VỀ HUY CHƯƠNG CHERN 2022: BARRY MAZUR[1]

MARIANNE FREIBERGER

(Người dịch: Nguyễn Chu Gia Vượng)

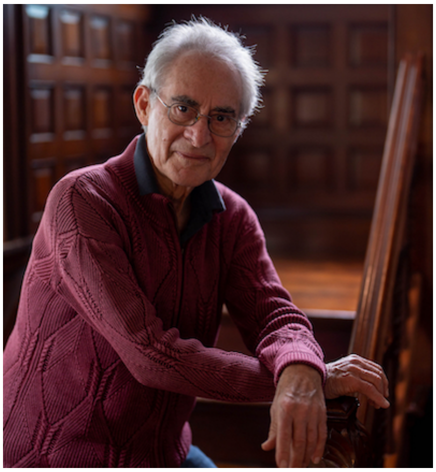
Huy chương Chern năm nay đã được trao cho Barry Mazur, giáo sư toán của Đại học Harvard. Huy chương Chern được trao bốn năm một lần tại Đại hội Toán học Thế giới "cho một cá nhân có những thành tích đảm bảo mức ghi nhận cao nhất dành cho những thành tựu đặc biệt xuất sắc trong lĩnh vực toán học".

Mazur đã nhận được huy chương vì "những khám phá sâu sắc trong tô pô, hình học số học và lý thuyết số, cũng như năng lực dẫn dắt và sự ân cần của ông trong việc đào tạo thế hệ những nhà toán học tiếp theo".

Chúng tôi may mắn được nói chuyện với Mazur trong thời gian chuẩn bị cho Đại hội Toán học thế giới năm nay, được tổ chức với hình thức hỗn hợp giữa trực tiếp và trực tuyến, trong đó phần trực tiếp diễn ra tại Helsinki, Phần Lan. Ông kể cho chúng tôi nghe một câu chuyện đáng kinh ngạc về những thay đổi về chủ đề nghiên cứu, những hướng đi mới và một cái nhìn rất riêng về toán học.

Từ đài phát thanh đến hình học của miếng cao su

Mazur đến với toán học từ sự yêu thích đối với truyền thanh. "Vật lý của đài phát thanh, với những điều bí ẩn và kỳ diệu của nó, đã khiến tôi bị cuốn hút khi tôi 12 tuổi," ông nói. Ở trường trung học, ông trở thành một kỹ thuật viên phát thanh nghiệp dư, gửi tin nhắn bằng mã Morse tới các kỹ thuật viên khác ở khắp nơi trên thế giới.



Barry Mazur. Ảnh: Lance Murphey.

"Tôi bị cuốn hút bởi cách mà 'hành động từ xa' này có thể xảy ra, và hoài nghi mọi giải thích về điều đó", ông nói. "Tôi tự cho mình là 'một triết gia về điện tử', và đăng ký vào Viện Công nghệ Massachussetts (MIT) với hy vọng theo đuổi một con đường với những mô tả nghề nghiệp như vậy. Nhưng ngay khi

[1] *Nguồn: https://plus.maths.org*

đặt chân đến đó, tôi phát hiện ra rằng những gì mà tôi từng nghĩ là 'triết học về điện tử', thì mọi người gọi là toán học."

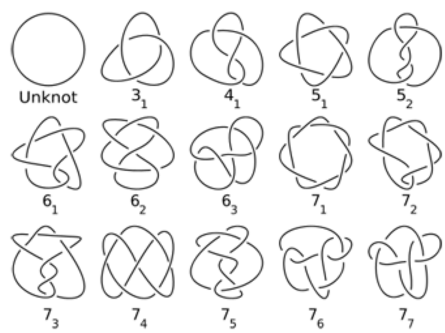
Ngay khi bắt đầu học toán một cách nghiêm túc, Mazur trở nên quan tâm đến các vật thể rối rắm hơn rất nhiều so với những loại sóng vật lý mang đến cho chúng ta âm thanh: các nút. Như chúng ta đã biết từ những trải nghiệm đau đớn của bản thân, các nút thắt hay đánh lừa mắt ta, chúng thay đổi hình dạng ngay trước mắt ta khi chúng ta cố gắng gỡ rối chúng. Chúng là những đối tượng nghiên cứu hoàn hảo của các nhà toán học, không hẳn vì điều đó có thể giúp chúng ta gỡ rối các nút thắt trong cuộc sống thực, mà vì sự hồi hộp và phấn khích mà việc nghiên cứu chúng đem lại. "Lý thuyết nút thật tuyệt vời, nếu quan tâm đến nó, bạn sẽ có cảm giác rằng trực giác hình học của bạn ngày càng mở rộng," Mazur nói.

Điều đầu tiên bạn nhận ra khi nhìn vào các nút là hình dạng và kích thước chính xác của chúng không phải là điều quan trọng. Điều đặc trưng cho một nút liên quan đến cách nó bị làm rối, chứ không phải là cách nó được đặt trong không gian như thế nào. Hình học cổ điển, với các khái niệm chính xác về hình dạng và kích thước, không quá hữu ích ở đây. Thay vào đó, những gì bạn cần là những khái niệm uyển chuyển hơn trong tô pô. Lĩnh vực toán học này coi hai hình dạng là giống nhau nếu một hình có thể bị biến dạng thành hình kia bằng cách kéo căng, ép hoặc uốn cong, nhưng không làm những hành động mạnh bạo hơn như cắt hình hoặc dán các mảnh của nó lại với nhau. Tô pô đôi khi được gọi là *hình học của miếng cao su*.

Không nút

Mazur theo học tiến sĩ với tư duy tô pô đó. Công việc liên quan đến thứ mà bạn có thể nghĩ là loại nút đơn giản nhất: một chiếc vòng đơn, hình dạng mà bạn có được từ một vòng dây chun không bị xoắn. Bạn có thể đặt một cái vòng như vậy lên mặt bàn theo vô số cách mà không phá vỡ cấu trúc trơn tru không bị thắt nút của nó. Và vì bản thân chiếc vòng là một vòng tròn bị biến dạng, miền bên trong và miền bên ngoài của vòng dây trên bàn chỉ đơn thuần là các phiên bản biến dạng của miền bên trong và miền bên ngoài của một đường tròn – thực tế trực quan này được phát biểu một cách chính xác về mặt toán học bởi *định lý đường cong Jordan*.

Công trình tiến sĩ của Mazur thực hiện điều mà các nhà toán học thường làm khi họ có một kết quả nào đó về hình học hoặc tô pô: họ hỏi liệu nó có còn đúng hay không trong các không gian có số chiều cao hơn. Lý do họ làm được điều này là vì họ có thể – họ có cách mô tả những hình dạng có số chiều cao hơn mặc dù chúng ta không thể hình dung được. Những hiểu biết sâu sắc về toán học thường nằm ẩn trong những không gian chiều cao hơn đó.



Hình vẽ mô tả cái gọi là không nút (trên cùng bên trái) cũng như các nút nguyên tố khác được xác định bằng số lần tự thắt. Các nút nguyên tố, theo một nghĩa nào đó, chính là các nút không thể phân tích được.

Trong luận án tiến sĩ của mình, Mazur đã chứng minh một phiên bản nhiều chiều của định lý đường cong Jordan, đúng cho số chiều bất kỳ. Nó thường được gọi là *Bài toán Schoenflies*. (Trong không gian ba chiều, chúng ta vẫn có thể hình dung được bài toán này: nó hỏi rằng những mặt cầu bị biến dạng có thể được đặt trong không gian ba chiều như thế nào.)

Công trình của Mazur đã làm nảy sinh ra một trong nhiều khái niệm toán học mang tên ông: *ngụy biện Mazur*. Nó được gọi như vậy vì liên quan đến một lập luận toán học thông minh mà lẽ ra thực sự không nên được cho phép, nhưng, trong ngữ cảnh mà Mazur đang xem xét, hóa ra lại hoàn toàn hợp lệ. Bạn đọc hãy tìm tới phần phục lục để nắm được ý chính của ngụy biện Mazur.

Mặc dù thực sự là một kết quả trong tô pô, nhưng định lý đường cong Jordan gợi ý về một cách tiếp cận thường được áp dụng trong lý thuyết nút: thay vì nhìn vào chiếc nút, họ nhìn vào một không gian mà họ tưởng tượng chiếc nút sẽ nằm trong đó, trừ đi chính nút đó. Không gian phi nút này có thể cho bạn biết nhiều điều về chính chiếc nút. Mazur đã giúp phát triển những hiểu biết sâu sắc về toán học cần thiết để khám phá nó. Thật kỳ lạ, cách tiếp cận cũng đưa ông tới một lĩnh vực không liên quan gì đến nút: lý thuyết số.

Từ những chiếc nút đến những con số

Đơn giản một cách bất ngờ, lý thuyết số quan tâm đến các số nguyên $1, 2, 3, 4$, v.v. và số học của chúng. Ví dụ, một nhà lý thuyết số có thể hỏi: liệu có ba số nguyên a, b và c, thỏa mãn phương trình sau hay không:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Trong ví dụ này, câu trả lời là có. Ví dụ: $a = 3$, $b = 4$ và $c = 5$ thỏa mãn vì

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

Các số nguyên tố có vai trò đặc biệt quan trọng trong lý thuyết số. Chúng là những số chỉ chia hết cho 1 và chính bản thân chúng, chẳng hạn như $2, 3, 5, 7$ và 11. Bởi vì chúng không thể được phân tích thành tích của các số nhỏ hơn, chúng thường được coi là những nguyên tử của lý thuyết số: nếu bạn muốn chứng minh điều gì đó đúng với tất cả các số nguyên, việc chứng minh điều đó đúng với các số nguyên tố thường đã được coi là hoàn thành một chặng đường dài, vì việc chỉ ra điều đó đúng cho các số khác thường sẽ dễ dàng hơn.

Số ít các số nguyên tố đầu tiên tập trung khá gần nhau, nhưng khi các số nguyên tố tăng dần lên, chúng trở nên thưa thớt hơn. Chúng ta biết rằng có vô số số nguyên tố, nhưng cách chúng được phân bố giữa các số khác vẫn còn là một điều bí ẩn. Đó là chủ đề của một trong những bài toán mở lớn nhất trong toán học, được gọi là *Giả thuyết Riemann*.

Nhà toán học Hy Lạp cổ đại Euclid đã chứng minh rằng có vô hạn số nguyên tố. Ông là người cầm chiếc com–pa trong bức tranh Trường phái Athens của Raffaello Sanzio.

Lý thuyết số nổi tiếng với việc đặt ra những bài toán tưởng chừng dễ dàng nhưng hóa ra lại cực kỳ khó chứng minh. Trong một bài báo thú vị viết vào năm 1991, Mazur đã so sánh những bài toán đó với những bông hoa đẹp đẽ và đầy cám dỗ, ông viết rằng, "lý thuyết số chứa bầy bọ luôn chực chờ cắn những người yêu hoa bị cám dỗ, những người sau khi bị cắn được truyền cảm hứng để nỗ lực hết sức mình".

Tuy nhiên, bông hoa đã cám dỗ Mazur không phải là một phương trình đơn giản hay một câu nói dễ hiểu – ông đã phát hiện ra hình ảnh ví von đó rằng nếu bạn coi các số nguyên tố tương tự như những chiếc nút và các số nguyên khác tương tự như một không gian bao quanh nút, thì bạn có thể điều chỉnh những ý tưởng mạnh mẽ của lý thuyết nút để áp dụng vào lý thuyết số. Theo ông: "Ý tưởng chuyển đổi từ ngôn ngữ nút thành ngôn ngữ của các con số rất thú vị. Nó không chỉ rất thích thú mà còn là con đường tốt để có trực giác về các bài toán trong lý thuyết số."

Một kết quả của phương pháp này là một chứng minh của *Giả thuyết chính Iwasawa*, mà Mazur đã tìm ra cùng với Andrew Wiles vào đầu những năm 1980. Chứng minh đó có thể được xem như một phiên bản tương tự của giả thuyết Riemann trong một bối cảnh khác so với giả thuyết được đề cập ở trên. Nó cũng dẫn Mazur đến những kết quả quan trọng khác, và quan trọng hơn cả, đã đặt ra những hướng đi mới trong lý thuyết số.

Một bông hoa nổi tiếng

Việc chứng minh, hoặc thậm chí chỉ là phát biểu, giả thuyết chính Iwasawa đòi hỏi những kiến thức toán học chuyên sâu mà chúng ta không thể trình bày ở đây. Tuy nhiên, những gì chúng ta có thể làm là đến thăm một trong những bông hoa đầy cám dỗ đã thôi thúc nhiều thế hệ nhà toán học nỗ lực hết sức. Trong ví dụ đã đưa ra ở trên, chúng ta tìm thấy một bộ ba số nguyên thỏa mãn phương trình

$$a^2+b^2=c^2.$$

Trên thực tế, có vô số bộ như vậy, được gọi là những *bộ ba Pythagore*.

Nhưng điều gì sẽ xảy ra nếu chúng ta thay thế số mũ 2 trong phương trình bằng 3:

$$a^3+b^3=c^3.$$

Khi đó phương trình nhận được có nghiệm nguyên không? Điều gì sẽ xảy ra nếu chúng ta thay thế số mũ bằng $4, 5, 6,$ hoặc bất kỳ số nguyên dương n nào khác? Năm 1637, nhà toán học người Pháp Pierre de Fermat đã tìm ra câu trả lời là "không". Khi số mũ trong phương trình là một số nguyên lớn hơn 2 thì không có nghiệm nguyên nào mà cả ba số đều khác 0. Fermat viết nguệch ngoạc bên lề một cuốn sách rằng ông đã tìm thấy một "chứng minh tuyệt vời" cho điều này, nhưng lề quá nhỏ để có thể viết được chứng minh.

Chính những nét chữ nguệch ngoạc này đã đặt các nhà toán học vào một nỗ lực kéo dài ba thế kỷ để tìm ra chứng minh cho cái được gọi là *Định lý cuối cùng của Fermat*.

Như bạn có thể hình dung được, hành trình tìm ra chứng minh đó đã đưa các nhà toán học đến những hiểu biết sâu rộng về toán học mà nếu nhìn bề ngoài, bạn sẽ không ngờ có liên quan đến bài toán này. Một điều trở nên rõ ràng vào những năm 1970 là một lớp phương trình khác sẽ đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu Định lý cuối cùng của Fermat. Chúng được gọi là các *đường cong elliptic*, cho bởi các phương trình có dạng

$$y^2=x^3+ax+b,$$

trong đó a và b là các số nguyên.

Như bạn có thể nhớ lại những kiến thức toán học đã học ở trường phổ thông, khi học về các hình như đường tròn hoặc parabol, thì một phương trình cũng có thể xác định một đường cong. Thật ngạc nhiên, hình dạng của những đường cong như vậy có thể cho bạn biết rất nhiều về các nghiệm của các phương trình liên quan và do đó cực kỳ thú vị đối với các nhà lý thuyết số.

Mazur là một trong những nhà toán học đã dồn nhiều nỗ lực vào nghiên cứu các đường cong elliptic, và trên thực tế, chúng đóng một vai trò quan trọng trong *Giả thuyết chính Iwasawa* đã nói đến ở trên. Bằng cách khai thác các tính chất đối xứng đẹp đẽ của các nghiệm nằm trên các đường cong, Mazur thành công trong việc chứng minh cái gọi là *Giả thuyết xoắn* cho các đường cong elliptic. Kết quả này, ngoài việc bản thân nó là một kết quả "vô cùng đẹp và thanh thoát", theo lời dẫn của Giải thưởng Chern, còn khởi xướng những lĩnh vực nghiên cứu mới, mở đường cho chứng minh định lý cuối cùng của Fermat. Điều này cuối cùng đã được hoàn thành vào năm 1994, hơn 350 năm sau nét bút nguệch ngoạc của Fermat, bởi Andrew Wiles, một cộng sự của Mazur.

Toán học là cá nhân

Huy chương Chern được trao cho những thành tựu trọn đời trong toán học. Những gì chúng ta đã đề cập trong bài viết này chỉ là một phần nhỏ trong nghiên cứu của Mazur.

Lời giới thiệu của giải thưởng về ông mô tả ông là người có "quan điểm đa nguyên" về toán học. "Mỗi người đều có một cách nào đó để tiếp cận thế giới bằng những cảm nhận, trực giác và trải nghiệm toán học hoặc gần với toán học," ông đã trả lời như vậy khi chúng tôi hỏi ông nghĩ điều đó có nghĩa là gì. "Và những cách tiếp cận và thiên hướng toán học này, sau cùng, mang tính cá nhân và không thể được phân loại bằng cách dán nhãn thô thiển."

Mazur cũng được vinh danh vì công lao dẫn dắt và sự bao dung mà ông dành cho những người mới bắt đầu sự nghiệp, bao gồm gần 60 nghiên cứu sinh tiến sĩ mà ông đã hướng dẫn. Khi chúng tôi hỏi điều gì khiến ông thấy thích khi làm việc với thế hệ tiếp theo, câu trả lời của ông ấy rất đơn giản: "Hầu hết thời gian họ dạy tôi nhiều hơn là tôi dạy họ."

Phụ lục: Ngụy biện của Mazur

Trước tiên, chúng ta hãy xem xét tổng vô hạn sau:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots$$

Nó được gọi là chuỗi Grandi, theo tên nhà toán học, triết học và linh mục người Ý Guido Grandi ($1671 - 1742$).

Nếu chúng ta nhóm các số hạng của nó theo cách sau đây:

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$$

thì chúng ta có thể tin rằng giá trị của S phải bằng 0 bởi vì biểu thức trong mỗi dấu ngoặc đơn đều bằng 0. Tuy nhiên, không có gì ngăn cản chúng ta nhóm các số hạng của nó theo một cách khác, chẳng hạn

$$S = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \dots$$

Cách nhóm các số hạng này dẫn đến niềm tin rằng giá trị của S phải bằng 1, vì biểu thức trong mỗi dấu ngoặc đứng sau số 1 đầu tiên đều bằng 0.

Điều đó cho thấy rằng S bằng cả 0 và 1, nói cách khác, $0 = 1$! Vì điều này không đúng nên có gì đó sai trong lập luận của chúng ta. Vấn đề nằm ở chỗ các tổng vô hạn không thể được xử lý theo cách giống như các tổng hữu hạn.

Tuy nhiên, có những bối cảnh mà ở đó một lập luận tương tự như ở trên trở nên đúng đắn. Sau đây chính là cách Mazur giải thích ngụy biện của ông.

Giả sử bạn có (mà bạn nghĩ là vô số cái khác nhau) những đối tượng toán học được gắn nhãn bằng các số

$$[-\infty], .., [-2], [-1], [0], [+1], [+2], ..., [+\infty]$$

(Đúng thế: $[\pm\infty]$)

Hơn nữa, giả sử rằng bạn có thể ghép chúng lại với nhau như những toa tàu, sau đó cộng các số trong nhãn của chúng với nhau, và giả sử rằng đối tượng được tạo thành cũng là một đối tượng trong bộ sưu tập của bạn và có nhãn tương ứng với tổng các nhãn nhận được. Ví dụ: $[1] + [1] = [2]$.

Ngoài ra, giả sử bạn thậm chí có thể ghép được những đoàn tàu dài vô tận, ví dụ:

$$[0] = [0] + [0] + [0] + [0] + \dots$$

Khi đó, nếu loại thao tác chúng ta đã thực hiện đối với tổng S ở trên là hợp lệ trong ngữ cảnh mà chúng ta đang xem xét, thì chúng ta có thể chứng minh rằng

$$[0] = [1].$$

Điều đó cũng có nghĩa

$$[2] = [1] + [1] = [0] + [0] = [0],$$
$$[3] = [1] + [1] + [1] = [0] + [0] + [0] = [0],$$

và những đẳng thức tương tự như thế.

Điều này dẫn tới rằng tất cả các đối tượng chúng ta quan tâm thực ra là một. Không có vô số đối tượng, mà chỉ có một!

