ĐỪNG LO LẮNG NẾU BẠN THẤY TOÁN KHÓ[1]

(Người dịch: Phạm Triều Dương)

> *Đừng lo lắng về những khó khăn của các bạn trong toán học. Tôi có thể đảm bảo với các bạn rằng tôi còn chật vật với toán hơn các bạn rất nhiều.*
>
> Albert Einstein

Chúng ta sẽ cùng nghe ý kiến của một nhà toán học và của hai nhà vật lý bàn luận về câu nói này của Albert Einstein.

Minh họa Einstein bởi Laurent Taudin theo phong cách của Albert Uderzo.

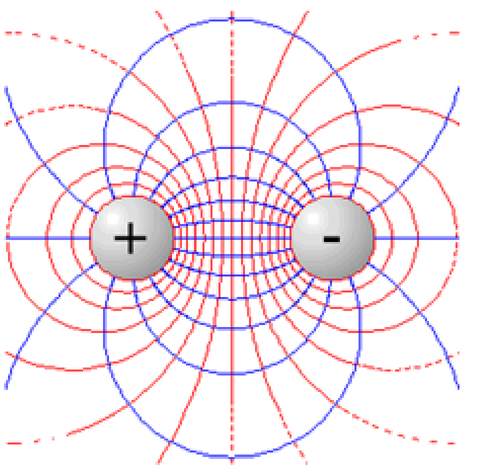
Nhà toán học: Không thể biết chính xác ý của Einstein qua câu nói này nếu không hỏi ông ấy trực tiếp. Người ta thường cho rằng Einstein không hiểu sâu sắc về toán hoặc khi còn trẻ ông ấy học toán khá kém. Tuy nhiên, thật là lầm lẫn khi nói rằng Einstein kém về môn toán. Một số bài báo của ông khá phức tạp về mặt toán học, liên quan đến các môn học cao cấp như phương trình vi phân ngẫu nhiên và giải tích tensor. Hơn nữa, Einstein học toán rất xuất sắc khi còn trẻ.

Có lẽ ý của Einstein khi tuyên bố gặp khó khăn trong môn toán là ông cảm thấy như thể phải vật lộn để học một số kiến thức toán rất cao cấp cần thiết cho việc phát biểu các lý thuyết của mình, hoặc rằng (so với các nhà toán học hoặc nhà vật lý toán học) kỹ năng toán học của ông không hoàn toàn được coi là mẫu mực. Tuy nhiên, chắc chắn Einstein có năng khiếu toán học bẩm sinh vượt hơn rất nhiều so với những người bình thường quanh bạn. Vì vậy, ta có thể luận ra được rằng câu trích dẫn ban đầu thực sự hướng đến các sinh viên trẻ tuổi, vì vậy nó chẳng qua có thể chỉ phản ánh một nỗ lực nhằm khuyến khích các sinh viên trẻ luôn kiên trì bất chấp những khó khăn mà họ cảm thấy được.

Nhà vật lý: Đây là phỏng đoán của tôi. Einstein đã chứng kiến sự kết thúc của những gì có thể được coi là “vật lý trực quan” của thế kỷ 19 và trước đó. Điều này phần lớn là lỗi của chính ông. Vào năm 1905 (“năm kỳ diệu” của Einstein), ông đã giới thiệu cho thế giới về cả *cơ học lượng tử* và *thuyết tương đối hẹp*. Cho đến thời điểm đó (hầu hết) vật lý hiện đại là thứ có thể dễ dàng hình dung

[1] *Theo https://www.askamathematician.com/2009/12/q-do-you-exactly-know-what-einstein-meant-by-do-not-worry-about-your-difficulties-in-mathematics-i-can-assure-you-mine-are-still-greater/*

và cảm nhận bằng trực giác. Bạn có thể vẽ các quỹ đạo của các vật thể di chuyển, điện trường và từ trường có thể được mô hình hóa bằng các đường, bạn có thể hình dung dòng nhiệt chảy như chất lỏng, v.v.



Các đường điện trường (màu xanh) có thể dễ dàng được thể hiện bằng hình vẽ trực quan.

Hơn nữa, thứ toán học được sử dụng trong đó khá đơn giản. Như kiểu toán đơn giản ta học ở trường trung học. Với sự ra đời của thuyết tương đối và cơ học lượng tử, một thời đại của khoa học đã đến, ở đó những kết luận đạt được rơi tuột hoàn toàn ra khỏi sự kiểm soát của toán học truyền thống. Ngày nay, trực giác không chỉ trở thành hoàn toàn vô dụng, mà nó sẽ thường xuyên chủ động dẫn dắt bạn đi sai đường nhiều hơn là đi đúng hướng.

Một số điều đầu tiên chúng ta học được về thuyết tương đối và cơ học lượng tử là: không có khái niệm "hiện tại" đối với hai điểm khác nhau, các hạt thực sự là các sóng, những sóng đó lại thực sự là các hạt, đi nhanh làm cho thời gian chậm lại, đi nhanh làm cho độ dài ngắn đi, năng lượng và vật chất chẳng qua là một, không gian và thời gian gần như giống nhau, đôi khi một số thứ sẽ đột nhiên xuất hiện ở phía bên kia của các rào cản mà chúng không thể vượt qua, v.v.

Không có thứ gì trong số các khái niệm này có thể được dự đoán bằng trực giác, và nhiều thứ trong số đó là kết quả của một số kiến thức và phép toán khá phức tạp. Một nhánh của vật lý được nghiên cứu hiện nay (Mô hình chuẩn, Lý thuyết dây, và những thứ khác) sử dụng thứ toán học khó đến mức bạn phải mất nhiều năm bồi dưỡng về toán trước khi có thể bắt đầu nắm bắt những gì đang xảy ra. Einstein đã có nhiều năm được đào tạo về toán, nhưng có lẽ sẽ không thể tưởng tượng được sự đa dạng rộng lớn của các loại toán học khác nhau cần được vận dụng vì lý thuyết của ông.

Chính bước nhảy vọt cuối cùng này về độ phức tạp trong toán đã quật ngã Einstein. Cậu bé Einstein yêu quý của chúng ta thực sự thông minh, thực sự giỏi toán trong trường phổ thông và là một người biết ăn mặc thời trang tinh tế. Tuy nhiên, ngay cả những người mà bạn cho là thông minh một cách không thể tưởng tượng được (tôi đang muốn nói về gốc họ Do Thái 'Stein ở đây) hầu như sẽ luôn luôn bị che khuất bởi một người thông minh hơn và với sự chuẩn bị tốt hơn, chuyên sâu hơn. Mặc dù Einstein có một nền tảng vật lý vững chắc, nhưng phải cần tới các nhà toán học (với kiến thức toán và gọng kính dày cộp của họ) mới có thể đưa môn khoa học này tiến lên phía trước.

Ý kiến của một nhà vật lý khác: Tôi không được biết tới trích dẫn này của Einstein. Tôi chỉ có một phỏng đoán sơ bộ như sau. Trong khoảng thời gian từ khi công bố thuyết tương đối hẹp đến khi công bố thuyết tương đối rộng, ông đã dành thời gian tìm hiểu hình học vi phân đủ để phát triển ý tưởng của mình. Đối với Einstein việc này hiển nhiên không hề dễ dàng và cần rất nhiều tư vấn với những người khác ở Châu Âu. Chẳng hạn, Einstein và Levi–Civita thường xuyên liên lạc với nhau. Vì vậy, ông ấy có thể đã trả lời nhận xét của ai đó giống như khi chúng ta nghe thấy rằng bạn bè của ta đang có một thời gian khó khăn với môn toán.

Bản thân Einstein và những người đương thời nói gì?

Câu trích dẫn sau đây của Einstein có thể giúp chúng ta có thêm một góc nhìn:

"Từ khi các nhà toán học đổ bộ vào thuyết tương đối, tôi không còn hiểu được nó nữa."

(A. Sommerfelt "*To Albert Einstein's Seventieth Birthday*")

Có khả năng Einstein đã nói điều này vào một lúc nào đó khoảng giữa năm 1907 (khi Minkowski giảng bài về cách phát biểu lại thuyết tương đối hẹp) và năm 1912 (khi Einstein nhận ra rằng ông cần một cách tiếp cận hình học để xây dựng thuyết tương đối rộng).

Các nhận xét khác cũng được lưu lại trong khoảng thời gian này bao gồm nhận xét của Einstein trong một bài giảng, khi ông cần rút ra một kết quả cụ thể:

"Điều này đã được thực hiện một cách tao nhã bởi Minkowski; nhưng viên phấn thì rẻ hơn chất xám, và chúng ta sẽ làm điều đó một cách tuỳ biến mà không gò bó."

(thuật lại bởi Polya trong cuốn *Littlewood's Miscellany*)

Sau đó, Einstein nhận ra rằng thuyết tương đối rộng có thể không chỉ yêu cầu những khái niệm này mà còn cần những mở rộng cao cấp hơn của những khái niệm đó:

"Vấn đề này vẫn không giải quyết được đối với tôi cho đến năm 1912, khi tôi đột nhiên nhận ra rằng lý thuyết mặt của Gauss nắm giữ chìa khóa để giải mã bí ẩn này. Tôi nhận ra rằng tọa độ bề mặt của Gauss có một ý nghĩa sâu sắc. Tuy nhiên, lúc đó tôi không biết rằng Riemann đã nghiên cứu cơ sở của hình học một cách sâu sắc hơn nữa. Tôi chợt nhớ rằng lý thuyết của Gauss có trong khóa học hình học do Geiser đưa ra khi tôi còn là sinh viên...

Tôi nhận ra rằng nền tảng của hình học có ý nghĩa vật lý. Người bạn thân của tôi, nhà toán học Grossmann đã ở đó khi tôi từ Praha trở về Zurich. Từ ông ấy, lần đầu tiên tôi biết về Ricci và sau đó là Riemann. Vì vậy, tôi đã hỏi bạn tôi rằng liệu vấn đề của tôi có thể được giải quyết bằng lý thuyết Riemann hay không, cụ thể là liệu các bất biến của yếu tố đường có thể xác định hoàn toàn các đại lượng mà tôi đang tìm kiếm hay không."

(Einstein, *Bài giảng Kyoto*, 1922)

Sau khi đã tạo ra được những sự liên hệ này vào năm 1912, Einstein không còn lựa chọn nào khác ngoài việc học hình học cao cấp mà ông còn thiếu – chủ yếu là từ Grossmann. Khi đã thực hiện được như vậy, ông có thể sử dụng hình học cao cấp để phát biểu thuyết tương đối rộng.

Sau này, David Hilbert có tâm sự với người viết tiểu sử của mình:

"Mọi cậu học trò trên những con phố của thủ đô toán học này [Göttingen] đều hiểu về hình học bốn chiều tốt hơn Einstein. Tuy nhiên, bất chấp điều này, Einstein đã làm được việc, chứ không phải các nhà toán học."

(Constance Reid, *Hilbert*, Springer, 1996)

Đây quả là một tuyên bố hào phóng của Hilbert, vì ông đã suýt đánh bại được Einstein trong cuộc chạy đua cuối cùng đến các phương trình trường của thuyết tương đối rộng. Nhưng ông nhận ra rằng tài năng vật lý của Einstein đã cho phép ông ấy làm được nhiều thứ hơn việc bù đắp những sự thiếu hụt của mình về các tinh tế toán học.

Tài liệu tham khảo

[1] Constance Reid, *Hilbert*, Springer, 1996.

[2] A. Sommerfelt "*To Albert Einstein's Seventieth Birthday*" in Paul A. Schilpp (ed.) *Albert Einstein*, Philosopher–Scientist, Evanston, 1949.

[3] Littlewood, J. E. (1986), Bollobás, Béla (ed.), *Littlewood's miscellany*, Cambridge: Cambridge University Press.

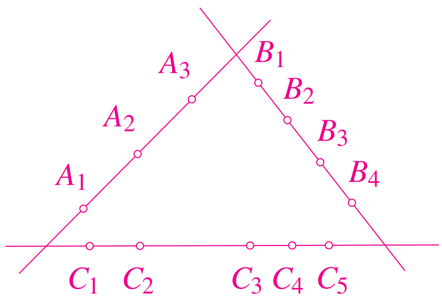
MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TỔ HỢP ĐẾM TRONG CÁC KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THCS (Phần II)

NGÔ VĂN MINH

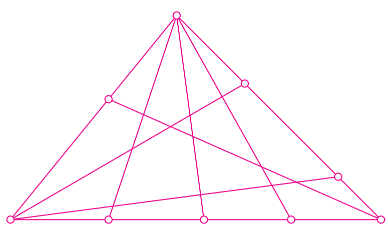
Mở rộng bài toán số 5, các bạn thử sức của mình xem sao nhé.

Bài toán 6.1 (Apmops)

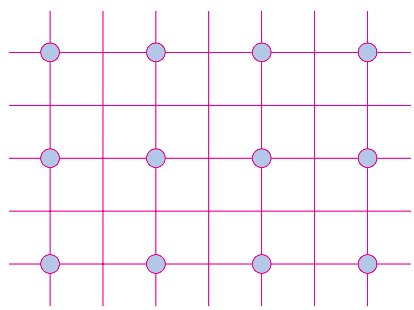
Cho các điểm $A1$, $A2$, $A3$, $B1$, $B2$, $B3$, $B4$, $C1$, $C2$, $C3$, $C4$ và $C5$ nằm trên 3 đường thẳng như hình vẽ. Có bao nhiêu tam giác được tạo bởi 3 trong các đỉnh đã cho?



Bài toán 6.2 Có bao nhiêu tam giác trong hình vẽ?



Bài toán 6.3 Có bao nhiêu tam giác được tạo bởi 3 trong 12 điểm đã cho trên lưới ô vuông như hình vẽ?



Bài toán số 7: (Apmops)

Có bao nhiêu cách để tô 6 mặt của một hình lập phương bằng 6 màu, mỗi mặt được tô bằng 1 màu sao cho không có hai mặt nào có cùng màu? (Hai cách tô màu được coi là như nhau nếu chúng nhìn giống hệt nhau sau một phép xoay hình).

Phân tích bài toán: Hướng đi thứ nhất, ta hình dung nếu cố định hình lập phương lại và mỗi cách nhìn khác nhau ở mỗi phía được coi là khác nhau, như thế thì số cách tô sẽ như tô theo hàng ngang (6 người ngồi trên 6 cái ghế trên 1 hàng) và sẽ là $6! = 720$ cách. Do hình lập phương này xoay được nên ta xem mỗi một kiểu tô có bao nhiêu cách xoay nó xung quanh chính nó. Do có 6 màu ta có 6 cách xoay để có đáy khác màu. Mỗi cách đặt đáy với 1 màu ta có 4 cách xoay xung quanh chính nó (do hình lập phương có 4 cạnh bên), từ đó ta có hướng giải quyết bài toán.

Hướng đi thứ 2, do hình lập phương xoay được nên ta có thể cố định màu ở những vị trí ta có thể xuay nó về và ta sẽ có hướng giải quyết bài toán như lời giải 2.

Hướng đi thứ 3 gần giống với hướng thứ 2, ta có thể hình dung mình có thể tô màu ở đáy bằng màu tùy thích do hình lập phương xoay được, mặt đối diện trên đỉnh sẽ còn 5 cách tô, 4 mặt xung quanh ta sẽ hình dung nó như 4 người ngồi xung quanh một cái bàn tròn nên ta có thể áp dụng bài toán hoán vị vòng tròn để giải quyết.

Lời giải 1: Giả sử hình lập phương cố định, khi đó ta có $6! = 720$ cách tô.

Mỗi cách tô ta có 6 cách đặt các mặt khác màu nhau xuống đáy, khi đặt rồi ta có 4 cách xoay xung quanh nó, vậy ứng với mỗi cách tô màu ta có $6 \times 4 = 24$ cách xoay nó xung quanh chính nó. Vậy số cách tô màu là: $720 : 24 = 30$ (cách).

Lời giải 2: Đầu tiên ta tô màu 1 mặt (màu ta thích), rồi đặt nó xuống đáy, khi đó ở mặt đối diện trên đỉnh có 5 cách tô.

Tiếp theo ta tô màu 1 mặt xung quanh (màu ta thích trong 4 màu còn lại), rồi xoay nó sang bên trái, khi đó mặt bên phải có 3 cách tô, còn 2 mặt còn lại (trước và sau) có $2!$ cách tô, vậy số cách tô màu là: $1 \times 5 \times 1 \times 3 \times 2! = 30$ (cách)

Lời giải 3: Tương tự như lời giải 2, đầu tiên ta tô màu 1 mặt (màu ta thích), rồi đặt nó xuống đáy, khi đó ở mặt đối diện trên đỉnh có 5 cách tô.

Còn 4 mặt xung quanh, do xoay được nên theo bài toán hoán vị vòng tròn ta có $4!/4 = 6$ cách tô.

Vậy số cách tô màu hình lập phương là: $5 \times 6 = 30$ (cách).

Bài toán số 8: (IMSO)

Một hình lập phương được tô các mặt bằng 6 màu, mỗi mặt 1 màu khác nhau và được đánh số từ 1 đến 6 sao cho tổng hai mặt đối diện bằng 7. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu và đánh số hình lập phương này? (Hai cách tô màu, đánh số được coi là như nhau nếu chúng nhìn giống hệt nhau sau một phép xoay hình).

Phân tích bài toán: Bài toán này là tương đối khó khi các bạn lớp 5, 6 đi thi gặp phải, và đúng là trong năm thi đó đoàn học sinh Việt Nam chỉ có đúng 1 bạn làm được, tuy nhiên nếu chia bài toán làm hai bước, bước 1 tô màu, bước 2 điền số thì ta có thể giải quyết được bài toán một cách tương đối dễ dàng.

Lời giải: Bước 1: Tô màu hình lập phương, theo bài toán số 7, ta có 30 cách tô màu hình lập phương này.

Bước 2: Đánh số, ta đánh theo thứ tự:

Đánh số 1, có 6 cách. Đánh số 6 ở mặt đối diện số 1, có 1 cách.

Đánh số 2, có 4 cách (do còn 4 mặt chưa đánh số). Đánh số 5 ở mặt đối diện, có 1 cách.

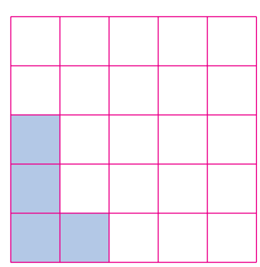
Đánh số 3, có 2 cách (do còn 2 mặt chưa đánh số). Đánh số 4 ở mặt đối diện, có 1 cách.

Vậy ta có $6 \times 1 \times 4 \times 1 \times 2 \times 1 = 48$ cách đánh số.

Theo quy tắc nhân ta có số cách tô màu và đánh số là: $30 \times 48 = 1440$ (cách).

Bài toán số 9: (IMAS)

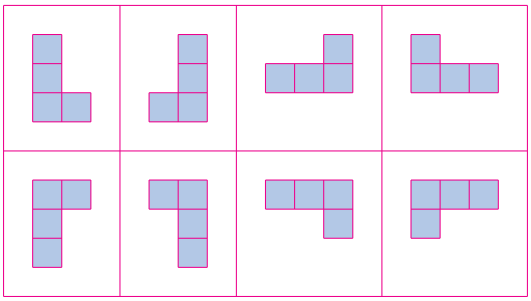
Một bàn cờ hình vuông 5×5 được xếp một hình chữ L chiếm 4 ô như hình vẽ. Ta có thể xuay hoặc lật hình chữ L này. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hình chữ L này vào bàn cờ hình vuông đã cho?



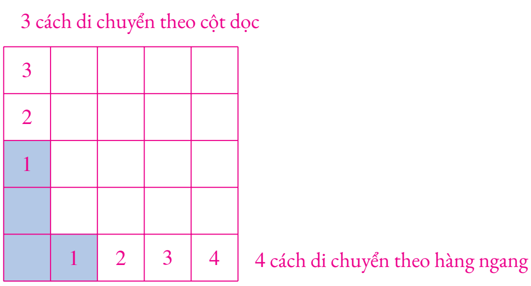
Phân tích bài toán: Ta nhận thấy hình chữ

L tô đen có thể xoay hoặc lật được, nên ta sẽ xem nó có thể có bao nhiêu cách biến hình (xoay hoặc lật). Ứng với mỗi phép biến hình bằng xoay, lật ta xem có bao nhiêu cách trượt nó theo hàng ngang và hàng dọc, từ đó ta có cách giải quyết bài toán.

Lời giải: Ta tính số cách xoay, lật hình chữ L tô đậm, như hình dưới ta có 8 cách.



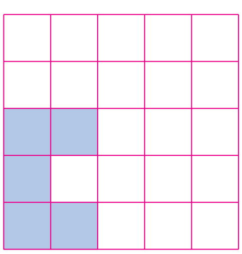
Ứng với mỗi cách biến hình này, ta xem có bao nhiêu cách dời hình theo hàng ngang và hàng dọc, và ta tính được số cách dời hình bằng trượt (tịnh tiến) theo hai chiều ngang, dọc là: $3 \times 4 = 12$.



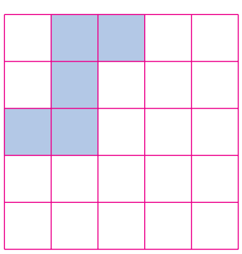
Theo quy tắc nhân, ta có số cách đặt chữ L vào ô vuông 5×5 là: $8 \times 12 = 96$ (cách)

Mở rộng bài toán số 9. Các bạn thử sức mình xem nhé.

Bài toán số 9.1: Đề bài giống như bài toán số 9, hình được xếp vào được thay đổi như sau:



a)

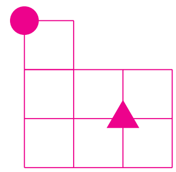


b)

Bài toán số 10: (IMSO).

Một hình tròn và một tam giác được xếp trên các điểm cắt của lưới ô vuông như hình vẽ sao cho tam giác và hình tròn không cùng nằm trên một hàng hay một cột.

Hỏi có bao nhiêu cách xếp tam giác và hình tròn vào lưới ô vuông như hình vẽ này. Trên hình vẽ là một ví dụ về cách xếp tam giác và hình tròn.



Phân tích bài toán: Bài toán này các bạn nhỏ lớp $4, 5$ trong câu lạc bộ toán UMC đã làm được theo nhiều cách khác nhau, các bạn quan sát sẽ thấy ngoài hai điểm ở hàng trên cùng thì bên dưới cứ mỗi hình chữ nhật sẽ có $2! \times 2! = 4$ cách đặt hình tròn và tam giác (do mỗi cặp đỉnh không kề nhau của 1 hình chữ nhật sẽ có $2!$ cách đặt hình tròn và tam giác). Sau đây là một số cách giải của các bạn.

Lời giải 1: (Lê Kỳ Nam, Vĩnh Giang)

Nếu đường tròn nằm trên hàng đầu tiên (có 2 vị trí), thì ở mỗi vị trí sẽ có $14 - 4 - 1 = 9$ cách chọn tam giác, tổng số cách chọn là: $9 \times 2 = 18$.

Nếu đường tròn đi vào phần còn lại của 2 cột đầu tiên, thì ở mỗi vị trí, số cách chọn tam giác là $14 - 3 - 3 - 1 = 7$, tổng số cách chọn là $6 \times 7 = 42$.

Nếu đường tròn đi ở 2 cột cuối cùng, thì ở mỗi vị trí, tam giác sẽ có $14 - 3 - 2 - 1 = 8$ lựa chọn, tổng số cách chọn là $6 \times 8 = 48$.

Tổng số cách xếp hình tròn và hình tam giác là: $18 + 42 + 48 = 108$.

Đáp số: 108

Lời giải 2: (Nguyễn Gia Tuấn)

Nếu hình tròn và hình tam giác không được đặt trên hình vuông trên cùng thì có $3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72$ cách chọn.

Nếu một trong các tam giác hoặc hình tròn được đặt trên hình vuông trên cùng thì có $2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$ cách chọn.

Tổng cộng có $72 + 36 = 108$ cách chọn.

Lời giải 3: (Nguyễn Trọng Cường).

Tổng số các cách có thể đặt hình tròn và tam giác vào 2 điểm bất kỳ của hình là: $14 \times 13 = 182$ cách

Nếu hình tròn và tam giác nằm trên cùng 1 cột, hoặc 1 hàng, thì 2 điểm sẽ tạo nên 1 đoạn thẳng. Ta đếm số đoạn thẳng của hình trên.

Số đoạn thẳng của hình là :

$$1 + (1+2+3) \times 3 + (1+2+3) \times 2 + (1+2) \times 2 = 37$$

Hình tròn và tam giác ở 2 đầu đoạn thẳng, đổi chỗ được cho nhau $\Rightarrow$ có $37 \times 2 = 74$ cách ko thỏa mãn

Số cách thỏa mãn đề bài là $182 - 74 = 108$ cách.

Lời giải 4: (Nguyễn Gia Tuấn). – Dùng phần bù:

Với lưới ô vuông 3×3 thì ta có $C(4,2) \times C(4,2) \times 4 = 144$ cách chọn. (Do mỗi hình chữ nhật có 4 cách đặt tam giác và hình tròn).

Trong lưới 3×3 đó, nếu đặt hình tròn hoặc tam giác vào 2 điểm trên cùng ở bên phải thì có $2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$ cách chọn.

Vậy ta có $144 - 36 = 108$ cách chọn để xếp hình tròn và hình tam giác.

Trả lời: 108 lựa chọn.

HAI BĂNG CƯỚP BỊ TÓM GỌN

GIA DƯƠNG

Sau vài tháng theo dõi sát sao, cuối cùng Cảnh sát thành phố cũng tóm gọn được toàn bộ hai băng cướp có tên là Báo đen và Mèo rừng. Giờ thì toàn bộ 10 tên trong băng Báo đen và 19 tên trong băng Mèo rừng đều đang ngồi run rẩy trên một chiếc ghế băng dài chờ đến lượt lăn tay để vào ngồi xà lim tạm giam, đợi ngày xét xử. Thám tử Xuân Phong được mời đến để chứng kiến thành công vang dội của bên Cảnh sát và tiến hành những thẩm vấn sơ bộ đầu tiên. Tuy nhiên do lũ cướp quá đông, nên Xuân Phong cũng chưa rõ tên nào là ở băng Báo đen, tên nào ở băng Mèo rừng. Ngài Cảnh sát trưởng mách cho Xuân Phong:

– Anh để ý nhé, cứ mỗi tên thuộc băng Mèo rừng lại có một tên thuộc băng Báo đen to béo hơn ngồi sát cạnh.

– À, thế thì chắc chắn cứ mỗi tên thuộc băng Báo đen lại phải có một tên thuộc băng Mèo rừng gầy còm hơn ngồi sát cạnh rồi! – Xuân Phong thốt lên đầy khoái chí.

– Anh có chắc không? – Ngài Cảnh sát trưởng tỏ vẻ nghi ngờ khả năng suy luận của Xuân Phong.

– Chắc chắn, tôi đảm bảo đấy! – Xuân Phong vỗ vai ngài Cảnh sát trưởng một cách đầy tự tin.

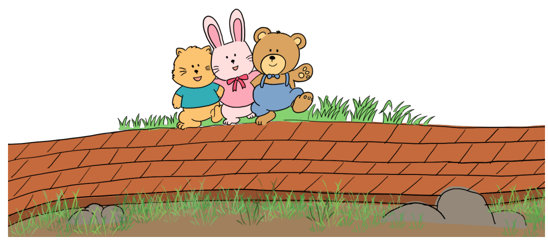
Vậy khẳng định của Xuân Phong có đúng không nhỉ? Em có thể giải thích khẳng định này của vị thám tử tài ba được hay không?

CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

1. Các bạn nam mang kẹo tới lớp để tặng cho các bạn nữ. Bạn Phúc nói rằng mình đã mang tới đúng một nửa tổng số kẹo. Bạn Kiên nói rằng mình đã mang tới đúng một phần ba tổng số kẹo và chỉ chia kẹo của mình cho Mai và Tuyết, hơn nữa Mai được nhiều hơn so với Tuyết là 3 chiếc kẹo. Em hãy chứng tỏ rằng có một bạn trong số Phúc và Kiên đã nhầm lẫn.

2. Ba người thợ cùng đào một chiếc hố. Họ luân phiên lần lượt làm việc, mỗi người làm việc trong một thời gian nhất định. Nếu trong khi một người làm việc hai người còn lại cũng đồng thời đào hố thì hai người này sẽ đào được đúng một nửa hố. Hỏi nếu cả ba người cùng đồng thời đào thì họ sẽ làm nhanh hơn được bao nhiêu lần so với cách làm luân phiên ban đầu?

3. Ba bạn Gấu, Thỏ và Mèo cùng quyết định xây một con đường từ nhà tới bờ suối với chiều dài $160m$. Các bạn thoả thuận sẽ đầu tư cho dự án mở đường quan trọng này với công sức đều như nhau. Cuối cùng khi dự án hoàn thành, hoá ra bạn Thỏ đã xây được 60 mét đường, bạn Mèo xây được 100 mét đường, còn bạn Gấu mải ngủ đông nên không xây được mét nào. Tuy nhiên, Gấu mang tới đóng góp bằng tiền cho dự án là 16 triệu đồng từ số mật ong bán được của mình. Hỏi hai bạn Mèo và bạn Thỏ cần phải phân chia số tiền cho nhau như thế nào?



4. Bé Ly phải đi trồng hoa vào một hàng các chậu rất dài đặt thành hàng dọc ở công viên. Bé được giao nhiệm vụ là phải trồng hai loại hoa khác nhau vào hai chiếc chậu nếu giữa hai chậu này có đúng hai chiếc chậu, hoặc đúng ba chiếc chậu, hoặc đúng năm chiếc chậu khác. Hỏi bé Ly phải cần ít nhất bao nhiêu loại hoa để thực hiện được nhiệm vụ?

5. Trước một trận bóng đá giữa hai đội Xóm Đông và Xóm Bắc có 5 dự đoán kết quả được đưa ra:

a) Sẽ không có tỷ số hoà;

b) Đội Xóm Đông sẽ bị thủng lưới;

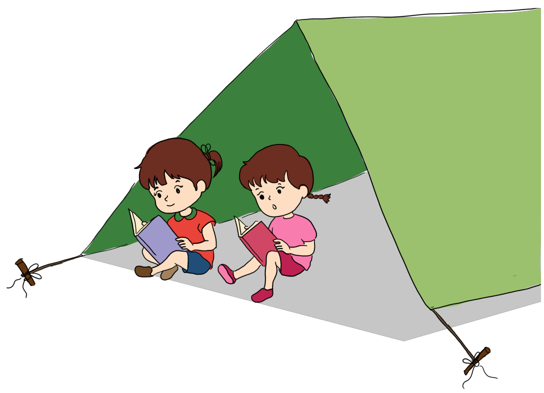
c) Đội Xóm Bắc sẽ thắng;

d) Đội Xóm Bắc sẽ không thua;

e) Trong trận bóng sẽ có đúng 3 bàn thắng được ghi.

