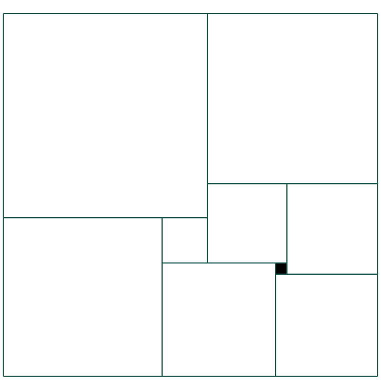
- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P731–P740: trước ngày 15/10/2023.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P731. (Mức B) Ghép 9 hình vuông thành một hình chữ nhật như ở hình dưới đây. Biết rằng, hình vuông màu đen có cạnh bằng 1. Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.



Bùi Văn Biên, France (st)

P732. (Mức B) Xét 4 số thực (không nhất thiết đôi một khác nhau), mà mỗi số có trị tuyệt đối không vượt quá $\frac{1}{2}$, và tổng của ba số bất kỳ, trong bốn số đó, là một số nguyên. Tìm tất cả các giá trị có thể của tổng bốn số đó.

Nguyễn Đức Tấn, Tp. Hồ Chí Minh (st)

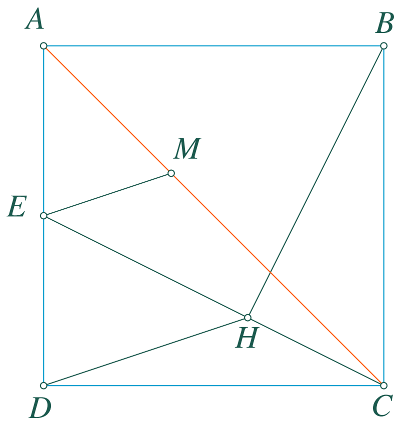
P733. (Mức B) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \left[\frac{b+c}{a}\right] + \left[\frac{c+a}{b}\right] + \left[\frac{a+b}{c}\right]$$

trong đó a, b, c là các số nguyên dương.

Nguyễn Việt Hùng, Hà Nội

P734. (Mức B) Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là trung điểm của AD; H là hình chiếu vuông góc của B trên CE. Trên đường chéo AC, lấy điểm M sao cho $AM = \frac{3}{8}AC$. Chứng minh rằng, ME song song với DH.



Huỳnh Thanh Hưng, Phú Yên

P735. (Mức B) Tìm tất cả các số nguyên dương n, để $n! + n$ là một luỹ thừa với số mũ nguyên dương của một số nguyên tố.

Hà Duy Hưng, Hà Nội

P736. (Mức B) Bạn An có 8 quả cân có tổng trọng lượng là 16 kg và trọng lượng mỗi quả, theo đơn vị kg, là một số nguyên dương không vượt quá 8. Chứng minh rằng, có thể chia 8 quả cân này thành hai nhóm sao cho các tổng trọng lượng của các quả cân cùng nhóm bằng nhau.

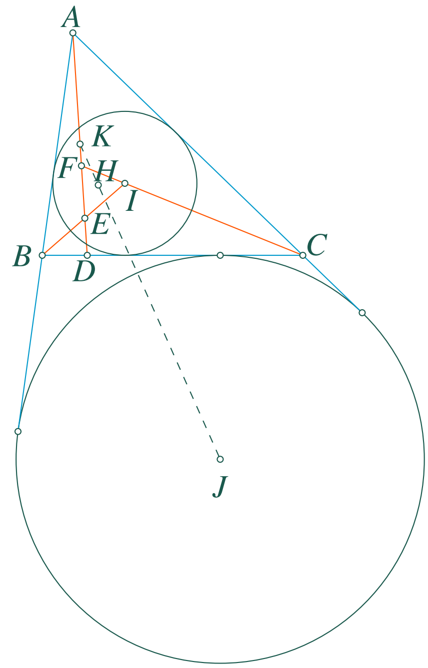
Tường Thanh, Nghệ An

P737. (Mức A) Xét các số thực dương a, b, c, thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = 2\left(a^3 + b^3 + c^3\right) - (a + b + c).$$

