- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P711–P720: trước ngày 15/7/2023.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P711. (Mức B) Bác An có 6 tấm thẻ A, B, C, D, E, F. Bác ghi các số nguyên dương 1, 2, 3, 4, 5, 6 lên mỗi tấm thẻ, sao cho mỗi thẻ được ghi một số và không có hai thẻ nào có số giống nhau. Biết rằng tổng các số ghi ở các tấm thẻ A, B, C bằng 14 và tổng các số được ghi ở các tấm thẻ A, D, E là 12. Hỏi bác An có bao nhiêu cách ghi số như vậy?

Nguyễn Tường Thanh, Hải Dương

P712. (Mức B) Tìm tất cả các số nguyên a sao cho a^2+a+1 chỉ có ước nguyên tố không vượt quá 5.

Hà Duy Hưng, Hà Nội

P713. (Mức B) Xác định tất cả các cặp số thực $(a;b)$ sao cho $a+b$ là số nguyên và $a^3+b^3=2$.

Nguyễn Đức Tấn, Tp. Hồ Chí Minh

P714. (Mức B) Cho 2023 số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ thỏa mãn

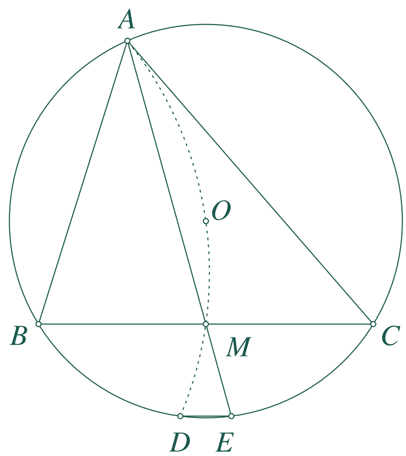
$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_{2023}^2} \geq 33.$$

Chứng minh rằng, trong 2023 số đó, luôn tìm được ít nhất 21 số bằng nhau.

Nguyễn Văn Quý, Hà Nội (st)

P715. (Mức B) Cho tam giác không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), có M là trung điểm BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMO cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Đường thẳng AM cắt (O) tại điểm thứ hai E.

Chứng minh rằng $DE \parallel BC$.



Bằng Linh, Phú Thọ (st)

P716. (Mức B) Trong một lớp học có 33 học sinh. Mỗi bạn viết lên bảng số người trong lớp có cùng tên với mình và viết lên bảng số người có cùng họ với mình (không tính bản thân người đó). Sau khi tất cả học sinh hoàn thành việc viết số, thì trên bảng mỗi số $0, 1, 2, \ldots, 10$ đều xuất hiện ít nhất một lần. Hỏi số 6 xuất hiện bao nhiêu lần?

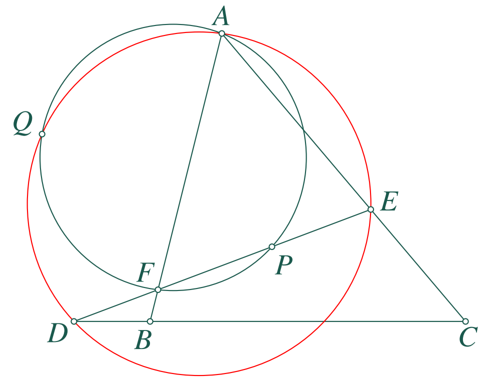
Tô Trung Hiếu, Nghệ An (st)

P717. (Mức A) Chứng minh rằng, với mọi bộ ba số thực $(a;b;c)$ thoả mãn $ac \neq 0$ và $b^2 \geq 4ac$, ta có

$$(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4 \geq \frac{81}{128}c^4.$$

Nguyễn Văn Long, Vĩnh Phúc

P718. (Mức A) Cho tam giác ABC và P là một điểm cố định nằm trong tam giác đó. Một đường thẳng d quay quanh điểm P, cắt các đường thẳng BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F. Gọi Q là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (ADE) và (APF). Chứng minh rằng, Q luôn thuộc một đường tròn cố định.