CÓ ĐÁNG HỔ THẸN KHI TẶNG MỘT CUỐN SÁCH TOÁN CHO NỮ HOÀNG?*

AMIROUCHE MOKTEFI

(Người dịch: Huệ Chi)

Ai cũng biết rằng Charles Lutwidge Dodgson (bút danh Lewis Carroll, 1832 – 1898; Hình 1), tác giả của *Alice ở xứ xở diệu kỳ*, là một nhà toán học. Dodgson là một giảng viên toán tại trường Christ Church thuộc Đại học Oxford và đã có nhiều công trình toán học về hình học, đại số, logic và lý thuyết bỏ phiếu. Hầu hết mọi đánh giá về toán học của Dodgson đều nhắc đến một câu chuyện thú vị (sau đây gọi là *câu chuyện*) liên quan đến nữ hoàng Victoria. Nữ hoàng được cho là rất thích truyện *Alice*, xuất bản năm 1865, và đã yêu cầu tác phẩm tiếp theo của tác giả. Với sự ngạc nhiên và thất vọng, bà đã nhận được cuốn *Chuyên luận về định thức* của Dodgson, xuất bản năm 1867. Câu chuyện này là một giai thoại kinh điển mà người ta thường bắt gặp trong các tác phẩm về toán học.

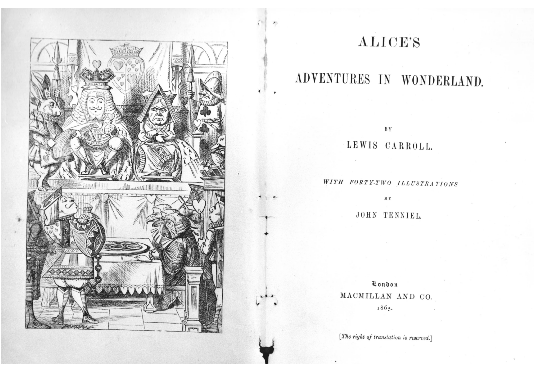
Những bài viết về *câu chuyện* cũng đôi khi nhắc nhở chúng ta rằng chính Dodgson đã phủ nhận nó vào năm 1896, nhưng sự lan rộng của tin đồn dường như không thể ngăn được. Có thể dễ dàng hiểu được sức hấp dẫn của nó, vì nó thể hiện một cách hoàn hảo quan niệm rộng rãi về Dodgson nói riêng và toán học nói chung. Đầu tiên, câu chuyện truyền tải một cái nhìn rộng rãi về Dodgson như một nhân vật kép: một mặt là nhà toán học buồn tẻ và mặt khác là một tiểu thuyết gia giàu trí tưởng tượng. Thứ hai, phản ứng được cho là của nữ hoàng tiêu biểu cho niềm tin rằng toán học và văn học bắt nguồn từ những bộ óc và nền văn hóa khác nhau. Điều thú vị là nhiều lời kể về *câu chuyện* nói rằng nữ hoàng không hài lòng khi nhận được cuốn sách. Người ta cũng nói rằng Dodgson, người rất tôn kính hoàng gia, không thể nào thực hiện một "hành động hoàn toàn ngược với tính cách" như vậy (Beale 1973). Nhưng tặng một cuốn sách toán cho nữ hoàng thì có gì sai?

Hình 1. Charles L. Dodgson (from the Wakeling Collection).

* *Nguồn Math. Intellegencer, Số* 41.

Câu chuyện lan truyền chóng mặt

Khi *Alice ở xứ xở diệu kỳ* ra mắt (Dodgson 1865, Hình 2), Dodgson là một tác giả vô danh. Ông mới chỉ xuất bản một số tập sách nhỏ về toán học và các tác phẩm nhỏ. Đặc biệt, vào năm 1856, ông đã đóng góp một số bài thơ cho tạp chí *Chuyến tàu*, ở đó ông sử dụng bút danh Lewis Carroll, lấy từ tên của mình (Lewis từ Lutwidge và Carroll từ Charles). Những năm sau đó, ông chủ yếu sử dụng tên thật cho các công trình toán học và bút danh cho các tác phẩm văn học để giữ kín danh tính của mình. Thành công tức thì của cuốn sách *Alice* đã làm cho bút danh văn học của ông được đông đảo công chúng biết đến, nhưng họ không biết được ông có thể là ai.



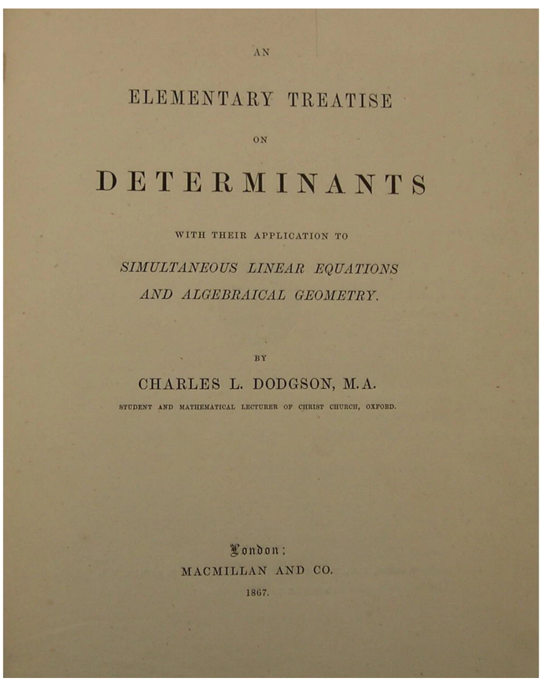
Hình 2. The title page of Dodgson's Alice's Adventures in Wonderland, 1865 (Photo by George Bayntun, Collection of Charlie Lovett).

Cuốn sách cũng được hưởng một nỗ lực quảng bá lớn của cả nhà xuất bản và tác giả. Vô số các bản sao đã được gửi đến các tạp chí để đánh giá, hoặc tặng bạn bè làm quà. Cháu trai, đồng thời là người viết tiểu sử đầu tiên của Dodgson, Stuart D. Collingwood, đã thuật lại rằng bản sao đầu tiên của cuốn sách được gửi đến Alice ngoài đời thực, người đã truyền cảm hứng cho câu chuyện, còn bản thứ hai được gửi đến công chúa Beatrice, con gái út của nữ hoàng Victoria (Collingwood 1898, tr.104) . Đáp lại, Dodgson nhận được một lá thư cho biết "cuốn sách nhỏ mà Bệ hạ rất hài lòng khi cho phép đọc nó cho công chúa Beatrice" (Wakeling 1999, tr. 122).

Với sự khen ngợi của giới phê bình và số lượng lớn sách bán được, ý tưởng về phần tiếp theo hẳn đã nhanh chóng nảy ra với Dodgson và nhà xuất bản của ông. Ngay từ năm 1866, Dodgson đã đề cập đến việc "đang cân nhắc ý tưởng về việc viết một thứ kiểu như phần tiếp theo". Công chúng rõ ràng đã mơ màng về những cuộc phiêu lưu khác, và có tin đồn rằng "Lewis Carroll đang viết tiếp" (Collingwood 1898, tr.129).

Quả thực là Dodgson đang viết. Bên cạnh những thứ khác, ông đang nghiên cứu về thứ có thể là đóng góp quan trọng nhất của ông cho nghiên cứu toán học. Thật vậy, ông đã đưa ra một phương pháp mới để tính toán các định thức, trình bày nó trước Hiệp hội Hoàng gia Luân Đôn vào tháng 5 năm 1866, và sau đó công trình này xuất hiện trong Kỷ yếu của Hiệp hội Hoàng gia Luân Đôn. Trong vòng một năm sau đó, Dodgson đã phát triển bài báo của mình thành một "cuốn sách nhỏ", mà ông ghi lại trong nhật ký của mình là "đã mang lại cho [ông] nhiều rắc rối hơn bất cứ thứ gì mà ông đã từng viết" (Wakeling 1999, 206 – 207). Việc xuất bản cuốn sách bị gián đoạn bởi một chuyến đi đến nước Nga cùng với Henry Parry Liddon từ tháng 7 đến tháng 9 năm 1867. *Chuyên luận về định thức* cuối cùng được xuất bản vào đầu tháng 12 năm đó (Hình 3). Cuốn sách này đã nhận được một số lời khen ngợi về đóng góp và tính mới, nhưng bị chỉ trích vì văn phong logic nặng nề và sự lựa chọn thuật ngữ và ký hiệu gây khó đọc.

Chuyên luận về định thức là cuốn sách đầu tiên của Dodgson kể từ Alice, nhưng nó không có liên hệ gì với cuốn truyện tuyệt vời đó. Trước khi hoàn thành, Dodgson đã thông báo cho nhà xuất bản của mình, Macmillan, trong một bức thư ngày 11 tháng 2 năm 1867, về ý định đề tên thật của mình cho cuốn sách: "Tôi có một cuốn sách nhỏ, sắp hoàn thành, mà tôi muốn các ông xuất bản cho tôi – nhưng tôi e rằng nó không thể được giới thiệu như là của tác giả 'của *Những cuộc phiêu lưu của Alice*'". Độc giả của chuyên luận chắc chắn không có lý do gì để nghi ngờ rằng tác giả của nó thực sự là người đã viết ra *Alice*. Vào thời điểm đó, Dodgson đã giữ được bí mật danh tính của mình và chỉ tiết lộ nó cho một số bạn bè và những người quen may mắn. Những bức thư gửi cho Lewis Carroll được gửi đến nhà xuất bản Macmillan, sau đó nhà xuất bản chuyển tiếp tới ông dưới cái tên Charles L. Dodgson ở Oxford. Khi một cô bé yêu cầu ông viết một câu chuyện Alice khác vào năm 1867, ông hồi âm dưới cái tên Dodgson, khẳng định rằng ông có một thông điệp cho cô ấy "từ một người bạn ... ông Lewis Carroll, một sinh vật kỳ dị, khá thích nói những chuyện vô nghĩa".


AN

ELEMENTARY TREATISE

ON

DETERMINANTS

WITH THEIR APPLICATION TO

SIMULTANEOUS LINEAR EQUATIONS

AND ALGEBRAICAL GEOMETRY.

BY

CHARLES L. DODGSON, M.A.

STUDENT AND MATHEMATICAL LECTURER OF CHRIST CHURCH, OXFORD.

London:

MACMILLAN AND CO.

1867.

Hình 3. The title page of Dodgson's Elementary Treatise on Determinants, 1867 (from the Wakeling Collection)

Khi *Chuyên luận về định thức* ra mắt, có lẽ chỉ có một nhóm nhỏ độc giả có đặc quyền mới biết được bí mật nhỏ của tác giả, và "nó là một phát hiện hoàn toàn bất ngờ với những sinh viên đại học lần đầu tiên được biết rằng ông Dodgson của trường Christ Church và Lewis Carroll chính là một" (Colingwood 1898, tr.110). Một trong những người viết đánh giá về chuyên luận dường như biết điều đó, vì ông ta kết thúc bài đánh giá của mình bằng cách hy vọng "có thêm khảo sát về thế giới thần tiên đại số tùy chọn [của tác giả]". Sự ám chỉ này đến truyện *Alice* chắc hẳn đã khiến Dodgson khó chịu, một người đã rất cố gắng giữ bí mật về danh tính của mình. Dodgson phàn nàn trong một bức thư gửi cho chị dâu của mình, vào ngày 31 tháng 7 năm 1890, rằng ông thấy khá kỳ lạ rằng "mọi người sẽ không hiểu rằng, khi một tác giả sử dụng *bút danh*, thì mục đích là *tránh* việc công khai danh tính cá nhân, điều mà họ luôn cố gắng thúc giục anh ta". Có vẻ như việc Dodgson nhất quyết giữ bí mật danh tính của mình chỉ khiến những "kẻ săn đuổi" ông trở nên đông đảo và quyết tâm hơn. Quả là tình huống đó hẳn đã gợi nên sự tò mò và hấp dẫn, và dễ dàng hình dung được sự ngạc nhiên của một độc giả nhiệt tình của *Alice*, không biết rằng tác giả của nó là một giảng viên toán tại Oxford, khi đối diện với cuốn sách tiếp theo của tác giả, về chủ đề định thức, và được cho biết tác giả thực sự là ai. Những gì đã có thể là một giai thoại thú vị đã trở thành một câu chuyện lan truyền chóng mặt khi độc giả bối rối tình cờ lại chính là nữ hoàng.

Câu chuyện này quá hay và không khó để có thể là sự thật. Thực sự là nữ hoàng biết, và có thể rất thích truyện *Alice*. Bà chỉ cần hỏi, và có thể bà ấy đã hỏi, về cuốn sách tiếp theo của tác giả, để khiến cho *câu chuyện* xảy ra. Đó là một *câu chuyện* tuyệt vời, và sẽ còn tuyệt vời hơn nếu Dodgson không hoàn toàn phủ nhận nó, gần ba mươi năm sau thời điểm mà nó được cho là đã xảy ra.

Phủ nhận

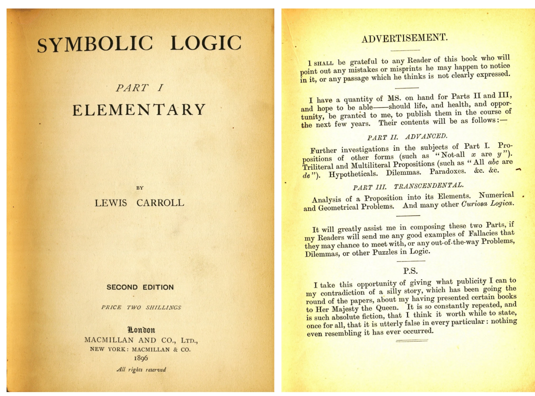
Đến năm 1896, Dodgson là một tác giả nổi tiếng từ chối tận hưởng danh tiếng của mình. Phần tiếp theo của câu chuyện, *Đi qua tấm* *gương*, cũng thành công như truyện *Alice ở xứ sở diệu kỳ*.

Sau đó, ông xuất bản nhiều tác phẩm hư cấu khác, nhưng không có tác phẩm nào thực sự sánh được với hai truyện *Alice*. Là một nhà toán học, ông cũng đã xuất bản nhiều về nhiều chủ đề khác nhau, đặc biệt là bảo vệ một cách đẹp đẽ hình học Euclid trước những sách giáo khoa mới muốn thay thế nó trong các trường trung học và đại học. Trong những năm cuối đời, ông viết một chuyên luận về logic nhằm giúp chủ đề này có thể tiếp cận tới một công chúng rộng rãi. Không giống như các đồng nghiệp của mình tại Đại học Oxford, Dodgson đã chấp nhận lý thuyết logic hình thức mới được phát triển ở Anh bởi George Boole và những người theo trường phái của ông. Phần đầu tiên của chuyên luận của Dodgson, *Logic hình thức*, xuất bản vào tháng 2 năm 1896. Lần tái bản thứ nhất, ra mắt vào đầu tháng 6 cùng năm, có lời tựa được đề ngày 11 tháng 5 năm 1896 (Hình 4). Ngoài một vài thay đổi và sửa chữa nhỏ, nó có một phần tái bút sau trang tiêu đề, với ghi chú sau:

Tôi xin nhân cơ hội này để phủ nhận một cách công khai nhất có thể một câu chuyện ngớ ngẩn, được lan truyền trên báo chí, về việc tôi đã tặng một số cuốn sách nào đó cho Nữ hoàng. Nó được lặp đi lặp lại liên tục, và là thêu dệt hoàn toàn, đến nỗi tôi nghĩ rằng đáng để tuyên bố, một lần dứt điểm, rằng nó tuyệt đối sai trong mọi chi tiết: không có bất kỳ điều gì thậm chí hơi giống như thế đã từng xảy ra cả.

Dodgson đã giữ ghi chú này trong lần tái bản thứ hai của cuốn sách, có lời tựa đề ngày 20 tháng 7 năm 1896, nhưng vì lý do nào đó đã bỏ nó khỏi lần tái bản thứ ba, xuất bản vào đầu năm 1897 nhưng có lời tựa vào Giáng sinh năm 1896.

Trong ghi chú này, Dodgson đã mạnh mẽ phủ nhận một "câu chuyện ngớ ngẩn" về việc ông đã tặng một số cuốn sách cho nữ hoàng. Có thể lưu ý rằng giải thích của Dodgson là rất ít ỏi và có thể đề cập đến một sự việc khác, nhưng có vẻ như chỉ đơn giản là ông không muốn kể chi tiết về giai thoại để không quảng bá thêm về nó. Dodgson rõ ràng không thấy thích thú gì với *câu chuyện*. Vì tin đồn đề cập đến các sự kiện được cho là diễn ra vào năm 1867, một số tác giả tự hỏi tại sao Dodgson phải mất gần ba mươi năm để phủ nhận nó (Wakeling 2015, tr. 315). Derek Hudson cho rằng Dodgson có thể đã dùng thời gian này để tranh luận "với chính bản thân mình liệu có đúng khi phản bác câu chuyện hay không (Hudson 1976, tr.133). Một lời giải thích hợp lý hơn có thể là Dodgson chỉ đơn giản là phủ nhận câu chuyện khi nó được lan truyền rộng ra, vì không có lý do gì để cho rằng tin đồn được bắt đầu trong cùng thời kỳ mà những sự việc được kể lại trong *câu chuyện* được cho là đã xảy ra.



SYMBOLIC LOGIC

PART I

ELEMENTARY

BY

LEWIS CARROLL

SECOND EDITION

PRICE TWO SHILLINGS

London

MACMILLAN AND CO., LTD.,

NEW YORK: MACMILLAN & CO.

1896

All rights reserved

ADVERTISEMENT.

I SHALL be grateful to any Reader of this book who will point out any mistakes or misprints he may happen to notice in it, or any passage which he thinks is not clearly expressed.

I have a quantity of MS. on hand for Parts II and III, and hope to be able——should life, and health, and opportunity, be granted to me, to publish them in the course of the next few years. Their contents will be as follows:—

PART II. ADVANCED.

Further investigations in the subjects of Part I. Propositions of other forms (such as "Not-all *x* are *y*"). Triliteral and Multiliteral Propositions (such as "All *abc* are *de*"). Hypotheticals. Dilemmas. Paradoxes. &c. &c.

PART III. TRANSCENDENTAL.

Analysis of a Proposition into its Elements. Numerical and Geometrical Problems. And many other *Curiosa Logica*.

It will greatly assist me in composing these two Parts, if my Readers will send me any good examples of Fallacies that they may chance to meet with, or any out-of-the-way Problems, Dilemmas, or other Puzzles in Logic.

P.S.

I take this opportunity of giving what publicity I can to my contradiction of a silly story, which has been going the round of the papers, about my having presented certain books to Her Majesty the Queen. It is so constantly repeated, and is such absolute fiction, that I think it worth while to state, once for all, that it is utterly false in every particular: nothing even resembling it has ever occurred.

Hình 4. The title page of Dodgson's Symbolic Logic, second edition, 1896, and the Advertisement page, which includes a denial of the story (from the Wakeling Collection).