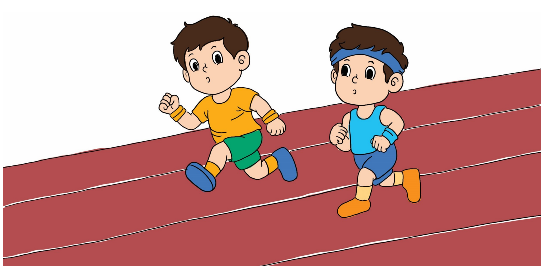
Sau khi trận bóng kết thúc, hoá ra chỉ có đúng 3 dự đoán là chính xác. Vậy trận đấu đã kết thúc với tỷ số như thế nào?

6. Tại trại hè có 20 em học sinh tham gia trò chơi Điệp viên tí hon diễn ra trong 2 tuần. Mỗi Điệp viên tí hon sẽ theo dõi và viết báo cáo tỉ mỉ về sở thích cá nhân của 10 em khác trong số 20 em này để nộp cho Sở chỉ huy. Em hãy chứng tỏ rằng có ít nhất 10 cặp Điệp viên tí hon đã theo dõi lẫn nhau và viết báo cáo về nhau.



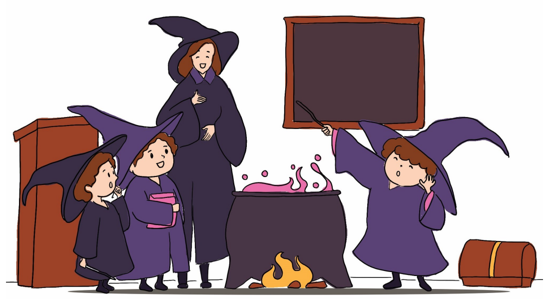
LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 4 năm 2023)

1. Pinocchio và Pierrot thi chạy với nhau. Pierrot chạy suốt cả quãng đường với cùng một tốc độ, còn Pinocchio chạy nhanh gấp đôi Pierrot trong nửa đầu quãng đường, và nửa sau lại chậm bằng nửa Pierrot. Hỏi ai đã thắng?



Lời giải. Trong nửa sau của cuộc đua, Pinocchio đã mất một khoảng thời gian đúng bằng thời gian Pierrot dành cho toàn bộ cuộc đua. Nhưng Pinocchio cũng đã mất một khoảng thời gian trong nửa đầu của cuộc đua. Vì vậy, Pierrot đã thắng.

2. "Còn quá sớm để các em nhìn thấy điều thần kỳ sau đây của thế giới pháp sư," cô giáo McGonagall nói với 33 học trò của mình ở ngôi trường Hogwarts đào tạo Phù thủy, và vung cây đũa thần ra lệnh: "Nào, các em hãy nhắm mắt lại!" Tất cả học trò nam và một phần ba học trò nữ đều nhắm mắt phải. Tất cả học trò nữ và một phần ba các học trò nam đều nhắm mắt trái. Hỏi có bao nhiêu học trò đã nhìn thấy những gì còn quá sớm để nhìn thấy?



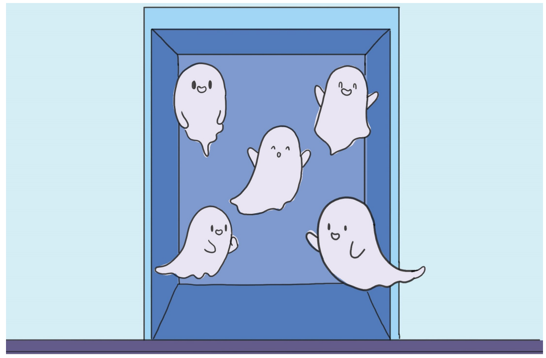
Lời giải. Có $2/3$ nữ sinh đã nhìn bằng mắt phải và $2/3$ nam sinh đã nhìn bằng mắt trái thấy điều còn quá sớm để nhìn thấy. Do đó, tổng cộng, $2/3$ tổng số học sinh đã không nhắm một mắt – vậy có 22 học sinh đã nhìn thấy điều này.

3. Bác Tư múc ra ba thìa sữa từ một ly sữa đầy và đổ chúng vào một ly đựng cà phê nguyên chất và khuấy đều. Sau đó bác múc ba thìa hỗn hợp thu được và đổ lại vào ly sữa. Hỏi bây giờ thứ gì nhiều hơn: cà phê trong ly đựng sữa hay sữa trong ly đựng cà phê?

Lời giải. Sau lần đổ thứ hai, lượng chất lỏng trong từng ly không thay đổi so với ban đầu nên lượng cà phê có trong ly sữa chính xác bằng lượng sữa đã được lấy ra từ đó. Vì vậy, cuối cùng, lượng cà phê trong sữa cũng nhiều như lượng sữa trong cà phê.

4. Ma xó Brownie là một nhân vật trong văn hóa dân gian Anh và một số quốc gia khác. Đó là một dạng Phúc thần (ma thiện), tiểu yêu nghịch ngợm, thường mô tả là bé tí hon, có da nâu, ăn mặc tuềnh toàng, sinh sống gần gũi với con người, và là thần hộ mệnh cho các gia đình. Các Brownies có một xã hội thu nhỏ riêng và thường tổ chức những cuộc họp bí mật tại một tảng đá nào đó để con người không để ý tới.

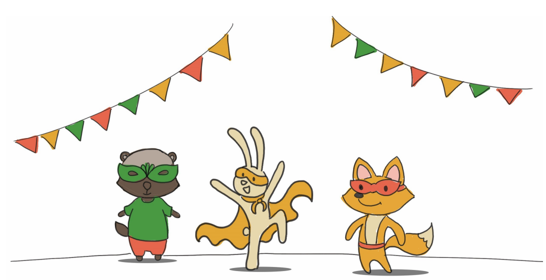
Trong một tòa nhà bảy tầng nọ cũng có rất nhiều ma xó Brownies sinh sống. Thang máy chạy giữa tầng một và tầng cuối, dừng lại ở mỗi tầng. Ở mỗi tầng, bắt đầu từ tầng đầu tiên, có một chú Brownie bước vào thang máy, nhưng không có chú nào bước ra ngoài. Thang máy cứ di chuyển liên tục như vậy cho đến khi chú Brownie thứ một nghìn bước vào thang máy thì thang máy dừng lại. Hỏi điều này đã xảy ra ở tầng nào?



Lời giải. Các em hãy thử tìm xem có bao nhiêu chú Brownie trong thang máy trong một chuyến đi từ tầng một đến tầng bảy và ngược lại, cho đến thời điểm thang máy quay trở lại tầng một. Ở tầng một và tầng bảy, có một chú Brownies bước vào, và ở tất cả các tầng khác, mỗi tầng đều có hai chú Brownie bước vào. Do đó, 12 chú Brownies vào thang máy trong một chuyến đi lên và xuống như vậy.

Ta có $1000 = 83 \times 12 + 4$. Vì vậy, sau 83 lần đi, 4 chú Brownies nữa vẫn sẽ có thể vào thang máy: ở tầng một, tầng hai, tầng ba và tầng bốn. Như vậy thang máy đã dừng ở tầng bốn.

5. Có 40 con thú sống trong rừng gồm cáo, sói, thỏ rừng và lửng. Hàng năm, các con thú tổ chức vũ hội hóa trang: mỗi con đeo một chiếc mặt nạ của một loài động vật khác và trong hai năm liên tiếp không con nào đeo cùng một chiếc mặt nạ của cùng một loài.



Hai năm trước, có 12 "cáo" và 28 "sói" tại vũ hội, một năm trước – có 15 "thỏ rừng", 10 “cáo” và 15 “lửng”, và năm nay – 15 “thỏ rừng” và 25 “cáo” . Hỏi loài thú nào có nhiều nhất trong rừng?

Lời giải. Các em hãy viết dữ kiện của bài toán dưới dạng bảng.

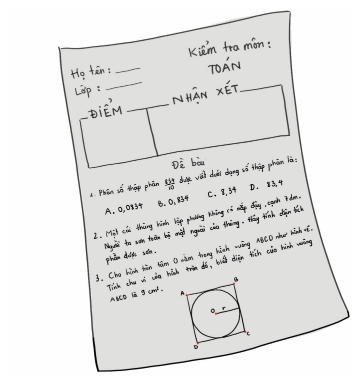
	Hai năm trước	Một năm trước	Năm nay
Sói	28		
Cáo	12	10	25
Thỏ rừng		15	15
Lửng		15	

Hãy nhìn vào những con “thỏ rừng”. Trong hai năm qua đã có 30 con vật đeo mặt nạ “thỏ rừng”. Tất cả đều là những con vật khác nhau, vì sẽ không con nào đeo mặt nạ “thỏ rừng” trong hai năm liên tiếp. Và tất nhiên đó cũng không phải là thỏ. Điều này có nghĩa là có ít nhất 30 con không phải thỏ rừng trong rừng, tức là không quá $40-30=10$ (con thỏ rừng). Lập luận tương tự về những con vật đeo mặt nạ “cáo” tại lễ hội trong hai năm qua cho thấy rằng trong rừng có không quá $40-10-25=5$ (con cáo). Hai năm trước, có 28 “con sói” tại lễ hội hóa trang, và tất cả những con này không phải là sói thật, do đó không có hơn $40-28=12$ (con sói). Vậy, sói, cáo và thỏ rừng cộng lại không quá $12+5+10=27$ (con). Điều này có nghĩa là có ít nhất $40-27=13$ (con lửng), và đây là loài động vật có số lượng nhiều nhất trong rừng.

Lưu ý rằng có thể chọn số lượng động vật của mỗi loài và phân phát mặt nạ sao cho đáp ứng tất cả các điều kiện của bài toán.

6. *a*) Có tám bạn học sinh giải một đề thi gồm 8 bài toán. Khi tổng kết lại, cô giáo thấy rằng với mỗi bài toán lại có đúng năm bạn học sinh giải được bài đó. Chứng minh rằng có hai học sinh sao cho với mỗi bài toán trong đề có ít nhất một trong hai em giải được.

b) Em hãy chỉ ra một ví dụ rằng, nếu với mỗi bài toán đều có đúng bốn bạn học sinh giải được, thì điều khẳng định ở câu *a*) không đúng.



Lời giải. a) Ta sẽ gọi một bộ ba gồm hai học sinh và một bài toán mà cả hai em đều không giải được là *được đánh dấu*. Vì mỗi bài toán không giải được bởi đúng ba học sinh nên mỗi bài toán tương ứng với ba bộ ba *được đánh dấu*. Vì vậy, có tổng cộng 24 bộ ba như vậy. Mặt khác, có $7\times 8:2=28$ cặp học sinh. Do đó, có một cặp học sinh không thuộc bất kỳ bộ ba nào *được đánh dấu*. Điều này có nghĩa là hai em trong cặp này đã giải được tất cả các bài trong đề.

b) Ta có thể đưa ra một ví dụ như bảng sau mà mỗi bài toán được giải bởi đúng 4 học sinh và không có cặp học sinh nào giải được mọi bài toán.

Học sinh	Bài toán							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	+	+	+	−	−	+	−	+
2	+	+	+	−	−	−	+	+
3	+	+	−	+	−	−	+	+
4	+	−	−	+	+	−	+	−
5	−	+	+	+	+	−	−	+
6	−	−	+	+	−	+	+	−
7	−	−	−	−	+	+	−	−
8	−	−	−	−	+	+	−	−

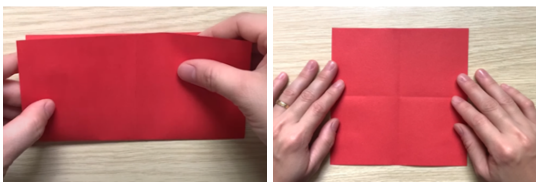
CÙNG CHƠI VỚI CÁC HÌNH ĐỐI XỨNG (Phần II)

NGUYỄN THỤY VIỆT ANH[1]

Gấp trái tim bằng giấy

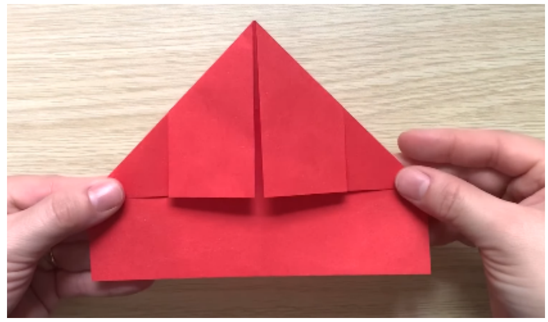
Các em chỉ cần chuẩn bị một tờ giấy màu hình vuông. Sau đó hãy làm theo các bước chỉ dẫn như sau là đã có được một trái tim xinh xắn bằng giấy rồi!

Bước 1: Gấp đôi tờ giấy hình vuông 2 lần để tạo nếp.

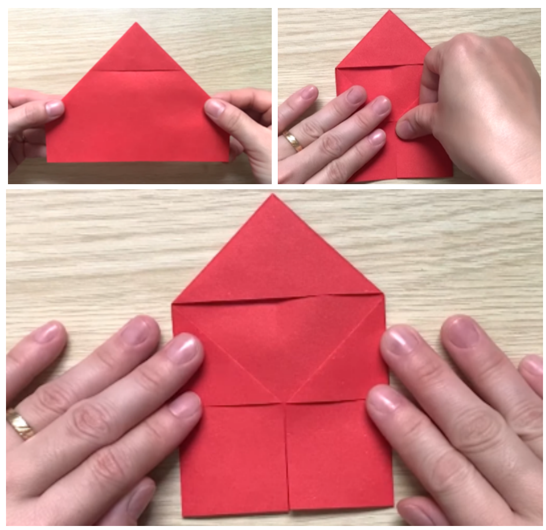


Bước 2: Gấp $\frac{1}{4}$ tờ giấy lên phía trên chạm vào chính giữa tờ giấy. Dùng tay miết nhẹ để tạo nếp gấp.

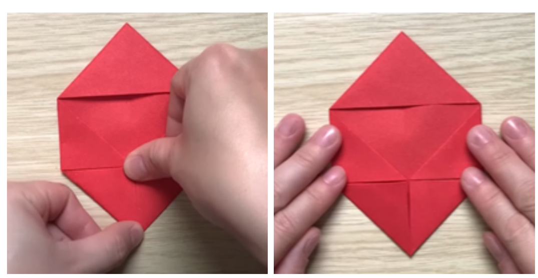
Bước 3: Lật mặt sau tờ giấy lại rồi gấp như các hình minh họa bên dưới.



Bước 4: Tiếp tục lật mặt sau tờ giấy lại rồi gấp như hình minh họa.



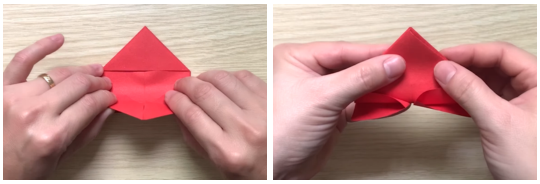
Bước 5: Gấp hai góc phía dưới lên.



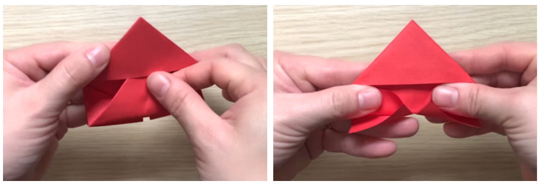
Bước 6: Gấp đôi hình lại sao cho phần nhọn của tam giác phía dưới trùng khớp với phần

[1] *Trường Liên cấp Hội nhập Quốc tế iSchool Quảng Trị.*

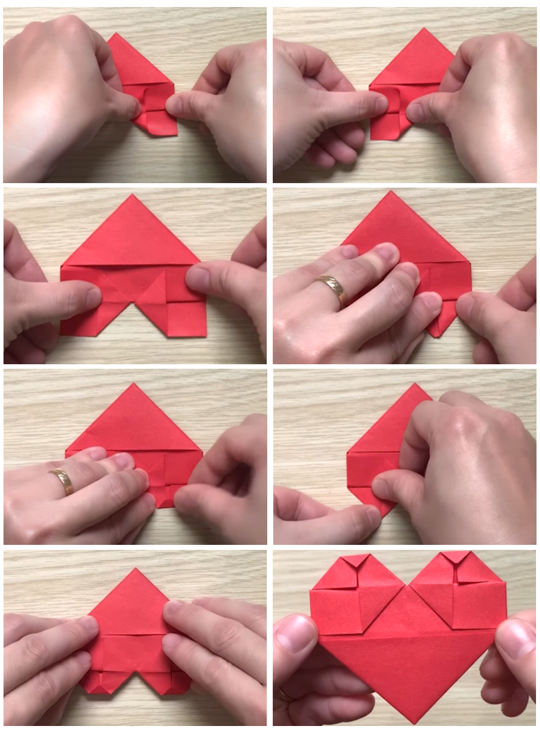
nhọn của tam giác phía trên. Dùng tay miết nhẹ để tạo nếp gấp rồi mở ra.



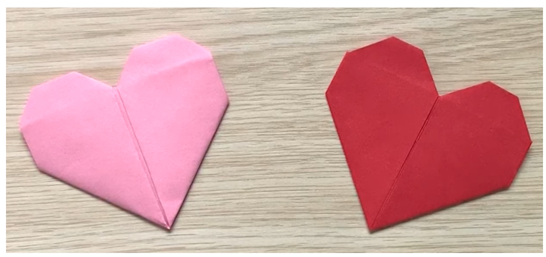
Bước 7: Luồn phần nhọn của tam giác phía dưới vào kẽ hở của tam giác phía trên.



Bước 8: Gấp hai góc nhỏ như hình minh họa.



Như vậy là chúng ta đã hoàn thành xong việc gấp trái tim bằng giấy rồi. Trái tim bằng giấy em vừa gấp xong có bao nhiêu trục đối xứng vậy?



Tài liệu tham khảo

[1] https://www.youtube.com/watch?v=MUdeSi-dHGY

[2] https://www.youtube.com/watch?v=paEAVS_9UwY

[3] https://thuthuatchoi.com/huong-dan-cach-choi-day-ayatori-cac-hinh-khac-nhau.html

PRINCIPLES IN GAMES

NGHIA DOAN[1]

In this article, we discuss a few games and principles associated with solutions to the problems posed by the games.

Example (Pigeonhole Principle). Each square of a 3×3 board is filled with one of the numbers $-1, 0, +1$. See the figure below for an example. Viet calculates the sums of the rows, columns, and two main diagonals. He found that there are at least two equal sums. For example, in the example below, both the sums of the second and third rows are 0. Is it always true that there are at least two equal sums?

-1	$+1$	$+1$
0	-1	$+1$
-1	$+1$	0

Solution. The answer is yes. The largest possible sum is 3 and the smallest is -3. There are 7 possible values $-3, -2, \ldots, 2, 3$ for 8 sums, so two of the sums must be equal to each other.

In this example, we have applied the Pigeonhole Principle: *if $n+1$ or more pigeons are placed in n holes, then one hole must contain two or more pigeons.*

Example (Nothing ever changes). Each square of the board contains a $+$ or $-$ signs, see the board the left, which contains a single $-$ at the square intersection of the first row and second column. At each step, you can change all the signs in a row, a column, or a diagonal to their opposite ones, i.e. $+$ to $-$, and $-$ to $+$. An example of how a column is changed shown as below in the board on the right.

$+$	$-$	$+$	$+$
$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$+$	$+$	$+$

$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$+$	$+$
$+$	$-$	$+$	$+$
$+$	$-$	$+$	$+$

Solution. Take a look at the squares colored red.

$+1$	-1	$+1$	$+1$
$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
$+1$	$+1$	$+1$	$+1$

$+1$	$+1$	$+$	$+1$
$+1$	-1	$+1$	$+1$
$+1$	-1	$+1$	$+1$
$+1$	-1	$+1$	$+1$

If we replace the $+$ sign by $+1$ and the $-$ sign by -1, then at the beginning the product of all numbers in these red square is -1. Easy to see that each operation to change all the signs in a row, a column or a diagonal shall change exactly two red squares. Whatever the numbers in the two red squares, the product of their negates remain same. Since the product of the red squares at the beginning is -1, so it cannot be changed at all.

In this example, we have applied the Invariant Principle: *In mathematics, an invariant is a property of a mathematical object (or a class of mathematical objects) which remains unchanged after operations or*

[1] *Ottawa, Canada.*

transformations of a certain type are applied to the objects.

Example (Integers are well–ordered)**.** On a stormy night, ten students from the *Math, Chess, and Coding Club in Ottawa* went to a party. They left their shoes in the foyer in order to keep the carpet clean. After the dinner, there was a power outage. So the students, leaving one by one, put on, at random, any pair of shoes big enough for their feet (each pair of shoes stay together). Any student who couldn't find a pair of shoes big enough spent the night at the place of the party.

What is the largest number of students who would have to spend the night? Show an example for this number. *Note that no two students wear the same size shoes.*

Solution. It is easy to see that if the five students with smallest feet left first wearing all five largest pairs of shoes then none of the remaining student can find a pair of shoes to leave. Now let us assume that there were 6 students who would have to spend the night. In that case, there would be 6 pairs of shoes left. It is immediate to see that one of those 6 pair of shoes would belong to one of the 6 students. This is a contradiction and so the assumed situation could not happen.

In this example, we have applied the *Well–Ordering Principle: the positive integers are well–ordered. An ordered set is said to be well–ordered if each and every nonempty subset has a least element in this ordering.*

Example (Invariant to reach end–state with desired outcomes)**.** In a darkroom there are two tables. The first one is empty and the second one is covered by a layer of nickels (one nickel thick, so no coin is on top of another), in which 31 coins are tails up and the rest are heads up.

Minh enters the room with the task of transferring some coins from the second table to the first table (he wears gloves, so he cannot feel the faces of the coins). He can flip over any number of coins when transferring them.

Is it possible that when he leaves the room, the numbers of nickles are the same on both tables?

Solution. If Minh turns a coin on the second table during transfer to the first one, then the number of coins *tails–up* on the second table will be reduced by one if it was a *tails–p* coin, or the number of coins *tails–up* on the first table is increased by one if it was a *heads–up* coin. In any case, the difference between the *tails–up* coins on the second and first tables will be reduced by one (this is an *invariant*.) Hence, after 31 moves, they will be the same.

In this example, we have applied the *Invariant Principle* with a twist. Note that in every turn the difference between the *tails–up* coins on the second and first tables will be reduced by one, since at the beginning, in other words, at the *start state* this difference is 31, thus after 31 turns the game reaches the *end–state* where the difference is 0.

Example (Winning positions)**.** In a two–player game, Berry and Cherry take turns removing marbles a pile as follows:

- Berry always goes first.
- In his or her turn, the player must remove exactly 2, 4 or 5 marbles from the pile.
- The player who at some point is unable to make a move (in other words, the player cannot remove 2, 4 or 5 marbles from the pile) loses the game.

They play 14 games with $\{8, 9, \ldots, 21\}$ as the initial number of marbles in the pile. What games does Cherry always win, regardless of what Berry does?

Solution. The positive integers from 0 to 21 can be divided into 7 groups of numbers based on their remainders when divided by 7,

$$G_0 = \{0,7,14,21\},\quad G_1 = \{1,8,15\},$$
$$G_2 = \{2,9,16\},\quad G_3 = \{3,10,17\},$$
$$G_4 = \{4,11,18\},\quad G_5 = \{5,12,19\},$$
$$G_6 = \{6,13,20\}$$

It is easy to verify the following claim:

Claim. If n is a number in G_0 and G_1 then $n-2$, $n-4$, and $n-5$ are in G_2, G_3, G_4, G_5, or G_6.

Now, by the rules of the game, it is obvious that $\{0,1\}$ are *losing* positions and $\{2,4,5\}$ are *winning* positions. Furthermore, because $3-2=6-5=1$, so $\{3,6\}$ are also *winning* positions, too.

Therefore G_0 and G_1 contain all *losing* positions, while G_2, G_3, G_4, G_5, and G_6 containing all *winning* positions. A player, who is in a *winning* position, can always force the game into a *losing* position. Thus, Cherry will win the game if the game starts with a *losing* position. Thus, the games that Cherry wins are $\{8,14,15,21\}$.

Vocabulary

principle (n): nguyên lý

Pigeonhole Principle (n): Nguyên lý chuồng bồ câu

Invariant Principle (n): Nguyên lý bất biến

Well–ordering Principle (n): Nguyên lý sắp thứ tự tốt

operation (n): phép toán

transformation (n): phép biến đổi

foyer (n): tiền sảnh (của một tòa nhà lớn)

power outage (n): cúp điện

take turns (v): thay phiên nhau

marble (n): viên đá

pile (n): chồng, đống

claim (n): nhận định

remainder (n): số dư

start state (n): trạng thái bắt đầu

end state (n): trạng thái kết thúc

winning position (n): vị trí thắng

losing position (n): vị trí thua

- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P721–P730: trước ngày 15/8/2023.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P721. (Mức B) Trên mỗi cạnh của hình vuông, bạn An viết một số nguyên dương. Sau đó, tại mỗi đỉnh của hình vuông đó, bạn An viết số là tích của hai số được ghi trên hai cạnh đi qua đỉnh đó. Biết rằng tổng các số ở các đỉnh của hình vuông là 1333. Hỏi, tổng các số được ghi trên các cạnh của hình vuông đó có thể là bao nhiêu?

Tường Thanh, Nghệ An

P722. (Mức B) Cho a, b, c là các số thực khác 0 thoả mãn

$$\begin{cases} a+b+c = \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \\ a^3+b^3+c^3 = \dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

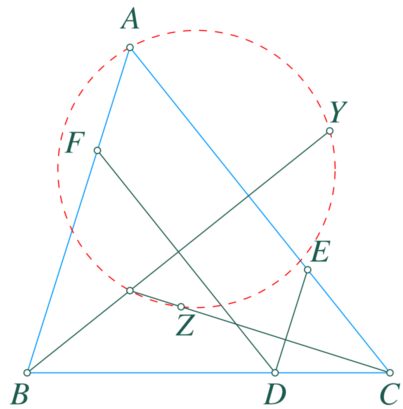
$$a^{2023}+b^{2023}+c^{2023} = \frac{1}{a^{2023}}+\frac{1}{b^{2023}}+\frac{1}{c^{2023}}$$

Duy Minh, Hà Nội

P723. (Mức B) Cho số nguyên dương k và A là số tự nhiên gồm k chữ số 9. Gọi m, n, p tương ứng là tổng các chữ số của A, A^2, A^3. Chứng minh rằng $p = 2m = 2n$.

Nguyễn Hùng Cường, Bình Định

P724. (Mức B) Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho $AEDF$ là hình bình hành. Gọi Y là điểm đối xứng với B qua DF; Z là điểm đối xứng với C qua DE. Chứng minh rằng, đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ đi qua trực tâm của tam giác ABC.



Nguyễn Văn Linh, Hà Nội

P725. (Mức B) Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq \frac{3}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ngô Văn Thái, Thái Bình

P726. (Mức B) Cho bảng ô vuông kích thước 2023×2023, mà trên mỗi ô đã được đặt ít nhất 1 viên bi. Cho phép thay đổi số bi trên bảng theo qui tắc: thêm bi vào mỗi ô của một cột nào đó sao cho số bi của mỗi ô ở cột đó tăng gấp đôi, hoặc bớt 1 viên bi ở mỗi ô của một hàng nào đó mà các ô trên hàng đó đều đang còn bi. Chứng minh rằng, ta có thể thực hiện một số lần thay đổi số bi như trên để trên bảng không còn viên bi nào.

Phạm Nhật Nguyệt, Hải Phòng (st)

P727. (Mức A) Cho số nguyên $k\geq 3$. Tìm giá trị bé nhất của biểu thức

$$P=x^k\left(y^{k-1}+z^{k-1}\right)+y^k\left(z^{k-1}+x^{k-1}\right)+z^k\left(x^{k-1}+y^{k-1}\right).$$

Nguyễn Hà Trang, Nghệ An

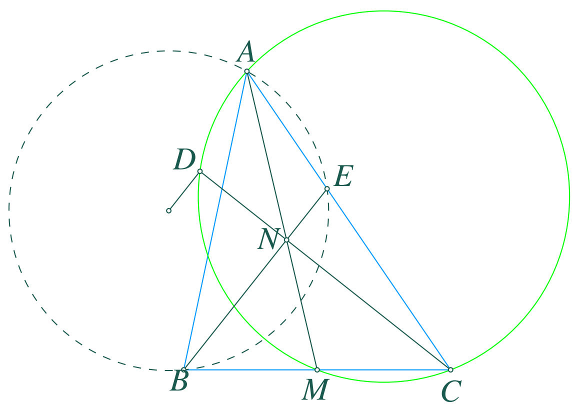
P728. (Mức A) Tìm tất cả các cặp số hữu tỷ (a,b) sao cho: tồn tại duy nhất một hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x+f(y))=a.f(x)+f(by)-y$$

với mọi $x,y\in\mathbb{Q}$.

Nguyễn Văn Mến, Kon Tum

P729. (Mức A) Cho tam giác ABC nhọn, có M là trung điểm BC. Trên cạnh AC, lấy một điểm E tuỳ ý, khác với A và C. Gọi N là giao điểm của các đường thẳng BE và AM. Đường thẳng CN cắt đường tròn (ACM) tại điểm thứ hai D. Chứng minh rằng, đường thẳng đi qua D, vuông góc với CD, cũng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE.



Hoàng Việt Vương, Đà Nẵng

P730. (Mức A) Với mỗi số nguyên $m>1$, ký hiệu $f(m),g(m)$ tương ứng là tổng tất cả các ước nguyên tố của m và số các ước nguyên tố của m. Cho n là một số nguyên lẻ, lớn hơn 1 và không chia hết cho 3. Chứng minh rằng

$$f(2^n+1)\geq 2f(n)+g(n)+3.$$

Nguyễn Tuấn Ngọc, Tiền Giang

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P691. (Mức B) Tìm tất cả các số có sáu chữ số, trong đó chữ số hàng trăm nghìn bằng $\frac{1}{6}$ tổng năm chữ số còn lại; chữ số hàng chục nghìn bằng $\frac{1}{6}$ tổng bốn chữ số nằm bên phải nó.

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Chánh Thiện, lớp 8/14, trường THCS Lê Quý Đôn, Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh*).

