

Sumi và những chiếc mũ sắc màu

Lê Anh Vinh

Sumi và Jenny là một đôi bạn rất thân và đặc biệt là cả hai bạn đều rất thích học Toán. Chú Jason, bố của Jenny là một thầy giáo dạy Toán nên có rất nhiều các câu đố vui hóc búa để thử thách các bạn nhỏ.

Hôm nay Sumi sang chơi nhà Jenny. Như thường lệ, điều Sumi chờ đợi nhất chính là những câu đố của chú Jason.

Không để các bạn phải đợi lâu, chú Jason lấy ra một chiếc mũ màu đỏ, một chiếc mũ màu xanh, và bắt đầu chuỗi câu đố của mình.

Câu đố 1

– Hai con hãy nhắm mắt lại một lúc, để ta có thể đội cho mỗi người một chiếc mũ nhé! – Chú Jason nói – Được rồi, các con có thể mở mắt ra. Sumi, con có biết mũ của mình màu gì không?

Sumi nhìn Jenny và trả lời ngay lập tức:

- Màu đỏ ạ.
- Tại sao con lại biết mũ của mình màu đỏ? – Chú Jason hỏi tiếp.
- Con thấy Jenny đội mũ màu xanh, nên chiếc mũ của con phải là màu đỏ ạ. – Sumi trả lời.



Sumi

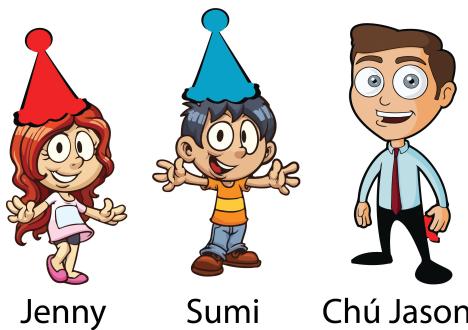


Jenny

Câu đố 2

Chú Jason lấy thêm một chiếc mũ màu đỏ. Chú lại yêu cầu hai bạn nhắm mắt lại, và đội cho mỗi bạn một chiếc mũ. Sau đó, chú giấu chiếc mũ còn lại đi.

- Bây giờ, các con mở mắt ra nào. Sumi, con có biết mũ của mình màu gì không? – Chú Jason hỏi.
- Dạ không ạ. – Sumi nhìn Jenny, nhưng lần này cậu không đoán được màu mũ của mình.
- Còn Jenny, con có biết mình đội mũ màu gì không?"
- Màu đỏ ạ. – Jenny trả lời ngay lập tức.
- Con hãy giải thích cho bố xem tại sao nào?
- Nếu con đội mũ màu xanh thì chỉ còn lại hai chiếc mũ màu đỏ, và khi đó Sumi sẽ biết ngay là bạn ý đội chiếc mũ màu đỏ ạ. Do Sumi không đoán được bạn ý đội mũ màu gì, nên chiếc mũ của con phải là màu đỏ ạ. – Jenny giải thích.

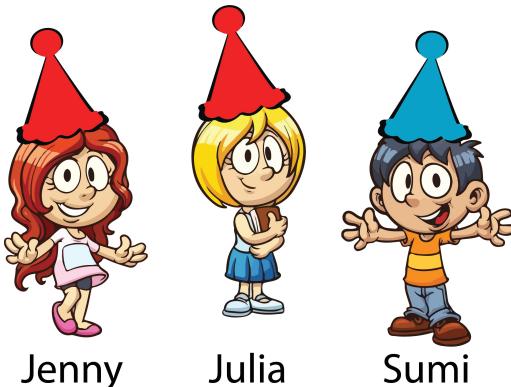


Câu đố 3

Đúng lúc này thì bé Julia đi học về, và đòi chơi cùng anh Sumi và chị Jenny. Chú Jason yêu cầu ba bạn nhỏ nhắm mắt lại và dùng hai chiếc mũ đỏ, một chiếc mũ xanh để đội cho mỗi bạn một chiếc mũ.

- Các con mở mắt ra nào. Sumi, con có biết mũ của mình màu gì không?
- Màu xanh ạ! – Sumi trả lời rất nhanh.
- Con cũng đội mũ màu xanh ạ! – Julia nhanh nhẩu.

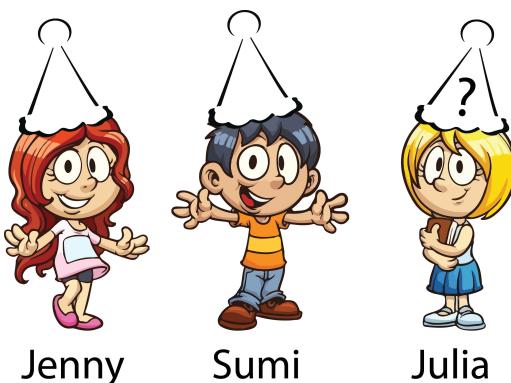
- Màu xanh? Con có chắc không, Julia? – Chú Jason hỏi lại.
 – Ah, con bị nhầm rồi à. Bố dùng hai chiếc mũ đỏ, một chiếc mũ xanh. Anh Sumi đội mũ xanh, chị Jenny đội mũ đỏ, như vậy con sẽ đội mũ đỏ à. – Julia sửa lại.



Câu đố 4

- Tốt lắm! Bây giờ sẽ là một thử thách khó hơn cho các con. – Chú Jason nói; rồi chú lấy thêm một chiếc mũ đỏ và một chiếc mũ xanh. Như vậy, có tổng cộng ba chiếc mũ đỏ và hai chiếc mũ xanh trên bàn. Chú lại yêu cầu cả ba bạn nhắm mắt lại, rồi đội cho mỗi bạn một chiếc mũ. Sau đó, chú giấu hai chiếc mũ còn lại đi.
- Jenny, con có biết mình đội mũ màu gì không?
 – Con đội mũ đỏ à. – Jenny trả lời.
 – Vậy thì con đội mũ màu xanh rồi. – Sumi nói tiếp.

Theo các bạn, Sumi nói có đúng không? Vì sao?



Câu đố 5

Các bạn nhỏ đùi chú Jason đố thêm một lần nữa. Chú vẫn dùng ba chiếc mũ đỏ và hai chiếc mũ xanh để đội cho mỗi bạn một chiếc.

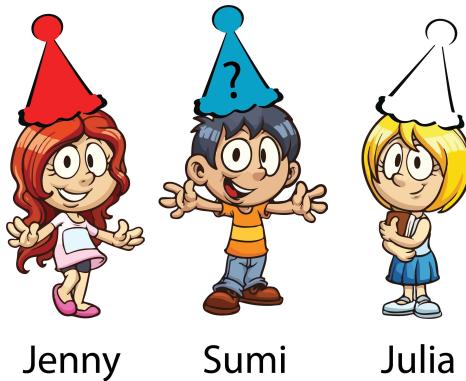
– Sumi, con có biết mình đội mũ màu gì không?

– Còn Jenny, con đội mũ màu gì?

– Con cũng không biết à. – Jenny lắc đầu.

– Vậy thì Julia, con đội mũ màu gì?

Các bạn hãy giúp Julia trả lời câu hỏi nhé!

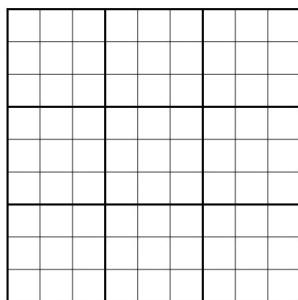


SUDOKU TRÒ CHƠI TRÍ TUỆ

TRỊNH THỊ LỘC

Sudoku, ban đầu có tên gọi là **Number Place**, là một trò chơi với câu đố điền các số vào các ô trống của một bảng ô vuông có 9 hàng và 9 cột (gọi vẫn tắt là bảng 9×9), sao cho trong mỗi hàng, mỗi cột đều có tất cả các số tự nhiên từ 1 đến 9, và đồng thời, khi chia bảng to 9×9 thành chín bảng con 3×3 (tức, bảng có 3 hàng và 3 cột) thì trong mỗi bảng con 3×3 cũng có tất cả

các số tự nhiên từ 1 đến 9. Trong Hình 1 là một bảng 9×9 và chín bảng con 3×3 được phân chia ra từ bảng 9×9 đó.



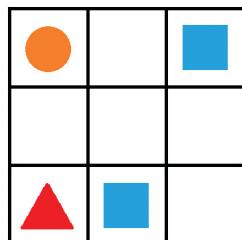
Hình 1.

Sudoku đã xuất hiện ở Pháp vào cuối thế kỷ 19, nhưng sau đó lại biến mất. Đến năm 1979, nó xuất hiện trên tạp chí Dell ở Mỹ dưới cái tên Number Place. Sau đó, nó được Nikoli đem về Nhật Bản vào năm 1984 và đặt cho cái tên 数字は独身に限る (đọc là: Suuji wa dokushin ni kagiru), mà có thể dịch là “các số chỉ được xuất hiện một lần”. Sau này, cái tên này được Maki Kaji viết gọn lại là Sudoku. Từ đó, Sudoku sớm trở thành một trò chơi được ưa chuộng nhất ở Nhật Bản. mãi cho đến đầu thế kỷ 21, thế giới mới bắt đầu biết đến Sudoku một cách rộng rãi, khởi đầu từ Anh, sau đó lan sang châu Âu, châu Mỹ.

Trong bài viết này, trước tiên Bi giới thiệu với các bạn đọc nhỏ tuổi một phiên bản của trò chơi trí tuệ Sudoku; đó là, **phiên bản hình ảnh**. Phiên bản này rất thích hợp cho các bé từ 5 đến 7 tuổi. Đối với các bé 5 hoặc 6 tuổi, trò chơi sẽ trở nên hấp dẫn hơn, nếu các vị phụ huynh sử dụng thêm các tấm card hình học, hoa quả hoặc bất kì đồ vật gì có sẵn (bút chì, thước kẻ, tẩy, ...).

Giờ, chúng mình cùng Bi trải nghiệm Sudoku nhé!