Trên thực tế, có vẻ như không biết tin đồn đã bắt đầu từ khi nào. Trong một thời gian dài, người ta thậm chí đã nghĩ rằng không có bằng chứng văn bản nào về sự tồn tại của tin đồn trước sự phủ nhận của chính Dodgson vào năm 1896. Tuy nhiên, trong những năm gần đây, một số bài báo trước đó về nó đã được tìm thấy, và giờ đây mọi thứ trở nên rõ ràng rằng tin đồn đã lan truyền khá rộng vào quãng thời gian mà Dodgson phủ nhận nó. Tin đồn chắc chắn tồn tại ít nhất từ năm 1892, vì nó được tìm thấy trên một số tờ báo thời đó, chẳng hạn như *Sporting Times*. Nó dường như đã được lan truyền rộng rãi hơn sau năm 1895, đặc biệt là sau khi nó được Ethel Mackenzie McKenna kể lại trong số tháng 8 năm 1895 của *Tạp chí Ladies' Home*:

"Trong thời kỳ mới mẻ của sự thành công rực rỡ, "Alice" nằm trên tay của mọi người và những chuyến phiêu lưu vào thế giới thần tiên của cô là niềm vui thích của người lớn cũng như trẻ em. Nữ hoàng Victoria đã gửi một thông điệp đến tác giả, xin ông gửi cho bà cuốn sách tiếp theo của mình. Giống như tất cả các thần dân của mình, bà nóng lòng muốn nghe nhiều hơn về đứa trẻ thú vị, mà nguyên mẫu là con gái của hiệu trưởng của trường Christ Church. Bà đã rất kinh ngạc khi không lâu sau đó nhận được một cuốn "*Chuyên luận về định thức*" của C. L. Dodgson, vì khi đó, ông vẫn giữ bí mật về danh tính của mình, và Nữ hoàng, cũng như cả thế giới, đã tin rằng ông chỉ đơn thuần là một người hài hước."

Tạp chí của Mỹ này có lượng độc giả rộng lớn và ngày càng tăng vào thời Dodgson, và vào năm 1904, nó trở thành tạp chí đầu tiên đạt được số lượng một triệu người đặt báo. Lời kể của McKenna về *câu chuyện* được đăng lại trên các tạp chí khác của Mỹ, nhất là trong các mục tin đồn, tin vắn và tin tức văn học. *Câu chuyện* hẳn cũng đã lan tới một số tờ báo của Anh, vì nó được đăng trên tờ *Newcastle Weekly Courant*. Đúng là *câu chuyện* không được tìm thấy trên các tờ báo lớn của Anh, một sự thật có thể được giải thích là do họ không muốn xuất bản những bài viết tiết lộ danh tính của Dodgson. Được biết, Dodgson không hài lòng với những bài viết như vậy và đã liên tục viết thư phàn nàn đến những tạp chí và nhà xuất bản của Anh đã tiết lộ hoặc muốn tiết lộ tên thật đằng sau bút danh của ông. Các tạp chí nước ngoài hiển nhiên nằm ngoài tầm ảnh hưởng của Dodgson, như ông thừa nhận trong một bức thư gửi cho Falconer Madan vào ngày 8 tháng 12 năm 1880: "Tôi e rằng các ấn phẩm của Mỹ nằm ngoài tầm khiếu nại của các nhà văn Anh: chỉ ở Anh, người ta mới có thể hy vọng ngăn tên mình được công bố."

Vào năm 1895, *câu chuyện* rõ ràng là đã "lan truyền trên báo chí" và được "lặp đi lặp lại liên tục", như Dodgson đã viết trong lời phủ nhận của mình. Người ta lập luận rằng "không chắc Dodgson đã xem tạp chí [*Tạp chí Ladies' Home*] này" (Wakeling 2005, tr. 257); tuy nhiên, ông có thể đã thấy một trích dẫn về nó được đăng lại trên các tờ báo của Anh. Chúng ta cũng biết rằng Edward Bok, chủ bút của *Tạp chí Ladies' Home*, đã đến thăm Dodgson ở Oxford để thuyết phục ông đóng góp bài cho tạp chí. Chuyến thăm này được ghi lại trong tự truyện của Bok, nhưng ngày tháng không được nêu rõ ràng. Tuy nhiên, lời kể đó gợi ý rằng nó trùng hợp với lần Bok đến thăm Rudyard Kipling, người đã được thuyết phục đóng góp câu chuyện "William the Conqueror" của mình cho tạp chí. Do câu chuyện của Kipling xuất bản vào cuối năm 1895, sẽ khá hợp lý khi cho rằng chuyến thăm diễn ra trước đó. Điều thú vị là Bok kể về việc ông đã hỏi Dodgson về câu chuyện gửi tặng cuốn sách *Chuyên luận về định thức* cho nữ hoàng, một câu hỏi mà Dodgson không bình luận, nhưng "khuôn mặt của ông ấy hoàn toàn không có biểu hiện gì ngoài vẻ trắc ẩn nhằm nói với người chủ bút rằng ông ta đang mắc một sai lầm khủng khiếp" (Bok 1920, tr. 222 – 223). Trước sự thất vọng lớn của Bok, Dodgson chỉ đơn giản phủ nhận việc mình là tác giả của hai cuốn sách *Alice*. Nếu lời kể của Bok là sự thật, ông ta đã sớm được chứng kiến Dodgson bác bỏ câu chuyện, trước khi ông phủ nhận bằng văn bản, trong cuốn sách. Nhưng chúng ta có nên tin Dodgson không?

Liệu rằng nó đã xảy ra?

Việc tìm hiểu sự thật về *câu chuyện* có vẻ là việc làm kỳ quái và thiếu tôn trọng bởi vì Dodgson đã phủ nhận nó một cách rõ ràng. Tuy nhiên, chúng ta không được quên rằng Dodgson thường xuyên phủ nhận (một cách không đúng) rằng ông là tác giả của *Alice*, vì vậy chúng ta không có thêm lý do gì để tin vào sự thật của lời phủ nhận này so với tất cả những lời phủ nhận khác mà chúng ta biết là không đúng. Câu chuyện của chúng ta kết nối tác giả của *Alice* với tác giả của *Chuyên luận về định thức*. Dodgson không có lựa chọn nào khác ngoài việc phủ nhận nó, bất kể sự thật là gì, nếu ông ấy muốn – và chúng ta biết rằng ông thực sự muốn – giữ bí mật về danh tính của mình.

Chúng ta hầu như không thể nhấn mạnh đủ mức độ quan trọng của việc giữ kín danh tính đối với Dodgson. Các tiểu sử về ông chứa nhiều mẩu chuyện về việc ông từ chối là tác giả của truyện *Alice* khi được hỏi về nó. Dodgson cũng từ chối lời mời tham dự các buổi chiêu đãi do nhà xuất bản của ông tổ chức, nơi "hầu như không thể giữ được sự ẩn danh". Khi những lá thư được gửi đến trường Christ Church cho ông dưới cái tên Lewis Carroll , ông đã gửi trả lại chúng mà không mở. Năm 1890, ông thậm chí còn ban hành một thông cáo để gửi cho những người đã gửi thư đến như sau:

"Ông Dodgson thường xuyên bị những người lạ gửi thư đến với giả định khá trái phép rằng ông tuyên bố, hoặc trong một chừng mực nào đó thừa nhận quyền tác giả của những cuốn sách không được xuất bản dưới tên ông, đến mức ông thấy cần phải tuyên bố điều này, một lần dứt điểm, như một câu trả lời cho tất cả các bức thư như vậy. Ông ta không tuyên bố hay thừa nhận bất kỳ mối liên hệ nào với bất kỳ bút danh nào, hoặc với bất kỳ cuốn sách nào không được xuất bản dưới tên của chính ông ta. Do đó, không có quyền giữ lại, hoặc thậm chí đọc thư bên trong, ông ta gửi trả lại nó cho người viết thư đã viết sai địa chỉ."

Lưu ý rằng Dodgson không chính thức phủ nhận là tác giả của các truyệnAlice trong thông cáo này; ông chỉ đơn thuần từ chối việc đòi hoặc thừa nhận quyền tác giả đó. Nhưng Lloyd Humberstone khuyến cáo một cách đúng đắn rằng "Chúng ta không nên coi trọng những lời phủ nhận [của Dodgson] hơn những lời phủ nhận của một nghi phạm bị bắt trong cuộc truy tìm Jack the Ripper của cảnh sát, người khẳng định rằng anh ta không muốn được biết đến với cái tên đó, rằng anh ta không tuyên bố – hay thừa nhận – đã thực hiện bất kỳ vụ giết người nào, v.v." (Humberstone 1995, tr. 498).

Đúng là bí mật về danh tính của Dodgson dần dần được hé lộ và có lẽ nó đã trở thành một bí mật công khai vào những năm cuối đời của ông. Các tờ báo thỉnh thoảng có đề cập đến danh tính của ông, và từ điển các bút danh thường liệt kê ông. Khá hợp lý khi cho rằng bí mật có lẽ được lan truyền qua số đông bạn bè và người quen của ông. Tuy nhiên, Dodgson vẫn từ chối thừa nhận là tác giả của những truyện *Alice* khi những người lạ tiếp cận ông hoặc viết thư cho ông về nó. Những nỗ lực nhiệt thành của Dodgson để bảo vệ bí mật của mình, thậm chí ngay cả sau này khi danh tính của ông đã được biết đến rộng rãi, hẳn đã khiến những người cùng thời của ông phải tò mò. Các cuốn tiểu sử về ông thuật lại cái cách mà trong suốt cuộc đời của mình, ông ấy là "*mục tiêu thường xuyên của những lời đồn đại*".

Việc phủ nhận *câu chuyện* của Dodgson cần phải được hiểu trong bối cảnh này: *câu chuyện* chỉ là một trong số rất nhiều tin đồn về tác giả của *Alice* và sự phủ nhận chỉ là một trong số rất nhiều tình huống mà Dodgson cố gắng giữ bí mật danh tính của mình. Tuy nhiên, có một nét nổi bật về việc Dodgson phủ nhận *câu chuyện* trong cuốn *Logic Hình thức* của ông. Dodgson tin tưởng vào lợi ích xã hội của logic hình thức và muốn cuốn sách của mình dễ tiếp cận đối với rộng rãi độc giả. Để quảng bá rộng rãi hơn cho cuốn sách chuyên luận của mình, ông đã dùng bút danh văn học của mình thay vì tên thật, vốn thường được sử dụng cho các công trình toán học. Vì vậy, lời phủ nhận mà ông đưa vào chuyên luận có thể là dịp duy nhất mà Dodgson, dưới cái tên Lewis Carroll, phủ nhận mối liên hệ của ông với Charles L. Dodgson.

Chúng tôi đã nói ở trên rằng *câu chuyện* thực sự không khó để có thể là thật. Thật vậy, có những lý do chính đáng để tin rằng *câu chuyện* đã thực sự xảy ra, và người ta sẽ không ngạc nhiên nếu nó đã xảy ra. Tuy nhiên, Thomas B. Strong, một người bạn của Dodgson, trong hồi ký viết năm 1932, đưa ra hai lý do để không tin vào điều đó:

"Thật trái ngược với toàn bộ thái độ của Dodgson đối với Hoàng gia và với cung cách đúng mực của ông ấy nếu ông ấy giễu cợt Nữ hoàng như vậy. Và nó hoàn toàn trái ngược với thái độ của ông ấy đối với những cuốn sách của mình. Ông ấy luôn từ chối thừa nhận với bất kỳ người nào, ngoại trừ một số những người có đặc quyền đặc biệt, rằng ông ấy là Lewis Carroll."

Có vẻ như Strong không nhận thấy rằng hai lý do ông ấy đưa ra có phần trái ngược nhau. Thật vậy, Dodgson hoặc phải gửi cuốn sách tiếp theo của mình, và do đó tiết lộ danh tính của ông, hoặc từ chối gửi nó, và do đó từ chối yêu cầu của nữ hoàng, mặc dù ông có thể đã lập luận rằng cuốn sách tiếp theo của Lewis Carroll hoàn toàn không phải là cuốn sách tiếp theo của Charles Dodgson.

Lưu ý rằng lý do đầu tiên mà Strong đưa ra cho thấy rằng việc Dodgson gửi tặng một cuốn sách toán cho nữ hoàng là điều đáng hổ thẹn và thô lỗ. Nhưng lý do thứ hai có vẻ như không đúng, vì chúng ta có thể tưởng tượng Dodgson hẳn sẽ vui vẻ coi nữ hoàng là một trong số "những người có đặc quyền" được ông đã tiết lộ danh tính của mình, và chắc chắn ông đã tiết lộ điều đó để được giao thiệp với một số nhân vật nổi tiếng cùng thời.

Dodgson không đáng tin cậy lắm khi ông phủ nhận những *câu chuyện* tiết lộ danh tính của mình; thậm chí chỉ cần nhìn qua danh sách những phủ nhận của ông là đủ để ủng hộ việc không tin vào ông. Nhưng có thể có một lý do chính đáng để tin Dodgson một lần. Thật vậy, việc Dodgson phủ nhận *câu chuyện* sẽ không ảnh hưởng đến niềm tin của chúng ta về nó nếu nhân vật liên quan không phải là nữ hoàng. Tôi không tin rằng việc tặng một cuốn sách toán học cho nữ hoàng sẽ đi ngược lại cách hành xử đúng mực của Dodgson. Tuy nhiên, việc công khai phủ nhận một câu chuyện liên quan đến nữ hoàng, câu chuyện có thể sẽ được nữ hoàng công nhận là thật, có thể sẽ bị coi là đáng hổ thẹn đối với một thần dân thời Victoria, một người "yêu nước nồng nàn và là một tín đồ trung thành của những hoạt động của hoàng gia" (Hudson 1976, 133).

Được biết, Dodgson rất kính trọng nữ hoàng và hoàng gia. Trong suốt cuộc đời mình, ông đã có một số dịp gặp gỡ các thành viên của hoàng gia, và ông chắc chắn đã quen với một số người trong họ. Ông đã tường thuật chi tiết trong nhật ký của mình chuyến thăm trường Christ Church của nữ hoàng, vào tháng 12 năm 1860. Trong các chuyến thăm Oxford của các thành viên hoàng gia, ông tìm cách được giới thiệu để chụp ảnh họ. Dodgson là một nhiếp ảnh gia có tiếng, được nhiều nhân vật nổi tiếng cùng thời làm mẫu. Đáng chú ý, ông đã chụp được ảnh Hoàng tử Frederick của Đan Mạch vào năm 1863 và Hoàng tử Leopold (con trai út của nữ hoàng) vào năm 1875. Theo Collingwood, một số bức ảnh của Dodgson "đã được nữ hoàng xem, và bà nói rằng rất thích chúng" (Collingwood 1898, tr. 102 – 104).

Đúng là trong thư từ cá nhân của mình, Dodgson đã bịa ra một số câu chuyện liên quan đến nữ hoàng để mua vui cho các bạn thư của ông. Một lần, ông đã "soạn một bức thư giả của nữ hoàng Victoria mời mình đến một bữa tiệc trong vườn". Một lần khác, ông giả vờ rằng nữ hoàng đã hỏi xin ông một bức ảnh, nhưng ông từ chối vì "nguyên tắc của ông là không bao giờ cho ảnh của mình, ngoại trừ cho những cô gái *trẻ*" (Cohen và Green 1979, tr. 135 – 136 và 116). Edward Wakeling đã nhận xét tinh tế rằng "đó dĩ nhiên chính là cách mà những câu chuyện và tin đồn bắt đầu" (Wakeling 2015, tr. 316). Vì vậy, có thể *câu chuyện* của chúng ta cũng được bắt đầu bởi chính Dodgson, để đùa vui một số người bạn gần gũi, trước khi trò đùa trở thành một tin đồn không thể ngăn chặn.

Tác giả của *Alice*

Đương nhiên, sự phủ nhận của Dodgson về *câu chuyện* vào năm 1896 không làm nó ngừng lan truyền. Ví dụ, nó được tìm thấy vào năm sau đó trong mục về Dodgson trong cuốn sách đầy tham vọng *Thư viện về Văn học hay nhất thế giới*, trong đó chủ biên nhận xét rằng

"hiếm khi một bộ óc kép như vậy – khi thì viết những điều hoàn toàn ngớ ngẩn và rất dí dỏm, khi thì lại khám phá những điều phức tạp của toán học cao cấp – lại có một thể hiện kỳ lạ hơn" (Warner 1897, tr. 309).

Câu chuyện cũng được tìm thấy vào năm 1897 trong chuyên mục tin ngắn của tờ *Northern Echo*, kèm theo một số câu thơ lấy cảm hứng từ đó.

Kể từ đó, *câu chuyện* được kể thường xuyên đến mức có đến mấy bản khác nhau của nó. Một số phiên bản cho rằng Dodgson đã gửi cho nữ hoàng cả một bộ sách chứ không chỉ là cuốn *Chuyên luận về định thức*. Một số phiên bản khác cho rằng thực ra người bán sách của nữ hoàng mới là người được yêu cầu giao sách của Dodgson cho nữ hoàng. Bất chấp sự khác biệt của chúng, tất cả các lời kể đều thống nhất ở một điểm trọng tâm: nữ hoàng đã yêu cầu một tác phẩm khác của tác giả của một câu chuyện thiếu nhi và thật ngạc nhiên, bà đã nhận được một cuốn sách toán.

Không khó để hiểu được sự thành công của "giai thoại hấp dẫn không chịu phai nhạt, mặc dù nó khá sai sự thật" này (Hudson 1976, tr. 132). "Riêng việc nó trùng khớp quá mức với hình ảnh phổ biến" về tính cách kép đã đủ giải thích cho sự dai dẳng của nó (Heath 1974, tr.3). Từ lâu, công việc chính của các nhà viết tiểu sử của Dodgson là giải quyết điều mà họ coi là một nghịch lý: "Bằng cách nào mà Lewis Carroll, một nhà toán học khó tính, dè dặt và sùng đạo sâu sắc thời Victoria, lại có thể tạo ra những câu chuyện đã trở thành những tác phẩm thiếu nhi kinh điển được yêu thích nhất trong văn học Anh?" (Cohen 1995, tr. 19).

Nhiều nhà nghiên cứu đã cố gắng giải quyết bí ẩn này và chứng minh sự thống nhất (hoặc ít nhất là sự tương đồng) giữa hai mặt của thiên tài của Dodgson. Một số người đã diễn giải quá mức các câu chuyện Alice nhằm tìm kiếm những chân lý toán học ẩn náu mà chỉ một nhà toán học mới có thể lồng vào đó. Một số người khác đã phóng đại phần toán học giải trí của Dodgson mà chỉ một nhà văn hài hước mới có thể tạo ra. Nhưng từ lâu, chiến lược chính của các người theo chủ nghĩa Carroll là làm cho cái tên Dodgson trở nên mờ nhạt, chìm về phía sau vì cho rằng "những công trình của Charles Dodgson kém thú vị hơn những tác phẩm của Lewis Carroll".

Việc hạ thấp Dodgson để ủng hộ Carroll đã bắt đầu từ khi Dodgson còn sống. Ví dụ, một người viết nhận xét về cuốn sách *Pillow–Problems* của Dodgson, một tập hợp các bài toán mà ông ký bằng tên thật của mình, đã bày tỏ một cách rõ ràng thị hiếu của mình:

"Và, sau cùng, thế giới cần Lewis Carroll, người một mình hiểu được "trí thông minh siêu hình" của trẻ nhỏ, và tức thì đưa người lớn tuổi nhất trong chúng ta đi dạo qua vùng đất mơ ước của chúng, hơn là ông Dodgson, người không có vẻ gì là một người du hành trong biển sâu của tư tưởng (Newton, Kelvin là vậy) mà chỉ là một nhà toán học tao nhã."

Ngoài sự bực bội khi thấy danh tính của mình bị tiết lộ, người ta có thể tưởng tượng được Dodgson có thể đã cảm thấy khó chịu như thế nào khi danh tiếng văn học can thiệp vào việc đánh giá các công trình toán học của ông. Tuy nhiên, sự cám dỗ của việc liên kết hai cái tên là rất mạnh, và nhiều đồng nghiệp làm toán của Dodgson chắc chắn đã không cưỡng lại được. Ví dụ, Hugh MacColl, người đã đã viết nhận xét về một số cuốn sách toán của Dodgson trong tạp chí *Athenaeum* đã đề cử cuốn sách *Lý thuyết mới của sự song song* của Dodgson, mà ông thấy "cũng thú vị như những điều kỳ lạ cô bé Alice đã gặp ở xứ sở diệu kỳ". Một ví dụ khác xảy ra vào năm 1894, khi một bài toán logic do Dodgson nghĩ ra được lưu truyền giữa các nhà logic học người Anh. John Venn muốn thảo luận về nó trên báo in và xin phép Dodgson. Ông đồng ý nhưng yêu cầu Venn "không được đề cập với bất kỳ ai *tên thật* [của ông], một cách có liên quan đến bút danh [của ông]". Venn hẳn đã rất bối rối, vì ông đã không đề cập đến cả hai cái tên trong cuốn sách của mình, mà chỉ gọi bài toán logic đang được thảo luận là Bài toán Alice, "người đề xuất nó, đối với độc giả nói chung, được biết đến nhiều hơn trong một nhánh văn học rất khác."