Giả sử $\overline{abcdef}$ là số có sáu chữ số thỏa mãn điều kiện đề bài. Khi đó, ta có $a \neq 0$,

$$a, b, c, d, e, f \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}, \quad (1)$$
$$6a = b + c + d + e + f,$$
$$6b = c + d + e + f. \quad (2)$$

Suy ra

$$6a = b + 6b = 7b.$$

Do đó, $b \neq 0$ (vì $a \neq 0$), $6a$ chia hết cho 7 và $7b$ chia hết cho 6. Mà $(6,7) = 1$ nên a chia hết cho 7 và b chia hết cho 6. Từ đây, do (1) và $a, b \neq 0$, ta có $a = 7$ và $b = 6$. Vì thế, từ (2), ta được

$$c + d + e + f = 36. \quad (3)$$

Từ (1) và (3), với lưu ý $36 = 4 \cdot 9$, suy ra, $c = d = e = f = 9$.

Như vậy, $\overline{abcdef} = 769999$.

Ngược lại, bằng cách kiểm tra trực tiếp, dễ thấy, số 769999 thỏa mãn điều kiện đề bài. Vì vậy, đó là số duy nhất cần tìm theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Trong số tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có ba lời giải không hoàn chỉnh, do người giải bài lập luận thiếu chặt chẽ, khi khẳng định $a = 7$ và $b = 6$ (theo ký hiệu ở Lời giải trên).

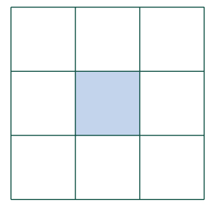
Lê Huy

P692. (Mức B) Ở mỗi ô vuông con của bảng ô vuông kích thước 3×3, có 4 viên bi. Bạn Hà lấy bi ra khỏi bảng, theo quy tắc: Mỗi lần, lấy hai viên bi nằm ở hai ô vuông con kề nhau, ở mỗi ô lấy một viên. Hỏi, bạn Hà có thể lấy ra khỏi bảng tối đa bao nhiêu viên bi?

(*Hai ô vuông được gọi là kề nhau, nếu chúng có cạnh chung.*)

Lời giải (*đáp án của Ban tổ chức VMTC 2023*).

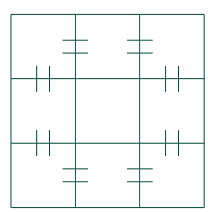
Tô đen ô vuông nằm ở chính giữa bảng 3×3 (xem Hình 1).



Hình 1.

Dễ thấy, trong hai ô vuông kề nhau bất kỳ, luôn có đúng một ô kề với ô đen. Do đó, ở mỗi lần lấy bi ra khỏi bảng, Hà luôn lấy đúng 1 viên nằm ở 4 ô kề với ô đen. Mà ở 4 ô đó, có $4 \cdot 4 = 16$ viên bi, nên số lần Hà lấy bi ra khỏi bảng không vượt quá 16 lần. Vì thế, số bi Hà có thể lấy ra khỏi bảng không vượt quá $2 \cdot 16 = 32$ viên.

Xét cách lấy bi được thể hiện ở Hình 2 dưới đây (mỗi đoạn thẳng kết nối 2 ô kề nhau thể hiện một lần lấy bi):



Hình 2.

Dễ thấy, ở cách lấy bi nêu trên, số bi được lấy ra khỏi bảng đúng bằng 32 viên.

Vậy, Hà có thể lấy ra khỏi bảng tối đa 32 viên bi.

Bình luận và Nhận xét

1. Để lấy được 32 viên bi ra khỏi bảng, ngoài cách được nêu ở Lời giải trên, còn có nhiều cách khác.

2. Trong số các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc, chỉ có hai lời giải đúng và hoàn chỉnh; các lời giải còn lại đều có chung một nhược điểm (đã được nhắc nhở nhiều lần trong mục Giải bài kỳ trước của Tạp chí): khẳng định số bi tối đa có thể lấy ra khỏi bảng là 32 viên, *ngay sau khi* mới chỉ chứng minh được số bi có thể lấy ra khỏi bảng không vượt quá 32 viên.

Lê Huy

P693. (Mức B) Cho các số thực phân biệt a, b, c thoả mãn
$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{23}{20}.$$
Tính
$$S=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}.$$

Lời giải (*đáp án của Ban tổ chức VMTC 2023*).

Đặt $x=\dfrac{a-b}{a+b}$, $y=\dfrac{b-c}{b+c}$ và $z=\dfrac{c-a}{c+a}$.

Ta có:
$$1-x=\frac{2b}{a+b}, 1+x=\frac{2a}{a+b};$$
$$1-y=\frac{2c}{b+c}, 1+y=\frac{2b}{b+c};$$
$$1-z=\frac{2a}{c+a}, 1+z=\frac{2c}{c+a}.$$
Suy ra
$$(1-x)(1-y)(1-z) =(1+x)(1+y)(1+z). \qquad (1)$$
Dễ thấy
$$(1) \Leftrightarrow x+y+z+xyz=0. \qquad (2)$$
Từ (2) và giả thiết $xyz=\dfrac{20}{23}$, suy ra
$$x+y+z=-\frac{20}{23}.$$
Vì vậy
$$S=\frac{1}{2}(x+y+z+3)=\frac{1}{2}\left(3-\frac{20}{23}\right)=\frac{49}{46}.$$

Bình luận và Nhận xét

1. Ngoài cách giải nêu trên, bài toán còn có thể được giải theo các cách khác. Tuy nhiên, các cách này đều đòi hỏi phải thực hiện các tính toán cồng kềnh, phức tạp.

2. Bài đã ra là một bài toán nhẹ nhàng, không khó.

3. Có nhiều bạn đọc đã gửi lời giải tới Tạp chí, và rất tiếc, có một bạn đã cho lời giải sai, do nhầm lẫn trong các tính toán.

Võ Quốc Bá Cẩn

P694. (Mức B) Cho tập hợp S gồm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số. Chứng minh rằng, trong 106 số đôi một khác nhau tùy ý thuộc S, luôn tồn tại 8 số, sao cho có thể phân chia 8 số này thành 4 nhóm, mỗi nhóm có hai số, và các tổng hai số cùng nhóm bằng nhau.

Lời giải (*của người chấm bài*).

Xét 106 số đôi một khác nhau tùy ý thuộc S.

Từ 106 số này, ta lập được $\dfrac{106\cdot 105}{2}=5565$ nhóm đôi một khác nhau, mỗi nhóm gồm đúng hai số trong 106 số ấy.

Vì mỗi số đều là số có ba chữ số, nên tổng hai số cùng nhóm thuộc tập gồm các số nguyên dương, trong phạm vi từ $100+101=201$ đến $998+999=1997$. Vì thế, theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại
$$\left[\frac{5565}{1997-201+1}\right]+1=4$$
nhóm có tính chất: các tổng hai số cùng nhóm bằng nhau.

Hơn nữa, bốn nhóm nêu trên đôi một không có phần tử chung, vì nếu ngược lại, tồn tại hai nhóm có phần tử chung, giả sử là $\{x,t\}$ và $\{y,t\}$, thì từ $x+t=y+t$ suy ra $x=y$, mâu thuẫn với việc hai nhóm đó khác nhau.

Vì vậy, bốn nhóm nêu trên cho ta 8 số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Có thể dễ dàng tìm ra lời giải trên, nếu biết nhìn nhận điều phải chứng minh dưới dạng tương đương sau: Trong tất cả các nhóm hai số, có thể tạo ra được từ 106 số đôi một khác nhau tùy ý thuộc S, tồn tại 4 nhóm đôi một không có số chung, sao cho các tổng hai số cùng nhóm bằng nhau.

2. Tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, đều là lời giải không đúng, do người giải bài đã lập luận không đúng, khi chứng minh 8 số, thuộc 4 nhóm có các tổng hai số cùng nhóm bằng nhau, là 8 số đôi một phân biệt.

Nguyễn Khắc Minh

P695. (Mức B) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x;y)$ thoả mãn $x^2+16=5^y$.

Lời giải (*dựa theo ý giải của đa số lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).

Giả sử $(x;y)$ là cặp số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu đề bài; nghĩa là, ta có:

$$x^2+16=5^y. \qquad (1)$$

Dễ thấy, $x,y>0$, vì:

– Nếu $x=0$ thì theo (1), $5^y=16$, là điều vô lý;

– Nếu $y=0$ thì $5^y=5^0=1<16$, mâu thuẫn với (1).

Vì $16\equiv 0 \pmod 8$ nên từ (1) suy ra

$$x^2\equiv 5^y \pmod 8. \qquad (2)$$

Vì $x^2\not\equiv 5 \pmod 8$ với mọi $x\in\mathbb{N}^*$, và $5^y\equiv 5 \pmod 8$ với mọi y lẻ, nên từ (2) suy ra, y là số chẵn. Do đó

$$(1)\Leftrightarrow \left(5^{\frac{y}{2}}-x\right)\left(5^{\frac{y}{2}}+x\right)=2^4.$$

Suy ra, $5^{\frac{y}{2}}-x$ và $5^{\frac{y}{2}}+x$ là các lũy thừa với số mũ tự nhiên của 2. Từ đây, do các số vừa nêu có cùng tính chẵn lẻ và

$$5^{\frac{y}{2}}-x<5^{\frac{y}{2}}+x \quad (\text{do } x>0),$$

nên $5^{\frac{y}{2}}-x=2$ và $5^{\frac{y}{2}}+x=2^3$. Do đó, $2x=6$ và $5^{\frac{y}{2}}=5$; vì thế, $x=3$ và $y=2$.

Bằng cách kiểm tra trực tiếp, dễ thấy cặp số tự nhiên $(x;y)$ vừa nêu trên thỏa mãn (1).

Vậy, có duy nhất cặp số tự nhiên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài, là $(x;y)=(3;2)$.

Bình luận và Nhận xét

1. Tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều cho đáp số đúng.

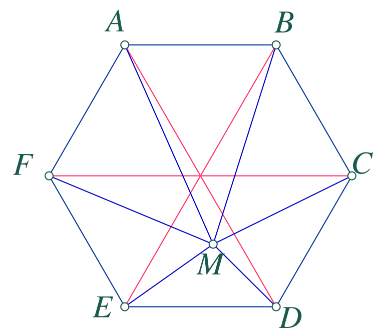
2. Rất tiếc, có ba lời giải mắc nhược điểm "thiếu phần thử lại cặp số $(x;y)$ tìm được". Những lời giải này, đương nhiên, không thể được coi là lời giải hoàn chỉnh.

Lưu Thị Thanh Hà

P696. (Mức B) Cho lục giác đều $ABCDEF$ có cạnh bằng 1 và M là một điểm tuỳ ý nằm trong lục giác đó. Chứng minh rằng, trong 6 tam giác MAB, MBC, MCD, MDE, MEF và MFA có ít nhất 3 tam giác có chu vi không nhỏ hơn 3.

Lời giải (*của người chấm bài*).

Ở lời giải này, P_{XYZ} ký hiệu chu vi của tam giác XYZ.



Do $ABCDEF$ là lục giác đều cạnh 1 nên theo tính chất của lục giác đều,

$$AD=BE=CF=2\cdot 1=2. \qquad (*)$$

Xét hai tam giác MAB và MDE, với lưu ý tới giả thiết $AB=DE=1$ và $(*)$, ta có:

$$\begin{aligned}
&P_{MAB}+P_{MDE}\\
&=(AB+MA+MB)+(DE+MD+ME)\\
&=AB+DE+(MA+MD)+(MB+ME)\\
&\geq AB+DE+AD+BE\\
&=1+1+2+2=6.
\end{aligned}$$

Suy ra, $P_{MAB}\geq 3$ hoặc $P_{MDE}\geq 3$; nghĩa là, trong hai tam giác MAB, MDE, có ít nhất một tam giác có chu vi không nhỏ hơn 3.

Xét một cách hoàn toàn tương tự đối với các cặp tam giác (MBC, MEF) và (MCD, MFA), ta sẽ được: trong mỗi cặp tam giác đó, đều có ít nhất một tam giác có chu vi không nhỏ hơn 3.

Vì vậy, trong sáu tam giác MAB, MDE, MBC, MEF, MCD, MFA, có ít nhất ba tam giác có chu vi không nhỏ hơn 3. Đây là điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Bài đã ra là một bài toán đơn giản, giúp người giải bài ghi nhớ một tính chất rất cơ bản của lục giác đều, và rèn luyện kỹ năng vận dụng bất đẳng thức tam giác, khi giải các bài toán với yêu cầu đánh giá tổng độ dài của các đoạn thẳng.

2. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, chỉ có lời giải của bạn *Phùng Việt Cường* (lớp 11 Toán 2, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định) là lời giải đúng và hoàn chỉnh. Các lời giải còn lại đều là lời giải không đúng, do hoặc thiếu xét trường hợp điểm M trùng với tâm của lục giác đều đã cho, hoặc có những khẳng định mang tính cảm tính, không chính xác.

Hà Thanh

P697. (Mức A) Cho các số dương x, y, z thoả mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{yz}{x^5-x+8}}+\sqrt[3]{\frac{zx}{y^5-y+8}}+\sqrt[3]{\frac{xy}{z^5-z+8}}\le\frac{3}{2}.$$

Lời giải (*dựa theo đa số lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).

Do $x>0$ nên theo bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân, ta có:

$$x^5+x^5+1+1+1\ge 5x^2,$$
$$x^2+1\ge 2x.$$

Suy ra

$$x^5\ge\frac{5x^2-3}{2}\text{ và }-x\ge-\frac{x^2+1}{2}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}&x^5-x+8\\ \ge&\frac{5x^2-3}{2}-\frac{x^2+1}{2}+8\\ =&2\left(x^2+3\right)=2\left(x^2+x^2+y^2+z^2\right)\\ \ge&2\left(x^2+xy+yz+zx\right)\\ =&2(x+y)(x+z)>0\ \ (\text{do } x,y,z>0).\end{aligned}$$

Từ đó, do $y, z>0$, ta có:

$$\begin{aligned}&\sqrt[3]{\frac{yz}{x^5-x+8}}\le\sqrt[3]{\frac{yz}{2(x+y)(x+z)}}\\ \le&\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{x+y}+\frac{z}{x+z}\right).\qquad(1)\end{aligned}$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$\sqrt[3]{\frac{zx}{y^5-y+8}}\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{y+z}+\frac{x}{y+x}\right),\quad(2)$$
$$\sqrt[3]{\frac{xy}{z^5-z+8}}\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{z+x}+\frac{y}{z+y}\right).\quad(3)$$

Cộng các bất đẳng thức (1), (2), (3), vế theo vế, ta thu được bất đẳng thức phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Từ việc chứng minh các bất đẳng thức (1), (2), (3) ở Lời giải trên, dễ thấy, dấu đẳng thức ở bất đẳng thức của đề bài xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

2. Lời giải trên đây thể hiện một cách tiếp cận tự nhiên đối với các bài toán yêu cầu chứng minh các bất đẳng thức có dạng như bất đẳng thức ở bài ra. Đó là, biến đổi, hoặc đánh giá, các mẫu thức, nhằm tạo ra thế có thể dùng bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân để đánh giá các căn thức.

3. Tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Võ Quốc Bá Cẩn

P698. (Mức A) Cho số nguyên $m>1$. Chứng minh rằng

a) Tồn tại m số thực dương $x_1,\dots,x_m$, không đồng thời bằng 1, sao cho

$$\sqrt[n]{x_1}+\cdots+\sqrt[n]{x_m}$$

là số nguyên, với mọi $n=1,2,\dots,100$.

b) Không tồn tại m số thực dương $x_1,\dots,x_m$, không đồng thời bằng 1, sao cho

$$\sqrt[n]{x_1}+\cdots+\sqrt[n]{x_m}$$

là số nguyên, với mọi số nguyên dương n.

Lời giải (*phỏng theo ý giải của hai bạn học sinh cấp THPT đã gửi lời giải về Tạp chí*).

$a)$ Chọn $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 2^{100!}$, ta có m số thực dương không đồng thời bằng 1, và

$$\sqrt[n]{x_1} + \sqrt[n]{x_2} + \cdots + \sqrt[n]{x_m} = m \cdot 2^{\frac{100!}{n}}$$

là một số nguyên, với mọi $n = 1, 2, \ldots, 100$ (do $\frac{100!}{n} \in \mathbb{N}$, với mọi $n = 1, 2, \ldots, 100$).

$b)$ Giả sử ngược lại, tồn tại m số thực dương $x_1, \ldots, x_m$, không đồng thời bằng 1, sao cho

$$\sqrt[n]{x_1} + \sqrt[n]{x_2} + \cdots + \sqrt[n]{x_m}$$

là một số nguyên, với mọi số nguyên dương n.

Do hàm số mũ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, nên

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{x_1} + \sqrt[n]{x_2} + \cdots + \sqrt[n]{x_m}\right) = \sum_{i=1}^{m} \lim_{n\to+\infty} x_i^{\frac{1}{n}} = \sum_{i=1}^{m} x_i^0 = m.$$

Vì thế, tồn tại số nguyên dương N, sao cho với mọi số nguyên dương $n \geq N$, đều có

$$m - \frac{1}{2} < \sqrt[n]{x_1} + \sqrt[n]{x_2} + \cdots + \sqrt[n]{x_m} < m + \frac{1}{2}.$$

Mà $\sqrt[n]{x_1} + \sqrt[n]{x_2} + \cdots + \sqrt[n]{x_m}$ là một số nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên

$$\sqrt[n]{x_1} + \sqrt[n]{x_2} + \cdots + \sqrt[n]{x_m} = m, \forall n \geq N. \quad (1)$$

Xét số nguyên dương $k > 1$ tùy ý.

Do $kN > N$ nên theo (1),

$$\sqrt[kN]{x_1} + \sqrt[kN]{x_2} + \cdots + \sqrt[kN]{x_m} = m. \quad (2)$$

Vì $0 < \frac{1}{k} < 1$ và $\sqrt[N]{x_i} - 1 > -1$ (do $\sqrt[N]{x_i} > 0$) với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$, nên theo bất đẳng thức Bernoulli, với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$, ta có:

$$\sqrt[kN]{x_i} = \left(1 + \left(\sqrt[N]{x_i} - 1\right)\right)^{\frac{1}{k}} \leq 1 + \frac{1}{k}\left(\sqrt[N]{x_i} - 1\right);$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt[N]{x_i} = 1$ ($\Leftrightarrow x_i = 1$).

Vì thế, do $x_1, \ldots, x_m$ không đồng thời bằng 1, và

$$\sqrt[N]{x_1} + \sqrt[N]{x_2} + \cdots + \sqrt[N]{x_m} = m \text{ (theo (1))},$$

nên

$$\sqrt[kN]{x_1} + \sqrt[kN]{x_2} + \cdots + \sqrt[kN]{x_m} < m + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{m} \left(\sqrt[N]{x_i} - 1\right) = m,$$

mâu thuẫn với (2).

Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ giả sử phản chứng ở trên là sai. Do đó, ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có:

– Hai lời giải sai, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau:

+ Khẳng định sai rằng, với a là một hằng số thực thuộc khoảng $(0; 1)$, ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 0;$$

+ Không chú ý tới khả năng xảy ra dấu "$=$" ở bất đẳng thức Bernoulli.

– Một lời giải không được coi là lời giải hoàn chỉnh, do người giải bài đã mắc lỗi "chính tả", khi thực hiện các tính toán.

Lưu Thị Thanh Hà

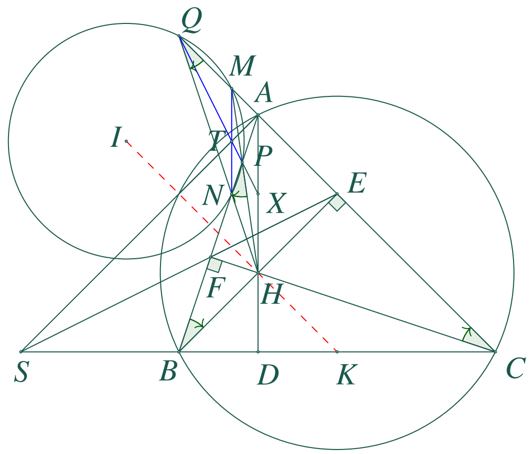
P699. (Mức A) Cho tam giác không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) và có hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Giả sử $\angle BAC$ khác 60°, 90° và 120°. Gọi P, Q là các điểm, tương ứng, đối xứng với B, C qua F, E. Các đường thẳng HP, HQ, tương ứng, cắt AC, AB tại M, N. Gọi K là trung điểm của BC. Chứng minh rằng, các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng HK.

Lời giải (*của người chấm bài*).

Trước hết, ta nhắc lại (không chứng minh) kết quả quen biết sau:

Định lý Brokard. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi R là giao điểm hai đường chéo của tứ giác đó. Giả sử các đường thẳng AB, CD cắt nhau tại P, các đường thẳng AD, BC cắt nhau tại Q. Khi đó, O là trực tâm của tam giác PQR.

Trở lại bài toán.



Do $\angle ABC$ khác 60°, 90° và 120°, nên bốn điểm M, N, P, Q đôi một phân biệt.

Do BE, CF là các đường cao của tam giác ABC, nên bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC. (1)

Vì thế, với lưu ý tới tính đối xứng của các cặp điểm $(P, B), (Q, C)$, ta có:

$$\begin{aligned}(PM;PN) &\equiv (PH;PB) \equiv (BP;BH)\\ &\equiv (BF;BE) \equiv (CF;CE)\\ &\equiv (CH;CQ) \equiv (QC;QH)\\ &\equiv (QM;QN)\,(\bmod \pi).\end{aligned}$$

Do đó, bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Gọi I là tâm của đường tròn $(MNPQ)$.

Gọi T là giao điểm của MN và PQ; gọi S, D, tương ứng, là giao điểm của BC và AT, AH.

Gọi X là giao điểm của PQ và AH. Theo tính chất của tứ giác toàn phần, $(TX, PQ) = -1$. Từ đây, do phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỷ số kép, suy ra $(BC, SD) = -1$. Vì thế, theo tính chất của tứ giác toàn phần, $S \in EF$.

Do (1) và do K là trung điểm của BC (giả thiết), nên áp dụng định lý Brokard cho tứ giác nội tiếp $BCEF$, ta được K là trực tâm của tam giác ASH. Suy ra, $KH \perp AS$. (2)

Áp dụng định lý Brokard cho tứ giác nội tiếp $MPNQ$, ta được I là trực tâm của tam giác AHT. Suy ra, $IH \perp AT$, hay $IH \perp AS$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra, ba điểm H, K, I thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng.

Hạ Vũ Anh

(Mức A) Cho số nguyên dương n. Lần lượt ghi các số n^3, $n^3+1, \ldots, n^3+n$ lên $n+1$ tấm thẻ trắng, trên mỗi thẻ ghi đúng một số. Người ta xếp tất cả $n+1$ tấm thẻ đó vào hai chiếc hộp xanh và đỏ, sao cho mỗi hộp có ít nhất một thẻ và tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp xanh chia hết cho tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp đỏ. Chứng minh rằng, số các tấm thẻ trong hộp xanh chia hết cho số các tấm thẻ trong hộp đỏ.

Lời giải (*dựa trên ý tưởng của bạn Hoàng Nguyễn Gia Bảo, lớp 11T1, trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, tỉnh Đồng Tháp*).

Quy ước, gọi tấm thẻ mà trên đó có ghi số i là thẻ i.

• Với $n = 1$, hiển nhiên ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

• Xét $n > 1$.

Xét một cách xếp $n+1$ tấm thẻ vào hai hộp xanh, đỏ tùy ý, thỏa mãn điều kiện đề bài.

Gọi m là số tấm thẻ được xếp vào hộp xanh, và k là số tấm thẻ được xếp vào hộp đỏ; ta có, $m, k \in \mathbb{N}^*$ và $m + k = n + 1$.

Ký hiệu S_x là tổng các số được ghi trên m tấm thẻ trong hộp xanh, và S_d là tổng các số được ghi trên k tấm thẻ trong hộp đỏ; ta có, $S_x, S_d \in \mathbb{N}^*$ và

$$\begin{aligned}S_x + S_d &= (n+1)n^3 + 1 + 2 + \cdots + n\\ &= (n+1)n^3 + \frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\left(2n^2+1\right). \qquad (1)\end{aligned}$$

Giả sử m tấm thẻ trong hộp xanh là $n^3 + x_1, \ldots, n^3 + x_m$; và k tấm thẻ trong hộp đỏ là $n^3 + d_1, \ldots, n^3 + d_k$.

Đặt $X = x_1 + \cdots + x_m$ và $D = d_1 + \cdots + d_k$; ta có:

$$X, D \in \mathbb{N} \text{ và } X + D = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (2)$$

$$S_x = m \cdot n^3 + X \text{ và } S_d = k \cdot n^3 + D. \quad (3)$$

Do $S_x \vdots S_d$ (giả thiết), nên tồn tại $q \in \mathbb{N}^*$ sao cho $S_x = qS_d$. (4)

Hơn nữa, từ $S_x \vdots S_d$, dễ dàng suy ra, không thể xảy ra trường hợp trong một trong hai hộp xanh, đỏ, chỉ có duy nhất tấm thẻ n^3. Do đó, từ (2) ta có

$$X, D \in \mathbb{N}^* \text{ và } X, D < \frac{n(n+1)}{2}. \quad (5)$$

Vì thế, từ (3) suy ra, $S_d > n^3$. (6)

Từ (1), (4) và (6), ta có:

$$(q+1)n^3 < (q+1)S_d = \frac{n(n+1)}{2}\left(2n^2+1\right).$$

Suy ra

$$q+1 < \frac{(n+1)\left(2n^2+1\right)}{2n^2} < n+2 \text{ (do } n > 1);$$

do đó, $q < n+1$. Mà $q \in \mathbb{N}^*$ nên

$$0 < q \leq n. \quad (7)$$

Từ (3) và (4), ta có:

$$m \cdot n^3 + X = qk \cdot n^3 + qD;$$

suy ra

$$qD - X = (m - qk)n^3. \quad (8)$$

Do đó, $qD - X$ chia hết cho n^3. (9)

Do (5), (7), và $n > 1$, nên

$$qD - X < qD < \frac{n^2(n+1)}{2} < n^3, \quad (10)$$

$$qD - X > -X > -\frac{n(n+1)}{2} > -n^3. \quad (11)$$

Từ (9), (10) và (11), suy ra $qD - X = 0$. Vì thế, từ (8) ta được $m = qk$; do đó, m chia hết cho k. Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Lẽ dĩ nhiên, bài đã ra chỉ có ý nghĩa, khi tập các cách xếp thẻ, thỏa mãn điều kiện đề bài, là tập khác rỗng.

Ở Lời giải trên, ta đã thấy, tập đó khác rỗng, khi $n = 1$.

Với $n > 1$, dễ dàng kiểm tra được rằng:

– Nếu n là số chẵn thì bằng cách xếp thẻ $n^3 + \frac{1}{2}n$ vào hộp đỏ, và xếp tất cả n tấm thẻ còn lại vào hộp xanh, ta sẽ có một cách xếp thỏa mãn điều kiện đề bài;

– Nếu n là số lẻ thì bằng cách xếp hai thẻ $n^3 + 1$, $n^3 + (n-1)$ vào hộp đỏ, và xếp tất cả $n - 1$ tấm thẻ còn lại vào hộp xanh, ta sẽ có một cách xếp thỏa mãn điều kiện đề bài.

Vì vậy, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, tập các cách xếp thẻ, thỏa mãn điều kiện đề bài, là tập khác rỗng.

2. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải sai, do người giải bài đã tính sai tổng các số ghi trên các tấm thẻ trong hộp xanh.

Nguyễn Khắc Minh

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI HOÀN CHỈNH

Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải hoàn chỉnh.

KHỐI THCS

• Trường **THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam**, Tp. Hà Nội: *Trần Đăng Hiếu* (lớp 8A; P691), *Hà Mạnh Hùng* (lớp 8A; P691, P692, P693).

• Trường **THCS Lê Quý Đôn**, Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh: *Nguyễn Trịnh Phương Minh* (lớp 6/14; P691, P693), *Nguyễn Chánh Thiện* (lớp 8/14; P691, P693, P697).

• Trường **THCS Nguyễn Trãi**, Thành phố Sơn La, tỉnh Sơn La: *Lương Hữu Bách* (lớp 9A1; P691, P693, P697).

KHỐI THPT

• Trường **THPT An Lão**, tỉnh Bình Định:

Trần Khánh Duy (lớp 11A1; P691).

• Trường **THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu**, tỉnh Đồng Tháp: *Hoàng Nguyễn Gia Bảo* (lớp 11T1; P692, P700), *Huỳnh Ngọc Ngân* (lớp 11T1; P693), *Đỗ Duy Quang* (lớp 11T1; P691, P693, P695).

• Trường **THPT chuyên Hà Tĩnh**, tỉnh Hà Tĩnh: *Trần Minh Hoàng* (lớp 10T1; P697, P699, P700).

• Trường **THPT chuyên Hưng Yên**, tỉnh Hưng Yên: *Trần Hữu Dương* (lớp 11 Toán 1; P691, P693, P695), *Nguyễn Gia Khánh* (lớp 11 Toán 1; P699).

• Trường **THPT chuyên Lê Hồng Phong**, tỉnh Nam Định: *Ngô Quang Bình* (lớp 11 Toán 1; P695), *Phùng Việt Cường* (lớp 11 Toán 2; P693, P695, P696), *Trần Đình Nam* (*P697*), *Dương Tuấn Phong* (lớp 11 Toán 2; P697), *Nguyễn Đắc Tú* (lớp 11 Toán 1; P693).

• Trường **THPT chuyên Lương Văn Chánh**, tỉnh Phú Yên: *Nguyễn Tấn Nguyên Chương* (lớp 10 Toán 1; P693, P699).

• Trường **THPT chuyên Lê Thánh Tông**, tỉnh Quảng Nam: *Ngô Gia Tưởng* (lớp 10/1; P697).

• Trường **THPT chuyên Quốc học Huế**, tỉnh Thừa Thiên – Huế: *Trần Thị Thanh Thư* (lớp 12T1; P693).

• Trường **THPT chuyên Tiền Giang**, tỉnh Tiền Giang: *Huỳnh Nguyễn Khánh Duy* (lớp 10 Toán; P698, P699, P700), *Trần Phúc Thịnh* (lớp 10 Toán; P691).

• Trường **THPT chuyên Tự nhiên**, ĐH KHTN – ĐHQG Hà Nội: *Vương Khánh Toàn* (lớp 10A1 Toán; P697, P700).