Kiều Đình Minh, Phú Thọ

P738. (Mức A) Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác đó. Trên cạnh BC, lấy điểm D tùy ý, sao cho ba điểm A, I, D không thẳng hàng. Đường thẳng AD cắt các đường thẳng IB, IC, tương ứng, tại E, F. Gọi H là trực tâm của tam giác IEF, và gọi K là trung điểm của AD. Chứng minh ba điểm K, H, J thẳng hàng.



Lưu Công Đông, Hà Nội

P739. (Mức A) Cho dãy số (a_n), xác định bởi

$$a_n = \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] + \left[\frac{n}{\sqrt{3}}\right], \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng, trong dãy (a_n) chứa vô hạn số chẵn và vô hạn số lẻ.

Nguyễn Tiến Lâm, Hà Nội

P740. (Mức A) Cho bảng ô vuông kích thước 2023×2023. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất, sao cho có thể đặt n viên bi vào các ô vuông con của bảng, đảm bảo các điều kiện sau được đồng thời thoả mãn:

i/ Ở mỗi ô vuông con chỉ có tối đa một viên bi;

ii/ Với mỗi ô vuông con không có bi, tổng số viên bi ở hàng và cột chứa ô đó không nhỏ hơn 2023.

Tô Trung Hiếu, Nghệ An (st)

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P701. (Mức B) Một chiếc hộp đựng một số viên bi, gồm bi xanh và bi đỏ. Biết rằng, số bi đỏ ít hơn số bi xanh; tổng của số bi xanh và hai lần số bi đỏ lớn hơn 24; tổng của số bi đỏ và hai lần số bi xanh nhỏ hơn 28. Hỏi, trong hộp có bao nhiêu viên bi xanh và bao nhiêu viên bi đỏ?

Lời giải (*của người chấm bài*).

Gọi x và y, tương ứng, là số bi xanh và số bi đỏ có trong hộp.

Theo giả thiết của bài ra, x, y là các số nguyên dương, thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$y < x, \quad (1)$$
$$x + 2y > 24, \quad (2)$$
$$2x + y < 28. \quad (3)$$

Từ (1) và (2), ta có:

$$24 < x + 2y < x + 2x = 3x;$$

suy ra, $x > 8$. Mà $x \in \mathbb{N}^*$ nên $x \geq 9$. (4)

Từ (2) và (3), ta có:

$$12 - \frac{x}{2} < y < 28 - 2x; \quad (5)$$

suy ra, $3x < 32$. Mà $x \in \mathbb{N}^*$, nên $x \leq 10$. (6)

Từ (4) và (6), với lưu ý $x \in \mathbb{N}^*$, ta được $x \in \{9; 10\}$.

– Với $x = 9$, từ (5) ta được:

$$\frac{15}{2} < y < 10.$$

Từ đó, do $y \in \mathbb{N}^*$ và $y < x = 9$, suy ra $y = 8$.

– Với $x = 10$, từ (5) ta được:

$$7 < y < 8,$$

là điều vô lý (do $y \in \mathbb{N}^*$).

Vì vậy, $x = 9$ và $y = 8$.

Ngược lại, bằng kiểm tra trực tiếp, dễ thấy, $x = 9$ và $y = 8$ thỏa mãn tất cả các điều kiện (1), (2), (3).

Vậy, trong hộp có 9 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ.

Bình luận và Nhận xét

Bài đã ra là một bài toán đơn giản. Tuy vậy, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải sai, do người giải bài đã mắc các nhầm lẫn rất sơ đẳng trong tính toán. Bên cạnh đó, một số lời giải không được chấp nhận là lời giải hoàn chỉnh (tuy có kết quả đúng), do người giải bài không thử lại các giá trị x, y (theo ký hiệu ở Lời giải trên), mặc dù các bước suy luận để tìm ra các giá trị đó đều là phép "suy ra".

