OLYMPIC TOÁN HỌC "CHINH PHỤC ĐỒI CHIM SẺ" 2020-2021

HOÀNG NGỤ HUẤN[1]

Xin được giới thiệu với bạn đọc về kỳ thi "chinh phục đồi chim sẻ". Đây là kỳ thi do Trường đại học tổng hợp Moscow và nhà xuất bản thanh niên Moscow cùng phối hợp tổ chức từ năm 2005 nhằm tuyển chọn sinh viên cho trường Đại học tổng hợp Moscow. Xin được nói thêm Trường Đại học tổng hợp Moscow là trường đại học lâu đời nhất và cũng là trường đại học nổi tiếng nhất nước Nga. Nơi đây đã đào tạo ra rất nhiều nhà khoa học danh tiếng. Thi đỗ vào trường là niềm mơ ước của rất nhiều học sinh Nga. Tham gia kỳ thi này là học sinh các lớp từ 9 tới 11. Trong đó có kỳ thi riêng dành cho lớp 11 và cho các bạn lớp 9 và 10. Năm 2009 có 500 bạn học sinh đã được giải thưởng kỳ thi này và khoảng 400 bạn đã trở thành sinh viên của trường. Sau đây là bài kiểm tra của năm 2021.

Kỳ thi "Chinh phục đồi chim sẻ" năm học 2020/2021 gồm hai vòng và đều tiến hành thi online. Vòng tuyển loại (diễn ra vào tháng $11-12$ năm 2020) kéo dài 24h gồm hai vòng nhỏ hơn: vòng loại có 6 bài toán và kéo dài 3 giờ, phần sáng tạo gồm 3 bài toán và cần phải gửi lời giải trong khoảng thời gian còn lại. Vượt qua vòng tuyển loại, các bạn trẻ sẽ được tham gia vào vòng chung kết diễn ra vào tháng 4 năm 2021.

Vòng loại

Mỗi học sinh sẽ nhận được danh sách các bài toán riêng khác biệt. Sau đây là một ví dụ về sáu bài toán của vòng loại.

1. Giải bất phương trình

$$\frac{\sqrt{x+5}-x-3}{x^2-15x+54} \geq 0$$

Trong đó hãy tìm số lượng nghiệm nguyên của bất phương trình trên.

2. Giải phương trình $\cos 2x + \cos 6x + 2\sin^2 x = 1$.

Trong đó hãy chỉ ra tổng các nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$, làm tròn tới hai chữ số sau dấu phảy.

3. Từ điểm M nằm trong tam giác ABC hạ các đường vuông góc xuống các cạnh BC, AC, AB. Các đường vuông góc này có độ dài tương ứng là k, l và m. Tìm diện tích của tam giác ABC, biết rằng $\angle CAB = \alpha$ và $\angle ABC = \beta$. Nếu kết quả thu được không là số nguyên, hãy làm tròn nó tới số nguyên gần nhất.

Cho biết các giá trị số là: $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{4}, k = 3, l = 2, m = 4$.

[1] *Trường Đại học Mỏ–Địa chất.*

4. Giải hệ sau

$$\begin{cases} x^3+3y^2=11, \\ x^2y+xy^2=6. \end{cases}$$

Với mỗi nghiệm (x,y) của hệ, hãy tính giá trị của biểu thức $\frac{x}{y}$; sau đó tìm giá trị nhỏ nhất trong các giá trị thu được – lấy xấp xỉ tới hai chữ số sau dấu phẩy.

5. Có hai hợp kim. Hợp kim thứ nhất chứa $p\%$ tạp chất, hợp kim thứ hai chứa $q\%$ hợp chất. Hỏi rằng cần phải nung chảy hai hợp kim theo một tỷ lệ nào để thu được một hợp kim mới chứa $r\%$ tạp chất. Trong đáp án khi tính xấp xỉ tỷ lệ khối lượng của hợp kim thứ nhất với khối lượng của hợp kim thứ hai thì làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy.

Các dữ liệu số: $p=70, q=5, r=40$.

6. Hãy tìm tất cả các số nguyên a có giá trị tuyệt đối không vượt quá 15 sao cho bất đẳng thức

$$\frac{4x-a-4}{6x+a-12} \leq 0$$

thỏa mãn với mọi x thuộc khoảng $[2,3]$. Sau đó hãy tính tổng tất cả các giá trị a vừa tìm được.

Vòng tuyển chọn (phần sáng tạo)

7. Tìm tất cả các số tự nhiên n không vượt quá 100 sao cho tổng $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ chia hết cho 50.