• Trường **THPT chuyên Sư phạm**, ĐH Sư phạm Hà Nội: *Hồ Trần Khánh Linh* (lớp 12 Toán 2; P698, P699).

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Hai băng cướp bị tóm gọn

Đối với mỗi tên thuộc băng Mèo rừng ta sẽ đánh dấu bằng màu đỏ tên cướp thuộc băng Báo đen nào to béo nhất ngồi cạnh hắn ta (nếu hai tên Báo đen nặng như nhau ngồi cạnh, ta sẽ chọn lấy đúng một tên bất kỳ; hoặc nếu chỉ có một tên Báo đen ngồi cạnh thì ta sẽ chọn đúng tên đó). Như vậy mỗi tên cướp ở băng Báo đen được đánh dấu sẽ ngồi cạnh một tên thuộc băng Mèo rừng gầy còm hơn hắn ta.

Giả sử không phải tất cả các tên thuộc băng Báo đen được đánh dấu đỏ. Khi đó số các tên thuộc băng Báo đen được đánh dấu sẽ nhỏ hơn hoặc bằng 9. Vì mỗi tên thuộc băng Báo đen chỉ có thể ngồi cạnh không quá 2 tên thuộc băng Mèo rừng, suy ra bên cạnh các tên cướp được đánh dấu đỏ thuộc băng Báo đen có không quá 18 tên thuộc băng Mèo rừng, số lượng này ít hơn tổng số các tên cướp thuộc băng Mèo rừng là 19 tên. Ta nhận được mâu thuẫn, do tất cả các tên cướp thuộc băng Mèo rừng đều phải ngồi cạnh một tên thuộc băng Báo đen được đánh dấu đỏ.

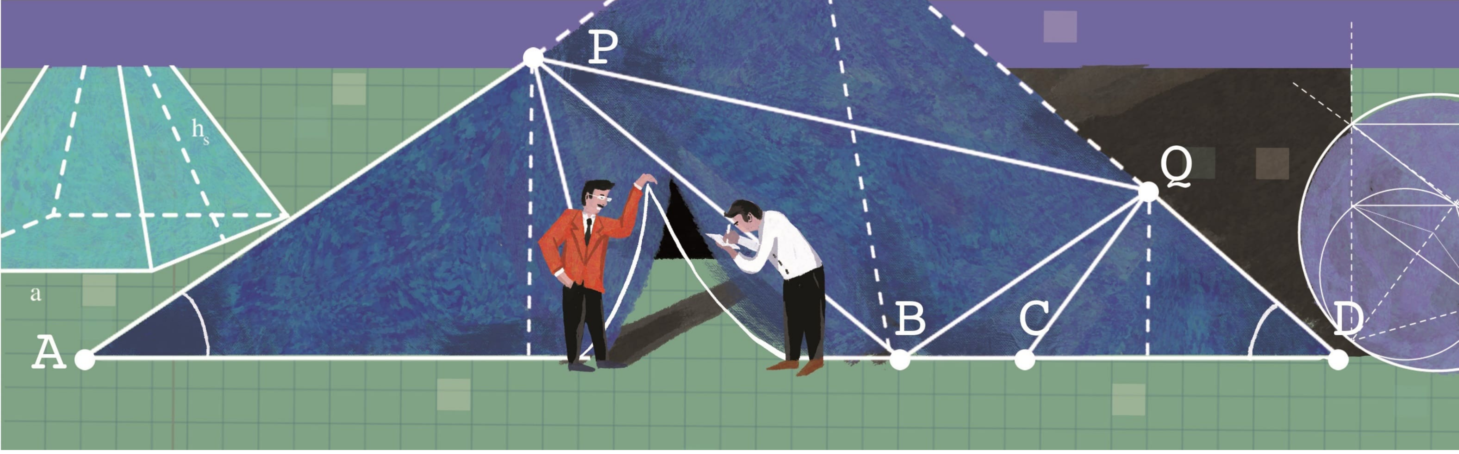
Như vậy, mỗi tên thuộc băng Báo đen phải có một tên thuộc băng Mèo rừng gầy còm hơn ngồi cạnh.

Đố vui

Bản nhạc trên hành tinh Vui vẻ có nhiều nhất là 16 nốt nhạc, cho bởi

$$AABABAABABAABAAB$$

hoặc dãy ngược lại. Còn bạn thì sao?



NỘI SUY VÀ ĐA THỨC ĐỐI XỨNG

PHÙNG HỒ HẢI

1. Đa thức và hàm đa thức

1.1. Đa thức. Đa thức là một biểu thức đại số nhận được một cách hình thức từ các biến số và các hệ số thông qua các phép tính cộng, trừ và nhân.

Các hệ số là phần tử thuộc một tập hợp nào đó, thông thường là một tập hợp số (ví dụ $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) nhưng cũng có thể là một tập tổng quát hơn mà trên đó đã xác định các phép toán cộng, trừ, nhân.

Biến số là các ký tự hình thức (ví dụ $x, y, X, Y, \ldots$) mà ta có thể thay thế chúng bằng những phần tử trong tập hợp chứa các hệ số hoặc một tập hợp lớn hơn mà trên đó cũng xác định các phép toán cộng, trừ và nhân.

Đa thức một biến có thể được mô tả bằng biểu thức dạng

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Như vậy thông tin về các đa thức một biến bao gồm hai loại: số tự nhiên n được gọi là bậc của nó, ký hiệu là $\deg P(x)$, và các số (nguyên, hữu tỷ, thực hay phức) $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – các hệ số của nó.

> Thông tin về đa thức một biến với bậc (không quá) n là một dãy có thứ tự gồm $n+1$ *đơn vị thông tin.*

Dưới đây ta sẽ chỉ xét các đa thức một biến với hệ số nằm trong một tập số như $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

1.2. Phép chia có dư. Đối với đa thức hệ số thực ta có thể thực hiện được phép chia có dư, tương tự như đối với các số nguyên. Cho các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ với $Q(x) \neq 0$, khi đó tồn tại duy nhất các đa thức $P_1(x)$ và $R(x)$ với $\deg R(x) < \deg Q(x)$ sao cho

$$P(x) = Q(x)P_1(x) + R(x).$$

Ta nói đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$ nếu $R(x) = 0$.

Chú ý. Ta có thể thay thế điều kiện "hệ số thực" bởi điều kiện "hệ số phức" hay "hệ số hữu tỷ". Nhưng ta không thể áp dụng với điều kiện "hệ số nguyên".

Ví dụ, ta không thể thực hiện được phép chia có dư của đa thức x^2+1 cho đa thức $2x$ trong tập hợp đa thức hệ số nguyên!

1.3. Hàm đa thức. Xét các đa thức một biến với hệ số nằm trong một tập số. Khi đó, bằng cách thay thế biến số bằng các giá trị trong tập số đó ta thu được một hàm số. Hàm số thu được bằng cách này gọi là hàm đa thức. Chúng thường được mô tả ở dạng

$$y = P(x),$$

trong đó $P(x)$ là một đa thức theo biến x.

Nguyên lý đồng nhất của Đại số học nói rằng nếu hai hàm đa thức (trên tập số thực) bằng nhau tại mọi giá trị của biến số thì các đa thức xác định chúng bằng nhau. Nói cách khác, mỗi hàm đa thức được xác định bởi một đa thức duy nhất.

Ta chú ý rằng tính đúng đắn của nguyên lý này phụ thuộc vào miền giá trị của biến số (và hệ số). Ví dụ nguyên lý đồng nhất sai nếu xét đa thức trên tập các lớp đồng dư.

1.4. Nghiệm của đa thức. Nghiệm, hay còn gọi là không điểm, của một đa thức $P(x)$ là những giá trị của biến số x mà tại đó $P(x)$ nhận giá trị 0. Sử dụng phép chia có dư của $P(x)$ cho $x-a$ ta có

$$P(x) = (x-a)P_1(x) + P(a).$$

Như vậy nếu a là nghiệm của $P(x)$ thì $P(x)$ chia hết cho $x-a$. Từ đó ta kết luận một đa thức bậc n có không quá n nghiệm.

Định lý cơ bản của Đại số học khẳng định mọi đa thức với hệ số phức với bậc lớn hoặc bằng 1 luôn có nghiệm phức. Từ đó suy ra, một đa thức bậc $n \geq 1$ luôn có thể viết được ở dạng

$$P(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - x_i), \quad x_i \in \mathbb{C}.$$

Chú ý rằng các số (phức) x_i có thể bằng nhau – trong trường hợp đó ta nói $P(x)$ có *nghiệm bội*.

> Nghiệm bội của một đa thức luôn là nghiệm chung của đa thức đó với đạo hàm của nó.

1.5. Các tính chất cơ bản của đa thức dẫn tới nguyên lý nội suy.

– Hai đa thức bằng nhau nếu chúng xác định hai hàm số bằng nhau (trên các tập số nguyên, hữu tỷ, thực hay phức);

– Hai đa thức bằng nhau nếu giá trị chúng bằng nhau tại “đủ nhiều giá trị của biến số”, phát biểu một cách tương đương là, một đa thức sẽ đồng nhất bằng 0 nếu nó bằng 0 tại “đủ nhiều giá trị của biến số”;

– Một đa thức được xác định duy nhất bởi giá trị của nó tại “đủ nhiều giá trị của biến số”, “đủ nhiều” được xác định là nhiều hơn bậc của đa thức. Ví dụ một tập vô hạn luôn là “đủ nhiều”.

2. Nội suy Lagrange

Bài toán nội duy Lagrange là xác định một đa thức bậc (không quá) $n-1$ từ các giá trị của đa thức tại n vị trí khác nhau.

> **Bài toán nội suy Lagrange.** Cho các số $y_1, \ldots, y_n$ và các số phân biệt $x_1, \ldots, x_n$. Xác định đa thức $P(x)$ bậc không quá $n-1$ thỏa mãn:
>
> $$P(x_i) = y_i, \text{ với mọi } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Nhận xét. Nếu tồn tại đa thức $P(x)$ (với bậc không quá $n-1$) nhận giá trị y_i tại điểm x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, thì $P(x)$ là duy nhất. Từ đó suy ra tính chất tuyến tính của bài toán nội suy Lagrage:

– Giả sử $Q(x)$ là đa thức được xây dựng từ bộ số $(z_1, \ldots, z_n)$:

$$Q(x_i) = z_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

thì đa thức $P(x) + Q(x)$ được xác định từ bộ số

$$(y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n).$$

– Bộ số $(\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n)$ xác định đa thức $\lambda P(x)$ (λ là một số bất kỳ).

Trên cơ sở của tính chất tuyến tính, ta sẽ xây dựng đa thức $P(x)$ bắt đầu từ những bộ số $(y_1, \ldots, y_n)$ đơn giản nhất.

– Nếu tất cả các giá trị y_i đều bằng 0, ta có $P(x) = 0$.

– Nếu $y_1 = 1, y_2 = \ldots = y_n = 0$ thì đa thức $P_1(x)$ tương ứng sẽ nhận các giá trị $x_2, \ldots, x_n$ làm nghiệm. Do $P_1(x)$ có bậc không quá $n-1$ nên

$$P(x) = c(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Thay $x = x_1$ ta suy ra

$$c = \frac{1}{(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)}.$$

Từ đó

$$P_1(x) = \frac{(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)}.$$

– Tương tự, với bộ $y_1 = \dots = y_{i-1} = y_{i+1} = \dots = y_n = 0$, $y_i = 1$, đa thức tương ứng là

$$P_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Theo nguyên lý tuyến tính nêu trên, ta có lời giải bài toán tổng quát như sau. Đa thức

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \qquad (1)$$

thỏa mãn $P(x_i) = y_i$.

Chú ý. Bậc của $P(x)$ có thể bé hơn hẳn $n - 1$.

Bài toán 2.1. Giả sử A, B và C là phần dư của đa thức $P(x)$ khi chia cho $x - a, x - b$ và $x - c$. Tìm phần dư của phép chia đa thức đó cho $(x - a)(x - b)(x - c)$.

Bài toán 2.2. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là đa thức bậc nhỏ hơn n thì phân thức

$$\frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}$$

trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các giá trị khác nhau, luôn biểu diễn được ở dạng

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}.$$

với các số $A_1, A_2, \dots, A_n$ nào đó.

Bài toán 2.3. Cho $x_1, \dots, x_n$ là các số thực phân biệt. Đặt $g(x) := \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$. Chứng minh rằng

$$\sum_i \frac{x_i^k}{g'(x_i)} = \begin{cases} 0 & \text{với } k = 0, 1, \dots, n-2; \\ 1 & \text{với } k = n - 1. \end{cases}$$

Nhận xét. Trong bài toán trên ta thực sự có các đồng nhất thức, nghĩa là ta có thể coi x_i như là các biến số, tuy nhiên việc chứng minh trực tiếp đồng nhất thức này bằng các biến đổi đại số là rất phức tạp.

Lời giải. Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \qquad (2)$$

ta thu được:

$$g'(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i}^{n} (x - x_j).$$

Từ đó

$$g'(x_i) = \prod_{j \neq i} (x_i - x_j). \qquad (3)$$

Áp dụng công thức nội duy Lagrange cho đa thức x^k ta thu được

$$x^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

So sánh hệ số của x^{n-1} ở hai vế cho ta các hệ thức cần chứng minh cho $k \leq n - 1$.

Bài toán 2.4. Tính

$$h_k := \sum_i \frac{x_i^{n+k-1}}{g'(x_i)},$$

với $k = 1, 2, 3$.

Lời giải. Xét công thức Viète

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = x^n - e_1 x^n + \dots + (-1)^n e_n.$$

Các hệ số e_i là các đa thức đối xứng cơ bản theo các biến $x_1, \dots, x_n$.

Nhân theo vế đẳng thức $g(x_i) = 0$ với x_i^k ta thu được

$$x_i^{n+k} - e_1 x_i^{n+k-1} + \dots + (-1)^n e_n x_i^k = 0.$$

Chia theo vế cho $\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)$ và lấy tổng theo i, ta thu được

$$h_{k+1}-e_1h_k+\ldots+(-1)^n e_n h_{k+1-n}=0,$$

với quy ước $h_0=1$ và $h_k=0$ nếu $k<0$. Công thức trên cho phép ta tính các đa thức h_k. Cụ thể ta có:

$$\begin{aligned} h_1&=e_1=\sum_i x_i\\ h_2&=e_1h_1-e_2=\sum_{i\le j}x_ix_j\\ h_3&=e_1h_2-e_2h_1+e_3=\sum_{i\le j\le k}x_ix_jx_k. \end{aligned}$$

Nhận xét. Trong lời giải trên ta sử dụng hai kỹ thuật. Thứ nhất là thế $x=x_i$ vào $g(x)$ để thu được một hệ thức giữa x_i và các hệ số e_j. Thứ hai là nhân hệ thức đó theo các trọng số.

Bài toán 2.5. Chứng minh công thức tổng quát sau với mọi $k=4,5,\ldots$

$$h_k=\sum_{i_1\le i_2\le\ldots\le i_k}x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}.$$

Các đa thức h_k được gọi là *đa thức đối xứng toàn phần* theo các biến $x_1,\ldots,x_n$.

2.1. Hệ số của đa thức nhận được từ công thức nội suy Lagrange. Trong bài tập 2.1 ta đã sử dụng phương pháp so sánh hệ số trong công thức nội suy Lagrange. Một câu hỏi tự nhiên là: có thể mô tả cụ thể được các hệ số của $P(x)$ từ các giá trị y_i và x_i hay không?

Từ đẳng thức

$$\begin{aligned} P(x)&=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\\ &=\sum_{i=1}^n y_i\frac{\prod_{j\neq i}^n(x-x_i)}{g'(x_i)}, \end{aligned}\tag{6}$$

so sánh hệ số ta thu được:

$$a_0=\sum_{i=1}^n\frac{y_i}{g'(x_i)},$$

và

$$a_1=\sum_{i=1}^n\frac{y_i(x_i-e_1)}{g'(x_i)}=\sum_{i=1}^n\frac{y_ix_i}{g'(x_i)}-a_0e_1.$$

Bài toán 2.6. Đặt

$$b_k:=\sum_i\frac{y_ix_i^k}{g'(x_i)}.$$

Chứng minh rằng các hệ số của đa thức $P(x)$ được tính bởi công thức

$$a_k=\sum_{j=0}^k(-1)^ie_jb_{k-j}.$$

2.2. Đạo hàm bậc hai. Trong các tính toán ở trên ta đã sử dụng các giá trị của đạo hàm bậc nhất của $g'(x)$. Vậy đạo hàm bậc hai có ý nghĩa gì?

Bài toán 2.7. Giả thiết rằng các số x_i phân biệt, khi đó $g''(x_i)=0$ khi và chỉ khi

$$\sum_{j\neq i}^n\frac{1}{x_i-x_j}=0.$$

Lời giải. Tính đạo hàm hai lần của $g(x)$. Ta có

$$g''(x)=\sum_{k\neq j}\prod_{i\neq k,j}(x-x_i)=\sum_{k\neq j}\frac{g(x)}{(x-x_k)(x-x_j)}.$$

Từ đó ta có, với mỗi $1\le i\le n$:

$$g''(x_i)=2\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)\sum_{j\neq i}^n\frac{1}{x_i-x_j}.$$

Vậy $g''(x_i)=0$ khi và chỉ khi

$$\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_i-x_j}=0.$$

Bài toán 2.8. Cho các số $0=x_0<x_1<\ldots<x_{n+1}=1$ thỏa mãn

$$\sum_{j=0,j\neq i}^{n+1}\frac{1}{x_i-x_j}=0,$$

với mọi $i=1,2,\ldots,n$. Chứng minh rằng với mọi i, $x_i=1-x_{n+1-i}$.

3. Hàm sinh

Hàm sinh là một công cụ dùng để phát biểu nhiều vấn đề của số học hay tổ hợp theo ngôn ngữ đại số, trên cơ sở đó sử dụng các phương pháp đại số (và giải tích) để giải quyết vấn đề.

Để xác định, hay tìm hiểu tính chất của một dãy số $a_0, a_1, \ldots$, thay vì nghiên cứu từng số hạng riêng rẽ, người ta tập hợp tất cả chúng trong một *tổng hình thức* hay một chuỗi lũy thừa:

$$A(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Nếu dãy đã cho hữu hạn, thì $A(x)$ là một đa thức. Như vậy các chuỗi lũy thừa có thể coi như một *khái niệm mở rộng của đa thức*.

Tương tự như với đa thức, ta có thể quy ước các phép tính cộng, trừ hay nhân các hàm sinh.

Phép cộng và trừ được thực hiện theo thành phần (nghĩa là tương ứng với phép cộng, trừ hai dãy số).

Phép nhân được thực hiện tương tự nhân đa thức. Với hai hàm sinh

$$A(t) = \sum_0^\infty a_i x^i, \quad B(t) = \sum_0^\infty b_i x^i,$$

tích của chúng là hàm sinh $C(t) = \sum_0^\infty c_i x^i$, với các hệ số c_i cho bởi công thức

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}.$$

3.1. Ví dụ.

– Với

$$A(x) = 1 - x,$$
$$B(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

ta có

$$A(x) \cdot B(x) = 1.$$

Nghĩa là ta có đẳng thức

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

Từ đó ta cũng có

$$\begin{aligned} B(x)^2 &= 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots \\ &= \frac{1}{1 - 2x + x^2}. \end{aligned}$$

– Hàm sinh cho dãy các đa thức đối xứng cơ bản của $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là:

$$E(x) = 1 + e_1 x + \ldots + e_n x^n = \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i x).$$

Xét hệ thức

$$\begin{aligned} \frac{1}{E(-x)} &= \prod_i \frac{1}{1 - x_i x} \\ &= \prod_i (1 + x_i x + \ldots + x_i^n x^n + \ldots) \\ &= 1 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + \ldots \end{aligned} \tag{7}$$

$$h_r = \sum_{i_1 \le \ldots \le i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_r}.$$

– Các đa thức h_r là các đa thức đối xứng toàn phần theo $x_1, \ldots, x_n$. Từ trên ta rút ra hệ thức sau giữa các đa thức e_i và h_i:

$$h_k - e_1 h_{k-1} + \ldots + (-1)^k e_k = 0,$$
với mọi $1 \le k \le n$;
$$h_k - e_1 h_{k-1} + \ldots + (-1)^n e_n h_{k-n} = 0,$$
với mọi $k \ge n$.

3.2. Đạo hàm của hàm sinh. Ngoài các phép toán đại số nêu trên, ưu thế quan trọng của hàm sinh là ta có thể thực hiện phép *đạo hàm* trên chúng.

Nếu $A(x) = \sum a_n x^n$ thì

$$A'(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Bài tập dưới đây cho thấy hai phép toán định nghĩa như trên thỏa mãn các tính chất quen biết của phép toán đạo hàm và tích phân.

Bài toán 3.1. Kiểm tra các hệ thức sau:

$$(A(t)\cdot B(t))' = A(t)'\cdot B(t) + A(t)\cdot B(t)'$$
$$\left(\frac{1}{A(t)}\right)' = -\frac{A(t)'}{A(t)^2}$$

Bài toán 3.2. Hàm mũ $\exp$ và hàm logarit $\ln$ được định nghĩa như sau:

$$\exp(x) = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (8)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (9)$$

Chứng minh rằng

– $\exp(x)' = \exp(x)$, $\ln(x)' = \frac{1}{1+x}$;

– với mỗi hàm sinh $A(x)$ với hệ số đầu tiên bằng 0, nghĩa là $A(0) = 0$, thì $\exp(A(x))$ cũng là một hàm sinh;

– với mỗi hàm sinh $A(x)$với hệ số đầu tiên bằng 0, nghĩa là $A(0) = 1$, thì $\ln(A(x))$ cũng là một hàm sinh;

– $\exp(\ln(1+x)) = 1+x$, $\ln(\exp(x)) = x$.

4. Đa thức đối xứng

Đa thức theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là đối xứng nếu nó không thay đổi khi ta hoán vị các biến. Ta đã làm quen với các đa thức đối xứng sau:

– Đa thức đối xứng cơ bản

$$e_r = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_r}, \quad r = 1,2,\ldots,n.$$

– Đa thức đối xứng toàn phần

$$h_r = \sum_{i_1\le i_2\le\ldots\le i_r} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_r}, \quad r = 1,2,\ldots,n.$$

– Ngoài ra ta còn đó tổng lũy thừa

$$p_r = \sum_i x_i^r, r = 1,2,\ldots$$

Ứng với mỗi loại đa thức đối xứng ở trên ta sẽ xét hàm sinh của nó. Như ở phần trên ta có

$$E(x) = \sum_{i=0}^{n} e_i x^i = \prod(1+x_i x),$$
$$H(x) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i x^i = \prod\frac{1}{1-x_i x},$$
$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i+1} x^i = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i x}.$$

Từ hệ thức (7) ta có $E(-x)\cdot H(x) = 1$. Mặt khác, xét đạo hàm của $\ln E(x)$ ta có

$$\ln(E(x))' = \frac{E'(x)}{E(x)} = \sum_i \ln(1+x_i x)'$$
$$= \sum_i \frac{x_i}{1+x_i x}.$$

Từ đó ta suy ra hệ thức:

$$E'(x) = E(x)\cdot P(-x).$$

Đây chính là hệ thức Newton đối với các tổng lũy thừa. So sánh hệ số của x^k ở hai vế ta có.

– Với $0 \le k \le n-1$:

$$(k+1)e_{k+1} = e_k p_1 - e_{k-1}p_2 + \ldots + (-1)^{k-1}e_1 p_k + (-1)^k p_{k+1}$$

hay là

$$p_{k+1} = e_1 p_k + \ldots + (-1)^{k-1}e_k p_1 + (-1)^k(k+1)e_{k+1}.$$

– Với $k \ge n$:

$$0 = e_n p_{k+1-n} - e_{n-1}p_{k+2-n} + \ldots + (-1)^{n-1}e_1 p_k + (-1)^n p_{k+1}$$

hay là

$$p_{k+1} = e_1 p_k + \ldots + (-1)^{n-1}e_n p_{k+1-n}.$$

Bài toán 4.1. Chứng minh trực tiếp hệ thức Newton. (Với trường hợp $k \ge n$, sử dụng phương pháp trong lời giải bài toán 2.4. Với trường hợp $k < n$, sử dụng quy nạp theo số biến).

Bài toán 4.2. Giả thiết $x_1, \ldots, x_n$ là các nghiệm (thực hoặc phức) của đa thức

$$x^n - \binom{m}{1} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n \binom{m}{n}$$

với m là số tự nhiên bất kỳ. Tính tổng

$$\sum x_i^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Bài toán 4.3. Cho các số thực $a_1, \ldots, a_n$ và các số nguyên dương $b_1, \ldots, b_n$. Giả thiết tồn tại đa thức $f(x)$ sao cho:

$$(1-x)^n f(x) = 1 + \sum_i a_i x^{b_i}$$

Tính $f(1)$ qua b_i và n.

5. Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Cho trước các số $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Ta xét dãy vô hạn (a_k), $k = 0, 1, \ldots$ các số thỏa mãn hệ thức truy hồi

$$a_{n+k} = e_1 a_{n+k-1} - e_2 a_{n+k-2} + \ldots + (-1)^n e_n a_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

với các giá trị $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ cho trước.

– Dãy (a_n) được xác định duy nhất bởi hệ thức trên, và các số hạng $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ được gọi là điều kiện ban đầu.

– Bài toán xác định một dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi như trên còn được gọi là bài toán *giải phương trình sai phân*.

– Đa thức

$$g(x) = x^n - e_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n e_n$$

được gọi là đa thức đặc trưng của phương trình trên.

5.1. Nghiệm tổng quát. Việc xác định dãy từ hệ thức truy hồi và điều kiện ban đầu được thực hiện theo hai bước.

– Xác định tất cả các dãy thỏa mãn hệ thức truy hồi – đây gọi là các nghiệm tổng quát của bài toán;

– Kết hợp với điều kiện ban đầu để xác định dãy cần tìm trong số các dãy ở trên – đây gọi là nghiệm riêng của bài toán.

Gọi t là một nghiệm của $g(x)$. Khi đó dãy $(\lambda t^k)_{k \geq 0}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi ở trên, với mọi số λ.

Giả thiết $g(x)$ có n nghiệm phân biệt $x_1, \ldots, x_n$ (có thể là nghiệm phức). Khi đó với mọi bộ số $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dãy (a_k) cho bởi

$$a_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^k$$

thỏa mãn hệ thức truy hồi ở trên.

5.2. Nghiệm riêng. Các hệ số λ_i được tính cụ thể thông qua điều kiện ban đầu $a_0, \ldots, a_{n-1}$ bằng cách giải hệ phương trình

$$\sum \lambda_i x_i^k = a_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{10}$$

Chúng ta sẽ mô tả nghiệm $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ của hệ này nhờ bài toán nội suy. Cụ thể, ta tìm λ_i ở dạng

$$\lambda_i = \frac{P(x_i)}{g'(x_i)},$$

với $P(x_i)$ là một đa thức bậc $n-1$:

$$P(x) = b_0 x^{n-1} - b_1 x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} b_{n-1}.$$

Nghĩa là

$$a_k = \sum_i P(x_i) \frac{x_i^k}{g'(x_i)}, \quad \text{với } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Thế giá trị của $P(x_i)$ và sử dụng kết quả của bài tập 2.3 ta có

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j b_j \sum_i \frac{x_i^{n-1-j+k}}{g'(x_i)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j b_j h_{k-j}. \end{aligned}$$

Vậy, sử dụng hệ thức (5) giữa e_i và h_j ta thu được:

$$b_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j a_j e_{k-j}. \tag{11}$$

Cụ thể

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_0e_1 - a_1 \\ b_2 &= a_0e_2 - a_1e_1 + a_2 \\ &\ldots \\ b_{n-1} &= a_0e_{n-1} - a_1e_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n-1}. \end{aligned}$$

Ta cũng có cách mô tả khác cho $P(x)$ như sau:

$$\begin{aligned} P(x) =& a_0(x^{n-1} - e_1x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}e_{n-1}) \\ &+ a_1(x^{n-2} - e_1x^{n-3} + \ldots + (-1)^{n-2}e_{n-2}) \\ &+ \ldots + a_{n-1}. \end{aligned}$$

Bài toán 5.1. Chứng minh rằng với mỗi $k = 1, 2, \ldots, n-1$, giá trị của đa thức

$$c_k(x) := (-1)^k(x^k - e_1x^{k-1} + \ldots + (-1)^k e_k)$$

tại x_i là đa thức đối xứng thứ k theo $n-1$ biến x_j, $j \neq i$.

Từ bài toán 5.1 ta có công thức sau cho các hệ số λ_i:

$$\lambda_i = \frac{1}{g'(x_i)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k e_{n-k-1,(x_i=0)}.$$

Trong đó $e_{k,(x_i=0)}$ ký hiệu đa thức đối xứng thứ k theo các biến x_j, $j \neq i$ (nhận được từ e_k bằng cách cho $x_i = 0$). Ví dụ:

– $n = 2$. Ta có

$$\lambda_1 = \frac{a_1 - a_0x_2}{x_1 - x_2}, \quad \lambda_2 = \frac{a_1 - a_0x_1}{x_2 - x_1}.$$

– $n = 3$. Ta có

$$\lambda_i = \frac{a_0x_jx_k - a_1(x_j + x_k) + a_2}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)},$$

trong đó (i, j, k) là một hoán vị của $(1, 2, 3)$.

5.3. Sử dụng hàm sinh. Ta có thể dùng hàm sinh để thu được công thức (11) cho các hệ số của $P(x)$ như sau. Xét hàm sinh của dãy $(a_n)_{n\geq 0}$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Xét đa thức

$$\begin{aligned} G(x) := x^n g(1/x) &= 1 - e_1x + \ldots + (-1)^n e_nx^n \\ &= \prod_i (1 - x_ix). \end{aligned}$$

Hệ thức truy hồi suy ra:

$$A(x) \cdot G(x) = B(x),$$

với đa thức $B(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}$ được cho bởi

$$b_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j a_j e_{k-j}.$$

Vậy

$$A(x) = \frac{B(x)}{G(x)}.$$

Nhận xét rằng công thức trên cho hàm $A(x)$ đúng cả khi các giá trị x_i không phân biệt.

Nếu các giá trị x_i là phân biệt, do $\deg B(x) \leq n-1$, theo bài toán 2.2 ta có khai triển

$$\frac{B(x)}{G(x)} = \sum_i \frac{\lambda_i}{1 - x_ix}.$$

Nhân cả hai vế hệ thức trên với $(1 - x_ix)$ và thay $x = 1/x_i$ ta thu được

$$\lambda_i = \frac{B(1/x_i)}{\prod_{j\neq i}(1 - x_j/x_i)} = \frac{x_i^{n-1}B(x_i)}{g'(x_i)}.$$

Dễ thấy $x^{n-1}B(1/x) = P(x)$.