Lê Huy

P702. (Mức B) Xét các số nguyên dương a, b, n, với $a < n$. Chứng minh rằng, nếu $\dfrac{an^2+1}{bn+1}$ là một số nguyên thì $b = an$.

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Lương Hữu Bách, lớp 9A1, trường THCS Nguyễn Trãi, Tp. Sơn La, Tỉnh Sơn La*).

Giả sử $\dfrac{an^2+1}{bn+1}$ là một số nguyên.

Khi đó, $bn+1 \mid an^2+1$; do đó

$$bn+1 \mid b\left(an^2+1\right) = an\left(bn+1\right) - \left(an-b\right)$$

và

$$bn+1 \mid b^2\left(an^2+1\right) = a\left(b^2n^2-1\right) + \left(a+b^2\right).$$

Suy ra

$$bn+1 \mid an-b \quad (1)$$

và

$$bn+1 \mid a+b^2. \quad (2)$$

Do $a, n \in \mathbb{N}^*$, nên từ giả thiết $a < n$ suy ra $n \geq a+1$. Vì thế, với lưu ý $a+b^2 > 0$, từ (2) ta có:

$$a + b^2 \geq bn + 1 \geq b\left(a+1\right) + 1 > ab + b.$$

Suy ra $a - ab + b^2 - b > 0$, hay

$$(b-1)(b-a) > 0.$$

Từ đó, do $b \geq 1$ nên $b > 1$; suy ra, $a < b$. Vì vậy

$$-(bn+1) < -b < an - b < bn + 1. \quad (3)$$

Từ (1) và (3), suy ra $an - b = 0$, hay $an = b$, là điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

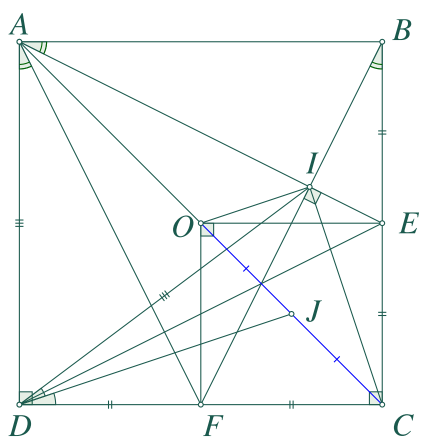
Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải, mà Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, đều là lời giải hoàn chỉnh.

Lưu Thị Thanh Hà

P703. (Mức B) Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O. Gọi E là trung điểm của BC và I là hình chiếu vuông góc của B trên AE. Chứng minh rằng, phân giác của góc IDC đi qua trung điểm của OC.

Lời giải (*của người chấm bài*).



Gọi F là giao điểm của đường thẳng BI và cạnh CD; J là trung điểm của OC.

Xét hai tam giác vuông ABE và BCF, ta có:

$$AB = BC,$$
$$\angle BAE = 90^\circ - \angle BEA = \angle CBF \text{ (do } BI \perp AE).$$

Do đó, $\Delta ABE = \Delta BCF$; suy ra

$$CF = BE = \frac{1}{2}BC \text{ (do } E \text{ là trung điểm của } BC)$$
$$= \frac{1}{2}CD \text{ (do } BC = CD).$$

Vì thế, F là trung điểm của cạnh CD. Suy ra, tứ giác $OECF$ là một hình vuông. Do đó

$$\angle EIF = 90^\circ \text{ (vì } AE \text{ vuông góc } BF \text{ tại } I)$$
$$= \angle EOF = \angle ECF.$$

Vì vậy, năm điểm E, I, O, F, C cùng nằm trên đường tròn đường kính EF, hay, đường tròn đường kính OC (do $OC = EF$). Suy ra, J thuộc trung trực của IC. (1)

Tiếp theo, do $ABCD$ là hình vuông và E là trung điểm BC, nên tam giác AED cân tại E. (2)

Suy ra

$$\angle EAD = \angle ADE. \quad (3)$$

Do tam giác ABE vuông tại B và $BI \perp AE$, nên

$$AD^2 = AB^2 = AI \cdot AE;$$

do đó, $\dfrac{AI}{AD} = \dfrac{AD}{AE}$.