Ví dụ 1. Vẽ thêm hình vuông, hình tròn hoặc hình tam giác vào các ô vuông còn trống trong bảng ở Hình 2, sao cho mỗi hình chỉ xuất hiện đúng một lần trong mỗi hàng, cũng như trong mỗi cột.

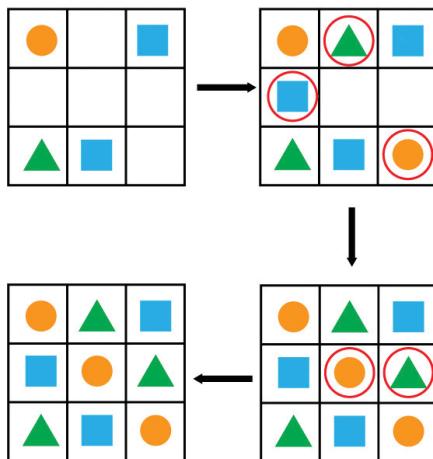


Hình 2.

Cùng Bé suy luận:

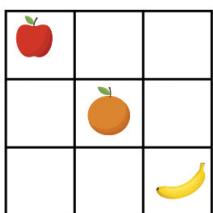
- Rõ ràng, với mỗi ô còn trống, chúng mình sẽ phải cân nhắc các khả năng điền, rồi lựa chọn hình thích hợp để điền. Vì thế, chúng mình nên bắt đầu từ những ô mà số khả năng điền phải cân nhắc là ít hơn cả, các bé nhỉ? Chúng mình biết rằng, vì trong mỗi hàng, cũng như mỗi cột, phải có đủ cả ba loại hình, nên hình điền ở ô này sẽ “áp đặt” hình nằm ở ô kia. Vì thế, ô trống nằm ở hàng hay cột nào đã có nhiều hình được điền sẽ có số khả năng điền cần cân nhắc ít hơn cả, phải không các bé?
- Nhìn bảng ở Hình 2, chúng mình thấy, có hai hàng và một cột, mà mỗi hàng hay cột đều có sẵn hai hình, nói cách khác, đều chỉ có một ô trống. Với những suy luận ở trên, chắc chắn chúng mình phải bắt đầu từ những ô trống ở hai hàng và cột đó rồi!
- Cùng xem nào! Ở hàng trên cùng, đã có hình tròn và hình vuông ở hai ô, vậy thì ở ô trống còn lại chắc chắn phải là hình tam giác rồi! Ở hàng dưới cùng, đã có hình tam giác và hình vuông, nên ở ô trống còn lại chắc chắn phải là hình tròn. Cũng như vậy, ở cột đầu tiên (tính từ trái qua phải), đã có hình tam giác và hình tròn, do đó, ở ô trống còn lại bắt buộc phải là hình vuông.
- Aha! Chúng mình đã khám phá ra rồi, nếu trong một hàng hay cột đã có hai ô có hình thìắt sẽ biết hình phải có trong ô trống còn lại là hình gì.
- Với khám phá trên, bằng cách xét các cột thứ hai và thứ ba, chúng mình sẽ dễ dàng điền được hình vào các ô trống còn lại sau bước điền nói trên, phải không nào?

Các bé xem cách điền hình nêu trên của chúng mình, được thể hiện ở Hình 3 nhé.



Hình 3.

Việc giải các sudoku cũng hấp dẫn đấy chứ nhỉ! Giờ hãy cùng Bi thử sức với một sudoku khác nha!

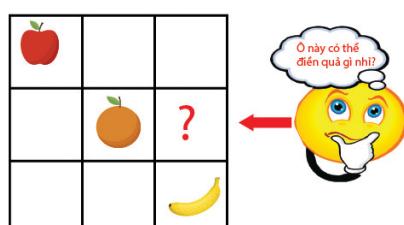


Hình 4.

Cùng Bi suy luận:

- Quan sát bảng ở Hình 4, chúng mình không thấy một hàng hay một cột nào, mà ở đó đã có sẵn hai loại quả. Ở hàng nào, cột nào cũng chỉ có đúng một loại quả mà thôi. Thế nghĩa là, tình huống ở ví dụ này không tương tự như tình huống ở ví dụ 1 rồi! Phải làm sao bây giờ?

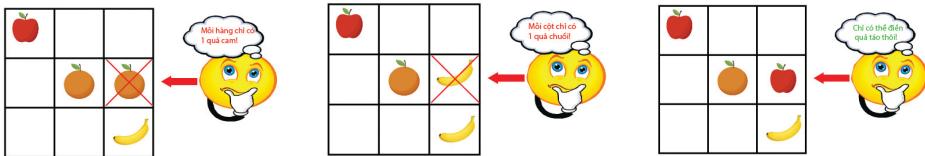
Ví dụ 2. Vẽ thêm quả cam, quả táo hoặc quả chuối vào các ô vuông còn trống trong bảng ở Hình 4, sao cho mỗi loại quả chỉ xuất hiện đúng một lần trong mỗi hàng, cũng như trong mỗi cột.



Hình 5.

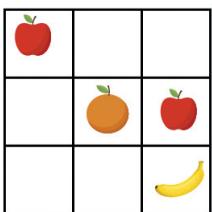
– Suy đi, tính lại, Bi thấy không còn cách nào khác, ngoài cách chọn một ô trống nào đó, rồi cân nhắc các khả năng điền có thể (xem Hình 5). Các bé có đồng ý với Bi không?

Hình 6 thể hiện sự suy xét của Bi khi cân nhắc các khả năng điền đấy. Các bé xem nhé.



Hình 6.

– Vui quá, vậy là chúng mình đã cùng Bi điền được quả vào một ô trống rồi (xem Hình 7).



Hình 7.

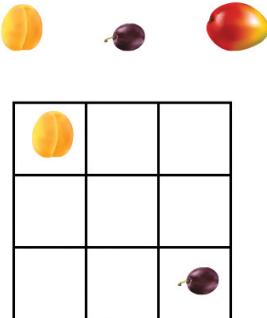
– Sudoku trái cây giờ đã trở

nên đơn giản hơn, tương tự như ở ví dụ 1 rồi. Nghĩa là, trong bảng đã có những hàng, những cột mà ở mỗi hàng hay cột đó đều chỉ có một ô trống. Vì thế, bằng các suy luận tương tự như khi giải ví dụ 1, chúng mình đã có thể tiếp tục điền các loại quả thích hợp vào các ô trống còn lại. Các bé tự làm tiếp nhé.

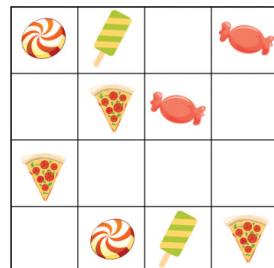
Nhìn lại các suy luận ở trên, khi giải ví dụ 2, Bi nhận thấy rằng, chúng mình điền được quả vào ô trống đầu tiên là do ô đó nằm ở giao của đúng một hàng và đúng một cột, mà ở hàng, cũng như ở cột ấy, lại đã có sẵn một loại quả. Aha, để ý rằng ô nào trong bảng cũng nằm ở giao của đúng một hàng và đúng một cột, chúng mình đã cùng Bi có thêm một khám phá nữa rồi. Đó là, chúng mình sẽ xác định được loại quả nằm ở một ô bất kỳ, nếu biết loại quả nằm trong hàng và trong cột chứa ô đó!

Hiểu các suy luận của Bi khi giải các ví dụ 1 và 2 rồi, bây giờ các bé hãy tập tự mình suy luận để vượt qua các Sudoku dưới đây nhé.

Bài tập 1. Vẽ thêm quả đào, quả nho hoặc quả xoài vào các ô vuông còn trống trong bảng ở Hình 8, sao cho mỗi loại quả chỉ xuất hiện đúng một lần trong mỗi hàng, cũng như trong mỗi cột.



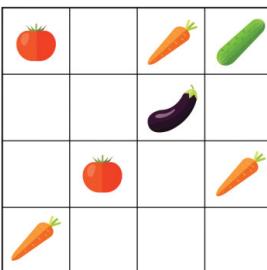
Hình 8.



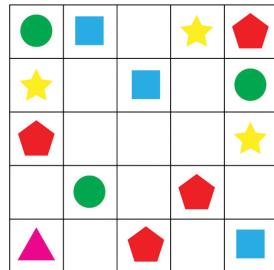
Hình 9.

Bài tập 2. Vẽ thêm que kem, miếng bánh, cái kẹo sữa hoặc cái kẹo ngọt vào các ô vuông còn trống trong bảng ở Hình 9, sao cho mỗi loại kem, bánh, kẹo chỉ xuất hiện đúng một lần trong mỗi hàng, cũng như trong mỗi cột.

Bài tập 3. Vẽ thêm quả cà chua, quả dưa chuột, củ cà rốt hoặc quả cà tím vào các ô vuông còn trống trong bảng ở Hình 10, sao cho mỗi loại củ, quả chỉ xuất hiện đúng một lần trong mỗi hàng, cũng như trong mỗi cột.



Hình 10.

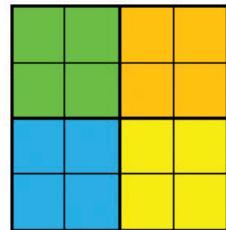


Hình 11.

Bài tập 4. Vẽ thêm hình tam giác, hình vuông, hình ngũ giác, hình ngôi sao hoặc hình tròn vào các ô vuông còn trống trong bảng ở Hình 11, sao cho mỗi loại hình chỉ xuất hiện đúng một lần trong mỗi hàng, cũng như trong mỗi cột.

Bi tiếp tục giới thiệu cùng bạn đọc phiên bản “nguyên thủy” của trò chơi Sudoku, đó là Sudoku phiên bản số. Phiên bản này thích hợp cho các bé từ 7 tuổi trở lên. Ở phiên bản số, người ta không chỉ quan tâm đến các số trong mỗi hàng, mỗi cột, mà còn quan tâm đến các số trong mỗi “vùng”.

