CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ VÀ BÀI TOÁN QUẢN LÝ KHO HÀNG

NGUYỄN HOÀNG VŨ[1]

Việc quản lý lượng hàng lưu trong kho là một vấn đề quan trọng trong thương nghiệp. Đây cũng là một bài toán cơ bản của ngành vận trù học. Trong bài viết này, chúng ta hãy cùng tìm hiểu một số mô hình toán học để tìm chi phí tối thiểu cho các tình huống khác nhau khi lưu trữ hàng trong kho.

1. Ford Harris và mô hình EOQ cổ điển

Ford Whitman Harris (1877 – 1962).

Mô hình EOQ (Economic Order Quantity) được Ford Whitman Harris, một kỹ sư lúc đó đang làm tư vấn về luật liên quan đến các bằng sáng chế, công bố năm 1913. Đây là một mô hình đơn giản nhưng có tính thực tiễn cao về việc quản lý lượng hàng trong kho và vẫn có vai trò quan trọng trong ngành vận trù học ngày nay.

Mô hình EOQ này nhận các thông số đầu vào như sau:

K: chi phí thiết lập cho một đơn hàng

c: chi phí để sản xuất hoặc mua một đơn vị hàng

h: chi phí để lưu một đơn vị hàng trong kho trong một đơn vị thời gian.

Giả sử rằng nhu cầu tiêu thụ là đều theo thời gian và có giá trị d đơn vị hàng/đơn vị thời gian. Nếu mỗi lần đặt hàng, ta đặt một lượng Q đơn vị hàng thì số lượng hàng này sẽ được tiêu thụ hết trong thời gian Q/d. Chi phí cho một lần đặt hàng sẽ là $K + cQ$.

Do lượng hàng sẽ giảm dần tuyến tính theo thời gian khi được bán ra, từ lúc nhận được Q đơn vị hàng này đến khi tiêu thụ hết, số lượng đơn vị hàng trung bình được lưu trong kho từ đơn hàng này sẽ là $\dfrac{Q+0}{2} = \dfrac{Q}{2}$. Chi phí lưu kho của đơn hàng cho đến khi bán hết sẽ là:

$$h \cdot \frac{Q}{2} \cdot \frac{Q}{d} = \frac{hQ^2}{2d}.$$

Tổng chi phí cho một chu kỳ hàng sẽ là:

$$K + cQ + \frac{hQ^2}{2d}.$$

[1] *Hà Nội.*

Chi phí trong một đơn vị thời gian là:

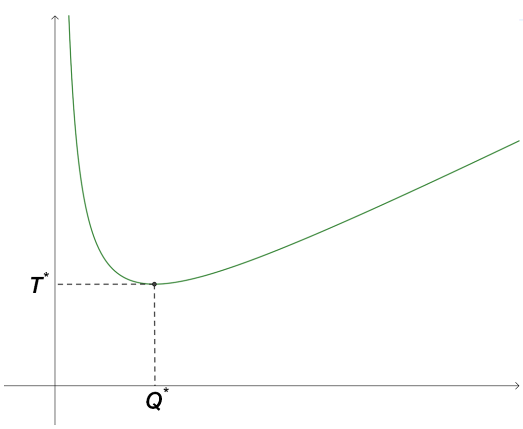
$$T = \frac{K + cQ + \frac{hQ^2}{2d}}{\frac{Q}{d}} = \frac{dK}{Q} + dc + \frac{hQ}{2}.$$

Ta cần tìm giá trị Q^* sao cho T nhận giá trị cực tiểu. Lấy đạo hàm của T theo Q được:

$$-\frac{dK}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0.$$

hay $Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}}$.

Nếu vẽ đồ thị của hàm $T(Q)$, ta được dạng đồ thị như trong Hình 1. Hình dạng này của đồ thị hàm số có vai trò quan trọng trong một số bài toán ở các phần tiếp theo.

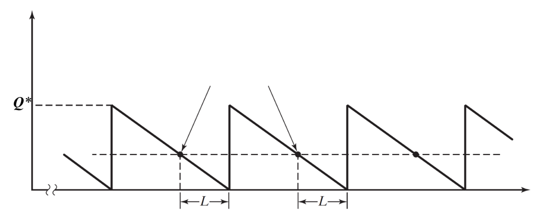


Hình 1. Đồ thị của $T(Q)$.

Công thức EOQ dạng như trên xuất hiện ở nhiều giáo trình chuyên ngành kinh tế. Sau khi được Harris công bố năm 1913, nó được nhiều tài liệu nhắc đến trong các thập kỷ sau đó (thường không có trích dẫn). Nhiều người gọi tên công thức này theo các tài liệu hoặc giáo trình mà họ biết. Vì lý do này, công thức EOQ còn được gọi là công thức Wilson hay công thức Camp. Trong khi đó, nguồn gốc từ Harris của công thức EOQ bị lãng quên cho đến khi được Donal Erlenkotter phát hiện lại vào năm 1988. Một trong những nguyên nhân của vấn đề này có lẽ là do bản thân Harris không phải là một học giả. Tuy chỉ học hết cấp 3, Harris đã tự phấn đấu và học việc để trở thành một kỹ sư với nhiều bằng sáng chế. Sau đó, ông tiếp tục tự học và có một sự nghiệp thành công trong lĩnh vực luật về các bằng sáng chế. Bản thân Harris cũng không cố gắng đạt được sự công nhận cho công thức EOQ cho đến khi mất năm 1962. Ông luôn cho rằng các sáng chế mang tính thực tiễn có giá trị hơn những ý tưởng trừu tượng.

2. Mô hình EOQ có cho phép thiếu hụt

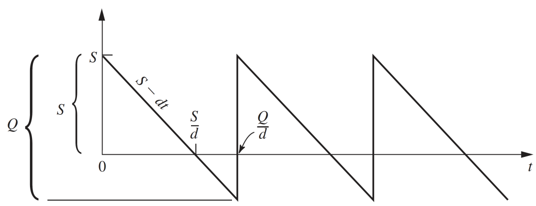
Trong thiết lập trên, ta chưa xét thời gian từ lúc đặt hàng cho đến khi hàng về kho. Trong thực tế, việc này không phải là ngay lập tức và việc sản xuất hoặc vận chuyển cần tốn một khoảng thời gian L nào đó. Do đó, khi lượng hàng trong kho chỉ còn Ld (đủ dùng cho khoảng thời gian L) thì ta phải đặt lượng hàng Q^*.



Hình 2. Để tránh thiếu hụt, người ta cần đặt hàng khi lượng hàng còn lại trong kho đủ lớn sao cho trong khoảng thời gian này, thiếu hụt không xảy ra.

Mô hình này cũng có thể mở rộng trong trường hợp việc thiếu hụt là được cho phép. Nếu có nhu cầu cho hàng hóa mà hiện tại trong kho không có thì việc này được diễn tả bởi chi phí p, là chi phí phạt do thiếu hụt một đơn vị hàng trong một đơn vị thời gian. Trong thực tế, chi phí này có thể ứng với việc khách hàng mua hàng của công ty khác hoặc ta phải giảm giá cho khách hàng do họ phải đợi, ... Việc cân bằng giữa chi phí phạt do thiếu hụt và chi phí lưu hàng cho kho sẽ cho ta phương án với chi phí thấp nhất.

Giả sử mỗi lần đặt hàng có lượng hàng là Q. Do có sự thiếu hụt nên sau khi giải quyết hết thiếu hụt, lượng hàng vào kho sẽ là S. Lượng hàng chịu chi phí do thiếu hụt sẽ là $Q-S$. Trong một chu kỳ thời gian $\frac{Q}{d}$, khoảng thời gian $\frac{S}{d}$ ban đầu sẽ không có thiếu hụt nhưng có chi phí lưu hàng trong kho còn khoảng thời gian còn lại không có hàng lưu kho.



Hình 3. Mô hình EOQ có cho phép thiếu hụt xảy ra.

Tương tự với phần trên, chi phí đặt hàng vẫn là $K+cQ$ nhưng chi phí lưu kho trong một chu kỳ sẽ là

$$h\cdot\frac{S}{2}\cdot\frac{S}{d}=\frac{hS^2}{2d}.$$

Trong khoảng thời gian thiếu hụt, lượng thiếu hụt trung bình sẽ là $\frac{Q-S}{2}$ nên chi phí phát sinh do thiếu hụt trong một chu kỳ sẽ là:

$$p\cdot\frac{Q-S}{2}\cdot\frac{Q-S}{d}=\frac{p(Q-S)^2}{2d}.$$

Tổng chi phí trong một chu kỳ sẽ là:

$$K+cQ+\frac{hS^2}{2d}+\frac{p(Q-S)^2}{2d}.$$

Tổng chi phí trong một đơn vị thời gian là:

$$T=\frac{K+cQ+\frac{hS^2}{2d}+\frac{p(Q-S)^2}{2d}}{\frac{Q}{d}}$$
$$=\frac{Kd}{Q}+cd+\frac{hS^2}{2Q}+\frac{p(Q-S)^2}{2Q}.$$

Trong trường hợp này, cả Q và S đều thay đổi được nên T là một hàm số của cả Q lẫn S. Đây là một hàm số nhiều biến chứ không phải hàm số một biến như trong toán phổ thông. Vậy phải làm sao để tìm giá trị của Q và S để T cực tiểu?

Cần nhớ lại rằng, với hàm số một biến dạng $y=f(x)$ thì đạo hàm $\frac{dy}{dx}$ cho ta biết tốc độ biến thiên của y khi x thay đổi. Với những hàm số nhiều biến, để biểu diễn tốc độ biến thiên của nó khi một trong các biến thay đổi, người ta sử dụng khái niệm đạo hàm riêng. Đạo hàm riêng được tính cho từng biến. Trong trường hợp T, nó là hàm số $T(Q,S)$ của cả hai biến Q và S nên ta có hai đạo hàm riêng, một cho Q (ký hiệu $\frac{\partial T}{\partial Q}$) và một cho S (ký hiệu $\frac{\partial T}{\partial S}$). Việc tính đạo hàm riêng cũng không khác là mấy so với tính đạo hàm của hàm số một biến. Khi lấy đạo hàm riêng theo một biến, ta coi các biến còn lại không đổi và áp dụng các quy tắc giống như khi lấy đạo hàm của hàm số một biến.

Trong trường hợp hàm $T(Q,S)$, ta có:

$$\frac{\partial T}{\partial S}=\frac{hS}{Q}-\frac{p(Q-S)}{Q},$$
$$\frac{\partial T}{\partial Q}=-\frac{dK}{Q^2}-\frac{hS^2}{2Q^2}+\frac{p(Q-S)}{Q}-\frac{p(Q-S)^2}{2Q^2}.$$

Để tìm cực trị của hàm nhiều biến, ta tìm điểm mà tại đó các đạo hàm riêng của nó bằng 0 (tương tự như việc dùng đạo hàm để tìm cực trị của hàm số một biến). Với T, điều kiện này tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{hS}{Q}-\frac{p(Q-S)}{Q}=0\\ -\frac{dK}{Q^2}-\frac{hS^2}{2Q^2}+\frac{p(Q-S)}{Q}-\frac{p(Q-S)^2}{2Q^2}=0.\end{cases}$$

Hệ phương trình này tương đương với:

$$\begin{cases}S=\frac{p}{p+h}Q\\ -dK-\frac{hS^2}{2}+p(Q-S)Q-\frac{p}{2}(Q-S)^2=0\end{cases}$$

Tiến hành thế sử dụng biểu thức của S theo

Q ta có:

$$-dK-\frac{h}{2}\left(\frac{p}{p+h}\right)^2 Q^2+p\left(Q-\frac{p}{p+h}Q\right)Q$$
$$-\frac{p}{2}\left(Q-\frac{p}{p+h}Q\right)^2=0$$
$$-dK-\frac{h}{2}\left(\frac{p}{p+h}\right)^2 Q^2+\frac{ph}{p+h}Q^2$$
$$-\frac{ph^2}{2(p+h)^2}Q^2=0$$
$$\frac{1}{2}\frac{\left(-p^2h+2ph(p+h)-ph^2\right)}{(p+h)^2}Q^2=dK$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{ph(p+h)}{(p+h)^2}Q^2=dK$$
$$Q^2=\frac{2dK}{h}\cdot\frac{p+h}{p}.$$

Ta được các giá trị của S và Q tại điểm cực trị:

$$Q^*=\sqrt{\frac{2dK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}, S^*=\sqrt{\frac{2dK}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}}.$$

Khi đó, chu kỳ tối ưu của việc đặt hàng sẽ là:

$$t^*=\frac{Q^*}{d}=\sqrt{\frac{2K}{dh}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}.$$

Số đơn vị hàng có tình trạng thiếu sẽ là:

$$Q^*-S^*=\sqrt{\frac{2dK}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}}.$$

Chính sách nhập hàng của ta sẽ thay đổi theo các giá trị của h và p. Khi $p\to\infty$ còn h không đổi, $Q^*-S^*\to 0$ và ta trở lại mô hình EOQ cơ bản: chi phí thiệt hại khi có thiếu hụt là quá lớn nên việc thiếu hụt không được phép xảy ra. Ngược lại, nếu $h\to\infty$ với p không đổi (chi phí giữ hàng trong kho rất lớn so với thiệt hại do thiếu hụt), thì $S^*\to 0$ hay việc sử dụng kho hàng là không khả thi về mặt kinh tế và tất cả các nhu cầu mua hàng đều không được đáp ứng ngay mà được gom lại và giải quyết theo từng đợt mà không có lưu kho.

3 Mô hình EOQ với giá thành phân tầng

Ta hãy xử lý một tình huống khá thú vị xuất phát từ thực tế. Khi đặt hàng, nếu số lượng hàng vượt quá một ngưỡng q nào đó, giá mua vào có thể được chiết khấu giảm đi. Ta hãy xét hàm chi phí mua vào cho một đơn vị hàng như sau:

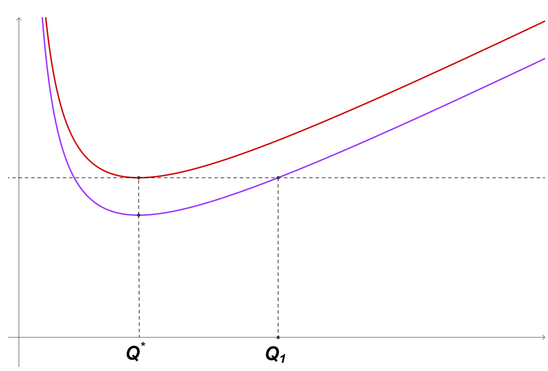
$$c(Q)=\begin{cases}c_1, Q<q\\ c_2, Q\geq q\end{cases}$$

với $c_2<c_1$.

Ta được hai hàm chi phí ứng với hai giá mua này (để đơn giản, trường hợp có thiếu hụt không được cho phép):

$$T_1=\frac{dK}{Q}+c_1d+\frac{hQ}{2},$$
$$T_2=\frac{dK}{Q}+c_2d+\frac{hQ}{2}.$$

T_2 có hình dạng đồ thị giống hệt T_1 nhưng được tịnh tiến xuống một khoảng $(c_1-c_2)d$ theo trục y. Hai đồ thị này đều có giá trị cực tiểu tại $Q=Q^*$. Ta cần chú ý đến điểm $Q_1>Q^*$ có $T_1(Q_1)=T_2(Q^*)$ và dùng điểm này để biện luận các trường hợp (bạn đọc có thể tự giải để tìm Q_1, nó sẽ là nghiệm của một phương trình bậc hai).



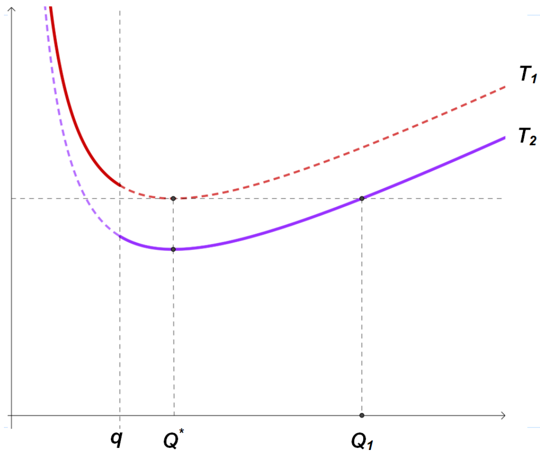
Hình 4. Đồ thị của $T_1(Q)$ và $T_2(Q)$.

Hàm chi phí của ta sẽ có dạng:

$$T(Q)=\begin{cases}T_1(Q), Q\leq q\\ T_2(Q), Q>q\end{cases}$$

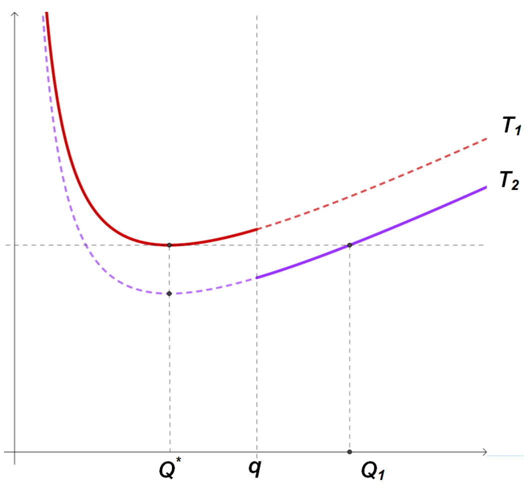
Những hàm số như trên còn được gọi là hàm số liên tục theo từng đoạn. Để tìm cực tiểu của nó, ta cần xét 3 trường hợp khác nhau.

- Trường hợp 1: $q < Q^*$. Khi đó cực tiểu sẽ trùng với $Q = Q^*$ (Hình 5).



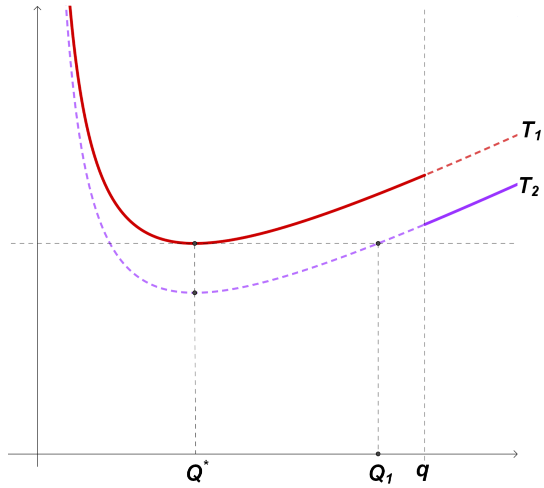
Hình 5. Trường hợp 1, $q < Q^*$.

- Trường hợp 2: $Q^* \leq q \leq Q_1$. Nhìn vào Hình 6, ta thấy cực tiểu sẽ đạt được khi $Q = q$. Ta mua hàng với số lượng nhỏ nhất để vẫn được mua với giá thấp hơn.



Hình 6. Trường hợp 2: $Q^* \leq q \leq Q_1$.

- Trường hợp 3: $q > Q_1$. Tương tự trường hợp 1, ta mua với số lượng $Q = Q^*$. Tuy không được hưởng chiết khấu nhưng chi phí lưu kho của ta vẫn nhỏ hơn so với việc mua nhiều để được chiết khấu.



Hình 7. Trường hợp 3: $q > Q_1$

Bạn đọc có thể thử tự giải cho trường hợp có nhiều hơn 2 tầng phân khúc của giá hàng. Khi đó ta sẽ có một bài toán khảo sát hàm số liên tục từng đoạn tương đối thú vị.

4. Mô hình EOQ ngẫu nhiên và bài toán sạp báo

Hình 8. Báo ra hàng ngày có giá trị giảm nhiều vào ngày hôm sau nên việc đặt mua bao nhiêu báo cũng là một vấn đề quan trọng của các sạp báo.

Ta hãy sử dụng mô hình EOQ để nghiên cứu một bài toán phức tạp hơn. Xét một sạp báo với lượng báo S được đặt vào đầu buổi sáng. Nếu báo đặt không đủ nhu cầu, ta có chi phí phạt p cho một đơn vị báo bị thiếu hụt, còn nếu báo đặt bị thừa, do nó là mặt hàng có giá trị suy giảm theo thời gian ta sẽ có chi phí h để lưu trữ mỗi đơn vị sang ngày hôm sau (bao gồm chi phí giữ trong kho qua đêm trừ đi giá bán rẻ hơn vào ngày hôm sau).

Gọi D là nhu cầu trong ngày và giá một đơn vị báo mua vào là c. Chi phí của một ngày sẽ là:

$$C(D,S) = cS + p\max(0, D-S) + h\max(0, S-D).$$

Ở đây, chi phí phạt chỉ xuất hiện khi nhu cầu nhiều hơn lượng báo ta có, còn chi phí lưu trữ chỉ xuất hiện khi lượng báo nhiều hơn nhu cầu.

Ta lại giả sử nhu cầu D là một biến ngẫu nhiên với hàm mật độ xác suất $f(x)$. Khi đó, giá trị trung bình của chi phí của ta sẽ là:

$$\begin{aligned} C(S) &= E\left[C(D,S)\right] \\ &= cS + \int_S^\infty p(x-S)f(x)dx \\ &\quad + \int_0^\infty h(S-x)f(x)dx. \end{aligned}$$

Chú ý rằng cận của hai tích phân trong biểu thức này ứng với phân tích ở trên về sự xuất hiện của p và h theo S trong mô hình: p chỉ có ý nghĩa khi $D > S$ và h chỉ xuất hiện khi $D < S$.

> Với biến ngẫu nhiên nhận các giá trị liên tục, người ta sử dụng khái niệm hàm mật độ. Xác suất để biến ngẫu nhiên X với hàm mật độ $f(x)$ nằm trong khoảng $[a,b]$ sẽ là $\int_a^b f(x)dx$.

Đến đây ta gặp phải vấn đề làm thế nào để tìm cực trị của một hàm số có chứa tích phân! Tuy rằng các công thức giải tích đại học có thể cho ta kết quả ngay, việc sử dụng các kiến thức toán phổ thông để tìm cực trị của $C(S)$ cũng không quá khó. Ta viết lại $C(S)$ dưới dạng:

$$\begin{aligned} &C(S) \\ &= cS + p\int_S^\infty xf(x)dx - pS\int_S^\infty f(x)dx \\ &\quad + hS\int_0^S f(x)dx - h\int_0^S xf(x)dx \\ &= cS + p\left[G(\infty) - G(S)\right] - pS\left[F(\infty) - F(S)\right] \\ &\quad + hS\left[F(S) - F(0)\right] - h\left[G(S) - G(0)\right], \end{aligned}$$

với F và G lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$ và $xf(x)$.

Ta lấy đạo hàm của $C(S)$ theo S, (sử dụng các công thức $\frac{dF(S)}{dS} = f(S)$ và $\frac{dG(S)}{dS} = Sf(S)$):

$$\begin{aligned} &\frac{dC(S)}{dS} \\ &= c - pSf(S) - pF(\infty) + pF(S) + pSf(S) \\ &\quad + hF(S) + hSf(S) - hF(0) - hSf(S) \\ &= c - p\left[F(\infty) - F(S)\right] + h\left[F(S) - f(0)\right] \\ &= c - p\int_S^\infty f(x)dx + h\int_0^S f(x)dx. \end{aligned}$$

Chú ý rằng ở đây ta đã sử dụng dạng ngược của công thức Newton–Leibniz: $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$. Trong trường hợp các hàm số $f(x)$ và $xf(x)$ không có nguyên hàm, ta cần tính đạo hàm theo giới hạn để tính đạo hàm của tích phân có cận phụ thuộc tham biến (xem phụ lục).

Vì $f(x)$ là hàm mật độ xác suất nên $\int_0^\infty f(x)dx = 1$ (ứng với $P(0 \leq D \leq \infty) = 1$). Do đó:

$$\int_0^S f(x)dx + \int_S^\infty f(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx = 1.$$

Thay vào biểu thức của $\frac{dC(S)}{dS}$ ta được:

$$\begin{aligned} &\frac{dC(S)}{dS} \\ &= c - p\left(1 - \int_0^S f(x)dx\right) + h\int_0^S f(x)dx \\ &= (c-p) + (p+h)\int_0^S f(x)dx. \end{aligned}$$

Để tìm cực trị, ta cho biểu thức trên bằng 0 và được:

$$(p+h)\int_0^S f(x)dx = p-c,$$

hay:

$$\int_0^S f(x)dx = \frac{p-c}{p+h}$$

Do đó cực trị xuất hiện ở giá trị S^* sao cho:

$$F(S^*) = \frac{p-c}{p+h}.$$

Ở đây ta đã chọn $F(S)$ sao cho $F(0)=0$. Khi đó $F(x)$ trở thành hàm phân phối cộng dồn cho biến ngẫu nhiên D. Giá trị $F(x)$ sẽ bằng với xác suất $P(D \leq x)$.

Có thể thấy, việc sử dụng nguyên hàm và các công thức có liên quan cho phép ta tìm cực trị của một hàm số có chứa tích phân chỉ sau một vài biến đổi.

Mô hình trên cho bài toán sạp báo cũng có thể được áp dụng cho các trường hợp khác trong thực tế khi người ta cần phải tính đến việc một số loại hàng hóa không giữ nguyên giá trị nếu bị lưu kho đến giai đoạn thời gian tiếp theo. Các ví dụ thường thấy bao gồm: thực phẩm, hoa, quần áo (ví dụ quần áo mùa đông khi mùa hè sắp đến), ...

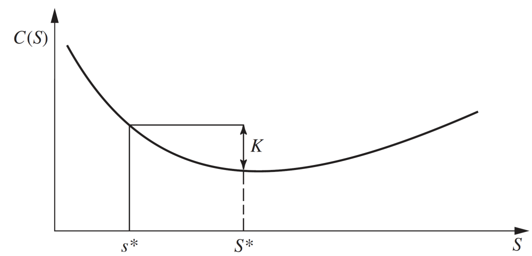
Trong trường hợp trước khi đặt hàng, cửa hàng vẫn còn tồn một lượng hàng hóa I từ trước đó thì chi phí của ta sẽ là:

$$\overline{C}(S) = C(S) - CI.$$

Nếu $I < S^*$ thì ta chỉ cần đặt một lượng hàng hóa đúng bằng $S^* - I$.

Trong trường hợp $I \geq S^*$, ta cần xét xem $C(S)$ đồng biến hay nghịch biến trong khoảng này. Do $f(x) > 0$ với mọi x nên $\frac{dC(S)}{dS}$ tăng khi S tăng. Tại $S = S^*$, $\frac{dC(S)}{dS} = 0$ nên $\frac{dC(S)}{dS}$ sẽ > 0 với $S > S^*$. Vì vậy, trong trường hợp này, ta không đặt thêm hàng nữa mà chỉ bán hết lượng hàng I còn trong kho.

Nếu có thêm chi phí thiết lập đơn hàng K thì hàm chi phí của ta có giá trị như sau: $\overline{C}(S) = K + C(S) - cI$ nếu đơn hàng được đặt và $\overline{C}(S) = C(I) - cI$ nếu không đặt hàng mà chi bán nốt hàng trong kho.



Hình 9. Cách tìm s^* khi có S^*.

Ta hãy xét một giá trị $s^* < S^*$ sao cho $C(s^*) = K + C(S^*)$ (giá trị $s^* > S*$ không có ý nghĩa về mặt thực tế). Trong một bài toán cụ thể, nếu đã biết được dạng của $f(x), s^*$ là hoàn toàn xác định được.