Từ (3) và (4), suy ra $\Delta ADI \sim \Delta AED$. Vì thế

$$\frac{DA}{DI} = \frac{EA}{ED} = 1 \text{ (do (2))}.$$

Suy ra, $DI = DA = DC$. Do đó, IDC là tam giác cân tại D. Từ đây và (1), suy ra DJ là trung trực của IC; và vì thế, DJ cũng là phân giác của góc IDC. Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải tuy có ý giải đúng, nhưng không hoàn chỉnh, do người giải bài xét phép quay, nhưng không nêu chiều quay.

Hạ Vũ Anh

P704. (Mức B) Điền vào mỗi ô vuông con của bảng ô vuông kích thước 20×22 một số nguyên dương không vượt quá 10, sao cho hai số được điền ở hai ô có đỉnh chung nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng, có ít nhất 74 ô vuông con được điền số như nhau.

Lời giải (*theo lời giải của các bạn: Trịnh Bá Hiếu, lớp 8A, trường THCS Lê Hồng Phong, Huyện Hưng Nguyên, Tỉnh Nghệ An; và Hoàng Nguyễn Gia Bảo, lớp 11T1, trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Tỉnh Đồng Tháp*).

Dễ thấy, trong một bảng con 2×2 tùy ý của bảng ô vuông đã cho, bất kì hai ô vuông con nào cũng có đỉnh chung. Do đó, với cách điền số của đề bài, trong mỗi bảng con 2×2 của bảng ô vuông đã cho, chỉ có tối đa một số chẵn và tối đa một số chia hết cho 3.

Từ đó, do bảng 20×22 có thể được phân chia thành 110 bảng con 2×2, suy ra, trong toàn bảng đã cho có tối đa 110 ô vuông con được điền một số chẵn, và có tối đa 110 ô vuông con được điền một số chia hết cho 3. Vì vậy, trong bảng đã cho có ít nhất

$$20 \cdot 22 - 2 \cdot 110 = 220$$

ô vuông con được điền một số lẻ không chia hết cho 3. $(*)$

Do các số được dùng để điền vào bảng là các số nguyên dương không vượt quá 10, và trong 10 số nguyên dương đầu tiên chỉ có ba số $1, 5, 7$ là các số lẻ không chia hết cho 3, nên theo $(*)$, trong bảng đã cho có ít nhất 220 ô vuông con được điền các số 1, 5, 7. Vì thế, theo nguyên lí Dirichlet, phải có ít nhất

$$\left[\frac{220}{3}\right] + 1 = 74$$

ô vuông con được điền cùng một số (trong các số 1, 5, 7).

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Nguyễn Khắc Minh

P705. (Mức B) Cho hai số nguyên dương m, n thỏa mãn:

– m không chia hết cho 101.

– Tồn tại 50 ước dương của n, mà số dư trong các phép chia 50 ước này cho 101 là: $51, 52, 53, \ldots, 100$.

Chứng minh rằng, tồn tại ước dương d của n^2, mà $m - d$ chia hết cho 101.

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Lương Hữu Bách, lớp 9A1, trường THCS Nguyễn Trãi, Tp. Sơn La, Tỉnh Sơn La*).

