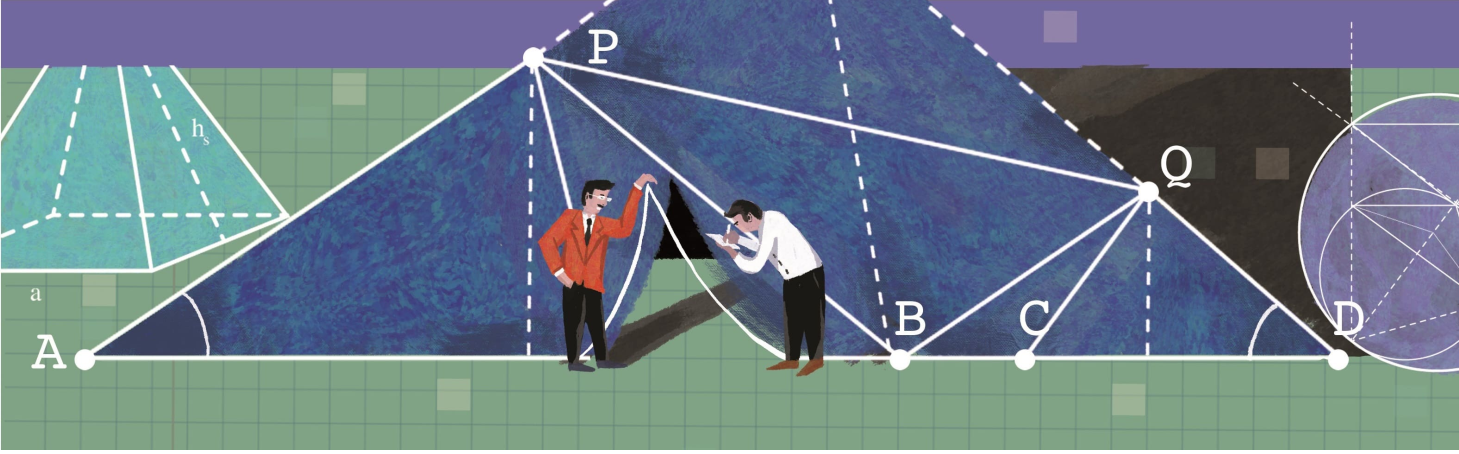


THUẬT TOÁN DIJKSTRA VỀ ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

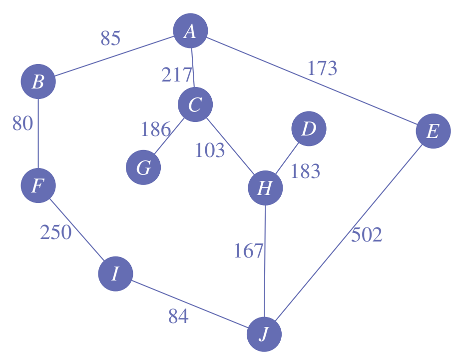
BÙI VĂN BIÊN[1]

Vài nét chung về thuật toán Dijkstra

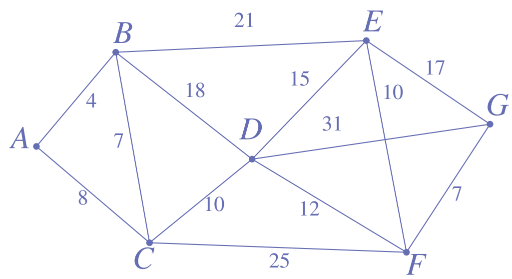
Lý thuyết đồ thị là một nhánh của Toán học và Tin học nhằm mô hình hóa những vấn đề khác nhau gặp trong cuộc sống bởi những đồ thị. Một trong những vấn đề cổ điển của lý thuyết đồ thị là mô hình hóa mạng lưới đường bộ giữa các thành phố (làng, xã ...), đặc biệt hơn một trong những bài toán đặt ra là tối ưu hóa độ dài đường đi, thời gian di chuyển cũng như chi phí di chuyển từ thành phố này tới thành phố khác. Cụ thể hơn là tìm con đường tốt nhất về khía cạnh độ dài, thời gian, chi phí... để di chuyển từ thành phố này tới thành phố khác. Việc tìm con đường tốt nhất nhắc tới trong bài toán tổng quát nêu trên quy về việc tìm đường đi ngắn nhất nối hai đỉnh tương ứng trên một đồ thị.