Ở Hình 12 là một bảng 4×4 và bốn bảng con 2×2 được phân chia ra từ bảng 4×4 đó, mỗi bảng con được tô bởi một màu. *Ở các bài 1, 2, 4, 5 dưới đây, mỗi bảng con 2×2 như thế được gọi là một vùng.*



Hình 12.

Giờ, các bé hãy cùng Bi vượt qua thử thách đầu tiên với Sudoku số nhé!

Ví dụ 3. Điền các số 1, 2, 3, 4 vào các ô vuông còn trống trong bảng ở Hình 13, sao cho trong mỗi hàng, mỗi cột và trong mỗi vùng, mỗi số chỉ xuất hiện một lần.

CÙNG BI SUY LUẬN:

1	2		
	4		2
4		2	
		4	1

Hình 13.

– Rõ ràng, với mỗi ô còn trống, chúng mình sẽ phải cân nhắc các khả năng điền, rồi lựa chọn số thích hợp để điền. Vì thế, chúng mình nên bắt đầu từ những ô mà số khả năng điền phải cân nhắc là ít hơn cả, các bé nhỉ? Từ điều kiện “trong mỗi hàng, mỗi cột và trong mỗi vùng, mỗi số chỉ xuất hiện một lần”, hiển nhiên suy ra trong mỗi hàng, cũng như mỗi cột, hay mỗi vùng, phải có đủ cả bốn số 1, 2, 3, 4. Như thế, trong mỗi hàng, mỗi cột, mỗi vùng, số nằm ở ô này sẽ “áp đặt” số nằm ở ô kia. Do đó, ô trống nằm ở hàng hay cột hay vùng nào đã có nhiều số được điền sẽ “bị” nhiều “áp đặt” hơn cả, và vì thế, sẽ có số khả năng điền cần cân nhắc ít hơn cả, phải không các bé?

– Nhìn bảng ở Hình 13, chúng mình thấy, có hai vùng, mà mỗi vùng đều đã có ba số được điền (nói cách khác, đều chỉ có một ô trống): vùng trên bên trái và vùng dưới bên phải (xem Hình 14). Với những suy luận vừa nêu trên, chắc chắn chúng mình phải bắt đầu từ

những ô trống ở hai vùng đó rồi!

1	2		
4			2
4		2	3
	4	1	

Hình 14.

– Cùng xem nào! Ở mỗi vùng, trong hai vùng được tô màu ở Hình 14, đều đã có ba số 1, 2, 4, vậy thì ở ô trống của mỗi vùng đó chắc chắn phải là số 3 rồi! Chúng mình cùng điền số 3 vào ô trống ở mỗi vùng đó nhé (xem Hình 15).

1	2		
?	4		2
4		2	?
	4	1	

1	2		
3	4	3	2
4	?	2	3
?	4	1	

Hình 15.

1	2		?
3	4	?	2
4	?	2	3
?	4	1	

1	2		4
3	4	1	2
4	1	2	3
2		4	1

Hình 16.

– Trong bảng nhận được ở Hình 15 không còn có những vùng, mà ở đó đã có ba số được điền. Tuy nhiên, như các bé thấy đấy, lại có những cột, những hàng, mà ở mỗi cột hay hàng đó đều đã có ba số được điền; đó là các cột thứ 1, thứ 4 (tính từ trái qua phải), và các hàng thứ 2, thứ 3 (tính từ trên xuống dưới). Vì thế, nhờ điều kiện “ở mỗi hàng, mỗi cột phải có đủ cả bốn số 1, 2, 3, 4”,

chúng mình sẽ tìm ra được số cần điền vào ô trống ở mỗi hàng, mỗi cột ấy, phải không nào? Chẳng hạn, xét cột thứ 1. Vì trong cột đã có ba số 1, 3, 4 nên số cần điền vào ô trống ở cột đó bắt buộc phải là 2 rồi. Tương tự như thế cho việc tìm ra các số cần điền vào ô trống ở cột thứ 4, cũng như ở hàng thứ 2, và hàng thứ 3. Chúng mình cùng điền nhé (xem Hình 16).

– Tiếp theo, bằng cách suy luận tương tự trên, chắc hẳn các bé sẽ tìm ra ngay được hai số cần điền vào hai ô trống trong bảng nhận được ở Hình 5 nhỉ? Các bé hãy tự mình hoàn thành việc điền số, rồi so với “đáp số” dưới đây để kiểm tra nhé (xem Hình 17).

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

Hình 17.

Giờ hãy cùng Bi thử sức với một sudoku khác nha!

Ví dụ 4. Điền các số 1, 2, 3, 4 vào các ô vuông còn trống trong bảng ở Hình 18, sao cho trong mỗi hàng, mỗi cột và trong mỗi vùng, mỗi số chỉ xuất hiện một lần.

1			3
	2	4	
	1	3	
2			4

Hình 18.

Lời giải:

– Quan sát bảng ở Hình 18, chúng mình không thấy một vùng hay một hàng, một cột nào, mà ở đó đã có ba số được điền. Ở vùng nào, hàng nào, cột nào cũng chỉ có đúng hai số được điền mà thôi. Thế nghĩa là, tình huống ở bài này không tương tự như tình huống ở ví dụ 3 rồi! Phải làm sao bây giờ?

– Suy đi, tính lại, Bi thấy không còn cách nào khác, ngoài cách chọn một ô trống nào đó, rồi cân nhắc các khả năng điền có thể. Chẳng hạn, ta chọn ô trống có dấu “?” (dưới đây, gọi tắt là ô “?”) trong bảng bên trái, ở Hình 19. Vì trong mỗi hàng, mỗi cột, mỗi vùng, mỗi số chỉ được có mặt một lần, nên do nằm ở hàng thứ 1, số ở ô “?” phải khác 1, 3; và đồng thời, do nằm ở cột thứ 2, số đó phải khác 2, 1. Do đó, số ở ô “?” phải khác đồng thời cả 1, 2 và 3; vì thế, số đó bắt buộc phải là 4 (xem Hình 19).

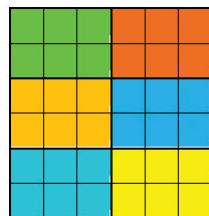
1	?	4	3
	2	4	
	1	3	
2			3

– Ở bảng nhận được sau bước điền trên đã có những vùng, hàng, cột, mà ở mỗi vùng, hàng, cột đó có ba số được điền. Vì thế, bằng các suy luận

Hình 19.

tương tự như khi giải ví dụ 3, chúng mình đã có thể tiếp tục điền các số thích hợp vào các ô trống còn lại rồi. Các bé tự làm tiếp nhé.

Ở Hình 20 là một bảng 6×6 và sáu bảng con 2×3 được phân chia ra từ bảng 6×6 đó, mỗi bảng con được tô bởi một màu. Ở các bài 3, 6 dưới đây, mỗi bảng con 2×3 như thế cũng được gọi là một vùng.



Ví dụ 5. Điền các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 vào các ô vuông còn trống trong bảng ở Hình 21, sao cho trong mỗi hàng, mỗi cột và trong mỗi vùng, mỗi số chỉ xuất hiện một lần.

		2	6	5	4
4	6				
1	3		4		5
5		4	3	1	
			2	4	3
2	4				

Hình 21.

Cùng Bi suy luận:

– Quan sát bảng ở Hình 21, ta thấy không có hàng, cột hay vùng nào, mà ở đó đã có năm số được điền, để từ đó suy ra ngay số ở ô trống phải là số nào. Vì thế, tương tự như việc giải ví dụ 4, điều cần làm trước hết là chọn ra ô trống đầu tiên để điền số.

– Như đã nêu ở trên, ta cần chọn ra ô trống mà số được điền ở ô đó chịu nhiều “áp đặt” hơn cả, từ các số đã có ở trong hàng, trong cột, trong vùng có chứa ô ấy. Quan sát kỹ bảng ở Hình 21, Bi thấy có bốn ô trống có tính chất như vậy; đó là các ô “?” trong bảng ở Hình 22.

	?	2	6	5	4
4	6				
1	3	?	4		5
5	?	4	3	1	
?			2	4	3
2	4				

Hình 22.

Mỗi ô “?” trong bảng trên đều chịu năm “áp đặt” khác nhau. Vì thế, chúng mình có thể chọn một ô tùy ý trong các ô đó, để bắt đầu thực hiện việc điền số. Ta chọn ô “?” nằm ở giao của hàng thứ 3 và cột thứ 3, các bé nhé. Vì ô này nằm ở hàng thứ 3, và ở hàng đó đã có các số 1, 3, 4, 5, nên số ở ô đó phải khác 1, 3, 4, 5 (trong mỗi hàng, mỗi số chỉ được có mặt một lần mà). Đồng thời, do ô đang xét nằm ở cột thứ 3, và ở cột này đã có các số 2, 4, nên số ở ô đó phải khác 2, 4 (đố các bé biết vì sao?). Từ đó suy ra, số được

điền vào ô đang xét phải khác 1, 2, 3, 4 và 5; vì thế, số ấy bắt buộc phải là 6 (xem Hình 23).

		2	6	5	4
4	6				
1	3	6	4	5	
5		4	3	1	
		2	4	3	
2	4				

		2	6	5	4
4	6				
1	3	6	4	5	
5		4	3	1	
		2	4	3	
2	4				

Hình 24.

– Xét tương tự trên đối với các ô “?” còn lại, ta sẽ tìm được các số cần điền vào các ô đó (xem Hình 24).

?	2	6	5	4	
4	6				
1	3	6	4		5
5	?	4	3	1	
?		2	3	4	
2	4				

1	2	6	5	4	
4	6				
1	3	6	4		5
5	2	4	3	1	
6		2	4	3	
2	4				

Hình 24.

?	1	2	6	5	4
4	6				
1	3	6	4	?	5
5	2	4	3	1	?
6	?	2	3	4	
2	4				

3	1	2	6	5	4
4	6				
1	3	6	4	2	5
5	2	4	3	1	6
6	5		2	4	3
2	4				

Hình 25.