Gọi $d_1, d_2, \ldots, d_{50}$ là 50 ước dương của n, mà khi lần lượt chia các ước này cho 101, ta được các số dư tương ứng là $51, 52, \ldots, 100$. Khi đó, với mỗi $k \in \{1; 2; \ldots; 50\}$, ta có:

$$\begin{aligned} d_k d_{50} &\equiv (50 + k) \cdot 100 \equiv (k - 51) \cdot (-1) \\ &\equiv 51 - k \pmod{101}. \end{aligned}$$

Suy ra, khi lần lượt chia các số $d_{50}d_{50}$, $d_{49}d_{50}, \ldots, d_1 d_{50}, d_1, d_2, \ldots, d_{50}$ cho 101, ta sẽ được các số dư tương ứng là $1, 2, \ldots, 50, 51, 52, \ldots, 100$.

Từ đó, do m không chia hết cho 101 nên m có cùng số dư với một trong các số $d_{50}d_{50}, d_{49}d_{50}, \ldots, d_1 d_{50}, d_1, d_2, \ldots, d_{50}$, trong phép chia cho 101. Gọi số này là d; ta có, d là một ước dương của n^2 (do tất cả 100 số vừa nêu đều là ước dương của n^2) và $m - d$ chia hết cho 101. Đây là điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải, mà Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Lưu Thị Thanh Hà

P706. (Mức B) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2+3}{(a^3+b^3)(a^3+c^3)}} + \sqrt{\frac{b^2+3}{(b^3+c^3)(b^3+a^3)}} + \sqrt{\frac{c^2+3}{(c^3+a^3)(c^3+b^3)}} \leq 3.$$

Lời giải (*dựa theo lời giải của tác giả bài toán*).

Kí hiệu P là biểu thức ở vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh.

Với x, y là hai số thực dương tùy ý, ta có:

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= \frac{3}{4}(x-y)^2 + \frac{1}{4}(x+y)^2 \\ &\geq \frac{1}{4}(x+y)^2. \end{aligned}$$

Vì thế, do $a, b, c > 0$ nên

$$\begin{aligned} &\left(a^2 - ab + b^2\right)\left(a^2 - ac + c^2\right) \\ \geq &\frac{1}{16}(a+b)^2(a+c)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Lại do $a, b, c > 0$ nên theo bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân cho ba số dương, ta có:

$$\begin{aligned} (a+b)(a+c) &= a^2 + (ab+bc+ca) \\ &\geq a^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \\ &= a^2 + 3 \text{ (do } abc = 1). \end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$\begin{aligned} &\left(a^3+b^3\right)\left(a^3+c^3\right) \\ =&(a+b)(a+c)\left(a^2-ab+b^2\right)\left(a^2-ac+c^2\right) \\ \geq&\frac{1}{16}\left(a^2+3\right)(a+b)^2(a+c)^2. \end{aligned}$$

Do đó

$$\sqrt{\frac{a^2+3}{(a^3+b^3)(a^3+c^3)}} \leq \frac{4}{(a+b)(a+c)}. \tag{3}$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$\sqrt{\frac{b^2+3}{(b^3+c^3)(b^3+a^3)}} \leq \frac{4}{(b+c)(b+a)}, \tag{4}$$

$$\sqrt{\frac{c^2+3}{(c^3+a^3)(c^3+b^3)}} \leq \frac{4}{(c+a)(c+b)}. \tag{5}$$

Cộng các bất đẳng thức (3), (4), (5), vế theo vế, ta được:

$$\begin{aligned} P \leq &\frac{4}{(a+b)(a+c)} + \frac{4}{(b+c)(b+a)} \\ &+ \frac{4}{(c+a)(c+b)} \\ = &\frac{8(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Tiếp theo, do $a, b, c > 0$ nên theo bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân cho ba số dương, ta có:

$$\begin{aligned} &(a+b+c)(ab+bc+ca) \\ \geq &3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9abc; \end{aligned}$$

suy ra

$$abc \leq \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{9}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} &(a+b)(b+c)(c+a) \\ =&(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \\ \geq&(a+b+c)(ab+bc+ca) \\ &- \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{9} \\ =&\frac{8(a+b+c)(ab+bc+ca)}{9} \\ \geq&\frac{8(a+b+c)\cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{9} \\ \geq&\frac{8(a+b+c)}{3} \text{ (do } abc = 1). \end{aligned}$$