Phạm Vĩnh Minh, Đồng Tháp

P719. (Mức A) Cho S là một tập hữu hạn các số nguyên lớn hơn 1 thoả mãn: với mỗi số nguyên dương n, tồn tại $x \in S$ sao cho hoặc x, n nguyên tố cùng nhau, hoặc n chia hết cho x. Chứng minh rằng, tồn tại $x, y \in S$ (có thể $x = y$) sao cho ước chung lớn nhất của x, y là một số nguyên tố.

Bằng Linh, Phú Thọ (st)

P720. (Mức A) Một thành phố có 1332 căn nhà. Mỗi dịp Noel, ông già Noel sẽ đến thăm các căn nhà đó theo thứ tự tùy ý. Chứng minh rằng, có thể tìm được 12 căn nhà trong thành phố đó sao cho trong 3 năm liên tiếp, có ít nhất 2 năm mà ông già Noel đến thăm 12 căn nhà đó theo cùng một thứ tự.

Trương Bảo Nam, Hà Nội

ĐÍNH CHÍNH

- Trong phát biểu của bài toán **P685** tập 7 số 3, câu "Cho 2023 hình có tổng diện tích lớn hơn 2023" đổi thành "Cho 2023 hình có tổng diện tích lớn hơn 2022".
- Trong phát biểu của bài toán **P707** tập 7 số 5, công thức của a bị thiếu số x, công thức đúng là:

$$a = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{2}x \right\rfloor.$$

Thành thật cáo lỗi cùng bạn đọc.

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P681. (Mức B) Một số có bốn chữ số $\overline{abcd}$ được gọi là số "zig zag", nếu a, b, c, d đôi một khác nhau, và $a < b, b > c, c < d$ (chẳng hạn, 1204 là số "zig zag"). Hỏi có bao nhiêu số "zig zag" có chữ số hàng nghìn là 7?

Lời giải (*phỏng theo cách giải của bạn Trần Hữu Dương, lớp 11 Toán 1, trường THPT chuyên Hưng Yên, tỉnh Hưng Yên*).

Vì $a = 7$ và $b > a$ (giả thiết), nên $b \in \{8; 9\}$. (1)

Vì b, d cùng lớn hơn c, và b, c, d đôi một khác nhau (giả thiết), nên

$$c \le \max\{b, d\} - 2 \le 9 - 2 = 7.$$

Từ đó, do $c \ne a = 7$, suy ra

$$c \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}. \quad (2)$$

Rõ ràng, với mỗi b thỏa mãn (1), tất cả c thỏa mãn (2) đều đáp ứng yêu cầu $c < b$.

Tiếp theo, dễ thấy, với mỗi

$$c = k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\},$$

có $7 - k$ giá trị của d thỏa mãn yêu cầu $d > c$, là: $k+1, k+2, \ldots, 9$, trừ ra 7 và b.

Vì vậy, với $a = 7$, số bộ (b, c, d) thỏa mãn $a < b, b > c, c < d$ là:

$$2(7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 56.$$

Vậy, có 56 số "zig zag" có chữ số hàng nghìn là 7.

Bình luận và Nhận xét

Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có:

– Một lời giải sai, do người giải bài không lưu ý tới ràng buộc "a, b, c, d đôi một khác nhau";

– Một lời giải không được chấp nhận là lời giải hoàn chỉnh, do người giải bài chỉ nêu ra số các cặp (c, d) thỏa mãn yêu cầu của bài toán, mà không có bất cứ lý giải nào.

Lê Huy

P683. (Mức B) Cho tam giác ABC có $\angle BAC \ne 90^\circ$ và nội tiếp (O). Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Đường tròn đi qua A và tiếp xúc với BC tại B, cắt AM tại điểm thứ hai D (khác A). Các đường thẳng BD, CD tương ứng cắt (O) tại các điểm thứ hai E, F. Chứng minh rằng AM là phân giác của góc EAF.