Để dễ hình dung, ta xét một mạng lưới đường bộ biểu diễn như hình dưới đây được lấy từ Wikipedia.

Một mạng lưới như thế được gọi là một đồ thị. Ở đây những thành phố từ $A, B, \ldots, J$ được gọi là các đỉnh của đồ thị. Chúng được nối với nhau bởi những con đường mà ta gọi là các cạnh của đồ thị. Mỗi cạnh được gán với một giá trị mà ta gọi là trọng số của cạnh. Trọng số trong ví dụ này biểu diễn khoảng cách được tính bằng km giữa hai thành phố kết nối với nhau. Bài toán đặt ra là tìm đường đi ngắn nhất từ thành phố A tới thành phố J.



Ta xét một ví dụ khác về mạng lưới đường sắt đô thị của một thành phố như đồ thị dưới đây.



Ở đây các đỉnh $A, B, \ldots, G$ của đồ thị đại diện cho các ga tàu. Mỗi cạnh của đồ thị thể hiện rằng có tuyến tàu nối giữa hai ga. Trọng số trên mỗi cạnh chính là thời gian di chuyển tính bằng phút từ ga này tới ga kia. Bài toán

---

[1] *Giáo viên Toán tại trường Don Bosco, thành phố Nice, Cộng hòa Pháp.*

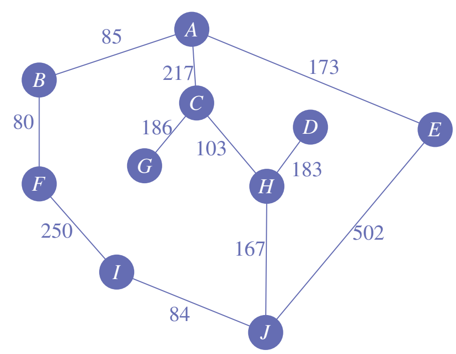
đặt ra là làm thế nào tìm đường đi nhanh nhất để di chuyển từ ga B tới ga G.

Để giải quyết những bài toán như trên, vào năm 1959, nhà Toán học và Khoa học máy tính người Hà Lan, E.W. Dijkstra (1930 – 2022) đã đề xuất một thuật toán cho phép tìm ra đường đi ngắn nhất từ một đỉnh cụ thể tới một đỉnh bất kỳ khác trong một đồ thị mà tất cả các trọng số đều dương. Thuật toán bắt đầu bằng cách gán trọng số bằng 0 cho đỉnh xuất phát và bằng vô cùng cho các đỉnh còn lại. Quy trình xử lý của thuật toán là kiểm tra tất cả các đỉnh, chọn ra đỉnh có khoảng cách nhỏ nhất kể từ đỉnh xuất phát và cập nhật trọng số cho các đỉnh kề với đỉnh được chọn.Quy trình trên được lặp lại liên tiếp và dừng lại khi đỉnh kết thúc được chọn hoặc khi không còn đỉnh nào để chọn. Khi thuật toán dừng, ta thu được đường đi ngắn nhất giữa đỉnh xuất phát và đỉnh kết thúc.

Thuật toán Dijkstra dưới dạng bảng

Để hiểu rõ hơn về thuật toán Dijkstra, trong mục này ta sẽ tập trung giải quyết một trong hai bài toán nêu ra ở mục trên.

Bài toán: Tìm đường đi ngắn nhất nối các thành phố biểu diễn bởi các đỉnh A và J của đồ thị cho bởi hình sau. Trọng số trên các cạnh thể hiện khoảng cách tính bằng km từ thành phố này tới thành phố kia.



Thuật toán Dijkstra được tiến hành như sau.

Bước 1: Khởi đầu. Ta dựng một bảng gồm các cột tương ứng với các đỉnh của đồ thị. Vì ta xuất phát từ đỉnh A nên ta gán cho nó trọng số bằng 0 còn các đỉnh còn lại trọng số bằng vô cùng. Ta điển 0_A vào cột tương ứng với đỉnh A và ∞ vào các cột còn lại. Điều này có nghĩa là ở bước 1, xuất phát từ A ta có thể đi tới A mất 0 km và ta chưa đi tới những đỉnh khác.