Từ (6) và (7), suy ra

$$P \leq \frac{8(a+b+c)}{\frac{8}{3}(a+b+c)} = 3.$$

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Từ các đánh giá ở Lời giải trên, dễ thấy, dấu "$=$" ở bất đẳng thức của đề bài xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

2. Ngoài cách chứng minh được nêu ở Lời giải trên, còn có thể chứng minh bất đẳng thức của đề bài bằng các cách khác.

3. Tất cả lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Võ Quốc Bá Cẩn

P707. (Mức A) Chứng minh rằng, với mỗi số nguyên a, tồn tại số thực x, sao cho

$$a = \left\lfloor +\frac{1}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{2}x \right\rfloor.$$

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Hồ Trần Khánh Linh, lớp 12 Toán 2, trường THPT Chuyên, ĐHSP Hà Nội*).

Xét số nguyên a tùy ý. Chọn $x = \frac{a+\frac{1}{2}}{1+\sqrt{2}}$. Ta có:

$$a = x + \sqrt{2}x - \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Vì $a \in \mathbb{Z}$ nên $a + \frac{1}{2}$ là một số hữu tỷ khác 0. Do đó, x là một số vô tỷ; suy ra, $x + \frac{1}{2}$ là một số vô tỷ. Vì vậy

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2}\right\rfloor < x + \frac{1}{2}.$$

Suy ra

$$\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)-1\right) + \left(\sqrt{2}x - 1\right)$$
$$< \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{2}x\right\rfloor < \left(x+\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}x. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được:

$$a - 1 < \left\lfloor x + \frac{1}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{2}x \right\rfloor < a + 1.$$

Vì vậy, $\left\lfloor x + \frac{1}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{2}x\right\rfloor = a$.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải sai, do người giải bài đã *ngộ nhận* rằng

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 1, \text{ với mọi số thực } x.$$

(Với $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ ký hiệu số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn x.)

*Lưu ý rằng, khẳng định vừa nêu trên **chỉ đúng**, nếu x không phải là số nguyên!*

Trần Nam Dũng

P708. (Mức A) Tìm số thực M lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} > M$$

luôn đúng với mọi bộ ba số thực không âm (a,b,c) thoả mãn

$$a + b + c = ab + bc + ca > 0.$$

Lời giải (*của người chấm bài*).

Giả sử M là số thực, sao cho

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} > M,$$

với mọi $a, b, c \geq 0$, thỏa mãn

$$a + b + c = ab + bc + ca > 0.$$

Xét số thực x tùy ý thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
Chọn $a = \frac{1}{2}, b = x$ và $c = \frac{x+1}{2x-1}$.
Bằng cách kiểm tra trực tiếp, dễ thấy, $a + b + c = ab + bc + ca > 0$. Do đó

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+2} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{\frac{x+1}{2x-1}+2} > M,$$

hay

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{x+2} + \frac{2x-1}{5x-1} > M. \qquad (1)$$

Ở (1), cho $x \to \left(\frac{1}{2}\right)^{+}$, ta được: $M \leq \frac{4}{5}$. $\quad (2)$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} > \frac{4}{5}, \qquad (3)$$

với mọi $a, b, c \geq 0$, thỏa mãn

$$a + b + c = ab + bc + ca > 0. \qquad (4)$$

Thật vậy, không mất tổng quát, giả sử $c = \max\{a,b,c\}$; ta có $c > 0$.
Ký hiệu P là vế trái của bất đẳng thức (3).
Xét hai trường hợp sau:
• *Trường hợp* 1: $0 \le a+b \le 1$.
Khi đó, theo bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, ta có:

$$P > \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} \ge \frac{4}{a+b+4} \ge \frac{4}{5}.$$