Lời giải (*của người chấm bài*).

Do MB tiếp xúc với đường tròn (ABD) tại B, nên

$$\angle MAB = \angle MBD. \quad (1)$$

Suy ra, $\Delta MAB \sim \Delta MBD$. Do đó

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MB}{MD}.$$

Từ đó, do M là trung điểm BC (giả thiết), ta được:

$$MC^2 = MB^2 = MD \cdot MA.$$

Suy ra, $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MC}{MD}$.

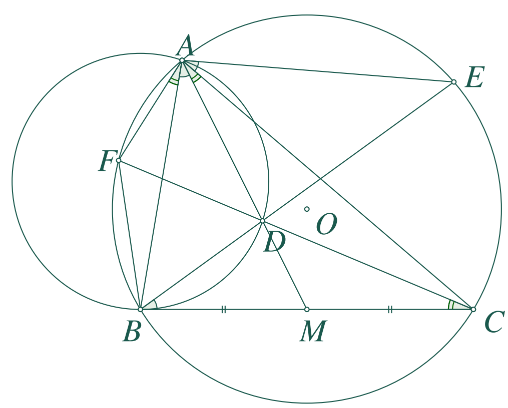
Do đó, $\Delta MAC \sim \Delta MCD$. Vì vậy

$$\angle MAC = \angle MCD. \quad (2)$$

Do $\angle BAC \ne 90^\circ$ (giả thiết), nên có thể xảy ra hai trường hợp sau:

⋄ *Trường hợp 1: $\angle BAC$ là góc nhọn.*

Khi đó, điểm D nằm giữa hai điểm A, M; do đó, E nằm trên cung AC không chứa B, và F nằm trên cung AB không chứa C, của đường tròn (O). (Xem Hình 1).



Hình 1

Vì thế, $ABCE$ và $ACBF$ là các tứ giác lồi nội tiếp; tia AB nằm giữa hai tia AF, AM, và tia

AC nằm giữa hai tia AM, AE. Do đó

$$\angle CAE = \angle CBE = \angle MBD, \quad (3)$$
$$\angle FAB = \angle BCF = \angle MCD, \quad (4)$$
$$\angle FAM = \angle FAB + \angle BAM, \quad (5)$$
$$\angle MAE = \angle MAC + \angle CAE. \quad (6)$$

Từ (3) và (1), suy ra $\angle CAE = \angle MAB$. (7)
Từ (4) và (2), suy ra $\angle FAB = \angle MAC$. (8)
Từ (5), (6), (7), (8), suy ra $\angle FAM = \angle MAE$. Vì thế, AM là phân giác của góc EAF.

◇ *Trường hợp 2: $\angle BAC$ là góc tù.*

Trong trường hợp này, điểm A nằm giữa hai điểm D, M; do đó, E nằm trên cung AC chứa B, và F nằm trên cung AB chứa C, của đường tròn (O).

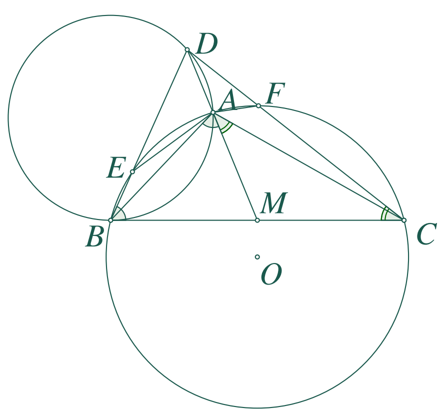
Vì thế, có thể xảy ra các khả năng sau:

– *Khả năng 2.1*: E nằm trên cung AB không chứa C, và F nằm trên cung AC không chứa B, của đường tròn (O).