Bài toán 5.2. Ký hiệu x_n là số các số n chữ số trong đó chỉ có các chữ số $2, 3, 5, 7$ xuất hiện và 5 không đứng ngay sau 2. Chứng minh rằng với mọi $r \geq 1$ và $m \geq 2$, ta luôn có x_{rm-1} chia hết cho x_{m-1}.

Bài toán 5.3. Xét dãy (f_n):

$$f_n = af_{n-1} + bf_{n-2}, \quad f_0 = c, f_1 = d$$

và p là số nguyên tố, $p > 2$. Chứng minh rằng, theo modulo p:

– nếu a^2+4b chính phương thì $f_p \equiv d$;

– nếu a^2+4b không chính phương thì $f_p \equiv ca-d$;

–nếu $a^2+4b \equiv 0$ thì $2f_p \equiv ac$.

Bài toán 5.4. Cho $x_0 = 4$, $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 3$,

$$x_{n+4} = x_{n+1} + x_n.$$

Chứng minh rằng x_p chia hết p với mọi p nguyên tố.

6. Lời giải và gợi ý

6.1. Lời giải bài 2.5. Sử dụng hệ thức (5) và các kết quả trong ví dụ 3.1.

6.2. Lời giải bài 2.6. Từ hệ thức (6) ta có

$$\begin{aligned}P(x) =& a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\\ =& g(x)\sum_i \frac{y_i}{g'(x_i)(x-x_i)}.\end{aligned}$$

Thay x bằng $1/x$ trong hệ thức trên và nhân theo vế với x^{n-1} ta thu được

$$\begin{aligned}x^nP(1/x) &= \prod_i(1-x_ix)\sum_i \frac{y_i}{g'(x_i)(1-x_ix)}\\ &= E(-x)\sum_{k=0}^{\infty} b_ix^k.\end{aligned}$$

Hay là

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} = E(-x)\sum_{k=0}^{\infty} b_ix^k.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

6.3. Lời giải bài 4.3. Cho $x = 1$ ta thu được

$$\sum_i a_i = -1. \tag{12}$$

Đạo hàm cả hai vế rồi cho $x = 1$ ta thu được

$$\sum_i a_ib_i = 0. \tag{13}$$

Đạo hàm hai lần cả hai vế rồi cho $x = 1$ ta thu được $\sum_i a_ib_i(b_i-1) = 0$. Kết hợp với (13) ta thu được

$$\sum_i a_ib_i^2 = 0. \tag{14}$$

Tương tự ta thu được các đẳng thức với $k = 2, 3, \ldots, n-1$:

$$\sum_i a_ib_i^k = 0. \tag{15}$$

Đạo hàm n lần cả hai vế rồi cho $x = 1$ ta thu được

$$(-1)^n n! f(1) = \sum_i a_ib_i^n.$$

Vậy bài toán đưa về tính tổng $\sum_i a_ib_i^n$ theo các số n và b_i, biết rằng

$$\begin{cases} \sum_i a_i &= -1\\ \sum_i a_ib_i &= 0\\ \ldots\ldots\ldots & \\ \sum_i a_ib_i^{n-1} &= 0.\end{cases}$$

Xét $P(x) = \prod(x-b_i) = x^n - e_1x^{n-1} + \ldots + (-1)^ne_n$. Nhân theo vế với a_i ta có

$$a_ib_i^n - a_ie_1b_i^{n-1} + \ldots + (-1)^na_ie_n = 0.$$

Lấy tổng theo i suy ra

$$\sum_i a_ib_i^n = (-1)^n\prod_i b_i.$$

VỀ KỲ THI OLYMPIC TOÁN LẦN THỨ 23 TẠI PHÁP

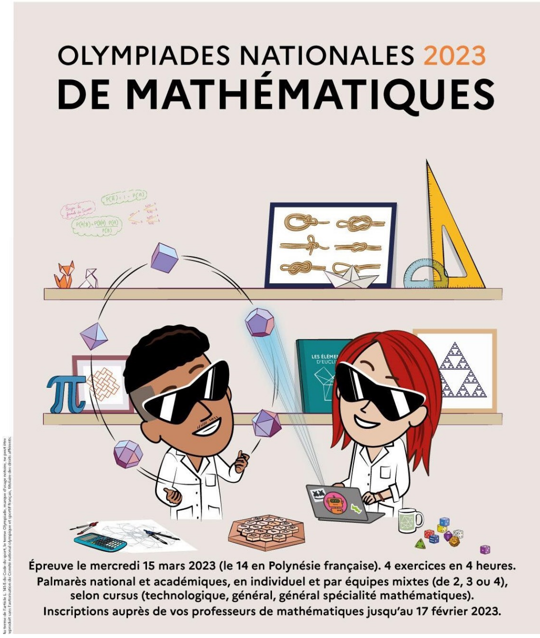
BÙI VĂN BIÊN[1]

Vài nét về kỳ thi

Kỳ thi Olympic Toán được tổ chức lần đầu tiên vào năm 2000 bởi bộ giáo dục đào tạo Pháp và hiệp hội Animath. Đây là kỳ thi dành cho những học sinh lớp 11 đang theo học tại chương trình Toán của Pháp cả trong và ngoài nước, nhằm mục đích phát triển sự tò mò, khả năng tìm tòi cũng như tư duy phê phán của học sinh thông qua việc xử lý hoặc cá nhân hoặc theo nhóm một số bài toán cụ thể. Bên cạnh đó, kỳ thi còn nhằm phát triển và nâng cao văn hóa khoa học và công nghệ, nhằm mục đích kích thích sự sáng tạo và chủ động của học sinh, khơi dậy trong học sinh niềm yêu thích với bộ môn Toán đặc biệt khích lệ các bạn nữ mạnh dạn hướng tới việc nghiên cứu khoa học. Kỳ thi cho phép học sinh tiếp cận các vấn đề Toán học theo cách mở đầy hứng thú thông qua những ví dụ nhấn mạnh mối liên hệ giữa Toán và các nghành khoa học khác. Chính vì vậy kỳ thi được tổ chức dựa trên tinh thần tự nguyện của học sinh và nội dung của đề thi chỉ gói gọn trong chương trình Toán cấp 2, lớp 10 và lớp 11.

Bắt đầu từ tháng 2 hàng năm, giáo viên bộ môn Toán lớp 11 sẽ đại diện đăng ký tham gia cho học sinh qua trang web của Sở giáo dục. Kỳ thi Olympic Toán lần thứ 23 tại Pháp đã diễn ra vào thứ 4 ngày 15 tháng 03 năm 2023, được tổ chức bởi chính các giáo viên bộ môn Toán và tại những trường có học sinh tham gia kỳ thi. Học sinh trải qua hai bài thi độc lập, mỗi bài thi kéo dài 120 phút trong cùng một ngày.

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité



Bài thi thứ nhất là bài thi cấp quốc gia bao gồm ba bài tập. Học sinh tham gia bài thi cấp quốc gia theo hình thức thi đơn. Mỗi học sinh tùy theo chương trình học chuyên hay không chuyên sẽ chọn hai trong ba bài tập trong đề thi, trong đó bài 1 dành chung cho tất cả các thí sinh, bài 2 dành cho các thí sinh theo chương trình chuyên, bài 3 dành cho các thí sinh không theo chương trình chuyên.

Bài thi số hai là bài thi cấp tỉnh bao gồm hai bài tập và điểm đặc biệt của bài thi này là học sinh có thể chọn hoặc thi đơn hoặc thi theo nhóm từ 2 tới 3 thí sinh thậm chí các thành viên trong nhóm có thể tới từ những lớp khác nhau trong cùng một khối và đặc khuyến khích những nhóm có sự tham gia của cả nam và nữ nhằm mục đích cổ vũ và phát huy khả năng làm việc nhóm của từng học sinh.

Hội đồng chấm thi được chỉ định và cũng được chia thành hai cấp: quốc gia và cấp tỉnh. Trong đó hội đồng cấp tỉnh một mặt chấm bài thi cấp tỉnh của các thí sinh ở tỉnh đó nhằm chọn ra những bài làm xuất sắc nhất để trao huy chương, bên cạnh đó còn chọn lựa từ những bài thi cấp quốc gia của tỉnh mình những bài làm xuất sắc nhất để gửi lên hội đồng cấp quốc gia. Qua đó, hội đồng cấp quốc gia xem xét và chọn ra trong những đề cử từ các tỉnh khác nhau những bài làm xuất sắc nhất để trao huy chương.

Dưới sự tài trợ của hiệp hội Animath, viện nghiên cứu tin học và tự động INRIA, Texas instrument, Casio, Ecole Polytechnique··· những học sinh đạt giải cấp quốc gia cùng gia đình và giáo viên Toán đã được mời tham dự lễ tổng kết trao giải đã diễn ra vào ngày 07.06.2023 tại Viện nghiên cứu về thế giới Ả rập, Paris. Qua đó, học sinh có cơ hội để tìm hiểu về lịch sử của kỳ thi Olympic Toán, gặp gỡ những nhà Toán học hàng đầu như và nghe báo cáo của các giáo sư và nghiên cứu sinh đang nghiên cứu về Toán. Đặc biệt hơn, những thí sinh có kết quả xuất sắc sẽ được cấp học bổng có cơ hội tham gia vào các trường hè cũng như những khóa thực tập để chuẩn bị cho những kỳ thi Olympic Toán khác ...

Đề thi Olympic Toán lần thứ 23.

Phần 1: Đề thi Olympic Toán cấp quốc gia năm 2023.

Bài 1 (Chung cho tất cả thí sinh).

Mạnh hơn nữa!

Một người chơi tráo bộ bài gồm n quân bài được đánh số từ 1 tới n, trong đó n là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 3. Sau khi trộn đều, người chơi ghi lại thứ tự từng quân bài nhận được. Ta gọi những số nhận được đó là một *liste*.

Số tự nhiên n được gọi là chiều dài của *liste*. Ví dụ trường hợp $n = 8$, một trong những *liste* có thể nhận được là $L = [2,5,7,6,1,8,4,3]$.

Với một *liste* cho trước, người chơi ghi được một điểm khi số của một quân bài trong *liste* lớn hơn số của quân bài nằm liền kề trước nó. Ví dụ với liste $L = [2,5,7,6,1,8,4,3]$, người chơi ghi được 3 điểm.

Ta gọi *score* là số điểm được ghi bởi người chơi. Ở ví dụ trên, *score* của người chơi là 3.

1. *Một vài ví dụ*

$a)$ Hãy cho một ví dụ khác về một *liste* với chiều dài 8 và *score* 3.

$b)$ Hãy tìm tất cả các *liste* có chiều dài $n = 3$ và xác định *score* tương ứng.

Trở lại trường hợp n tổng quát.

2. Hãy viết một hàm bằng ngôn ngữ Python phụ thuộc vào hai tham số *liste* L và chiều dài n của *liste* L. Biết rằng hàm đó cho ra kết quả là *score* của *liste* L.

3. Chứng minh rằng *score* là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 0, nhỏ hơn hoặc bằng $n-1$. Hãy tìm một *liste* mà ở đó *score* bằng 0 và một *liste* mà ở đó *score* bằng $n-1$.

4. Xét k là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1 và nhỏ hơn hoặc bằng $n-2$.

$a)$ Chứng minh rằng tồn tại một *liste* có chiều dài n và có *score* bằng k.

$b)$ Có thể tìm được hai *liste* có chiều dài n và có *score* bằng k hay không?

Ta ký hiệu $L_n(s)$ là số những *liste* có chiều dài n và có *score* bằng s.

5. Xác định $L_n(0)$ và $L_n(n-1)$.

6. Công thức hồi quy.

$a)$ Hãy tính giá trị $L_3(0)$, $L_3(1)$ và $L_3(2)$. Hãy nêu cách chèn vào I $[3,1,2]$ quân bài mang số 4 để nhận được một *liste* mới có *score* bằng 1.

$b)$ Hãy nêu cách chèn vào *liste* $[3,2,1]$ quân bài mang số 4 để nhận được một *liste* mới có *score* bằng 0.

$c)$ Hãy kiểm tra đẳng thức $L_4(1) = 2L_3(1) + 3L_3(0)$.

$d)$ Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$, ta có:

$$L_(n+1)(1) = 2L_n(1) + 3L_n(0).$$

$e)$ Với mỗi số tự nhiên $n \geq 3$ và số tự nhiên $k \geq 1$, biểu diễn $L_(n+1)(k)$ dựa vào $L_n(k)$ và $L_n(k-1)$.

Xác định bảng giá trị của $L_n(k)$ tương ứng với $n \in \{3,4,5\}$ và $k \in \{0,1,2,3,4\}$.

Bài 2 (Dành cho những thí sinh hệ phổ thông phổ quát theo chương trình chuyên).

Giảm vô hạn!

Gọi α là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 4. Ta xét phương trình (E) dưới đây với ẩn là bộ ba số nguyên $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^{\nvDash}$.

$$(E): x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha x_1 x_2 x_3.$$

Mục đích của bài tập này là chứng minh rằng nghiệm nguyên duy nhất của phương trình (E) là bộ ba $(0,0,0)$.

Phần 1.

Với hai số thực b, c cho trước, ta xét hàm số P được định nghĩa từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ bởi công thức $P(x) = x^2 + bx + c$. Số thực r được gọi là nghiệm của P nếu như $P(r) = 0$. Trong phần này, ta giả sử rằng P có hai nghiệm phân biệt r_1 và r_2. Ta suy ra rằng $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)$, với mọi số thực x.

1. Biểu diễn b và c theo nghiệm r_1 và r_2.

2. Giả sử rằng $b \leq 0$ và $c \geq 0$. Ta có thể nói gì về dấu của các nghiệm r_1 và r_2?

Phần 2.

$1a)$. Giả sử rằng bộ ba $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^{\nvDash}$ là nghiệm của phương trình (E). Chứng minh rằng bộ ba $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ cũng là nghiệm của phương trình (E).

$1b)$. Từ đó suy ra rằng, nếu tồn tại một bộ ba số nguyên khác $(0,0,0)$ là nghiệm của phương trình (E) thì tồn tại một bộ ba số tự nhiên khác $(0,0,0)$ là nghiệm của phương trình (E).

2. Nếu bộ ba $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^{\nvDash}$ là nghiệm của phương trình (E), ta có thể nói gì về bộ ba số nguyên (x_2, x_1, x_3)?

3. Từ đó suy ra rằng nếu phương trình (E) có nghiệm khác $(0,0,0)$ trong $\mathbb{Z}^{\nvDash}$ thì cũng có nghiệm (x_1, x_2, x_3) trong $\mathbb{N}^{\nvDash}$ khác $(0,0,0)$ sao cho $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

Phần 3.

Trong phần này, ta giả sử tồn tại một bộ ba số tự nhiên (x_1, x_2, x_3) khác $(0,0,0)$ là nghiệm của phương trình (E) thỏa mãn $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Ta cố định bộ ba (x_1, x_2, x_3).

1. Chứng minh rằng $x_1 > 0$.

2. Gọi Q là hàm số được định nghĩa từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ bởi công thức $Q(x) = x^2 - \alpha x_1 x_2 x + x_1^2 + x_2^2$. Một số thực r thỏa mãn $Q(r) = 0$ được gọi là nghiệm của Q.

$a)$ Với y là một số thực. Chứng minh rằng bộ ba (x_1, x_2, y) là nghiệm của phương trình (E), khi và chỉ khi, y là nghiệm của Q.

$b)$ Dựa vào đề bài, hãy chỉ ra một nghiệm của Q.

$c)$ Kiểm tra rằng $Q(x_2) = (3 - \alpha x_1)x_2^2 + x_1^2 - x_2^2$, từ đó suy ra rằng $Q(x_2) < 0$.

$d)$ Dấu của $Q(0)$ là gì?

$e)$ Chứng minh rằng Q có hai nghiệm phân biệt: một nghiệm cho ở ý $b)$, một nghiệm ký hiệu là y. Hãy sắp xếp những số $0, x_2, x_3$ và y theo thứ tự tăng dần và chứng minh rằng những số đó đôi một khác nhau.

$f)$ Chứng minh rằng (x_1, x_2, y) là bộ ba những số tự nhiên thỏa mãn phương trình (E).

3. Bằng cách lặp lại quá trình ở phần $3)$ ý $2)$ với bộ ba gồm x_1, x_2, y được xếp theo thứ tự tăng dần thay vì bộ ba (x_1, x_2, x_3), ta nhận được điều gì?

4. Từ những kết quả trên, hãy suy ra điều vô lý, từ đó kết luận về nghiệm nguyên của phương trình (E).

5. Chứng minh kết quả sau: "Với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $\alpha \in \mathbb{N}$ sao cho $\alpha > n \geq 2$. Phương trình $x_1^2 + x_2^2 + + x_n^2 = \alpha x_1 x_2 \ldots x_n$ với ẩn số là bộ gồm n số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ không có nghiệm nguyên nào khác ngoài bộ n số $(0, 0, \ldots, 0)$".

Bài 3 (Dành cho những thí sinh hệ phổ thông phổ quát không theo chương trình chuyên).

Mã dò và Mã hiệu chỉnh!

Một vài câu hỏi sơ bộ.

1. Xét hai số tự nhiên a, b. Chứng minh rằng tổng $a + b$ là một số tự nhiên chẵn khi và chỉ khi a và b cùng tính chẵn lẻ.

Mã hóa một tin nhắn.

Một tin nhắn trong bài tập này là một số M được mã hóa thông qua bộ bốn (x_1, x_2, x_3, x_4) với $x_1, x_2, x_3 v x_4$ là những "bits", tức là những số chỉ nhận giá trị hoặc 0 hoặc 1. Số M biểu diễn thông qua bộ bốn (x_1, x_2, x_3, x_4) được gọi là *nửa – octet* của thông tin và được định nghĩa bởi:

$$M = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4.$$

Ví dụ bộ bốn $(0, 0, 1, 1)$ biểu diễn cho số $M = 12$ bởi vì $0 + 2 \times 0 + 41 + 8 \times 1 = 12$.

$2a)$. Hãy tìm tin nhắn M được mã hóa bởi bộ bốn $(1, 0, 0, 1)$.

$2b)$. Hãy tìm một mã hóa của tin nhắn $M = 10$. Câu hỏi tương tự với $M = 15$.

$2c)$. Tồn tại hay không một mã hóa của tin nhắn $M = 20$?

$2d)$. Hãy tìm tất cả các tin nhắn M có thể mã hóa được thông qua bộ bốn được định nghĩa ở trên.

Đôi khi những tin nhắn bị sai lệch so với bản gốc(hay còn gọi là "bị hỏng") trong quá trình truyền do phần cứng bị lỗi hoặc do những tín hiệu giả. Các lỗi thường thay đổi các "bits", tức là 0 chuyển thành 1 hoặc 1 chuyển thành 0. Do đó các kỹ thuật để phát hiện cũng như để sửa chữa những bất thường như thế đã được phát triển. Đó cũng là mục đích được đề cập trong những phần tiếp theo của bài tập này.

Mã hóa một tin nhắn với sự bảo vệ lỗi.

3. Nguyên tắc bit chẵn lẻ.

Bộ bốn mã hóa (x_1, x_2, x_3, x_4) được chuyển thành bộ năm mã hóa (x_1, x_2, x_3, x_4, y), trong đó bit y phụ thuộc vào tính chẵn lẻ, cụ thể hơn $y = 0$ nếu như tổng $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ chẵn và $y = 1$ nếu như tổng đó là lẻ. Ta gọi y là bit chẵn lẻ. Chính bộ năm này sẽ được truyền đi và nó đại diện cho cùng một tin nhắn $M = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4$ tương ứng với mã hóa (x_1, x_2, x_3, x_4). Lưu ý rằng các bit chứa thông tin chính x_1, x_2, x_3, x_4 và bit chẵn lẻ y được truyền đi một cách thận trọng.

Ta xét ví dụ về tin nhắn $M = 12$ được mã hóa bởi bộ bốn $(0, 0, 1, 1)$, ở đây $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 + 0 + 1 + 1 = 2$ là một số chẵn nên $y = 0$. Thay vì truyền đi bộ bốn $(0, 0, 1, 1)$ thì ta truyền đi bộ năm $(0, 0, 1, 1, 0)$.

$a)$ Hãy xác định bit chẵn lẻ y liên kết với bộ bốn $(1, 0, 0, 1)$ mã hóa cho tin nhắn $M = 9$.

$b)$ Sau khi tin nhắn mã hóa được truyền đi, ta nhận được bộ năm $(1, 1, 0, 1, 0)$ với bít chẵn lẻ được xem là đáng tin cậy. Chứng minh rằng thông tin do mã truyền tải đã bị hỏng.

$c)$ Nếu ta chắc chắn về độ tin cậy của bit chẵn lẻ, liệu ta có thể phát hiện ra sự sai lệch cũng như phát hiện ra vị trí sai lệch trong những trường hợp sau hay không?

- Trong trường hợp chỉ có một bit chứa thông tin bị sai lệch khi được truyền đến?
- Trong trường hợp có hai bit chứa thông tin bị sai lệch khi được truyền đến?

4. Nguyên tắc bit điều khiển.

Bộ bốn mã hóa (x_1, x_2, x_3, x_4) được chuyển thành bộ bảy mã hóa $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$ trong đó $y_1 = 0$ nếu $x_1 + x_2 + x_3$ chẵn, $y_1 = 1$ nếu ngược lại, $y_2 = 0$ nếu $x_2 + x_3 + x_4$ chẵn, $y_2 = 1$ nếu ngược lại và $y_3 = 0$ nếu $x_1 + x_3 + x_4$ chẵn, $y_3 = 1$ nếu ngược lại. Các bit y_1, y_2, y_3 được gọi là bit điều khiển. Các bit chứa thông tin chính là x_1, x_2, x_3, x_4. Bộ bảy $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$ vẫn mã hóa cùng một tin nhắn $M = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4$.

$a)$ Hãy xác định các bit điều khiển y_1, y_2, y_3 liên kết với bộ bốn $(1, 0, 0, 1)$ mã hóa cho tin nhắn $M = 9$.

$b)$ Tại sao ta chắc chắn rằng bộ bảy nhận được $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$ là một sai lệch trong quá trình truyền tin với điều kiện ta chắc chắn về độ tin cậy của các bit điều khiển?

$c)$ Giả sử rằng ta chắc chắn về tính chính xác của các bit điều khiển, trong trường hợp có đúng một trong bốn bit chứa thông tin bị sai, tại sao ta có thể phát hiện ra rằng đã có sự sai lệch và tại sao ta có thể xác định ra vị trí cũng như sửa chữa sự sai lệch đó? Liệu chúng ta có thể phát hiện lỗi khi biết rằng có đúng hai trong bốn bit chứa thông tin bị sai hay không?

Phần 2: Đề thi Olympic Toán cấp tỉnh – NICE năm 2023.

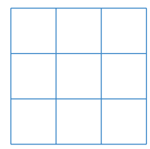
Đề thi dành cho những thí sinh theo chương trình chuyên và tham gia dưới hình thức thi theo nhóm.

Bài 1. Những khối số học.

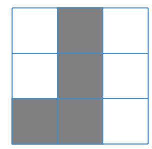
Trong bài tập này, n là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 2.

Ta định nghĩa Khối kích thước n là một bảng trắng gồm n dòng và n cột trong đó một số ô được tô màu đen theo nguyên tắc sau: Nếu một ô có màu đen thì ô ở ngay dưới dưới ô đó cũng có màu đen.

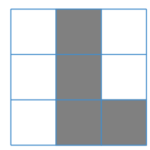
Ở ví dụ dưới đây, hình 1, hình 2 và hình 3 là những Khối khác nhau có kích thước 3. Còn hình 4 không phải là một Khối.



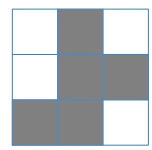
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Lưu ý rằng một khi đã được vẽ, ta không thể đảo ngược một Khối.

1. Hãy vẽ tất cả những Khối có kích thước 2.
2. Có bao nhiêu Khối có kích thước 6?

Với mỗi ô trong một Khối kích thước n, ta gán số như sau:

- Nếu ô đó màu trắng ta gán số 1.
- Nếu ô đó màu đen ở cột thứ k của Khối thì ta gắn với số nguyên tố đứng ở vị trị thứ k theo thứ tự tăng dần của bảng số nguyên tố. Ví dụ số nguyên tố đầu tiên là 2, số nguyên tố ở vị trí thứ 2 là 3, ở vị trí thứ 3 là 5, ở vị trí thứ 4 là $7 \ldots$

Với mỗi Khối kích thước n, ta liên kết với một số tự nhiên duy nhất i được tính bằng cách nhân tất các những số được gán cho n^2 ô ở trong Khối đó.

Trong bài tập này, ta ký hiệu $B_{i,n}$ là Khối có kích thước n gán với số tự nhiên i được tính như trên.

Ví dụ ở Khối được cho bởi hình 1 phía trên, ta có $n = 3$ và $i = 1^9 = 1$, ta gọi Khối đó là $B_{1,3}$. Tương tự như vậy, đối với Khối cho bởi hình 2, ta có $n = 3$ và $i = 1^5 \times 2 \times 3^3 = 54$ ta được Khối tương ứng là $B_{54,3}$.

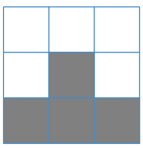
3. Hãy vẽ Khối $B_{90,3}$ có kích thước 3 và được gán với số 90.

4. Tồn tại hay không một Khối kích thước 3 liên kết với số tự nhiên 2500?

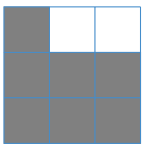
5. Xác định số tự nhiên lớn nhất liên kết với Khối kích thước 3.

Ta gọi i và j là hai số tự nhiên liên kết với hai Khối kích thước n. Ta nói rằng Khối $B_{i,n}$ nằm khít trên Khối $B_{j,n}$ nếu như tất cả các ô được tô màu đen trên Khối $B_{i,n}$ cũng được tô màu đen trên Khối $B_{j,n}$.

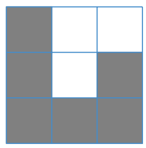
Ví dụ dưới đây cho thấy Khối được cho bởi hình 5 nằm khít trên Khối được cho bởi hình 6 nhưng không nằm khít trên Khối được cho bởi hình 7.



Hình 5



Hình 6



Hình 7

6a) Hãy vẽ tất cả những Khối nằm khít trên Khối được cho bởi hình 5 phía trên.

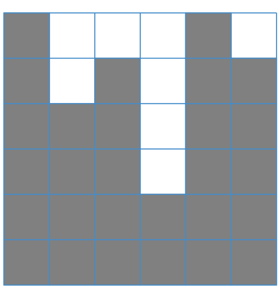
6b) Xác định những số tự nhiên i liên kết với từng Khối được vẽ ở ý 6a)

7. Với mỗi số tự nhiên i và j liên kết với hai Khối kích thước n.

a) Chứng minh rằng nếu Khối $B_{i,n}$ nằm khít trên Khối $B_{j,n}$ thì i là ước của j.

b) Ngược lại, chứng minh rằng nếu i là ước của j thì Khối $B_{i,n}$ nằm khít trên Khối $B_{j,n}$.

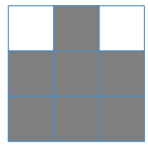
c) Tìm số những ước dương của số tự nhiên i tương ứng với Khối kích thước 6 dưới đây:



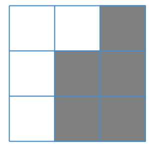
d) Hãy xác định tất cả những số tự nhiên i liên kết với những Khối kích thước 3 sao cho số đó có đúng 18 ước dương.

e) Có bao nhiêu số tự nhiên i liên kết với những Khối kích thước 3 sao cho số đó có đúng 5 ước dương.

Một Khối được gọi là Khối phản chiếu nếu như nó có ít nhất một trục đối xứng. Ở ví dụ dưới đây, ta thấy Khối hình 8 là Khối phản chiếu còn ở hình 9 không phải Khối phản chiếu.



Hình 8



Hình 9

8. Hãy chứng minh tính đúng sai của những mệnh đề sau.

a) Tồn tại một Khối phản chiếu kích thước 3 có ít nhất hai trục đối xứng.

b) Khối $B_{270,3}$ là một Khối phản chiếu.

c) Tồn tại ít nhất 20 Khối phản chiếu kích thước 3.

d) Tồn tại một Khối phản chiếu kích thước 3 liên kết với số tự nhiên có đúng 36 ước.

e) Với mỗi số tự nhiên dương k, tồn tại một Khối phản chiếu liên kết với số tự nhiên có đúng k ước.

Bài 2. Số xoắn ốc.

Bằng cách viết các số tự nhiên dương theo hình xoắn ốc, ta nhận được vô số những vành đồng tâm.

65	64	63	62	61	60	59	58	57
66	37	36	35	34	33	32	31	56
67	38	17	16	15	14	13	30	55
68	39	18	5	4	3	12	29	54
69	40	19	6	1	2	11	28	53
70	41	20	7	8	9	10	27	52
71	42	21	22	23	24	25	26	51
72	43	44	45	46	47	48	49	50
73	74	75	76	77	78	79	80	81

Vành số 1 gồm những số tự nhiên từ 2 tới 9, vành số 2 gồm những số tự nhiên từ 10 tới

25, vành thứ 3 gồm những số tự nhiên từ 26 tới 49 ...

Phần A. Từ vành này qua vành khác.

Vành 1 được tạo thành bởi 8 số tự nhiên dương.

1. Có bao nhiêu số tự nhiên ở vành 2?
2. Có bao nhiêu số tự nhiên tạo nên vành 3?
3. Có bao nhiêu số tự nhiên tạo nên vành 6?

Với một số tự nhiên n cố định, có bao nhiêu số tự nhiên tạo nên vành thứ n?

Phần B. Đa thức sinh bởi đường chéo.

Ta quan tâm tới dãy số tăng $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gồm những số tự nhiên thuộc những vành liền kề của hình xoắn ốc và nằm thẳng hàng theo một đường chéo.

Hình bên cho ta một ví dụ về một dãy như thế với $u_0 = 22, u_1 = 44$ và $u_2 = 74$.

-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	15	14	13	-	-
-	-	-	5	4	3	12	-	-
-	-	-	6	1	2	11	-	-
-	-	-	7	8	9	10	-	-
-	-	-	u_0	-	-	-	-	-
-	-	u_1	-	-	-	-	-	-
-	u_2	-	-	-	-	-	-	-

Trong phần này ta có thể sử dụng mà không cần phải chứng minh lại công thức tổng của những số tự nhiên từ 1 tới n sau đây, với n là số tự nhiên dương:

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Đường chéo 1.