• *Trường hợp* 2: $a+b > 1$.
Đặt $t = a+b$; ta có, $1 < t \le 2c$. Do đó, từ (4), ta có:

$$\begin{aligned} c(t-1) &= ca+cb-c = a+b-ab \\ &= t-ab < t \le 2c. \end{aligned}$$

Suy ra, $1 < t < 3$ và $0 < c < \frac{t}{t-1}$. Vì thế

$$\begin{aligned} P &\ge \frac{4}{a+b+4} + \frac{1}{c+2} \\ &> \frac{4}{t+4} + \frac{1}{\frac{t}{t-1}+2} \\ &= \frac{4}{t+4} + \frac{t-1}{3t_2} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{7(t-1)(4-t)}{5(t+4)(3t-2)} > \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Vậy, (3) được chứng minh.
Từ (2) và (3), suy ra giá trị lớn nhất của M bằng $\frac{4}{5}$.

Bình luận và Nhận xét

1. Bài đã ra là một bài toán khó.

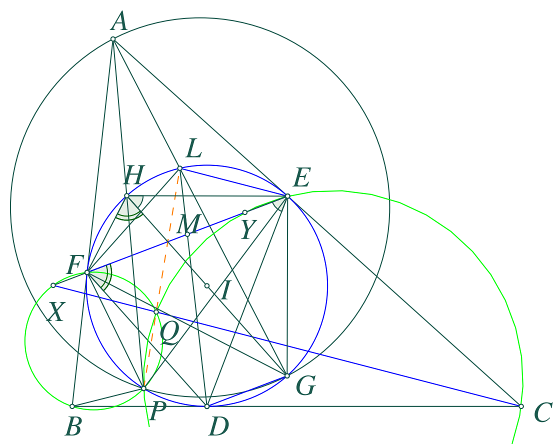
2. Cho tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí mới chỉ nhận được một lời giải cho bài toán, từ bạn *Trần Việt Anh* (lớp 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Quận Cầu Giấy, Tp. Hà Nội); và đó là một lời giải đúng, hoàn chỉnh.

Võ Quốc Bá Cẩn

P709. (Mức A) Cho tam giác không cân ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Qua D kẻ đường thẳng song song với EF, cắt (I) tại điểm thứ hai G (khác D). Đường tròn đường kính AG cắt (I) tại điểm thứ hai P (khác G). Đường tròn ngoại tiếp các tam giác BPF và CPE cắt nhau tại Q (khác P). Chứng minh rằng PQ, AG cắt nhau tại một điểm nằm trên (I).

Lời giải (*phỏng theo cách giải của Đáp án bài toán*).

Gọi L là giao điểm thứ hai, khác G, của đường thẳng AG và đường tròn (I). Ta có, $GELF$ là một tứ giác điều hòa; do đó, $D(GL,EF) = -1$. Mà $\parallel DG$, nên DL đi qua trung điểm M của EF. (1)



Gọi X, Y, tương ứng, là giao điểm thứ hai của đường thẳng EF và các đường tròn (BPF), (CPE). Ta có:

$$\begin{aligned} &(QX;PQ) \equiv (FX;FP) \\ &\equiv (FE;FP) \pmod{\pi} \ (\text{do } X \in EF) \\ &\equiv (EC;EP) \pmod{\pi} \ (\text{do } EC \text{ tiếp xúc } (I)) \\ &\equiv (QC;QP) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Do đó, C, Q, X thẳng hàng. (2)
Gọi H là giao điểm thứ hai, khác P, của đường thẳng AP và đường tròn (I). Ta có, $PH \perp PG$ (do P thuộc đường tròn đường kính AG). Do đó, HG là đường kính của (I). (3)
Vì

$$(FB;FP) \equiv (EF;EP) \equiv (EX;EP) \pmod{\pi}$$

và

$$(BF;BP) \equiv (XF;XP) \equiv (XE;XP) \pmod{\pi}$$

nên $\Delta PBF \sim \Delta PXE$. Suy ra

$$\frac{PF}{PE} = \frac{BF}{XE}.$$

Từ đó, do $PEHF$ là tứ giác điều hòa, ta có:

$$\frac{XE}{CE} = \frac{PE}{PF} \cdot \frac{BF}{CE} = \frac{HE}{HF} \cdot \frac{BF}{CE}. \qquad (4)$$