– Trong bảng mới nhận được ở Hình 24, đã có những hàng, những cột, mà trong mỗi hàng, mỗi cột ấy đều có năm ô đã được điền số; đó là, các hàng thứ 1, thứ 3, thứ 4, và cột thứ 2. Rõ ràng, với những hàng, những cột này, ta sẽ xác định được ngay số cần điền vào ô trống ở mỗi hàng, mỗi cột ấy (xem Hình 25).

– Quan sát bảng mới nhận được ở Hình 25, ta thấy có thể xác định được số cần điền vào các ô “?” trong bảng ở Hình 26 dưới đây.

3	1	2	6	5	4
4	6	?	?	?	
1	3	6	4	2	5
5	2	4	3	1	6
6	5	?	2	4	3
2	4				

Hình 26.

Cụ thể, căn cứ các số đã được điền trong hàng thứ 2 và cột thứ 5, ta sẽ xác định được số cần điền vào ô “?” nằm ở giao của hàng và cột đó; căn cứ các số đã được điền trong vùng trên cùng bên trái, ta sẽ xác định được số cần điền vào ô “?” nằm ở giao của hàng thứ 2 và cột thứ 3; căn cứ các số đã được điền trong

hàng thứ 5, ta sẽ xác định được số cần điền vào ô “?” nằm ở hàng đó (xem Hình 27).

3	1	2	6	5	4
4	6	?	?		
1	3	6	4	2	5
5	2	4	3	1	6
6	5	?	2	3	4
2	4				

3	1	2	6	5	4
4	6	5	3	?	
1	3	6	4	2	5
5	2	4	3	1	6
6	5	1	2	4	3
2	4				

Hình 27

– Bằng cách áp dụng các suy luận tương tự trên, ta có các bước điền số tiếp theo, được thể hiện trong Hình 28 dưới đây.

3	1	2	6	5	4
4	6	5	?	3	
1	3	6	4	2	5
5	2	4	3	1	6
6	5	1	2	4	3
2	4	?		?	

3	1	2	6	5	4
4	6	5	1	3	
1	3	6	4	2	5
5	2	4	3	1	6
6	5	1	2	4	3
2	4	3		6	

3	1	2	6	5	4
4	6	5	1	3	2
1	3	6	4	2	5
5	2	4	3	1	6
6	5	1	2	4	3
2	4	3	5	6	1

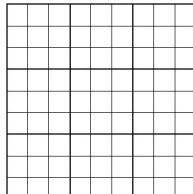
Hình 28.

Sau đây là một số thử thách sudoku dành cho các bé. Bi chúc các bé có những giờ phút thư giãn vui vẻ và trải nghiệm thật nhiều cảm xúc với trò chơi này nhé!

Bài tập 5. Điền các số 1, 2, 3, 4 vào các ô vuông còn trống trong bảng ở Hình 29, sao cho trong mỗi hàng, mỗi cột và trong mỗi vùng, mỗi số chỉ xuất hiện một lần.

	2	4	
			2
3			
	1	3	

Hình 29.



Hình 30.

8	1	2	5	7
7	5	6		3
4	9	7	5	2
5	3		7	8
		5	1	
4	8		1	2
2		4	5	6
7			8	3
5	8	7	6	1

Hình 31.

Bài tập 6. Bảng 9×9 được phân chia thành chín bảng con 3×3 (xem Hình 30); dưới đây, ta gọi mỗi bảng con 3×3 trong phân chia đó là một vùng.

Điền các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vào các ô vuông còn trống trong bảng ở Hình 31, sao cho trong mỗi hàng, mỗi cột và trong mỗi vùng, mỗi số chỉ xuất hiện một lần.

GẶP GỠ CUỐI NĂM: TRÒ CHUYỆN VỚI THANH TRA LÊ KÍNH

GIA DƯƠNG

Một chiều những ngày cuối năm, phóng viên tạp chí Pi có cuộc gặp gỡ ngắn với thanh tra Lê Kính tại văn phong thám tử Xuân Phong.

PV: Cảm ơn thanh tra đã nhận lời tạp chí. Các độc giả nhỏ tuổi rất mong chờ cuộc gặp gỡ này.

LK: Tôi rất vui có dịp giao lưu với các bạn nhỏ của Pi. Xuân Phong không thể tham dự vì một việc khẩn cấp, anh ấy đã đi từ sáng sớm.

PV: Anh có thể kể đôi chút về mình không?

LK: À, cũng không có gì đặc biệt. Tôi vốn là một bác sĩ nhưng một tai nạn xảy ra đã khiến tôi không tiếp tục công việc này. Và một sự tình cờ, tôi đã gặp Xuân Phong rồi cộng tác cùng anh ấy.

PV: Anh có thể kể một chút về lần gặp Xuân Phong không?

LK: Câu chuyện cũng hơi dài dòng nhưng chúng tôi cảm thấy như đã là bạn bè của nhau từ rất lâu rồi.

PV: Thời gian vừa qua, các bạn nhỏ rất ngưỡng mộ tài phá án tài tình của các anh. Anh có thể kể cho các bạn nhỏ một vài vụ án được không?

LK: Ah, tôi nghĩ là có một số vụ án hợp với các bạn đọc nhỏ tuổi của báo mình đấy, ngoài ra cũng có vài truyện bên lề thú vị nữa đấy. (Cười). Tuy nhiên tôi cho là các bạn nhỏ của Pi chắc thích tự khám phá hơn. Thế nên, tôi sẽ kể một vài câu chuyện xảy ra trong lúc thực thi công vụ của chúng tôi thời gian vừa qua, phần còn lại chờ các thám tử nhí “phá án” nhé.

PV: Tuyệt quá! Xin mời anh Kính.

Chiều cuối năm, phố xá đã rộn ràng đón tết, thanh tra Lê Kính đưa mắt xa xăm... Tôi nhớ như in hai lần đi công tác nước ngoài.

THỔ NGỮ CHÂU PHI

Chúng tôi trải qua mấy lần đổi máy bay ở sân bay Miến Điện rồi Rô-ma Ý – đại lợi phồn hoa nhưng nực nội, cuối cùng, chúng tôi cũng đáp xuống vùng đất hoang sơ của những cánh rừng bạt ngàn xanh mướt và những đồi cỏ trải ngút tận chân trời.

– Đẹp quá phải không anh Phong? Anh xem nơi đây giống thiên đường không. Mai tôi sẽ đưa anh ra chợ của người bản xứ để biết thêm về cuộc sống muôn màu sắc của họ.

Sáng hôm sau, tôi dẫn hai con ngựa tới rủ thám tử Phong xuống khu ở của người bản địa thuộc một bộ lạc. Đường đi xuống thung lũng thoai thoái đi qua những dải chuỗi rừng tựa ở quê nhà, những ruộng ngô tươi tốt sắp tới kì thu hoạch. Tới khu chợ rồi. Chao ơi, mới có vài ngày dùng đồ khô ăn liền, có nấu nướng cẩn thận, nên từ xa mùi thức ăn thơm ngon thật quyến rũ lạ thường.

– Anh Kính thử vào đây này. Họ có món gì ngon lắm.

Nghe Xuân Phong gọi, tôi ghé vào quán, phải thử một chút xem hương vị Phi Châu có khác vị Hà Thành không.

Người đàn ông bán hàng trông thật hóm hỉnh, độc một chiếc khổ quần ngang lưng. Vừa thấy Xuân Phong nhón nhác vì đói, ông ta nháy mắt đầy thông cảm và chỉ vào đống bánh nướng mật ong.

– KAF NAVCKI ROI – ông bán hàng ranh mãnh bảo với chúng tôi.

– Rồi, rồi. Tôi sẽ ăn. Mà anh Kính ơi, ông ấy bảo gì thế - thám tử Phong quay sang hỏi tôi.

– Ông ấy bảo "Lấy ba chiếc đĩ", tôi cũng biết vẽ một chút tiếng thổ ngữ giải thích cho Xuân Phong.

– Đây, tôi lấy ba cái – thám tử Phong lục vội trong túi rút ra ba đồng xu bạc mới được đổi và đưa cho người bán hàng. Hấp tấp thế nào mà anh ấy làm tung hết cả đống giấy tờ trong cặp.



- KIR ROI PALT – ông bán hàng cười sảng khoái nhìn Phong.
- Ô, ông ấy bảo phải đưa thêm hả anh Kính?
- Không, ông ấy bảo “Hãy cất ba đồng xu” đấy. Họ tốt bụng nên hôm nay cho anh ăn miễn phí.

Thám tử Phong vội vàng cất ba đồng xu vào túi.

- INOTI KAF KIR – người đàn ông Phi Châu lại cười như nắc nẻ.

- Lại gì thế anh Kính?

- Ông ý bảo “Lấy mấy đồng xu ra cẩn thận nhé”

Vừa lúc ấy bóng một người phụ nữ bản địa xuất hiện. Bà ta chưa đến nơi mà đã to tiếng, chắc là vợ ông bán hàng. Giờ thì người đàn ông Phi Châu lại đâm lo, có lẽ từ sáng chưa bán được chiếc bánh nào cho bà xã. Ông ta xua tay ra hiệu cho chúng tôi tránh đi và giấu mấy chiếc bánh trong túi kín cho bà vợ khỏi nhìn thấy.

Kể đến đây, thanh tra Kính dừng lại, cười và nói:

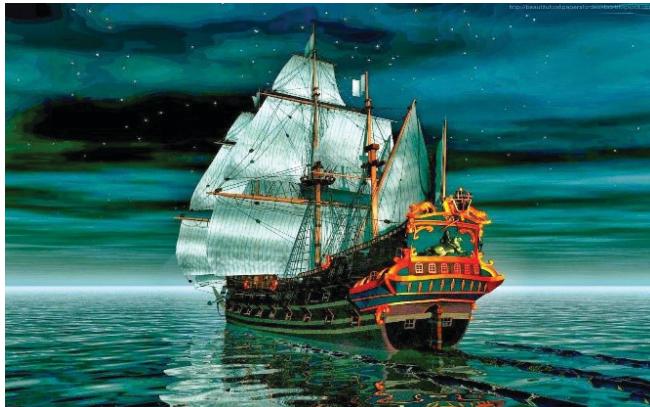
- Bây giờ có một câu hỏi cho các bạn nhỏ đây. Các bạn đoán thử đoán xem ông bán hàng Phi Châu sẽ nói “Hãy cất mấy chiếc bánh cẩn thận nhé” như thế nào bằng tiếng địa phương?