Với những giá trị n vừa tìm được, hãy sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần: $n_1<n_2<\ldots<n_k$. Từ đó hãy cho biết n_{k-2} là số nào?

8. Cho trước một đường tròn, trong tất cả các tam giác nội tiếp đường tròn có tổng bình phương của các góc là $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2=\frac{\pi^2}{2}$ (các góc α, β, γ được tính bằng radian) hãy tìm tất cả các tam giác có diện tích lớn nhất.

Với mỗi tam giác tìm được, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tích các cặp góc. Giá trị nhỏ nhất được làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy.

9. Hãy tìm tất cả các cặp số dương x, y thỏa mãn đẳng thức

$$\frac{4x^2y+6x^2+2xy-4x}{3x-y-2} + \sin\left(\frac{3x^2+xy+x-y-2}{3x-y-2}\right) = 2xy+y^2+\frac{x^2}{y^2}+\frac{2x}{y}+\frac{2xy(x^2+y^2)}{(3x-y-2)^2}+ + \frac{1}{(x+y)^2}\left(x^2\sin\frac{(x+y)^2}{x} + y^2\sin\frac{(x+y)^2}{y^2}+2xy\sin\frac{(x+y)^2}{3x-y-2}\right).$$

Trong đáp án hãy viết tổng x^2+y^2 của tất cả các nghiệm (x,y). Kết quả được làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy.

Vòng chung kết

Đề 1

10. Viết các số tự nhiên bắt đầu từ 20 thành một dòng: $20212223\ldots$ Hỏi rằng trong dãy ký tự thu được, chữ số nào đứng ở vị trí 2021?

11. Hãy tìm tất cả các giá trị của a sao cho phương trình

$$|x|-\arcsin x+b\cdot(\arccos x+|x|-1)+a=0$$

có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của b.

12. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}?$$

13. Giải hệ sau

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6, \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2, \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3. \end{cases}$$

14. Gấp một tờ giấy hình vuông có diện tích là 17 theo đường thẳng đi qua tâm. Sau đó dính các mảnh lại với nhau. Hãy tìm diện tích lớn nhất trong các hình có thể tạo được.

Trong khuôn khổ có hạn của bài báo, chúng tôi chỉ trình bày lời giải chi tiết đối với một số bài chọn lọc.

Đáp án và lời giải

Vòng loại

1. Đáp án: 7.

2. Đáp án: $2{,}88$ (giá trị chính xác: $\frac{11\pi}{12}$).

3. Đáp án: 67.

4. Đáp án: $-1{,}31$ (giá trị chính xác: $-\frac{1+\sqrt{217}}{12}$).

5. Đáp án: $1{,}17$ (giá trị chính xác: $\frac{7}{6}$).

6. Đáp án: -7.

Vòng tuyển chọn (phần sáng tạo)

7. Đáp án: 87.

8. Đáp án: $0{,}27$ (giá trị chính xác: $\frac{\pi^2}{36}$).

9. Đáp án: $4{,}33$ ($x = \frac{9+\sqrt{17}}{8}$, $y = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ và $x^2 + y^2 = \frac{85+13\sqrt{17}}{32} \approx 4{,}33$).

Vòng chung kết

Đề 1

10. Đáp án: 7.

11. Đáp án: $\frac{\pi}{2} - 1$.

Lời giải. Khi $b = -1$, phương trình có dạng $|x| - \arcsin x - \arccos x - |x| + 1 + a = 0$. Với $x \in [-1;1]$ phương trình tương đương với $1 + a - \frac{\pi}{2} = 0$. Như vậy, khi $b = -1$ nghiệm chỉ tồn tại khi $a = \frac{\pi}{2} - 1$.

Mặt khác, khi $a = \frac{\pi}{2} - 1$ phương trình $|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$ có nghiệm $x = 1$ với bất kỳ giá trị nào của b.

Chú thích. Các bạn thí sinh có nhiều lời giải không đúng vì dựa trên suy luận sau: câu văn từ điều kiện của bài toán "với mọi giá trị của b có ít nhất một nghiệm" thì bị hiểu nhầm là "có cùng một nghiệm với mọi trí trị của b" (Đây là một bài toán khác, đơn giản hơn mặc dù đáp áp của nó trùng với đáp án của bài toán đã cho).

12. Đáp án: 4.

Lời giải. Phương trình được biến đổi về dạng

$$t^\alpha = \alpha(t+1),$$

với $\alpha = \lg 2 \in (0,1)$, $t = x^2 - 3 > 0$.