Phương án của ta cho trường hợp $I > 0, K > 0$ sẽ như sau:

Nếu $I < s^*$ thì $C(S^*) < K + C(I)$ và ta đặt hàng với lượng hàng bằng S^*.

Nếu $I \geq s^*$ thì $C(S) \leq K + C(I)$ với mọi $S \geq I$ do đó ta không đặt hàng.

5. Lời kết

Trong bài viết này, chúng ta đã thấy sự đa dạng của các bài toán có sử dụng mô hình EOQ cũng như việc ứng dụng các kỹ thuật đa dạng tìm cực trị của hàm số để cho ra nghiệm tối ưu. Các bài toán cực trị còn rất nhiều ứng dụng khác trong đời sống mà Pi sẽ trình bày với độc giả trong những số sau này.

Phụ lục: Đạo hàm của tích phân có cận phụ thuộc tham biến

Xét tích phân $I(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x)dx$ với $\alpha(t)$ và $\beta(t)$ là các hàm khả vi theo t. Giả sử rằng khi $t \in [c,d]$ thì $\alpha(t)$ và $\beta(t)$ nhận giá trị trong $[a,b]$.

Xét $t_0 \in [c,d]$, ta có:

$$\begin{aligned}I(t) = &\int_{\alpha(t)}^{\alpha(t_0)} f(x)dx + \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x)dx\\ &+ \int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x)dx\\ =&I_1(t) + I_2 + I_3(t).\end{aligned}$$

Do I_2 không phụ thuộc t nên:

$$I'(t_0) = I_1'(t_0) + I_3'(t_0).$$

Theo định nghĩa đạo hàm:

$$\begin{aligned}I_3'(t_0) &= \lim_{t\to t_0} \frac{I_3(t) - I_3(t_0)}{t - t_0}\\ &= \lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0}\left[\int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x)dx - \int_{\beta(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x)dx\right]\\ &= \lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0}\int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x)dx\end{aligned}$$

Đến đây, ta cần dùng định lý giá trị trung bình cho tích phân: với hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$, tồn tại giá trị $\xi \in [a,b]$ sao cho $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$. Thật vậy, xét hàm số $f(x)$ liên tục trong khoảng $[a,b]$, khi đó tồn tại giá trị m và M sao cho $m \leq f(x) \leq M$ với mọi x trong khoảng trên. Do đó:

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx,$$

hay

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Việc này tương đương với: $\int_a^b f(x)dx = c(b-a), m \leq c \leq M$. Vì $f(x)$ là liên tục nên tồn tại giá trị $a \leq \xi \leq b$ sao cho $f(\xi) = c$ hay $\int_a^b f(x) = (b-a)f(\xi)$.

Sử dụng định lý này cho biểu thức của $I_3'(t_0)$, ta có:

$$\begin{aligned}I_3'(t_0) &= \lim_{t\to t_0} \frac{\beta(t)-\beta(t_0)}{t-t_0} f(\xi)\\ &= \beta'(t_0) f(\beta(t_0)).\end{aligned}$$

Tương tự:

$$I_1'(t_0) = -\alpha'(t_0) f(\alpha(t_0)).$$

Tài liệu tham khảo

[1] Erlenkotter, D. (1990). Ford Whitman Harris and the Economic Order Quantity Model. *Operations Research*, 38(6), 937 – 946. https://www.jstor.org/stable/170961

[2] Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2015). *Introduction to operations research*. Mcgraw–Hill.

[3] Taha, H. A. (2017). *Operations research: an introduction*. Pearson Education Limited.

ĐỊNH LÝ PHÂN LOẠI MẶT ĐÓNG TRONG TÔPÔ HỌC

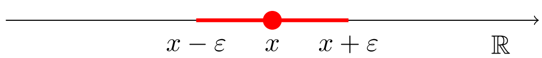
NGUYỄN MẠNH LINH[1]

Định lý phân loại mặt đóng có lẽ là một trong những định lý cơ bản nhất của tôpô học. Trong ghi chú này, chúng ta giới thiệu và "chứng minh" định lý này một cách trực quan, bằng kiến thức toán học tối thiểu.

1. Một số định nghĩa tôpô

Tôpô học là lĩnh vực toán học nghiên cứu các hình dạng mà không quan tâm đến các đặc tính như khoảng cách hay diện tích... Thay vào đó, người ta quan tâm đến các đặc tính nội tại bất biến dưới các phép biến dạng liên tục nhưng không xé rách hay dán các hình dạng đó (các *tính chất tôpô*). Đối tượng làm việc của tôpô học là các *không gian tôpô*, đó là những tập hợp cùng với một cấu trúc cho phép ta nói về khái niệm gần nhau của các điểm cũng như khái niệm *lân cận* (nhưng không nhất thiết phải đo được khoảng cách giữa các điểm).

Cho X là một không gian tôpô và $x \in X$ là một điểm. Nói chung, một lân cận của x trong X không phải là một tập con chứa x bất kỳ của X. Đối với các không gian tôpô thông thường (chẳng hạn, trong toàn bộ ghi chú này), ta sẽ hiểu một cách không chính thức rằng một tập con $U \subset X$ là một lân cận của x nếu $x \in U$ và ta có thể "di chuyển một cách tự do theo tất cả các hướng" xung quanh x một khoảng đủ nhỏ sao cho vẫn nằm trong U. Chẳng hạn, với $X = \mathbb{R}$ là đường thẳng thực, một tập con $U \subset \mathbb{R}$ là một lân cận của một số thực x nếu nó chứa một khoảng $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ nào đó (xem Hình 1).



Hình 1: Lân cận của một điểm $x \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa sau đây sẽ đóng vai trò trung tâm trong việc xây dựng khái niệm mặt. Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$, ta có khoảng cách giữa hai điểm $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ và $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, cho bởi công thức

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}.$$

Ta định nghĩa *đĩa mở* với tâm $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ và bán kính $r > 0$ bởi

$$\mathbb{D}(\mathbf{x}, r) = \{\in \mathbb{R} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| < r\}$$

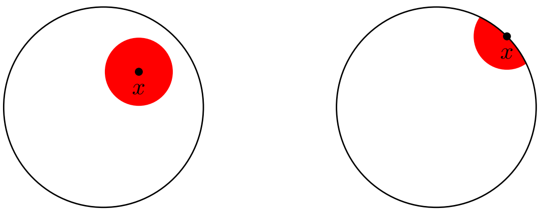
(đó là hình tròn tâm $\mathbf{x}$ bán kính r không kể biên), cũng như *đĩa đóng* tâm $\mathbf{x}$ bán kính r bởi

$$\overline{\mathbb{D}}(\mathbf{x}, r) = \{\in \mathbb{R} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq r\}$$

(đó là hình tròn tâm $\mathbf{x}$ bán kính r kể cả biên). Với $\mathbf{x} = (0,0)$ là gốc tọa độ và $r = 1$, ta

[1] *Université Paris-Saclay.*

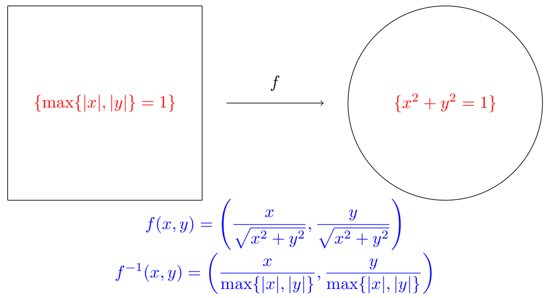
sẽ ký hiệu đơn giản $\mathbb{D} = \mathbb{D}((0,0),1)$, $\overline{\mathbb{D}} = \overline{\mathbb{D}}((0,0),1)$ và gọi chúng lần lượt là *đĩa mở đơn vị* và *đĩa đóng đơn vị*. Xét không gian $X = \overline{\mathbb{D}}$. Với $\mathbf{x} \in \mathbb{D}$, một tập con của $\overline{\mathbb{D}}$ là một lân cận của $\mathbf{x}$ nếu nó chứa một đĩa $\mathbb{D}(\mathbf{x}, r)$ với $r > 0$ đủ nhỏ. Tuy nhiên, với $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}$, một tập con của $\overline{\mathbb{D}}$ là một lân cận của $\mathbf{x}$ nếu nó chứa phần giao của một đĩa như vậy với $\overline{\mathbb{D}}$, giao này không phải là một đĩa (xem Hình 2).



Hình 2: Lân cận trong $\overline{\mathbb{D}}$ của một điểm $\mathbf{x} \in \mathbb{D}$ và một điểm $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}$.

Đẳng thức là một khái niệm cơ bản của toán phổ thông, nó thể hiện sự đồng nhất tuyệt đối. Tuy nhiên, khi định nghĩa các đối tượng toán học có cấu trúc phức tạp hơn (các không gian tôpô chẳng hạn), để nói về sự giống nhau giữa chúng thì "bằng nhau" là một đòi hỏi quá đáng. Nó được thay bởi một định nghĩa rộng hơn là *đẳng cấu*, có thể hiểu là "về cơ bản là bằng nhau". Trong ngữ cảnh của các không gian tôpô, sự đẳng cấu được thể hiện qua các *phép đồng phôi*. Trước hết, một ánh xạ $f : X \to Y$ giữa hai không gian tôpô được gọi là *liên tục* nếu với mỗi $x \in X$ và mỗi lân cận $V \subset Y$ của $f(x)$, tồn tại lân cận $U \subset X$ sao cho $f(U) \subset V$. Nói cách khác, khi y thay đổi trên X, điểm $f(y)$ có thể gần (nằm trong lân cận nhỏ tùy ý của) $f(x)$, miễn là y đủ gần x. Ta gọi f là một *phép đồng phôi* nếu nó là một song ánh và ánh xạ ngược $f^{-1} : Y \to X$ cũng liên tục. Nếu tồn tại một phép đồng phôi như vậy, ta nói X và Y *đồng phôi (với nhau)* và viết $X \approx Y$. Ta có thể hiểu một phép đồng phôi là một biến dạng liên tục có thể đảo ngược: không xé rách, không dán... không gian tôpô ban đầu (và quá trình đảo ngược cũng là một biến dạng liên tục). Các thuộc tính của không gian tôpô được bảo toàn bởi các phép đồng phôi được gọi là các *bất biến tôpô*.

Chẳng hạn, trong mặt phẳng, xét (biên của) hình vuông đơn vị cho bởi phương trình $\max\{|x|,|y|\} = 1$ cũng như đường tròn đơn vị cho bởi phương trình $x^2 + y^2 = 1$. Chúng đồng phôi với nhau bởi ánh xạ liên tục ở Hình 3.

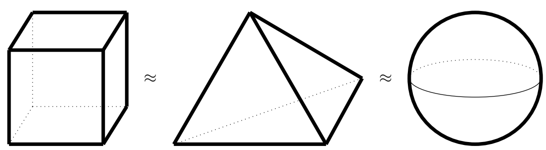


Hình 3: Hình vuông đồng phôi với đường tròn.

Tương tự, mọi đa giác lồi trong mặt phẳng đều đồng phôi với đường tròn. Mọi đa diện lồi trong không gian 3–chiều $\mathbb{R}^3$ đều đồng phôi với mặt cầu đơn vị

$$\mathbb{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

(xem Hình 4).



Hình 4: Hình hộp và tứ diện đồng phôi với mặt cầu.

Một ví dụ khác: đĩa mở đơn vị $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ đồng phôi với toàn bộ mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ (mặt dù $\mathbb{D}$ có vẻ "hữu hạn" còn $\mathbb{S}^2$) thì vô hạn. Thật vậy, ánh xạ

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = \left(\frac{x}{1-x^2-y^2}, \frac{y}{1-x^2-y^2}\right)$$

là một song ánh liên tục có ánh xạ ngược liên tục $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{D}$ cho bởi công thức

$$f^{-1}(x,y) = \left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}+1}, \frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}+1}\right).$$

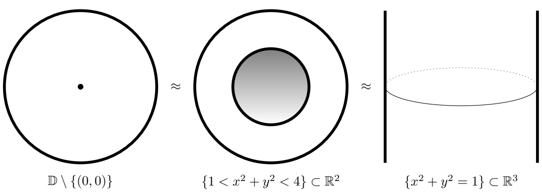
Tương tự, đoạn mở $(0,1)$ đồng phôi với đường thẳng thực $\mathbb{R}$ (ta có thể xét $f(x) = \frac{2x-1}{x-x^2}$).

Ta kết thúc mục này với ví dụ về sự đồng phôi, mà nhìn qua thì có vẻ không tầm thường, của 3 không gian sau đây (xem Hình 5).

• *Đĩa thủng* $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{(0,0)\}$, hình tròn đơn vị (không kể biên) bỏ tâm.

• *Hình vành khăn* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$, phần mặt phẳng nằm giữa (không kể biên) các đường tròn với tâm $(0,0)$ và bán kính lần lượt là 1 và 2.

• *Mặt trụ* $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1\}$.



Hình 5: Đĩa thủng, hình vành khăn và mặt trụ đồng phôi với nhau.

Thật vậy, ta có các phép đồng phôi

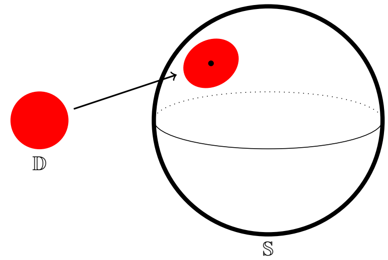
$$f : \mathbb{D}^* \to A,$$
$$f(x,y) = \left(\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)x, \left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)y\right)$$

và

$$g : A \to C,\ g(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x^2+y^2-2}{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}\right).$$

2. Tam giác phân. Định nghĩa mặt

Để phát biểu định lý chính của ghi chú này, một thao tác cần thiết là định nghĩa khái niệm mặt (cong). Thực ra đây là một công việc rất khó. Về mặt trực giác, một mặt là một đối tượng hình học mà khi nhìn vào địa phương thì trông nó như mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ (hoặc như một đĩa mở, vì ta đã biết rằng $\mathbb{D} \approx \mathbb{R}^2$). Chẳng hạn, bề mặt Trái Đất trông như một mặt phẳng khi nhìn vào lân cận của từng điểm (xem Hình 6).



Hình 6: Mỗi điểm của mặt cầu đều có một lân cận đồng phôi với $\mathbb{D}$.

Ta sẽ dùng trực giác trên như một định nghĩa không chính thức cho mặt. Về mặt toán học, chúng ta sẽ cần thêm một điều kiện kỹ thuật nữa, và thực ra điều kiện này sẽ giúp chúng ta làm việc được với chứng minh của định lý chính.

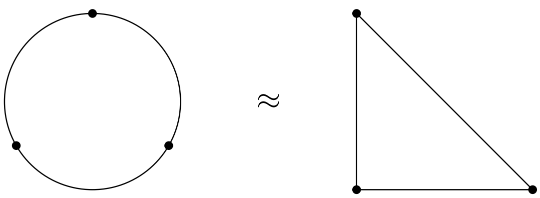
Ta xét tập hợp $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Đó là một tam giác trong mặt phẳng, với ba đỉnh lần lượt là $(0,0)$, $(0,1)$ và $(1,0)$. Nó có ba cạnh là ba đoạn thẳng, chúng đồng phôi với đoạn đóng $[0,1]$. Ta gọi Δ là *tam giác tiêu chuẩn*. Một *tam giác cong* trên một không gian tôpô X là một phép đồng phôi $\tau : \Delta \to T$, trong đó Δ là tam giác tiêu chuẩn và $T \subset X$ là một tập con. Ta nhấn mạnh rằng một tam giác cong trên X không chỉ gồm một tập gian con T của X đồng phôi với Δ, mà gồm cả một phép đồng phôi cụ thể $\tau : \Delta \to T$. Điều này cho phép ta nói về 3 đỉnh và 3 cạnh của tam giác cong, đó là ảnh của các đỉnh và các cạnh của Δ bởi τ. Tuy nhiên, nếu không có gì nhầm lẫn, ta sẽ ngầm hiểu rằng tập con T (cùng các đỉnh, các cạnh tương ứng) là một tam giác cong.

Một *phép tam giác phân* trên X là một họ (có thể vô hạn) $\mathscr{T}$ các tam giác cong trên X sao cho

• $X = \bigcup_{T\in\mathscr{T}} T$ (họ $\mathscr{T}$ *phủ* X);

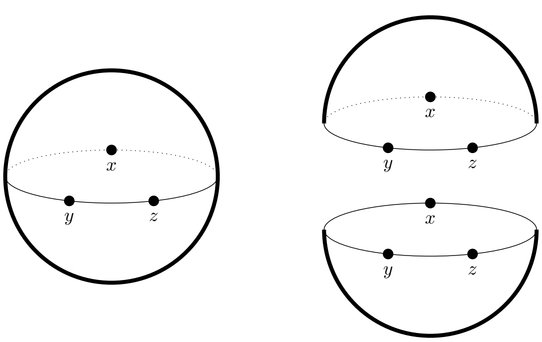
• nếu $T, T' \in \mathscr{T}$ là hai tam giác phân biệt thì giao $T \cap T'$ hoặc bằng $\varnothing$, hoặc là một đỉnh chung của T và T', hoặc là một cạnh chung của T và T'.

Như vậy, một phép tam giác phân của X là một cách biến dạng liên tục các phiên bản của tam giác chuẩn và dán chúng lại dọc theo các cạnh hoặc các đỉnh để thu được X. Dễ thấy một phép đồng phôi sẽ biến một phép tam giác phân của không gian này thành một phép tam phân của không gian kia. Ta có thể dễ dàng tam giác phân bất kỳ đa diện lồi nào. Chẳng hạn, tứ diện có thể được tam giác phân bởi 4 mặt của nó (là các tam giác). Với hình hộp, ta có thể tam giác phân nó bởi 12 tam giác, bằng cách chia đôi từng mặt (là các hình chữ nhật) theo một trong hai đường chéo. Đĩa đóng đơn vị $\mathbb{D}$ đồng phôi với Δ, ta có thể tam giác phân nó bởi một tam giác cong như trong Hình 7.



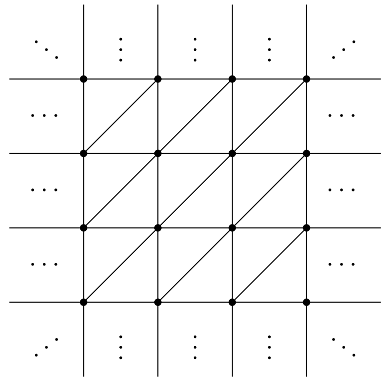
Hình 7: Tam giác phân đĩa đóng bởi 1 tam giác cong.

Mặt cầu đơn vị $\mathbb{S}$ trong không gian $\mathbb{R}^3$ được xây dựng bằng cách dán hai bán cầu dọc theo đường xích đạo. Dễ thấy mỗi bán cầu này đồng phôi với đĩa đóng đơn vị $\mathbb{D}$, trong đó đường xích đạo ứng với đường tròn biên của đĩa. Từ đó ta có thể tam giác phân $\mathbb{S}$ bằng cách dán 2 bản sao đồng phôi của Δ như trong Hình 8 dọc theo đúng các cạnh xy, yz và xz.



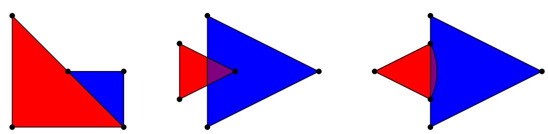
Hình 8: Tam giác phân mặt cầu bởi 2 tam giác cong.

Mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ có thể được tam giác phân bởi một dãy vô hạn các tam giác cong như trong Hình 9.



Hình 9: Tam giác phân mặt phẳng bởi một dãy vô hạn các tam giác cong.

Chú ý rằng theo định nghĩa của tam giác phân, các cách dán như trong Hình 10 đều bị cấm (phần màu tím chỉ giao của hai tam giác cong).



Hình 10: Không phải các phép tam giác phân.

Sau đây là định nghĩa quan trọng nhất của toàn bộ bài viết. Một *mặt* là một không gian tôpô X sao cho

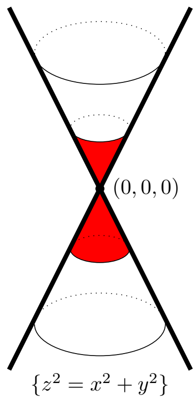
- mỗi điểm $x \in X$ đều có một lân cận đồng phôi với đĩa đóng đơn vị $\mathbb{D}$;
- X *liên thông*, nghĩa là với mọi $x, y \in X$, tồn tại một ánh xạ liên tục $\gamma : [0,1] \to X$ sao cho $\gamma(0) = x$ và $\gamma(1) = y$ (ta gọi γ là một *đường* trên X với điểm đầu x và điểm cuối y);
- X thừa nhận ít nhất một tam giác hóa bởi một dãy (hữu hạn hoặc vô hạn) các tam giác cong $T_1, T_2, T_3, \ldots$

Tính liên thông trong định nghĩa trên cũng có thể phát biểu lại như sau: với mọi $x, y \in X$ và mọi tam giác phân $\mathscr{T}$ của X, tồn tại một dãy hữu hạn $T_0, \ldots, T_n \in \mathscr{T}$ sao cho $x \in T_0$, $y \in T_n$ và $T_{i-1} \cap T_i \neq \varnothing$ với $1 \leq i \leq n$.

Định nghĩa trên loại bỏ các mặt có *điểm kỳ dị*, chẳng hạn như *mặt nón*

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2\},$$

vì điểm $(0,0,0) \in C$ không có lân cận nào trong C đồng phôi với $\overline{\mathbb{D}}$ (xem Hình 11).



Hình 11: $(0,0,0)$ là một điểm kỳ dị của mặt nón.

Nếu mặt X thừa nhận một tam giác hóa bởi một số hữu hạn các tam giác cong, ta nói X là một mặt *compact*. Ta thấy ngay rằng tứ diện, hình hộp, đĩa đóng $\overline{\mathbb{D}}$ và mặt cầu $\mathbb{S}$ là các mặt compact. Dễ thấy mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ không thể được tam giác phân bởi một số hữu hạn các tam giác cong, vì thế $\mathbb{R}^2$ không compact. Mà $\mathbb{D} \approx \mathbb{R}^2$ và tính compact là một bất biến tôpô nên đĩa mở $\mathbb{D}$ cũng không compact.

3. Tính đóng và định hướng. Trải phẳng

Trong định nghĩa về mặt, ta dùng đĩa đóng $\overline{\mathbb{D}}$ thay cho đĩa mở $\mathbb{D}$. Lí do là vì cách định nghĩa như vậy bao hàm các *mặt có biên*, như sau. Cho X là một mặt. Ta nói một điểm $x \in X$ là *điểm trong* nếu nó có một lân cận đồng phôi với đĩa mở đơn vị $\mathbb{D}$. Ngược lại, ta gọi nó là một *điểm biên*. Tập hợp các điểm trong của X được gọi là *phần trong* của X và được ký hiệu bởi X°. Tập hợp các điểm biên của X được gọi nó là *biên* của X và được ký hiệu bởi ∂X. Chẳng hạn, ở Hình 1, ta thấy rằng $\partial\overline{\mathbb{D}}$ là đường tròn đơn vị và $\overline{\mathbb{D}}^\circ = \mathbb{D}$. Trong khi đó, hình hộp, hình cầu, mặt trụ... đều là các mặt không có biên (mọi điểm của chúng đều là điểm trong). Dễ thấy biên và phần trong là các khái niệm tôpô, tức là nếu $f : X \to Y$ là một phép đồng phôi thì $f(\partial X) = \partial Y$ và $f(X^\circ) = Y^\circ$.

Xét $\mathscr{T}$ là phép một tam giác phân trên một mặt X. Giả sử x là một điểm nằm trên một cạnh a của một tam giác cong $T \in \mathscr{T}$, nhưng không phải một đỉnh của T. Giao của mọi lân cận của x với T chứa một tập con $D \approx \overline{\mathbb{D}}$, và $x \in \partial D$. Mặt khác, theo định nghĩa tam giác phân, nếu $T' \in \mathscr{T}$ là một tam giác cong khác chứa x thì a là một cạnh của T', nên điều tương tự cũng đúng với giao của mọi lân cận của x với T'. Từ đây ta thấy rằng nếu a là một cạnh của ít nhất 3 tam giác cong thuộc $\mathscr{T}$ thì x không có bất kỳ lân cận nào đồng phôi với $\overline{\mathbb{D}}$.

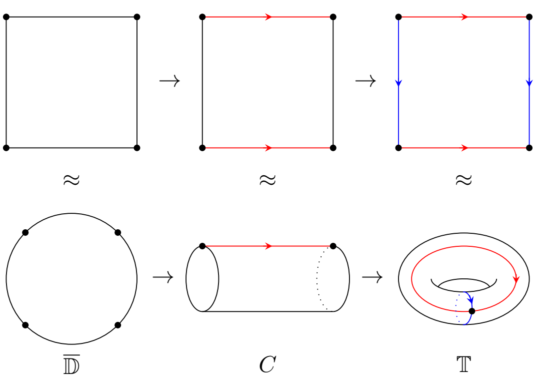
- Nếu a là cạnh của 1 tam giác cong duy nhất $T \in \mathscr{T}$ thì x không có lân cận nào đồng phôi với $\mathbb{D}$, nên $x \in \partial X$. Trong trường hợp này, mọi điểm của a trừ hai đầu mút đều nằm trên ∂X. Hai đầu mút của a cũng nằm trên ∂X, vì nếu có một đầu mút $e \in X^\circ$ thì theo định nghĩa, mọi điểm thuộc lân cận đủ nhỏ của e (nói riêng, các điểm nằm trên a đủ gần e) cũng phải thuộc X°, mâu thuẫn. Vậy $a \subset \partial X$.

- Nếu a là cạnh chung của 2 tam giác cong phân biệt $T, T' \in \mathscr{T}$ thì x có một lân cận $D \approx \overline{\mathbb{D}}$, và $x \in D^\circ \approx \mathbb{D}$, suy ra $x \in X^\circ$.

Tóm lại, khi ta có một tam giác phân $\mathscr{T}$ của một mặt X, mỗi cạnh của một tam giác cong đều nằm trong không quá 2 tam giác cong, và biên ∂X chính là hợp của tất cả các cạnh chỉ nằm trong đúng 1 tam giác cong.

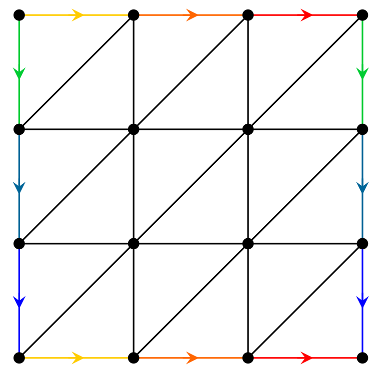
Quay lại với định nghĩa của mặt, ta có thể hiểu rằng một mặt X là compact nếu nó "chứa mọi điểm biên có thể của nó", hay chính xác hơn, nếu Y là một mặt chứa X và có cùng phần trong $Y^\circ = X^\circ$ thì ta phải có $Y = X$ (ta có thể đối chiếu với trường hợp đĩa mở $\mathbb{D}$ để hiểu trực giác này hơn). Định lý chính của chúng ta quan tâm đến các mặt *đóng*, tức là compact và không có biên. Hiển nhiên tính đóng là một bất biến tôpô. Chẳng hạn, mặt cầu $\mathbb{S}$ là một mặt đóng, trong khi đĩa đóng $\overline{\mathbb{D}}$ và đĩa mở $\mathbb{D}$ đều không phải các mặt đóng.