Trong lúc phóng viên của Pi đang ghi nhanh câu hỏi vào sổ thì thanh tra Kính lại tiếp tục ...

DU HÀNH TRÊN ĐẠI DƯƠNG

Một lần khác anh Phong và tôi đang ở trên chiếc du thuyền Nhật Bản thực hiện một chuyến đi dài ngày trên biển tới Puerto-Rico. Ngay trước khi tàu cập bến đích, thuyền trưởng quyết định đi

tắm cho chẩn chu diện mạo. Ông ta để lại chiếc ví và chiếc vòng tay bằng vàng nạm kim cương của mình trên giá và đi vào nhà tắm. Khi ông ta quay lại thì thấy cả chiếc ví và chiếc vòng đã không cánh mà bay. Tôi triệu tập 4 thuyền viên ở gần đó ngay lập tức, và gặng hỏi xem họ đã làm gì trong thời gian đó và đưa câu trả lời cho Xuân Phong xem.



Các câu trả lời của 4 thuyền viên như sau:

1. Bếp trưởng: Tôi lúc đó đang ở trong bếp để làm món bánh mỳ kẹp giảm bông thịt nguội cho tất cả mọi người trên tàu.
2. Thợ kỹ thuật: Tôi thì đang ở trong phòng của máy phát, kiểm tra bộ phát tín hiệu.
3. Quản lý thiết bị 1: Tôi thấy lá cờ treo trên nóc thuyền bị treo lộn ngược nên lúc đó đang trèo lên để sửa lại.
4. Quản lý thiết bị 2: Lúc đó tôi đang mệt nên chui vào một góc l chớp mắt một lúc.

Chỉ đọc lướt qua các câu trả lời, thám tử Xuân Phong đã xác định ngay được thủ phạm trộm đồ của thuyền trưởng. Vài tiếng sau, chiếc du thuyền lặng lẽ dưới ánh mặt trời đã cập bến Puerto-Rico an toàn trong sự hân hoan đón chào của người dân địa phương, ở đó một chiếc xe cảnh sát đã đợi sẵn để đưa kẻ trộm về nơi giam giữ.

Anh có thấy Xuân Phong tài không? Lê Kính quay sang mỉm cười với phóng viên của Pi. Theo Xuân Phong, nhiều lúc tôi

không biết làm sao cậu ấy có thể suy luận nhanh và tài tình thế. Ai là thủ phạm thì lại để dành cho các bạn nhỏ của Pi nhé.

Giọng của thanh tra Lê Kính chợt trầm xuống, “Không phải lúc nào chúng tôi cũng gặp những tình huống như trên, đôi khi Xuân Phong gặp cả những tình huống mà nguy hiểm đến cả tính mạng của mình đấy. Xuân Phong từng kể với tôi ...”

THỦ THÁCH SỐNG CÒN

Một lần nọ, Xuân Phong bị một nhóm kẻ cướp bắt cóc và đem giam trong một căn phòng đen kịt. Chúng lấy khăn vải che kín mắt của Xuân Phong và để vào đó 4 viên thuốc: 2 viên xanh và 2 viên màu đỏ, rồi ra mệnh lệnh:

– Ông thám tử kia hãy chọn ra đúng 2 viên để uống: chỉ được uống 1 viên màu xanh và một viên màu đỏ. Nếu uống đúng như vậy, ông sẽ có sức khỏe để phá được khóa cửa của căn phòng này. Còn nếu không, uống nhầm liều, ông sẽ lìa đời ngay lập tức.

Nói xong, bọn chúng cười ha hả rồi lăn ra ngủ, chắc mẩm Xuân Phong sẽ chọn nhầm liều và vĩnh viễn không ra khỏi phòng tối. Chừng nửa tiếng sau Xuân Phong đã dũng mãnh đập tan được cửa khóa đồng thời xông vào phòng khống chế được toàn bộ lũ cướp đang mê mệt trong cơn say.

Thật là quá nguy hiểm phải không? Tôi nghe kể mà cũng thấy sợ, vậy mà cậu ấy đã thoát chết một cách ngoạn mục. Các bạn nhỏ hãy nghĩ xem làm thế nào mà Xuân Phong đã vượt qua thử thách chết người đó nhỉ?

Nghe tiếng Xuân Phong sau những lần phá án kỳ tài của cậu ấy, văn phòng chúng tôi nhận được rất nhiều hợp đồng. Thế nên đôi khi phải nhờ thêm sự trợ giúp từ các học trò. Phong có 4 học trò yêu quý, được tuyển chọn từ những người đam mê phán đoán suy luận. Một lần nọ, sau một kỳ học tập trung về ngành Thám tử, Xuân Phong gọi 4 học trò của mình tới để khích lệ động viên và trao cho họ món quà kỷ niệm. Tuy nhiên, cậu ấy muốn thử tài các học trò mình một chút...

CHIẾC MŨ KỶ NIỆM

Xuân Phong nói với các học trò: “Các em hãy đứng thành một hàng dọc và nhắm mắt lại nào. Thầy sẽ trao tặng các em mỗi người một chiếc mũ có in hình lưu niệm. Thầy có 4 chiếc: 1 chiếc màu xanh, một chiếc màu đỏ, một chiếc màu đen, và một chiếc có cùng màu với 1 trong 3 chiếc kia. Giờ thì các em ai đấy đều có mũ rồi đấy. Chuẩn bị mở mắt ra nhé. Vậy là ai cũng sẽ nhìn thấy những người đứng trước mình đội mũ màu gì rồi. Nhưng không được quay ra xem người đứng sau, và cũng không được gỡ mũ ra khỏi đầu. Nào, các em hãy thử đoán ra xem mình đội mũ màu gì. Bắt đầu từ bạn đứng cuối hàng, lần lượt các em hãy trả lời thật dõng dạc nào.

Thật là vui vì ai đấy đều đoán đúng mình đội mũ màu gì, không sai tẹo nào. Sau kỳ học, các học trò đều tự hào về tài phán đoán và đi khắp nơi khoe với bạn bè rằng mình là học trò yêu dấu nhất của thám tử Xuân Phong. Thực ra họ không biết thầy Xuân Phong vì muốn động viên học trò nên đã có xếp 4 chiếc mũ một cách khéo léo để ai cũng tìm ra câu trả lời.

Vậy thầy Phong đã xếp 4 chiếc mũ như thế nào trong hàng để giúp các học trò của mình nhỉ?

Theo Xuân Phong nhiều, nhưng tôi vẫn luôn ấn tượng với khả năng suy luận của cậu ấy. Và câu chuyện sau đây cũng không là ngoại lệ...

VỊ THÁM TỬ ẨN DANH

Một hôm sau giờ làm, Xuân Phong và tôi ghé qua quán cơm Hương Sen thưởng thức thực đơn mới. Tiếng bát đũa, cốc chén leng keng hòa với tiếng nói chuyện râm ran của thực khách làm cho ai nấy đều muốn quên hết công việc điều tra và phá án.

Tôi nói với Xuân Phong:

- Vui quá, anh Phong nhỉ. Chả mấy khi chúng ta lại được hòa chung với không khí thảnh thoị thế này.
- Xuyt, nhìn kìa anh Kính. Xem ra chúng ta lại gặp một thám tử

cũng đang điều tra tác nghiệp ở đây.

Ngoảnh mặt lại, tôi nhìn thấy phía góc bên kia của quán cơm có 4 người ngồi quanh một chiếc bàn vuông, bao gồm 2 người đàn ông và 2 người phụ nữ. Xuân Phong nói khẽ với tôi “Anh Kính chú ý nhé, 4 người đó có cô TRANG, cô MAI, anh VINH cùng anh TRỌNG, hơn nữa có một người là BÁC SỸ, một người là THẨM PHÁN, một người là LUẬT SƯ và một người là THÁM TỬ TU.”



“Vậy ai là Thám tử tư đây nhỉ?” – tôi băn khoăn, đưa vội mẩu bánh mỳ vào miệng cho bụng đỡ cὸn cào sau cả ngày làm việc vất vả.

Xuân Phong nhíu đôi mày và cung cấp thêm vài mẩu thông tin: “Tôi chưa rõ ai làm nghề gì, nhưng qua câu chuyện từ bên bàn đó vọng lại tôi biết được chút ít như sau:

1. BÁC SỸ ngồi cạnh phia bên tay trái cô MAI.
2. THẨM PHÁN ngồi đối diện anh Trọng.
3. Cô TRANG ngồi cạnh anh VINH.
4. Ngồi bên cạnh bên tay trái LUẬT SƯ là một phụ nữ.”

“Bữa trưa hôm ấy, tưởng là được thảnh thoảng ăn uống, mà Xuân Phong lại làm tôi đau đầu ra để nghỉ đấy. Đúng là bệnh nghề nghiệp!” Thanh tra Lê Kính vừa nói vừa cười phóng viên của Pi. “Các bạn nhỏ thử tìm xem ai là Thám tử tư trong số 4 người ngồi bên bàn đó nhé! Thử xem các bạn có bị đau đầu như tôi không!”

Đang hăng say kể truyện, chợt thanh tra Kính quay lại hỏi: “Có phải tôi đã kể quá nhiều rồi không? Thôi, tôi sẽ kể thêm nốt một câu chuyện nữa.”

BA CHIẾC HỘP VÀ CÔ THƯ KÝ

Một ngày đầu tuần tôi đến cơ quan và vô cùng ngạc nhiên vì văn phòng thám tử mọi khi khá bừa bộn đã được sắp đặt gọn gàng, lau chùi thơm tho. Tôi đang nghĩ ngợi thì nghe thấy bước chân Xuân Phong cộc cộc ngoài hành lang.