Tình hình sau đó không có nhiều thay đổi. Trong cuốn *Cơ sở về Lịch sử toán* học, Nicolas Bourbaki gọi *Chuyên luận về định thức* của Dodgson là "một cuốn sách khó hiểu, với sự cẩn thận và tỷ mỉ đặc trưng của ông, tác giả nổi tiếng của *Alice ở xứ sở diệu kỳ*" mà không nêu tên tác giả của nó; chỉ cần biết rằng chuyên luận được viết bởi tác giả của *Alice*. Sự nổi tiếng ngày nay của Dodgson trong giới toán học chắc chắn đã được hưởng lợi từ vị thế văn học của ông. Ngày nay, có một nhánh nghiên cứu đáng nể chuyên về Dodgson trong cộng đồng các nhà sử học toán học, không như nhiều đồng nghiệp đã bị lãng quên của ông. Dodgson có lẽ sẽ không bao giờ thiếu độc giả, nhưng ông luôn đối mặt với nguy cơ không được đọc một cách nghiêm túc. Độc giả hiện đại của Dodgson biết rằng họ đang đọc "tác giả của Alice." Thật vậy, có lẽ phần lớn độc giả của Dodgson đọc sách của ông chính là vì họ biết ông là tác giả của *Alice*. Như vậy, họ thường mong gặp những điều huyền ảo ở những nơi không có nhiều, và khi không có nhiều, đôi khi họ thêm thắt một chút.

Thật là xấu hổ cho nữ hoàng nếu bài viết này kết thúc mà không có một vài lời về cách bà được miêu tả trong *câu chuyện*. Mọi người dễ dàng hiểu được sự ngạc nhiên của bà khi nhận được chuyên luận về định thức của Dodgson, nếu bà quả thực nhận được cuốn sách, với lý do rằng "nữ hoàng, giống như phần còn lại của thế giới, tin rằng ông ấy chỉ đơn thuần là một người hài hước" (McKenna 1895, tr. 8). Bà có lẽ cũng sẽ phản ứng tương tự nếu nhận được một chuyên luận về thực vật nhiệt đới hoặc một nghiên cứu về nghệ thuật thời trung cổ, khi tất cả những gì bà mong đợi là một câu chuyện cho trẻ em. Tuy nhiên, sự đặc biệt của *câu chuyện* rõ ràng nảy ra từ định kiến sáo mòn rằng toán học và văn học thuộc về các lĩnh vực tách biệt và không thể dung hòa. Nữ hoàng đã rất ngạc nhiên vì bà mong đợi tác giả là "một người hài hước", nhưng điều khiến cho sự ngạc nhiên của bà vô cùng thú vị là nếu như bà đã kỳ vọng tác giả là bất kỳ ai khác khác ngoài "một người hài hước", có lẽ bà sẽ không thể ngờ ông ta là một nhà toán học.

Ngoài sự ngạc nhiên, nhiều phiên bản của *câu chuyện* cho rằng nữ hoàng không hề cảm thấy thích thú. Chúng ta đã thấy một số nhà bình luận phủ nhận câu chuyện với lý do rằng việc tặng một cuốn sách như vậy là vô lễ. Nếu *câu chuyện* quả thực đã xảy ra, những nhà bình luận như vậy cho rằng nữ hoàng sẽ cảm thấy bị xúc phạm. Chúng tôi không biết năng lực toán học của nữ hoàng, nhưng giả sử rằng bà không phải là một người yêu thích toán học, chúng ta vẫn thấy không có lý do gì để bà cảm thấy không hài lòng hoặc không được tôn trọng (mặc dù có thể đã thất vọng). Đầu tiên, chúng ta có thể tưởng tượng rằng nữ hoàng cảm thấy thích thú với sự cố nhỏ này, cũng như cách nó đã khiến nhiều thế hệ độc giả sau này thích thú. Và thứ hai, lời buộc tội thiếu tôn trọng dường như tận dụng niềm tin rộng rãi rằng toán học là một thứ buồn tẻ, không phù hợp với những nghi thức xã giao, và do đó không thích hợp để làm một món quà chân thành.

Câu chuyện Dodgson tặng một cuốn sách toán cho nữ hoàng Victoria là một giai thoại kinh điển trong thế giới toán học. Nó bảo chúng ta rằng một tiểu thuyết gia thành công khó có thể là một nhà toán học chuyên nghiệp và các nữ hoàng có lẽ không hứng thú với những cuốn sách toán. Không cần phải xem xét nó một cách quá nghiêm túc. Nhưng thành công của nó chắc chắn phản ánh những điều cũ rích nhưng còn mãi về toán học là gì, nhà toán học là ai, và sự sáng tạo toán học bắt nguồn từ đâu.

Tài liệu tham khảo

[1] Beale, Tony (1973). C. L. Dodgson: mathematician. In Denis Crutch, ed. *Mr. Dodgson*, pp. 26 – 33. London: The Lewis Carroll Society.

[2] Bok, Edward (1920). *The Americanization of Edward Bok: The Autobiography of a Dutch Boy Fifty Years Later*. New York: Charles Scribner's sons.

[3] Cohen, Morton N. (1995). *Lewis Carroll: A Biography*. New York: Alfred A. Knopf.

[4] Cohen, Morton N., and Roger Lancelyn Green, eds. (1979). *The Letters of Lewis Carroll*. New York: Oxford University Press.

[5] Collingwood, Stuart Dodgson (1898). *The Life and Letters of Lewis Carroll (Rev. C. L. Dodgson)*. London: T. Fisher Unwin.

[6] Heath, Peter, ed. (1974). The Philosopher's Alice. London: Academy Editions.

[7] Hudson, Derek (1976). *Lewis Carroll: An Illustrated Biography*. London: Constable.

[8] Humberstone, Lloyd (1995). Names and pseudonyms. *Philosophy* 70 (274), 487 – 512.

[9] McKenna, Ethel Mackenzie (August 1895). The author of "Alice in Wonderland." *Ladies' Home Journal* 8.

[10] Wakeling, Edward, ed. (1999). *Lewis Carroll's Diaries: The Private Journals of Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll)*, vol. 5. The Lewis Carroll Society, Bedfordshire: Luton Press.

[11] Wakeling, Edward, ed. (2005). *Lewis Carroll's Diaries: The Private Journals of Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll)*. Vol. 9, The Lewis Carroll Society, Herefordshire: Clifford Press.

[12] Wakeling, Edward (2015). *Lewis Carroll: The Man and His Circle*. London: I. B. Tauris.

[13] Warner Charles Dudley, ed. (1897). *A Library of the World's Best Literature: Ancient and Modern*. Vol. 8. New York: The international Society.

HÒN ĐẢO KỲ LẠ

GIA DƯƠNG

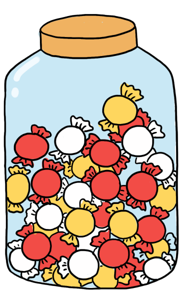
Trong một lần đi du lịch cùng thanh tra Lê Kính tới một hòn đảo xa xôi tận bên Phi Châu, Thám tử Xuân Phong được đặt chân tới một ngôi làng đẹp tuyệt diệu ẩn sau những cành cọ, rặng dừa xum xuê bên bờ biển xanh ngắt trong veo. Trưởng làng đon đả mời hai người tới ngôi nhà lớn của làng để dự một lễ hội đặc biệt của người dân. Theo như chỉ dẫn từ công ty lữ hành, những người thổ dân ở làng đó chia thành hai họ tộc, họ Tutu chuyên nói thật và họ Titi lại chuyên nói dối. Khi bước vào căn nhà lớn, Xuân Phong đã thấy có 50 người dân đảo ăn mặc những bộ quần áo màu sắc lộng lẫy dành riêng cho lễ hội và ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn thật to đặt giữa phòng. Theo như tục lệ, 50 người sẽ lần lượt đứng lên và nêu số tuổi của hai người ngồi cạnh anh ta, tuổi người ngồi bên trái trước – sau đó là người ngồi bên phải. Xuân Phong được biết trước trong sách hướng dẫn du lịch là: người tộc Tutu sẽ nói đúng cả hai con số này, còn người tộc Titi sẽ tăng tuổi của một người (người nào theo cách anh ta tùy thích chọn) thêm 1 tuổi còn giảm tuổi người kia đi 1 tuổi. Xuân Phong chỉ cần nghe xong và ghi chép lại 50 câu nói của 50 người dân làng ngồi quanh bàn, sau một chút suy nghĩ, đã biết được ngay ai là người đến từ tộc nào, Tutu hay Titi. Làm sao mà thám tử lại tài thế nhỉ, các em có biết cách lập luận của Xuân Phong hay không?

CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

1. Bạn Tùng làm một số bài trắc nghiệm và sau đó sẽ lấy điểm trung bình của các bài đó để tự đánh giá học lực của mình. Trả lời xong bài trắc nghiệm cuối cùng, Tùng thấy rằng nếu bài này mình được 97 điểm thì điểm trung bình của tất cả các bài trắc nghiệm sẽ là 90 điểm, còn nếu như ở bài cuối Tùng chỉ nhận được 73 điểm thì điểm trung bình sẽ chỉ còn 87 điểm. Vậy số bài trắc nghiệm mà Tùng đã làm là bao nhiêu?

2. Có 3 loại kẹo để trong lọ thủy tinh với ba màu khác nhau: kẹo màu đỏ, kẹo màu vàng và kẹo màu trắng. Nếu Bình nhặt hết số kẹo màu vàng thì tổng số kẹo trong lọ ít hơn một chiếc so với $2/3$ tổng số kẹo ban đầu. Còn nếu Bình nhặt hết số kẹo đỏ, thì số kẹo còn lại trong lọ nhiều hơn 4 chiếc so với $2/3$ tổng số kẹo ban đầu.

Vậy ban đầu trong hai loại kẹo màu vàng và kẹo màu trắng, loại nào có nhiều hơn và nhiều hơn bao nhiêu?



3. 40 bạn nhỏ nắm tay nhau xếp thành vòng tròn quanh đống lửa trại. Có tất cả 22 bạn có nắm tay một bạn nam, và 30 bạn có nắm tay một bạn nữ. Hỏi có tất cả bao nhiêu bạn nữ xếp trong vòng tròn quanh lửa trại ngày hôm đó?

4. Trên mặt bàn có 5 đồng xu xếp thành hàng ngang. Đồng xu ở giữa đặt sấp còn 4 đồng còn lại đều đặt ngửa. Mỗi một lần em được phép lật 3 đồng xu đặt liền nhau tùy ý. Liệu em có thể có cách lật thế nào để cuối cùng 5 đồng xu đều đặt sấp được không?

Cũng câu hỏi như vậy, nếu lúc đầu đồng xu đặt sấp duy nhất là đồng xu xếp đầu hàng? Là đồng xu xếp thứ hai trong hàng?

5. Một lần Lý Toét diện guốc mộc loẹt quẹt ra tận chợ phiên chơi ngày cuối tuần. Khi về nhà, Lý Toét ba hoa khoe khắp làng "Tôi là tôi gặp 15 ông bán cây cảnh ngoài chợ nhé. Mà tôi đi lòng vòng và nghiệm thấy cứ 3 ông bất kỳ có tổng cộng đúng 10 cây hoa hồng. Thế là tôi lẩm nhẩm đoán được ngay 15 ông này có tất cả bao nhiêu cây hoa hồng."

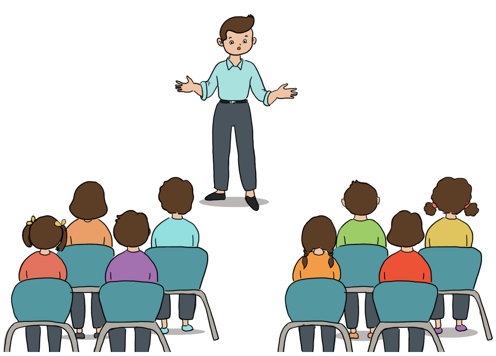
Em có thể đoán được Lý Toét đã tính số cây hoa hồng của 15 ông bán cây cảnh như thế nào không? Hay Lý Toét có khoác lác hay nhầm lẫn gì không nhỉ?

6. Có 20 bạn tham gia nhóm Toán ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn. Một lúc sau các bạn nhóm Văn cũng đến, cứ xen kẽ hai bạn nhóm Toán ngồi kề nhau giờ có thêm 20 bạn mới từ nhóm Văn. Tổng cộng có tất cả 400 bạn từ nhóm Văn ngồi thêm quanh chiếc bàn tròn rộng đó. Thỉnh thoảng một bạn nhóm Văn lại đứng dậy và rời khỏi bàn, dắt theo hai bạn ngồi cạnh mình đi luôn. Cứ như vậy, sau một lúc thì quanh bàn số bạn nhóm Toán còn lại chỉ là 3 bạn. Hỏi số bạn nhóm Văn còn ở lại quanh bàn lúc đó ít nhất phải là bao nhiêu?

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 9 năm 2022)

1. Có 30 bạn học sinh tham gia một cuộc thi hùng biện bằng tiếng Anh. Các bạn lần lượt chọn các câu hỏi và trả lời theo thứ tự xếp hàng. Bạn thứ nhất được 80 điểm, bạn thứ hai được 60 điểm, bạn thứ ba có số điểm bằng trung bình cộng của bạn thứ nhất và bạn thứ hai, bạn thứ tư có số điểm bằng trung bình cộng của ba bạn đầu tiên. Nói chung, kể từ bạn thứ ba trở đi thì mỗi một bạn học sinh tiếp theo luôn có số điểm bằng trung bình cộng số điểm của các bạn đã thi trước đó.

Hỏi bạn cuối cùng, tức bạn có số thứ tự 30, đạt được bao nhiêu điểm trong cuộc thi?



Lời giải. Ta nhận thấy nếu mỗi bạn tiếp theo nhận được số điểm là trung bình cộng điểm số của các bạn đứng trước đó, thì trung bình cộng số điểm của các bạn sẽ không thay đổi. Nếu hai bạn đầu tiên có trung bình cộng số điểm là 70, thì kể từ bạn thứ ba, trung bình cộng số điểm của n bạn đầu tiên, $(2<n<30)$, luôn bằng 70. Vì thế bạn cuối cùng cũng nhận được 70 điểm.

2. Vào một ngày hè, ba bạn Yến, Vinh và Công đến hiệu kem và mỗi bạn đều lấy đủ 3 vị: trái cây, vani và sô–cô–la (mỗi vị một cốc). Sau khi ăn xong, vì 3 cốc cho một người là chưa đủ, nên Yến lấy thêm một cốc kem trái cây, Vinh lấy thêm một cốc kem vani và Công lấy thêm một cốc kem sô–cô–la.

Lúc ra quầy thanh toán, Yến phải trả 70 nghìn, Vinh phải trả 80 nghìn còn Công phải trả 90 nghìn. Hỏi mỗi vị kem có giá bao nhiêu tiền một cốc?

Lời giải. Gọi a là giá tiền một cốc kem hoa quả (đơn vị: nghìn đồng), khi đó $a+10$ là giá một cốc kem va–ni, còn $a+20$ là giá một cốc kem sô–cô–la. Tổng số tiền các bạn phải trả là $70+80+90=240$ (nghìn đồng). Tổng số này cũng bằng $4(a+a+10+a+20)=12a+120$.

Từ đây suy ra $a=10$.

Như vậy một cốc kem hoa quả giá 10 nghìn đồng, một cốc kem va–ni giá 20 nghìn đồng, còn một cốc kem sô–cô–la giá 30 nghìn đồng.

Cách giải khác: Tổng số cốc kem mỗi loại mà ba bạn Yến, Vinh, Công đã ăn là 4 cốc, và tổng số tiền ba bạn đã trả là

$$70+80+90=240 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Như vậy, tổng giá tiền của 1 cốc kem hoa quả, 1 cốc kem va–ni và 1 cốc kem sô–cô–la là:

$$240:4=60 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Do đó giá tiền của 1 cốc kem hoa quả là:

$$70-60=10 \text{ (nghìn đồng)}.$$

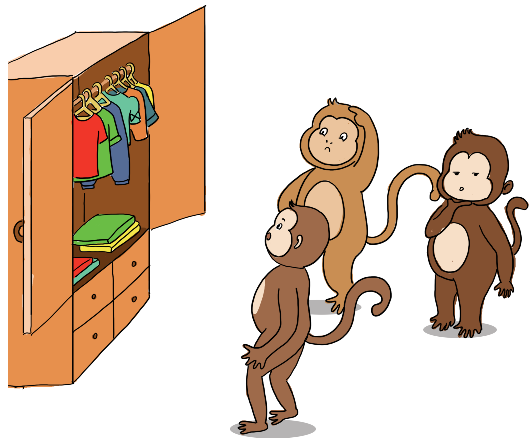
Giá tiền của 1 cốc kem va–ni là:

$$80-60=20 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Và giá tiền 1 cốc kem sô–cô–la là:

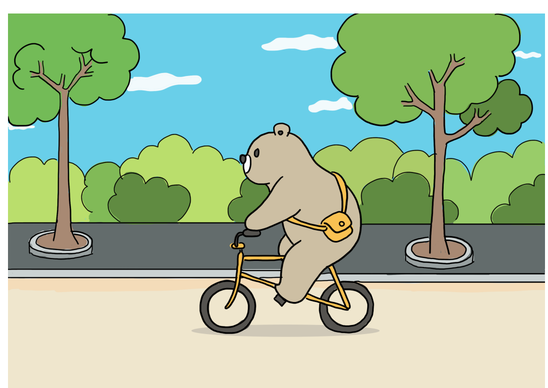
$$90-60=30 \text{ (nghìn đồng)}.$$

3. Ba chú khỉ con dễ thương có tên là Bibi, Bobo, và Bubu được diện áo và giày thật đẹp để quay video đăng YouTube. Các chú được mặc ba chiếc áo có các màu khác nhau là đỏ, xanh lá cây và xanh lơ. Giày của ba chú cũng có ba màu như thế, mỗi chú mang một màu. Bibi thì diện áo và giày có cùng màu. Bobo lại không thích màu đỏ, nên cả giày và áo đều không phải đỏ. Bubu thì mang giày xanh lá cây, còn áo lại khác màu giày. Vậy các chú khỉ đã mặc áo và đi giày có màu như thế nào nhỉ?



Lời giải. Các em thấy ngay chỉ có Bibi mới mang giày màu đỏ, vì ngoài chú ta ra không có chú khỉ nào còn lại có thể mang giày đỏ. Vì thế Bibi mặc cả bộ áo và giày đều đỏ. Và suy ra Bubu phải mặc áo màu xanh lơ. Cuối cùng, ta thấy Bobo mặc áo xanh lá cây và đi giày màu xanh lơ. Các chú trông thật vui mắt khi lên hình, phải không nào các em?

4. Để chuẩn bị cho cuộc đua xe đạp sắp diễn ra, sáng sớm Gấu con đã mang xe ra tập luyện. Lúc đi tốc độ của Gấu con là 15 dặm/giờ. Do đường khá đông nên chiều trở về dù vẫn đi trên con đường đó nhưng Gấu con chỉ di chuyển với tốc độ 10 dặm/giờ. Hỏi trên cả quãng đường lúc đi và về vận tốc trung bình của Gấu con là bao nhiêu?