Sau đây là một ví dụ quan trọng, là một phần trong phát biểu của định lý chính. Ta gọi *mặt xuyến* là mặt tròn xoay $\mathbb{T}$ thu được khi xoay một đường tròn với bán kính r trong mặt phẳng $x = a$ của $\mathbb{R}^3$, với $a > r$, quanh trục Oz (ta sẽ không đưa ra phương trình cụ thể cho $\mathbb{T}$ mặt dù ta có thể làm điều đó). Đó chính là bề mặt của chiếc phao. Ta có thể thu được $\mathbb{T}$ từ $\overline{\mathbb{D}}$ như sau. Ta biết rằng $\overline{\mathbb{D}}$ đồng phôi với hình vuông đặc (gồm cả phần trong và biên). Ta "dán cùng chiều" cặp cạnh đối của hình vuông này (nghĩa là ta đồng nhất các cặp điểm tương ứng trên 2 cạnh) để thu được mặt trụ compact C - đây là một mặt với biên gồm 2 đường tròn rời nhau (2 đường tròn này là cặp cạnh đối còn lại của hình vuông sau khi dán hai đầu mút). Cuối cùng, ta dán cùng chiều 2 đường tròn biên của C để thu được mặt xuyến $\mathbb{T}$. Đây là một mặt không có biên.



Hình 12: Xây dựng mặt xuyến $\mathbb{T}$ bằng cách dán các cặp cạnh đối của hình vuông.

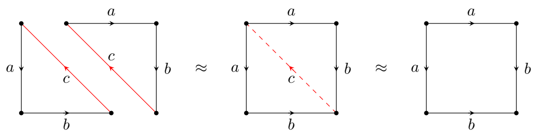
Trong Hình 12, ta thể hiện chiều khi dán các cặp cạnh đối bằng các mũi tên. Chú ý rằng 4 đỉnh của hình vuông sau cùng chỉ còn là 1 điểm trên $\mathbb{T}$. Đây là một *trải phẳng* của $\mathbb{T}$, thứ ta sẽ nói rõ hơn ở dưới. Một tam giác phân của $\mathbb{T}$ có thể được cho bởi Hình 13 (khi đếm số đỉnh và số cạnh, chú ý đến các cạnh đã được dán lại với nhau). Nói riêng, $\mathbb{T}$ compact, vì thế đóng.



Hình 13: Tam giác phân mặt xuyến bằng 9 đỉnh, 27 cạnh và 18 tam giác cong.

Tổng quát hơn, cho X là một mặt compact tùy ý và $\mathscr{T}$ là một tam giác phân của X. Ta đặt tất cả các tam giác cong của $\mathscr{T}$ (kể cả biên) vào các vị trí rời nhau trên mặt phẳng. Sau đó, ta lần lượt dán các tam giác cong ít nhất một cặp cạnh chung theo đúng chiều của cặp cạnh chung đó, rồi xóa cặp cạnh chung đó đi. Sau một số hữu hạn thao tác như vậy, do tính compact và tính liên thông của X, ta thu được một "đa giác" mà ở đó một số cặp cạnh được đồng nhất với nhau theo chiều nào đó (chẳng hạn, sau khi dán tất cả các cặp cạnh có thể từ tam giác phân ở Hình 13 để thu được Hình 12, ta còn lại một "tứ giác" trong đó các cặp cạnh đối được đồng nhất với nhau). Đó là một *trải phẳng* của mặt X. Chú ý rằng có nhiều thứ tự thực hiện phép dán các cặp cạnh chung, nên một mặt có thể có những trải phẳng khác nhau. Chú ý thêm rằng hoàn toàn có thể có những cạnh chỉ xuất hiện một lần, những cạnh này tạo thành biên của mặt X. Nói riêng, nếu mặt X đóng (không có biên) thì đa giác sau cùng thu được có số cạnh chẵn.

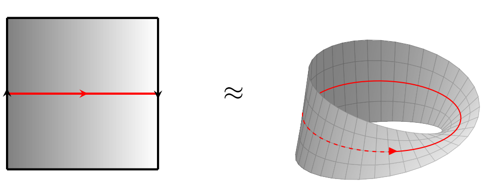
Chẳng hạn, từ phép tam giác phân bởi 2 tam giác cong, ta thu được trải phẳng của mặt cầu $\mathbb{S}$ như ở Hình 14, bằng cách dán 2 cặp cạnh kề của hình vuông.



Hình 14: Trải phẳng của mặt cầu.

Tiếp theo, ta nói về định hướng. Đây là một khái niệm tương đối khó định nghĩa chặt chẽ (ngay cả định nghĩa cho mặt phẳng cũng cần đến đại số tuyến tính). Chúng ta sẽ chỉ đưa ra một định nghĩa trực giác như sau. Một mặt X được gọi là *hai phía* hay *khả định hướng* nếu với mọi điểm $x \in X^\circ$ và mọi đường $\gamma \subset X^\circ$ xuất phát và kết thúc tại x, nếu ta đi dọc theo γ thì ta vẫn ở cùng phía của mặt như khi bắt đầu. Ngược lại, ta nói X là *một phía* hay *bất khả định hướng*.

Nói cách khác, mặt X là một phía nếu ta có thể đi từ phía này sang phía kia của một điểm trong mà không cần đi qua biên của mặt. Tính một/hai phía là một bất biến tôpô, một mặt một phía không thể đồng phôi với một mặt hai phía. Các mặt đã giới thiệu như đĩa đóng, đĩa mở, mặt cầu, mặt trụ, mặt xuyến... đều là các mặt hai phía. Ví dụ đầu tiên và rất nổi tiếng về mặt một phía là *băng Möbius* $\mathbb{M}$, mặt thu được khi dán ngược chiều một cặp cạnh đối của một hình vuông. Mặt này có thể được "nhúng" vào $\mathbb{R}^3$ như trong Hình 15.

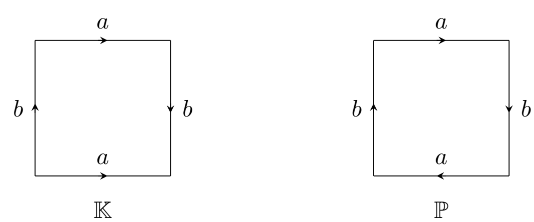


$\mathbb{M}$

Hình 15: Băng Möbius khi trải phẳng và khi được đặt trong không gian 3–chiều.

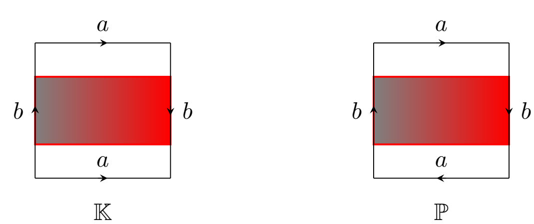
Để thấy tại sao $\mathbb{M}$ là một phía, hãy hình dung một con bọ nằm trên một điểm trong của $\mathbb{M}$. Con bọ có thể đi từ phía này sang phía kia của băng Möbius mà không đi qua biên.

Tổng quát hơn, bất cứ mặt nào chứa một tập con đồng phôi với $\mathbb{M}$ đều là mặt một phía. Sau đây là các ví dụ khác về các mặt đóng (không có biên) và một phía. Chúng được xây dựng bằng cách dán cách cặp cạnh đối của hình vuông tương tự như mặt xuyến (xem Hình 12), nhưng theo các chiều khác nhau. *Chai Klein* $\mathbb{K}$ thu được từ hình vuông bằng cách dán cùng chiều một cặp cạnh của hình vuông, và dán ngược chiều cặp cạnh còn lại. Trong khi đó, *mặt phẳng xạ ảnh* $\mathbb{P}$ thu được từ hình vuông bằng cách dán ngược chiều các cặp cạnh của hình vuông. Trải phẳng của $\mathbb{K}$ và $\mathbb{P}$ được cho bởi Hình 16. Không giống như mặt xuyến và băng Möbius, hai mặt vừa xây dựng đều không phải là các thực thể có ở ngoài đời thực (chúng không "nhúng" được vào $\mathbb{R}^3$).



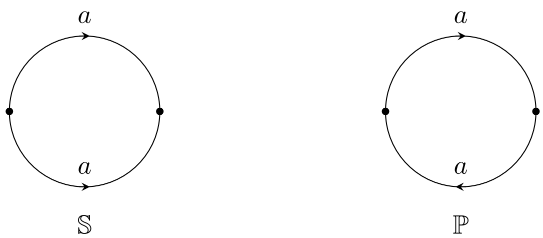
Hình 16: Trải phẳng của chai Klein và mặt phẳng xạ ảnh.

Các mặt $\mathbb{K}$ và $\mathbb{P}$ đều là mặt một phía, vì chúng chứa một tập con đồng phôi với $\mathbb{M}$ (xem Hình 17).



Hình 17: Chai Klein và mặt phẳng xạ ảnh đều chứa băng Möbius.

Như đã thấy ở các ví dụ trên, trải phẳng là một công cụ đắc lực để mô tả các mặt. Chúng ta sẽ sớm thấy rằng nó đóng vai trò quan trọng trong chứng minh của định lý chính. Trước khi kết thúc mục này, nhận xét rằng ta có thể xây dựng một mặt tùy ý bằng cách dán (cùng chiều hoặc ngược chiều) một số cặp cạnh của một "đa giác cong" (không tự cắt, hay còn gọi là *đơn*) trên mặt phẳng. Đa giác cong ở đây có thể có số cạnh bằng 2, khác với khái niệm đa giác lồi theo nghĩa cổ điển (ít nhất phải có 3 cạnh). Điều này cho phép ta thu được hai trải phẳng đơn giản hơn của mặt cầu $\mathbb{S}$ và mặt phẳng xạ ảnh $\mathbb{P}$ như trong Hình 18.



Hình 18: Trải phẳng của mặt cầu và mặt phẳng xạ ảnh bằng "nhị giác".

4. Tổng liên thông. Phát biểu định lý

Khi đã định nghĩa các mặt đóng cơ bản: mặt cầu $\mathbb{S}$, mặt xuyến $\mathbb{T}$, mặt phẳng xạ ảnh $\mathbb{P}$... ta có thể xây dựng thêm các mặt mới từ chúng bằng phép toán sau đây.

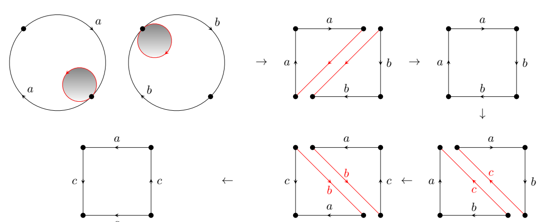
Cho X và Y là hai mặt. Ta xét hai đĩa đóng $\overline{\mathbb{D}} \approx D_1 \subset X^\circ$ và $\overline{\mathbb{D}} \approx D_2 \subset Y^\circ$. Khi đó, $X \setminus D_1^\circ$, $Y \setminus D_2^\circ$ là các mặt có biên lần lượt là $\partial X \sqcup \partial D_1$ và $\partial Y \sqcup \partial D_2$ (ở đây, ta dùng ký hiệu $\sqcup$ – *hợp rời* – để nhấn mạnh rằng đó là hợp của hai tập hợp rời nhau). Ta dán hai mặt có biên này dọc theo hai đường tròn ∂D_1 và ∂D_2 với nhau. Điều thú vị nhất là cách xây dựng này không phụ thuộc vào cách chọn các đĩa D_1, D_2 và cách dán ∂D_1 với ∂D_2 (nghĩa là với việc hai cách lựa chọn các dữ liệu này khác nhau, ta thu được hai mặt đồng phôi). Ta bỏ qua chứng minh của tính chất này vì tính kỹ thuật của nó. Mặt thu được (sai khác đồng phôi) là một mặt được ký hiệu bởi $X\#Y$ và được gọi là *tổng liên thông* của X và Y.

Giả sử $\mathscr{T}$ và $\mathscr{T}'$ lần lượt là các tam giác phân của X và Y sao cho có ít nhất một tam giác cong $T \in \mathscr{T}$ nằm trong X° và ít nhất một tam giác cong $T' \in \mathscr{T}'$ nằm trong Y° (ta luôn có thể giả sử sự tồn tại của một tam giác phân như vậy: nếu T chưa nằm trong X, ta tiếp tục tam tam giác phân bản thân T sao cho ít nhất một trong các giác cong thu được nằm trong T° – vì thế cũng nằm trong X°; và tương tự cho T'). Khi đó, ta có thể dễ dàng xây dựng một phép tam giác phân của $X\#Y$ bằng cách dán $X \setminus T^\circ$ với $X \setminus T'^\circ$ dọc theo từng cạnh T với từng cạnh của T' (nhắc lại rằng $T \approx T' \approx \Delta \approx \overline{\mathbb{D}}$). Nói riêng, nếu X và Y compact thì $X\#Y$ cũng compact. Ngoài ra, biên của $X\#Y$ là $\partial(X\#Y) = \partial X \sqcup \partial Y$. Vì thế, nếu X và Y là các mặt đóng thì $X\#Y$ cũng vậy.

Một tính chất nữa chúng ta nhắc đến (mà không chứng minh) là:

Tổng liên thông của hai mặt hai hướng lại là một mặt hai hướng. Tổng liên thông của một mặt một hướng với một mặt hai hướng là một mặt một hướng.

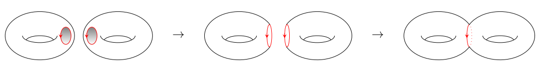
Tuy nhiên, tổng liên thông của hai mặt một hướng vẫn có thể là một mặt một hướng. Chẳng hạn, Hình 19 cho thấy rằng $\mathbb{P}\#\mathbb{P} \approx \mathbb{K}$ (chú ý rằng ta đã thực hiện hai tao tác trên trải phẳng là *cắt đa giác để tạo ra một cặp cạnh mới* và *dán dọc theo một cặp cạnh khác*).



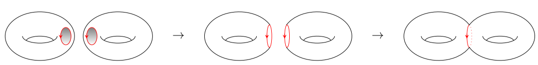
Hình 19: Tổng liên thông của hai mặt phẳng xạ ảnh là (chính xác hơn, đồng phôi với) chai Klein.

Tổng liên thông có tính giao hoán (sai khác đồng phôi), $X\#Y \approx Y\#X$, cũng như tính kết hợp, $(X\#Y)\#Z \approx X\#(Y\#Z)$. Chúng cho phép ta định nghĩa tổng liên thông của một số hữu hạn bất kỳ các mặt. Với g là số nguyên dương, ta sẽ ký hiệu tổng liên thông của g mặt (đồng phôi với) X bởi $X^{\#g}$. Mặt cầu $\mathbb{S}$ đóng vai trò như phần tử trung lập của tổng liên thông (vì thế, ta quy ước $X^{\#0} := \mathbb{S}$). Thật vậy, xét một mặt X tùy ý và một đĩa $\overline{\mathbb{D}} \approx D \subset X^\circ$. Xét tam giác hóa ở Hình 8, nghĩa là $\mathbb{S} = U \cup V$, trong đó $U \approx V \approx \overline{\mathbb{D}}$ là hai bán cầu (đóng), và $U \cap V = \partial U = \partial V$ là một đường tròn (đường xích đạo). Rõ ràng, khi dán $X \setminus D^\circ$ với $\mathbb{S} \setminus U^\circ = V$ dọc theo $\partial D \approx \partial V$, ta thu được một mặt đồng phôi với X, vì $V^\circ \approx \mathbb{D} \approx D^\circ$. Vậy $X \# \mathbb{S} \approx X$.

Một họ các mặt mới mà ta thu được bằng phép toán "#" là "mặt xuyến với g quai cầm" $\mathbb{T}^{\#g}$, với $g \geq 1$. Chẳng hạn, tổng liên thông $\mathbb{T}^{\#2} \approx \mathbb{T}\#\mathbb{T}$ được mô tả như trong Hình 20. Trải phẳng của nó là một bát giác như trong Hình 21.



Hình 20: Tổng liên thông của 2 mặt xuyến trong không gian 3–chiều.



Hình 21: Tổng liên thông của 2 mặt xuyến được trải phẳng.

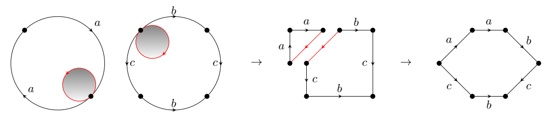
Tương tự, mặt $\mathbb{T}^{\#g}$ có trải phẳng là một $4g$–giác.

Chúng ta đã sẵn sàng phát biểu định lý chính của bài viết này.

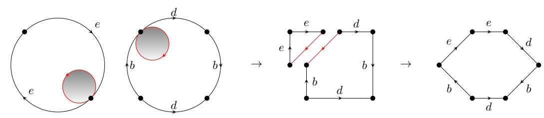
Mọi mặt đóng đều đồng phôi với duy nhất một trong các mặt sau đây.

- *Mặt cầu* $\mathbb{S}$.
- *Tổng liên thông* $\mathbb{T}^{\#g}$ *của* g *mặt xuyến, với* g *là một số nguyên dương.*
- *Tổng liên thông* $\mathbb{P}^{\#g}$ *của* g *mặt phẳng xạ ảnh, với* g *là một số nguyên dương.*

Trước khi bắt đầu chứng minh định lý chính ở mục sau, ta kết thúc mục này bằng ví dụ thú vị sau đây (nó cũng đóng vai trò trong chứng minh của định lý). Hiển nhiên mặt xuyến $\mathbb{T}$ và chai Klein $\mathbb{K}$ không đồng phôi, tuy nhiên, ta sẽ chỉ ra rằng $\mathbb{P}\#\mathbb{T} \approx \mathbb{P}\#\mathbb{K}$ (nói riêng, ta không có tính chất giản ước cho phép toán "#" như đối với phép cộng và phép nhân thông thường). Thật vậy, các tổng liên thông $\mathbb{P}\#\mathbb{T}$ và $\mathbb{P}\#\mathbb{K}$ lần lượt được mô tả ở Hình 22 và 23.

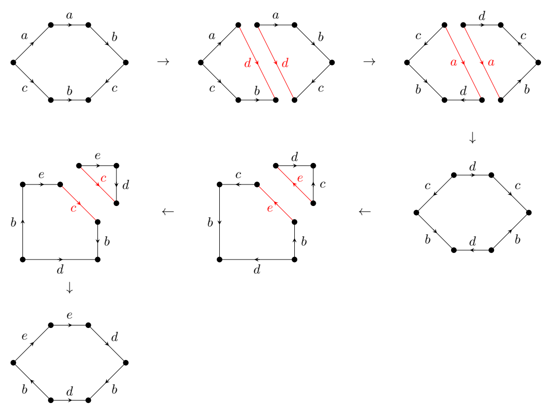


Hình 22: Tổng liên thông của mặt phẳng xạ ảnh và mặt xuyến.



Hình 23: Tổng liên thông của mặt phẳng xạ ảnh và chai Klein.

Tương tự như khi đã chỉ ra rằng $\mathbb{K} \approx \mathbb{P}^{\#2}$ (xem Hình 19), bằng cách thực hiện các thao tác cắt dán như trong Hình 24, ta thấy rằng $\mathbb{P}\#\mathbb{T} \approx \mathbb{P}\#\mathbb{K} \approx \mathbb{P}^{\#3}$.



Hình 24: Cắt, rồi dán theo cạnh a, rồi lại cắt, cuối cùng dán theo cạnh c.

5. Ký hiệu của mặt đã trải phẳng. Chứng minh định lý

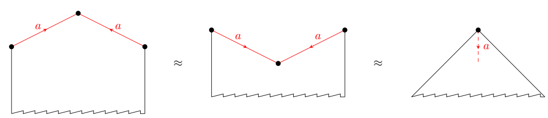
Trải phẳng cho phép chúng ta đưa việc phân loại mặt đóng từ một bài toán tôpô thành một bài toán hình học tổ hợp. Để mô tả một mặt compact đã trải phẳng, ta dùng khái niệm sau đây. Cho X là một mặt compact và xét một trải phẳng của X. Đó là một đa giác cong hữu hạn với một số cặp cạnh được dán lại với nhau theo một chiều nào đó. Ta dùng các chữ cái để đặt tên cho các cạnh của đa giác cong sao cho các cạnh được dùng một chữ cái khi và chỉ khi chúng được dán lại. Ta đánh mũi tên cho các cạnh để thể hiện chiều dán; đối với những cạnh biên (chỉ xuất hiện một lần, không dán với cạnh nào khác) thì ta đánh mũi tên tùy ý. Ta bắt đầu từ một đỉnh tùy ý và lần lượt đi qua các cạnh của đa giác cong theo một chiều xác định trên mặt phẳng (chẳng hạn, ngược chiều kim đồng hồ) và lần lượt viết tên các cạnh thành một dãy theo quy tắc sau: nếu cạnh a cùng chiều với hướng đi đã chọn thì viết a, ngược lại thì viết a^{-1}. Ta thu được một dãy ký tự, được gọi là một *ký hiệu* của mặt X.

Chẳng hạn, mặt cầu có thể được mô tả bởi ký hiệu aa^{-1} hoặc $abb^{-1}a^{-1}$, mặt xuyến có thể được mô tả bởi ký hiệu $aba^{-1}b^{-1}$, mặt phẳng xạ ảnh có thể được mô tả bởi ký hiệu aa hoặc $abab$, chai Klein có thể được mô tả bởi ký hiệu $aba^{-1}b$ (xem các Hình 12, 14, 16 và 18).

Ký hiệu cho phép ta mô tả tổng liên thông một cách đơn giản. Thật vậy, giả sử X, Y là các mặt compact, S_1 là một ký hiệu của X và S_2 là một ký hiệu của Y. Ta khoét một đĩa mở D_1° khỏi X sao cho biên ∂D_1 đi qua đỉnh đầu (cũng là đỉnh cuối) của đường đi mà ta đã chọn để định nghĩa S_1. Mặt thu được được cho bởi ký hiệu S_1a, với a là một chữ cái chưa xuất hiện trong S_1 (dùng để ký hiệu ∂D_1). Khoét một đĩa mở D_2° khỏi Y theo cách tương tự, ta thu được mặt S_2 cho bởi ký hiệu aS_2. Dán hai mặt vừa thu được theo cạnh a, ta thu được tổng liên thông $X\#Y$, được cho bởi ký hiệu S_1S_2. Tóm lại, ta chỉ cần viết một ký hiệu của X liền với một ký hiệu của Y để thu được một ký hiệu của $X\#Y$. Chẳng hạn, mặt $\mathbb{T}^{\#g}$ được mô tả bởi ký hiệu $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$, trong khi mặt $\mathbb{P}^{\#g}$ được mô tả bởi ký hiệu $a_1a_1a_2a_2\dots a_ga_g$.

Ta bắt đầu chứng minh một nửa của định lý chính bằng cách chỉ ra rằng mọi mặt đóng đều đồng phôi với một trong các mặt $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}^{\#g}$ hoặc $\mathbb{P}^{\#g}$ (với $g \geq 1$). Xét X là một mặt đóng. Ta trải phẳng nó, đặt tên và định hướng các cạnh một cách thích hợp. Lúc này, đa giác cong thu được gồm các cặp cạnh (vì X không có biên). Chứng minh được chia thành 4 bước như sau.

Bước 1. Khử các cặp cạnh kề dạng $\{a, a^{-1}\}$. Ta có thể giả sử đa giác cong thu được có ít nhất 4 cạnh, vì nếu nó chỉ có một cặp cạnh thì $X \approx \mathbb{S}$ hoặc $X \approx \mathbb{P}$, tùy theo cách hai cặp cạnh này được dán với nhau (xem Hình 18). Giả sử có một cặp cạnh kề dạng $\{a, a^{-1}\}$. Ta có thể dán nó lại để khử nó khỏi phép trải phẳng, như trong Hình 25.

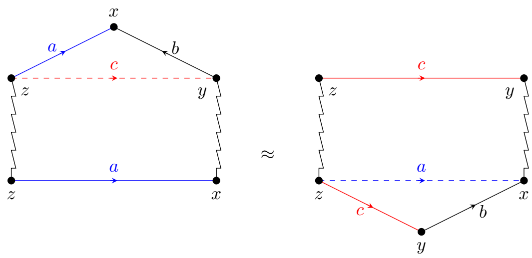


Hình 25: Khử các cặp cạnh kề dạng $\{a, a^{-1}\}$.

Ta lặp lại thao tác khử này cho đến khi X có chỉ còn 2 cạnh hoặc không còn cặp cạnh kề nào như trên.

Bước 2. Đưa về đa giác cong mà mọi đỉnh đều được dán lại thành một đỉnh. Đối với mặt xuyến cho bởi ký hiệu $aba^{-1}b^{-1}$, ta thấy rằng 4 đỉnh của trải phẳng trên được dán lại thành một đỉnh duy nhất. Ta sẽ làm điều này cho mặt đóng X tùy ý. Nếu x là một đỉnh của đa giác cong, ta ký hiệu bởi $[x]$ tập hợp các đỉnh được dán với x. Rõ ràng, $[x] = [y]$ nếu x và y được dán với nhau và $[x] \cap [y] = \varnothing$ nếu không.

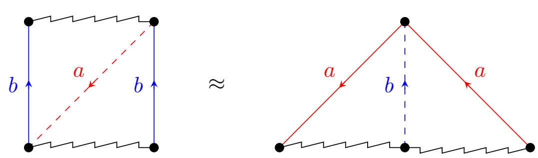
Giả sử x và y là hai đỉnh của đa giác cong không được dán với nhau. Ký hiệu bởi b cạnh với hai đầu mút x, y, và định hướng lại (nếu cần) sao cho x là điểm cuối của b. Ký hiệu bởi a cạnh kề với b tại đầu mút x và gọi z là đầu mút còn lại. Chú ý các cạnh a và b không được dán với nhau (vì nếu vậy thì x phải là điểm cuối của a, từ đó ta thu được một cặp cạnh kề nhau dạng $\{a, a^{-1}\}$, mâu thuẫn với giả sử rằng ta đã thực hiện triệt để Bước 1). Định hướng lại a nếu cần để x là điểm cuối. Ta cắt đa giác cong theo một cạnh c từ z đến y, và dán lại dọc theo cạnh a. Nếu $[x]$ có ít nhất hai đỉnh thì ở đa giác cong mới thu được, số đỉnh của $[x]$ giảm đi 1 và số đỉnh của $[y]$ tăng thêm 1 (xem Hình 26).



Hình 26: Giảm số đỉnh được dán với x đi 1 và tăng số đỉnh được dán với y thêm 1.

Ta lặp lại quá trình trên cho đến khi $[x] = \{x\}$. Lúc này, ta thu được một cặp cạnh kề dạng $\{a, a^{-1}\}$ với điểm cuối là x và ta quay lại Bước 1. Thực hiện phép giản ước ở Bước 1, ta xóa đỉnh x khỏi đa giác cong, làm giảm tổng số đỉnh (sau khi đã đồng nhất các đỉnh được dán với nhau) đi 1. Lặp lại toàn bộ quá trình trên (gồm cả Bước 1 và Bước 2), sau cùng ta thu được một đa giác cong mà mọi đỉnh đều được dán thành một đỉnh duy nhất.