– Anh ngạc nhiên phải không? Đây là bàn tay dọn dẹp của cô thư ký mới đây. Cô ấy thật gọn gàng và ngăn nắp. À mà này, anh có để ý ới 3 cái hộp đựng thư từ liên lạc gửi đến cho tôi và anh nằm ở kia không?

Theo hướng chỉ của anh Phong, tôi thấy 3 cái hộp gỗ vuông vức đặt cạnh nhau, đã được dán nhãn rõ ràng và đẹp mắt: “Hòm thư riêng của Xuân Phong”, “Hòm thư riêng của Lê Kính”, “Hòm thư chưa phân loại, lần cả thư gửi Xuân Phong và Lê Kính”.

– Đúng là phụ nữ thật cẩn thận, phải không anh Phong?

– Thực ra là không cẩn thận lắm đâu. Tôi đã kiểm tra, đều thấy cả 3 hộp ghi sai hết.

– Giờ phải làm thế nào anh Phong? Chẳng lẽ lại bắt cô ý lục đống thư này hết lên và xếp lại?

– Anh Kính làm việc với tôi lâu nên tôi thử đố anh một nhiệm vụ này nhé. Anh hãy nhặt đúng một bức thư trong 3 cái hộp kia lên để kiểm tra người nhận và xếp lại nhãn 3 hòm thư cho đúng được không?

“Lúc đầu quả là tôi có bối rối một chút, nhưng rồi cũng nhanh chóng hoàn thành nhiệm vụ chỉ trong có một phút đấy.” Thanh tra Kính nói với phóng viên của Pi, giọng có chút tự hào.

Các bạn nhỏ có biết tôi đã làm thế nào không, nhớ là chỉ được nhặt lên đúng một phong bì thư thôi nhé.



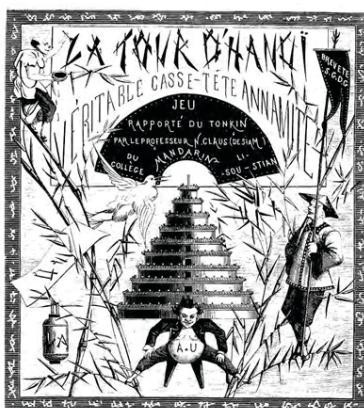
Chiều đã muộn, ngày cuối năm bận rộn, mà không ai trong văn phòng của Pi muốn về, tất cả vẫn say sưa nghe thanh tra Lê Kính kể truyện. Bất chợt, cửa phòng bật mở và Xuân Phong bước vào, rồi nhanh chóng cùng Lê Kính rời đi. Chắc là có một vụ án gấp cần hai thám tử của chúng ta ra tay giải quyết. Mặc dù phải đi gấp nhưng thanh tra Lê Kính vẫn kịp nhẫn: thám tử Xuân Phong đang chuẩn bị mở câu lạc bộ Thám tử nhí, 10 bạn đầu tiên tìm được nhiều câu trả lời đúng nhất cho những câu chuyện trên thì sẽ được tham gia vào câu lạc bộ này. Tất nhiên là có ưu tiên cho các độc giả của Pi. Các bạn nhỏ ơi, tết này vừa ăn vừa chơi, vừa tìm lời giải cho những tình huống của Xuân Phong để được là thành viên của câu lạc bộ Thám tử nhí nhé.

BÀI TOÁN THÁP HÀ NỘI

HÀ HUY KHOÁI

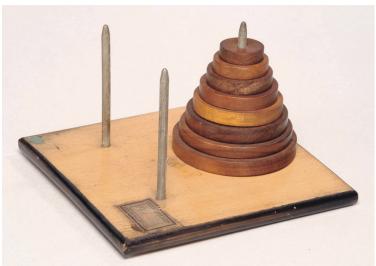
Trò chơi “Tháp Hà Nội”, xếp những miếng gỗ trên ba chiếc cọc, đã rất quen thuộc với các bạn nhỏ Việt Nam cũng như nhiều bạn nhỏ trên thế giới. Thật là tuyệt vời khi một trò chơi nổi tiếng trên thế giới lại có tên liên quan đến thủ đô của nước ta đúng không. Các bạn đã biết về xuất xứ cùng với nhiều điều thú vị xung quanh bài toán “Tháp Hà Nội” chưa? Chúng ta hãy cùng ngược dòng thời gian để tìm hiểu qua bài viết dưới đây nhé.

Năm 1883, Eduard Lucas (Claus) công bố bức tranh quảng cáo “Tháp Hà Nội – trò chơi thực sự nát óc xứ Annam”:



Một năm sau, Lucas viết bài “Tháp Hà Nội , trò chơi toán học” đăng ở tạp chí “Science et Nature”, số 1 (1884) tr. 127 – 128. Có thể xem đó ngày khai sinh của “Bài toán Tháp Hà Nội”, một trong những bài toán nổi tiếng của toán học. Cho đến ngày nay, vẫn còn rất nhiều công trình nghiên cứu về bài toán tháp Hà Nội và những mở rộng của nó, vẫn còn nhiều giả thuyết đang chờ câu trả lời.

Hình sau đây là bức ảnh chụp từ hiện vật trưng bày trong “Musée des arts et métiers–Cnam Paris” (Bảo tàng nghệ thuật và thủ công Paris).



Ta có ba cái cọc, và 8 cái đĩa với kích thước khác nhau đôi một. Bài toán đặt ra là di chuyển toàn bộ 8 cái đĩa sang một cọc khác, sao cho vẫn giữ được thứ tự các đĩa với bán kính lớn dần từ trên xuống dưới. Quy tắc di chuyển: mỗi lần chỉ được chuyển một đĩa, và không bao giờ được đặt một đĩa lên đĩa khác có bán kính nhỏ hơn. Điều này có thể làm được nhờ sử dụng cọc “trung gian”.

Các bạn thử hình dung xem ta sẽ cần làm bao nhiêu phép chuyển đĩa?

Trước hết, ta thử làm bài toán dễ hơn: trên cọc chỉ có 2 đĩa. Rõ ràng chỉ cần chuyển đĩa nhỏ sang cọc trung gian, đĩa lớn sang cọc còn lại, rồi chuyển đĩa nhỏ lên cọc đó. Số bước chuyển là 3.

Nếu có 3 đĩa trên cọc thì sao? Giả sử các đĩa đang ở cọc A , và ta cần chuyển sang cọc C . Ta chuyển hai đĩa trên cùng sang cọc trung gian B , rồi chuyển đĩa to nhất sang cọc C . Sau đó chỉ cần chuyển hai đĩa từ cọc B sang cọc C . Phương pháp chuyển 2 đĩa từ cọc này sang cọc khác thì ta đã biết. Như vậy, số phép chuyển phải làm khi có 3 đĩa bằng 2 lần số phép chuyên khi có 2 đĩa, cộng thêm 1 phép chuyển (đĩa to nhất).

Như vậy, số bước chuyển cần thiết của 3 đĩa là: $2 \times 3 + 1 = 7$. Bằng quy nạp, dễ chứng minh nếu N là số phép chuyển khi có n đĩa thì với $(n + 1)$ đĩa, ta có thể thực hiện nhiệm vụ với $(2N + 1)$ phép chuyển. Từ đó, dễ suy ra, nhiệm vụ đặt ra trong bài toán Tháp Hà Nội với n đĩa có thể thực hiện với $2^n - 1$ phép chuyển.

Có thể chứng minh $2^n - 1$ là số phép dịch chuyển tối thiểu cần thiết, nghĩa là không có cách gì thực hiện nhiệm vụ với số phép dịch chuyển ít hơn.

Người ta cho rằng, bài toán Tháp Hà Nội lấy ý tưởng từ câu chuyện cổ Ấn Độ sau đây.

“Trong ngôi đền vĩ đại ở Benares, bên dưới mái vòm đánh dấu trung tâm thế giới, người ta đặt một chiếc đĩa bằng đồng, trên đó gắn cố định ba chiếc cọc kim cương, mỗi chiếc cao một mét và dày như thân của một con ong. Trên một trong những chiếc cọc kim cương đó, vào buổi sáng tạo, Thượng Đế đặt 64 chiếc đĩa bằng vàng nguyên chất, theo thứ tự to dần từ trên xuống dưới. Ngày đêm không ngừng, những con quỷ chuyển các đĩa từ cọc kim cương này sang cọc kim cương khác theo nguyên tắc không được di chuyển nhiều hơn một đĩa cùng một lúc, và không được đặt đĩa nào lên trên cái nhỏ hơn nó. Khi 64 chiếc đĩa được chuyển xong thì tiếng sét sẽ nổ ra, và thế giới tan biến”.

Những suy luận trên đây chỉ ra rằng, số phép dịch chuyển mà lũ quỷ phải làm ít nhất là

$$2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615.$$

Giả sử lũ quỷ rất thạo “thuật toán dịch chuyển”, và mỗi giây chúng chuyển được một đĩa, thì phải mất khoảng 585 tỷ năm. Có lẽ dù không có lũ quỷ, trái đất của chúng ta cũng không tồn tại được lâu đến thế!

Từ sau khi ra đời, bài toán Tháp Hà Nội nhận được sự quan tâm lớn của các nhà toán học và những người làm ... đồ chơi. Rất nhiều phiên bản của bài toán Tháp Hà Nội xuất hiện, chẳng hạn như số cọc lớn hơn 3, hoặc cách chơi có thay đổi. Cho đến ngày nay, Tháp Hà Nội và những biến thể của nó vẫn là bài toán quan trọng trong toán học rời rạc, lý thuyết đồ thị, khoa học máy tính, và tô pô (chẳng hạn, bài toán về đường cong tự cắt tại mọi điểm của nó!). Thậm chí, Tháp Hà Nội còn có ứng dụng rộng rãi trong nghiên cứu tâm lý học!