– *Khả năng 2.2*: E nằm trên cung BC không chứa A, và F nằm trên cung AC không chứa B, của đường tròn (O).

– *Khả năng 2.3*: E nằm trên cung AB không chứa C, và F nằm trên cung BC không chứa A, của đường tròn (O).

Dưới đây, ta sẽ xét khả năng 2.1 (xem Hình 2); hai khả năng còn lại (2.2 và 2.3) được xét theo cách tương tự.



Hình 2.

Trong trường hợp này, $AEBC$ và $AFCB$ là các tứ giác lồi nội tiếp; tia AM nằm giữa hai tia AE, AC, đồng thời nằm giữa hai tia AB, AF. Do đó

$$\begin{aligned}\angle EAM &= \angle EAC - \angle MAC\\ &= (180^\circ - \angle EBC) - \angle MAC\\ &= (180^\circ - \angle MBD) - \angle MAC\\ &= 180^\circ - \angle MAB - \angle MAC \ (\text{do}(1))\\ &= 180^\circ - \angle BAC; \quad (9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle FAM &= \angle FAB - \angle MAB\\ &= (180^\circ - \angle BCF) - \angle MAB\\ &= (180^\circ - \angle MCD) - \angle MAB\\ &= 180^\circ - \angle MAC - \angle MAB \ (\text{do}(2))\\ &= 180^\circ - \angle BAC. \quad (10)\end{aligned}$$

Từ (9) và (10) suy ra, $\angle EAM = \angle FAM$. Vì thế, AM là phân giác của góc EAF.

◇ Kết quả xét hai trường hợp trên đây cho ta điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

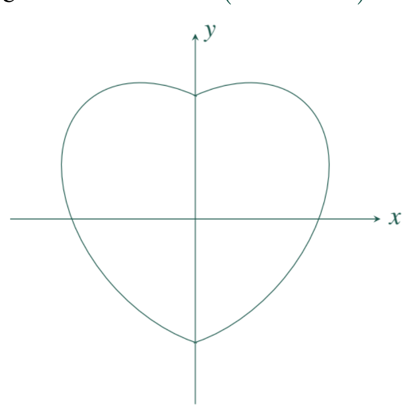
Bình luận và Nhận xét

1. Để tránh việc xét các trường hợp, như ở Lời giải trên, phải sử dụng góc định hướng. Chúng tôi đã không trình bày lời giải theo cách vừa nêu, để các bạn học sinh cấp THCS có thể hiểu lời giải.

2. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, lời giải của bạn *Nguyễn Hữu Trí* (lớp 11A1, THPT số 2 Phù Cát, Bình Định) là lời giải duy nhất đúng và hoàn chỉnh; tất cả các lời giải còn lại chỉ đúng cho trường hợp góc BAC là góc nhọn.

Hạ Vũ Anh

P684. (Mức B) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho một đường "trái tim" như hình dưới đây. Biết rằng, điểm $M(x;y)$ thuộc đường đó khi và chỉ khi $(x^2+y^2-4)^3=x^2y^3$.



Hỏi có bao nhiêu điểm nguyên thuộc đường đó?

(*Điểm nguyên là điểm có cả hoành độ và tung độ đều là các số nguyên*).

Lời giải (*dựa theo cách giải của một bạn học sinh lớp* 11 *THPT*).

• Giả sử $M(x,y)$ là một điểm nguyên thuộc đường "trái tim" đã cho trong đề bài. Khi đó, theo giả thiết của bài ra, ta có:

$$\left(x^2+y^2-4\right)^3=x^2y^3. \tag{1}$$

Tiếp theo, ta có:

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow x^2+y^2-4=\sqrt[3]{x^2}\cdot y\\&\Leftrightarrow y^2-\sqrt[3]{x^2}\cdot y+x^2-4=0.\end{aligned}$$

Do đó, phương trình ẩn t dưới đây là phương trình có nghiệm thực:

$$t^2-\sqrt[3]{x^2}\cdot t+x^2-4=0.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\Delta&=\sqrt[3]{x^4}-4x^2+16\\&=-\sqrt[3]{x^4}\left(4\sqrt[3]{x^2}-1\right)+16\geq 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Nhận thấy, nếu $\sqrt[3]{x^2}\geq 2$ thì

$$-\sqrt[3]{x^4}\left(4\sqrt[3]{x^2}-1\right)\leq -2^2(4\cdot 2-1)=-28;$$

do đó, $\Delta\leq -28+16=-12$, mâu thuẫn với (2).