Lời giải. Nhận thấy nếu quãng đường có khác nhau cũng ko ảnh hưởng tới kết quả tính vận tốc trung bình. Giả sử quãng đường là 30 dặm, thời gian lúc đi của Gấu là:

$$30 : 15 = 2 \text{ (giờ)}.$$

Thời gian lúc về là

$$30 : 10 = 3 \text{ (giờ)}.$$

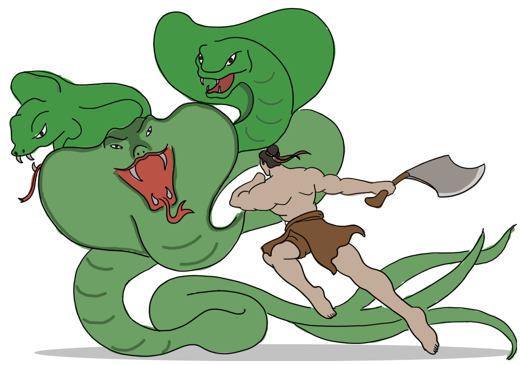
Vậy Gấu con đã đi tổng cộng 60 dặm trong 5 giờ nên vận tốc trung bình là

$$60 : 5 = 12 \text{ (dặm/giờ)}.$$

5. Trên bàn có một đống đá cuội gồm 1001 viên. Người ta lấy ra một viên đá và chia đống đá ra thành hai đống mới, sao cho mỗi đống có ít nhất 3 viên. Bây giờ, trong mỗi một đống đá mới, người ta lại lấy ra một viên đá và chia đống đó ra thành hai đống mới, và cứ tiếp tục như vậy. Hỏi có thể lấy các viên đá sao cho sau một số lần lấy, trên bàn chỉ còn toàn các đống đá mà mỗi đống có đúng 3 viên được hay không?

Lời giải. Ta nhận thấy sau mỗi một bước, số đá trên bàn giảm đi 1 viên nhưng số đống đá lại tăng thêm 1. Vì vậy tổng số các viên đá và số các đống đá ở trên bàn không thay đổi sau mỗi lần nhặt bớt đi viên đá. Ban đầu tổng số này là $1001 + 1 = 1002$ không chia hết cho 4. Vì thế, ta không thể nhận được tình huống khi trên bàn chỉ còn toàn các đống đá, mỗi đống có đúng 3 viên, vì khi đó tổng số này sẽ bằng $3k + k = 4k$ (chia hết cho 4), ở đó k là số các đống đá lúc đó ở trên mặt bàn.

6. Thạch Sanh chuẩn bị lên đường tiêu diệt Mãng xà – con quái vật có tận 3 cái đầu và 3 cái đuôi gớm ghiếc. Ngài Thần Miếu đưa cho chàng một bảo bối và dặn dò: "Đây là chiếc gươm thần thiêng liêng. Bằng một nhát gươm, con có thể chém đứt được một cái đầu, hoặc là hai cái đầu, hoặc là một cái đuôi, hoặc là hai cái đuôi của con Mãng xà. Nhưng con nên nhớ, nếu con chỉ chém đứt một cái đầu, thì một cái đầu khác của nó sẽ mọc lên, nếu chỉ chém đứt một cái đuôi, thì hai cái đuôi khác lại mọc ra, nếu chém đứt hai cái đuôi thì một cái đầu khác lại mọc ra, còn nếu con chém đứt được hai cái đầu thì không có gì mọc ra thêm nữa". Vậy Thạch Sanh có thể chém đứt tất cả đầu và đuôi của con Mãng xà sau bao nhiêu nhát gươm?



Lời giải. Để chiến thắng được Mãng xà, Thạch Sanh phải chém đứt được một số chẵn cái đầu của nó. Số đầu mới của Mãng xà sẽ tăng thêm chỉ trong trường hợp nếu Thạch Sanh chém đứt một số cái đuôi nào của con chằn tinh này. Do có tất cả 3 cái đuôi, nên nếu chém đứt tất cả đuôi của Mãng xà, thì số đầu mới mọc ra không ít hơn 2 cái. Vì thế tổng số đầu mà Thạch Sanh cần phải chém để thắng không ít hơn 5 cái. Do vậy, một số chẵn cái đầu cần chém đứt phải tối thiểu là 6 cái. Đây là cách Thạch Sanh tiêu diệt Mãng xà với 6 đầu: Đầu tiên, chàng sẽ lần lượt chặt đứt từng cái đuôi (với 3 nhát gươm). Mãng xà giờ có 6 đuôi mới và 3 đầu. Sau đó chàng lần lượt sẽ chặt đứt từng cặp đuôi (với 3 nhát gươm). Lúc này Mãng xà giờ có 6 đầu và 0 đuôi. Cuối cùng Thạch Sanh sẽ lần lượt chặt từng cặp 2 cái đầu sau 3 nhát chém. Tóm lại, với 9 nhát gươm Thạch Sanh sẽ hạ được con chằn tinh.

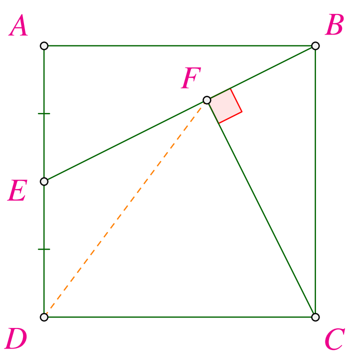
A SIMPLE GEOMETRY PROBLEM

NGHIA DOAN[1]

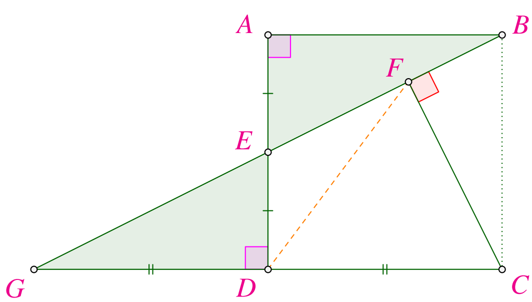
Usually approaching a problem from different angles help to see different nature of the problem, more importantly of what we learned, and how to apply them. In this article, we show five different approaches, or solutions, to a simple geometry problem.

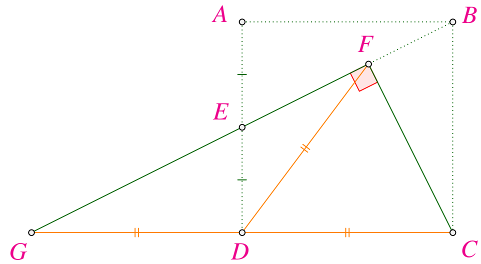
Example

Let $ABCD$ be a square, E be the midpoint of side AD, and F be the foot of the altitude from C to BE. Prove that $DF = DC$.



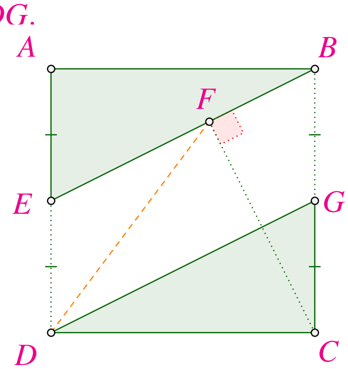
First proof – Using congruent triangles. Extending FE to intersect CD at G, see the diagram below. Since $\angle AEB = \angle GED, AE = ED, \angle EAB = \angle EDA = 90^\circ$, by the angle–side–angle (ASA) rule, the triangles EAB and EDG are equal, thus the corresponding pair of sides are the same, or $DG = AB$. Therefore $DG = DC$.

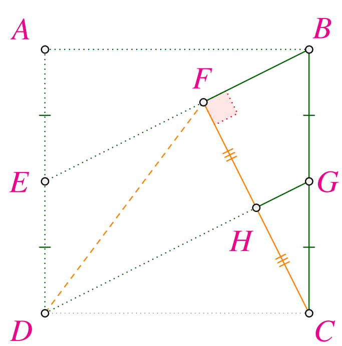




Now, it is a well–known fact that, *the midpoint of the hypotenuse of a right triangle is at equidistance from all vertices.* Using this fact for $\triangle CFG$ in the diagram in the figure above, $DG = DC$, $\angle GFC = 90^\circ$, thus $DF = DG = DC$.

Second proof – Using median segment. Let G be the midpoint of BC, and let H be the intersection of DG and FC. By side–side–side (SSS) rule, the triangle EAB and GCD are equal, so $\angle ABE = \angle CDG$, implying $EB \parallel DG$.

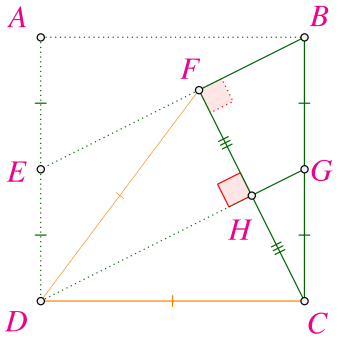




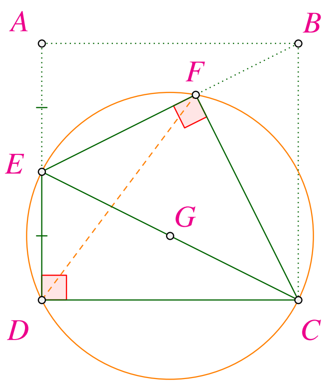
Furthermore, in $\triangle FBC$, $GH \parallel BF$, G is the midpoint of BC, so H is the midpoint of

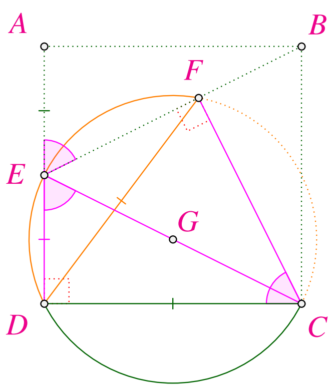
[1] *Ottawa, Canada.*

FC. Finally, in $\triangle DFC$, $DH \perp FC$, H is the midpoint of FC, thus by side–angle–side (SAS) rule, the triangles DHF and DHC are equal, hence $DF = DC$.



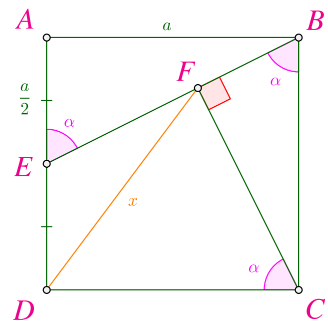
Third proof – Using angles in circle. The triangles EDC and EFC are right at D and F respectively. It follows that the points C, D, E and F are on the circle centered at G.





Note that the triangles EAB and EDC are conguent by side–angle–side rule. It follows that $\angle DEC = \angle AEB = 180^\circ - \angle DEF = \angle DCF$. Moreover, $\angle DEC = \angle DFC$ (subtended by the same arc DC). Therefore $\angle DCF = \angle DFC$; thus $\triangle DCF$ is isoceles and $DC = DF$.

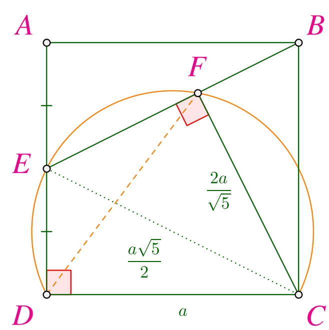
Fourth proof – Using triangle trigonometry. First, by Pythagorean theorem, $EB = \sqrt{AB^2+AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Then, let $\alpha = \angle DCF = \angle FBC = \angle AEB$. It is easy to see that $\cos\alpha = \frac{AE}{EB} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, and since $\triangle FCB \sim \triangle ABE$, $\frac{FC}{BC} = \sin\alpha = \frac{AB}{EB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, hence $FC = BC\sin\alpha = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.



By the Law of Cosines,

$$DF = \sqrt{DC^2 + FC^2 - 2\cdot DC\cdot FC\cdot\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{a^2 + \left(\frac{2a}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2a\frac{2a}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}} = a.$$

Fifth proof – Using Ptolemy theorem. Similar to the previous proof, let $DC = a$, then $EB = EC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Since $\frac{FC}{BC} = \frac{AB}{EB}$ we have $FC = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. Since $\frac{FB}{BC} = \frac{AE}{EB}$ we have $FB = \frac{a}{\sqrt{5}}$.



By Ptolemy theorem for the cyclic quadrilateral $CDEF$, $DF\cdot EC = ED\cdot FC + EF\cdot DC = \frac{a}{2}\cdot\frac{2a}{\sqrt{5}} + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{\sqrt{5}}\right)\cdot a = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$. It follows that $DF = a$.

Be open minded. Look for alternative approachs. Try to use your own toolbox before looking for something else. Often, you know more than you think you know.

Vocabulary

Geometry: (dt) hình học
Angle: (dt) góc
Triangle: (dt) tam giác
Square: (dt) hình vuông
Quadrilateral: (dt) tứ giác
Circle: (dt) đường tròn
Midpoint: (dt) trung điểm
Median: (dt) đường trung bình
Vertex: (dt) đỉnh; (số nhiều: vertices).
Altitude: (dt) đường cao
Congruent: (tt) bằng nhau; congruent triangles: tam giác bằng nhau
Side: (dt) cạnh
Hypotenuse: (dt) cạnh huyền
Right: (tt) vuông; right angle: góc vuông
Isoceleses: (tt) cân; isosceles triangle: (dt) tam giác cân
Arc: (dt) cung

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

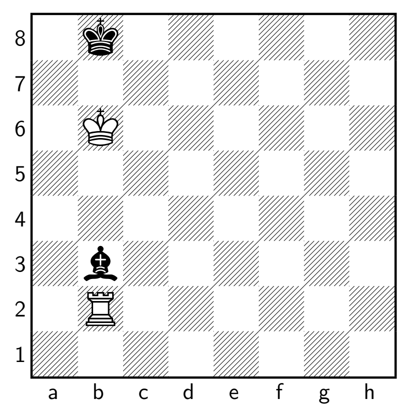
Tiếp theo ta đánh số các thổ dân có màu xanh ngồi tiếp theo Toto theo chiều kim đồng hồ là $1, 2, 3, \ldots, 25$.

Ta nhận thấy mỗi một thổ dân luôn nói đúng tổng số tuổi của hai người ngồi cạnh mình. Ta sẽ lấy tổng các số tuổi được các thổ dân màu xanh ở vị trí số $1, 3, 5, \ldots, 23, 25$ nói ra. Đó chính là tổng số tuổi của tất cả các thổ dân màu đỏ, cộng thêm tuổi của Toto. Sau đó ta lại lấy tổng các số tuổi được các thổ dân màu xanh ở vị trí số $2, 4, , \ldots, 22, 24$ nói ra. Đây lại chính là tổng số tuổi của tất cả các thổ dân màu đỏ, trừ đi tuổi của Toto. Lấy tổng đầu tiên trừ đi tổng thứ hai rồi chia đôi, ta nhận được ngay tuổi của anh Toto. Như vậy có thể biết tuổi của bất kỳ ai trong số 50 thổ dân ăn mặc rất đẹp kia.

Vậy em đã biết cách Xuân Phong xác định được ai là người đến từ tộc Tutu hay đến từ tộc Titi rồi chứ. Chắc hẳn Xuân Phong và Lê Kính đã có một kỳ nghỉ tuyệt vời bên cạnh những người thổ dân vui tính thật đặc biệt này.

Góc cờ

1.b8/H+ Vxb8 2.Vb6 Ta2 3.Xc2 Tb3 4.Xb2!



4...Te6 [4...Tf7 5.Xf2 Te6 6.Xf8+ Tc8 7.Xd8; 4...Ta4 5.Va5+; 4...Td5 5.Xd2 Tb7 6.Xd8+ Tc8 7.Xf8]

5.Xe2 Td7 6.Xh2 Vc8 7.Xh8+ Te8 8.Xxe8+

- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P651–P660: trước ngày 15/1/2023.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P661. (Mức B) Một xấp tiền giấy có 120 tờ tiền, gồm các tờ tiền với mệnh giá 10.000 đồng, 50.000 đồng, và 100.000 đồng. Số tờ tiền mệnh giá 50.000 đồng là một số lớn hơn 5 và chia hết cho 5. Hỏi mỗi loại mệnh giá có bao nhiêu tờ tiền? Biết rằng, tổng mệnh giá của cả xấp tiền là 8.600.000 đồng.

Đặng Hải, Hà Nội

P662. (Mức B) Với mỗi số thực x, đặt $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$. Cho các số thực đôi một phân biệt a, b, c thoả mãn

$$\begin{aligned} &af(b) + bf(c) + cf(a) \\ &= af(c) + bf(a) + cf(b) = 0. \end{aligned}$$

Chứng minh rằng $a + b + c = 0$.

Phan Quang Đạt, Hà Nội

P663. (Mức B) Cho hai đường tròn đồng tâm (C_1) và (C_2), có bán kính, tương ứng, là 14 và 50. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Nếu qua một điểm tuỳ ý nằm trên (C_1), kẻ k dây cung tuỳ ý của (C_2) thì chắc chắn có một dây cung có độ dài không nguyên.

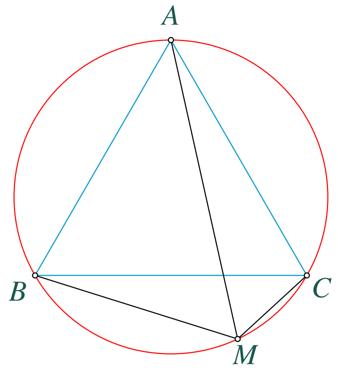
Hà Duy Hưng, Hà Nội

P664. (Mức B) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{23} = 3y^{21} - 2z^{19} \\ y^{23} = 3z^{21} - 2x^{19} \\ z^{23} = 3x^{21} - 2y^{19}. \end{cases}$$

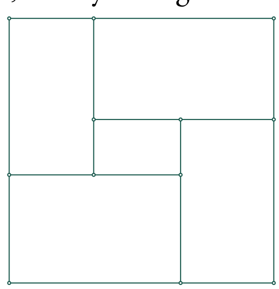
Bằng Linh, Phú Thọ

P665. (Mức B) Cho số thực $k \geq 1$, và cho tam giác đều ABC cạnh a. Một điểm M di động trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $S = kMA + MB + MC$.



Hoàng Ngọc Minh, Hà Nội

P666. (Mức B) Cho số nguyên $n \geq 13$. Chia hình vuông cạnh n thành năm hình chữ nhật, như ở hình dưới đây. Hỏi, độ dài các cạnh của năm hình chữ nhật đó có thể là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 hay không? Vì sao?



Phạm Như Ngọc, Hải Phòng

P667. (Mức A) Chứng minh rằng

$$8(x+y-1)^2 - 9xy(x+y-1) + xy \geq 0$$

với mọi $x, y \in [0; 1]$.

Nguyễn Tấn Mạnh và Nguyễn Anh Vũ, Bình Định

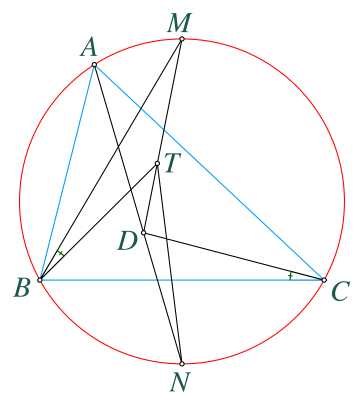
P668. (Mức A) Cho số nguyên $n \geq 2$. Có n con ếch nằm trên một trục số, tại n điểm tuỳ ý, thuộc tập $2n$ điểm $1, 2, \ldots, 2n$. Vào cùng một thời điểm, mỗi con ếch đều nhảy đến một trong số n điểm còn lại, thuộc tập $2n$ điểm vừa nêu, sao cho không có hai con nào cùng nhảy tới một điểm. Chứng minh rằng

$a)$ Tổng khoảng cách n con ếch đã nhảy không vượt quá n^2.

$b)$ Tồn tại một phương án nhảy của n con ếch, sao cho tổng khoảng cách chúng đã nhảy đúng bằng n^2.

