- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P721–P730: trước ngày 15/8/2023.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P721. (Mức B) Trên mỗi cạnh của hình vuông, bạn An viết một số nguyên dương. Sau đó, tại mỗi đỉnh của hình vuông đó, bạn An viết số là tích của hai số được ghi trên hai cạnh đi qua đỉnh đó. Biết rằng tổng các số ở các đỉnh của hình vuông là 1333. Hỏi, tổng các số được ghi trên các cạnh của hình vuông đó có thể là bao nhiêu?

Tường Thanh, Nghệ An

P722. (Mức B) Cho a, b, c là các số thực khác 0 thoả mãn

$$\begin{cases} a+b+c = \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \\ a^3+b^3+c^3 = \dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

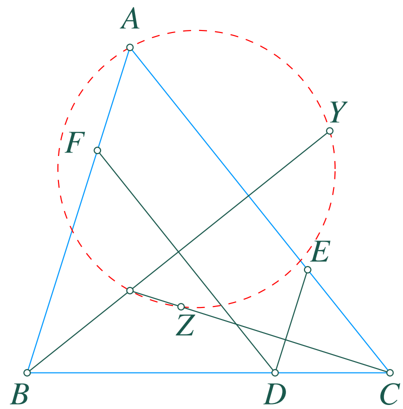
$$a^{2023}+b^{2023}+c^{2023} = \frac{1}{a^{2023}}+\frac{1}{b^{2023}}+\frac{1}{c^{2023}}$$

Duy Minh, Hà Nội

P723. (Mức B) Cho số nguyên dương k và A là số tự nhiên gồm k chữ số 9. Gọi m, n, p tương ứng là tổng các chữ số của A, A^2, A^3. Chứng minh rằng $p = 2m = 2n$.

Nguyễn Hùng Cường, Bình Định

P724. (Mức B) Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho $AEDF$ là hình bình hành. Gọi Y là điểm đối xứng với B qua DF; Z là điểm đối xứng với C qua DE. Chứng minh rằng, đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ đi qua trực tâm của tam giác ABC.



Nguyễn Văn Linh, Hà Nội

P725. (Mức B) Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ngô Văn Thái, Thái Bình

P726. (Mức B) Cho bảng ô vuông kích thước 2023×2023, mà trên mỗi ô đã được đặt ít nhất 1 viên bi. Cho phép thay đổi số bi trên bảng theo qui tắc: thêm bi vào mỗi ô của một cột nào đó sao cho số bi của mỗi ô ở cột đó tăng gấp đôi, hoặc bớt 1 viên bi ở mỗi ô của một hàng nào đó mà các ô trên hàng đó đều đang còn bi. Chứng minh rằng, ta có thể thực hiện một số lần thay đổi số bi như trên để trên bảng không còn viên bi nào.

Phạm Nhật Nguyệt, Hải Phòng (st)

P727. (Mức A) Cho số nguyên $k\geq 3$. Tìm giá trị bé nhất của biểu thức

$$P=x^k\left(y^{k-1}+z^{k-1}\right)+y^k\left(z^{k-1}+x^{k-1}\right)+z^k\left(x^{k-1}+y^{k-1}\right).$$

Nguyễn Hà Trang, Nghệ An

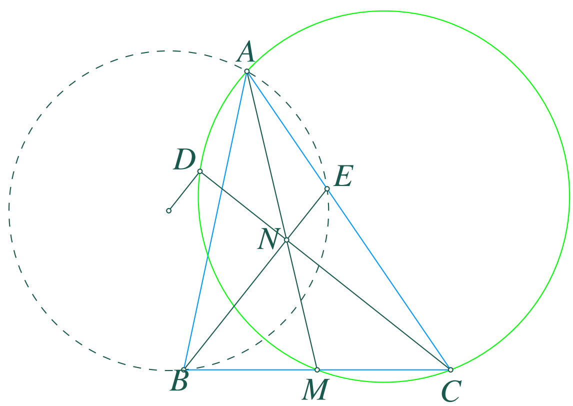
P728. (Mức A) Tìm tất cả các cặp số hữu tỷ $(a;b)$ sao cho: tồn tại duy nhất một hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x+f(y))=a.f(x)+f(by)-y$$

với mọi $x,y\in\mathbb{Q}$.

Nguyễn Văn Mến, Kon Tum

P729. (Mức A) Cho tam giác ABC nhọn, có M là trung điểm BC. Trên cạnh AC, lấy một điểm E tuỳ ý, khác với A và C. Gọi N là giao điểm của các đường thẳng BE và AM. Đường thẳng CN cắt đường tròn (ACM) tại điểm thứ hai D. Chứng minh rằng, đường thẳng đi qua D, vuông góc với CD, cũng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE.



Hoàng Việt Vương, Đà Nẵng

P730. (Mức A) Với mỗi số nguyên $m>1$, ký hiệu $f(m),g(m)$ tương ứng là tổng tất cả các ước nguyên tố của m và số các ước nguyên tố của m. Cho n là một số nguyên lẻ, lớn hơn 1 và không chia hết cho 3. Chứng minh rằng

$$f(2^n+1)\geq 2f(n)+g(n)+3.$$

Nguyễn Tuấn Ngọc, Tiền Giang