Vì vậy, $\sqrt[3]{x^2}<2$; suy ra, $x^2<8$. Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x^2\in\{0;1;4\}$.

– Với $x^2=0$, từ (1) ta được $y=\pm 2$.

– Với $x^2=1$, từ (1) ta được $y(y-1)=3$, là điều vô lý, vì $y(y-1)$ là một số chẵn (do $y\in\mathbb{Z}$).

– Với $x^2=4$, từ (1) ta được $y=0$.

Như vậy, nếu điểm nguyên $M(x,y)$ thuộc đường "trái tim" thì

$$(x,y)\in\{(0,-2);(0,2);(-2,0);(2,0)\}. \tag{3}$$

• Ngược lại, bằng cách kiểm tra trực tiếp, dễ thấy, tất cả các điểm nguyên $M(x,y)$, với (x,y) thỏa mãn (3), đều thuộc đường "trái tim".

• Vậy, có tất cả bốn điểm nguyên thuộc đường "trái tim" đã cho trong đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, chỉ có hai lời giải là lời giải đúng và hoàn chỉnh, tuy cách giải khá dài dòng. Các lời giải còn lại là lời giải không hoàn chỉnh, do có ít nhất một trong các khiếm khuyết sau:

– Thiếu phần trình bày cách giải một bất phương trình bậc ba không tầm thường;

– Thiếu phần chứng minh các điểm nguyên $M(x,y)$, với (x,y) thỏa mãn (3) trong lời giải trên, thuộc đường "trái tim".

Hà Thanh

P686. (Mức B) Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{bc}}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{\sqrt{ab}}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}}\geq 1.$$

Lời giải (*dựa theo tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).

Do $a,b,c>0$, nên theo bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân cho hai số thực dương, ta có:

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{bc}}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}}\\&=\frac{bc}{a\sqrt{bc}+\sqrt{(ac+bc)(ab+bc)}}\\&\geq\frac{bc}{a\cdot\frac{b+c}{2}+\frac{(ac+bc)+(ab+bc)}{2}}\\&=\frac{bc}{ab+bc+ca}.\end{aligned}$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$\frac{\sqrt{ca}}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}}\geq\frac{ca}{ab+bc+ca},$$
$$\frac{\sqrt{ab}}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}}\geq\frac{ab}{ab+bc+ca}.$$

Cộng ba bất đẳng thức nêu trên, vế theo vế, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Từ lời giải trên, dễ thấy, dấu đẳng thức, ở bất đẳng thức cần chứng minh của đề bài, xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

2. Tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Võ Quốc Bá Cẩn

P687. (Mức A) Tìm tất cả các cặp số thực $(p;q)$, sao cho phương trình $x^3-px+q=0$ có ba nghiệm thực phân biệt a,b,c thoả mãn:

$$a^2-b=b^2-c=c^2-a.$$

Lời giải (*của người chấm bài*).