Đỉnh được chọn	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Xuất phát	0_A	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Bước 2: Chọn đỉnh đầu tiên và cập nhật trọng số cho các đỉnh còn lại. Ta chọn giá trị nhỏ nhất ở hàng cuối cùng trong bảng vẽ ở bước 1. Ở đây giá trị nhỏ nhất là 0_A tương ứng với đường đi từ A tới chính nó với khoảng cách là 0 km.

- Đóng khung giá trị nhỏ nhất được chọn.
- Trong cột Đỉnh được chọn ta ghi đỉnh được chọn cũng như khoảng cách tương ứng. Ở đây ta ghi $A(0)$.
- Ta xóa tất cả các ô nằm ngay phía dưới ô được đóng khung. Điều này có nghĩa là xuất phát từ A ta đã tìm ra đường đi ngắn nhất tới A và không cần tìm thêm những đường đi khác nữa.

Dựa vào đồ thị ta thấy rằng, từ đỉnh A ta có thể di chuyển tới các đỉnh B, C và E với các khoảng cách tương ứng là 85 km, 217 km và 173 km. So với những trọng số vô cùng đã gán ở bước 1, ta thấy rằng những giá trị mới nhỏ hơn, nên ở dòng thứ 3 của bảng, tương ứng với các đỉnh B, C và E, ta ghi 85_A, 217_A và 173_A thay vì những giá trị vô cùng. Những đỉnh còn lại vẫn giữ nguyên giá trị được gán ở bước 1. Chỉ số A ở dưới những giá trị muốn nói rằng ta di chuyển từ đỉnh A.

Ta có bảng mới như sau:

Đỉnh được chọn	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Xuất phát	$\boxed{0_A}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$A(0)$		85_A	217_A	∞	173_A	∞	∞	∞	∞	∞

Bước 3: Chọn đỉnh thứ hai và cập nhật trọng số cho các đỉnh còn lại. Ta chọn trọng số nhỏ nhất ở hàng cuối cùng trong bảng vẽ ở bước 2. Ở đây giá trị nhỏ nhất là 85_A tương ứng với đường đi từ A tới đỉnh B có độ dài là 85 km.

• Đóng khung giá trị nhỏ nhất được chọn.

• Trong cột Đỉnh được chọn ta ghi đỉnh được chọn cũng như độ dài của đường đi tương ứng, kể từ đỉnh xuất phát. Ở đây đỉnh được chọn là đỉnh B nên ta ghi $B(85)$.

Ta xóa tất cả các ô nằm ngay phía dưới ô được đóng khung. Điều này có nghĩa là xuất phát từ A ta đã tìm ra đường đi ngắn nhất tới B và không cần tìm thêm những đường đi khác nữa.

Từ đỉnh B ta chỉ có thể di chuyển tới đỉnh F với khoảng cách tương ứng là 80 km. Ta tính được độ dài của đường đi ngắn nhất từ A tới F là $85 + 80 = 165$ km. So với trọng số đã gán trước đó cho đỉnh F ta chọn giá trị nhỏ hơn, nên ở dòng thứ 4 của bảng, đỉnh F được gán giá trị mới là 165_B, các đỉnh còn lại vẫn giữ nguyên giá trị. Ta hiểu 165_B ở đây chính là tổng độ dài các đường đi ngắn nhất từ A tới B và từ B tới F.

Ta được bảng mới như sau:

Đỉnh được chọn	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Xuất phát	$[0_A]$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$A(0)$		$[85_A]$	217_A	∞	173_A	∞	∞	∞	∞	∞
$B(85)$			217_A	∞	173_A	165_B	∞	∞	∞	∞

Bước 4: Chọn đỉnh thứ ba và cập nhật trọng số cho các đỉnh còn lại. Lặp lại bước 3 với hàng cuối cùng của bảng trên ta thu được đỉnh thứ ba cần chọn là đỉnh F vì có trọng số nhỏ nhất. Từ đỉnh F ta chỉ có thể di chuyển tới đỉnh I với khoảng cách tương ứng là 250 km. Ta tính được độ dài của đường đi ngắn nhất từ A tới I là $165 + 250 = 415$ km. So với trọng số đã gán trước đó cho đỉnh I ta chọn giá trị nhỏ hơn, nên ở hàng thứ 5 của bảng, đỉnh I được gán giá trị mới là 415_F, các đỉnh còn lại vẫn giữ nguyên giá trị.