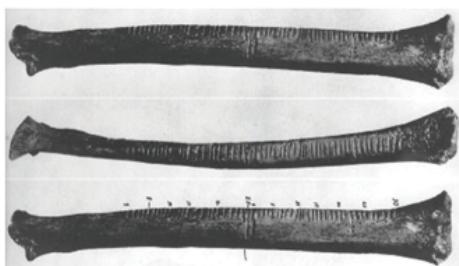
Người ta cho rằng, sở dĩ bài toán Tháp Hà Nội lôi cuốn được nhiều thế hệ các nhà toán học vì nó chứa đựng những yếu tố làm nên sức hấp dẫn của Toán học: đẹp, thú vị, hữu ích, và bất ngờ.

MỘT SỐ HỆ THỐNG SỐ THỜI CỔ ĐẠI

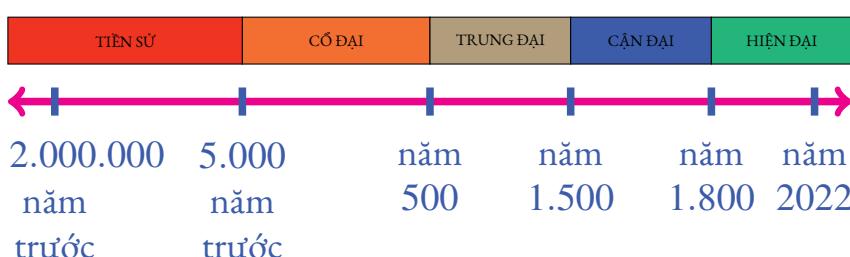
PHAN THANH HỒNG

Mặc dù ngày nay, một số bộ lạc thổ dân sống ở rừng rậm Amazon, chỉ có những từ: “một”, “hai” và “nhiều” để nói về số lượng hay một số bộ khác chỉ đếm từ 1 đến 5; từ xa xưa người tiền sử đã đếm những số lớn hơn bằng cách đánh dấu lên đá hay xương động vật.

Từ hàng nghìn năm trước, ở những nền văn minh khác nhau, con người đã phát minh ra những hệ thống số để phục vụ mục đích đầu tiên là ghi nhớ những đại lượng lớn hơn. Những con số đó chính là khởi nguồn của toán học. Trong bài viết này chúng mình hãy cùng tìm hiểu về những con số của những nền văn minh khác nhau thời cổ đại nhé.



Hình 1: Những mảnh xương chó sói trên có khía, được cho là ra đời cách đây 30.000 năm và là công cụ để đếm của người thời tiền sử.



Trước tiên, các em hãy quan sát những hình ảnh trong hình bên. Em có đoán được chúng nói lên điều gì không? Chúng cùng nói về một thứ. Đó là số 23. Từ trên xuống, số 23 lần lượt được viết trong hệ thống số của người Ai Cập, người Babylon, người Maya và người Trung Quốc thời cổ đại.

Các em thấy chúng có điểm gì chung? Em có thể đoán xem kí hiệu nào biểu diễn hàng chục, hàng đơn vị không? Chúng khác cách chúng ta viết số 23 ngày nay như thế nào?

Số Ai Cập cổ

Ai Cập cổ đại, một trong những cái nôi văn minh của nhân loại, là vùng đất nằm dọc hai bên sông Nile, phía Bắc của châu Phi. Toán học đã xuất hiện ở đây cách đây hơn 5000 năm. Những thành tựu toán học là một trong những yếu tố quan trọng giúp người Ai Cập cổ xây dựng nên những kim tự tháp mà một số vẫn còn tồn tại đến ngày nay.

Người Ai Cập cổ sử dụng những kí hiệu bằng hình ảnh để viết chữ và viết các số (được gọi là chữ viết *tương hình*). Những kí hiệu chữ số của họ như sau



	⩑	⩒	⩓	⩔	⩕	⩖
1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
Gạch đứng	Móng ngựa	Cuộn dây	Hoa sen	Ngón tay	Con ếch	Vị thần

Số 4 được viết là | | | | còn | | | là số 7. Để viết các số từ 10 trở lên, người ta dùng thêm kí hiệu ⩑ (để biểu diễn số 10), chẳng hạn số 17 được viết là ⩑ | | | và số 27 được viết là ⩑ ⩑ | | | . Số lượng các kí hiệu ⩑ cho biết có bao nhiêu chục, số các kí hiệu | cho biết có bao nhiêu đơn vị trong số được biểu diễn. Với những số từ 100 trở đi họ dùng kí hiệu ⩒ (biểu diễn số 100) và viết các số theo cách tương tự; và cứ như vậy cho những số lớn hơn. Để biết giá trị của số được biểu diễn ta cộng các giá trị ứng với những kí hiệu

biểu diễn nó. Chẳng hạn,  = $100 + 100 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 233$.



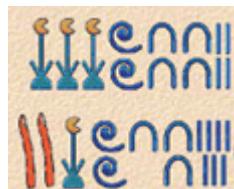
Ngày nay, ta dùng các hàng khác nhau để biểu diễn số: hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm,... Hàng chục đứng ngay trước hàng đơn vị và lớn gấp 10 lần hàng đơn vị, hàng trăm đứng ngay trước hàng chục và lớn gấp 10 lần hàng chục. Do đó, hệ thống số mà chúng ta sử dụng hiện nay trong đời sống là “hệ cơ số 10”, hay “*hệ thập phân*”. Hệ thống số Ai Cập cổ cũng là một hệ cơ số

10 nhưng việc viết các số phức tạp hơn so với cách viết ngày nay của chúng ta, nhất là với những số lớn. Chẳng hạn để viết số 5.412.316 người Ai Cập cổ xưa cần dùng 22 kí hiệu!

$$5412316 = \text{Egyptian numerals}$$

Em hãy hai các số Ai Cập trong hình sau đây theo cách thông thường nhé.

Số La Mã



Các em có nhìn thấy các kí hiệu I, II, ... X trên mặt đồng hồ, trong sách vở, trên bảng khi cô giáo đánh số các mục trong bài giảng? Đó là các số La Mã. La Mã là tên gọi một quốc gia cổ đại thuộc châu Âu mà có thời kì từng thống trị một vùng đất rộng lớn của châu lục này. Người La Mã sử dụng một số chữ cái từ bảng chữ cái của họ để biểu diễn những chữ số khác nhau.

A	G	M	S
B	H	N	T
C	I	O	U
D	J	P	V
E	K	Q	W
F	L	R	X
			Y
			Z



I = 1	L = 50
V = 5	C = 100
X = 10	D = 500
	M = 1000

Chú thích: các chữ cái và chữ số La Mã

Số 4 được viết là IV, còn số 6 là VI. Khi một chữ số lớn được viết ngay trước một chữ số nhỏ hơn bằng nó, ta cộng chúng lại với nhau để được con số cần biểu diễn, như trường hợp số 6 = VI. Ngược lại, ta thực hiện phép trừ, giống như trường hợp số 4 = IV.

IV = 4: V - I = IV 5 - 1 = 4	VI = 6: V + I = VI 5 + 1 = 6
------------------------------------	------------------------------------

Tương tự, ta có

XXXII = 32: X + X + X + I + I = XXXII 10 + 10 + 10 + 1 + 1 = 32	XL = 40: L - X = XL 50 - 10 = 40
---	--

Theo cách người La Mã viết số, một chữ số nhỏ đứng trước chữ số số lớn hơn, ta trừ số lớn cho số bé. Trong đó I, V chỉ được trừ từ những giá trị không quá X. Ví dụ, ta có thể viết IX nhưng không thể viết IL; X, L chỉ được trừ bởi những chữ số không vượt quá C; C, D chỉ được trừ cho những chữ số không vượt quá M. Ngoài ra, còn có những quy tắc khác như sau:

- Luôn viết số bằng cách dùng ít kí hiệu nhất, chẳng hạn ta viết XX để biểu diễn 20 thay vì VVVV.
- Không có nhiều hơn 3 kí tự giống nhau trong một hàng (đơn vị, chục, trăm,...). Ví dụ ta viết XIV thay vì XIIIII để biểu diễn 14.
- Để biểu diễn số gấp hơn 1000 lần, người La Mã dùng vạch ngang phía trên các dãy chữ số, ví dụ $\overline{VIII} = 6 \times 1000 + 2 =$

6002. Ở đây, VI có thêm vạch ngang trên đầu biểu diễn giá trị $6 \times 1000 = 6000$. Những chữ số có vạch ngang trên đầu đứng trước các chữ số còn lại.

Không đặt nhiều hơn 1 số nhỏ đứng trước 1 số lớn. Ví dụ ta không viết IIX để biểu diễn 8.

Để dễ dàng viết số La Mã, ta viết theo từng hàng từ lớn đến nhỏ (như các số mà ngày nay chúng ta dùng). Ví dụ, để viết số 645, ta viết 600 trước (DC), rồi 40 (XL) và cuối cùng là 5 (V). Vậy $DCXLV = 645$.

Số Babylon

Người Babylon, sống vào khoảng 5000 năm trước ở vùng đất Lưỡng Hà (một khu vực ở phía Tây của Châu Á), nổi tiếng vì khả năng toán học của họ. Họ đã tạo ra những công cụ tính toán thiên văn, hình học đáng kinh ngạc và họ đã phát minh ra bàn tính.

Trong hệ thống số của mình, ban đầu người Babylon chỉ sử dụng 2 ký hiệu



𒐏	1
𒉢	10

để viết số từ 1 tới 60, chẳng hạn số 7 là 𒇉, số 27 là 𒉢𒇉.

Những ký hiệu này được sử dụng tương tự như những chữ số La Mã (bằng cách cộng các ký hiệu xuất hiện trong số được biểu diễn). Số 𒇉 được viết bởi 2 ký hiệu 𒉢 để biểu diễn 2 chục, và 7 ký hiệu 𒐏 cho 7 đơn vị. Do vậy $\text{𒉢} = 27$.

Sau đó, một ký hiệu mới được sử dụng để biểu diễn chữ số 0 (các em có thấy nó là chữ số 1 viết ngičeng?)

