập các cách xếp thẻ, thỏa mãn điều kiện đề bài, là tập khác rỗng.

Ở Lời giải trên, ta đã thấy, tập đó khác rỗng, khi $n = 1$.

Với $n > 1$, dễ dàng kiểm tra được rằng:

– Nếu n là số chẵn thì bằng cách xếp thẻ $n^3 + \frac{1}{2}n$ vào hộp đỏ, và xếp tất cả n tấm thẻ còn lại vào hộp xanh, ta sẽ có một cách xếp thỏa mãn điều kiện đề bài;

– Nếu n là số lẻ thì bằng cách xếp hai thẻ $n^3 + 1, n^3 + (n-1)$ vào hộp đỏ, và xếp tất cả $n-1$ tấm thẻ còn lại vào hộp xanh, ta sẽ có một cách xếp thỏa mãn điều kiện đề bài.

Vì vậy, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, tập các cách xếp thẻ, thỏa mãn điều kiện đề bài, là tập khác rỗng.

2. Trong số các lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải sai, do người giải bài đã tính sai tổng các số ghi trên các tấm thẻ trong hộp xanh.

Nguyễn Khắc Minh