• Giả sử (p,q) là cặp số thực thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Khi đó, do phương trình

$$x^3-px+q=0 \qquad (1)$$

có ba nghiệm thực a,b,c, nên theo định lý Vi–et cho phương trình bậc ba ta có:

$$\begin{aligned} a+b+c&=0, &(2)\\ ab+bc+ca&=-p, &(3)\\ abc&=-q. &(4)\end{aligned}$$

Vì a, b, c thỏa mãn

$$a^2-b=b^2-c=c^2-a,$$

nên

$$\begin{aligned}(a-b)(a+b)&=b-c,\\ (b-c)(b+c)&=c-a,\\ (c-a)(c+a)&=a-b.\end{aligned}$$

Từ ba đẳng thức vừa nêu trên, với lưu ý

$$(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$$

(do $a\neq b\neq c\neq a$), suy ra

$$(a+b)(b+c)(c+a)=1. \qquad (5)$$

Từ (5), (2) và (4), ta được $q=1$. (6)

Đặt

$$d=a^2-b=b^2-c=c^2-a, \qquad (7)$$

ta có:

$$\begin{aligned}3d&=a^2+b^2+c^2 \quad (\text{do}(2))\\ &=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\ &=2p \quad (\text{do } (2) \text{ và } (3)).\end{aligned}$$

Suy ra, $d=\dfrac{2p}{3}$. Vì thế, từ (7) ta có:

$$a^2=b+\frac{2p}{3}, b^2=c+\frac{2p}{3}, c^2=a+\frac{2p}{3}.$$

Tiếp theo, vì a là nghiệm của phương trình (1), nên

$$a^3-pa+q=0.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}0&=a\left(a^2-p\right)+q=a\left(b+\frac{2p}{3}-p\right)+q\\ &=a\left(b-\frac{p}{3}\right)+q.\end{aligned}$$

Bằng các lập luận hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$b\left(c-\frac{p}{3}\right)+q=0, c\left(a-\frac{p}{3}\right)+q=0.$$

Vì thế

$$\begin{aligned}0&=(ab+bc+ca)-\frac{p}{3}(a+b+c)+3q\\ &=-p+3q \quad (\text{do } (2) \text{ và } (3)).\end{aligned}$$

Suy ra, $p=3q=3$ (do (6)).

Như vậy, nếu (p,q) là cặp số thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $p=3$ và $q=1$.

• Ngược lại, với $(p,q)=(3,1)$, dễ thấy, phương trình x^3-3x+1 có ba nghiệm thực phân biệt

$$a=2\cos\frac{2\pi}{9}, b=2\cos\frac{4\pi}{9}, c=2\cos\frac{8\pi}{9}.$$

Hơn nữa, ta có:

$$\begin{aligned}a^2-b&=4\cos^2\frac{2\pi}{9}-2\cos\frac{4\pi}{9}=2,\\ b^2-c&=4\cos^2\frac{4\pi}{9}-2\cos\frac{8\pi}{9}=2,\\ c^2-a&=4\cos^2\frac{8\pi}{9}-2\cos\frac{2\pi}{9}\\ &=2\cos\frac{16\pi}{9}+2-2\cos\frac{2\pi}{9}\\ &=2\cos\frac{2\pi}{9}+2-2\cos\frac{2\pi}{9}=2.\end{aligned}$$

Vì vậy, $a^2-b=b^2-c=c^2-a$.

• Vậy, $(p,q)=(3,1)$ là cặp số thực duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Trong số các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có ba lời giải sai, do người giải bài đã mắc lỗi kiến thức cơ bản, khi đồng nhất "hệ số" của hai đẳng thức số, hoặc mắc lỗi logic cơ bản, khi không thực hiện việc kiểm tra cặp số $(3,1)$ có thỏa mãn hay không yêu cầu của đề bài. Trong số các lời giải còn lại, có ba lời giải không hoàn chỉnh, do người giải bài *chỉ* chứng minh cặp số $(3,1)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài bằng hai từ "dễ thấy".

Lưu Thị Thanh Hà

P688. (Mức A) Chứng minh rằng, không tồn tại dãy vô hạn các số nguyên tố đôi một phân biệt, mà hai số hạng liên tiếp bất kỳ trong dãy sai khác nhau không quá 2023.

Lời giải (*của người chấm bài*).