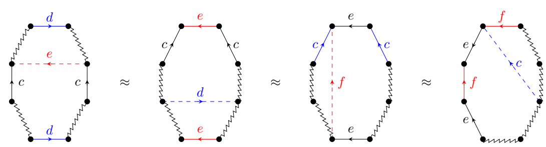
Bước 3. Thay các cặp cạnh không kề nhau dạng $\{b, b\}$ bởi các cặp cạnh kề nhau. Giả sử có một cặp cạnh không kề nhau dạng $\{b, b\}$ (dạng $\{b^{-1}, b^{-1}\}$ đưa được về dạng này bằng cách định hướng lại). Ta cắt đa giác cong theo một cạnh a nối 2 điểm cuối của hai cạnh b, rồi dán lại dọc theo cạnh b như trong Hình 27. Chú ý rằng các cặp cạnh kề dạng $\{c, c\}$ hoặc $\{c^{-1}, c^{-1}\}$ (với $c \neq b$) không bị ảnh hưởng bởi thao tác này. Đồng thời, mọi đỉnh vẫn được dán thành một đỉnh duy nhất.



Hình 27: Thay cặp cạnh $\{b, b\}$ bởi cặp cạnh kề nhau $\{a, a\}$.

Lặp lại Bước 3 cho đến khi mọi cặp cạnh dạng $\{b, b\}$ hoặc $\{b^{-1}, b^{-1}\}$ đều kề nhau.

Bước 4. Xử lý các cặp cạnh không kề nhau dạng $\{c, c^{-1}\}$. Giả sử rằng tồn tại một cặp cạnh không kề nhau dạng $\{c, c^{-1}\}$. Đương nhiên, ta có thể giả sử c là cạnh đầu tiên của đường đi đã chọn, nghĩa là X được cho bởi ký hiệu $cAc^{-1}B$ với A, B là các dãy ký tự khác rỗng. Giả sử phản chứng rằng không có cạnh nào trong A được dán với một cạnh khác trong B. Như vậy, các sự dán cạnh chỉ xảy ra trên A, trên B hoặc trên cặp $\{c, c^{-1}\}$. Nói riêng, hai đầu mút của c không được dán với nhau, mâu thuẫn với giả thiết rằng mọi đỉnh đã được dán thành một đỉnh duy nhất. Vậy giả sử phản chứng là sai, nghĩa là có một cạnh của A được dán với một cạnh khác trong B. Vì các cặp cạnh dạng $\{a, a\}$ đều đã đưa về kề nhau, nên có một cạnh d trong A được dán với cạnh d^{-1} trong B, nghĩa là X cho bởi ký hiệu dạng $c \ldots d \ldots c^{-1} \ldots d^{-1}$. Ta thực hiện cắt dán như ở Hình 28 để thay 2 cặp $\{c, c^{-1}\}$ và $\{d, d^{-1}\}$ bởi dãy $efe^{-1}f^{-1}$. Chú ý rằng các cặp cạnh kề nhau không bị ảnh hưởng bởi thao tác này. Đồng thời, mọi đỉnh vẫn được dán thành một đỉnh duy nhất.



Hình 28: Thay 2 cặp cạnh $\{c, c^{-1}\}$ và $\{d, d^{-1}\}$ bởi dãy $efe^{-1}f^{-1}$.

Lặp lại Bước 4 cho đến khi các cặp cạnh dạng $\{c, c^{-1}\}$ được phân hoạch vào cách dãy dạng $efe^{-1}f^{-1}$ (các cặp cạnh dạng $\{b, b\}$ vẫn luôn kề nhau). Ký hiệu thu được mô tả tổng liên thông của một số hữu hạn các mặt xuyến và các mặt phẳng xạ ảnh (mặt xuyến có ký hiệu là $aba^{-1}b^{-1}$ và mặt phẳng xạ ảnh có ký hiệu là aa. Vì tính giao hoán của tổng liên thông, ta có $X \approx \mathbb{T}^{\#m} \# \mathbb{P}^{\#n}$, với $m, n \in \mathbb{N}$. Nếu $m = 0$ hoặc $n = 0$ thì chứng minh kết thúc. Trong trường hợp $m, n > 0$, ta áp dụng kết quả $\mathbb{T} \# \mathbb{P} \approx \mathbb{P}^3$ (ở cuối mục trước) m lần liên tiếp để thu được $X \approx \mathbb{P}^{\#(2m+n)}$.

Để chứng minh phần "duy nhất" của định lý chính, ta cần chỉ ra rằng các mặt đã liệt kê đôi một không đồng phôi. Một việc có thể làm ngay lúc này là chỉ ra rằng các mặt $\mathbb{P}^{\#g}$ (với $g > 0$) không đồng phôi với các mặt $\mathbb{T}^{\#h}$ (với $h \geq 0$, nhắc lại rằng $\mathbb{T}^0 := \mathbb{S}$). Thật vậy, mặt cầu và mặt xuyến là mặt một phía là các mặt hai phía (vì thế, các mặt xuyến với h quai cầm, $h > 0$, cũng vậy) nên ta chỉ cần chỉ ra rằng rằng $\mathbb{P}^{\#g}$ là mặt một phía với mọi $g > 0$. Thật vậy

- với $g = 1, 2$, ta biết rằng $\mathbb{P}$ và $\mathbb{P}\#\mathbb{P} \approx \mathbb{K}$ (xem Hình 19) là các mặt một phía, vì chúng đều chứa băng Möbius (xem Hình 17);
- với $g \geq 3$ và chẵn thì $g = 2n$ (với $n \geq 2$), áp dụng liên tiếp kết quả $\mathbb{P}^{\#3} \approx \mathbb{T}\#\mathbb{P}$, ta có $\mathbb{P}^{\#2n} \approx \mathbb{T}^{n-1}\#\mathbb{P}^{\#2} \approx \mathbb{T}^{n-1}\#\mathbb{K}$ là mặt một phía (vì $\mathbb{T}^{n-1}$ là mặt hai phía còn $\mathbb{K}$ là mặt một phía);
- với $g \geq 3$ và lẻ thì $g = 2n+1$ (với $n \geq 1$), tương tự, ta có $\mathbb{P}^{\#(2n+1)} \approx \mathbb{T}^n\#\mathbb{P}$ là mặt một phía (vì $\mathbb{T}^n$ là mặt hai phía còn $\mathbb{P}$ là mặt một phía).

Phần còn lại của chứng minh cho tính duy nhất sẽ được hoãn lại tới mục sau, nơi ta giới thiệu thêm một bất biến tôpô quan trọng khác.

6. Đặc trưng Euler–Poincaré. Giống

Cho X là một mặt đóng và $\mathscr{T}$ là một phép tam giác phân hữu hạn của X. Lần lượt ký hiệu bởi $V(\mathscr{T})$, $E(\mathscr{T})$ và $F(\mathscr{T})$ số đỉnh, số cạnh và số tam giác cong trong $\mathscr{T}$. Số nguyên

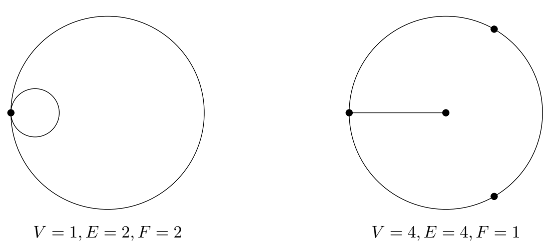
$$\chi(\mathscr{T}) = V(\mathscr{T}) - E(\mathscr{T}) + F(\mathscr{T})$$

là *đặc trưng Euler–Poincaré* của $\mathscr{T}$. Ta sẽ dùng giá trị này để chỉ ra rằng $\mathbb{S}$ không đồng phôi với $\mathbb{T}^m$ với $m > 0$ và rằng $\mathbb{T}^m$ không đồng phôi với $\mathbb{T}^n$ cũng như $\mathbb{P}^m$ không đồng phôi với $\mathbb{P}^n$ với $m \neq n$. Trước hết, ta cần chỉ ra rằng giá trị χ là một bất biến tôpô chỉ phụ thuộc vào nội tại mặt X, không phụ vào phép tam giác phân $\mathscr{T}$. Trong tôpô đại số, điều này được chứng minh nhờ khái niệm *lý thuyết đồng điều* và một tính toán đơn giản trên các *số Betti*.

Ở mục này, chúng ta cố gắng phác thảo một chứng minh không chính thức cho sự kiện này. Ý tưởng như sau, cho $\mathscr{T}$ và $\mathscr{T}'$ là hai tam giác phân tùy ý, ta dùng một số hữu hạn các phép biến đổi bảo toàn đặc trưng Euler–Poincaré để đưa $\mathscr{T}$ về $\mathscr{T}'$. Để làm điều này một cách thuận tiện, ta đưa ra một khái niệm tổng quát hơn tam giác phân: Ta gọi một *cấu trúc phân ngăn* trên X là một họ $\mathscr{C}$ gồm một số hữu hạn các điểm, các đường và các đa giác cong trên X, thỏa mãn các tính chất sau.

- Phần trong của mỗi đa giác cong đều đồng phôi với đĩa mở $\mathbb{D}$ và đôi một không giao nhau.
- Biên của mỗi đa giác cong là hợp của một số hữu hạn các đường (ta gọi các đường này là các *cạnh* của đa giác cong, các đầu mút của chúng là các *đỉnh* của đa giác cong).
- Sau khi bỏ điểm đầu và điểm cuối, các đường đều đồng phôi với khoảng mở $(0,1)$ và đôi một không giao nhau.

Khái niệm trên cho phép sự xuất hiện của các đường với điểm đầu trùng với điểm cuối (các *khuyên*), các đa giác có thể có số cạnh tùy ý (thậm chí có thể bằng 1 hoặc 2), xem Hình 29.



Hình 29: Hai cấu trúc phân ngăn khác nhau của đĩa đóng.

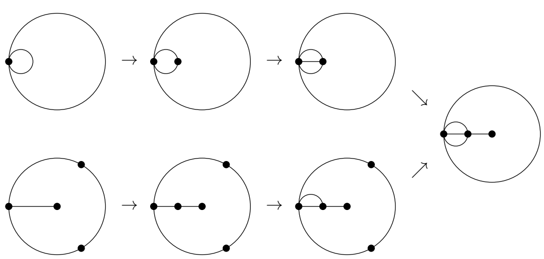
Lần lượt ký hiệu bởi $V(\mathscr{C})$, $E(\mathscr{C})$ và $F(\mathscr{C})$ số điểm, số đường và số đa giác cong trong $\mathscr{C}$. Gọi

$$\chi(\mathscr{C}) = V(\mathscr{C}) - E(\mathscr{C}) + F(\mathscr{C})$$

là đặc trưng Euler–Poincaré của $\mathscr{C}$. Dễ thấy các thao tác sau đây không làm thay đổi đặc trưng Euler–Poincaré của cấu trúc phân ngăn.

- Chia đôi một đường bằng cách thêm một điểm vào giữa đường (số điểm và số đường đều tăng thêm 1, số đa giác cong không đổi).
- Chia đôi một đa giác cong bằng cách thêm một đường nối hai đỉnh *không nhất thiết phân biệt* (số điểm không đổi, số đường và số đa giác cong đều tăng thêm 1).
- Thêm một điểm ở miền trong của một đa giác cong và một đường nối nó với một đỉnh của đa giác (số điểm và số đường đều tăng thêm 1, số đa giác cong không đổi).

Giả sử $\mathscr{C}$ và $\mathscr{C}'$ là hai cấu trúc phân ngăn sao sao cho giao của mỗi đường của $\mathscr{C}$ với mỗi đường của $\mathscr{C}'$ chỉ gồm một số hữu hạn các điểm và một số hữu hạn các đoạn đóng. Khi đó ta có thể dùng một số hữu hạn các phép biến đổi trên để đưa $\mathscr{C}$ và $\mathscr{C}'$ về cùng một cấu trúc phân ngăn $\mathscr{C}''$, chẳng hạn như trong Hình 30. Vì thế, ta có $\chi(\mathscr{C}) = \chi(\mathscr{C}'') = \chi(\mathscr{C}')$.



Hình 30: Đưa hai cấu trúc phân ngăn ở Hình 29 về cùng một cấu trúc phân ngăn.

Trường hợp xấu có thể xảy ra là khi giao của một đường trong $\mathscr{C}$ với một đường trong $\mathscr{C}'$ gồm một số vô hạn điểm hoặc một số vô hạn đoạn đóng. Lúc này, ta cần "xê dịch" hai đường này một chút để đưa về trường hợp trước. Đây là một bước rất kỹ thuật và cần dùng đến tính compact trong tôpô học, ta sẽ không đi sâu vào chi tiết.

Từ các phân tích ở trên, ta có thể định nghĩa đặc trưng Euler–Poincaré $\chi(X)$ của một mặt đóng X là đặc trưng Euler–Poincaré $\chi(\mathscr{T})$ của bất kỳ phép tam giác phân hữu hạn $\mathscr{T}$ (hoặc bất kỳ cấu trúc phân ngăn hữu hạn $\mathscr{C}$) nào của X. Chẳng hạn, mặt xuyến có một tam giác phân $\mathscr{T}$ cho bởi Hình 13, với $V(\mathscr{T}) = 9$, $E(\mathscr{T}) = 27$ và $F(\mathscr{T}) = 18$, nên $\chi(\mathbb{T}) = 9 - 27 + 18 = 0$. Một phép đồng phôi biến một tam giác phân của mặt này thành một tam giác phân của mặt kia, với số đỉnh, số cạnh và số tam giác cong được bảo toàn. Vì thế, hai mặt đồng phôi có cùng đặc trưng Euler–Poincaré, nghĩa là đặc trưng Euler–Poincaré là một bất biến tôpô.

Cho X và Y là các mặt đóng, ta tìm công thức liên hệ giữa $\chi(X\#Y)$ với $\chi(X)$ và $\chi(Y)$ như sau. Xét $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ lần lượt là các tam giác phân hữu hạn bất kỳ của X sao cho có ít nhất một tam giác cong $T \in \mathscr{T}$ nằm trong X° và ít nhất một tam giác cong $T' \in \mathscr{T}'$ nằm trong Y°. Ta khoét T° và T'° khỏi X và Y rồi dán $X \setminus T^\circ$ với $Y \setminus T'^\circ$ dọc theo $\partial T \approx \partial T'$ để thu được tổng liên thông $X\#Y$. Có 3 đỉnh được dán lại với nhau, 3 cạnh được dán lại với nhau, và 2 tam giác cong bị bỏ đi, do đó tam giác phân mới thu được trên $X\#Y$ gồm $V(\mathscr{T}) + V(\mathscr{T}') - 3$ đỉnh, $E(\mathscr{T}) + E(\mathscr{T}') - 3$ cạnh và $F(\mathscr{T}) + F(\mathscr{T}') - 2$ tam giác cong. Từ đó ta tính được

$$\chi(X\#Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2.$$

Thay $Y = \mathbb{S}$ trong công thức trên (nhắc lại rằng $X\#\mathbb{S} \approx X$), ta thu được $\chi(\mathbb{S}) = 2$. Mặt khác, bằng quy nạp, ta dễ dàng tính được

$$\chi(X^{\#g}) = g \cdot \chi(X) + 2 - 2g$$

với $g \geq 1$. Từ đó ta có $\chi(\mathbb{T}^{\#g}) = 2 - 2g \leq 0$. Do đó, mặt $\mathbb{S}$ cùng các mặt $\mathbb{T}^g$, với $g \geq 1$, đôi một không đồng phôi (nhắc lại rằng tất cả các mặt này đều là mặt hai hướng).

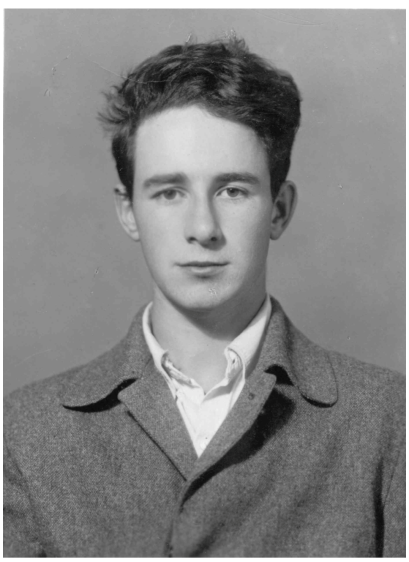
Ngoài ra, từ kết quả $\mathbb{P}\#\mathbb{T} \approx \mathbb{P}^{\#3}$, ta tính được $\chi(\mathbb{P}) = 1$, suy ra $\chi(\mathbb{T}^{\#g}) = 2 - g$. Do đó, các mặt $\mathbb{P}^g$, với $g \geq 1$, đôi một không đồng phôi (nhắc lại rằng tất cả các mặt này đều là mặt một hướng). Điều này kết thúc chứng minh của định lý phân loại tôpô cho các mặt đóng.

Ta kết thúc bài viết bằng việc nhắc đến khái niệm sau đây. Với X là một mặt đóng, nếu X là mặt hai phía thì tồn tại duy nhất số tự nhiên g sao cho $\chi(X) = 2 - 2g$, hay $X \approx \mathbb{T}^{\#g}$ (nhắc lại quy ước $\mathbb{T}^{\#0} = \mathbb{S}$). Số tự nhiên g này được gọi là *giống* (genus) của mặt X, nó chính là "số quai cầm" của X (mặt cầu không có quai cầm, tổng liên thông $\mathbb{T}^{\#g}$ có g quai cầm). Theo tinh thần này, nếu X là mặt một phía thì tồn tại duy nhất số nguyên dương g sao cho $\chi(X) = 2 - g$ (ta có $X \approx \mathbb{P}^{\#g}$). Ta cũng gọi g là giống của X trong trường hợp này (một số nơi gọi số nguyên này là *á giống*). Định lý chính của bài viết này nói rằng, mặt đóng X được xác định duy nhất (sai khác đồng phôi) khi ta biết tính khả định hướng và giống của nó.

“NGƯỜI HỌC LÀ NGỌN ĐUỐC CẦN ĐƯỢC THẮP SÁNG”- VLADIMIR ARNOLD

(Người dịch: Phạm Triều Dương)

Vladimir Igorevich Arnold (1937 – 2010) là một nhà toán học sinh ra ở Ukraine, người đã giành được giải thưởng Wolf cho công trình nghiên cứu về hệ động lực học, phương trình vi phân và lý thuyết kỳ dị. Niềm đam mê toán học của Arnold được bắt đầu khi ông mới 5 tuổi. Ông giải thích trong [2] rằng đây là một hệ quả của truyền thống toán học Nga.



Vladimir Arnold vào năm 1957.

Những đứa trẻ khi còn rất nhỏ đã bắt đầu nghĩ về các bài toán (các bài toán cổ liên quan tới công việc buôn bán, trao đổi hàng hoá) ngay cả trước khi chúng có bất kỳ kiến thức nào về các con số. Trẻ em từ năm đến sáu tuổi rất thích các bài toán này và có thể giải được chúng, nhưng chính những bài toán đó lại có vẻ quá khó đối với những sinh viên tốt nghiệp đại học, những người đã bị làm hư bởi sự đào tạo toán học chính quy. ... Nhiều gia đình Nga có truyền thống đưa ra hàng trăm bài toán cho con cái của họ, và gia đình tôi cũng không ngoại lệ.

Khi mười hai tuổi, Arnold được thầy cô giáo giao những bài toán khó. Ông trích dẫn một bài toán như vậy trong [2]:

Hai bà già bắt đầu đi từ lúc mặt trời mọc và mỗi người đi với vận tốc không đổi. Một người đi từ A đến B và người kia từ B đến A. Họ gặp nhau vào giữa trưa và đi tiếp tục không nghỉ, lần lượt đến B lúc 4 *giờ chiều, và tới A lúc* 9 *giờ tối. Hỏi mặt trời mọc lúc mấy giờ vào ngày hôm đó?*

Arnold thuật lại:

Tôi đã dành cả ngày để suy nghĩ về bài toán cũ kỹ đó, và lời giải ... bỗng đến như một sự khám phá. Cảm giác khám phá mà tôi có lúc đó giống hệt như trong tất cả các bài toán nghiêm túc hơn nhiều về sau này ...

Là một nhà toán học nổi tiếng cả trong lĩnh vực nghiên cứu và giảng dạy, tuy nhiên Arnold luôn nhớ lại những năm tháng học đại học của mình với sự tôn trọng và đánh

* *Lược dịch theo https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Arnold/*

giá cao dành cho từng giáo sư được theo học và các bạn bè đồng môn. Ông kể lại trong [2]

Sự quy tụ các ngôi sao toán học vĩ đại trong cùng một khoa khi tôi theo học tại Khoa Toán – Cơ là thực sự đặc biệt, và tôi chưa từng thấy điều gì giống như vậy ở bất kỳ nơi nào khác. Kolmogorov, Gelfand, Petrovsky, Pontryagin, P. Novikov, Markov, Gelfond, Lusternik, Khinchin và P. S. Aleksandrov lúc đó giảng dạy các sinh viên như Manin, Sinai, Sergei Novikov, V. M. Alexeev, Anosov, A. A. Kirillov và tôi. Tất cả những nhà toán học này đều rất khác nhau! Hầu như không thể hiểu được các bài giảng của Kolmogorov, nhưng chúng chứa đầy những ý tưởng và thực sự bổ ích! ... Pontryagin khi đó đã trở nên rất yếu lúc tôi là sinh viên của Khoa Toán Cơ, nhưng có lẽ ông ấy là giảng viên giỏi nhất của Khoa.

Thầy giáo Arnold cùng các học sinh Trường nội trú Toán Mátx–cơ–va vào những năm 1960.

Năm 1965, Arnold trở thành Giáo sư tại Khoa Toán – Cơ tại Đại học Quốc gia Mát–xcơ–va, vị trí mà ông giữ cho đến năm 1986 khi ông đảm nhận vị trí Nghiên cứu viên chính tại Viện Toán học Steklov ở Mát–xcơ–va. Ngoài các chức vụ ở Nga, năm 1993, ông còn được bổ nhiệm làm Giáo sư tại Đại học Paris–Dauphine ở Pháp. Ông giữ chức vụ này cho đến năm 2005.

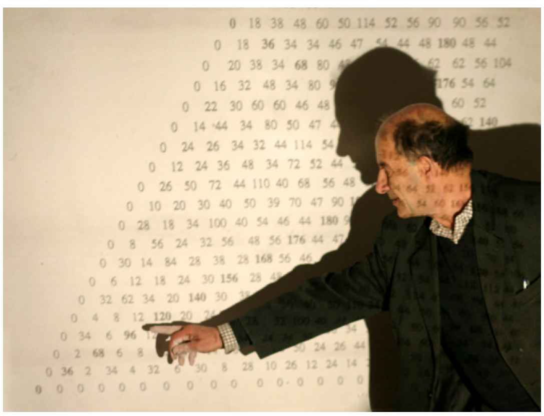
Khi nhận xét về cuốn sách Các bài toán của Arnold [1], Sergi Tabachnikov đã viết như sau trong [4] về các seminar của ông.

Đời sống toán học ở Liên Xô từ cuối những năm 1950, đặc biệt là ở Mát–xcơ–va, nổi tiếng với các seminar, như các seminar của Gelfand, Sinai, Kirillov, Manin, Novikov. Hầu hết các seminar này họp hàng tuần trong hai giờ, vào cuối buổi chiều. Đối với một số nhà toán học lỗi lạc, những seminar này là một cơ hội để thu hút và nuôi dưỡng những tài năng toán học mới chớm nở. Một trong những seminar nổi tiếng là seminar của Arnold, tồn tại hơn 30 năm. Mỗi học kỳ, buổi khai mạc của seminar luôn được dành cho các vấn đề mở. Arnold luôn trao đổi về hàng chục bài toán nghiên cứu với những bình luận chi tiết. Nhiều bài toán trong số này sau đó đã được giải quyết (hoặc giải quyết được một phần) bởi những người tham gia seminar. Theo Arnold, chu kỳ bán phân rã của một bài toán là bảy năm. Nhiều người tham gia seminar cũng là nghiên cứu sinh của Arnold. Triết lý của ông luôn là: một sinh viên nên học được từ giáo viên của mình rằng một bài toán nào đó hiện đang là vấn đề mở; sự lựa chọn của một vấn đề nghiên cứu cụ thể sau đó là tùy thuộc vào sinh viên.

Vladimir Arnold vào năm 1997.

Một cái nhìn tổng quan tuyệt vời về những đóng góp của Arnold đã được đưa ra trong phần trích dẫn về Giải thưởng Wolf được trao cho ông vào năm 2001.

Vladimir I. Arnold đã có những đóng góp đáng kể cho một số lượng đáng kinh ngạc các *ngành toán học khác nhau. Nhiều công trình nghiên cứu, sách vở, bài giảng cộng với sự uyên bác và tâm huyết của ông đã có ảnh hưởng sâu sắc đến cả một thế hệ các nhà toán học. Luận án Tiến sĩ của Arnold có chứa một lời giải cho bài toán thứ 13 của Hilbert. Công trình của ông về động lực học Hamilton, bao gồm việc đồng sáng tạo ra lý thuyết KAM (Kolmogorov–Arnold–Moser) và khám phá ra "sự khuếch tán của Arnold", đã khiến ông nổi tiếng thế giới ngay từ khi còn nhỏ. Những đóng góp của Arnold cho lý thuyết kỳ dị bổ sung cho lý thuyết thảm họa của Thom và đã làm biến đổi lĩnh vực này. Arnold cũng đã có vô số đóng góp cơ bản cho lý thuyết phương trình vi phân, hình học symplectic, hình học đại số thực, phép tính biến phân, thủy động học và từ–thủy động học. Ông thường phát hiện ra mối liên hệ giữa các vấn đề trong các lĩnh vực khác nhau.*



Giáo sư Arnold trong một buổi giảng bài.

Khi Arnold tròn 65 tuổi vào năm 2002, Tạp chí Toán học Mát–xcơ–va (Mát–xcơ–va Mathematical Journal) đã dành hai số báo để chào mừng sự kiện này với phần giới thiệu như sau:

...Bộ mặt của toán học hiện đại sẽ không thể nhận ra được nếu không có những công trình của ông trong các lĩnh vực như hệ động lực, cơ học cổ điển và cơ học thiên thể, lý thuyết kỳ dị, tô pô, hình học đại số thực và phức, hình học symplectic và hình học tiếp xúc, thủy động học, phép tính biến phân, hình học vi phân, lý thuyết thế vị, vật lý toán học, lý thuyết chồng chất, v.v...

Arnold là một giáo viên hiếm có, trường lớp của ông luôn nổi tiếng và đông đảo người theo, ông có năng khiếu đặc biệt trong việc tìm ra những vấn đề mới và hấp dẫn để thu hút sự quan tâm và lôi cuốn các nhà nghiên cứu trẻ. Ông là một giảng viên phi thường ở tất cả các cấp giáo dục toán học và nghiên cứu. Những lý thuyết hiện đại khó hiểu trở nên khá rõ ràng và đơn giản trong phần trình bày của ông. Người ta khó có thể hình dung nền giáo dục toán học hiện đại nếu không có những cuốn sách giáo khoa xuất sắc của ông. Trường phái toán học Mát–xcơ–va phải mang ơn rất nhiều những seminar của ông.

Xuất thân từ một gia đình nhiều thế hệ làm khoa học, ông tập hợp được cách tiếp cận khoa học của họ và mối quan tâm sâu sắc đến mọi mặt của cuộc sống, kiến thức của ông vô cùng rộng lớn và sự tò mò của Arnold đối với mọi thứ xung quanh thật tuyệt vời.