Lê Vĩ, Hà Nội

P669. (Mức A) Cho tam giác nhọn ABC, với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cung BC lớn và cung BC nhỏ. Trên đường thẳng AN, lấy điểm D sao cho D nằm trong tam giác ABC và không trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ấy. Trên đoạn thẳng MD, lấy điểm T sao cho $\angle MBT = \angle DCB$. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác TND nằm trên đường thẳng BC.



Đỗ Đại Phong, Thừa Thiên Huế

P670. (Mức A) Hỏi, có thể chọn được tối đa bao nhiêu điểm nguyên trong mặt phẳng toạ độ, sao cho đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ trong chúng chứa đúng 2022 điểm nguyên? (Trong mặt phẳng toạ độ, một điểm được gọi là *điểm nguyên*, nếu cả hoành độ và tung độ của nó đều là các số nguyên.)

Nguyễn Thành Khang, Hà Nội

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P631. (Mức B) Các số tự nhiên, bắt đầu từ 20, được viết liên tiếp nhau thành một hàng ngang, như sau:

$$2021222324252627\ldots.$$

Hỏi chữ số ở vị trí thứ 2022, kể từ trái qua phải, là chữ số nào?

Lời giải (*của bạn Võ Trần Tiến, lớp* 8^5, *trường THCS Long Bình Điền, tỉnh Tiền Giang*).

Gọi a là chữ số ở vị trí thứ 2022, kể từ trái qua phải.

Nhận thấy:

– Từ 20 đến 99 có $(99-20+1)\cdot 2 = 160$ chữ số;

– Từ 100 đến 999 có $(999-100+1)\cdot 3 = 2700$ chữ số.

Vì $160 < 2022 < 160+2700$ nên a là chữ số của một số tự nhiên có ba chữ số.

Từ đó, do

$$2022-160 = 3\cdot 620+2$$

nên a là chữ số thứ hai (kể từ trái qua phải) của số tự nhiên có ba chữ số thứ 621.

Số tự nhiên có ba chữ số thứ 621 là:

$$100+621-1 = 720.$$

Vì vậy, a là chữ số 2.

Ta có điều phải tìm theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Hà Thanh

P632. (Mức B) Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn

$$\frac{x^2}{(x+y)^2}+\frac{y^2}{(y+z)^2}+\frac{z}{z+x} = 1.$$

Chứng minh rằng $x = y = z$.

Lời giải. Do $x, y, z > 0$ nên hệ thức của đề bài tương đương với

$$\frac{1}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{z}{y}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{z}{x}}. \quad (1)$$

Đặt $a = \dfrac{y}{x}$ và $b = \dfrac{z}{y}$, ta có $a, b > 0$, và (1) được viết lại dưới dạng:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2} = \frac{1}{1+ab}. \quad (2)$$

Tiếp theo, có thể giải bài toán theo một trong hai cách sau:

• **Cách 1** (*của người đề xuất bài toán*).

Ta có:

$$\begin{aligned}
(2) \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}\right)^2 \\
&= \frac{1}{1+ab}-\frac{2}{(1+a)(1+b)} \\
\Leftrightarrow & \frac{(a-b)^2}{(1+a)^2(1+b)^2} = \frac{a+b-ab-1}{(1+ab)(1+a)(1+b)} \\
\Leftrightarrow & \frac{(a-b)^2}{(1+a)(1+b)} = \frac{-(1-a)(1-b)}{1+ab} \\
\Leftrightarrow & (1+ab)(a-b)^2+\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right) = 0 \\
\Leftrightarrow & ab(a-b)^2+(ab-1)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow & (a-b)^2 = (ab-1)^2 = 0 \text{ (do } ab > 0) \\
\Leftrightarrow & a = b = 1.
\end{aligned}$$

Vì vậy

$$(1) \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{z}{y} = 1 \Leftrightarrow x = y = z.$$

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

• Cách 2 (*của người chấm bài*).

Do $a, b > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz cho hai bộ số $(1, \sqrt{ab})$ và $\left(1, \sqrt{\frac{a}{b}}\right)$, ta được:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+a)^2} &= \frac{1}{\left(1\cdot 1+\sqrt{ab}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2} \\
&\geq \frac{1}{(1+ab)\left(1+\frac{a}{b}\right)} = \frac{b}{(1+ab)(b+a)};
\end{aligned}$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = 1$.

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{a}{(1+ab)(a+b)};$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$.

Do đó

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2} \\
&\geq \frac{b}{(1+ab)(b+a)}+\frac{a}{(1+ab)(a+b)} \\
&= \frac{1}{1+ab};
\end{aligned}$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = a = 1$.

Vì thế, $(2) \Leftrightarrow b = a = 1$; hay

$$(1) \Leftrightarrow \frac{z}{y} = \frac{y}{x} = 1 \Leftrightarrow x = y = z.$$

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một số lời giải không được chấp nhận là lời giải đúng, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau:

– *Ngộ nhận* rằng, nếu $a, b > 0$ thì

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab} \Leftrightarrow a = b.$$

– Mới chỉ chứng minh được rằng, nếu $x, y, z > 0$ thì

$$\frac{x^2}{(x+y)^2} + \frac{y^2}{(y+z)^2} + \frac{z}{z+x} \geq 1.$$

– Đưa ra lời giải cho một bài toán, *khác với bài đã ra*: "Hệ thức ở bài đã ra xảy ra *khi* $x = y = z$".

2. Bên cạnh các lời giải không đúng nêu trên, có một số lời giải không được coi là hoàn chỉnh, do người giải bài đã mắc các lỗi "chính tả" không thể châm chước; chẳng hạn như:

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y} = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Lê Huy

P633. (Mức B) Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương n, số dư trong phép chia số $A = n^{2024} + n^{2025}$ cho số $B = n + n^2 + n^3 + \cdots + n^{2022}$ là một số chẵn.

Lời giải (*phỏng theo ý giải của bạn Ngô Quang Bình, lớp 11T1, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định*).

Từ giả thiết của bài ra, ta có:

$$A = n^{2024}(1+n), \qquad (1)$$

$$B = n(1+n) + n^3(1+n) + \cdots + n^{2021}(1+n). \qquad (2)$$

Gọi q và r tương ứng là thương và số dư trong phép chia A cho B, ta có:

$$A = Bq + r. \qquad (3)$$

Vì với mọi số nguyên dương $n, n(n+1)$ là một số chẵn, nên từ (1) và (2) suy ra, với mọi số nguyên dương n, A và B là các số chẵn. Vì thế, từ (3) suy ra, với mọi số nguyên dương n, r là một số chẵn.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một số lời giải sai, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi dưới đây:

– *Xác định sai số dư* trong phép chia A cho B;

– *Ngộ nhận rằng*, $B = \frac{n^{2023}-1}{n-1}$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$ và đồng thời, *chưa đi đến điều phải chứng minh* theo yêu cầu đề bài.

(***Lưu ý***: *Với a, b, m là các số nguyên dương, $m > 1$, đồng dư thức $a \equiv b \pmod{m}$* ***không*** *tương đương với "b là số dư trong phép chia a cho m".*)

2. Bên cạnh các lời giải sai nêu trên, có một lời giải không được coi là lời giải hoàn chỉnh, do người giải bài chứng minh thiếu chặt chẽ, thiếu chính xác sự kiện $n^2 + n^3$ là số dư trong phép chia A cho B.

3. Với các giả thiết của bài ra, có thể chứng minh được rằng, thương số trong phép chia A cho B là một số tự nhiên chia hết cho 6.

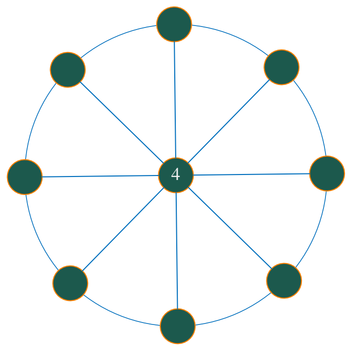
Lưu Thị Thanh Hà

P634. (Mức B) Bạn Pi ghi số 4 vào hình tròn nhỏ, nằm ở tâm của đường tròn lớn trong Hình dưới đây. Sau đó, Pi muốn ghi tiếp vào mỗi hình tròn nhỏ còn lại một số nguyên, sao cho hai điều kiện sau được đồng thời thoả mãn:

i) Tổng của tám số ở tám hình tròn nhỏ nằm trên đường tròn lớn bằng 66.

ii) Tổng của ba số ở ba hình tròn nhỏ, nằm trên cùng một đường kính của đường tròn lớn, đều bằng nhau.

Hỏi, Pi có thể thực hiện được ý muốn của mình hay không? Vì sao?



Lời giải (*dựa theo tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).

Giả sử Pi thực hiện được ý muốn của mình.

Xét một cách điền bất kỳ của Pi, thỏa mãn các điều kiện $i)$ và $ii)$.

Gọi S là tổng của tám số ở tám hình tròn nhỏ, nằm trên đường tròn lớn. Theo $i)$, ta có:

$$S = 66. \tag{1}$$

Gọi s là tổng của ba số ở ba hình tròn nhỏ, nằm trên cùng một đường kính tùy ý của đường tròn lớn. Do các số ở các hình tròn nhỏ là các số nguyên, nên s là một số nguyên.

Theo $ii)$, tổng của ba số ở ba hình tròn nhỏ, nằm trên mỗi đường kính, trong số ba đường kính còn lại của đường tròn lớn, cũng bằng s. Vì thế, từ quan sát hình đã cho ở đề bài, ta có:

$$4s = 4\cdot 4 + S. \tag{2}$$

Từ (1) và (2), suy ra $4s = 82$. Từ đây, vì s là số nguyên nên 82 chia hết cho 4, là điều vô lý.

Điều vô lý nhận được ở trên cho thấy, giả sử ở đầu lời giải là sai; nghĩa là, Pi *không thể* thực hiện được ý muốn của mình.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Nguyễn Khắc Minh

P635. (Mức B) Chứng minh rằng, với mọi số nguyên $n \geq 2$, ta luôn có:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{2^{n-2}}{n!} \leq \frac{3}{2}.$$

(Với mỗi số nguyên dương k, $k!$ (đọc là, “k giai thừa”) ký hiệu tích của k số nguyên dương đầu tiên; tức là, $k! = 1\cdot 2\cdots k$.)

Lời giải (*phỏng theo ý giải của bạn Nguyễn Công Minh Đức, lớp 11 Toán 1, trường THPT chuyên Hưng Yên, tỉnh Hưng Yên*).

Trước hết, ta chứng minh Nhận xét sau:

Nhận xét. Với mọi số nguyên $k \geq 3$, ta có:

$$\frac{2^{k-2}}{k!} \leq 2\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

Chứng minh. Dễ thấy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức

$$2^{k-3} \leq (k-2)!. \tag{$*$}$$

Với $k = 3$, hiển nhiên $(*)$ là một bất đẳng thức đúng.

Xét $k \geq 4$. Khi đó, $k-2 \geq 2$. Do đó

$$\begin{aligned}(k-2)! &= (k-2)(k-3)\cdots 2\\ &\geq \underbrace{2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}_{k-3 \text{ thừa số } 2} = 2^{k-3}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức $(*)$ được chứng minh, và do đó, bất đẳng thức của Nhận xét được chứng minh.

Trở lại bài toán.

Dễ thấy, với $n = 2$, bất đẳng thức của đề bài là một bất đẳng thức đúng.

Xét $n \geq 3$. Khi đó, theo Nhận xét trên, ta có:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{2^2}{4!} + \cdots + \frac{2^{n-2}}{n!}\\ \leq &\frac{1}{2} + 2\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots\right.\\ &\left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right)\\ = &\frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2} - \frac{2}{n} < \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Vì vậy, bất đẳng thức của đề bài được chứng minh.

Bình luận và Nhận xét

Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có hai lời giải không được chấp nhận là lời giải hoàn chỉnh, do người giải bài không chứng minh các đánh giá mang tính "chìa khóa" trong lời giải.

Lê Huy

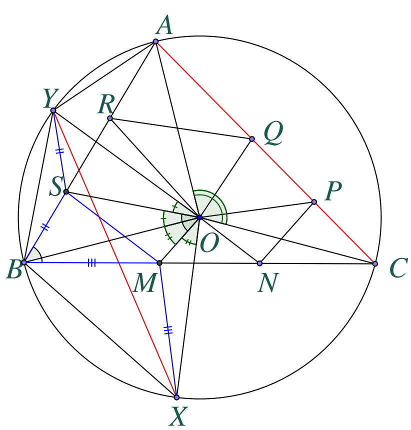
P636. (Mức B) Cho tam giác nhọn ABC, nội tiếp đường tròn (O). Xét lục giác lồi $MNPQRS$ có các đỉnh M,N thuộc cạnh BC, các đỉnh P,Q thuộc cạnh CA, các đỉnh R,S thuộc cạnh AB, sao cho

$$\angle ROQ = \angle BAC,\ \angle MOS = \angle CBA$$
$$\text{và } \angle NOP = \angle ACB.$$

Chứng minh rằng

$$MN + PQ + RS \leq NP + QR + SM.$$

Lời giải (*của bạn Trần Minh Hoàng, lớp 10T1, trường THPT chuyên Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh*).



Gọi X và Y, tương ứng, là điểm đối xứng với B qua OM và qua OS; ta có:

$$OX = OB = OY; \quad (1)$$
$$\text{và } BM = XM, SB = SY. \quad (2)$$

Từ (1) suy ra, $X,Y \in (O)$.

Tiếp theo, ta có:

$$\begin{aligned}\angle XOY &= \angle XOB + \angle BOY\\ &= 2\angle MOB + 2\angle BOS\\ &= 2\angle MOS = 2\angle CBA = \angle COA.\end{aligned}$$

Mà $X,Y,A,C \in (O)$, nên $XY = CA$. (3)

Từ (2) suy ra

$$\begin{aligned}BM + MS + SB &= XM + MS + SY\\ &\geq XS + SY \geq XY\\ &= CA \text{ (theo (3))}. \quad (4)\end{aligned}$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$CP + PN + NC \geq AB, \quad (5)$$
$$AR + RQ + QA \geq BC. \quad (6)$$

Cộng các bất đẳng thức (4), (5), (6), vế theo vế, ta được:

$$\begin{aligned}&(BM + MS + SB) + (CP + PN + NC)\\ &+ (AR + RQ + QA) \geq CA + AB + BC.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}&NP + QR + SM\\ \geq &(BC - BM - NC) + (CA - CP - QA)\\ &+ (AB - AR - SB)\\ = &MN + PQ + RS.\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Lời giải của bạn *Trần Minh Hoàng* là lời giải duy nhất Tạp chí nhận được từ bạn đọc.

2. Một câu hỏi rất tự nhiên được đặt ra: *Dấu đẳng thức ở bất đẳng thức của đề bài có thể xảy ra hay không?* Mời các bạn đọc có quan tâm cùng tìm hiểu.

Hạ Vũ Anh

P637. (Mức A) Cho số thực $a \in (0;1)$. Cho dãy số (x_n), xác định bởi: $x_1 = a$ và

$$x_{n+1} = x_n\left(1 - \frac{x_n^3 + x_n^4}{2}\right) \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng, tồn tại vô số số nguyên dương m sao cho

$$\frac{1}{x_{m+1}} - \frac{1}{x_m} > \frac{1}{3\sqrt[3]{m^2}}.$$

Lời giải (*của người chấm bài*).

Bằng phương pháp quy nạp theo $n \in \mathbb{N}^*$, dễ dàng chứng minh được rằng, $x_n \in (0;1)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Vì thế, từ hệ thức xác định dãy

(x_n), suy ra $x_{n+1} < x_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Như vậy, (x_n) là một dãy số giảm, bị chặn dưới bởi 0; do đó, nó có giới hạn hữu hạn không âm, khi $n \to +\infty$.

Đặt $L = \lim x_n$. Khi đó, chuyển hệ thức xác định dãy (x_n) qua giới hạn, ta được:

$$L = L\left(1 - \frac{L^3 + L^4}{2}\right);$$

suy ra, $L = 0$ (do $L \geq 0$).

Vì thế, đặt $y_n = \frac{x_n^3 + x_n^4}{2}$, ta có

$$\lim y_n = 0 \text{ và } \lim \frac{y_n}{x_n^3} = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Từ hệ thức xác định dãy (x_n) suy ra

$$\frac{1}{x_{n+1}^3} - \frac{1}{x_n^3} = \frac{1}{x_n^3}\left(\frac{1}{(1-y_n)^3} - 1\right)$$
$$= \frac{y_n}{x_n^3} \cdot \frac{3 - 3y_n + y_n^2}{(1-y_n)^3} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Vì thế, do (1) nên

$$\lim\left(\frac{1}{x_{n+1}^3} - \frac{1}{x_n^3}\right) = \frac{3}{2}.$$

Do đó, theo định lý trung bình Cesaro, ta có

$$\lim \frac{1}{nx_n^3} = \frac{3}{2}; \text{ suy ra, } \lim nx_n^3 = \frac{2}{3}. \qquad (2)$$

Tiếp theo, từ hệ thức xác định dãy (x_n) ta có:

$$\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right)\sqrt[3]{n^2}$$
$$= \frac{1}{x_n} \cdot \left(\frac{1}{1-y_n} - 1\right) \cdot \sqrt[3]{n^2}$$
$$= \frac{1}{x_n} \cdot \frac{y_n}{1-y_n} \cdot \sqrt[3]{n^2}$$
$$= \frac{1}{1-y_n} \cdot \frac{y_n}{x_n^3} \cdot \left(nx_n^3\right)^{\frac{2}{3}} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Vì thế, từ (1) và (2), suy ra

$$\lim\left(\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right)\sqrt[3]{n^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Mà $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$, nên theo định nghĩa giới hạn hữu hạn, tồn tại số nguyên dương n_0, sao cho với mọi $n \geq n_0$ ta có

$$\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right)\sqrt[3]{n^2} > \frac{1}{3}.$$

Do đó, có vô số số nguyên dương m, sao cho

$$\frac{1}{x_{m+1}} - \frac{1}{x_m} > \frac{1}{3\sqrt[3]{m^2}}.$$

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Bài đã ra là một bài tập khá cơ bản, thuộc chủ đề "Ứng dụng của định lý trung bình Cesaro trong việc nghiên cứu tiệm cận của các dãy số, được cho bởi hệ thức truy hồi dạng $x_{n+1} = x_n + a \cdot x_n^{\alpha}$.". Việc có thêm số hạng $-\frac{1}{2}x_n^5$ trong hệ thức truy hồi của dãy (x_n) ở đề bài chỉ gây thêm chút rắc rối về kỹ thuật. Trong lời giải trên, rắc rối này đã được xử lý bằng phép đặt $y_n = \frac{x_n^3 + x_n^4}{2}$.

2. Với việc hiểu định nghĩa giới hạn hữu hạn của một dãy số, ở mức tối thiểu cần thiết, dễ thấy, điều phải chứng minh theo yêu cầu của bài toán có thể rút ra được từ việc khảo sát tính hội tụ của dãy (u_n) xác định bởi

$$u_n = \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right)\sqrt[3]{n^2} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Nhận xét nêu trên là một "chìa khóa", giúp xác định hướng giải bài đã ra.

3. Tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí mới chỉ nhận được đúng một lời giải từ bạn đọc. Đó là, lời giải của bạn *Trần Minh Hoàng* (lớp 10T1, trường THPT chuyên Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh). Ý tưởng giải của bạn Trần Minh Hoàng, về cơ bản, giống ý tưởng của lời giải trên đây; điểm khác biệt nằm ở kỹ thuật xử lý. Bạn Hoàng đã xử lý bằng cách chuyển dãy (x_n) về dãy $\left(\frac{1}{x_n}\right)$, rồi khảo sát tính hội tụ của dãy này. Lời giải của bạn Hoàng là một lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Trần Nam Dũng

P638. (Mức A) Tìm hai chữ số tận cùng của số $T = 22^{3^{2002}} + 22^{4^{2003}}$.