Ta được bảng mới như sau:

Đỉnh được chọn	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Xuất phát	$[0_A]$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$A(0)$		$[85_A]$	217_A	∞	173_A	∞	∞	∞	∞	∞
$B(85)$			217_A	∞	173_A	$[165_B]$	∞	∞	∞	∞
$F(165)$			217_A	∞	173_A		∞	∞	415_F	∞

Bước 5 đến kết thúc: Lặp lại quá trình trên cho tới khi đỉnh kết thúc được chọn hoặc không còn đỉnh để chọn.

• *Hàng* 5: Chọn đỉnh E, đóng khung trọng số 173_A và xóa tất cả các ô nằm dưới ô vừa được đóng khung.

• *Hàng* 6: Ghi $E(173)$ trong cột *Đỉnh được chọn*. Cập nhật trọng số mới 675_E cho đỉnh J. Ở đây 675 km chính là tổng độ dài các đường đi ngắn nhất từ A tới E và từ E tới J. Các đỉnh còn lại vẫn giữ nguyên giá trị. Tiếp theo chọn đỉnh C, đóng khung trọng số 217_A và xóa tất cả các ô nằm dưới ô vừa được đóng khung.

• *Hàng* 7: Ghi $C(217)$ trong cột *Đỉnh được chọn*. Từ đỉnh C ta có thể di chuyển tới các đỉnh G và H với các khoảng cách tương ứng là 186 km và 103 km. Tổng độ dài các đường đi ngắn nhất tương ứng tính từ A tới các đỉnh G và H lần lượt là $217 + 186 = 403$ km và $217 + 103 = 320$ km. Ta cập nhật trọng số mới 403_C cho đỉnh G và 320_C cho đỉnh H. Các đỉnh còn lại vẫn giữ nguyên. Tiếp theo chọn đỉnh H, đóng khung trọng số 320_C và xóa tất cả các ô nằm dưới ô vừa được đóng khung.

• *Hàng* 8: Ghi $H(320)$ trong cột Đỉnh được chọn. Từ đỉnh H ta có thể di chuyển tới các đỉnh D và J với các khoảng cách tương ứng là 183 km và 167 km. Tổng độ dài các đường đi ngắn nhất tương ứng tính từ A tới các đỉnh D và J lần lượt là $320 + 183 = 503$ km và $320 + 167 = 487$ km. Bằng cách chọn giá trị nhỏ nhất, ta cập nhật trọng số mới 503_H cho đỉnh D và 487_H cho đỉnh J. Các đỉnh còn lại không thay đổi. Tiếp theo chọn đỉnh G, đóng khung trọng số 403_C và xóa tất cả các ô nằm dưới ô vừa được đóng khung.

• *Hàng* 9: Ghi $G(403)$ trong cột *Đỉnh được chọn*. Vì không có đường đi nào xuất phát từ G tới những đỉnh còn lại (không tính những đỉnh đã bị loại), nên các giá trị của các đỉnh còn lại không thay đổi. Tiếp theo chọn đỉnh I, đóng khung trọng số 415_F và xóa tất cả các ô nằm dưới ô vừa được đóng khung.

• *Hàng* 10: Ghi $I(415)$ trong cột *Đỉnh được* *chọn*. Trọng số của đỉnh D không thay đổi vì không có đường đi từ I tới J. Trọng số của đỉnh J cũng vậy vì trọng số mới $415 + 84 = 499$ km lớn hơn trọng số ban đầu. Chọn đỉnh J, đóng khung trọng số 487_H và xóa tất cả các ô nằm dưới ô vừa được đóng khung.

- *Hàng* 11: Ghi $J(487)$ trong cột *Đỉnh được chọn*. Thuật toán kết thúc vì mục đích của ta là di chuyển từ A tới J. Ta được đường đi ngắn nhất có độ dài 487 km.