Arnold đã được trao Giải thưởng Nhà nước của Liên bang Nga (2007), và trong năm tiếp theo, ông đã nhận được Giải thưởng Shaw danh giá về khoa học toán học.

Arnold đã có lần trả lời trong một bài phỏng vấn [3]: "*Người học không phải là chiếc túi phải lấp đầy, mà là ngọn đuốc cần được thắp sáng*".

Tài liệu tham khảo

[1] Vladimir I. Arnold (ed.). Arnold's Problems. *Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York & PHASIS*, Mát–xcơ–va, 2005, XV.

[2] S. H. Lui, An interview with Vladimir Arnold, *Notices Amer. Math. Soc.* 44 (4) (1997), 432 – 438.

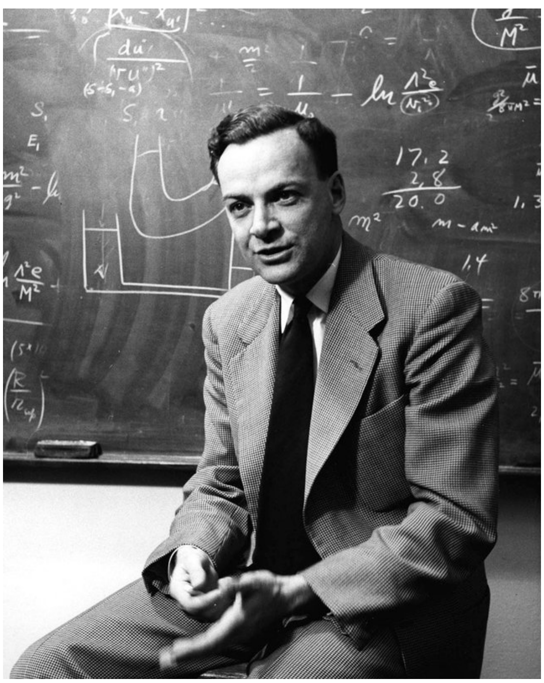
[3] S. Tabachnikov. Interview with V. I. Arnold. (*in Russian*) *Kvant* 1990, No 7, 2 – 7, 15.

[4] S. Tabachnikov. Arnold's Problems. *The Mathematical Intelligencer*. 2007

ĐAM MÊ NHƯ FAYNMAN

NGUYỄN VĂN LIỄN[1]

Richard Feynman (1918 – 1988, Mỹ) nổi tiếng là người trung thực không khoan nhượng và đam mê đến tận cùng. Về tính trung thực, người ta hay nhắc đến vụ ông trình diễn trực tiếp trên TV một "thí nghiệm nhỏ", bỏ vòng cao su vào cốc nước đá, minh chứng rằng cao su mất tính đàn hồi ở nhiệt độ thấp, qua đó chỉ ra nguyên nhân dẫn đến thảm họa tàu vũ trụ con thoi "Challenger", vạch trần chiến dịch tung hỏa mù của NASA về nguyên nhân của thảm họa này. Để công bố với người dân Mỹ sự thật ấy, Feynman đã phải vượt qua sức ép khủng khiếp từ các cơ quan công quyền Mỹ, trong đó có CIA và NASA.



Richard Feynman (ảnh từ bộ sưu tập của Học viện Công nghệ California, CalTech).

Lắm đam mê. Đam mê Vật lý, Feynman nhận giải Nobel Vật lý năm 1965. Đam mê chơi trống, vở ba–lê do ông đệm trống nhận giải nhất trong cuộc thi ba–lê toàn nước Mỹ và giải nhì trong cuộc thi quốc tế tại Paris. Đam mê vẽ, ông đã có triển lãm tranh riêng. Không rõ, ông biết những ngôn ngữ nào, chỉ biết, thăm Brazil ông dạy bằng tiếng Bồ, thăm Nhật ông giao du bằng tiếng Nhật. Rồi có lần bạn bè định "cho ông một vố", họ nhờ một cô Hoa kiều đón tiếp ông bằng tiếng Trung, Feynman đáp lại và cô ấy kêu Trời, vì ông nói tiếng Quảng Đông, còn cô chỉ nói tiếng Băc Kinh. Rất nhiều "Đam mê" kiểu như vậy được kể trong cuốn "Feynman, chuyện như thật đùa" (NXB Trẻ) và hầu như tất cả đều có kết cục mỹ mãn, kiểu như giải Nobel. Có thể Bạn nghĩ, chắc ông này "con nhà nòi", học "trường quốc tế" từ nhỏ! Xin thưa, bố của Feynman là người bán rong quần áo, còn mẹ thì nội trợ.

Feynman chơi trống bên con trai (ảnh từ Internet).

Ông chơi trống (bongo) cực giỏi, nhưng chưa bao giờ học nhạc lý. Ông vốn vẽ rất kém, tự nhận chẳng thể vẽ nổi cái gì ngoại trừ cái kim tự tháp chỉ gồm mấy đường thẳng. Để học vẽ, Feynman "đổi công" với một họa sĩ: ông dạy Vật lý cho họa sĩ còn họa sĩ dạy vẽ cho ông. Hãy tưởng tượng một giáo sư

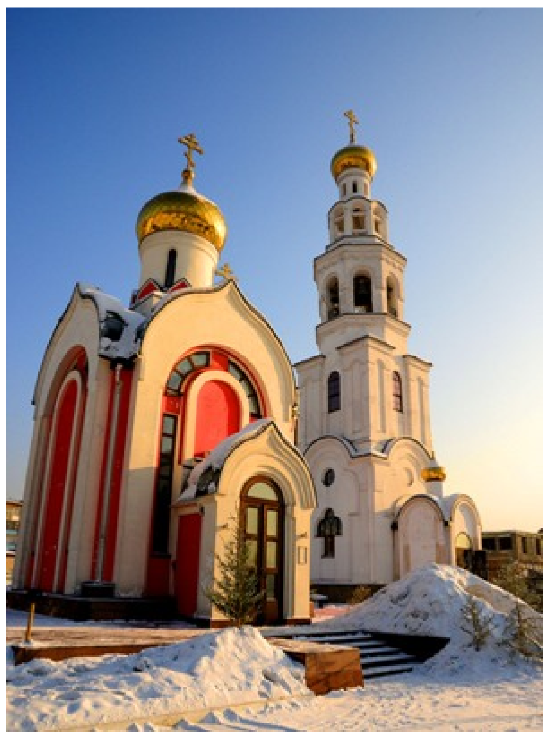
[1] *Viện Vật lý.*

nổi tiếng thế giới ngồi trong lớp vẽ cùng các cháu 8 – 9 tuổi học cách gọt bút chì. Đam mê như thế chỉ có ở Feynman. Và, với ông Đam mê chính là nguồn cội của Thành công, chứ chẳng phải "con nhà nòi" hay "Trường quốc tế" nào cả. Tiền bạc và chứng chỉ đầy người, mà không đam mê gì, thì làm sao có thành quả!

Feyman vẽ Hans Bethe (giải Nobel Vật lý 1967).

Duy có đam mê cuối cùng, Feynman đã không kịp nhìn thấy những gì mình muốn, trước khi về cõi vĩnh hằng. Đó là "Cuộc phiêu lưu cuối cùng của Feynman"[2]. Cuộc phiêu lưu khởi đầu bằng một con tem có xuất xứ từ một nơi gọi là Tannu Tuva, mà Feynman có được từ khi còn nhỏ. Cái tên "Tuva" xa lạ nằm yên trong đầu Feynman, cho đến một ngày hè 1977 nó trở thành mục tiêu cho "cuộc phiêu lưu" kéo dài hơn 10 năm cuối của cuộc đời Ông. Tôi cược là nhiều bạn chưa biết Tuva là địa danh nào và ở đâu. Để đỡ tra cứu, xin bật mí ngay: đó là tên một quốc gia nhỏ nằm giáp Tây Bắc của Mông Cổ, vốn độc lập, nhưng đã sáp nhập vào Liên Xô cũ (và Nga ngày nay). Thủ đô của Tuva là Kyzyl. Tuva có gì đặc biệt mà khiến Feynman mê mệt đến vậy?

Bạn có biết, đâu là trọng tâm của lục địa châu Á (lục địa thôi chứ không tính các đảo)? Lấy tấm bìa cứng phẳng, vẽ lên đó bản đồ Á lục, cắt theo đường biên để được miếng bìa hình lục địa châu Á. Dùng một chiếc bút đầu nhọn chống phía dưới tấm bìa, di di đầu bút, để tìm vị trí mà tấm bìa nằm cân bằng trên chiếc bút thẳng đứng. Vị trí đó rơi vào Kyzyl, trọng tâm của Á lục. Tất nhiên, các nhà khoa học xác định điểm này bằng các phương pháp chính xác hơn, và ngày nay ở Kyzyl có tấm bia lớn khẳng định vị trí đặc biệt của mình. Nhưng, chỉ chừng ấy, thì không đủ để Feynman mất tới cả chục năm tìm cách tới thăm Tuva.



Nhà thờ Phục sinh ở Kyzyl, Tuva (ảnh từ Internet).

Cái chính là ở quốc gia tí xíu bao bọc bởi những dãy núi cao ấy, thời gian gần như ngừng trôi: tất cả vẫn nguyên sơ như 500

[2] *Xem thêm: Cuộc phiêu lưu cuối cùng của Feynman, in lần 2, NXB Trẻ* 2023.

hay 1000 năm trước. Thảo nguyên hoang dại. Những đàn tuần lộc hay bò Tây tạng cũng dường như hoang dại. Cuộc sống du mục không thể tự nhiên hơn. Một nền văn hóa xa xưa và kỳ thú với kiểu hát hai giọng chỉ có ở Tuva, với thứ văn tự không thể tìm thấy trong bất cứ tự điển nào, với các tập tục rất lạ điều hành bởi các tù trưởng uy nghi và bí ẩn vv...Tiếc là, ít người biết Tuva, chứ không, người ta đã gọi quốc gia này là "Thảo nguyên Xanh" cuối cùng của hành tinh Trái Đất (như Công–gô là Hành tinh Xanh cuối cùng!). Đam mê Tuva, Feynman tìm đọc mọi tài liệu về Tuva, tìm hiểu văn tự Tuva, học cách hát của dân du mục Tuva, ăn mặc và trang trí như Tù trưởng Tuva...Và, nhất là, ông tìm mọi cách để có thể đến thăm Tuva.

Đó là thời "Chiến tranh lạnh", lại nghe nói, gần Tuva có một cơ sở nghiên cứu bom nguyên tử, nên nơi đây là "vùng cấm" với khách du lịch, nhất là khách nước ngoài. Thực ra, Viện Hàn lâm Khoa học Liên xô sẵn sàng mời Feynman sang Matx–cơ–va đọc bài giảng rồi đi "tham quan Kyzyl" theo kiểu mặc com–lê ở hotel có người bảo vệ vv...Nhưng, Feynman không thích như vậy, mà muốn tự mình mang ba lô đến thảo nguyên, ngủ lều, uống sữa tuần lộc và hát hai giọng cùng dân bản xứ. Ấy thế cho nên Ông mất cả chục năm tìm kiếm một giấy mời như mình muốn. Và, đầu tháng Ba 1988, một giấy mời như thế đã gửi đến địa chỉ của Feynman, chỉ tiếc là hai tuần trước đó, vào ngày 15 tháng Hai, Ông đã ra đi mãi mãi, nên chỉ có thể trải nghiệm "Cuộc phiêu lưu cuối cùng" của mình trong tâm trí và trái tim của những người ở lại. Không rõ, ở Thế giới bên kia Feynman đang đam mê cái gì?

CÙNG CHƠI VỚI CÁC HÌNH ĐỐI XỨNG (Phần III)

NGUYỄN THỤY VIỆT ANH[1]

Chuồn chuồn tre là sản phẩm độc đáo được các nghệ nhân làng Thạch Xá tạo nên, là món đồ chơi tuổi thơ rất đối thân thuộc đối với mỗi người dân trong làng. Lịch sử làng chuồn chuồn tre Thạch Xá với nhiều năm trong nghề đã biến mảnh đất này thành một trong những làng nghề nổi tiếng ở Hà Nội được nhiều du khách biết đến.

Chuồn chuồn có cánh thì bay
Có thằng cu Tí thò tay bắt chuồn

(Đồng dao, thơ ca dân gian)

Ảnh : Internet.

Ngày hôm nay chúng ta sẽ cùng nhau thử sức làm chuồn chuồn tre nhé! Để đơn giản hơn thì chúng ta sẽ thay thế vật liệu để làm chuồn chuồn tre là từ những cây tre thành que kem hoặc giấy.

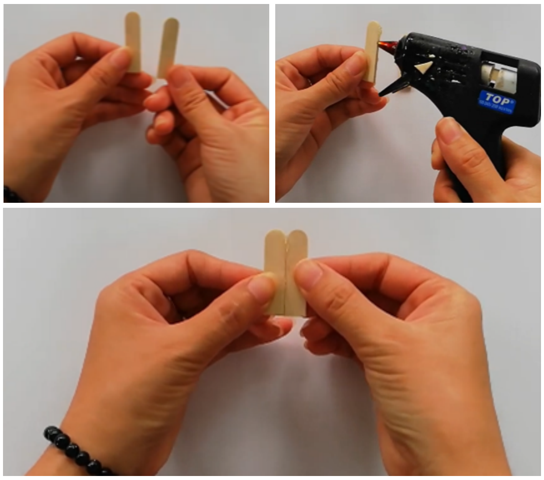
Cách 1: Chuồn chuồn que kem thăng bằng

Chuẩn bị nguyên liệu:

– Các que kem.
– Keo, súng bắn keo.
– Đũa dùng một lần.
– Thước thẳng.
– Dao rọc giấy.
– Bút chì.

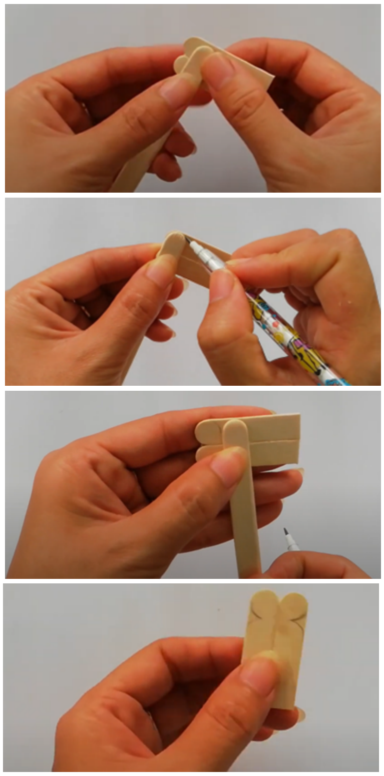
Cách làm chuồn chuồn que kem thăng bằng:

Bước 1: Sử dụng súng bắn keo dính hai que kem dài 4 cm lại với nhau.

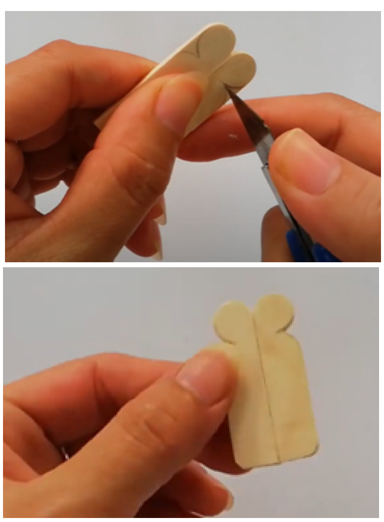


[1] *Trường Liên cấp Hội nhập Quốc tế iSchool Quảng Trị.*

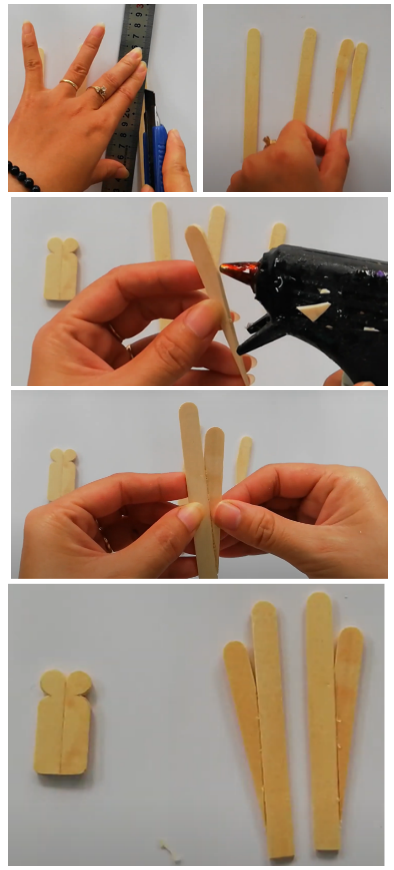
Bước 2: Sử dụng đầu que kem và bút chì để tạo hình phần đầu cho con chuồn chuồn.



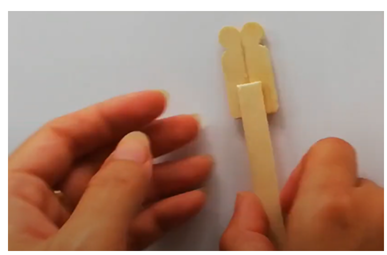
Bước 3: Sử dụng dao rọc giấy cắt đi phần khuyết.



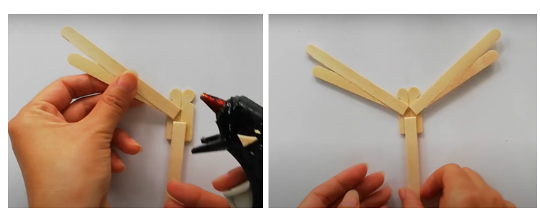
Bước 4: Lấy que kem nguyên vẹn rồi cắt chéo đi một nửa (như hình minh họa), sau đó dùng súng bắn keo dán vào que kem dài 10cm để làm cánh chuồn chuồn. (Lưu ý là chuồn chuồn có cánh dài, cánh ngắn).



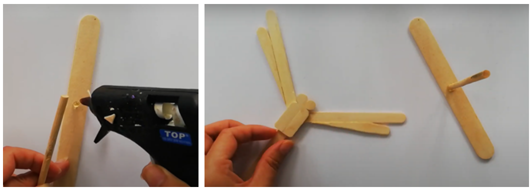
Bước 5: Sử dụng súng bắn keo để dán que kem dài 10 cm vào phần đầu của con chuồn chuồn.



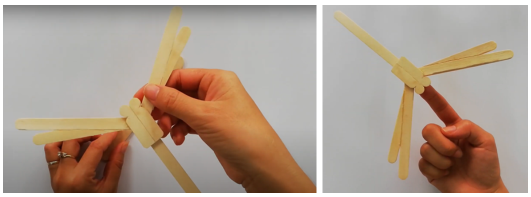
Bước 6: Tiếp tục sử dụng súng bắn keo dán hai cánh chuồn chuồn vào thân.



Bước 7: Sử dụng súng bắn keo để dán que tre tròn (hoặc đũa dùng một lần) vào chính giữa que kem nguyên vẹn để làm giá đỡ chuồn chuồn.



Cuối cùng, các em chỉ cần đặt chuồn chuồn lên giá đỡ hoặc lên ngón tay của mình là chuồn chuồn có thể tự thăng bằng được rồi.



Cách 2: Chuồn chuồn giấy thăng bằng

Chuẩn bị nguyên liệu:

– Giấy bìa màu.

– Nắp nhựa (tái sử dụng từ chai nhựa bỏ đi).

– Đũa dùng một lần.

– Bút chì.

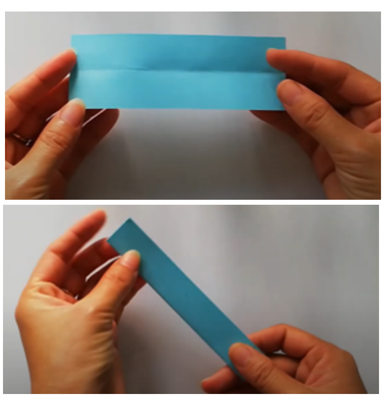
– Kéo.

– Hồ dán.

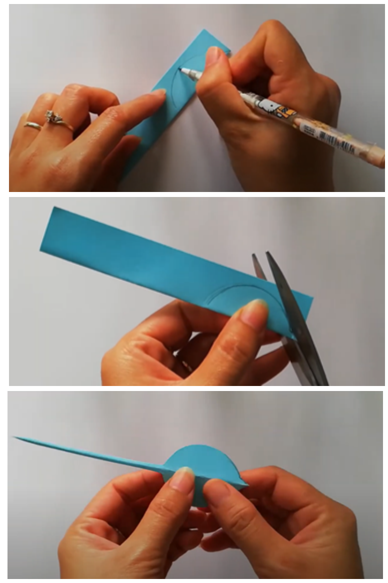
– Keo, súng bắn keo.

Cách làm chuồn chuồn giấy thăng bằng:

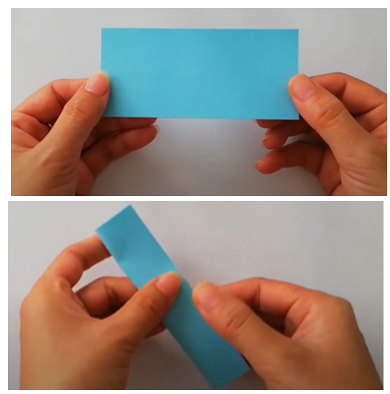
Bước 1: Gấp đôi giấy bìa màu hình chữ nhật (có chiều dài 13 cm và chiều rộng 4 cm).



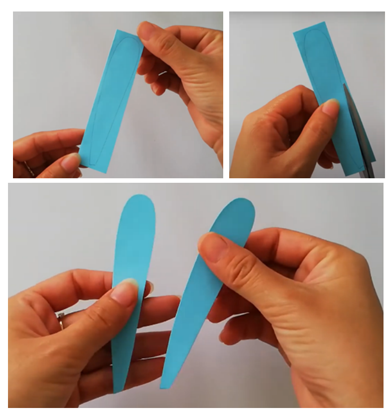
Bước 2: Sử dụng bút chì vẽ hình dạng con chuồn chuồn lên tờ giấy màu, sau đó dùng kéo cắt ra.



Bước 3: Gấp đôi giấy bìa màu hình chữ nhật (có chiều dài 11 cm và chiều rộng 5 cm).



Bước 4: Sử dụng bút chì vẽ hình dạng cánh chuồn chuồn lên tờ giấy màu, sau đó dùng kéo cắt ra.

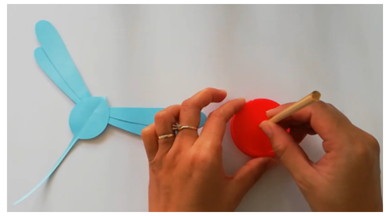


Bước 5: Làm tương tự với giấy bìa màu hình chữ nhật (có chiều dài 9 cm và chiều rộng

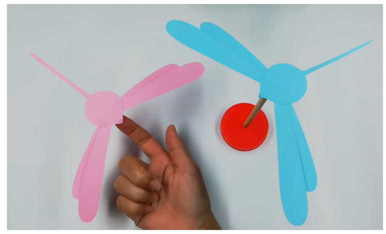
4,5 cm) để tạo ra hai cánh nhỏ hơn cho chuồn chuồn.

Bước 6: Sử dụng hồ dán để dán cánh chuồn chuồn vào thân chuồn chuồn.

Bước 7: Sử dụng súng bắn keo để dán que tre tròn (hoặc đũa dùng một lần) vào chính giữa nắp nhựa để làm giá đỡ chuồn chuồn.



Cuối cùng, đặt chuồn chuồn giấy lên giá đỡ hoặc lên ngón tay của mình là chuồn chuồn có thể tự thăng bằng được rồi.



Tài liệu tham khảo

https://www.youtube.com/watch?v=xuietoqtOlw

https://www.youtube.com/watch?v=uRAT1t6w2lU

CUỘC ĐIỀU TRA VỚI NHỮNG CHỮ SỐ

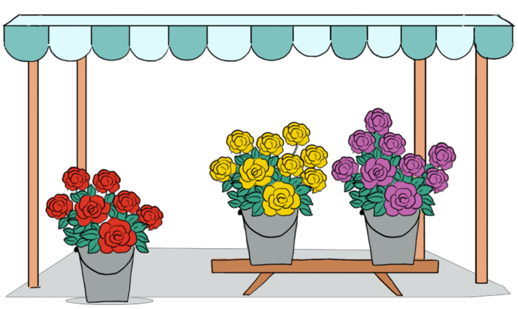
GIA DƯƠNG

Thám tử Xuân Phong cần tổ chức một cuộc điều tra tất cả các nhân viên của một công ty vận tải để nắm bắt được tình hình an ninh trật tự của thành phố trong mùa du lịch. Xuân Phong được biết rằng các nhân viên này chia ra thành 3 loại: những người trung thực, những người nói dối và những người ranh mãnh. Tất cả các nhân viên, do phục vụ gần nhau trong cùng một công ty, nên đều biết nhau và biết ai là thuộc loại người nào. Xuân Phong nhờ cô thư ký xinh đẹp in sẵn những tờ phiếu điều tra để phát cho họ với câu hỏi duy nhất: "Bạn hãy cho biết trong số các nhân viên của công ty có bao nhiêu người trung thực?". Những người trung thực đã trả lời chính xác, những người nói dối tất nhiên trả lời hoàn toàn sai, còn những người ranh mãnh thì tuỳ ý (có người trả lời đúng và cũng có người trả lời sai). Tất cả các phiếu sau khi thu về đều ghi một số có hai chữ số. Sau khi cô thư ký tổng hợp kết quả, Xuân Phong nhận thấy chữ số 3 đã được viết ra 33 lần, chữ số 5 được viết ra 66 lần, còn chữ số 7 được viết ra 77 lần. Ngoài ra không có chữ số nào khác được ghi trên các phiếu điều tra được thu về. Các em hãy thử đoán xem có tất cả bao nhiêu nhân viên trung thực làm việc trong công ty đó?

CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

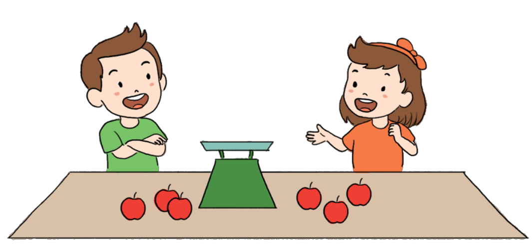
1. Tại thành phố Hoa Hướng Dương, trong số các cậu bé tí hon có 5 cậu ngày nào cũng ăn bánh rán ngọt, có 7 cậu bé cứ cách một ngày lại ăn bánh rán ngọt, còn tất cả các cậu bé tí hon còn lại không bao giờ ăn bánh rán ngọt. Ngày hôm qua có 9 cậu bé tí hon đã ăn bánh rán ngọt. Hỏi trong ngày hôm nay sẽ có bao nhiêu cậu bé tí hon ăn bánh rán ngọt?

2. Một cửa hàng bán hoa tươi có ba loại hoa hồng: hồng tím, hồng vàng và hồng đỏ. Số hoa hồng tím bằng một nửa tổng số hoa hồng vàng và hồng đỏ. Số hoa hồng đỏ lại bằng một phần ba tổng số hoa hồng vàng và số hoa hồng tím. Biết rằng số hoa hồng vàng là 45 bông. Hỏi cửa hàng có bao nhiêu hoa hồng tím và hoa hồng đỏ?