Vì vế trái của phương trình $f(t) = t^\alpha$ là hàm lũy thừa với miền xác định $t \geq 0$; và với $\alpha \in (0,1)$ thì đây là hàm lõm. Trong khi đó vế phải của phương trình $g(t) = \alpha(t+1)$ là hàm tuyến tính với hệ số góc dương nên đồ thị của hai hàm số $f(t)$ và $g(t)$ sẽ cắt nhau tại không quá hai điểm.

Vì $f(0) = 0 < \alpha = g(0)$ và $f(1) = 1 = \lg 10 > \lg 4 = 2\alpha = g(1)$, nên trong khoảng $(0;1)$ tồn tại ít nhất một điểm.

Vì $f(1) > g(1)$, $f(10) = 10^{\lg 2} = 2 = \lg 100 < \lg 2^{11} = 11\alpha = g(10)$, nên trong khoảng $(1;10)$ cũng tồn tại ít nhất một nghiệm.

Điều đó có nghĩa là đồ thị hai hàm số cắt nhau tại đúng hai điểm (một điểm nằm giữa 0 và 1, một điểm khác nằm giữa 1 và 10).

Mỗi nghiệm dương t lại sinh ra hai nghiệm của phương trình đầu. Vì vậy, có cả thảy là 4 nghiệm.

13. Đáp án: $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = 1$ và $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}, z = -1$.

Lời giải. Nhân phương trình đầu với $(2x - 3y)$, phương trình hai với $(3z - 6x)$, phương trình thứ ba với $(6y - 2z)$. Sau đó cộng chúng lại và thu được phương trình hệ quả:

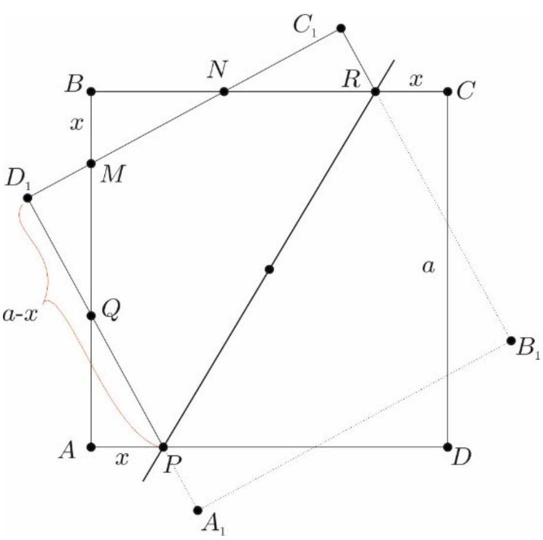
$$(2x-3y)^2+(3z-6x)^2+(6y-2z)^2 + \frac{2x-3y}{xy}+\frac{3z-6x}{xz}+\frac{6y-2z}{yz} = 6(2x-3y)+2(3z-6x)+3(6y-2z)$$
$$\Leftrightarrow (2x-3y)^2+(3z-6x)^2+(6y-2z)^2=0$$
$$\Leftrightarrow 2x=3y=z$$

Thế $2x=3y=z$ vào hệ, ta được: $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}, z=1$ hoặc $x=-\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{3}, z=-1$.

Chú thích. Dễ dàng nhận thấy là nếu $2x=3y=z$, thì tất cả các nhân tử nhân thêm vào phương trình đều bằng 0. Thế nhưng nó không làm xuất hiện nghiệm ngoại lai vì phương trình tổng vẫn là phương trình hệ quả của hệ đã cho.

14. Đáp án: $17\left(2-\sqrt{2}\right)$.

Lời giải. Gọi cạnh của hình vuông là a. Giả sử đường thẳng cắt và tạo trên cạnh hình vuông AD một đoạn $AP=x<\frac{a}{2}$ (Hình 2).



Hình 2

Hình vẽ thu được đối xứng qua đường thẳng PR. Mặt khác, hình vuông $A_1B_1C-1D_1$ là ảnh của hình vuông $ABCD$ qua phép quay quanh tâm của hình vuông. Khi đó $x=AP=PA_1=C_1R=RC=BM=MD_1$. Vì vậy các tam giác vuông AQP, MBN, NC_1R, QD_1M là bằng nhau.

Như vậy diện tích của hình thu được bằng tổng diện tích của hình thang vuông PD_1C_1R và diện tích của hai tam giác vuông bằng nhau AQP, MBN. Diện tích hình thang vuông bằng $\frac{a^2}{2}$. Vì vậy ta cần tìm diện tích lớn nhất của tam giác vuông AQP. Chu vi của nó là $AP+AQ+QP=BM+AQ+QM=AB=a$. Trong số các tam giác vuông có chu vi không đổi, thì tam giác vuông cân có diện tích lớn nhất.