Lời giải (*dựa theo cách giải của bạn Võ Trần Hiền, lớp 12 Toán 1, trường THPT chuyên Tiền Giang, tỉnh Tiền Giang*).

Trước hết, dễ thấy, $T \equiv 0 \pmod 4$. (1)

Tiếp theo, do $22 \equiv -3 \pmod{25}$ nên

$$T \equiv (-3)^{3^{2002}} + (-3)^{4^{2003}} \equiv -3^{3^{2002}} + 3^{4^{2003}} \pmod{25}. \quad (2)$$

Do $3^3 \equiv 2 \pmod{25}$ nên

$$3^{20} = \left(3^3\right)^6 \cdot 3^2 \equiv 2^6 \cdot 9 \equiv 14 \cdot 9 \equiv 1 \pmod{25}. \quad (3)$$

Vì

$$3^{2002} \equiv (-1)^{2002} = 1 \equiv 9 \pmod 4,$$

$$3^{2002} = \left(3^2\right)^{1001} \equiv (-1)^{1001} = -1 \equiv 9 \pmod 5,$$

và $(4,5) = 1$, nên $3^{2002} \equiv 9 \pmod{20}$. Do đó, tồn tại số nguyên dương k, sao cho

$$3^{2002} = 20k + 9.$$

Vì thế, theo (3), ta có:

$$3^{3^{2002}} = \left(3^{20}\right)^k \cdot 3^9 \equiv 1 \cdot 2^3 = 8 \pmod{25}. \quad (4)$$

Do

$$4^{2003} \equiv 0 \equiv 4 \pmod 4,$$

$$4^{2003} \equiv (-1)^{2003} = -1 \equiv 4 \pmod 5,$$

và $(4,5) = 1$, nên $4^{2003} \equiv 4 \pmod{20}$. Do đó, tồn tại số nguyên dương m, sao cho

$$4^{2003} = 20m + 4.$$

Vì thế, theo (3), ta có:

$$3^{4^{2003}} = \left(3^{20}\right)^m \cdot 3^4 \equiv 1 \cdot 6 = 6 \pmod{25}. \quad (5)$$

Từ (2), (4), (5) suy ra

$$T \equiv -8 + 6 = -2 \equiv 48 \pmod{25}. \quad (6)$$

Từ (1) và (6), với lưu ý $0 \equiv 48 \pmod 4$ và $(4,25) = 1$, ta có $T \equiv 48 \pmod{100}$.

Vì vậy, hai chữ số tận cùng của số T là 48.

Bình luận và Nhận xét

1. Có thể phát hiện ra (3) (trong Lời giải trên) nhờ Định lý Euler. Định lý được phát biểu như sau:

Định lý Euler. *Nếu số nguyên a và số nguyên $m > 1$ nguyên tố cùng nhau thì $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$; trong đó, $\varphi(m)$ là giá trị của Phi – hàm Euler tại m.*

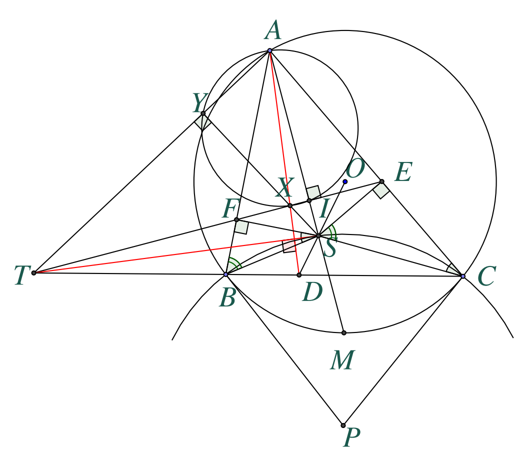
2. Bài đã ra là một bài toán cơ bản, có dạng quen thuộc, thích hợp cho việc luyện tập của các bạn học sinh, khi học về chủ đề "Đồng dư".

3. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có hai lời giải cho kết quả sai, tuy cách giải đúng, do người giải bài đã thực hiện sai một số tính toán.

Lưu Thị Thanh Hà

P639. (Mức A) Cho tam giác nhọn, không cân ABC, nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại P. Gọi M là điểm chính giữa của cung BC không chứa A của đường tròn (O). Đoạn thẳng AM cắt đường tròn tâm P, bán kính PB, tại điểm S. Gọi E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của S trên AC, AB; T, D tương ứng là giao điểm của BC với các đường thẳng EF, SO. Chứng minh rằng $ST \perp AD$.

Lời giải (*dựa theo đa số lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc*).



Vì S nằm trong góc nhọn BAC nên từ các giả thiết $SE \perp AC$, $SF \perp AB$, suy ra $AFSE$ là tứ giác nội tiếp. Do đó

$$\angle FSE = 180^\circ - \angle BAC. \quad (1)$$

Do PB, PC tiếp xúc với (O), tương ứng, tại B, C nên $PB = PC$. Do đó, $C \in (P; PB)$; suy ra

$$\begin{aligned}\angle BSC &= \frac{1}{2}(360^\circ - \angle BPC) = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BPC\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BOC)\\ &\quad \text{(do } PBOC \text{ là tứ giác nội tiếp)}\\ &= 90^\circ + \angle BAC. \quad (2)\end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$\angle FSE + \angle BSC = 270^\circ;$$

do đó

$$\angle BSF + \angle CSE = 90^\circ.$$

Suy ra, $\angle BSF = \angle SCE$. Vì vậy, tam giác vuông (tại F) BFS đồng dạng với tam giác vuông (tại E) SEC. Suy ra

$$\frac{SB}{CS} = \frac{SF}{CE} = \frac{FB}{ES}. \quad (3)$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với cát tuyến EFT, ta được:

$$\frac{TB}{TC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1;$$

suy ra

$$\frac{TB}{TC} = \frac{EA}{EC} \cdot \frac{FB}{FA}. \quad (4)$$

Vì M là điểm chính giữa của cung BC không chứa A của (O), nên AM là tia phân giác của góc BAC. Do đó, từ các giả thiết $S \in AM$ và $SE \perp AC$, $SF \perp AB$, suy ra

$$SE = SF \text{ và } EA = FA. \quad (5)$$

Từ (4), (5) và (3), ta được:

$$\frac{TB}{TC} = \frac{FA}{EC} \cdot \frac{FB}{FA} = \frac{FB}{EC} = \frac{FB}{ES} \cdot \frac{FS}{EC} = \left(\frac{SB}{SC}\right)^2.$$

Do đó, ST là đường đối trung ngoài của tam giác SBC. (6)

Do P là tâm đường tròn (SBC) và $OB \perp PB$, $OC \perp PC$, nên OB, OC là các tiếp tuyến tại B, C của (SBC). Vì thế, SD là đường đối trung của tam giác SBC. (7)

Từ (6) và (7), suy ra $(TDBC) = -1$. (8)

Gọi I là giao điểm của AS và EF. Do (5) nên AS là trung trực của EF; vì thế, $AI \perp EF$, hay $AS \perp TI$, và I là trung điểm của EF. (9)

Gọi X là giao điểm của AD và EF.

Do phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỷ số kép, nên từ (8) suy ra $(TXFE) = -1$. Vì thế, do (9) nên theo hệ thức Maclaurin, ta có:

$$\overline{TX} \cdot \overline{TI} = \overline{TF} \cdot \overline{TE} = P_{T/(AFSE)}. \quad (10)$$

Gọi Y là hình chiếu vuông góc của S trên TA; ta có, Y thuộc đường tròn $(AFSE)$. Do đó

$$\overline{TY} \cdot \overline{TA} = P_{T/(AFSE)}. \quad (11)$$

Từ (10) và (11), suy ra

$$\overline{TX} \cdot \overline{TI} = \overline{TY} \cdot \overline{TA}.$$

Do đó, $AYXI$ là tứ giác nội tiếp. Mà $\angle AIX = 90^\circ$ (theo (9)), nên $\angle XYA = 90^\circ$. Suy ra, ba điểm S, X, Y thẳng hàng. Do đó, từ định nghĩa điểm Y và (9) suy ra, X là trực tâm tam giác ATS. Vì vậy, $AX \perp ST$; mà $X \in AD$, nên $AD \perp ST$.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Hạ Vũ Anh

P640. (Mức A) Ký hiệu S là tập hợp 2022 số nguyên dương đầu tiên. Hỏi, có tất cả bao nhiêu tập con khác rỗng của S mà tổng tất cả các số thuộc mỗi tập con đều chia hết cho 1024?

Lời giải (*của người chấm bài*).

• Xét bài toán khái quát sau của bài đã ra:

Bài toán khái quát. *Cho các số nguyên dương k, n, thỏa mãn $2^k < n$. Ký hiệu S là tập hợp n số nguyên dương đầu tiên. Hỏi, có tất cả bao nhiêu tập con khác rỗng của S, mà tổng tất cả các số thuộc mỗi tập con đều chia hết cho 2^k?*

Lời giải bài toán khái quát.

Ở lời giải này, ta quy ước:

$1/$ Coi 0 là tổng các số thuộc tập rỗng.

2/ Coi phép chia hết cho 2^k là phép chia có số dư bằng 2^k.

Ta biết rằng, mỗi số nguyên dương m đều được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng:

$$m = a_s \cdot 2^s + a_{s-1} \cdot 2^{s-1} + a_{s-2} \cdot 2^{s-2} + \cdots + a_0 \cdot 2^0,$$

trong đó, s là một số tự nhiên, và $a_i \in \{0;1\}$ với mọi $i = 0, 1, \ldots, s$, $a_s \neq 0$.

Do đó, mỗi số nguyên dương $m \leq 2^k - 1$ đều được biểu diễn một cách *duy nhất* dưới dạng:

$$m = a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + a_{k-2} \cdot 2^{k-2} + \cdots + a_0 \cdot 2^0,$$

trong đó, $a_i \in \{0;1\}$ với mọi $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Vì thế, với quy ước 1/, ta có:

Nhận xét 1. Với mỗi số tự nhiên $m \leq 2^k - 1$, có *đúng một* tập con của tập

$$S_1 = \left\{2^0, 2^1, \ldots, 2^{k-1}\right\},$$

mà tổng tất cả các số thuộc tập con đó bằng m.

Ký hiệu $S_2 = S \backslash S_1$. Ta có:

Nhận xét 2. Mỗi tập con X của S đều biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng:

$$X = X_1 \cup X_2,$$

trong đó, X_1 là một tập con của S_1, và X_2 là một tập con của S_2.

Vì

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

nên tổng tất cả các số thuộc một tập con khác rỗng tùy ý của S_1 là một số nguyên dương không vượt quá $2^k - 1$. Do đó, với các quy ước 1/ và 2/, từ Nhận xét 2 suy ra:

Nhận xét 3. Tập con T khác rỗng của S có tính chất đề bài yêu cầu khi và chỉ khi nó có dạng:

$$T = T_1 \cup T_2,$$

trong đó, T_2 là một tập con *khác rỗng* của S_2, và T_1 là một tập con của S_1, mà tổng các số thuộc tập con đó bằng $2^k - r$, với r là số dư trong phép chia tổng các số thuộc T_2 cho 2^k.

Với quy ước 2/, nếu r là số dư trong phép chia cho 2^k thì $2^k - r$ là một số tự nhiên không vượt quá $2^k - 1$. Do đó, từ Nhận xét 1 suy ra, số tập con khác rỗng của S có dạng nêu ở Nhận xét 3 chính bằng số tập con khác rỗng của S_2. Do đó, theo Nhận xét 3, số tập con khác rỗng, có tính chất đề bài yêu cầu, của S bằng số tập con khác rỗng của S_2.

Vì $S_1 \subset S$ và $S_2 = S \backslash S_1$ nên

$$|S_2| = |S| - |S_1| = n - k.$$

Do đó, số tập con khác rỗng của S_2 bằng $2^{n-k} - 1$.

Vì vậy, số tập con khác rỗng, có tính chất đề bài yêu cầu, của S bằng $2^{n-k} - 1$.

• *Bài đã ra* là một trường hợp đặc biệt của Bài toán khái quát, khi $k = 10$ và $n = 2022$. Vì thế, theo kết quả của Bài toán khái quát, đáp số của bài đã ra là $2^{2012} - 1$.

Bình luận và Nhận xét

1. Cách đơn giản nhất, tự nhiên nhất, và cũng là "thô" nhất, để tạo ra một tập con khác rỗng của S có tính chất đề bài yêu cầu là: Lấy một tập con khác rỗng X của S ($X \neq S$); sau đó, kiểm tra tổng các số thuộc X. Nếu tổng này chia hết cho 1024 thì ta có một tập con thỏa mãn yêu cầu đề bài. Trường hợp ngược lại, nếu tổng đó không chia hết cho 1024, thì bổ sung vào X các số (thuộc S) có tổng bằng $1024 - r$, với r là số dư trong phép chia tổng các số thuộc X cho 1024.

Lẽ dĩ nhiên, cách làm trên chỉ khả thi, nếu các số cần "trưng dụng" để bổ sung vào X không thuộc X. Nhận xét này dẫn ta tới ý nghĩ, có thể tạo ra tập con thỏa mãn yêu cầu đề bài, trên "nền tảng" một phân hoạch tập S thành hai tập con, mà một trong hai tập con đó có tính chất: mỗi số nguyên dương không vượt quá 1023 đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của một số số thuộc tập con ấy. Tới đây, việc nhận ra $1024 = 2^{10}$ sẽ là một gợi ý mạnh cho việc sử dụng biểu diễn nhị phân của một số nguyên dương để tạo ra phân hoạch vừa nêu.

Những điều trình bày trên đây là cách tiếp cận, đã "dẫn" người chấm bài tới Lời giải nêu trên.

2. Lời giải trên cho thấy, ràng buộc các phần tử thuộc S phải là 2022 số nguyên dương đầu tiên không có đóng góp toán học nào cho việc giải bài toán, ngoại trừ việc trong chúng có các số $2^0, 2^1, \ldots, 2^9$. Từ đó, có thể suy đoán rằng, ràng buộc đó chỉ nhằm mục đích "giấu" "chìa khóa" mở "cửa" vào Lời giải?

3. Bài đã ra cho thấy một khai thác thú vị đối với biểu diễn nhị phân của một số nguyên dương. Theo đánh giá của người chấm bài, đây là một bài toán khá khó, vì việc "giấu" "chìa khóa" rất có thể đã "đẩy" người giải bài ra xa hướng tiếp cận mộc mạc, đã nêu ở mục 1 trên đây, và "hút" họ vào hướng tìm ra một điều kiện cần và đủ, để các số nguyên dương trong phạm vi từ 1 đến 2022 có tổng là một bội của 1024. Phải chăng, do đang bị "hút" vào hướng này, nên tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí vẫn chưa nhận được một lời giải nào, từ bạn đọc?

Nguyễn Khắc Minh

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI HOÀN CHỈNH

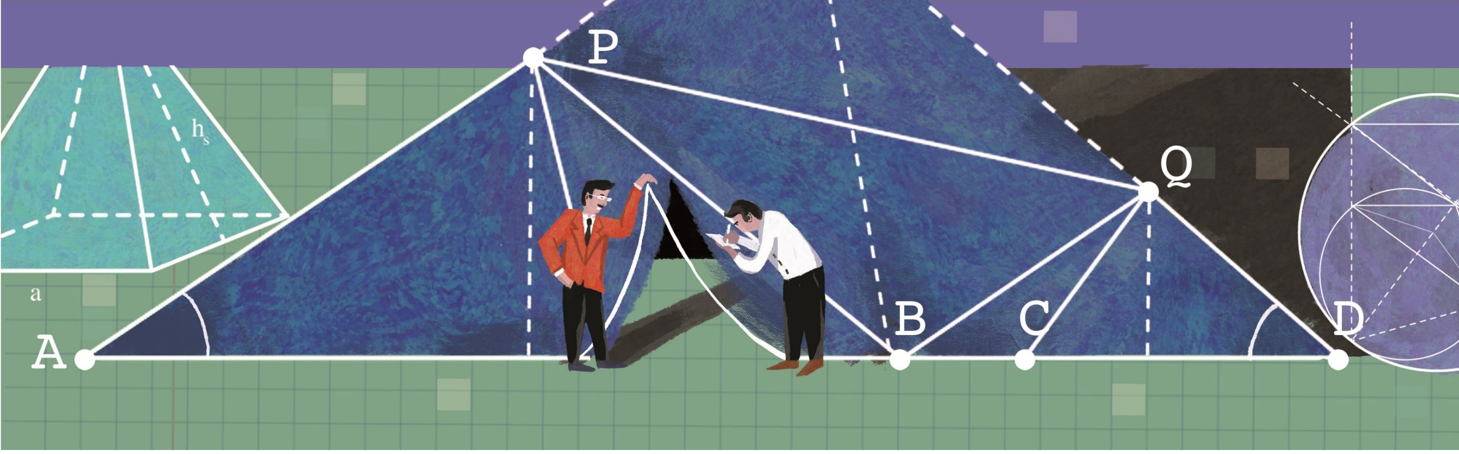
Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải hoàn chỉnh.

KHỐI THCS

- Trường **THCS xã Pom Lót**, huyện Điện Biên, tỉnh Điện Biên: *Nguyễn Ngọc Diệp* (lớp 9D3; P631).
- Trường **THCS Archimedes Academy Trung Yên**, Tp. Hà Nội: *Nguyễn Thanh Bình* (lớp 7C1; P631).
- Trường **THCS Lê Quý Đôn**, Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh: *Nguyễn Chánh Thiện* (lớp 8/14; P631, P632).
- Trường **THCS Long Bình Điền**, tỉnh Tiền Giang: *Võ Trần Tiến* (lớp 8^5; P631).

KHỐI THPT

- Trường **THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu**, tỉnh Đồng Tháp: *Lư Gia Hưng* (lớp 11T1; P634, P635), *Đỗ Duy Quang* (lớp 11T1; P634).
- Trường **THCS & THPT Nguyễn Tất Thành**, Tp. Hà Nội: *Nguyễn Gia Huy* (lớp 10A2; P634).
- Trường **THPT chuyên Hà Tĩnh**, tỉnh Hà Tĩnh: *Trần Minh Hoàng* (lớp 10T1; P636, P637, P639).
- Trường **THPT Gia Định**, Tp. Hồ Chí Minh: *Lê Nam Khánh* (lớp 11CT; P639).
- Trường **THPT chuyên Hưng Yên**, tỉnh Hưng Yên: *Trần Hữu Dương* (lớp 11 Toán 1; P631, P632, P634, P638), *Nguyễn Công Minh Đức* (lớp 11 Toán 1; P635, P639), *Nguyễn Gia Khánh* (lớp 10 Toán 1; P639).
- Trường **THPT chuyên Lê Hồng Phong**, tỉnh Nam Định: *Ngô Quang Bình* (lớp 11 Toán 1; P633), *Phạm Danh Thái* (lớp 11 Toán 1; P632).
- Trường **THPT chuyên Tiền Giang**, tỉnh Tiền Giang: *Võ Trần Hiền* (lớp 12 Toán 1; P638).
- Trường **THPT chuyên Quốc học Huế**, tỉnh Thừa Thiên – Huế: *Nguyễn Đình Khải Nguyên* (lớp 11 Toán 2; P638), *Nguyễn Thị Nhật Thảo* (lớp 11 Toán 2; P631, P634), *Đặng Quỳnh Bảo Uyên* (lớp 11 Toán 2; P634).
- Trường **THPT chuyên Khoa học tự nhiên**, ĐH Khoa học tự nhiên – ĐHQG Hà Nội: *Vương Khánh Toàn* (lớp 10A1 Toán; P631, P633, P634, P635).
- Trường **THPT chuyên Sư phạm**, ĐH Sư phạm Hà Nội: *Hồ Trần Khánh Linh* (lớp 12 Toán 2; P639).