3. Thỏ Hồng đi đón 3 cậu bạn của mình là Ngựa Đốm, Ngựa Bạch và Gấu Nâu lặn lội đến thăm nhà mình. Vừa ra tới bìa rừng, Thỏ Hồng đã thấy lờ mờ ba bạn đứng hàng ngang ở xa xa ngoài bãi cỏ, nhưng vì sương mù dày đặc, Thỏ Hồng không thể nhận ra ai với ai. Thỏ Hồng bèn kêu các bạn tự giới thiệu để biết được từng vị khách. Cậu bạn đứng ở ngoài cùng bên trái từ vị trí quan sát của Thỏ Hồng nói rằng: “Có Gấu Nâu đứng cạnh tôi đấy”. Cậu bạn đứng ở ngoài cùng bên tay phải, lại tuyên bố rằng: “Đó là Ngựa Bạch vừa nói với cậu đấy”. Cuối cùng, cậu bạn đứng ở giữa, thông báo rằng: “Bên tay trái của tôi là Ngựa Đốm đấy”. Các em hãy tìm ra bạn nào đứng ở đâu trong số 3 người bạn của Thỏ Hồng, biết rằng Ngựa Đốm thì chuyên nói dối, Ngựa Bạch thì thỉnh thoảng nói dối, còn Gấu Nâu thì không bao giờ nói dối Thỏ Hồng.

4. Có 7 quả táo, khối lượng mỗi quả có thể khác nhau để ở trên bàn. Bạn Thanh nhận thấy rằng có thể đặt 3 quả trên một đĩa cân và 4 quả còn lại trên đĩa cân bên kia sao cho hai bên cân thăng bằng. Bạn Thịnh lại thấy rằng có thể đặt 2 quả táo trên một đĩa cân, và 5 quả còn lại trên đĩa cân bên kia và hai bên cân cũng thăng bằng. Em hãy chỉ ra rằng có thể đặt trên một đĩa cân bên này 1 quả táo và đặt trên đĩa cân bên kia 3 quả táo trong số 7 quả đã cho, sao cho hai bên cân cũng vẫn thăng bằng.

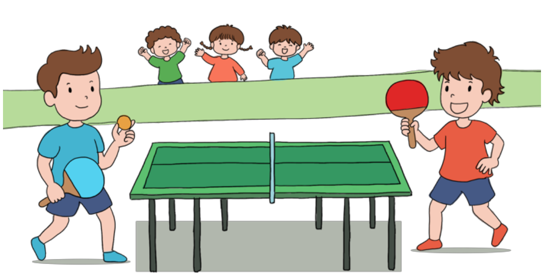


5. Có 20 chiếc túi nilon, mỗi túi đựng 26 quả mận. Biết rằng tổng khối lượng của mỗi túi không vượt quá 1 kg. Em hãy chỉ ra rằng có thể xếp số mận trên vào 26 chiếc túi nilon, mỗi túi có đúng 20 quả mận, sao cho tổng khối lượng của mỗi túi nhỏ hơn 1 kg.

6. Có 100 số $1, 2, 3, \ldots, 100$ được viết ra thành hàng ngang từ trái qua phải theo thứ tự tăng dần. Bạn Long và bạn Lâm chơi một trò chơi như sau. Hai bạn lần lượt đến lượt chơi của mình sẽ đặt duy nhất một trong các dấu $+$, $-$ hoặc $\times$ vào vị trí bất kỳ xen kẽ giữa hai số trong 100 số nói trên. Bạn đi lượt cuối cùng sẽ thắng nếu số nhận được bằng cách thực hiện phép tính bởi 100 số và các phép tính đã điền giữa chúng là một số lẻ. Em hãy chỉ ra rằng nếu Long là người đi đầu tiên (và cũng sẽ là người đi cuối cùng) thì Long luôn có cách chơi để thắng.

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 5 năm 2023)

1. Trong một cuộc thi thể thao, ban tổ chức chọn ra một số bạn học sinh ở lớp $5A$ và một số bạn ở lớp $5B$ thi đấu trực tiếp. Mỗi bạn ở lớp $5A$ được chọn ra sẽ thi đấu duy nhất một trận với một bạn ở lớp $5B$, và ngược lại, mỗi bạn ở lớp $5B$ được chọn ra chỉ đấu đúng một trận với một bạn ở lớp $5A$.



Biết rằng số học sinh lớp $5A$ được chọn thi đấu chiếm $2/3$ tổng số học sinh toàn lớp $5A$, còn số học sinh lớp $5B$ được chọn thi đấu chiếm $3/5$ tổng số học sinh toàn lớp $5B$. Tổng số học sinh của cả hai lớp là 57 bạn. Hỏi có bao nhiêu học sinh của hai lớp đã tham gia các trận thi đấu trực tiếp?

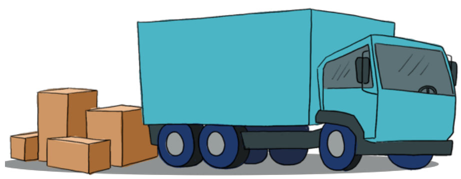
Lời giải. Gọi số trận thi đấu được tổ chức là n. Khi đó số học sinh của lớp $5A$ là $\frac{3}{2} \cdot n$, và số học sinh của lớp $5B$ là $\frac{5}{3} \cdot n$. Tổng số học sinh của hai lớp sẽ bằng

$$\frac{3}{2} \cdot n + \frac{5}{3} \cdot n = \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{3}\right) \cdot n = \frac{19}{6} n = 57.$$

Vì vậy $n = 18$.

Do mỗi trận đấu có hai học sinh tham gia, nên số học sinh của hai lớp đã tham gia các trận thi đấu trực tiếp là $18 \times 2 = 36$ (học sinh).

2. Công ty vận tải được thông báo ngắn gọn là có một số kiện hàng có tổng khối lượng là 10 tấn cần được vận chuyển, hơn nữa mỗi kiện hàng nặng không quá 1 tấn. Hỏi công ty cần điều động ít nhất bao nhiêu xe tải có trọng tải là 3 tấn mỗi xe để luôn chắc chắn chở được hết được số hàng hoá đó?



Lời giải. Ta sẽ dần dần chất các kiện hàng theo thứ tự tuỳ ý lên mỗi xe tải, theo dõi một cách cẩn thận và dừng lại vào ngay trước thời điểm khi xe bị "quá tải". Khi đó, trên mỗi xe đều có nhiều hơn 2 tấn hàng hoá. Vì vậy chỉ cần 5 xe tải là đủ luôn chở được hết số hàng để trong các kiện hàng đó.

Ta sẽ chỉ ra rằng nếu chỉ cử đi 4 xe chưa chắc đã đủ để chở đi được hết số kiện hàng. Ví dụ, có 13 kiện hàng, mỗi kiện nặng đúng $\frac{10}{13}$ tấn. Khi đó mỗi xe chỉ chở được tối đa 3 kiện hàng, vì 4 kiện hàng bất kỳ có tổng trọng lượng là $\frac{40}{13} > 3$ (tấn). Vì thế với 4 xe chỉ chở được tối đa 12 kiện hàng.

3. Sau khi được sạc đầy pin, điện thoại di động của bạn An dùng đúng 6 tiếng ở chế độ trò chuyện hoặc đúng 210 tiếng ở chế độ chờ. Khi bạn An lên tàu hoả để đi du lịch, pin của bạn được sạc đầy 100%, và trên tàu không có ổ cắm sạc nên khi xuống ga, pin của bạn cũng vừa hết sạch. Biết rằng An đã nói chuyện với bạn bè đúng một nửa thời gian khi ngồi trên tàu, còn nửa thời gian còn lại đặt điện thoại ở chế độ chờ. Hỏi thời gian An đi trên tàu hoả là bao nhiêu lâu?

Lời giải. **Cách 1**: Một tiếng An nói chuyện và một tiếng An để chế độ chờ sử dụng hết $\frac{1}{6} + \frac{1}{210} = \frac{6}{35}$ dung lượng sạc đầy của pin. Do thời gian An nói chuyện điện thoại và thời gian An để điện thoại ở chế độ chờ bằng nhau, nên An đã đi trên tàu với thời gian là

$$2 \cdot \frac{35}{6} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3} \text{ (giờ)},$$

tức là 11 tiếng 40 phút.

Cách 2: Nếu An trò chuyện trong 210×6 giờ và để chế độ chờ trong 210×6 giờ thì pin điện thoại đã phải xả hết dung lượng những $210 + 6 = 216$ lần. Nhưng pin chỉ xả hết có đúng một lần, nên suy ra An chỉ trò chuyện trong $210 \times 6 : 216 = \frac{35}{6}$ (giờ), và để điện thoại chờ trong từng đó thời gian. Vì vậy An đã ngồi $11\frac{2}{3}$ (giờ) trên tàu hoả.

4. Một nhóm học sinh đi bộ từ điểm hẹn tới bến xe buýt để kịp đón chuyến xe vào lúc 8 giờ. Cũng vào thời điểm này, từ điểm tham quan, một chiếc xe buýt cũng xuất phát để tới kịp bến xe đón nhóm học sinh đó. Tuy nhiên nhóm học sinh tới bến xe buýt khá sớm, vào lúc 6 giờ 10 phút, nên họ quyết định đi bộ tiếp tới điểm tham quan. Trên đường, các bạn đã gặp được xe buýt và lên xe đi tiếp. Cuối cùng cả nhóm đến được điểm tham quan sớm hơn 20 phút so với thời gian ấn định. Biết rằng vận tốc của xe buýt là 60 km/h và vận tốc đi bộ của các em học sinh luôn không đổi. Hãy tìm vận tốc đi bộ của nhóm học sinh trước khi gặp xe buýt.

Lời giải. Ký hiệu A là nhà ga, B là điểm tham quan, C là điểm trên đoạn thẳng AB mà xe buýt gặp các bạn học sinh.

Nhóm học sinh tiết kiệm được 20 phút và xe buýt cũng vậy. Đồng thời, xe buýt tiết kiệm được 2 lần quãng đường AC. Do đó xe buýt đi quãng đường AC hết 10 phút. Theo kế hoạch thời gian hẹn đón học sinh là 8h, thực tế là xe gặp nhóm học sinh vào lúc $7h50$.

Điều này suy ra rằng nhóm học sinh đã đi bộ từ A tới C mất thời gian là

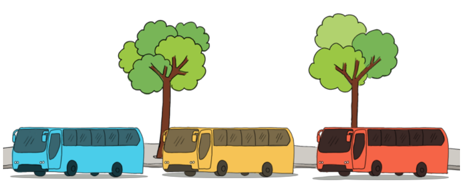
$$7h50 - 6h10 = 100 \text{ (phút)}.$$

Thời gian đi quáng đường AC của nhóm học sinh gấp thời gian đi của xe buýt số lần là

$$100 : 10 = 10 \text{ (lần)}.$$

Vậy vận tốc đi bộ của các em học sinh bằng $\frac{1}{10}$ vận tốc của xe buýt, tức là 6 km/h.

5. Có 100 chiếc xe ô tô đỗ liền nhau thành một hàng dọc bên lề đường, trong đó có 70 chiếc xe hiệu Mercedes, còn lại là những xe nhãn hiệu khác. Trong các xe nhãn hiệu Mercedes có 30 chiếc màu đỏ, 20 chiếc màu vàng và 20 chiếc màu hồng. Biết rằng không có hai xe Mercedes nào khác màu lại đỗ cạnh nhau. Em hãy chỉ ra rằng luôn tìm ra 3 chiếc xe Mercedes cùng màu đỗ liên tiếp nhau.



Lời giải. Ta có 70 chiếc Mercedes và 30 xe nhãn hiệu "khác". Theo điều kiện, mỗi xe Mercedes chỉ có thể đỗ cạnh một xe Mercedes có cùng màu với nó, hoặc cạnh một xe "khác". Càng nhiều xe Mercedes cùng màu đỗ thành cặp cạnh nhau, càng cần ít các xe "khác".

Giả sử không có 3 chiếc Mercedes cùng màu nào xếp cạnh nhau. Do tổng cộng số các cặp cùng màu của xe loại Mercedes là 35, vậy phải có ít nhất 34 xe "khác" xếp "xung quanh" chúng. Theo đề bài, chỉ có 30 các xe "khác". Đây là điều mâu thuẫn.

Suy ra phải có 3 chiếc xe Mercedes cùng màu đỗ cạnh nhau.

6. Một lớp học có 20 em học sinh. Cô giáo chủ nhiệm của lớp tổ chức một số buổi tham quan vào mỗi ngày cuối tuần trong suốt năm học, mỗi buổi tham quan có ít nhất 4 em học sinh tham gia. Em hãy chứng minh rằng có một buổi tham quan mà mỗi em học sinh tham gia buổi đó đều tham gia ít nhất $1/17$ tổng số tất cả các buổi tham quan của cả năm học.

Lời giải. Gọi tổng số buổi tham quan là n, và cho mỗi em học sinh đều giữ lại vé cuả mỗi buổi thăm quan mà mình đã tham gia. Ta gọi một em học sinh là "đáng thương" nếu học sinh đó tham gia ít hơn $\frac{n}{17}$ buổi thăm quan. Chúng ta lấy bút đỏ đánh dấu tất cả các vé đã mua của tất cả các em học sinh "đáng thương".

Giả sử trong mỗi buổi thăm quan đều có một vé bị đánh dấu đỏ. Khi đó có không ít hơn n vé bị đánh dấu đỏ, và đóng góp vé của mỗi học sinh "đáng thương" phải ít hơn $\frac{n}{17}$ vé. Suy ra số học sinh "đáng thương" nhiều hơn 17 em.

Ta chọn ra đúng 17 em "đáng thương". Các em được chọn ra này có ít hơn $17 \cdot \frac{n}{17} = n$ (vé), còn mỗi em trong số 3 học sinh còn lại chỉ có tối đa n vé, suy ra tổng số vé ít hơn $4n$. Mặt khác, trong mỗi buổi thăm quan đã bán ra ít nhất 4 vé cho các em học sinh. Đây là điều mâu thuẫn.

Vậy có ít nhất một buổi thăm quan mà không có vé nào bị đánh dấu đỏ, đó là điều phải chứng minh.

PATHS ON GRIDS

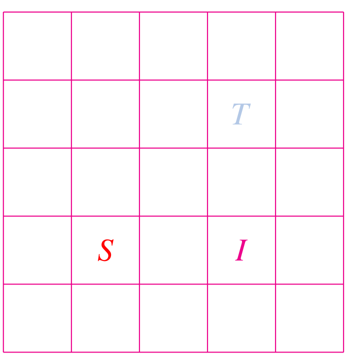
NGHIA DOAN[1]

In this article, some problems of paths on boards are discussed. They highlight the relations of cells in same column or row.

Example (Who is the taller one?)

One hundred students are positioned in a 10×10 grid, each of the rows and columns contains exactly 10 students. From each of the 10 columns the *shortest* student is selected, and the *tallest* of these 10 students is tagged as T. Next the *tallest* student from each row is selected, and from these 10 students the *shortest* is tagged as S. Which of the two tagged students is taller if they are two different people?

Solution. Suppose first that S and T are in the same column. Because T is among the shortests selected from each column, T is shortest in his / her own column. Therefore T is shorter than S, who is in the same column as T by assumption. Similarly, if S and T are in the same row, then S is the tallest in his / her own row and hence is taller than T.



Now suppose that S and T are in different rows and columns. Let I denote the person who is in the same row as S and also in the same column as T. By definition, T is shorter than I and S is taller than I. Therefore T is shorter than S.

In both cases, we see that S is taller than T.

Example (How many ways to form the name?)

Thanh filled a triangle of squares with the letters of her name, as shown below. She counted all the $5-$letter paths that form her name T–H–A–N–H, each starts from the T letter in the middle of the bottom row, then goes left, right, or up. An example is also shown in the diagram. What number did she get?

```
                H
              H N H
            H N A N H
          H N A H A N H
        H N A H T H A N H
```

Solution. Consider the *"half"* triangle shown in the diagram below. It is easy to see that in each path, there are two choices at each steps. One example is shown in the figure, when two As can be chosen after a choice of H.

```
        H
      H N
    H N A
  H N A H
H N A H T
```

Therefore there are $2^4 = 16$ paths for a half triangle. In total there are $2 \cdot 16 - 1 = 31$ choices, because the vertical path formed by all the squares in the T column is shared by both half triangles.

Thus, the number that Thanh got is 31.

[1] *Ottawa, Canada.*

Example (What would be the largest number?)

In each square of an $n \times n$ chess board ($n \geq 4$), Antoine writes a number according to the following rules:

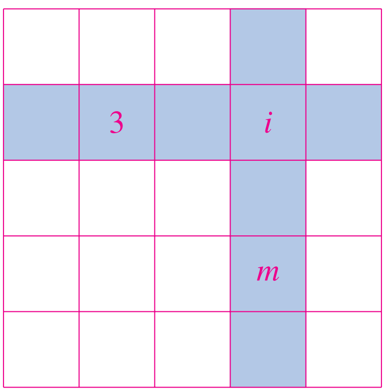
(1) The number in each square is one of $1, 2, \ldots, n^2$.

(2) The two numbers in two neighbouring squares differ less than 3.

(3) The number 3 is written in one of the squares.

What is the biggest number can Antoine write on the board?

Solution. Let m be the biggest number that can be written on the board.



In the figure above, there are at most $(n-1)$ squares on the row of 3, not including the square containing 3, from the number 3 to the intersection i with the column of m. Similarly there are at most $(n-1)$ squares on the column of m, not including the square containing m, from the intersection i with the row of 3 to the number m. Thus the difference between m and 3 cannot be more than $2 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-1) = 4(n-1)$.

Therefore, the biggest possible value of m is $3 + 4(n-1) = 4n - 1$.

Example (Colouring the paths)

In the 4×4 grid below, each cell at row i and column j contains the value equal to $i \times j$. A *path* in the grid is a sequence of squares, such that consecutive squares share an edge and no square occurs twice in the sequence. Furthermore, the *score* of a path is the sum of the values of all squares in the path.

Determine the highest possible score of a path that begins at the bottom left corner of the grid (where the number 1 stands) and ends at the top right corner (where the number 16 stands).

4	8	12	16
3	6	9	12
2	4	6	8
1	2	3	4

Solution. Let us colour the squares of the grid with a chessboard pattern of black and white, starting with black in the bottom left–hand corner, as show below on the left diagram. A path in the grid will alternate between black and white squares, beginning and ending on black. Therefore, no path contains all the 8 white squares.

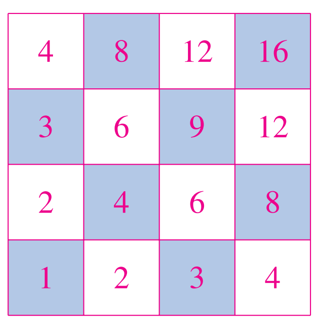


Figure 1. Alternate colouring.

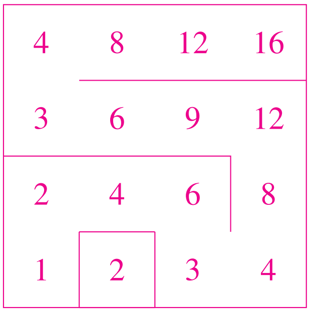


Figure 2. Path with maximal value.

The path from 1 to 16 with the highest possible score should contain all the squares except for the square containing 2 in the bottom row, as shown in the Figure 2. The sum of the values of all the squares in this path is

$$
\begin{aligned}
&(1+2+3+4)+(2+4+6+8)\\
&+(3+6+9+12)+(4+8+12+16)\\
=&(1+2+3+4)(1+2+3+4)=10^2=100,
\end{aligned}
$$

Thus, the highest possible score is $100-2=98$.

Vocabulary

path (n): đường đi

grid (n): lưới

board (n): bàn cờ

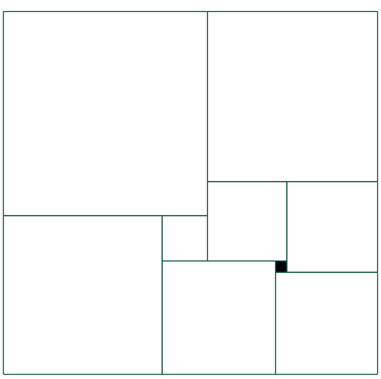
neighbouring squares (n): các ô vuông kề nhau

score (n): số điểm

- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P731–P740: trước ngày 15/10/2023.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P731. (Mức B) Ghép 9 hình vuông thành một hình chữ nhật như ở hình dưới đây. Biết rằng, hình vuông màu đen có cạnh bằng 1. Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.



Bùi Văn Biên, France (st)

P732. (Mức B) Xét 4 số thực (không nhất thiết đôi một khác nhau), mà mỗi số có trị tuyệt đối không vượt quá $\frac{1}{2}$, và tổng của ba số bất kỳ, trong bốn số đó, là một số nguyên. Tìm tất cả các giá trị có thể của tổng bốn số đó.

Nguyễn Đức Tấn, Tp. Hồ Chí Minh (st)

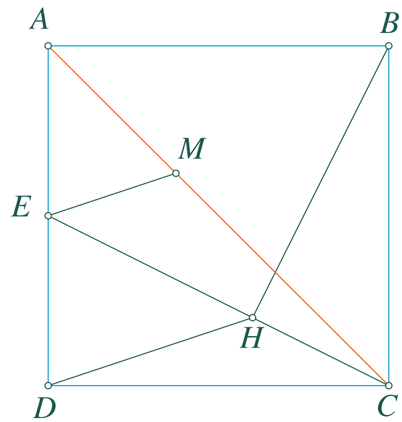
P733. (Mức B) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\left[\frac{b+c}{a}\right]+\left[\frac{c+a}{b}\right]+\left[\frac{a+b}{c}\right]$$

trong đó a,b,c là các số nguyên dương.

Nguyễn Việt Hùng, Hà Nội

P734. (Mức B) Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là trung điểm của AD; H là hình chiếu vuông góc của B trên CE. Trên đường chéo AC, lấy điểm M sao cho $AM = \frac{3}{8}AC$. Chứng minh rằng, ME song song với DH.



Huỳnh Thanh Hưng, Phú Yên

P735. (Mức B) Tìm tất cả các số nguyên dương n, để $n! + n$ là một luỹ thừa với số mũ nguyên dương của một số nguyên tố.

Hà Duy Hưng, Hà Nội

P736. (Mức B) Bạn An có 8 quả cân có tổng trọng lượng là 16 kg và trọng lượng mỗi quả, theo đơn vị kg, là một số nguyên dương không vượt quá 8. Chứng minh rằng, có thể chia 8 quả cân này thành hai nhóm sao cho các tổng trọng lượng của các quả cân cùng nhóm bằng nhau.

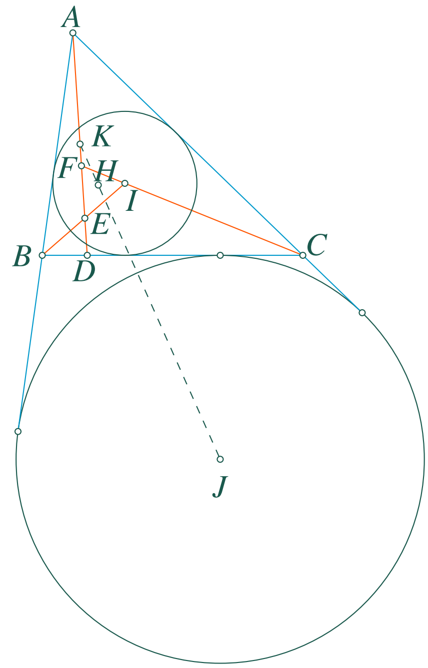
Tường Thanh, Nghệ An

P737. (Mức A) Xét các số thực dương a, b, c, thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = 2\left(a^3 + b^3 + c^3\right) - (a + b + c).$$

Kiều Đình Minh, Phú Thọ

P738. (Mức A) Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác đó. Trên cạnh BC, lấy điểm D tùy ý, sao cho ba điểm A, I, D không thẳng hàng. Đường thẳng AD cắt các đường thẳng IB, IC, tương ứng, tại E, F. Gọi H là trực tâm của tam giác IEF, và gọi K là trung điểm của AD. Chứng minh ba điểm K, H, J thẳng hàng.



Lưu Công Đông, Hà Nội

P739. (Mức A) Cho dãy số (a_n), xác định bởi

$$a_n = \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] + \left[\frac{n}{\sqrt{3}}\right], \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng, trong dãy (a_n) chứa vô hạn số chẵn và vô hạn số lẻ.

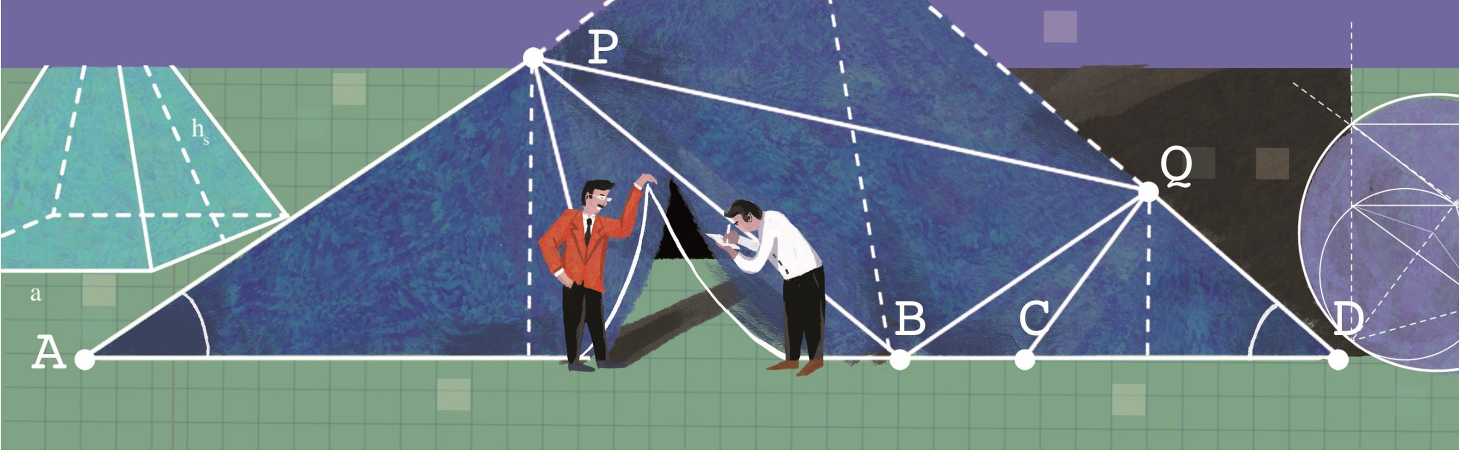
Nguyễn Tiến Lâm, Hà Nội

P740. (Mức A) Cho bảng ô vuông kích thước 2023×2023. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất, sao cho có thể đặt n viên bi vào các ô vuông con của bảng, đảm bảo các điều kiện sau được đồng thời thoả mãn:

$i/$ Ở mỗi ô vuông con chỉ có tối đa một viên bi;

$ii/$ Với mỗi ô vuông con không có bi, tổng số viên bi ở hàng và cột chứa ô đó không nhỏ hơn 2023.