Do $DGEF$ là tứ giác nội tiếp và $DG \parallel FE$ (giả thiết) nên $DGEF$ là một hình thang cân. Do đó

$$\angle EHG = \angle EFG = \angle FED = \angle BFD,$$
$$\angle FHG = \angle FEG = \angle EFD = \angle CED.$$

Từ đó, áp dụng định lý sin cho tam giác HEF, ta được:

$$\begin{aligned}\frac{HE}{HF} &= \frac{\sin\angle EFH}{\sin\angle HEF} = \frac{\sin\angle EGH}{\sin\angle HGF}\\ &= \frac{\cos\angle EHG}{\cos\angle FHG}\ (\text{do } (3))\\ &= \frac{\cos\angle BFD}{\cos\angle CED} = \frac{\frac{1}{2}FD : FB}{\frac{1}{2}ED : EC}\\ &= \frac{FD\cdot EC}{ED\cdot FB}. \qquad (5)\end{aligned}$$

Từ (4) và (5), suy ra

$$\frac{XE}{CE} = \frac{FD}{ED}. \qquad (6)$$

Do $DELF$ là tứ giác nội tiếp, có hai đường chéo cắt nhau tại M, nên $\Delta DMF \sim \Delta EML$ và $\Delta DME \sim \Delta FML$. Suy ra

$$\frac{FD}{MD} = \frac{LE}{ME} \text{ và } \frac{ED}{MD} = \frac{LF}{MF} = \frac{LF}{ME}\ (\text{do } (1)).$$

Do đó

$$LE = \frac{FD\cdot ME}{MD} \text{ và } LF = \frac{ED\cdot ME}{MD}.$$

Suy ra

$$\frac{LE}{LF} = \frac{FD}{ED} = \frac{EX}{EC}\ (\text{do } (6)).$$

Mà $\angle FLE = \angle CEX$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến với một dây, cùng chắn một cung của (I)).

Nên $\Delta LEF \sim \Delta EXC$. Suy ra, $\angle LEF = \angle EXC$; vì vậy, $LE \parallel XC$. (7)

Từ (2) và (7), với lưu ý E, F, L, P đồng viên và B, F, P, Q, X đồng viên, ta có:

$$\begin{aligned}(LP;LE) &\equiv (FP;FE) \equiv (FP;FX)\\ &\equiv (QP;QX) \equiv (QP;QC)\\ &\equiv (QP;LE) \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Do đó, L, P, Q thẳng hàng. Điều này chứng tỏ, PQ và AG cắt nhau tại một điểm nằm trên (I).

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Bài đã ra là một cách phát biểu khác của Bài 6 Đề thi IMO 2019. Vì thế, theo đánh giá của người chấm bài, bài đã ra là một bài toán rất khó.

2. Cho đến thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí mới chỉ nhận được một lời giải cho bài toán, từ bạn *Nguyễn Gia Khánh* (lớp 11 Toán 1, trường THPT chuyên Hưng Yên, Tỉnh Hưng Yên); và đó là một lời giải đúng.

Hạ Vũ Anh

P710. (Mức A) Cho a là số nguyên dương không vượt quá 7. Chứng minh rằng, tồn tại số nguyên b sao cho

$$\sum_{k=0}^{n}\left\lfloor \frac{k}{a}\right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2n+b)^2}{8a}\right\rfloor$$

với mọi số tự nhiên n.

Lời giải (*dựa theo Đáp án của bài toán*).

Bình luận và Nhận xét

Nguyễn Khắc Minh