Ta sẽ chứng minh khẳng định trên. Gọi a, b là các cạnh của tam giác vuông còn c là độ dài của cạnh huyền. Chu vi tam giác là $P=a+b+c$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy có $P=a+b+\sqrt{a^2+b^2}\geq 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}=\sqrt{ab}\left(2+\sqrt{2}\right)$. Từ đó suy ra $S=\frac{ab}{2}\leq \frac{1}{2}\left(\frac{P}{2+\sqrt{2}}\right)^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Ta cũng có thể chứng minh khẳng định trên thuần túy bằng hình học: nếu trong góc vuông ABC dựng một đường tròn nội tiếp có bán kính là $\frac{P}{2}$, thì đường tròn này sẽ là đường tròn bằng tiếp của tất cả các tam giác vuông có chu vi là P và các cạnh góc vuông BX, BY nằm trên hai cạnh của góc. Vì chu vi cho trước, cho nên tam giác có diện tích lớn nhất là tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. Bán kính này đạt giá trị lớn nhất khi đường tròn nội tiếp tiếp xúc với đường tròn bang tiếp (nếu bán kính lớn hơn nữa thì hai đường tròn này sẽ cắt nhau, đó là điều không thể), tức là khi tam giác cân. Như vậy $\angle QPA=45^\circ$, $\angle RPD=\angle QPR=\frac{180^\circ-45^\circ}{2}=67,5^\circ$. Khi đó $a=AB=2x+x\sqrt{2}$. Từ đây rút ra được $x=\frac{a}{2+\sqrt{2}}=$

$\frac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$, diện tích tam giác ΔQPA bằng $\frac{x^2}{2} = \frac{a^2\left(4+2-4\sqrt{2}\right)}{8} = \frac{a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4}$.

Điều đó có nghĩa là diện tích cần tìm là $\frac{a^2}{2} + 2\cdot\frac{a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4} = \frac{a^2\left(1+3-2\sqrt{2}\right)}{2} = a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$.

Vẫn tồn tại một lời giải khác hoàn toàn bằng đại số. Giả sử cạnh của hình vuông bằng a, đường thẳng cắt cạnh AD của hình vuông một đoạn $AP = x < \frac{a}{2}$. Ta sẽ đi tìm AQ. Ký hiệu các góc $\angle RPS = \angle RPQ = \alpha$, $\angle QPA = \beta$. Từ tam giác PRS (với S là hình chiếu của điểm R lên cạnh AD), ta tìm được $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{a-2x}$. Do đó $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{a(a-2x)}{2x(x-a)}$, $AQ = x\cdot\operatorname{tg}\beta = x\operatorname{tg}(-2\alpha) = \frac{a(a-2x)}{2(a-x)}$.

Từ đó suy ra, các cạnh của tam giác vuông bằng x và $\frac{a(a-2x)}{2(a-x)}$. Khi đó diện tích cần tìm bằng $\frac{a^2}{2} + \frac{ax(a-2x)}{2(a-x)}$. Bằng cách tính đạo hàm, ta có thể suy ra rằng hàm số $f(x) = \frac{x(a-2x)}{(a-x)}$ đạt cực đại tại $x = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$. Nó tương ứng với các góc $\beta = \frac{\pi}{4}, 2\alpha = \frac{3\pi}{4}, \alpha = \frac{3\pi}{8}$.

Tài liệu tham khảo

[1] Олимпиада по математике «Покори Воробьевы горы!» – 2019 – 2020 / *Б. А. Будак и др.* // Математика в школе. – 2021. – № 1. С. 28 – 39.

[2] Олимпиада по математике «Покори Воробьевы горы!» – 2018 – 2019 / *Б. А. Будак и др.* // Математика в школе. – 2020. – № 4. С. 11 – 23.

[3] Олимпиада по математике «Покори Воробьевы горы!» – 2017 – 2018 / *Б. А. Будак и др.* // Математика в школе. – 2018. – № 5. С. 20 – 32.

[4] Олимпиада по математике «Покори Воробьёвы горы!» – 2016 – 2017 / *Д. В. Горяшин и др.* // Математика в школе. – 2017. – № 8. . 31 – 40.

[5] Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» / *В. В. Галатенко и др.* // Математика в школе. – 2017. – № 2. С. 12 – 23.

[6] Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» / *А. С. Зеленский и др.* // Математика в школе. – 2016. – № 4. С. 10 – 25.

[7] Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике (2013 – 2018) / *А. С. Зеленский и др.* – М.: МЦНМО, 2019. – 192 С.