Dãy số được được nghĩa với mỗi số tự nhiên n bởi công thức tổng quát $u_n = 4n^2+12n+7$ tạo nên một đường chéo của hình xoắn ốc. Trong năm số hạng đầu tiên của dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, có bao nhiêu số nguyên tố? Giải thích.

2. Đường chéo 2.

Xét dãy những số tự nhiên nằm trên đường chéo của hình xoắn ốc theo thứ tự: $u_0 = 1, u_1 = 9, u_2 = 25, u_3 = 49, u_4 = 81\ldots$. Không cần chứng minh, với mỗi số tự nhiên n, hãy xác định số hạng tổng quát u_n của dãy.

3. Đường chéo 3.

Xét dãy những số tự nhiên nằm trên đường chéo của hình xoắn ốc theo thứ tự: $u_0 = 4, u_1 = 16, u_2 = 36, u_3 = 64\ldots$. Ta chấp nhận kết quả rằng tồn tại ba số tự nhiên a, b, c sao cho với mỗi số tự nhiên n, số hạng tổng quát u_n của dãy này được viết dưới dạng $u_n = an^2+bn+c$. Hãy xác định giá trị của a, b, c.

4. Tổng quát hóa.

Với mỗi số tự nhiên dương n, ta đặt $v_n = u_n - u_{n-1}$ và ta chấp nhận kết quả $v_{n+1} = v_n + 8$.

$a)$ Với mỗi số tự nhiên dương n, hãy biểu diễn v_n theo n và v_1.

$b)$ Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên dương n, ta có: $u_n - u_0 = 4n(n-1)+nv_1$.

$c)$ Từ đó chỉ ra rằng tồn tại hai số tự nhiên d và e sao cho với mỗi số tự nhiên n, số hạng tổng quát u_n được cho bởi công thức $u_n = 4n^2+dn+e$. Hãy biểu diễn d và e theo u_0 và u_1.

$d)$ Hãy xác định công thức tổng quát của dãy số u_n sinh ra đường chéo của hình xoắn ốc bắt đầu bằng những số nguyên tố: $u_0 = 5$ và $u_1 = 19$. Hãy xác định giá trị lớn nhất của n để u_n là số nguyên tố.

Phần C. Một vành cho một năm.

1. Số tự nhiên 2023 nằm trên vành thứ bao nhiêu trong hình xoắn ốc? Giải thích.
2. Xác định số tự nhiên nhỏ nhất và số tự nhiên lớn nhất của vành được tìm thấy ở ý 1.

Tài liệu tham khảo

[1] Les sujets et corrigés des olympiades de mathématiques 2023 | Site pédagogique de Mathématiques (ac-nice.fr).

[2] Les Olympiades nationales de mathématiques | Ministère de l'Education Nationale et de la Jeunesse.

GÓC TOÁN OLYMPIC

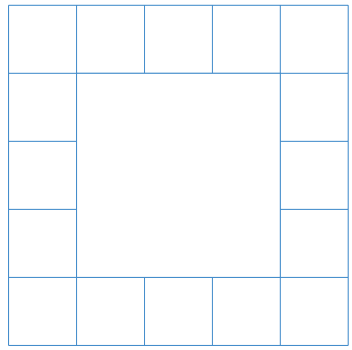
Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày với các bạn lời giải các bài toán trong trong kỳ thi toán của Đan Mạch mang tên nhà toán học Georg Mohr đăng trong số tháng $4/2023$.

OC37. Một con ếch nhảy vào các số nguyên trên trục số. Nếu đang ở một số n chẵn, bước tiếp theo nó sẽ nhảy đến số $\frac{n}{2}$. Nếu đang ở một n số lẻ, nó sẽ nhảy đến số $n+5$. Tại một thời điểm nó nhảy vào số 25. Hỏi trước đó 3 bước nó có thể ở những vị trí nào?

Lời giải. Do $n+5$ là chẵn nếu n là lẻ nên con ếch luôn nhảy từ một số lẻ đến một số chẵn. Vì vậy khi con ếch ở một số lẻ m, trước đó một bước nó bắt buộc phải ở số chẵn $2m$. Còn khi con ếch ở một số chẵn m, trước đó một bước nó có 2 khả năng: ở số chẵn $2m$ hoặc ở số lẻ $m-5$.

Theo lý luận ở trên ta có: khi con ếch ở số 25, trước đó một bước nó phải ở số 50. Trước đó 2 bước, nó phải ở số 100 hoặc 45. Trước đó 3 bước có 3 vị trí ếch có thể ở là: 90, 95 và 200.

OC38. Các số $1, 2, 3, \cdots, 16$ được đặt trong 16 ô vuông xung quanh một bảng ô vuông cỡ 5×5 như hình bên sao cho tổng của 5 số trên mỗi cạnh của hình vuông là bằng nhau. Tổng nhỏ nhất có thể có của bốn số trong các ô vuông ở góc là bao nhiêu?



Lời giải. Đặt S là tổng của 4 số ở góc và a là tổng của các số trong mỗi hàng, cột của bảng. Khi cộng tổng của cả 4 hàng, cột của bảng lại với nhau, các số ở góc được tính hai lần. Như vậy ta có

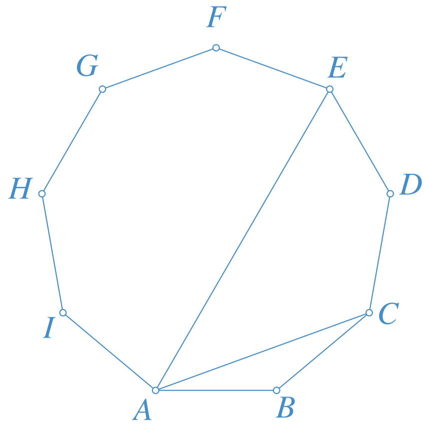
$$4a = 1+2+\ldots+16+S.$$

Ta nhận được $4a = 136+S$, do đó S phải chia hết cho 4. Tổng của bốn số nhỏ nhất là $1+2+3+4=10$, không chia hết cho 4. Do S chia hết cho 4, ta có $S \geq 12$. Ví dụ sau cho thấy trường hợp $S=12$ có thể xảy ra:

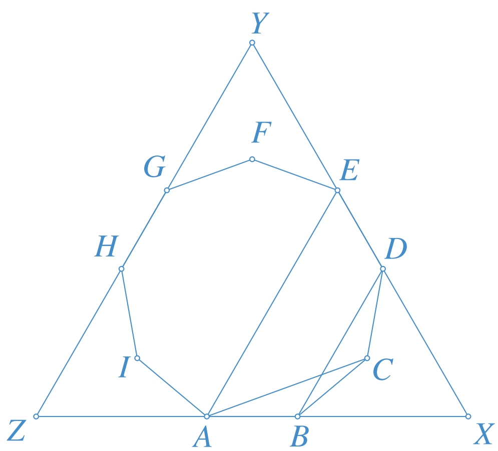
2	7	15	10	3
11				12
14				13
4				8
6	5	16	9	1

Vậy tổng nhỏ nhất có thể của bốn số ở góc là 12.

OC39. Cho hình đa giác đều 9 cạnh $ABCDEFGHI$ như hình vẽ. Chứng minh rằng $AB+AC=AE$.



Lời giải.



Kéo dài các cạnh AB, DE, GH để chúng cắt nhau tạo thành tam giác XYZ như hình vẽ. Do tính đối xứng, ta có tam giác XYZ đều và các đoạn thẳng EA, DB đều song song với GH. Do đó XDB và XEA cũng là các tam giác đều. Từ đó chúng ta nhận được điều cần chứng minh:

$$AE = AX = AB + BX = AB + BD = AB + AC.$$

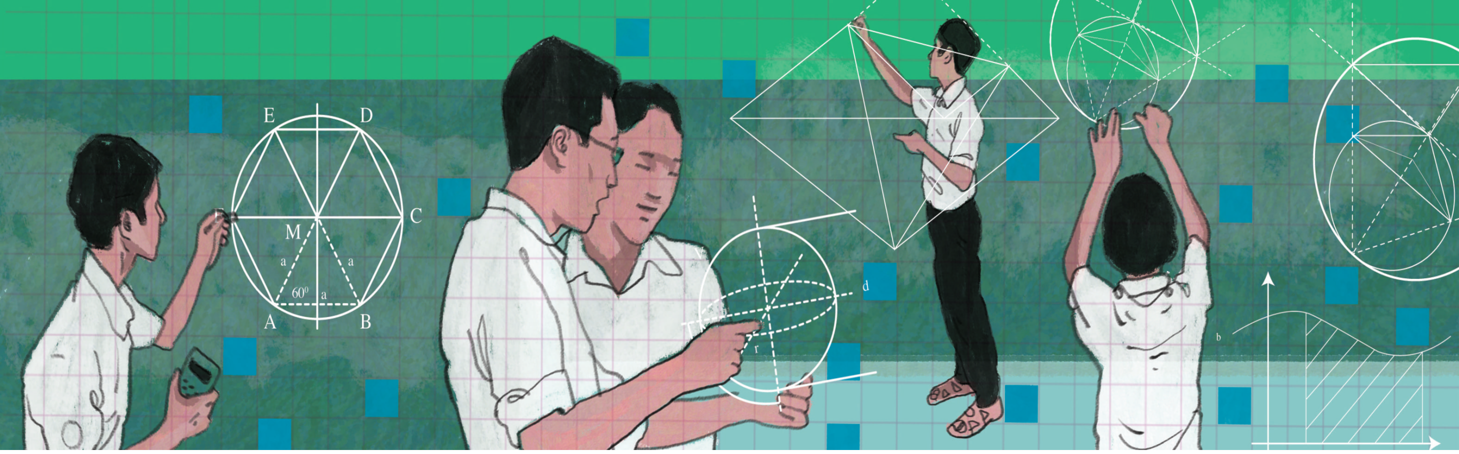
Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc ba bài toán trong kỳ thi Olympic toán Tuymaada năm 2022 của nước cộng hòa Sakha (Yakutia), thuộc Liên bang Nga. Các bài toán này phù hợp với trình độ học sinh lớp $9-10$.

OC46. Arnim và Brentano có một chiếc bình nhỏ đựng 1500 viên kẹo trên bàn và một túi lớn đựng kẹo dự phòng dưới gầm bàn. Họ thay phiên nhau chơi một trò chơi với Arnim bắt đầu trước. Ở mỗi lượt đi, người chơi có thể ăn 7 viên kẹo trong bình hoặc lấy 6 viên kẹo từ túi bên dưới và thêm chúng vào bình. Người chơi không được lấy kẹo trong túi dưới gầm bàn hai lần liên tiếp. Người chơi được tuyên bố là người chiến thắng nếu làm cho chiếc bình rỗng sau lượt chơi của mình. Trong mọi trường hợp khác, nếu một người chơi không thể thực hiện được nước đi trong lượt của mình, trò chơi được tuyên bố là hòa. Liệu người nào có chiến lược để luôn chiến thắng?

OC47. Cho M là trung điểm của cạnh AB trong tam giác đều ABC. điểm D thuộc cạnh BC sao cho $BD : DC = 3 : 1$. Giả sử T là điểm trên đường thẳng đi qua C và song song với MD sao cho $\angle CTA = 150^\circ$. Tìm số đo $\angle MTD$.

OC48. Cho các số nguyên a, b, c và số nguyên tố lẻ p. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên x và y sao cho p là ước của

$$x^2 + y^2 + ax + by + c.$$



HÌNH CÓ TRỤC ĐỐI XỨNG

NGUYỄN THỤY VIỆT ANH[1]

LTS. Góp phần nâng cao chất lượng giảng dạy Chương trình Toán phổ thông mới, Tòa soạn xin giới thiệu chia sẻ của cô giáo Nguyễn Thụy Việt Anh về một số ý tưởng trong việc dạy bài Hình có trục đối xứng, môn Toán lớp 6. Chúng tôi mong tiếp tục nhận được nhiều chia sẻ từ các thầy cô giáo.

Mục tiêu. Về kiến thức: Nhận biết được hình có trục đối xứng; trục đối xứng của các hình hình học đơn giản. Về năng lực: Biết được trục đối xứng của một hình trên giấy bằng cách gấp đôi tờ giấy; cách gấp giấy để cắt chữ hoặc một số hình đơn giản có trục đối xứng. Về phẩm chất: Bồi dưỡng trí tưởng tượng, hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho học sinh.

Thiết bị dạy học và học liệu. Đối với giáo viên: Một số bức hình có trục đối xứng hoặc đồ vật hay biểu tượng có trục đối xứng, một số mẫu chữ cái hoặc số có trục đối xứng, giấy màu hoặc bìa cứng, kéo và máy tính (nếu có). Đối với học sinh: Giấy màu hoặc bìa cứng, kéo.

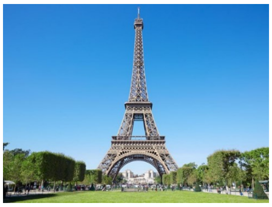
Tiến trình dạy học.

1. Mở đầu

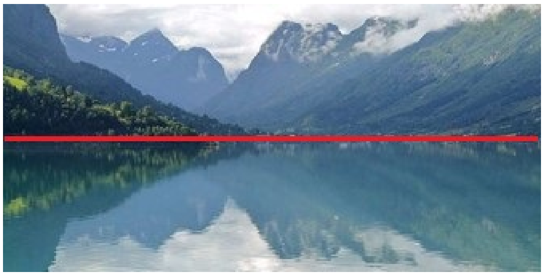
Mục tiêu: Tạo tình huống vào bài học từ hình ảnh thực tế, ứng dụng thực tế từ các hình trong bài; học sinh hình dung được một cách sơ khai về dạng hình ảnh của một hình trong tự nhiên có trục đối xứng.

Thực hiện: Giáo viên chiếu hình ảnh hoặc video của một số hình ảnh có tính đối xứng trục. (Giáo viên có thể vạch đường kẻ dọc cho học sinh nhận xét nửa bên trái và nửa bên phải của hình; đối với mặt hồ thì nhận xét phía trên mặt hồ và bóng phía dưới nước).

Khuê Văn Các



Tháp Eiffel.



Mặt hồ.

Lớp thảo luận về nhận định: "Trong cuộc sống, chúng ta hay gặp rất nhiều hình ảnh đẹp. Nếu như các em để ý một chút thì sẽ thấy rằng các hình ảnh đều có sự cân đối, hài hòa".

[1] *Trường Liên cấp Hội nhập Quốc tế iSchool Quảng Trị.*

Đặt vấn đề: Điều gì đã đem lại sự cân đối, hài hòa đó?

Giáo viên giới thiệu qua nội dung bài học:

- Nhận biết hình có trục đối xứng và hình có tâm đối xứng.
- Nhận biết trục đối xứng và tâm đối xứng của một số hình đơn giản.
- Gấp giấy để cắt được một số hình có trục đối xứng hoặc tâm đối xứng đơn giản.

2. Hình thành kiến thức mới

2.1 *Hình có trục đối xứng trong thực tế*

Mục tiêu: Học sinh trình bày được khái niệm và nhận biết được hình có trục đối xứng và trục đối xứng của một hình, tìm được ví dụ thực tế về hình có trục đối xứng để biết được một số ứng dụng tính đối xứng của hình trong đời sống.

Thực hiện: Giáo viên giới thiệu một số thao tác để minh họa tính đối xứng trục, ví dụ:

- Mở video có hình con bướm ở trong tự nhiên và đặt câu hỏi về hai cánh của con bướm;
- Gấp đôi hình tròn theo một đường thẳng đi qua tâm và yêu cầu nhận xét về hai nửa hình tròn sau khi gấp;
- Gấp đôi một tờ giấy A4, rồi dùng kéo cắt một đường sau đó mở ra. Từ đó giáo viên đi đến khái niệm: "Nếu có một đường thẳng chia một hình thành hai phần mà khi gấp hình theo đường thẳng đó, ta thấy hai phần chồng khít lên nhau thì hình đó là hình có trục đối xứng và đường thẳng nói trên là trục đối xứng của hình."

Trò chơi "Ai nhanh hơn?"

Giáo viên chuẩn bị trước ở nhà những tấm thẻ có các chữ cái $A, B, C, \ldots$ Chia lớp thành 2 đội hoặc 3 đội (tùy vào số lượng học sinh mỗi lớp). Trong vòng 1 phút, đội nào gắn được nhiều hơn và nhanh hơn những tấm thẻ có các chữ cái có trục đối xứng lên bảng sẽ là đội chiến thắng.

Hình ảnh các chữ cái (Ảnh: Internet).

2.2 *Trục đối xứng của một số hình phẳng*

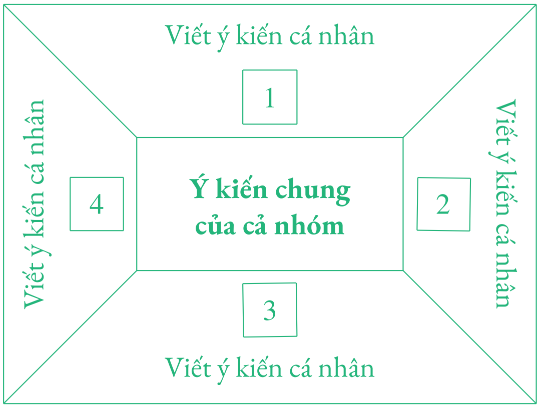
Mục tiêu: Nhận biết được trục đối xứng của hình tròn, hình thoi, hình chữ nhật. Biết được số trục đối xứng của các hình trên. Gấp giấy để tìm trục đối xứng của đoạn thẳng, hình tam giác đều, hình vuông, hình lục giác đều. Học biết được một hình có thể có nhiều hoặc thậm chí là vô số trục đối xứng. Biết cách gấp giấy để cắt được các chữ có trục đối xứng đơn giản. Hình dung được toàn bộ một hình có trục đối xứng khi chỉ được biết một nửa hình đó. Hình dung được trục đối xứng của một hình thông qua sự đối xứng của các chi tiết.

Thực hiện: chia thành nhóm và phát cho mỗi nhóm một tờ giấy A0 để làm các nội dung sau:

- Vẽ một đường tròn trên giấy rồi cắt theo nét vẽ ta được một hình tròn. Gấp đôi hình tròn đó theo một đường thẳng đi qua tâm. Em hãy cho biết trục đối xứng của hình tròn là đường thẳng nào?
- Cắt một hình thoi bằng giấy. Hãy tìm trục đối xứng của nó bằng cách gấp giấy. Trục đối xứng của nó là đường thẳng nào? Em tìm được mấy trục đối xứng?
- Vẽ rồi cắt một hình chữ nhật bằng giấy. Hãy tìm trục đối xứng của nó bằng cách gấp giấy. Trục đối xứng của nó là đường thẳng nào? Em tìm được mấy trục đối xứng?

Thảo luận theo phương thức "khăn trải bàn"

Trên giấy A0 chia thành các phần, gồm phần chính giữa và các phần xung quanh được chia theo số thành viên của nhóm (ví dụ nhóm 4 người). Mỗi người ngồi vào vị trí tương ứng với từng phần xung quanh.

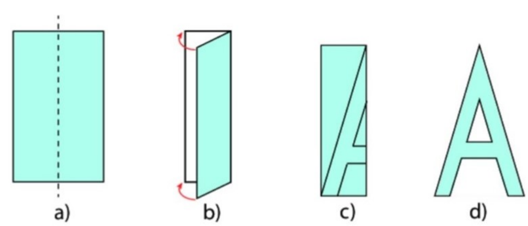


Sơ đồ kỹ thuật "Khăn trải bàn".

Mỗi cá nhân làm việc độc lập trong khoảng vài phút, tập trung suy nghĩ để làm bài tập theo cách nghĩ, cách hiểu riêng của mỗi cá nhân và viết vào phần giấy của mình trên tờ A0. Trên cơ sở ý kiến của mỗi cá nhân, học sinh thảo luận nhóm, thống nhất ý kiến và viết vào phần chính giữa của tờ giấy A0 "khăn trải bàn".

Trong trường hợp số học sinh trong nhóm quá đông, không đủ chỗ trên "khăn trải bàn", giáo viên có thể phát cho học sinh các mảnh giấy nhỏ để học sinh ghi ý kiến cá nhân, sau đó đính vào phần xung quanh "khăn trải bàn". Những ý kiến trùng nhau có thể đính chồng lên nhau. Những ý kiến không thống nhất, cá nhân có quyền bảo lưu và được giữ lại ở phần xung quanh của "khăn trải bàn".

Học sinh thảo luận nhóm và trình bày kết quả theo kỹ thuật "Khăn trải bàn", giáo viên phân tích, dẫn dắt, cho học sinh rút ra nhận xét.



Cắt chữ: Giáo viên hướng dẫn và làm mẫu cắt chữ A theo các bước:

Thực hiện tương tự với các chữ E, T.

3. Củng cố

Giáo viên nhắc lại kiến thức bài học bằng sơ đồ tư duy để khắc sâu kiến thức.

Sử dụng Canva để vẽ sơ đồ tư duy.

Tài liệu tham khảo

[1] Bộ Giáo dục và Đào tạo, Dự án Việt – Bỉ (2010), *Dạy và học tích cực – Một số phương pháp và kỹ thuật dạy học*, NXB Đại học Sư phạm.

[2] Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên), Nguyễn Cao Cường, Doãn Minh Cường, Sĩ Đức Quang, Lưu Bá Thắng (2021), *Bài tập Toán 6, Tập một, Kết nối tri thức với cuộc sống*, NXB Giáo dục Việt Nam.

[3] Hà Huy Khoái (Tổng Chủ biên) – Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên) – Nguyễn Cao Cường – Trần Mạnh Cường – Doãn Minh Cường – Sĩ Đức Quang – Lưu Bá Thắng (2021), *Sách giáo khoa Toán 6 – Tập một, Kết nối tri thức với cuộc sống*, NXB Giáo dục Việt Nam.

[4] Hà Huy Khoái (Tổng Chủ biên) – Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên) – Nguyễn Cao Cường – Trần Mạnh Cường – Doãn Minh Cường – Sĩ Đức Quang – Lưu Bá Thắng (2021), *Sách giáo viên Toán 6, Kết nối tri thức với cuộc sống*, NXB Giáo dục Việt Nam.

CÁC NHÀ TOÁN HỌC HY LẠP
Bài 5: Archimedes

TẠ DUY PHƯỢNG[1]

Nhập đề. Archimedes (287 – 212 trước CN) sống mãi với nhân loại bởi những những công trình toán học, những cống hiến của ông trong kỹ thuật và trong công cuộc bảo vệ đất nước, và còn bởi những huyền thoại về ông (xem, thí dụ, [9]).

Ông là con trai của Phidias, một nhà thiên văn học, người bà con và người bạn của vua Hieron II xứ Syracuse. Vì vậy, Archimedes đã được vua Hieron II cấp học bổng đi du học ở Alexandria (trung tâm khoa học và văn hóa thời bấy giờ) từ năm 11 tuổi. Tại Alexandria, ông đã nghiên cứu toán học với những học trò của Euclid. Ông có quan hệ thân thiết với các nhà toán học nổi tiếng và có thói quen thông báo những khám phá toán học của mình cho Eratosthenes và những người khác trước khi chúng được phổ biến rộng rãi.

Sau khi trở về Syracuse, ông dành toàn bộ cuộc đời mình cống hiến cho toán học.

Bài viết này giới thiệu đôi nét *Con người và Sự nghiệp* của Archimedes, những đóng góp trong toán học, vị trí của ông trong toán học Hy Lạp và toán học hiện đại qua các tác phẩm ông để lại.

Archimedes và bơm xoắn trên tem của Italia. Có thể tìm hiểu nguyên lý vận hành của bơm xoắn Archimedes qua các video trên mạng internet.

Những tác phẩm và thành tựu khoa học của Archimedes. Khi học ở Alexandria,

[1] *Cộng tác viên Viện Toán học.*

Archimedes đã chế tạo ra *bơm xoắn* hay *bơm trục vít* (water–screw hay screw pump), sau này mang tên bơm xoắn Archimedes, giải quyết vấn đề thời sự của xã hội lúc bấy giờ là nhu cầu bơm nước từ dưới sông Nile lên tưới ruộng. Ngày nay, nguyên lý vận hành của bơm xoắn Archimedes vẫn được ứng dụng trong tất cả các máy bơm có trục xoắn.

Móng thép Archimedes được sử dụng trong chiến tranh chống quân xâm lược La Mã.

Trong công cuộc bảo vệ thành phố quê hương Syracuse trước sự xâm lược của quân đội La Mã, Archimedes đã chế tạo ra rất nhiều máy móc (súng bắn đá, ròng rọc, cần cẩu,...) phục vụ cho quân đội. Những máy móc này đã làm kinh hoàng lính La Mã đến mức khi nhìn thấy một đoạn dây thừng hoặc một cây gỗ nhô ra phía trên bức tường thành, họ đã khóc và thét lên: "Nó đấy!" và tưởng tượng ra Archimedes đang khởi động một động cơ nào đó chống lại họ, và quay lưng bỏ chạy.

Hệ thống gương lõm đốt cháy tàu. Ảnh minh họa: Wearethemighty

Câu chuyện về Archimedes đốt cháy các con tàu La Mã bằng cách sắp xếp các gương lõm được tìm thấy trong tác phẩm của Lucian (125 – 180 Công nguyên). Tuy nhiên, sau nhiều thí nghiệm thành công được thực hiện nghiêm túc vào thế kỷ XX, người ta vẫn nghi ngờ câu chuyện này, vì vũ khí này quá phức tạp, quá tốn kém và ít hiệu quả (phụ thuộc thời tiết,...) so với các vũ khí khác (thí dụ, mũi tên tẩm dầu lửa, súng phun lửa,...).

Súng phun lửa. Ảnh minh họa: Wearethemighty.

Toán học của Archimedes. Archimedes thường được biết đến như là nhà phát minh các thiết bị cơ khí với sự sáng tạo tài tình, hơn là những phát minh toán học lý thuyết. Nhưng hơn ai hết, ông là nhà toán học vĩ đại, có thể là vĩ đại nhất mọi thời đại, và là người đầu tiên biết ứng dụng toán học lý thuyết ở trình độ cao vào giải quyết các bài toán nảy sinh từ thực tế, đồng thời, các bài toán thực tế cũng giúp Archimedes phát minh ra những lý thuyết toán học mới (thủy tĩnh học,...).

Một số tác phẩm của Archimedes với những lời bình luận sâu sắc của Eutocius vào đầu thế kỷ VI đã được tìm thấy trong một ấn phẩm ở gần Byzantium. Ấn bản này là cơ sở của một số phần trong ba bộ sưu tập các tác phẩm của Archimedes được viết trên giấy da, đã từng tồn tại ở Byzantium vào thế kỷ X–XI. Năm 1906, J. L. Heiberg, người biên tập các văn bản của Archimedes, đã giải mã và công bố nội dung toán học trên một tấm da cừu tìm thấy trong thư viện Jerusalem tại

Constantinople. Điều này chứng tỏ rằng các tác phẩm của Archimedes đã được phổ biến, lưu truyền qua các bản chép tay từ trước thế kỷ thứ X. Bản thảo lâu đời thứ hai còn tồn tại là bản dịch tiếng Latin năm 1260, có lẽ là hợp của hai bản dịch từ bản Byzantium đã bị mất. Ngoài ra, còn một số bản sao Hy Lạp thế kỷ XV–XVI của các phiên bản Byzantium bị thiếu. Heiberg đã đối chiếu những bản thảo này và đã tạo ra văn bản của Archimedes bằng tiếng Hy Lạp tiêu chuẩn hiện nay vào năm 1880 – 1881, với một phiên bản sửa đổi năm 1910. Tuy nhiên, nếu như *Cơ sở* (Elements) của Euclid được phổ biến rộng rãi, thì các tác phẩm của Archimedes chỉ được lưu truyền trong nhóm nhỏ các nhà toán học lỗi lạc nhất của thời đại ông và sau này. Các tác phẩm của Archimedes hiện được tìm thấy gồm:

1. Về hình cầu và hình trụ (On the Sphere and Cylinder, hai quyển);
2. Phép đo hình tròn (Measurement of a Circle);
3. Về hình nón và hình cầu (On Conoids and Spheroids);
4. Về đường xoắn ốc (On Spiral);
5. Cân bằng phẳng (On Plane Equilibriums, hai quyển);
6. Người tính cát (The Sand–reckoner);
7. Cầu phương Parabola (Quadrature of the Parabola);
8. Về vật nổi (On floating Bodies, hai quyển);
9. Sách về các bổ đề (Book of Lemmas);
10. Bài toán về gia súc (The Cattle–Problem).
11. Phương pháp (The Method).

Ngoài ra, còn một số tác phẩm bị thất lạc.

Một tỷ lệ lớn bất thường các chủ đề trong các tác phẩm của Archimedes đại diện cho các khám phá hoàn toàn mới của riêng ông. Mặc dù các nghiên cứu của ông có nội dung rộng lớn gần như bách khoa toàn thư, bao gồm hình học (phẳng và không gian), số học, cơ học, thủy tĩnh học, nhưng ông không phải là người viết sách giáo khoa. Tác phẩm của Archimedes, giống như tác phẩm của Euclid trước ông, phần lớn bao gồm hệ thống hóa, khái quát hóa các phương pháp đã được sử dụng và các kết quả riêng lẻ của các nhà hình học trước đó. Archimedes không chỉ gia công những vật liệu hiện có, mà mục tiêu của ông luôn là một cái gì đó mới, một số bổ sung nhất định và độc đáo cho kiến thức tổng thể.

Đặc điểm nổi bật của con người Archimedes là sự bộc trực và đơn giản, hoàn toàn không có chủ nghĩa vị kỉ và bất kì nỗ lực nào phóng đại thành tích của mình bằng cách so sánh với thành tích của những người khác hoặc nhấn mạnh những thất bại của họ ở những nơi mà bản thân ông đã thành công. Cách của ông chỉ đơn giản là nêu những khám phá cụ thể mà những người tiền nhiệm thực hiện đã gợi ý cho ông về khả năng mở rộng chúng theo hướng mới. Thí dụ, liên quan đến những nỗ lực của các nhà hình học trước đó nhằm cầu phương hình tròn và các hình khác, Archimedes chợt nhận ra rằng chưa có ai từng cầu phương parabola, ông đã đặt và giải quyết trọn vẹn bài toán này. Tương tự, trong lời nói đầu của cuốn sách *Về hình cầu và hình trụ*, ông nói về những khám phá của mình liên quan đến những hình khối như các định lý về hình chóp, hình nón và hình trụ đã được chứng minh bởi Eudoxus. ông không ngần ngại nói rằng một số vấn đề đã làm ông mất nhiều năm mới giải quyết được. Trong lời nói đầu của cuốn sách *Về đường xoắn ốc*, ông khẳng định, nếu không vì cái chết đột ngột, Conon đã giải được các bài toán mà ông trình bày.