Ta sẽ chứng minh khẳng định của bài toán bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử ngược lại, tồn tại dãy vô hạn các số nguyên tố đôi một phân biệt $(p_n)_{n\geq 0}$, thỏa mãn

$$|p_n - p_{n+1}| \leq 2023, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Xét số nguyên dương k tùy ý, thỏa mãn $2023!k > p_0$. (2)

Xét tập hợp S gồm tất cả các số hạng của dãy $(p_n)_{n\geq 0}$, mà mỗi số hạng đều không vượt quá $(2023!k+1)$.

Rõ ràng, S là tập hữu hạn và khác rỗng (do (2)). Vì thế, tồn tại chỉ số i, sao cho $p_i \leq 2023!k+1$, và $p_{i+1} > 2023!k+1$. (3)

Vì p_{i+1} là số nguyên tố, và với mọi $q = \overline{2,2024}$, $(2023!k+q)$ là hợp số (do với mọi $q = \overline{2,2024}$, $2023!k \,\vdots\, q$), nên từ (3) suy ra $p_{i+1} \geq 2023!k+2025$. Do đó

$$\begin{aligned} |p_i - p_{i+1}| &= p_{i+1} - p_i \\ &\geq (2023!k+2025)-(2023!k+1) \\ &= 2024, \end{aligned}$$

mâu thuẫn với (1).

Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ giả sử phản chứng là sai. Vì thế, ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

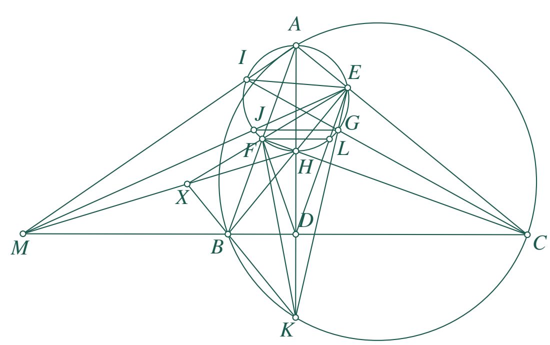
Bình luận và Nhận xét

Tạp chí đã nhận được bốn lời giải từ bạn đọc. Ba trong bốn lời giải đó, rất tiếc, là lời giải sai (do người giải bài mặc nhiên cho rằng, nếu tồn tại một dãy vô hạn các số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu đề bài thì dãy đó phải là dãy tăng); lời giải còn lại là một lời giải không hoàn chỉnh, do người giải bài đã sử dụng các kết quả không dễ thấy, nhưng không chứng minh các kết quả đó.

Lưu Thị Thanh Hà

P689. (Mức A) Cho tam giác ABC không vuông, nội tiếp (O) và có hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng AH cắt (O) tại điểm thứ hai K (khác A). Đường thẳng KE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm thứ hai G (khác E); đường thẳng CG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm thứ hai I (khác G). Các đường thẳng AI và BC cắt nhau tại M. Chứng minh rằng các đường thẳng BK, EF, MH đồng quy hoặc đôi một song song.

Lời giải (*của người chấm bài*).



Hình 1.

Từ giả thiết về các điểm E, F, H suy ra, H thuộc đường tròn (AEF).

Gọi D là giao điểm của các đường thẳng AH và BC; gọi L, J tương ứng là giao điểm thứ hai của DE, ME và đường tròn (AEF).