Để viết những số từ 60 trở đi, người Babylon xếp các kí hiệu theo các nhóm. Điều này giống như ngày nay các em viết 159 bằng cách viết số 1 đầu tiên ứng với hàng trăm, số 5 tiếp theo ở hàng chục và cuối cùng là số 9 ở hàng đơn vị. Như vậy $159 = 1 \times 100 + 5 \times 10 + 9$.



Để viết số 63, người Babylon viết kí hiệu **𒃲** ở hàng 60 và ba kí hiệu **𒃲** ở hàng đơn vị và để khoảng trống để phân biệt hai nhóm (tức hai hàng: hàng 60 và hàng đơn vị) **𒃲 𒃲 𒃲**

Vậy **𒃲 𒃲 𒃲 = 63**. Trong cách viết này, ta thấy có 4 kí hiệu **𒃲** nhưng kí hiệu đầu tiên được viết tách biệt so với 3 cái còn lại để biểu diễn số 1 lần 60 tức 60, 3 kí hiệu còn lại biểu diễn số 3 và như vậy ta có số

$$60 + 3 = 63.$$

Điều này giống như chúng ta viết chữ số 1 ở hàng chục và chữ số 1 ở hàng đơn vị để biểu diễn số 11: nó có nghĩa là 1 chục và 1 đơn vị. Trong hệ thống số Babylon cổ, nó có nghĩa là 1 lần 60 và 1.

Để hiểu rõ hơn, ta hãy viết số chín mươi ba theo hệ số hiện đại. Việc này thật dễ dàng phải không? Tuy nhiên để hiểu cách viết của người Babylon ta sẽ thực hiện theo cách sau: do các số của chúng ta ngày nay sử dụng hệ cơ số 10, ta chia chín mươi ba cho 10 được thương là 9, nên ta viết 9 vào hàng chục

$\times 10 \times 10$	$\times 10$	$\times 1$
	9	

Phép chia đó có số dư 3 nên ta viết 3 vào hàng đơn vị

$\times 10 \times 10$	$\times 10$	$\times 1$
	9	3

Vậy là ta viết: 93.

Thế còn người Babylon viết số 93 trong hệ thống số của họ như thế nào?

Hệ thống số Babylon sử dụng hệ cơ số 60: ta chia 93 cho 60 được thương là 1 nên ta viết 1 ở hàng 60

$\times 60 \times 60$	$\times 60$	$\times 1$
	⋮	

Phép chia có số dư là 33, nên ta sẽ viết 33 ở hàng đơn vị. Số 33 được biểu diễn bởi 3 ký tự mươi cộng với 3. Nên ta đặt 3 ký tự 10 và 3 ký tự 1 vào hàng đơn vị như sau

$\times 60 \times 60$	$\times 60$	$\times 1$
	⋮	⋮

Vậy ⋮ ⋮ = 93.

Tiếp theo, chúng ta hãy thử viết số lớn hơn. Chúng ta hãy cùng viết số 3604 bằng các chữ số Babylon nhé. Số 3604 lớn hơn $60 \times 60 = 3600$, nên ta cần biểu diễn số này từ hàng thứ 3 tính từ hàng đơn vị. Ta chia số 3604 cho 3600 được thương là 1 nên ta viết ký tự số ⋮ vào hàng 60×60

$\times 60 \times 60$	$\times 60$	$\times 1$
⋮		

Số dư của phép chia là 4 nhỏ hơn 60 nên ta viết ký hiệu số 0 (⋮) vào hàng 60, và 4 (⋮ ⋮ ⋮ ⋮) vào hàng đơn vị.



(⋮ ⋮ ⋮ ⋮) vào hàng 60, và 4 (⋮ ⋮ ⋮ ⋮) vào hàng đơn vị.

$\times 60 \times 60$	$\times 60$	$\times 1$
(a stylized Y-shape)	(a stylized L-shape)	(a small triangle)

Vậy, số 3604 được người Babylon viết như sau:



Số của người Ai Cập, La Mã hay chúng ta ngày nay được gọi là hệ số số 10 còn số của người Babylon là cơ số 60. Do số 60 chia hết cho nhiều số: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 và 60 việc chia các đại lượng được thực hiện dễ dàng hơn, ít phải dùng đến các phân số. Việc sử dụng đơn vị thời gian: 1 phút = 60 giây, 1 giờ = 60 phút ngày nay là một ảnh hưởng của người Babylon đấy.

Số Maya

Người Maya được cho là đã xuất hiện từ rất xa xưa. Họ đã xây dựng hệ thống lịch chính xác và toán học của họ là đại diện tiêu biểu cho toán học của các cộng đồng dân cư ở châu Mỹ thời cổ đại.



Nói về hệ thống số, người Maya cổ dùng hệ cơ số 20, gồm 3 ký hiệu: (oval), (dot), (bar) ứng với

0, 1, 5 và biểu diễn số theo chiều dọc. Chữ số ở hàng cao hơn được viết phía trên, chữ số ở hàng thấp hơn được viết phía dưới. Điều này tương tự chúng ta viết số ngày nay: ta đặt số ở hàng cao hơn bên trái còn số ở hàng thấp hơn bên phải.

Kim tự tháp Tikal của người Maya

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$	$10^2 = 10 \times 10 = 100$	$10^1 = 10$	$10^0 = 1$
hàng nghìn	hàng trăm	hàng chục	hàng đơn vị

Do sử dụng hệ cơ số 20, số Maya được biểu diễn trong phần bên phải của bảng sau chính là số $1 \times 8000 + 0 \times 400 + 10 \times$

$20 + 7 \times 1 = 8207$. Bởi vì, ta thấy •, ஓ, =, ஓ� ứng với 1, 0, 10, 7 lần lượt ở các hàng 8000, 400, 20 và đơn vị. Chú ý rằng, trong một hàng, số có giá trị cao hơn lại được viết phía dưới số có giá trị lớn hơn chẳng hạn ஓ�: hai kí tự • (số 1) được viết bên trên kí tự � (số 5). Kí hiệu ஓ để biểu diễn 0 ở một hàng giống như ta viết 101 và giúp ta phân biệt số 101 với số 11. Điều này cũng tương tự như ở hệ thống số Babylon.

$20^3 = 20 \times 20 \times 20 = 8000$	8000s place	•
$20^2 = 20 \times 20 = 400$	400s place	ஓ
$20^1 = 20$	20s place	=
$20^0 = 1$	ones place	ஓ�

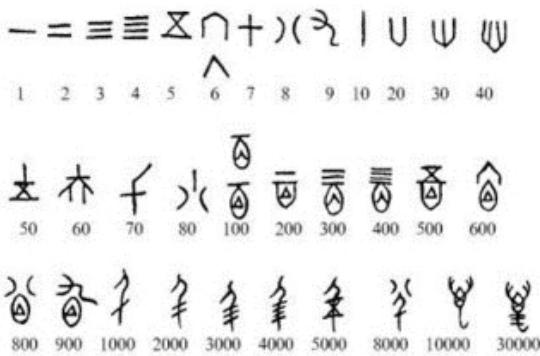
Người ta cho rằng hệ cơ số 10 được dùng phổ biến vì con người có 10 ngón tay (các em nhỏ rất hay xòe tay để đếm phải không nào?), còn người Maya vốn ko đi giày nên họ

đếm bằng cả các ngón chân nữa. Họ dùng hệ cơ số 20 là vì thế!



Số Trung Hoa cổ

Trung Hoa cổ đại là một trong những nền văn minh cổ lớn của thế giới. Người Trung Hoa dưới thời nhà Thương (khoảng 3500 năm trước) sử dụng những mảnh mai của con rùa, trên đó khắc những kí hiệu khác nhau thể hiện số và chữ để bói toán. Một số trong đó như sau



Một số kí hiệu viết trên một mảnh mai rùa.

Cách biểu diễn số Trung Hoa cổ tương tự như số La Mã: Các chữ số giá trị lớn được đặt bên trái các chữ số có giá trị nhỏ hơn, số được biểu diễn có giá trị bằng tổng các chữ số trong biểu diễn của nó. Ví dụ biểu diễn số $10000 + 500 + 30 + 5 = 10.535$. Những biểu tượng khắc trên những mảnh mai rùa phát triển theo thời gian và hình thành nên chữ viết của người Trung Hoa ngày nay.

Nhìn lại các hệ thống số trên đây, các em có thấy rằng cách biểu diễn số của người Ai Cập, La Mã và Trung Hoa cổ có điểm tương đồng? Chúng đều là những hệ thống số “đơn phân”. Mỗi kí hiệu thể hiện một giá trị không thay đổi cho dù nó đứng ở vị trí nào. Mỗi số viết ra biểu diễn một đại lượng được xác định bằng cách cộng (hay trừ như ở số La Mã) những giá trị tương ứng với các kí hiệu được sử dụng trong đó. Hệ thống số mà chúng ta dùng ngày nay là một hệ thống số “sắp theo hàng” vì các kí hiệu có giá trị phụ thuộc vào hàng mà nó được xếp vào. Ở hàng chục, số 1 có nghĩa là một chục, nhưng số 1 ở hàng đơn vị có nghĩa là 1 đơn vị. Trong khi đó, số của người Babylon và Maya là một dạng hồn hợp vừa được “sắp theo hàng” vừa cần cộng những



kí hiệu trong mỗi hàng để biết giá trị của số được biểu diễn.

Vậy là qua bài viết này chúng ta đã biết thêm được những cách mà con người ở những nơi khác nhau trên trái đất từ thời xa xưa viết các số như thế nào. Những đại lượng phức tạp hơn như phân số chẳng hạn cũng đã được người cổ đại viết ra và sử dụng. Các em hãy đồng hành cùng Bi để tìm hiểu thêm về những thành tựu toán học của loài người ở những thời kì trước đây trong những số báo sắp tới nhé.

Tài liệu, nguồn tham khảo:

<https://www.britannica.com/topic/Latin-alphabet>

<https://www.penn.museum/>

<https://www.cemc.uwaterloo.ca>

R. L. Cooke, History of math, Wiley, 2013.