Trong một số chủ đề, Archimedes không có người đi trước. Thí dụ trong thủy tĩnh học, nơi ông đã phát minh ra toàn bộ khoa học này, và vì vậy, những phát minh toán học liên quan đến chúng. Trong những lĩnh vực này, ông là người đặt nền móng cho một bộ môn khoa học mới. Và ông trình bày bắt đầu gần giống như sách giáo khoa tiểu học, nhưng ở các phần sau, ngay lập tức, ông đã trình bày các nghiên cứu chuyên sâu.

Để thấy rõ những phát minh của Archimedes, cần tham chiếu với một số thành tựu khoa học đã đạt được trước ông.

Các phương pháp hình học truyền thống. *Đại số hình học* (geometrical algebra) đã đóng vai trò quan trọng trong hình học Hy Lạp. Hai phương pháp chính bao gồm trong thuật ngữ này là: (1) Lý thuyết về tỷ lệ (theory of proportions); (2) Phương pháp diện tích. Cả hai phương pháp này đều đã được trình bày đầy đủ trong *Cơ sở* của Euclid. Đại số hình học cũng đã được Archimedes sử dụng hiệu quả.

Phép cầu phương và lập phương. Hai định lý mà Archimedes gán cho Eudoxus là:

(1) *Mọi lăng trụ có thể tích bằng ba lần thể tích hình chóp có cùng đáy và chiều cao.*

Gọi V_1 và V_2 tương ứng là thể tích hình lăng trụ và thể tích hình chóp có cùng diện tích đáy là S và chiều cao h. Khi đó:

$$V_1 = Sh = 3 \times \frac{1}{3}Sh = 3V_2.$$

(2) *Mọi hình trụ có thể tích bằng ba lần thể tích hình nón có cùng đáy và chiều cao.*

Các Mệnh đề dưới đây cũng được Archimedes cho là của các tác giả trước:

(3) *Các hình nón có chiều cao bằng nhau thì tỷ số thể tích của chúng bằng tỷ số diện tích đáy.*

(4) *Nếu một hình trụ bị chia bởi một mặt phẳng song song với đáy thì tỷ số thể tích của hai hình trụ bị chia bằng tỷ số hai đường cao của chúng.*

(5) *Nếu hai hình nón có đáy và chiều cao bằng đáy và chiều cao của hai hình trụ tương ứng thì tỷ số thể tích của hai hình nón bằng tỷ số thể tích của hai hình trụ đó.*

(6) *Tỷ số diện tích đáy của hai hình nón có thể tích bằng nhau tỷ lệ nghịch với tỷ số chiều cao của chúng và ngược lại.*

(7) *Hai hình nón có tỷ số đường kính bằng tỷ số đường cao thì tỷ số thể tích của chúng bằng lũy thừa bậc ba của tỷ số ấy.*

Trong cuốn *Cầu phương Parabola*, Archimedes cũng nói rằng các nhà hình học trước đã chứng minh:

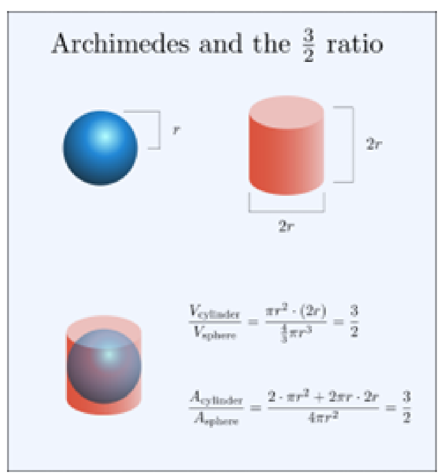
(8) *Tỷ số thể tích hình cầu bằng lũy thừa bậc ba tỷ số đường kính của chúng.*

Trong tất cả các tác phẩm của mình, có vẻ như Archimedes tự hào nhất về cuốn chuyên luận *Về hình cầu và hình trụ*. Tác phẩm được viết thành hai quyển. Quyển I gồm 44 mệnh đề ([2], trang 141 – 187; [3a], trang 1 – 55). Cuốn sách mở đầu bằng thông báo các kết quả do chính ông nhận được và lần đầu tiên được xuất bản *để các nhà toán học lão luyện có thể kiểm tra tính chính xác và đánh giá giá trị của chúng*. Hai mệnh đề được nói đến trong lời mở đầu là:

(1) *Diện tích mặt cầu bằng* 4 *lần diện tích hình tròn lớn nhất của mặt cầu.*

Theo ngôn ngữ hiện đại: $S_1 = 4\pi R^2$.

(2) *Nếu hình trụ ngoại tiếp hình cầu có chiều cao bằng đường kính hình cầu thì thể tích của nó bằng $\frac{3}{2}$ thể tích hình cầu; Và diện tích toàn phần hình trụ bằng $\frac{3}{2}$ diện tích mặt cầu.*



Công thức tính thể tích hình cầu: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích hình trụ:

$$V_2 = S_d \times h = \pi R^2 \times h = 2\pi R^3 = \frac{3}{2} V_1.$$

Diện tích toàn phần hình trụ:

$$\begin{aligned} S_2 &= 2S_d + S_{xq} = 2\pi R^2 + 2\pi R \times 2R \\ &= 6\pi R^2 = \frac{3}{2} S_1. \end{aligned}$$

Tiếp theo là một số định nghĩa và giả định (assumptions) hay tiên đề. Một tiên đề nổi tiếng nhất mà ngày nay được gọi là *Tiên đề* hay *Định đề Archimedes*, trong khi chính Archimedes lại gán định đề này cho Eudoxus, là:

Hai đoạn thẳng không bằng nhau thì bội của cái ngắn hơn sẽ vượt quá cái dài hơn.

Sử dụng định đề này, Archimedes đã rút ra nhiều kết quả liên quan đến diện tích hoặc thể tích hình giới hạn bởi đường cong hoặc mặt cong.

Quyển II của *Về hình cầu và hình trụ* gồm 6 mệnh đề, thực chất là 6 bài toán, và 3 định lý ([2], trang 187 – 221; [3a], trang 56 – 90) được gợi ý bởi Quyển I. Khi giải quyết bài toán về thiết diện của hình cầu, Archimedes (Mệnh đề 4, Quyển II) đã đặt ra một trong những bài toán lớn của hình học Hy Lạp:

Dựng mặt phẳng cắt mặt cầu sao cho thể tích hai phần mặt cầu bị chia theo một tỷ lệ $\frac{m}{n}$ cho trước.

Bài toán này có thể hiểu như sau: Gọi bán kính hình cầu là R và chiều cao của hai chỏm cầu bị chia là h và h' ($h + h' = 2R$). Vì thể tích chỏm cầu chiều cao h là $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$ nên

$$\frac{m}{n} = \frac{V}{V'} = \frac{\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)}{\pi h'^2 \left(R - \frac{h'}{3}\right)} = \frac{h^2 (3R - h)}{h'^2 (3R - h')}.$$

Thay $h' = 2R - h$ vào phương trình trên ta được

$$m(2R - h)^2 (R + h) = nh^2 (3R - h).$$

Hay

$$(m+n) h^3 - 3R (m+n) h^2 + 4mR^3 = 0. \quad (*)$$

Bài toán 4. II có nhiều tiếp cận hình học (xem, [8], trang 172 – 185; [4], trang 44 – 49) và dẫn đến việc giải phương trình bậc ba (∗). Phương trình bậc ba tổng quát chỉ được giải trọn vẹn hơn nghìn năm sau bởi các nhà toán học châu Âu.

Trong số các tác phẩm của Archimedes được biết đến trong thời Trung cổ, phổ biến nhất và là tác phẩm đầu tiên được dịch sang tiếng Latin là *Phép đo hình tròn*. Đây là một chuyên luận ngắn ([2], trang 222 – 239; [3a], trang 91 – 98), có lẽ là một phần của một tác phẩm dài hơn đã bị thất lạc, chỉ bao gồm ba mệnh đề.

Mệnh đề 1 nói rằng diện tích của hình tròn có thể tính theo chu vi của nó:

Mệnh đề 1. *Diện tích của bất kì hình tròn nào cũng bằng diện tích của tam giác vuông có một cạnh góc vuông bằng bán kính và cạnh góc vuông kia bằng chu vi đường tròn.*

Theo ngôn ngữ hiện đại: $S = \frac{1}{2} R \times 2\pi R = \pi R^2$.

Mệnh đề 2 cho đánh giá xấp xỉ diện tích hình tròn:

Mệnh đề 2. *Tỷ lệ diện tích hình tròn với diện tích hình vuông ngoại tiếp nó rất gần bằng* $11 : 14$.

Mệnh đề 3 là mệnh đề quan trọng nhất trong *Phép đo hình tròn*.

Mệnh đề 3. *Chu vi của mọi đường tròn không vượt quá $3\frac{1}{7}$ và lớn hơn $3\frac{10}{71}$ đường kính của nó.*

Từ đây ta có:

$$\begin{aligned} 3{,}140845\ldots \approx 3\frac{10}{71} < \pi \approx 3{,}14159 < 3\frac{1}{7} \\ \approx 3{,}142857. \end{aligned}$$

Đo hình tròn đã được trình bày tỷ mỉ trong tạp chí Pi, [10], [12], [13], vì vậy ở đây không nhắc lại.

Người tính cát. *Người tính cát* ([2], trang 360 – 373; [3a], trang 221 – 232) của Archimedes là một công trình khác lạ. Nó chứa một hệ thống ký hiệu mới để biểu thị các số vượt quá một trăm triệu, mà toán học Hy Lạp trước đó chưa có kí tự để biểu diễn. Archimedes đã nghĩ ra một quy trình đếm theo đơn vị vạn vạn (10^8 theo ký hiệu hiện nay). Ông đã sử dụng số mũ để viết các số lớn và đã sử dụng, thí dụ, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Để làm sáng tỏ hệ thống số của mình có thể mô tả được các con số khổng lồ, Archimedes đã tiến hành tính số hạt cát mà vũ trụ có thể chứa. Như các nhà thiên văn khác cùng thời, Archimedes tin rằng vũ trụ là hình cầu có tâm là Trái Đất bất động và có bán kính bằng khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời. Để đưa ra một giới hạn tối đa hợp lý về kích thước của vũ trụ, Archimedes đã sử dụng một số đánh giá trước đó về kích thước của các thiên thể. Cũng như cha mình, ông cho rằng Trái Đất có đường kính lớn hơn đường kính Mặt Trăng và đường kính Mặt Trời lớn gấp 30 lần đường kính Mặt Trăng.

Ký hiệu đường kính là D, ta có

$$D_{\text{sun}} = 30D_{\text{moon}} < 30D_{\text{earth}}.$$

Ở đây: sun = Mặt Trời, moon = Mặt Trăng, earth = Trái Đất, univ = universe = vũ trụ.

Bằng một lập luận hình học thông minh, Archimedes đã chứng minh rằng chu vi của đa giác đều 1000 cạnh nội tiếp trong hình tròn có đường kính vũ trụ (D_{univ}) lớn hơn $3D_{\text{univ}}$ và nhỏ hơn $1000D_{\text{sun}}$. Từ đây suy ra

$$3D_{\text{univ}} < 1000D_{\text{sun}} < 30.000D_{\text{earth}}.$$

Archimedes lấy giá trị chấp nhận được lúc bấy giờ của chu vi Trái Đất là 300.000 stadia (stadium hay stadion, số nhiều là stadia, là một đơn vị đo độ dài ở Hy Lạp cổ đại, 1 stadium bằng khoảng từ 150m đến 210m). Để an toàn, ông nhân lên 10 lần. Giả định rằng

$$D_{\text{earth}} < 1.000.000 \text{ stadia}.$$

Từ đây, Archimedes tính được đường kính vũ trụ

$$D_{\text{univ}} < 10^{10} \text{ stadia}.$$

Sử dụng công thức tính thể tích hình cầu

$$V = \frac{1}{6}\pi D^3 < D^3,$$

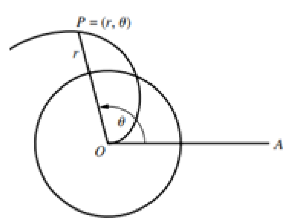
Archimedes đã tính được số hạt cát trong một hình cầu đường kính 1 stadia không vượt quá 10^{21}. Do đó số hạt cát trong vũ trụ không vượt quá

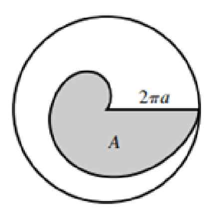
$$10^{21} \cdot \left(10^{10}\right)^3 = 10^{51}.$$

Và Archimedes đã kết luận như sau: *Những điều này có vẻ khó tin đối với nhiều người chưa học toán, nhưng đối với những người đã suy nghĩ về khoảng cách và kích thước của Trái Đất, Mặt Trời, Mặt Trăng và của cả vũ trụ, chứng minh trên hoàn toàn đáng tin cậy.*

Về đường xoắn ốc. *Về đường xoắn ốc* là tác phẩm chứa 28 mệnh đề ([2], trang 264 – 285; [3a], trang 151 – 188) liên quan đến tính chất của đường cong, mà bây giờ được gọi là *đường xoắn ốc Archimedes*. Nó được miêu tả bằng chính lời của người phát minh ra nó như sau: *Nếu một nửa đường thẳng quay đều quanh gốc cố định của nó cho đến khi nó trở lại vị trí ban đầu, và nếu khi đường thẳng quay thì một điểm chuyển động thẳng đều dọc theo đường thẳng, bắt đầu từ một điểm cố định, thì điểm đó sẽ mô tả một đường xoắn ốc trong mặt phẳng.*

Gọi OA là nửa đường thẳng có gốc O cố định, P là điểm chuyển động đều trên OA xuất phát từ O. Điểm P trên mặt phẳng tọa độ cực hiện đại có tọa độ (r, θ) với $r = OP$ và $\theta = AOP$ là góc giữa OP và OA. Khi ấy ta có $r = a\theta$, trong đó a là hằng số (Hình dưới).

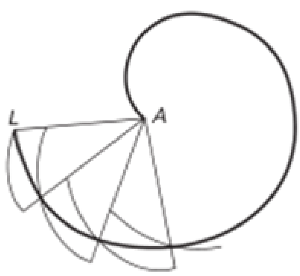




Theo quan điểm của toán học hiện đại, có lẽ thành tựu toán học vĩ đại nhất của Archimedes, và chắc chắn là một trong những kết quả thú vị nhất là công thức tính diện tích bao quanh bởi đường xoắn ốc đầu tiên (ứng với $0 \leq \theta \leq 2\pi$). Ông đã viết: *Diện tích giới hạn bởi đường xoắn ốc và đường thẳng ban đầu sau đúng một vòng quay bằng một phần ba diện tích hình tròn với bán kính là độ dài đoạn cuối chuyển động*. Điều này biểu thị theo công thức hiện đại là:

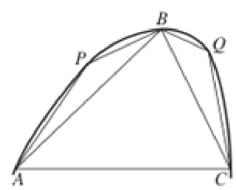
$$S = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2.$$

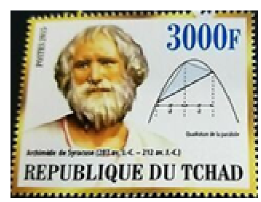
Ngày nay, công thức trên dễ dàng được chứng minh nhờ phép tính tích phân. Archimedes đã sử dụng phương pháp vét kiệt: ông chia đường cong xoắn ốc thành nhiều phần, tính diện tích các phần và cộng chúng lại (hình dưới).



Phương pháp vét kiệt được cho là của Eudoxus xứ Cnidos ($390 - 337$ trước CN), mặc dù Euclid và Archimedes sử dụng nó thường xuyên nhất và đem lại nhiều hiệu quả. Phương pháp này đóng một vai trò hàng đầu trong quyển XII của *Cơ sở*, khi Eulid chứng minh rằng tỷ số diện tích các hình tròn bằng bình phương tỷ số đường kính và tỷ số thể tích các hình chóp có cùng chiều cao và có đáy tam giác bằng tỷ số diện tích đáy. Archimedes đã khai thác triệt để phương pháp vét kiệt để tìm diện tích các hình phẳng và thể tích hình giới hạn bởi các mặt cong. Cụm từ *phương pháp vét kiệt* (method of exhaustion) lần đầu tiên được nhà toán học Dòng Tên Gregory St. Vincent dùng trong tác phẩm *Opus Geometricum* (1647).

Cầu phương Parabola. *Cầu phương Parabola* gồm 24 Mệnh đề ([2], trang $336 - 345$; [3*a*], trang $233 - 252$), trong đó Archimedes đã sử dụng phương pháp vét kiệt để tìm diện tích hình giới hạn bởi một parabola với một dây cung. Ông bắt đầu "vét kiệt" diện tích parabola bằng cách nội tiếp trong nó một tam giác có đáy là dây cung và chiều cao bằng khoảng cách từ dây cung đến điểm trên parabola mà tại đó tiếp tuyến song song với dây cung. Hai cạnh còn lại của tam giác nội tiếp cho ta hai phần parabola mới. Diện tích mỗi tam giác nội tiếp cũng được tính tương tự (Hình dưới).





Như vậy, diện tích parabola bằng tổng vô hạn diện tích các tam giác và Archimedes đã chứng minh nó bằng $\frac{4}{3}$ diện tích tam giác ban đầu.

Lập luận của Archimedes là điển hình cho cách tiếp cận tổng quát của ông trong việc xác định diện tích hoặc thể tích bằng phương pháp vét kiệt. Ký hiệu diện tích tam giác CAB là S. Từ tính chất của Parabola, Archimedes chứng minh được diện tích mỗi tam giác PAB và QBC bằng $\frac{1}{8}S$. Các tam giác nhỏ hơn được xác định tương tự. Vậy, tổng diện tích các tam giác sau n bước bằng

$$\begin{aligned} S_n &= S\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}\right) \\ &= S\left[\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]. \end{aligned}$$

Theo lập luận hiện đại, diện tích của phần chắn bởi parabola và cát tuyến của nó chính là giới hạn của S_n khi $n \to \infty$, tức là $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{4}{3}S$.

Tuy nhiên, vì chưa có khái niệm giới hạn, Archimedes đã chứng minh bằng cách *lập luận vô lý rút gọn kép* (a double reductio ad absurdum argument): Nếu các đa giác vét kiệt parabola, thì diện tích của parabola không thể nhỏ hơn, cũng không thể lớn hơn $\frac{4}{3}S$.

Trong Lời nói đầu của *Phương pháp* (Method, [3*b*]), Archimedes viết: *Tôi cho rằng một số các thế hệ hiện tại cũng như tương lai, phương pháp [vét kiệt] được giải thích ở đây, sẽ được kích hoạt để tìm ra những định lý khác mà chúng ta chưa rõ*. Thật không may, sau Archimedes, toán học Hy Lạp đã đi theo hướng khác. Chỉ sau 18 thế kỷ, phương pháp vét kiệt mới được hoàn chỉnh thành phép tính vi phân và tích phân nhờ Newton và Leibniz.

Archimedes chết, như ông đã sống, chìm đắm trong những suy tư và chiêm nghiệm toán học của mình.

Kết luận. Trong một bài viết, không thể nói đầy đủ về Archimedes, thậm chí chỉ về toán học của ông. Thật là khiếm khuyết khi bài viết không đề cập đến các công trình của Archimedes về thủy tĩnh học, về cân bằng,... Hy vọng nó sẽ được đề cập trong một bài khác.

Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm về Archimedes qua các tài liệu tham khảo. Để phần nào hình dung thêm các đóng góp và phát triển của ông trong toán học Hy Lạp, có thể tham chiếu thêm [11].

Không ai khác, chính là hình Archimedes đã được in trên tấm huy chương danh giá nhất của giới toán học:

Huy chương Fields được thiết kế bằng vàng, in hình đầu của nhà toán học Archimedes với dòng trích dẫn lời của ông: *Transire suum pectus mundoque potiri (Hãy vươn ra ngoài giới hạn của bản thân và làm chủ thế giới*, hay *Vượt lên chính mình và thấu hiểu thế giới).*

Lời cảm ơn. Tác giả cảm ơn Thạc sĩ Nguyễn Hoàng Vũ đã cung cấp Tài liệu [2].

Tài liệu tham khảo chính

[1] David M. Burton, *The History of Mathematics, An Introduction*, Seventh Edition, McGraw–Hill, 2011. Ch. 4: The Alexandrian School: Archimedes, pp. 193 – 206.

[2] E. J. Dijksterhuis, *Archimedes*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA, 1987.

[3*a*] Thomas L. Heath, *The Works of Archimedes*, Cambridge: At the University Press, 1897.

[3*b*] Thomas L. Heath, *The Method of Archimedes*, Recently discovered by Heiberg, A supplement to *The Works of Archimedes*, Cambridge: At the University Press, 1912.

[3*c*] Thomas L. Heath, *Archimedes*, London, Society for Promoting Christian Knowledge, 1920.

[4] Thomas L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1921, Volume II: Archimedes, pp. 16 – 109.

[5] Stephen Hawking, *God Created the Integers, The mathematical Breakthroughs that changed History*, Running Press,

London, 2007, *Archimedes*, pp. 119 – 240.

[6] Uta C. Merzbach and Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, 3th Edition, John Wiley & Sons, 2011, Ch. 6: Archimedes of Syracuse, pp. 109 – 126.

[7] Victor J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, Third Edition, Addison–Wesley, 2008. Chapter 4: *Archimedes and Apollonius*, pp. 94 – 111.

[8] Lê Thanh Quang, *Kể chuyện các nhà toán học*, Nhà xuất bản Lao động, 2016, *Archimedes*, trang 5 – 16.

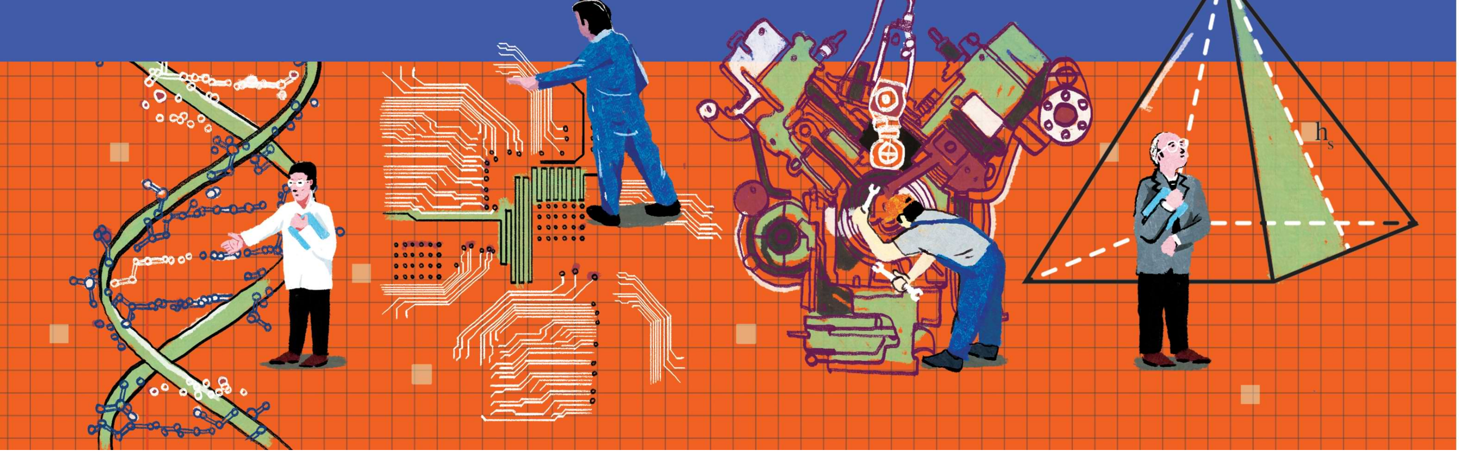
Tài liệu trích dẫn

[9] Phạm Triều Dương, *Những câu nói cuối cùng huyền thoại của Archimedes*, Tạp chí Pi, Tập 7, số 5, trang 8 – 10.

[10] Đỗ Trọng Đạt, Phó Đức Tài, *Phương pháp Archimedes tính các hình khối quen thuộc*, Tạp chí Pi, Tập 2, số 3, trang 34 – 36.

[11] Tạ Duy Phượng, *Các nhà toán học Hy Lạp*, Tạp chí Pi, Tập 6, số 4, trang 46 – 50; số 5, trang 45 – 53; số 9, trang 44 – 51; số 10, trang 56 – 59; số 11, trang 51 – 55; Tập 7, số 4, trang 54 – 60; số 5, trang 52 – 60. [12] Tạ Duy Phượng, Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành, Mai Văn Thu, Nguyễn Hoàng Vũ, *Tính số Pi: Xưa và Nay. Phần I: Tính số Pi: Xưa*, Tạp chí Pi, Tập 7, số 3, trang 44 – 51.

[13] Hà Huy Thái, *Archimedes và số* π Tạp chí Pi, Tập 3, số 10, trang 37 – 41.

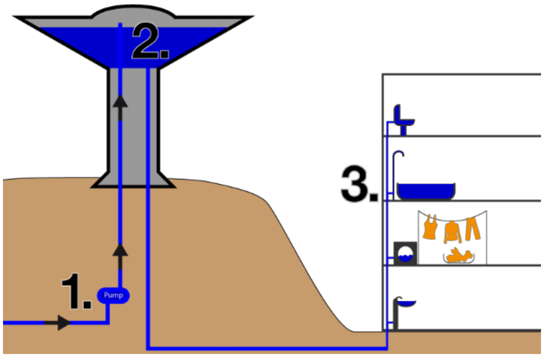


NGUYÊN LÝ PASCAL TRONG THỰC TIỄN

NGUYỄN HOÀNG VŨ[1]

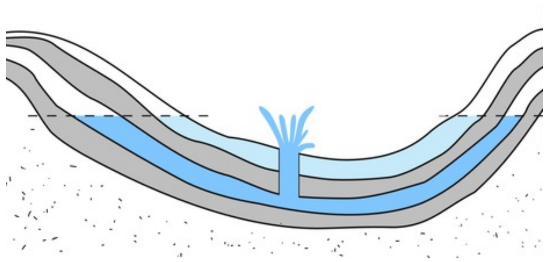
Trong số trước của Pi, chúng ta đã tìm hiểu quá trình Pascal khám phá ra nguyên lý mang tên ông về áp suất trong lòng chất lỏng. Bài viết này sẽ trình bày những ứng dụng của nguyên lý trên trong các hiện tượng tự nhiên cũng như các công cụ sử dụng thủy lực đa dạng trong đời sống.

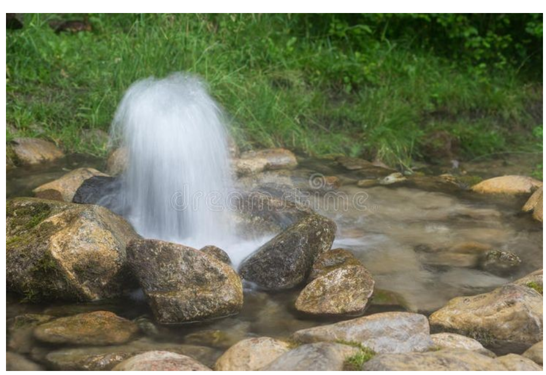
1. Ứng dụng của bình thông nhau



Hình 1. Quy trình hoạt động của tháp nước: 1. Nước được bơm lên bể trên tháp. 2. Bể trên tháp có tác dụng như cột nước ở một nhánh của bình thông nhau. 3. Các vòi nước ở nhà dân đóng vai trò nhánh còn lại.

Một ứng dụng rất thực tế của mô hình bình thông nhau trong đời sống là các tháp nước. Nước được bơm lên và chứa trong các bể cao ở đỉnh tháp. Áp suất do nước trong bể sẽ được truyền theo đường ống và tạo thành áp suất nước khi ta mở các van lấy nước sinh hoạt. Với những tầng nhà càng cao thì áp suất nước sẽ càng giảm đi do chênh lệch độ cao với tháp nước giảm. Các đài phun nước cũng là một ứng dụng khác của bình thông nhau trong thực tiễn đời sống. Một hiện tượng tương tự trong tự nhiên là các giếng phun. Ở những vị trí có độ cao nằm dưới mực nước ngầm của một khu vực, khi ta khoan giếng, việc này cũng giống như mở một nhánh mới của bình thông nhau và áp suất nước sẽ khiến nước tự phun lên mặt đất giống như vòi phun vậy.

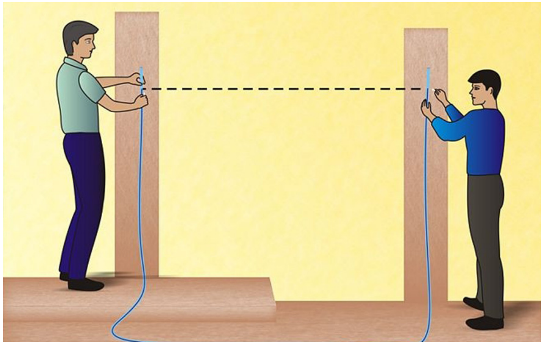




Hình 2. Giếng phun trong tự nhiên xuất hiện tại các vị trí nằm dưới mực nước ngầm của khu vực.

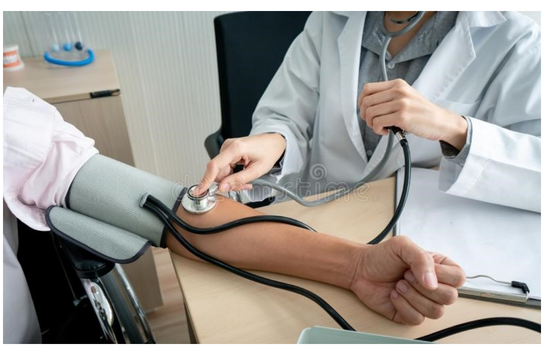
---

[1] *Hà Nội.*



Hình 3. Gióng hàng theo phương ngang sử dụng ống chứa nước. Đây là một phương pháp rẻ và hiệu quả trước khi có sự xuất hiện của các thiết bị sử dụng laser.