Do bốn điểm A, E, L, F cùng thuộc một đường tròn, và do bốn điểm A, B, D, E cũng cùng thuộc một đường tròn (vì $\angle AEB = \angle ADB = 90^{\circ}$), nên

$$\begin{aligned}(LF,BC) &= (LF,DE)+(DE,DB)\\ &= (LF,DE)+(AB,AE)\\ &= 0\,(\bmod \pi).\end{aligned}$$

Suy ra, $LF \parallel BC$. (1)

Do bốn điểm A, E, I, H cùng thuộc một đường tròn, và do bốn điểm D, C, E, H cũng cùng thuộc một đường tròn (vì $\angle HEC = \angle HDC = 90^{\circ}$), nên

$$\begin{aligned}(IM,IE) &= (IA,IE) = (HA,HE)\\ &= (HD,HE) = (CD,CE)\\ &= (CM,CE)\,(\bmod \pi).\end{aligned}$$

Suy ra, bốn điểm M, C, E, I cùng thuộc một đường tròn. Vì thế

$$\begin{aligned}(JG,BC) &= (JG,JE)+(JE,BC)\\ &= (IG,IE)+(ME,MC)\\ &= (IC,IE)+(ME,MC)\\ &= 0\,(\bmod \pi).\end{aligned}$$

Do đó, $JG \parallel BC$. (2)

Từ (1) và (2), với lưu ý DA là phân giác của góc EDF, suy ra, L và F đối xứng với nhau qua DA, G và J đối xứng với nhau qua DA. (3)

Xảy ra hai trường hợp sau:

• *Trường hợp 1: Hai đường thẳng EF và BK cắt nhau.* (Xem Hình 1).

Gọi X là giao điểm của EF và KB, ta có:

$$\begin{aligned}K(XE,HM) &= K(BE,DM) = E(BK,DM)\\ &\quad \text{(do } M, B, D \text{ thẳng hàng)}\\ &= E(HG,LJ) = (HG,LJ)\\ &= (HJ,FG) \quad \text{(do (3))}\\ &= E(HJ,FG) = E(HM,FK)\\ &= E(XK,HM).\end{aligned}$$

Do đó, ba điểm H, X, M thẳng hàng. Vì thế, ba đường thẳng BK, EF, MH đồng quy.

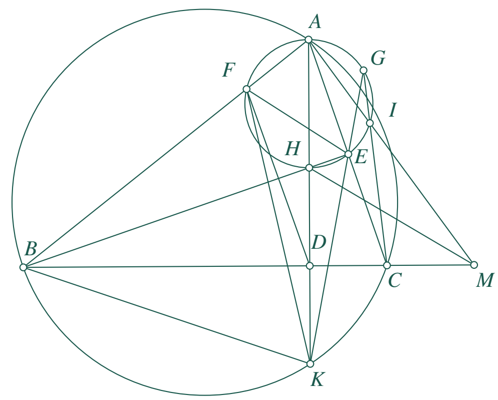
• *Trường hợp 2: $EF \parallel BK$.* (Xem Hình 2).

Ta nhắc lại (không chứng minh) kết quả quen biết sau:

Bổ đề. *Cho XY và ZT là hai tia song song. Khi đó, nếu U, V là hai điểm phân biệt, thỏa mãn*

$$X(ZY,UV) = Z(XT,UV),$$

thì $UV \parallel XY \parallel ZT$.



Hình 2.

Tiếp theo, bằng cách thực hiện các biến đổi tỷ số kép tương tự như ở trường hợp 1, ta được:

$$K(BE,HM) = E(FK,HM).$$

Từ đó, do $KB \parallel EF$ nên theo Bổ đề ta có $HM \parallel KB \parallel EF$.

Kết quả xét hai trường hợp nêu trên cho ta điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Ở lời giải trên, ta hoàn toàn không sử dụng giả thiết "K là giao điểm của AH và đường tròn (O)". Điều này cho thấy, kết luận của bài toán vẫn đúng, khi K là một điểm tùy ý, không trùng A, H, của đường thẳng AH.

2. Tạp chí đã nhận được hai lời giải từ bạn đọc. Rất tiếc, cả hai lời giải đó đều không là lời giải hoàn chỉnh, do người giải bài hoặc đã mắc lỗi "chính tả", hoặc đã mắc lỗi chuyên môn (không xét độ dài đại số khi sử dụng định lý Menelaus đảo).

Trần Quang Hùng