Ta thu được bảng cuối cùng như sau:

Đỉnh được chọn	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Xuất phát	$[0_A]$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$A(0)$		$[85_A]$	$[217_A]$	∞	173_A	∞	∞	∞	∞	∞
$B(85)$			217_A	∞	173_A	$[165_B]$	∞	∞	∞	∞
$F(165)$			217_A	∞	$[173_A]$		∞	∞	415_F	∞
$E(173)$			$[217_A]$	∞			∞	∞	415_F	675_E
$C(217)$				∞			403_C	$[320_C]$	415_F	675_E
$H(320)$				503_H			$[403_C]$		415_F	487_H
$G(403)$				503_H					$[415_F]$	487_H
$I(415)$				503_H						$[487_H]$
$J(487)$										

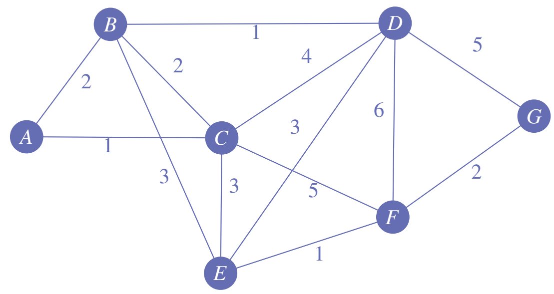
Bước 6*: Kết luận*. Dựa vào bảng trên ta kết luận rằng đường đi ngắn nhất xuất phát từ thành phố A tới thành phố J dài 487 km. Để dựng lại con đường đó dựa vào bảng trên ta chỉ cần đọc các đỉnh theo chiều ngược lại từ J tới A như sau:

- Xuất phát từ đỉnh J, ta đọc giá trị đóng khung là $[487_H]$, ta chọn chỉ số H là đỉnh tiếp theo.
- Ở cột chứa đỉnh H, giá trị đóng khung là $[320_C]$, ta chọn C là đỉnh tiếp theo.
- Ở cột chứa đỉnh C, giá trị đóng khung là $[217_A]$, ta chọn A là đỉnh tiếp theo và cũng là đỉnh cuối cùng.

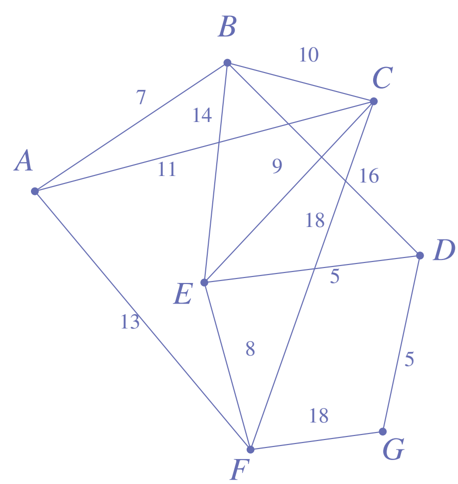
Đọc từ dưới lên trên, ta được đường đi ngắn nhất cần tìm là $A - C - H - J$ độ dài là 487 km.

Một số bài tập áp dụng

Bài 1: Đồ thị bên biểu diễn bản đồ của một thành phố. Đỉnh A đại diện cho vị trí của các trung tâm kỹ thuật, các đỉnh còn lại đại diện cho vị trí của các vườn hoa công cộng. Hai vườn hoa công cộng được nối với nhau bởi một cạnh trên đồ thị khi có đường đi từ vườn hoa này tới vườn hoa kia. Trọng số trên mỗi cạnh là số đèn tín hiệu giao thông nằm trên con đường đó. Bằng cách sử dụng thuật toán Dijkstra, hãy tìm một đường đi từ A tới G chứa ít đèn đèn tín hiệu giao thông nhất.



Bài 2: Một thành phố lớn đưa vào sử dụng hệ thống cho thuê xe đạp tự phục vụ. Người thuê có thể lấy xe tại một điểm và trả xe tại một điểm bất kỳ trong hệ thống. Thành phố lắp đặt bảy điểm thuê xe biểu diễn như đồ thị hình bên. Mỗi cạnh của đồ thị thể hiện rằng có một đường đi từ trạm dừng này tới trạm dừng khác. Trọng số trên mỗi cạnh thể hiện thời gian di chuyển tính bằng phút. Bằng cách sử dụng thuật toán Dijkstra, hãy tìm một đường đi nhanh nhất từ A tới G.



Nguồn tham khảo.

[1] Algorithme de Dijkstra – Wikipédia (wikipedia.org)

[2]Graphes – Trajet minimal – Bac ES Polynésie française 2008 – Maths–cours.fr

[3] Graphes Algorithme de Dijkstra – Bac ES Métropole 2009 – Maths-cours.fr