Tô Trung Hiếu, Nghệ An (st)



THUẬT TOÁN DIJKSTRA VÀ ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

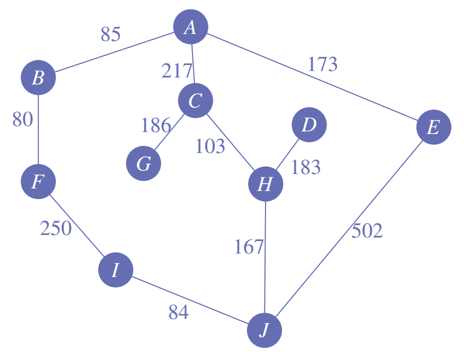
BÙI VĂN BIÊN[1]

Vài nét chung về thuật toán Dijkstra.

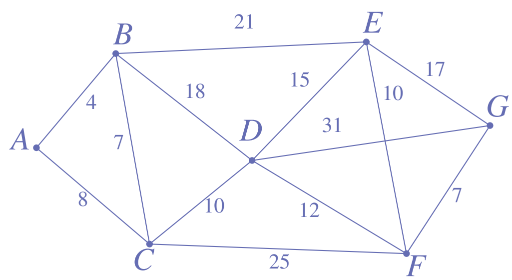
Lý thuyết đồ thị là một nhánh của Toán học và của Tin học nhằm mô hình hóa những vấn đề khác nhau thường gặp trong cuộc sống bởi những đồ thị. Một trong những vấn đề cổ điển của lý thuyết đồ thị là mô hình hóa mạng lưới đường bộ giữa các thành phố (làng, xã ...), đặc biệt hơn một trong những bài toán đặt ra là tối ưu hóa khoảng cách, thời gian di chuyển cũng như giá thành di chuyển từ thành phố này tới thành phố khác. Cụ thể hơn là tìm con đường tốt nhất về khía cạnh khoảng cách, thời gian, giá thành... để di chuyển từ thành phố này tới thành phố khác. Việc tìm con đường tốt nhất nhắc tới trong bài toán tổng quát nêu trên được đưa về việc tìm con đường ngắn nhất nối hai đỉnh tương ứng trên một đồ thị.

Để dễ hình dung, ta xét một mạng lưới đường bộ biểu diễn như hình dưới đây được trích dẫn từ Wikipedia.

Một mạng lưới như thế được gọi là một đồ thị. Ở đây những thành phố từ A tới J được gọi là các đỉnh của đồ thị. Các thành phố đó được nối với nhau bởi những con đường mà ta gọi là các cạnh của đồ thị. Mỗi cạnh được gán với một giá trị mà ta gọi là trọng số của cạnh. Trọng số trong ví dụ này biểu diễn khoảng cách được đo bằng đơn vị km giữa hai thành phố liên kết với nhau. Bài toán đặt ra là tìm đường đi ngắn nhất từ thành phố A tới thành phố J.



Ta xét một ví dụ khác về mạng lưới tàu hỏa của một thành phố như đồ thị dưới đây.



Ở đây các đỉnh từ A tới G của đồ thị đại diện cho các ga tàu. Mỗi cạnh của đồ thị thể hiện rằng có đường tàu nối giữa hai ga. Trọng số trên mỗi cạnh chính là thời gian di chuyển tính bằng phút từ ga này tới ga kia. Bài toán

[1] *Giáo viên Toán tại trường Don Bosco, thành phố Nice, Cộng Hòa Pháp.*

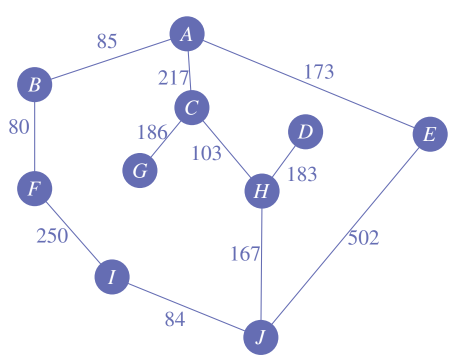
đặt ra là làm thế nào tìm đường đi nhanh nhất để di chuyển từ ga B tới ga G.

Để giải quyết những bài toán như trên, vào năm 1959, nhà Toán học đồng thời là nhà Khoa học máy tính người Hà Lan, E.W. Dijkstra (1930 – 2022) đã đề xuất một thuật toán cho phép tính toán đường đi ngắn nhất giữa một đỉnh cụ thể và tất cả các đỉnh khác trong một đồ thị mà ở đó tất cả các trọng đó đều dương. Thuật toán bắt đầu từ việc gán trọng số bằng 0 cho đỉnh xuất phát và bằng vô cùng cho các đỉnh còn lại. Quá trình xử lý của thuật toán bao gồm kiểm tra lần lượt các đỉnh, chọn ra đỉnh có khoảng cách nhỏ nhất tính từ đỉnh xuất phát và cập nhật trọng số cho các đỉnh lân cận của đỉnh được chọn. Tiếp tục quá trình xử lý trên cho tới khi đỉnh kết thúc được chọn hoặc cho tới khi không còn đỉnh để chọn thì dừng lại. Ta thu được đường đi ngắn nhất.

Thuật toán Dijkstra dưới dạng bảng.

Để hiểu hơn về thuật toán Dijkstra, trong mục này ta tập trung vào giải một trong hai bài toán nêu ở mục trước.

Bài toán: Tìm đường đi ngắn nhất nối hai thành phố là hai đỉnh A và J của đồ thị cho bởi hình bên. Trọng số trên các cạnh thể hiện khoảng cách tính bằng km từ thành phố này tới thành phố kia.



Thuật toán Dijkstra được tiến hành như sau.

Bước 1*: Khởi đầu.* Ta dựng một bảng gồm các cột là những đỉnh của đồ thị như hình dưới đây. Vì ta xuất phát từ đỉnh A nên ta gán trọng số là 0 và các đỉnh còn lại có trọng số là vô cùng. Ta ghi 0_A trong cột chứa đỉnh A và vô cùng trong những cột còn lại. Điều này có nghĩa là ở bước 1, xuất phát từ A ta có thể đi tới A mất 0 km và ta chưa đi tới những đỉnh khác.

Đỉnh được chọn	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Xuất phát	0_A	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Bước 2*: Chọn đỉnh đầu tiên và cập nhật trọng số cho các đỉnh còn lại.* Ta chọn giá trị nhỏ nhất ở dòng cuối cùng trong bảng vẽ ở bước 1. Ở đây giá trị nhỏ nhất là 0_A tương ứng với đường đi từ A tới chính nó với khoảng cách là 0 km.

- Đóng khung giá trị nhỏ nhất được chọn.
- Trong cột Đỉnh được chọn ta ghi đỉnh được chọn cũng như khoảng cách tương ứng. Ở đây ta ghi $A(0)$.
- Ta xóa tất cả các ô nằm ngay phía dưới ô được đóng khung. Điều này có nghĩa là xuất phát từ A ta đã tìm ra đường đi ngắn nhất tới A và không cần tìm thêm những đường đi khác nữa.

Dựa vào đồ thị ta thấy rằng, từ đỉnh A ta có thể di chuyển tới các đỉnh B, C và E với các khoảng cách tương ứng là 85 km, 217 km và 173 km. So với những trọng số vô cùng đã gán ở bước 1, ta thấy rằng những giá trị mới nhỏ hơn, nên ở dòng thứ 3 của bảng, tương ứng với các đỉnh B, C và E, ta ghi 85_A, 217_A và 173_A thay vì những giá trị vô cùng. Những đỉnh còn lại vẫn giữ nguyên giá trị được gán ở bước 1. Chỉ số A ở dưới những giá trị muốn nói rằng ta di chuyển từ đỉnh A.

Ta có bảng mới như sau:

Đỉnh được chọn	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Xuất phát	$\boxed{0_A}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$A(0)$		85_A	217_A	∞	173_A	∞	∞	∞	∞	∞

Bước 3*: Chọn đỉnh thứ hai và cập nhật trọng số cho các đỉnh còn lại.* Ta chọn trọng số nhỏ nhất ở dòng cuối cùng trong bảng vẽ ở bước 2. Ở đây giá trị nhỏ nhất là 85_A tương ứng với đường đi từ A tới đỉnh B với khoảng cách là 85 km.

- Đóng khung giá trị nhỏ nhất được chọn.
- Trong cột Đỉnh được chọn ta ghi đỉnh được chọn cũng như khoảng cách tương ứng. Ở đây đỉnh được chọn là đỉnh B nên ta ghi $B(85)$.

Ta xóa tất cả các ô nằm ngay phía dưới ô được đóng khung. Điều này có nghĩa là xuất phát từ A ta đã tìm ra đường đi ngắn nhất tới B và không cần tìm thêm những đường đi khác nữa.

Từ đỉnh B ta chỉ có thể di chuyển tới đỉnh F với khoảng cách tương ứng là 80 km. Ta tính được khoảng cách nhỏ nhất từ A tới F là $85 + 80 = 165$ km. So với trọng số đã gán trước đó cho đỉnh F ta chọn giá trị nhỏ hơn, nên ở dòng thứ 4 của bảng, đỉnh F được gán giá trị mới là 165_B, các đỉnh còn lại vẫn giữ nguyên giá trị. Ta hiểu 165_B ở đây chính là tổng khoảng cách nhỏ nhất từ A tới B và từ B tới F.

Ta được bảng mới như sau:

Đỉnh được chọn	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Xuất phát	$[0_A]$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$A(0)$		85_A	217_A	∞	173_A	∞	∞	∞	∞	∞
$B(85)$			217_A	∞	173_A	165_B	∞	∞	∞	∞

Bước 4: Chọn đỉnh thứ ba và cập nhật trọng số cho các đỉnh còn lại. Lặp lại bước 3 với dòng cuối cùng của bảng trên ta thu được đỉnh thứ ba cần chọn là đỉnh F vì có trọng số nhỏ nhất. Từ đỉnh F ta chỉ có thể di chuyển tới đỉnh I với khoảng cách tương ứng là 250 km. Ta tính được khoảng cách nhỏ nhất từ A tới I là $165 + 250 = 415$ km. So với trọng số đã gán trước đó cho đỉnh I ta chọn giá trị nhỏ hơn, nên ở dòng thứ 5 của bảng, đỉnh I được gán giá trị mới là 415_F, các đỉnh còn lại vẫn giữ nguyên giá trị.

Ta được bảng mới như sau:

Đỉnh được chọn	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Xuất phát	$[0_A]$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$A(0)$		85_A	217_A	∞	173_A	∞	∞	∞	∞	∞
$B(85)$			217_A	∞	173_A	165_B	∞	∞	∞	∞
$F(165)$			217_A	∞	173_A		∞	∞	415_F	∞

Bước 5 đến kết thúc: Lặp lại quá trình trên cho tới khi đỉnh kết thúc được chọn hoặc không còn đỉnh để chọn.

- *Dòng* 5: Chọn đỉnh E, đóng khung trọng số 173_A và xóa tất cả các ô nằm dưới ô vừa được đóng khung.
- *Dòng* 6: Ghi $E(173)$ trong cột *Đỉnh được chọn*. Cập nhật trọng số mới 675_E cho đỉnh J. Ở đây 675 km chính là tổng khoảng cách từ A tới E và từ E tới J. Các đỉnh còn lại vẫn giữ nguyên giá trị. Tiếp theo chọn đỉnh C, đóng khung trọng số 217_A và xóa tất cả các ô nằm dưới ô vừa được đóng khung.
- *Dòng* 7: Ghi $C(217)$ trong cột *Đỉnh được chọn*. Từ đỉnh C ta có thể di chuyển tới các đỉnh G và H với các khoảng cách tương ứng là 186 km và 103 km. Tổng khoảng cách ngắn nhất tương ứng tính từ A tới các đỉnh G và H lần lượt là $217 + 186 = 403$ km và $217 + 103 = 320$ km. Ta cập nhật trọng số mới 403_C cho đỉnh G và 320_C cho đỉnh H. Các đỉnh còn lại vẫn giữ nguyên. Tiếp theo chọn đỉnh H, đóng khung trọng số 320_C và xóa tất cả các ô nằm dưới ô vừa được đóng khung.
- *Dòng* 8: Ghi $H(320)$ trong cột Đỉnh được chọn. Từ đỉnh H ta có thể di chuyển tới các đỉnh D và J với các khoảng cách tương ứng là 183 km và 167 km. Tổng khoảng cách ngắn nhất tương ứng tính từ A tới các đỉnh D và J lần lượt là $320 + 183 = 503$ km và $320 + 167 = 487$ km. Bằng cách chọn giá trị nhỏ nhất, ta cập nhật trọng số mới 503_H cho đỉnh D và 487_H cho đỉnh J. Các đỉnh còn lại không thay đổi. Tiếp theo chọn đỉnh G, đóng khung trọng số 403_C và xóa tất cả các ô nằm dưới ô vừa được đóng khung.
- *Dòng* 9: Ghi $G(403)$ trong cột *Đỉnh được chọn*. Vì không có đường đi nào xuất phát từ G tới những đỉnh còn lại (không tính những đỉnh đã bị loại), nên các giá trị của các đỉnh còn lại không thay đổi. Tiếp theo chọn đỉnh I, đóng khung trọng số 415_F và xóa tất cả các ô nằm dưới ô vừa được đóng khung.
- *Dòng* 10: Ghi $I(415)$ trong cột *Đỉnh được chọn*. Trọng số của đỉnh D không thay đổi vì

không có đường đi từ I tới J. Trọng số của đỉnh J cũng vậy vì trọng số mới $415 + 84 = 499$ km lớn hơn trọng số ban đầu. Chọn đỉnh J, đóng khung trọng số 487_H và xóa tất cả các ô nằm dưới ô vừa được đóng khung.

• *Dòng* 11: Ghi $J(487)$ trong cột *Đỉnh được chọn*. Thuật toán kết thúc vì mục đích của ta là di chuyển từ A tới J. Ta được đường đi ngắn nhất có độ dài 487 km.

Ta thu được bảng cuối cùng như sau:

Đỉnh được chọn	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Xuất phát	$[0_A]$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$A(0)$		85_A	217_A	∞	173_A	∞	∞	∞	∞	∞
$B(85)$			217_A	∞	173_A	165_B	∞	∞	∞	∞
$F(165)$			217_A	∞	173_A		∞	∞	415_F	∞
$E(173)$			$[217_A]$	∞			∞	∞	415_F	675_E
$C(217)$				∞			403_C	$[320_C]$	415_F	675_E
$H(320)$				503_H			$[403_C]$		415_F	487_H
$G(403)$				503_H					$[415_F]$	487_H
$I(415)$				503_H						$[487_H]$
$J(487)$										

Bước 6*: Kết luận*. Dựa vào bảng trên ta kết luận rằng đường đi ngắn nhất xuất phát từ thành phố A tới thành phố J dài 487 km. Để dựng lại con đường đó dựa vào bảng trên ta chỉ cần đọc các đỉnh theo chiều ngược lại từ J tới A như sau:

• Xuất phát từ đỉnh J, ta đọc giá trị đóng khung là $[487_H]$, ta chọn chỉ số H là đỉnh tiếp theo.

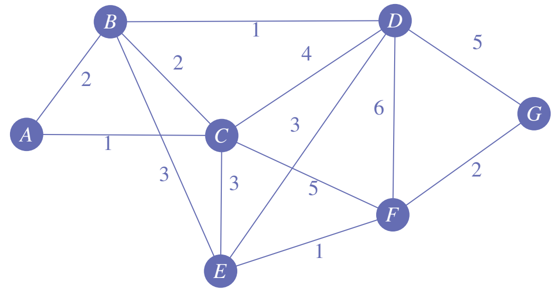
• Ở cột chứa đỉnh H, giá trị đóng khung là $[320_C]$, ta chọn C là đỉnh tiếp theo.

• Ở cột chứa đỉnh C, giá trị đóng khung là $[217_A]$, ta chọn A là đỉnh tiếp theo và cũng là đỉnh cuối cùng.

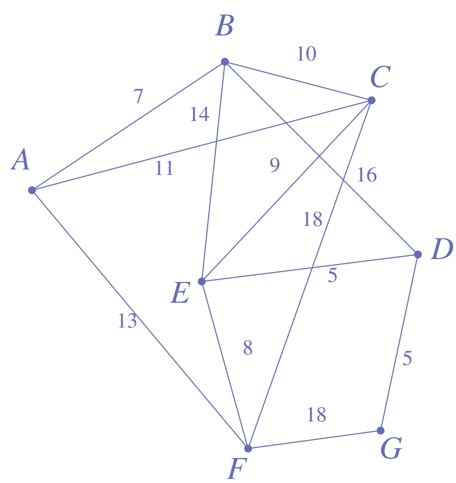
Đọc từ dưới lên trên, ta được đường đi ngắn nhất cần tìm là $A - C - H - J$ với khoảng cách ngắn nhất là 487 km.

Một số bài tập áp dụng.

Bài 1: Đồ thị bên biểu diễn bản đồ của một thành phố. Đỉnh A đại diện cho vị trí của các dịch vụ kỹ thuật, các đỉnh còn lại đại diện cho vị trí của các vườn hoa công cộng. Hai vườn hoa công cộng được nối với nhau bởi một cạnh trên đồ thị khi có đường đi từ vườn hoa này tới vườn hoa kia. Trọng số trên mỗi cạnh là số đèn đỏ nằm trên con đường đó. Bằng cách sử dụng thuật toán Dijkstra, hãy tìm một đường đi từ A tới G chứa ít đèn đỏ nhất.



Bài 2: Một thành phố lớn đưa vào sử dụng hệ thống cho thuê xe đạp tự phục vụ. Người thuê có thể lấy xe tại một điểm và trả xe tại một điểm bất kỳ trong hệ thống. Thành phố lắp đặt bảy điểm thuê xe biểu diễn như đồ thị hình bên. Mỗi cạnh của đồ thị thể hiện rằng có một đường đi từ trạm dừng này tới trạm dừng khác. Trọng số trên mỗi cạnh thể hiện thời gian di chuyển tính bằng phút. Bằng cách sử dụng thuật toán Dijkstra, hãy tìm một đường đi nhanh nhất từ A tới G.



Nguồn tham khảo.

[1] Algorithme de Dijkstra – Wikipédia (wikipedia.org)

[2]Graphes – Trajet minimal – Bac ES Polynésie française 2008 – Maths–cours.fr

[3] Graphes Algorithme de Dijkstra – Bac ES Métropole 2009 – Maths-cours.fr

CÁC BÀI TOÁN TRONG KỲ THI TOÁN HỌC LIÊN BANG ĐỨC 2023

NGUYỄN MẠNH TOÀN[1]

Kỳ thi toán học liên bang của Đức (Bundeswettbewerb Mathematik) được tổ chức lần đầu tiên vào năm 1970 tại Cộng hòa liên bang Đức (Tây Đức) dưới sự bảo trợ của Hiệp hội tài trợ cho khoa học Đức, Bộ Giáo dục và Khoa học liên bang cùng các doanh nghiệp. Sau khi nước Đức thống nhất, kỳ thi đã được mở rộng thành kỳ thi quốc gia.

BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Logo của Kỳ thi toán học liên bang Đức.

Kỳ thi toán học liên bang kéo dài khoảng 14 tháng với ba vòng thi, trong đó hai vòng thi đầu là bài tập về nhà và vòng thi cuối là thảo luận toán học. Ở mỗi vòng bài tập về nhà các thí sinh có nhiều tháng để suy nghĩ về các câu hỏi trước khi đưa ra lời giải. Ở vòng thi cuối, thí sinh sẽ có một giờ đồng hồ để thảo luận toán học với các nhà toán học. Mô hình này bị ảnh hưởng bởi một thực tế là những vấn đề của toán học thường cần nhiều tháng đến nhiều năm để có thể có một bước tiến chứ không phải vài giờ đồng hồ. Ngoài ra, để có thể thành công trong toán học, bên cạnh kỹ năng giải toán thì kỹ năng trao đổi và truyền đạt cũng thực sự cần thiết.

Nội dung của kỳ thi toán học liên bang phù hợp với học sinh từ lớp 9 đến lớp 13. Tuy vậy, tất cả học sinh ở Đức ở mọi lứa tuổi có sự đam mê và kiên trì đều được khuyến khích tham gia. Những thí sinh đạt giải ở vòng một sẽ được mời tham gia vòng hai. Những thí sinh giành giải nhất ở vòng hai sẽ được mời tham gia vòng thảo luận toán học. Phần thưởng cho những người chiến thắng ở vòng cuối sẽ là những suất học bổng có giá trị để họ tiếp tục theo đuổi con đường học tập và nghiên cứu sau này. Ngoài ra, những thí sinh đạt giải cao ngay ở vòng hai sẽ được mời tham dự kỳ thi tuyển chọn học sinh đại diện cho nước Đức tham gia kỳ thi Olympic toán học quốc tế.

Hiện tại kỳ thi toán học liên bang năm 2023 đang ở vòng thứ hai. Vòng thi này sẽ kết thúc vào ngày 01.09.2023. Pi mời các độc giả cùng thử sức với đề thi năm nay nhé!

Vòng 1.

Câu 1: Ba bạn Tick, Trick và Track có 20, 23 và 25 vé để đi vòng quay ngựa gỗ tại hội chợ hàng năm. Họ thống nhất rằng sẽ chỉ đi vòng quay nếu cả ba cùng đi và mỗi người nộp một vé của mình. Ngoài ra, trước mỗi lần đi, nếu muốn, họ có thể chia lại vé cho nhau bao nhiêu lần tùy thích theo quy tắc sau: Người

[1] *Khoa Toán Đại học Osnabrueck, CHLB Đức.*

nào có số vé chẵn thì có thể chia một nửa số vé của mình cho một trong hai người còn lại. Hỏi có thể xảy ra rằng sau một lần đi nào đó:

- Đúng một người hết vé.
- Đúng hai người hết vé.
- Cả ba cùng hết vé.

Câu 2: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên (x, y, z) thỏa mãn phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 3.$$

Câu 3: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AECF$ có chung đường chéo AC, trong đó E và F nằm bên trong $ABCD$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác AEB, BFC, CED và DFA giao nhau tại một điểm.

Câu 4: Cho số thực α với biểu diễn thập phân $\alpha = 0,a_1a_2a_3\ldots$ trong đó mỗi chữ số a_i là một số nguyên tố. Các chữ số sau dấu phẩy được sắp xếp dọc theo đường được tạo ra bởi các mũi tên như trong hình bên, được tưởng tượng là tiếp tục vô tận về bên phải và xuống dưới.

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r] & a_2 \arrow[d] & a_9 \arrow[r] & a_{10} \arrow[d] & a_{25} \arrow[r] & a_{26} \arrow[d] \\
a_4 \arrow[d] & a_3 \arrow[l] & a_8 \arrow[u] & a_{11} \arrow[d] & a_{24} \arrow[u] & a_{27} \arrow[d] \\
a_5 \arrow[r] & a_6 \arrow[r] & a_7 \arrow[u] & a_{12} \arrow[d] & a_{23} \arrow[u] & a_{28} \\
a_{16} \arrow[d] & a_{15} \arrow[l] & a_{14} \arrow[l] & a_{13} \arrow[l] & a_{22} \arrow[u] & \vdots \\
a_{17} \arrow[r] & a_{18} \arrow[r] & a_{19} \arrow[r] & a_{20} \arrow[r] & a_{21} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Với mỗi $m \geq 1$, biểu diễn thập phân của số thực z_m được cho bằng cách viết chữ số 0 trước dấu phẩy và sau dấu phẩy là các chữ số của dòng thứ m (tính từ trên xuống) theo thứ tự từ trái sang phải. Tương tự, với mọi $n \geq 1$, số thực s_n được thiết lập với các chữ số của cột thứ n (tính từ bên trái sang) theo thự tự từ trên xuống dưới. Chẳng hạn $z_3 = 0,a_5a_6a_7a_{12}a_{23}a_{28}\ldots$ và $s_2 = 0,a_2a_3a_6a_{15}a_{18}a_{35}\ldots$. Chứng minh rằng:

(a) Nếu α là số hữu tỷ, thì tất cả các số z_m và s_n đều hữu tỷ.

(b) Điều ngược lại của khẳng định (a) là sai.

Vòng 2.

Câu 1: Tìm ước chung lớn nhất của tất cả các số có dạng $p^6 - 7p^2 + 6$ với p chạy trên tập tất cả các số nguyên tố và $p \geq 11$.

Câu 2: Trên một hòn đảo địa hình đồi núi có 2023 điểm quan sát. Từ mỗi điểm quan sát có thể nhìn thấy ít nhất 42 điểm quan sát khác. Với hai điểm quan sát bất kỳ X và Y, luôn tồn tại một số nguyên dương n và các điểm quan sát $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ sao cho $A_1 = X$, $A_{n+1} = Y$ và mỗi cặp điểm liền kề A_i với A_{i+1} có thể quan sát được lẫn nhau với $i = 1, 2, \ldots, n$. Số n nhỏ nhất như vậy được gọi là khoảng cách quan sát (Sichtabstand).

Xác định khoảng cách quan sát lớn nhất có thể có giữa hai cặp điểm quan sát thỏa mãn những điều kiện ở trên.

Câu 3: Cho tam giác ABC với tâm đường tròn nội tiếp I. Gọi trung điểm của các cạnh AC và BC lần lượt là M_b và M_a. Gọi giao điểm của đường thẳng M_bI với đường thẳng BC là B' và giao điểm của đường thẳng M_aI với đường thẳng AC là A'. Biết rằng hai tam giác ABC và $A'B'C$ có cùng diện tích.

Tìm giá trị lớn nhất có thể của góc ACB.

Câu 4: Cho một đa diện đều $2n$ cạnh. Từ các đoạn thẳng nối các đỉnh của đa diện (cạnh biên hoặc đường chéo) ta tô n cạnh màu đỏ sao cho:

1. Các điểm cuối của các cạnh màu đỏ chính là $2n$ đỉnh của đa diện.

2. Không có 2 cạnh màu đỏ nào có độ dài bằng nhau.

Tìm tất cả các số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn yêu cầu đã cho.

GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày với các bạn lời giải của các bài toán trong kỳ thi Olympic toán học trẻ của Thổ Nhĩ Kỳ, đăng trong số báo $5/2023$.

OC40. Cho x, y, z là các số thực dương với $x \leq 1$. Chứng minh rằng

$$xy + y + 2z \geq 4\sqrt{xyz}.$$

Lời giải. Trong bài này có thể dùng giả thiết $x \leq 1$ theo các cách khác nhau dẫn đến những lời giải khác nhau.

Lời giải 1: từ $x \leq 1$ ta có $z \geq zx$. Kết hợp với bất đẳng thức Cauchy, ta thu được điều cần chứng minh

$$\begin{aligned} xy + y + 2z &\geq xy + y + z + zx = (x+1)(y+z) \\ &\geq 2\sqrt{x}2\sqrt{yz} = 4\sqrt{xyz}. \end{aligned}$$

Lời giải 2: theo bất đẳng thức Cauchy, ta có $xy + y + 2z = (x+1)y + 2z \geq 2\sqrt{(x+1)y2z}$. Từ giả thiết $x \leq 1$ ta có $x + 1 \geq 2x$, như vậy ta có điều cần chứng minh

$$\begin{aligned} xy + y + 2z &\geq 2\sqrt{(x+1)y2z} \\ &\geq 2\sqrt{2xy2z} = 4\sqrt{xyz}. \end{aligned}$$

OC41. Trong một trường có 101 học sinh, mỗi học sinh có ít nhất một người bạn thân trong số các học sinh khác trong trường. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n, 1 < n < 101,$ ta có thể chọn một nhóm n học sinh trong trường này sao cho mỗi học sinh được chọn có ít nhất một bạn thân trong số các học sinh khác được chọn. (Biết rằng nếu A là bạn thân của B thì B cũng là bạn thân của A).