Do mực nước ở hai nhánh của bình thông nhau luôn ngang hàng nên trong xây dựng, người ta có thể dùng một ống nhựa trong suốt (hoặc hai hình trụ thủy tinh gắn với hai đầu một ống nối) chứa nước để tiến hành gióng hàng theo phương ngang. Thao tác gióng hàng sẽ cần có hai người. Một người giữ một nhánh ống ở vị trí cố định. Người kia dùng mực nước ở nhánh còn lại để đánh dấu vị trí ngang hàng. Các bạn học sinh cũng có thể thử làm thí nghiệm này trên lớp nhưng cần chú ý không bao giờ để hai đầu ống có chênh lệch độ cao quá lớn, nếu không nước sẽ bị trào ra.



Hình 4. Khi đo huyết áp, vị trí đo cần ngang hàng với tim để kết quả đo được chính xác.

Tương tự, khi bác sĩ tiến hành đo huyết áp cho bệnh nhân, để kết quả đo gần với áp suất của máu ở tim nhất, vị trí đo huyết áp cần có độ cao ngang hàng với tim của người được đo. Thật vậy, hệ tuần hoàn của cơ thể cũng giống như một hệ thống bình thông nhau với nhiều nhánh!

Cơ chế hoạt động trên cũng có thể được sử dụng để chế tạo thiết bị đo áp suất. Nếu ta đổ chất lỏng vào một bình thông nhau dạng chữ U, khi cả hai đầu của mỗi nhánh đều hở và tiếp xúc với không khí thì mực chất lỏng ở hai nhánh sẽ bằng nhau. Nếu một đầu được cho tiếp xúc với một bình chứa khí thì độ chênh lệch mực chất lỏng giữa hai nhánh sẽ cho ta độ chênh lệch về áp suất của khí trong bình chứa với áp suất khí quyển:

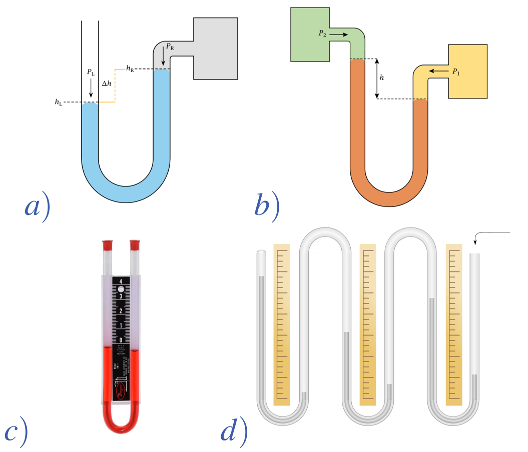
$$\Delta p = \rho g |\Delta h|$$

với ρ là mật độ của chất lỏng trong ống.

Nếu mực chất lỏng trong nhánh tiếp xúc với bình chứa khí thấp hơn nhánh còn lại thì áp suất trong bình chứa sẽ cao hơn áp suất khí quyển. Ngược lại, nếu mực chất lỏng trong ống này thấp hơn nhánh tiếp xúc với không khí thì áp suất của khối khí sẽ thấp hơn áp suất của khí quyển.

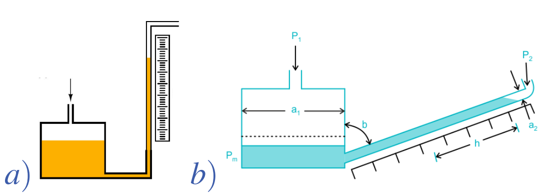
Tương tự, nếu mỗi nhánh của ống tiếp xúc với một khối khí khác nhau, ta cũng có thể dùng cách này để đo sự chênh lệch áp suất giữa hai khối khí đó giống với trường hợp so sánh với áp suất khí quyển (Hình 5*b*). Cách làm này có thể giúp xác định rò rỉ của đường ống dẫn khí bằng cách đo chênh lệch áp suất giữa hai vị trí khác nhau của đường ống.

Người ta cũng có thể đo giá trị tuyệt đối của áp suất thay cho độ chênh lệch áp suất nếu một nhánh của ống là kín và phần phía trên của mặt chất lỏng là chân không. Trong trường hợp độ cao của cột chất lỏng quá lớn, ta có thể lắp nhiều ống chữ U nối với nhau, phần giữa của chúng được bơm khí nén có tác dụng truyền áp suất giống như với chất lỏng (Hình 5*d*). Để tìm giá trị đo của áp suất, ta cần lấy tổng tất cả các độ chênh lệch mực chất lỏng của các ống chữ U.



Hình 5. Đo áp suất chất khí bằng ống chữ U. a) Đo chênh lệch áp suất của khối khí so với khí quyển. b) Đo chênh lệch áp suất giữa hai chất khí. c) Ống chữ U đo áp suất trong thực tế. d) Nối các ống chữ U liên tiếp với nhau cho phép đo các áp suất lớn.

Một dạng biến thể khác của ống chữ U được thiết kế với một nhánh có thiết diện lớn hơn nhiều nhánh còn lại (tạo thành một giếng). Khi tiến hành đo, áp suất lớn hơn bao giờ cũng được gắn vào nhánh có giếng. Độ chênh lệch chất lỏng giữa hai nhánh vẫn sẽ giống như với ống chữ U thông thường nhưng chất lỏng bên nhánh giếng sẽ bị dịch chuyển ít hơn nhiều. Người ta có thể tính toán bù trừ lại sự dịch chuyển này để thiết lập thang đo trực tiếp cho nhánh còn lại. Nhánh còn lại cũng có thể được thay bằng một nhánh nghiêng cho độ nhạy tốt hơn và giúp đo các chênh lệch áp suất nhỏ hơn.



Hình 6. a) Ống chữ U đo áp suất với một nhánh dạng giếng. b) Một nhánh có dạng giếng, nhánh còn lại là nhánh nghiêng.

Bài tập

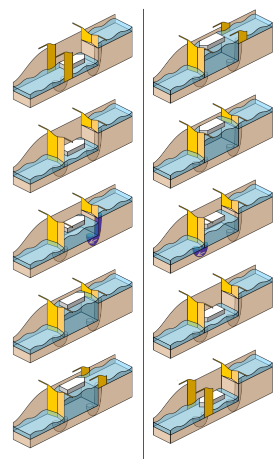
1. Trong hình 6a, giếng có thiết diện S_1, nhánh còn lại có thiết diện S_2. Ban đầu hai mực chất lỏng sẽ ngang nhau. Khi có chênh lệch áp suất ứng với chênh lệch độ cao Δh giữa hai mực chất lỏng, mực chất lỏng trong nhánh có giếng sẽ đi xuống một đoạn h_1 còn mực chất lỏng trong nhánh còn lại sẽ dâng lên một đoạn h_2.

a) Viết phương trình liên hệ $\Delta h, h_1, h_2$.

b) Viết phương trình liên hệ h_1, h_2, S_1, S_2.

c) Thiết lập biểu thức của h_2 theo Δh và đề xuất cách tạo thang vạch chia để đọc Δh theo mực chất lỏng bên nhánh nhỏ.

2. Làm tương tự bài 1 cho trường hợp hình 6b. Nhánh nghiêng tạo một góc α so với phương nằm ngang.



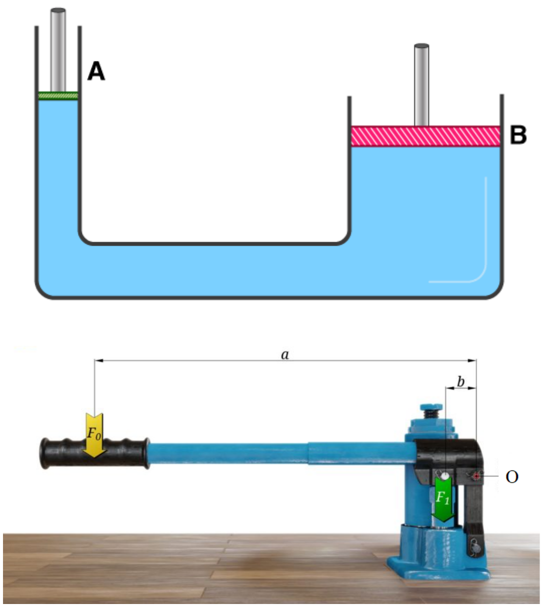
Hình 6. Di chuyển tàu giữa hai mực nước chênh lệch nhau ở hai phía đập. Trái: tàu đi lên cao. Phải: tàu đi xuống thấp.

Cơ chế của bình thông nhau còn xuất hiện trong các hệ thống vận chuyển tàu thuyền qua các con đập. Người ta tạo một khoảng trung gian giữa hai mực nước với hai cửa chặn. Khi tàu đi vào khoảng này, cả hai cửa đều được đóng. Sau đó người ta mở van ở phía tàu muốn tới. Theo nguyên tắc của bình thông nhau, sau một thời gian, mực nước ở vị trí tàu và phía nó muốn đến sẽ bằng nhau. Chỉ cần mở cửa ở phía này là tàu có thể tiếp tục đi được. Phương pháp trên có thể giúp tàu đi lên cao hoặc xuống thấp cho dù hai phía đập có chênh lệch về độ cao.

Trong một số trường hợp, để tăng hiệu quả sử dụng nước, các hệ thống vận chuyển này được thiết kế ở dạng nhiều tầng.

Hệ thống di chuyển tàu thuyền qua đập như trên lần đầu tiên được xây dựng ở Trung Quốc vào cuối thế kỷ 10 thời nhà Tống. Các công trình tương tự chỉ bắt đầu xuất hiện ở châu Âu vào cuối thế kỷ 14. Ngày nay, nhiều đập lớn hiện đại như kênh đào Panama sử dụng cách này để giúp tàu thuyền lưu thông qua đập.

2. Khuyếch đại lực nhờ hệ thống thủy lực

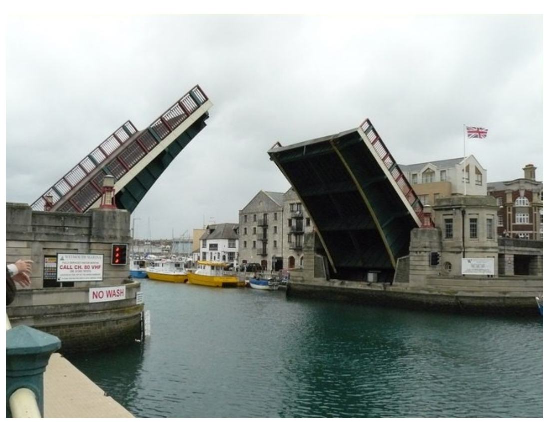


Hình 7. Cấu tạo của một kích thủy lực. Trên: hai piston ở hai nhánh của bình thông nhau. Dưới: đòn bẩy giúp tăng cường lực ép lên piston nhỏ. Lực ấn của tay được khuyếch đại theo tỉ lệ giữa hai tay đòn.

Việc khuyếch đại lực nhờ thủy lực cũng có nhiều ứng dụng trong đời sống. Một ví dụ thường được nhắc đến là kích thủy lực. Cấu tạo cơ bản của nó gồm hai piston ở hai nhánh của một bình thông nhau. Khi ta tác dụng một lực lên piston của nhánh nhỏ thì lực này được khuyếch đại ở piston của nhánh lớn. Trước đó, lực ấn của tay cũng đã được khuyếch đại một lần thông qua một đòn bẩy với độ khuyếch đại bằng với tỉ lệ tay đòn của vị trí ấn tay và vị trí của piston nhỏ. Hệ thống kích thủy lực dạng này giúp ta nâng lên những vật thể nặng, thậm chí cả các phương tiện như ô tô, tùy theo cấu tạo và khả năng khuyếch đại của kích thủy lực. Một số thiết bị sử dụng nguyên lý này được minh họa trong Hình 8. Trong một số loại thang máy, hệ thống thủy lực cũng được sử dụng để di chuyển thang máy thay vì sử dụng một bộ ròng rọc.

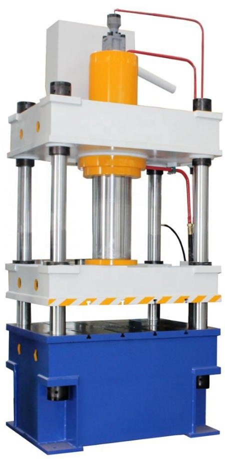
Hình 8. Một số thiết bị nâng sử dụng thủy lực trong sản xuất và vận chuyển.

Hệ thống nâng thủy lực cũng có thể được dùng ở một số cầu nơi có nhiều tàu thuyền đi lại. Vào những giờ cố định, nhịp cầu sẽ được kéo mở hoặc đẩy lên để các tàu thuyền với chiều cao lớn có thể đi qua bên dưới.



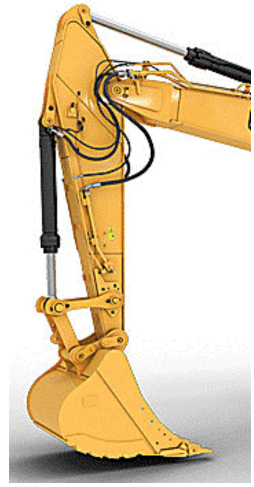
Hình 9. Một số cầu có hệ thống thủy lực để di chuyển nhịp cầu cho tàu thuyền đi qua.

Trong trường hợp piston lớn có chuyển động hướng xuống phía dưới, thay vì hệ thống nâng, ta có một hệ thống nén thủy lực. Hệ thống nén dạng này có nhiều ứng dụng trong công nghiệp như giúp nén phẳng các tấm kim loại, nghiền phế liệu, ...

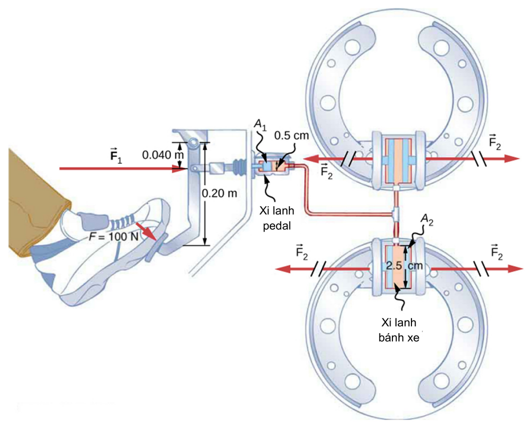


Hình 10. Máy ép thủy lực. Piston lớn sẽ chuyển động theo phương hướng xuống trong các thiết bị này.

Do đặc điểm truyền áp suất theo chất lỏng, hệ thống thủy lực trong công nghiệp không chỉ giúp khuếch đại lực mà còn có tác dụng làm chuyển hướng lực. Ví dụ như trong một máy xúc, cánh tay của nó cần phải gấp ở những khớp nối. Các đường ống dẫn chất lỏng (màu đen trong hình) có thể uốn cùng với chuyển động của cánh tay và cho phép truyền lực theo bất cứ hướng nào mà ta muốn.



Hình 11. Tay máy xúc được điều khiển bằng thủy lực.



Hình 12. Hệ thống phanh xe sử dụng thủy lực.

Một ví dụ thú vị khác là trong hệ thống phanh xe sử dụng thủy lực (Hình 12). Khi người lái xe ấn vào chân phanh, cần phanh thực chất có cấu tạo là một đòn bẩy nên lực nhấn vào hệ thống phanh sẽ lớn hơn nhiều lực đạp do tay đòn của nó ngắn hơn (ví dụ 4 cm so với 20 cm như trong hình). Lực nhấn này tác động vào một xi lanh có đường kính nhỏ ($0,5$ cm trong hình). Nhờ hệ thống thủy lực, lực tác động lên má phanh lại được khuyếch đại một lần nữa (bạn đọc có thể tự tính xem lực đạp $100N$ ban đầu của người lái xe được khuyếch đại thành lực có độ lớn bao nhiêu tại má phanh). Một điều đáng chú ý khác là hệ thống thủy lực cũng có thể phanh nhiều bánh xe cùng lúc, với mỗi bánh xe ta chỉ cần trang bị thêm một xi lanh nối vào hệ thống thủy lực. Tuy nhiên, như nguyên tắc trong tất cả các hệ thống thủy lực khác, khi ta được lợi về lực thì sẽ thiệt về quãng đường. Vì công do người thực hiện và công tác động lên các bánh xe là như nhau nên với cùng một khoảng cách đạp chân quãng đường di chuyển của xi lanh ở mỗi bánh xe sẽ càng ngắn nếu ta có càng nhiều bánh xe.

Với những phương tiện có quán tính lớn, ví dụ xe ủi, người ta có thể lắp đặt thêm hệ thống sử dụng chân không hoặc sử dụng phanh có động cơ thay vì đạp chân một cách thủ công. Trong các máy bay, hệ thống thủy lực không chỉ được dùng cho hệ thống phanh mà còn có nhiều tác dụng khác. Với sự kết hợp các bồn chứa chất lỏng, van định hướng và nhiều piston, người ta có thể điều chỉnh các bộ phận phức tạp của máy bay như cánh, đuôi, bộ phận hạ cánh, ...

Hình 13. Một số công cụ lao động thủy lực. Trên: cờ lê thủy lực. Dưới: máy cắt thủy lực

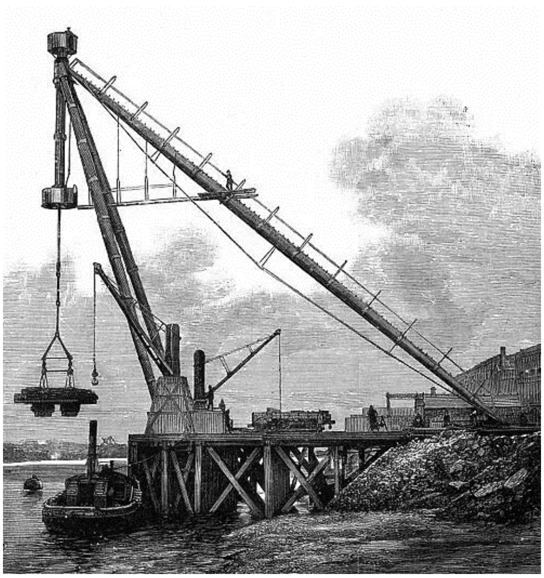
Hệ thống thủy lực cũng được sử dụng cho các công cụ cầm tay, ví dụ như cờ lê thủy lực, máy cắt thủy lực, ...

3. Đôi nét về lịch sử: Joseph Bramah và William Armstrong

Joseph Bramah (1748 – 1814).

Về mặt lịch sử, tuy rằng Pascal đã trình bày lý thuyết về cách khuyếch đại lực sử dụng thủy lực từ thế kỷ 17, các thiết bị sử dụng nguyên lý này chỉ xuất hiện lần đầu trong thực tiễn vào cuối thế kỷ 18 với máy ép thủy lực đầu tiên được Joseph Bramah chế tạo. Sự kiện này đánh dấu một bước tiến quan trọng của cuộc cách mạng công nghiệp ở nước Anh khi đó. Nhiều cỗ máy thủy lực tiếp theo đã được sáng chế phục vụ các công việc khác nhau trong sản xuất. Đến giữa thế kỷ 19, William Armstrong đã nghiên cứu cách sử dụng thủy lực cho các cần cẩu cỡ lớn phục vụ vận chuyển hàng hóa ở các bến cảng và bắt đầu tiến hành sản xuất chúng hàng loạt với nhà máy có quy mô lên đến 20000 công nhân. Cây cầu ở thành phố Newcastle cũng được Armstrong xây dựng lại với hệ thống thủy lực cho phép nâng nhịp cầu lên khi các tàu thuyền lớn cần đi qua để vào cảng.

Dựa trên ý tưởng trước đó của Bramah, Armstrong tiến hành thử nghiệm các hệ thống cung cấp áp lực cho hoạt động của các máy thủy lực. Sau thử nghiệm thất bại với tháp nước do chiều cao cần xây dựng quá lớn, ông sử dụng hệ thống gồm bình chứa lớn với một piston đè lên khối nước bên dưới. Phía trên piston có nhiều quả nặng khối lượng lớn tạo áp suất lên khối nước. Đáy bình được nối với hệ thống đường ống dẫn đến nơi các hệ thống máy móc cần hoạt động, tương tự như mạng điện của chúng ta ngày nay. Những bình chứa của Armstrong còn được gọi là các thiết bị tích tụ thủy lực. Chúng nhanh chóng được phổ biến ở nước Anh cũng như một số nơi khác ở châu Âu. Các mạng áp suất thủy lực này vẫn được duy trì hoạt động cho đến những năm 70 của thế kỷ 20. Nhiều thiết bị tích tụ thủy lực hiện đại dạng cải tiến dùng khí nén hoặc lò xo được sử dụng trong nhiều máy móc công nghiệp đa dạng ngày nay.



Cần cẩu thủy lực của Armstrong có thể nâng các khối hàng hóa nặng hàng trăm tấn.

Đặc biệt, Armstrong đã tiên đoán từ thế kỷ 19 rằng các nhiên liệu như than đá sẽ cần được thay thế bằng các nguồn năng lượng như thủy điện hay năng lượng mặt trời. Ngôi nhà của Armstrong ở Newcastle cũng là ngôi nhà đầu tiên trên thế giới được thắp sáng nhờ thủy điện.

William Armstrong (1810 – 1900).

4. Kết luận

Bản thân Pascal cũng nhận định rằng một bình chứa nước có thể trở thành một loại máy cơ học mới cho phép khuyếch đại lực đến bất cứ mức độ nào. Tuy nhiên, chắc ông cũng sẽ không khỏi ngạc nhiên với những ứng dụng đa dạng của các hệ thống thủy lực ngày nay. Các hiện tượng về chất lỏng cũng như chất khí còn rất nhiều điều thú vị mà Pi sẽ giới thiệu với bạn đọc trong các số sau này.

Tài liệu tham khảo

Hughes, S., & Gurung, S. (2014). Exploring the boundary between a siphon and barometer in a hypobaric chamber. *Scientific Reports*, 4(1). https://doi.org/10.1038/srep04741

HẬU CHỐNG CÁC QUÂN NHẸ (Phần II)

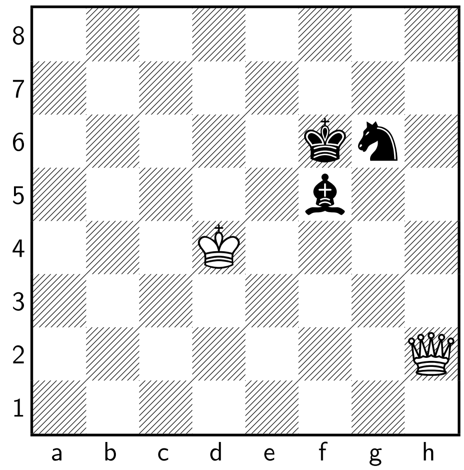
BÙI VINH[1]

2. Hậu chống tượng và mã

Hậu chống tượng và mã tương đối đơn giản hơn chống hai tượng. Cơ hội giành chiến thắng của bên có Hậu khá lớn, hơn 98% các tình huống bên có Hậu sẽ xử lý ưu thế thành công.

Chúng ta xem xét một vài ví dụ sau:

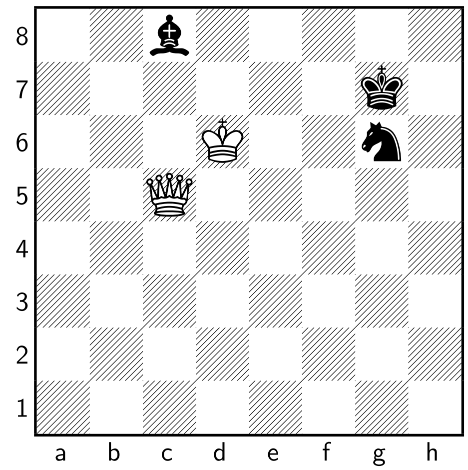
Ví dụ 1: NN



Hình 1.

Kế hoạch giành chiến thắng của Trắng là kiểm soát các ô màu đen, màu ô chỉ mã đen có thể kiểm soát.

1.Hd6+ Vg5 [Nếu 1...Te6 2.Ve4 Vf7 3.Hd4 Tc8 4.Hf2+ Vg7 5.Vd5 Vh6 6.Vd6 Tg4 7.Hc5 Vh7 8.Hg5 Tc8 9.Hh5+ Vg7 10.Hc5



Hình 2.

Đen buộc phải di chuyển mã 10...Tb7 (*10...Ta6 11.Ha7+; 10...Tg4 11.Hd4+; 10...Th3 11.Hc3+)* 11.Hc7+]

2.Ve3! [Trắng tìm mọi cách để bắt buộc mã đen phải di chuyển]

2...Vg4 3.Hf6 Mh4 [Nếu 3...Tb1 4.Hf3+ Vg5 5.Hg2+ Vf6 (*5...Vh6 6.Hh1+*) 6.Hb2+]

4.Hd4+ Vg5 5.Hf4+ Vh5 6.Vd4 Tg4 7.Hc1 [Trắng đe dọa Ve5–f6]

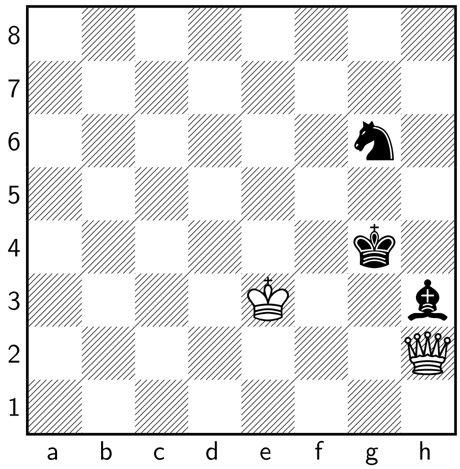
7...Ng6 8.Ve4 [Bây giờ thì chỉ còn Tượng đen có thể di chuyển]

8...Te6 [Nếu 8...Td7 9.Hd1+ Tg4 10.Hd2 Te6 11.Hd6 Th3 12.Hc5+ Vh4 13.He3 Đen rất khó tránh khỏi mất quân 13...Vg4 14.He2+ Vh4 Đen cố gắng phối hợp giữa

[1] *Đại kiện tướng quốc tế.*

tượng và mã để tạo ra hàng rào ngăn vua trắng tiếp cận gần với vua đen. Tuy nhiên, đen khó tránh khỏi mất quân 15.Hd2 Tg4 16.Hh6+ Th5 17.Vf5 Me7+ 18.Ve5 Mg6+ 19.Vf6 + ; 8...Mh4 9.Ve5; 8...Vh4 9.Hh6+ Th5 10.Vf5 Me7+ 11.Ve6 Mg6 12.Vf6]

9.Hd2 Th3 10.Hh2 Vg4 11.Ve3!



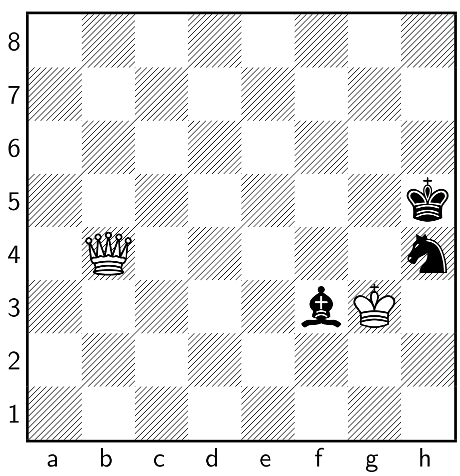
Hình 3.

Đen lại bị "xung xoang"]

11...Mh4 12.Hg1+ Tg2 13.Vf2 Vh3 14.Hb1! Tf3 15.Hb8 [Trắng dọa chiếu hết ở g3]

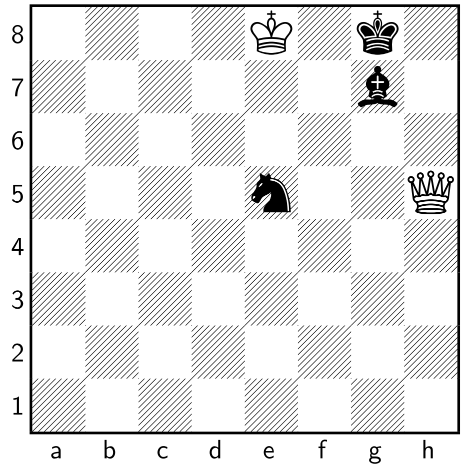
15...Vg4 16.Hb4+ Vh5 [16...Vh3 17.Hf4]

17.Vg3! [Đen mất quân và thua cờ]



Hình 4.

Ví dụ 2: NN



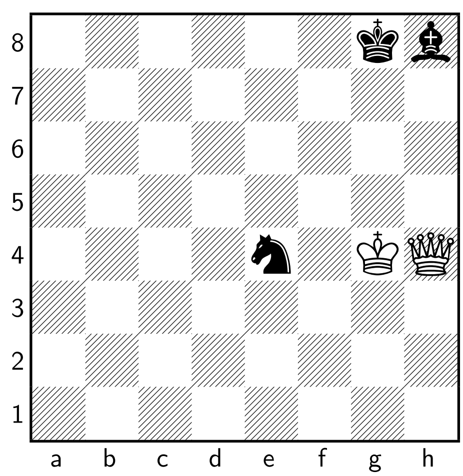
Hình 5.

Một trong những cơ hội hiếm hoi cho bên có Tượng và Mã chống lại Hậu là không xây dựng các "bong ke" không có vua đối phương tiếp cận. Thế cờ trên cho thấy trắng không thể tận dụng được ưu thế và đành chấp nhận hòa. Ở đây Mã e5 và Tượng g7 tạo ra một hàng rào trên cột f và hàng ngang số 6 nên vua trắng không thể tiến sát vua đen.

1.Ve7 [1.Hh3 Th8 2.He3 Tg7 3.He4 Th8 4.Hd5+ Vh7 5.Vd8 (5.*Ve7 Tg7*) 5...Tg7; 1.Hf5]

1...Th8! 2. Bg7 [Đen chủ động chơi Tg7–h8–g7 và chờ đợi]

3.Vf5 Th8 4.Vg5 Mf7+ 5.Vg6 Me5+ 6.Vh6 Mf7+ 7.Vg6 Me5+ 8.Vg5



Hình 6.

Vua trắng không thể tiếp cận được vua đen.

1/2 – 1/2.

ĐỐ VUI

SƠN CA (st)

Âm nhạc trên hành tinh Vui vẻ chỉ được viết bằng 2 nốt nhạc A và B. Đặc biệt, không có bất kỳ dãy nốt nhạc nào lặp lại 3 liên tiếp trong bản nhạc; ngoài ra cũng không có dãy 2 nốt nhạc liên tiếp là BB trong đó. Hỏi một bản nhạc trên hành tinh Vui vẻ có nhiều nhất bao nhiêu nốt nhạc?

facebook.com/pijournal

8 938514 372646 01222

Giá: 35.000 đồng
www.pi.edu.vn