Lời giải. Với $n = 2,$ kết luận đúng vì ta chỉ cần chọn ra 1 học sinh cùng với 1 bạn thân của người đó.

Nếu ta gọi d_i là số bạn thân mà học sinh thứ i có thì tổng $s = \sum_{i=1}^{101} d_i$ phải là số chẵn vì mỗi cặp bạn thân được tính 2 lần trong tổng. Độc giả nào biết về lý thuyết đồ thị sẽ nhận ra ngay đây là một kết quả quen thuộc, thường được gọi là Bổ đề bắt tay. Như vậy không thể xảy ra trường hợp mỗi học sinh chỉ có đúng 1 bạn thân vì khi đó $s = 101,$ là số lẻ. Do đó, ta có thể chọn ra một bạn A có ít nhất 2 bạn thân. Nhóm gồm bạn A và 2 bạn thân của A thỏa mãn điều kiện đầu bài, tức là kết luận đúng với $n = 3$.

Ta sẽ chứng minh rằng từ nhóm G bất kỳ gồm $n < 100$ học sinh thỏa mãn đầu bài, ta luôn có thể thêm vào 2 học sinh nữa để nhận được nhóm cũng thỏa mãn đầu bài. Thật vậy, xét hai học sinh A, B không thuộc G. Nếu A hoặc B có một bạn thân không nằm trong G thì ta có 1 cặp bạn thân không thuộc G. Bổ sung cặp bạn thân này vào $G,$ ta được nhóm mới vẫn thỏa mãn đầu bài. Trường hợp còn lại, cả A và B đều phải có bạn thân trong $G,$ lúc này nhóm $G \cup \{A, B\}$ hiển nhiên thỏa mãn đầu bài.

Như vậy, xuất phát với nhóm gồm 2 hoặc 3 học sinh thỏa mãn đầu bài ta có thể xây dựng được nhóm n học sinh thỏa mãn đầu bài với mọi $1 < n < 101.$

OC42. Cho m, n, a, k là các số nguyên dương và $k > 1$ sao cho đẳng thức sau thỏa mãn

$$5^m + 63n + 49 = a^k.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của k.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh trường hợp $k = 2, 3, 4$ không xảy ra.

Giả sử $k = 2$, xét đẳng thức $5^m + 63n + 49 = a^k$ modulo 7 ta có

$$5^m \equiv a^2 \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod 7.$$

Do $5^6 \equiv 1 \pmod 7$, ta nhận được $m \equiv 0, 2, 4 \pmod 6$.

Như vậy m là số chẵn. Tiếp tục xét modulo 3, ta có

$$5^m + 63n + 49 \equiv (-1)^m + 1 \equiv 2 \pmod 3.$$

Tuy nhiên điều này dẫn đến $a^2 \equiv 2 \pmod 3$, mâu thuẫn.

Giả sử $k = 3$, xét modulo 7, ta có

$$5^m \equiv a^3 \equiv 0, 1, 6 \pmod 7.$$

Từ đó suy ra ra $m \equiv 0, 3 \pmod 6$, tức là $m = 3l$.

Tiếp tục xét modulo 9, ta có

$$\begin{aligned} 5^m + 63n + 49 &\equiv (5)^{3l} + 4 \equiv (-1)^l + 4 \\ &\equiv 3, 5 \pmod 9. \end{aligned}$$

Tuy nhiên điều này dẫn đến mâu thuẫn vì $a^3 \equiv 0, 1, 8 \pmod 9$.

Do trường hợp $k = 2$ không xảy ra nên $k = 4$ cũng không xảy ra vì ta có thể viết $5^m + 63n + 49 = a^4 = (a^2)^2$.

Trường hợp $k = 5$, ta tìm được bộ $m = 1, n = 3, a = 3$ thỏa mãn đẳng thức. Như vậy giá trị nhỏ nhất có thể của k là 5.

Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc ba bài toán trong Kỳ thi toán Durer lần thứ XVI được tổ chức tại Hungary. Đây là kỳ thi toán đồng đội mang tên Albrecht Durer, một nghệ sĩ, nhà tư tưởng nổi tiếng thời kỳ Phục hưng. Các bài toán sau phù hợp với trình độ học sinh lớp $7 - 9$.

OC49. Cho ABC là tam giác cân. Cạnh đáy BC dài 1 cm, cạnh AB và AC dài 2 cm. Gọi F là trung điểm của AB và G là trung điểm của AC. Gọi (k) là đường tròn tiếp xúc với AB và AC, tương ứng tại F và G. Chứng minh rằng giao điểm của CF và BG thuộc đường tròn (k).

OC50. Khi Andris bước vào phòng, có các số 3 và 24 trên bảng. Trong một bước, nếu đã có các số (không nhất thiết phải khác nhau) k và n trên bảng, thì Andris có thể viết thêm số $kn + k + n$ lên bảng.

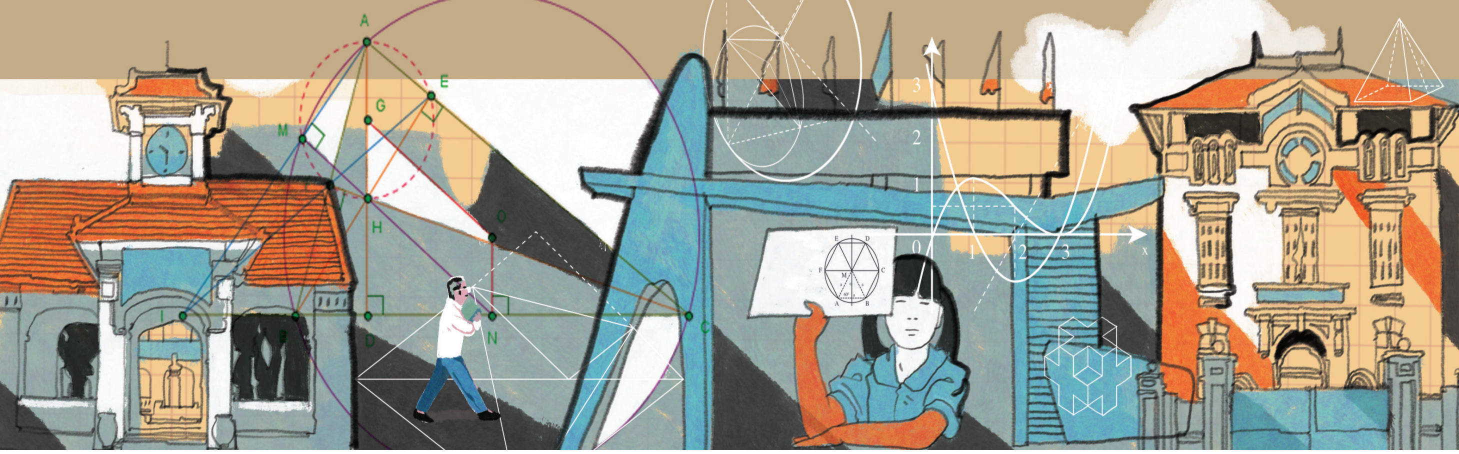
(a) Liệu Andris có thể viết số 9999999 lên bảng sau một số bước?

(b) Cùng câu hỏi như phần (a) cho số 99999999?

(c) Cùng câu hỏi như phần (a) cho số 48999999?

OC51. Có một trò chơi với một bảng ô vuông cỡ 3×3. Trong mỗi bước, người chơi lần lượt điền một trong các số $1, 2$ hoặc 3 vào một ô trống sao cho không có hai số giống nhau trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột. Nếu tất cả 9 ô của bảng đều được điền số, người chơi đầu tiên thắng nhưng nếu trước đó có một thời điểm không thể điền số được nữa thì người chơi thứ hai thắng.

Hỏi có cách nào để luôn chiến thắng nếu bạn được phép tùy chọn đi trước hoặc đi sau?



HỘI NGHỊ TOÁN HỌC TOÀN QUỐC LẦN THỨ X VÀ ĐẠI HỘI ĐẠI BIỂU HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM LẦN THỨ IX

LÊ XUÂN THANH, TRẦN VĂN THÀNH

Từ ngày 08/08/2023 đến ngày 12/08/2023, tại Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng, Hội Toán học Việt Nam đã chủ trì và phối hợp với Viện nghiên cứu cao cấp về Toán, Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Hà Nội, Viện Toán học – Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam tổ chức Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ X.

Hội nghị Toán học toàn quốc là hoạt động khoa học lớn nhất của cộng đồng Toán học Việt Nam, được tổ chức 5 năm một lần. Hội nghị là diễn đàn để các nhà nghiên cứu, ứng dụng và giáo dục toán học trên cả nước trình bày những thành tựu nghiên cứu của mình trong vòng 5 năm gần đây. Đây cũng là dịp để cộng đồng Toán học Việt Nam, cả trong và ngoài nước, tham gia trao đổi và đóng góp ý kiến về những vấn đề thời sự, cấp thiết đối với sự phát triển Toán học của nước nhà. Tham dự Hội nghị năm nay có hơn 900 đại biểu đến từ các viện nghiên cứu, học viện, trường đại học và trường trung học phổ thông trên mọi miền đất nước, trong đó có 3 đại biểu nước ngoài và 90 nhà toán học Việt Nam đang làm việc ở nước ngoài. Hai nội dung chính của Hội nghị Toán học toàn quốc năm nay là Hội nghị khoa học và Đại hội Đại biểu Hội Toán học Việt Nam lần thứ IX.

GS. TSKH. Vũ Hoàng Linh Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam nhiệm kỳ 2023 – 2028.

Phần Hội nghị khoa học đã diễn ra với 7 phiên toàn thể và 224 phiên báo cáo thuộc 10 tiểu ban: Đại số – Lý thuyết số, Hình học – Tôpô, Giải tích, Phương trình vi phân và Hệ động lực, Toán rời rạc và Cơ sở Toán học của Tin học, Tối ưu và Lý thuyết Điều khiển, Xác suất – Thống kê – Khoa học dữ liệu, Giải tích số và Ứng dụng Toán học, Giảng dạy và Lịch sử Toán học, Phương trình Đạo hàm riêng. Ban tổ chức đã mời 7 nhà toán học đọc báo

[1] *Viện Toán học.*

cáo mời tại các phiên toàn thể:

1. Đinh Tiến Cường (National University of Singapore): *Dynamics of complex Hénon maps*;

2. Đinh Dũng (Đại học Quốc gia Hà Nội): *Sparsity in uncertainty qualification for PDEs with Gaussian random field inputs*;

3. Nguyễn Văn Hoàng (Trường Đại học FPT): *Stability estimates for the sharp Sobolev type inequalities*;

4. Đoàn Thái Sơn (Viện Toán học – Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam): *Random dynamical systems*;

5. Phạm Tiến Sơn (Trường Đại học Đà Lạt): *Polynomial optimization from the viewpoint of singularity theory*;

6. Nguyễn Duy Tân (Đại học Bách khoa Hà Nội): *On the Massey vanishing conjecture in Galois cohomology of fields*;

7. Vũ Hà Văn (Yale University, Mỹ): *Random matrices and data recovery*.

PGS. TS. Đoàn Trung Cường Phó Chủ tịch kiêm Tổng Thư ký Hội Toán học Việt Nam nhiệm kỳ 2023 – 2028.

Đã có 70 báo cáo mời tiểu ban và 413 báo cáo ngắn được trình bày tại các phiên báo cáo tiểu ban. Các báo cáo khoa học được trình bày có chủ đề đa dạng, giới thiệu những hướng nghiên cứu thời sự và các thành tựu nghiên cứu gần đây của các nhà toán học Việt Nam. Có nhiều báo cáo trong số đó là của các nhà toán học trẻ có thành tích nghiên cứu xuất sắc. Đặc biệt, với 110 báo cáo được trình bày bởi các nhà toán học nữ, đây là kỳ hội nghị có số lượng đại biểu nữ trình bày báo cáo cao nhất từ trước tới nay.

Trong chương trình Hội nghị, Đại hội Đại biểu Hội Toán học Việt Nam lần thứ IX đã được tổ chức vào ngày 10/08/2023. Các đại biểu đã bầu ra Ban chấp hành Hội Toán học Việt Nam khóa IX (nhiệm kỳ 2023 – 2028), bầu trực tiếp Chủ tịch và Tổng thư ký của Hội. Ban Chấp hành mới đã họp ngay trong chiều ngày 10/08/2023 và quyết định phân công như sau.

1. GS. TSKH. Vũ Hoàng Linh (Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Hà Nội): *Chủ tịch*.

2. PGS. TS. Đoàn Trung Cường (Viện Toán học −Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam): *Phó Chủ tịch kiêm Tổng thư ký*.

3. GS. TS. Lâm Quốc Anh (Trường Đại học Cần Thơ): *Phó Chủ tịch*.

4. PGS. TS. Đinh Thanh Đức (Hội Toán học Bình Định): *Phó Chủ tịch*.

5. GS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn (Bộ Giáo dục và Đào tạo): *Phó Chủ tịch*.

6. GS. TSKH. Đỗ Đức Thái (Trường Đại học Sư phạm Hà Nội): *Phó Chủ tịch*.

7. PGS. TS. Mai Hoàng Biên (Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh): *Ủy viên*.

8. TS. Trần Nam Dũng (Trường Phổ thông Năng khiếu – Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh): *Ủy viên*. 9. PGS. TSKH. Phan Thị Hà Dương (Viện Toán học – Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam): *Ủy viên*.

10. PGS. TS. Lê Văn Hiện (Trường Đại học Sư phạm Hà Nội): *Ủy viên*.

Các thành viên Ban Chấp hành và Ban kiểm tra Hội Toán học Việt Nam nhiệm kỳ 2023 – 2028.

11. PGS. TSKH. Nguyễn Thiệu Huy (Đại học Bách khoa Hà Nội): *Ủy viên*.

12. TS. Nguyễn Thị Lê Hương (Viện nghiên cứu cao cấp về Toán): *Ủy viên*.

13. PGS. TS. Nguyễn Thị Hồng Loan (Trường Đại học Vinh): *Ủy viên*.

14. PGS. TS. Phạm Quý Mười (Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng): *Ủy viên*.

15. PGS. TS. Trần Kiêm Minh (Trường Đại học Sư phạm – Đại học Huế): *Ủy viên*.

16. PGS. TS. Phạm Hoàng Quân (Trường Đại học Sài Gòn): *Ủy viên*.

17. PGS. TSKH. Đoàn Thái Sơn (Viện Toán học – Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam): *Ủy viên*.

18. PGS. TS. Phó Đức Tài (Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Hà Nội): *Ủy viên*.

19. GS. TS. Lê Anh Vinh (Bộ Giáo dục và Đào tạo): *Ủy viên*.

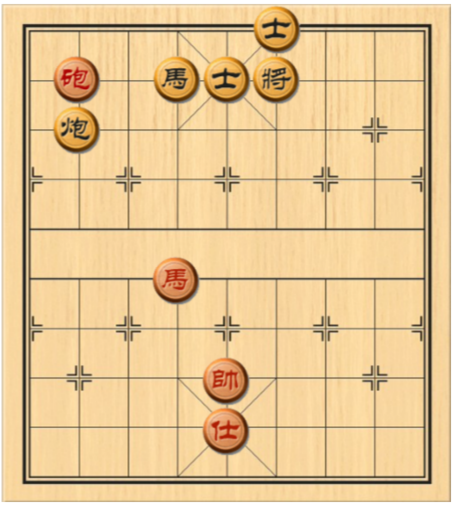
NGHỆ THUẬT ĐIỀU QUÂN Ở TRUNG, TÀN CUỘC

TRẦN VĂN DŨNG[1]

Đối với các tình huống trên bàn cờ, ta thường đánh giá tình hình dựa vào 2 yếu tố: *Quân* (tương quan lực lượng của đôi bên) và *Thế* (vị trí, sự liên kết giữa các quân). Nhìn chung, những yếu tố này bù đắp, hỗ trợ những khiếm khuyết, ưu – nhược điểm của nhau. Tuy nhiên, nhiều nhà nghiên cứu lý luận Cờ Tướng đã đồng ý thống nhất rằng, yếu tố *Thế* ảnh hưởng nhiều hơn đến kết quả của cuộc cờ. Trong diễn biến mỗi ván đấu, nếu như những nước đi, các biến hóa của Khai cuộc thường mang nặng tính lý thuyết, đa phần dựa vào những nước đi đã được nghiên cứu theo sách vở và phần mềm, thì những giai đoạn tiếp theo phụ thuộc nhiều vào trình độ cũng như khả năng tính toán của đôi bên. Muốn có được thế tốt trong Trung, Tàn cuộc để hướng tới một kết quả có lợi thì vấn đề điều chuyển quân, hay còn được gọi là *Điều động lực lượng* là một yêu cầu vô cùng quan trọng.

Điều động lực lượng được xem là thời điểm chuyển đổi trạng thái giữa các tình huống, đó cũng có thể được coi là giai đoạn bước ngoặt, quyết định kết quả sau cùng của mỗi ván đấu. Vì vậy, đòi hỏi các kỳ thủ cần phải nắm rõ đâu là vị trí mấu chốt của cuộc cờ, đồng thời cần có một kế hoạch chi tiết, cụ thể mới có thể đưa những quân lực ở vào những vị trí thuận lợi nhất.

Để cụ thể hơn về chủ đề *Điều động lực lượng*, tác giả sẽ gửi tới bạn đọc Pi vài ví dụ tiêu biểu có thể áp dụng vào những tình huống trong thực chiến.



Hình 1.

1. Hình 1, Quân lực tấn công của đôi bên hoàn toàn tương đồng, Đen đang hơn 1 Sỹ. Tuy nhiên hệ thống Mã và 2 Sỹ của Đen đang bị giam chặt bởi Pháo đỏ, Đỏ được quyền đi trước và vận dụng triệt để nghệ thuật Điều động lực lượng để giành chiến thắng như sau:

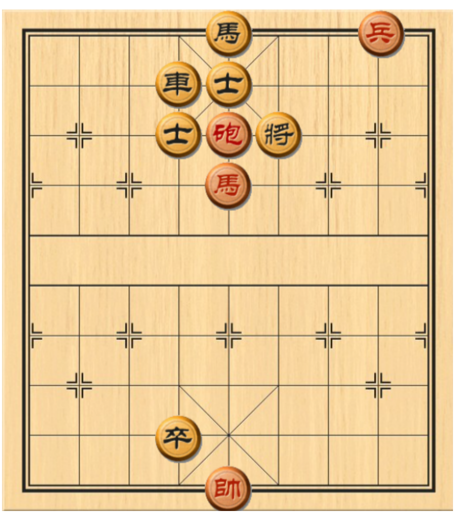
[1] *Trung tâm Ứng dụng Công nghệ Vũ trụ Tp. Hồ Chí Minh.*

1) M6.7 P2 – 3 **2)** S5.4 Tg6.1 **3)** P8/8 Tg6/1(∗) **4)** P8 – 4 P3 – 6 **5)** S4/5 P6 – 3(∗∗) **6)** M7/5 M4.5 **7)** M5.3 M5/7 **8)** M3/4 S5.6 **9)** M4.6 S6/5 **10)** M6.7(∗∗∗) (Đen mất Pháo, chắc chắn thua cuộc)

(∗): *Nhận ra điểm yếu, Đỏ lập tức lao Mã tới bắt Mã Đen, buộc Đen phải bình Pháo cản khiến cho cả đội hình của Đen kẹt cứng, chỉ có thể di chuyển Tướng. Đỏ tiếp tục giương Sỹ làm ngòi rồi thoái Pháo về đáy dọa sát.*

(∗∗): *Đỏ liên tục bình Pháo rồi thoái Sỹ uy hiếp. Để tránh mất quân, Đen lại phải bình Pháo về chỗ cũ. Như vậy sau vài nước điều quân cực kỳ mẫu mực của Đỏ, Đội hình của Đen vẫn không có gì thay đổi.*

(∗∗∗): *Sau khi đem Pháo về vị trí chiến lược, Đỏ tiếp tục có những nước điều động Mã uy hiếp đầy uy lực. Đen đã rất cố gắng chống đỡ nhưng cuối cùng đành chấp nhận thất bại.*



Hình 2.

2. Hình 2, thoạt nhìn có thể thấy Đen còn chiến Xe và Chốt áp sát rất mạnh, Đỏ chỉ Pháo, Mã, Chốt đang ở những vị trí không thuận lợi cho lắm. Nếu sắp tới Đỏ không có những động thái rõ ràng, Đen sẽ nhanh chóng giành thắng lợi. Tuy nhiên, Đỏ được quyền đi trước và liên tục có những nước đi chính xác như sau:

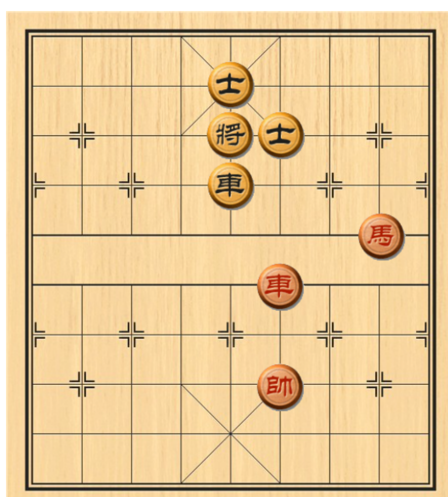
1) M5/3 Tg6/1 **2)** P5 – 1 M5.7(∗) **3)** P1.1 Tg6/1 **4)** M3.4 M7.5(∗∗) **5)** C2 – 3 Tg6.1 **6)** M4.2 M5/7 **7)** P1 – 3 X4/1(∗∗∗) **8)** M2/3 Tg6.1 **9)** P3 – 1 X4 – 7 **10)** M3.2 X7.1 **11)** P1 – 3(∗∗∗∗) (1 – 0)

(∗): *Sau 2 nước điều chuyển Pháo Mã, Đỏ đưa được những quân chiến tới những điểm trọng yếu, chuẩn bị đi M3.2 rồi bình Chốt chiếu bí. Để chừa đường thoát cho Tướng, Đen phải di chuyển Mã ngay lập tức.*

(∗∗): *Lợi dụng quân lực của Đen đang ở trạng thái chen chúc, Đỏ tấn Pháo chiếu Tướng kiềm chế rồi sau đó nhảy Mã thẳng vào chân Sỹ. Lúc này, nếu Đen dùng Sỹ ăn Mã hoặc di chuyển Mã, Đỏ sẽ chơi C2 – 3 sát cục ngay lập tức.*

(∗∗∗): *Sau vài nước tấn công dồn dập bằng bộ ba Pháo – Mã – Chốt, Đỏ đã ép Đen nhảy Mã vào tử địa, đồng thời lại tiếp tục dọa nước M3/2 chiếu tướng bắt chết Xe.*

(∗∗∗∗): *Mặc dù Đen đã tiêu diệt được Chốt đối phương nhưng vẫn không tài nào thoát được đòn tiền Mã hậu Pháo của Đỏ. Đen mất hết quân, Đỏ thắng cuộc.*



Hình 3.

3. Hình 3, Trong tình huống thông thường, tàn Xe–Mã đánh xe 2 Sỹ, (bên Xe–Mã không còn Sỹ, Tượng) thì rất khó giành chiến

thắng. Tuy nhiên, với tình huống cụ thể này, Tướng của bên Đen đang bị cheo leo ở hàng 3, Đỏ đi trước và khai thác một cách triệt để như sau:

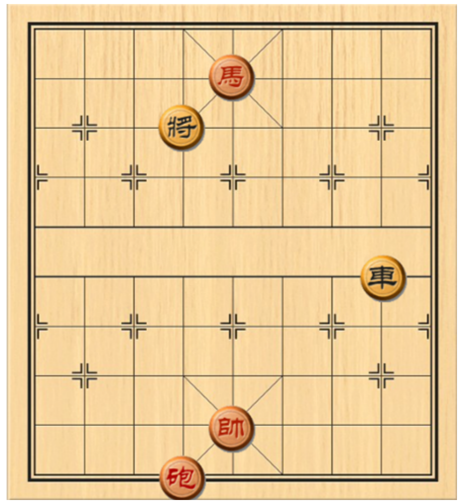
1) M2/3 X5 – 4 **2)** M3.4 X4 – 6 **3)** X4 – 5 Tg5 – 4 **4)** X5 – 6 Tg4 – 5 **5)** X6.1(∗) S5/6 **6)** X6 – 5 Tg5 – 4 **7)** Tg4 – 5 X6 – 4 **8)** X5.2 Tg4/1 **9)** M4.6(∗∗) (1 – 0)

(∗): *Nhận thấy điểm yếu Đen, Đỏ điều Mã tới vị trí đẹp, ép Xe Đen rời khỏi vị trí trọng yếu. Và tiếp theo đó là 2 nước bình xe chiếu Tướng rồi tấn lên bảo vệ Mã, khiến cho Đen rơi vào trạng thái khó đi (Tướng kẹt cứng, Xe phải canh chân Mã)*

(∗∗): *Đỏ tiếp tục có thủ đoạn dùng Xe và Tướng chiếm lấy trung lộ, Đen lại phải chạy Xe giữ mặt nhưng lại vướng chân Mã. Đỏ nhẹ nhàng tung đòn chiếu tướng bắt Xe, Đen chắc chắn thất bại.*

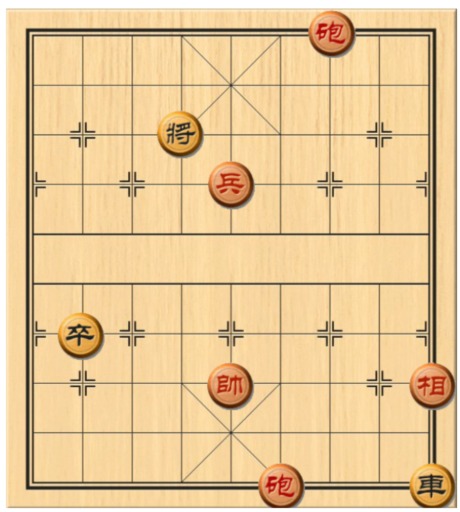
Chú thích: C: Chốt, X: Xe, M: Mã, P: Pháo, Tg: Tướng, S: Sĩ, T: Tượng.

Câu đố kỳ này: Đỏ được quyền đi trước, phải khéo léo điều chuyển quân như thế nào để giành lấy thắng lợi trong những hình cờ dưới đây?



Hình 4.

Đáp án tham khảo: **1)** M5.7 Tg4/1 **2)** M7/8 Tg4/1 **3)** M8/7 X8.3 **4)** Tg5/1 Tg4.1 **5)** M7.8 Tg4/1 **6)** M8.7 Tg4.1 **7)** M7/5 Tg4/1 **8)** M5/7 Tg4.1 **9)** M7/8 Tg4/1 **10)** M8/7 X8/2 **11)** M7/6 (1 – 0)



Hình 5.

Đáp án tham khảo: **1)** C5 – 6 Tg4/1 **2)** T1/3 X9 – 7 **3)** P3/8 X7/1 **4)** P4 – 6 X7 – 4 **5)** C6.1 Tg4/1 **6)** C6.1 (1 – 0)