MỐI LIÊN HỆ GIỮA BÀI TOÁN HAI CÁI CAN VÀ LÝ THUYẾT SỐ

HOÀNG VĂN LONG[1]

Bài toán hai cái can là một loại bài toán rất quen thuộc ở bậc tiểu học. Trong đó, ta cần tìm cách để sử dụng hai cái can với dung tích a và b lít để đong được k lít nước từ bể. Ở đây, ta xét dung tích a, b và số lít cần đong k đều là các số nguyên dương. Trong bài viết này, chúng ta hãy tìm hiểu mối liên hệ giữa bài toán trên và lý thuyết số.

1. Bổ đề Bézout và vấn đề tồn tại nghiệm

Trong lời giải của bài toán hai cái can nêu trên, ta có những loại thao tác sau:

- Loại 1: Đổ đầy một can rỗng hoặc đổ hết nước trong một can đầy trở lại bể;
- Loại 2: Đổ từ một can đầy sang can rỗng;
- Loại 3: Đổ toàn bộ nước trong một can (không đầy) sang can rỗng còn lại;
- Loại 4: Đổ từ một can đầy sang một can đã có một lượng nước nhất định.

Trong các loại thao tác trên, lượng nước trong các can sau các thao tác loại 1 hoặc 2 đều có thể biểu diễn bởi các số a, b hoặc hiệu của chúng. Thao tác loại 3 chỉ chuyển vị trí lượng nước. Thao tác loại 4 bắt đầu từ một trạng thái sau một thao tác loại 4 khác hoặc từ lượng nước sau một thao tác loại 2. Do đó, lượng nước ở các can sau thao tác loại 4 cũng có thể được biểu diễn bằng tổng, và hiệu của nhiều số hạng có giá trị a hoặc b. Lượng nước cuối cùng mà ta đong được cũng phải thuộc dạng này.

Nói cách khác, lượng nước cuối cùng mà ta đong được có dạng theo biểu thức:

$$s \cdot a + t \cdot b$$

với s, t là các số nguyên (dạng biểu thức này còn được gọi là một tổ hợp tuyến tính của a và b). Để trả lời câu hỏi với các giá trị nào của k thì bài toán có nghiệm, chúng ta sẽ sử dụng bổ đề Bézout trong lý thuyết số.

Étienne Bézout (1730 – 1783).

Bổ đề Bézout (đặt tên theo nhà toán học Pháp, Étienne Bézout) được phát biểu như sau:

---

[1] *Hà Nội.*

Ước chung lớn nhất d của hai số nguyên dương a và b luôn có thể được viết dưới dạng $d = s\cdot a+t\cdot b$ với s,t là các số nguyên. Đồng thời, bất kỳ số nguyên nào có dạng $m\cdot a+n\cdot b$ đều là một bội số của d.

Bổ đề này cho phép ta nhận xét như sau về bài toán hai can nước: với k là số lít nước cần đong, bài toán hai can nước có lời giải khi và chỉ khi k là một bội số của ước chung lớn nhất của a và b. Chẳng hạn, với hai can 8 lít và 12 lít, do ước chung lớn nhất là 4 nên ta chỉ có lời giải cho các giá trị cần đong là bội của 4.

Phần sau của bổ đề Bézout có thể được chứng minh một cách dễ dàng từ phần trước. Vì d là ước chung lớn nhất của a và b nên $a = a_0\cdot d$, $b = b_0\cdot d$ với a_0, b_0 là các số nguyên là một bội của d. Do đó ta luôn có $m\cdot a+n\cdot b = (ma_0+nb_0)\cdot d$.

Phần trước của bổ đề có một số cách chứng minh khác nhau. Chúng ta hãy cùng tìm hiểu cách chứng minh xuất phát từ thuật toán Euclid.

2. Thuật toán Euclid

Thuật toán Euclid cho phép chúng ta tìm ước chung lớn nhất của hai số một cách nhanh chóng mà không cần phải tiến hành phân tích ra thừa số nguyên tố. Ban đầu, nó được Euclid phát biểu cho các độ dài đoạn thẳng. Sau đây, chúng ta sẽ mô tả thuật toán này theo ngôn ngữ toán học hiện đại.

Thuật toán Euclid được xây dựng dựa trên các nhận định sau cho hai số nguyên dương a và b:

- $\text{ƯCLN}(a,b) = \text{ƯCLN}(b,a)$ (1)
- Nếu $a>0$ và $b \vdots a$ thì $\text{ƯCLN}(a,b) = a$ (2)
- Nếu a chia cho b dư c thì $\text{ƯCLN}(a,b) = \text{ƯCLN}(c,b)$ (3)

Hai nhận định đầu tiên (1) và (2) có thể dễ dàng được chứng minh. Để chứng minh nhận định (3), ta sử dụng một số tính chất của phép chia hết.

Vì c là số dư trong phép chia cho b nên $a = c+b\cdot y$ với y là một số không âm và $0\le c<b$.

Gọi t là một ước chung của b và c. Do $b \vdots t$ nên $b\cdot y \vdots t$. Đồng thời, $c \vdots t$ nên $a = c+b\cdot y \vdots t$. Nói cách khác, mọi ước chung của b và c cũng đều là ước chung của a và b.

Tương tự, khi viết $c = a-b\cdot y$, ta cũng có thể chứng minh mọi ước chung của a và b cũng là ước chung của b và c.

Do đó, hai tập hợp ước chung này là như nhau nên phần tử lớn nhất của chúng cũng như nhau hay hai cặp số sẽ có cùng ước chung lớn nhất.

Với những nhận định trên, ta có thể tìm ước chung lớn nhất của hai số bằng cách lập một dãy số. Giả sử $a>b$. Đặt $r_0 = a, r_1 = b$. Thực hiện liên tiếp phép chia r_{i-1} cho ra thương là q_1 và số dư r_{i+1}

$$\begin{aligned} r_0 &= q_1r_1+r_2 \\ r_1 &= q_2r_2+r-3 \\ &\cdots \\ r_{n+1} &= q_nr_n+r_{n+1} \end{aligned}$$

Ta xây dựng được một dãy số nguyên không âm giảm dần: $r_0>r_1>r_2>r_3>\cdots$ và do đó sẽ tồn tại một giá trị N sao cho $r_N = 0$.

Khi đó, $r_{N-2} \vdots r_{N-1}$. Từ (2) và (3), ta có r_{N-1} chính là ước chung lớn nhất của hai số ban đầu.

Ví dụ, với $a = 30, b = 18$, thuật toán Euclid sinh ra dãy số:

30	
18	(30 và 18 là hai số ban đầu)
12	(30 chia 18 dư 12)
6	(18 chia 12 dư 6)
0	(12 chia hết cho 6)

và trả về giá trị 6 (phần tử r_{N-1}) cho ước chung lớn nhất.

Tiếp theo, ta sẽ giải thích xem thuật toán Euclid liên hệ đến bổ đề Bézout như thế nào.

```
def gcd(a,b):

    # r chứa hai phần tử cuối cùng của dãy r_n trong phần lí thuyết
    #Lúc ban đầu, r gồm số lớn hơn và số bé hơn trong hai số a,b
    r = [max(a,b),min(a,b)]

    #vòng lặp dừng khi phần tử cuối cùng r_N = 0
    while (r[1] != 0):
        # c là số dư của phép chia r_(n-1) cho r_n
        c = r[0] % r[1]
        # c trở thành phần tử cuối của dãy. Đẩy phần tử cuối lúc trước lên một vị trí
        r[0] = r[1]
        r[1] = c

    #trả về kết quả là phần tử r_(N-1)
    return r[0]
```

Như đã nói ở trên, dãy luôn không âm và giảm dần nên sẽ luôn có giá trị kết thúc $r_N = 0$. Nhận thấy, ta có thể viết $r_{n+1} = r_{n-1} - q_n r_n$ nên mỗi phần tử của dãy là một tổ hợp tuyến tính của hai phần tử đứng trước nó và do đó cũng là tổ hợp tuyến tính của hai phần tử đầu tiên. Điều này dẫn đến ước chung lớn nhất (r_{N-1}) mà ta tìm được cũng là một tổ hợp tuyến tính của hai số ban đầu. Đến đây, ta cũng đã chứng minh được phần trước của bổ đề Bézout.

Ta có thể lập trình một hàm trong Python để tính ước chung lớn nhất sử dụng thuật toán Euclid như trên đây (ý nghĩa của các dòng lệnh được giải thích trong phần bình luận):

Khi gọi hàm trên, ta sẽ nhận được kết quả là ước chung lớn nhất của hai số.

```
gcd(120,100)
```

```
20
```

3. Thuật toán Euclid mở rộng

Đến đây thì ta đã giải quyết được vấn đề khi nào bài toán hai can nước có nghiệm. Tuy nhiên, để có thể đưa ra được lời giải cho bài toán, ta cần mở rộng thuật toán Euclid để tính cả các hệ số của tổ hợp tuyến tính biểu diễn ước chung lớn nhất. Với mỗi phần tử r_n, ta cần tìm các hệ số s_n và t_n sao cho $r_n = s_n \cdot a + t_n \cdot b$.

Với hai giá trị đầu của dãy,

$$r_0 = a = 1 \cdot a + 0 \cdot b;\ r_1 = b = 0 \cdot a + 1 \cdot b$$

nên $s_0 = 1, t_0 = 0, s_1 = 0, t_1 = 1$.

Đồng thời, do

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_{n-1} - q_n r_n \\ &= (s_{n-1} \cdot a + t_{n-1} \cdot b) - q_n (s_n \cdot a + t_n \cdot b) \\ &= (s_{n-1} - q_n s_n) \cdot a + (t_{n-1} - q_n t_n) \cdot b. \end{aligned}$$

nên:

$$s_{n+1} = s_{n-1} - q_n s_n; t_{n+1} = t_{n-1} - q_n t_n.$$

Do ước chung lớn nhất cần tìm là r_{N-1} (khi đã tính ra $r_N = 0$), nên ta cũng chỉ cần tính đến s_{N-1} và t_{N-1}.

Ví dụ với $a = 48, b = 18$ ta có bảng sau:

n	r_n	q_n	s_n	t_n
0	48		1	0
1	18	2	0	1
2	12	1	1	-2
3	6	2	-1	3
4	0			

Từ bảng này, ta có ước chung lớn nhất của 48 và 18 là $6 = -1 \cdot 48 + 3 \cdot 18$.

Đồng thời, kết quả này cũng cho phép ta xác định tổ hợp tuyến tính cho bất kỳ một bội số nào đó của ước chung lớn nhất. Ví dụ:

$$\begin{aligned} &12 = 2 \cdot 6 = -2 \cdot 48 + 6 \cdot 18 \\ &18 = 3 \cdot 6 = -3 \cdot 48 + 9 \cdot 18 \\ &\ldots \\ &72 = 12 \cdot 6 = -12 \cdot 48 + 36 \cdot 18 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Ta có thể bổ sung vào hàm Python tính ước chung lớn nhất theo thuật toán Euclid để được thuật toán Euclid mở rộng như trong hình dưới:

```
def gcd_ext(a,b):
    r = [max(a,b),min(a,b)]
    s = [1,0]
    t = [0,1]

    while (r[1] != 0):
        c = r[0] % r[1]
        q = r[0] // r[1]

        s_n = s[0] - q*s[1]
        t_n = t[0] - q*t[1]

        r[0] = r[1]
        r[1] = c

        s[0] = s[1]
        s[1] = s_n

        t[0] = t[1]
        t[1] = t_n
    return r[0], s[0], t[0]
```

Ở đây, ta đã thêm hai danh sách s và t để lưu hai phần tử cuối của các dãy s_n và t_n như trong phần lý thuyết. Các giá trị của hai dãy này được tính theo công thức của chúng. Cần lưu ý rằng toán tử // là phép chia cho ra thương số của phép chia có dư. Việc đẩy các giá trị mới vào các danh sách s, t cũng tương tự như với r.

Hàm trên trả ra một bộ ba số gồm ước chung lớn nhất và các tham số s,t gắn với nó.

```
gcd_ext(20,12)
(4, -1, 2)
```

Ví dụ với $a = 20, b = 12,$ ta có: $4 = (-1) \cdot 20 + 2 \cdot 12$

Tổ hợp tuyến tính cho lượng nước cần đong k có thể cho ta cách giải của bài toán hai can nước. Do k sẽ nhỏ hơn giá trị lớn nhất trong hai số a, b nên sẽ luôn có một trong hai hệ số của tổ hợp tuyến tính nhận giá trị âm và hệ số còn lại nhận giá trị dương. Can ứng với hệ số dương là can đầu vào (đổ từ bể vào can) còn can ứng với hệ số âm là can đầu ra (đổ từ can vào lại bể).

Cách đong của ta được tiến hành như sau:

- Nếu can đầu vào rỗng thì đổ đầy nó.
- Nếu can đầu vào không rỗng thì đổ sang can đầu ra cho đến khi nó đầy hoặc can đầu vào hết nước.
- Nếu can đầu ra đầy thì đổ hết nước bên trong trở lại bể.

Giá trị tuyệt đối của các hệ số trong tổ hợp tuyến tính sẽ cho ta biết số lần phải đổ đầy can đầu vào cũng như số lần đổ hết nước ở can đầu ra trở lại bể.

Ta hãy xét trường hợp lượng nước cần đong bằng với ước chung lớn nhất của dung tích hai can. Ví dụ, đong 1 lít từ hai can 5 lít và 8 lít. Thuật toán Euclid cho ta $1 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5$. Ta có can 8 lít là can đầu vào còn can 5 lít là can đầu ra.

Quy trình đong như sau:

Bước làm	Can 8 lít	Can 5 lít
Đổ đầy can 8 lít	8	0
Đổ sang can 5 lít	3	5
Đổ hết can 5 lít	3	0
Đổ sang can 5 lít	0	3
Đổ đầy can 8 lít	8	3
Đổ sang can 5 lít	6	5
Đổ hết can 5 lít	6	0
Đổ sang can 5 lít	1	5
Đổ hết can 5 lít	1	0

Trong lời giải trên, ta đã đổ đầy can 8 lít 2 lần và đổ hết can 5 lít 3 lần đúng như các hệ số tương ứng. Nói cách khác, biểu thức theo dạng bổ đề Bézout cho ta một biểu diễn của lời giải bằng một tổ hợp tuyến tính của a và b.

Vậy nếu ta muốn đong một lượng lớn hơn thì sao? Giả sử thay vì 1 lít, ta muốn đong 2 lít từ các can trên thì ta sử dụng $2 = 2 \cdot 1 = 4 \cdot 8 - 6 \cdot 5$ và làm tương tự.

Bài tập 1. *a)* Hãy lập bảng như trên cho trường hợp đong 2 lít từ hai can 8 lít và 5 lít.

$b)$ Làm tương tự cho trường hợp muốn đong 4 lít.

4. Phương trình Diophantine tuyến tính

Quay lại bảng cho trường hợp 1 lít, ta nhận thấy chỉ cần ngay trong lượt đong đầu tiên, ta đã thu được 3 lít và lượng nước 6 lít cũng xuất hiện luôn ở cuối lượt đong thứ hai. Trong khi đó, nếu ta giải theo dạng bội của ước chung lớn nhất như cách làm ở phần trước thì số lượt đong sẽ nhiều hơn nhiều ($3 = 6\cdot 8 - 9\cdot 5; 6 = 12\cdot 8 - 18\cdot 5$).

Để giải thích việc này, ta hãy nhìn lại phương trình cần giải cho trường hợp 3 lít:

$$8x + 5y = 3. \tag{4}$$

Phương trình trên thuộc dạng phương trình Diophantine tuyến tính:

$$ax + by = c.$$

Trong các phương trình dạng này, người ta quan tâm đến các nghiệm x,y là số nguyên. Một nghiệm của phương trình đã được cung cấp bằng cách lấy bội của kết quả từ thuật toán Euclid cho hai số 8 và 5 như ở trên:

$$8\cdot 6 + 5\cdot(-9) = 3$$

Các phương trình Diophantine được đặt tên theo nhà toán học Hy Lạp, Diophantus. Ông sống ở Alexandria vào khoảng thế kỷ thứ 3 sau Công nguyên. Các phương trình mà ông nghiên cứu chỉ cho phép các nghiệm là số nguyên. Ngày nay, chúng vẫn là đề tài của nhiều nghiên cứu toán học hiện đại.

Chúng ta hãy thử tìm xem còn có nghiệm nào khác của phương trình này không. Không mất tính tổng quát, giả sử phương trình còn có nghiệm $x = 6 + u$, $y = -9 + v$ với u, v là các số nguyên. Thay vào phương trình ban đầu ta được:

$$8\cdot(6+u) + 5\cdot(-9+v) = 3$$
$$(8u + 5v) + (8\cdot 6 - 5\cdot 9) = 3$$
$$8u + 5v = 0 \tag{5}$$

Phương trình (5) là phương trình Diophantine thuần nhất (vế phải bằng 0) tương ứng với phương trình (4). Viết lại (5) dưới dạng $8u = -5v$, ta thấy vì 8 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau nên u phải chia hết cho 5. Đặt $u = 5p$, ta được $v = -8p$ với p là số nguyên. Do p có thể nhận vô số giá trị, phương trình thuần nhất của ta có vô số nghiệm.

Phương trình (4) cũng sẽ có vô số nghiệm xác định bởi:

$$x = 6 + 5p$$
$$y = -9 - 8p.$$

Chú ý rằng phương trình (4) có nghiệm là do vế phải là một bội của ước chung lớn nhất của hai số 8 và 5, theo bổ đề Bézout. Trong trường hợp phương trình thuần nhất có hai hệ số không nguyên tố cùng nhau, ta cần chia cả hai vế cho ước chung lớn nhất của hai hệ số rồi tiến hành giải tương tự như trên.

Bài tập 2. Hãy giải các phương trình nghiệm nguyên sau:

$a)$ $6x + 9y = 24$

$b)$ $4x + 12y = 44$

Từ họ nghiệm cho phương trình (4), ta hãy nhìn lại trường hợp đong 3 lít từ hai can 8 lít và 5 lít. Ta sẽ có vô số nghiệm để chọn bằng cách thay đổi p. Giả sử ta muốn số lần đổ đầy can 8 lít là ít nhất. Khi đó $p = -1$, ta được nghiệm $x = 1; y = -1$ hay $8 - 5 = 3$ ứng với việc đổ đầy can 8 lít rồi rót trực tiếp từ can 8 lít sang can 5 lít. Trong trường hợp muốn chọn can 5 lít làm can đầu vào và can 8 lít làm can đầu ra, ta cần cho y nhận giá trị dương. Giá trị dương nhỏ nhất của y ứng với $p = -2$ hay $x = -4$; $y = 7$. Độc giả có thể thử lập bảng các thao tác cho trường hợp này.

Đến đây, ta đã có thể liệt kê tất cả các lời giải của bài toán hai cái can bằng cách sử dụng thuật toán Euclid mở rộng và giải phương trình Diophantine. Tiếp theo, chúng ta sẽ tìm hiểu một số biến thể của bài toán hai cái can.

5. Một số biến thể của bài toán hai cái can

Ta hãy xét một bài toán khác cũng với hai cái can.

Giả sử có hai bể nước. Bể 1 đầy nước còn bể 2 không có nước. Với hai can có dung tích a và b lít, hãy đong k lít từ bể 1 vào bể 2.

Bài toán này cũng quy về giải phương trình Diophantine tuyến tính:

$$ax + by = k.$$

Vẫn theo bổ đề Bézout, bài toán có nghiệm khi k là một bội của ước chung lớn nhất d của a và b.

Khi viết lời giải, ta cần không sử dụng thao tác đong từ can nọ sang can kia mà chỉ cần s lần đong đầy can a và t lần đong đầy can b từ bể 1 đổ sang bể 2. Các trường hợp hệ số s hoặc t âm ứng với việc đổ ngược lại từ bể 2 sang bể 1.

Vẫn xét trường hợp hai can 8 lít và 5 lít nhưng phải đong 36 lít sang bể 2. Từ thuật toán Euclid mở rộng, $8 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) = 1$ nên $8 \cdot 72 + 5 \cdot (-108) = 36$. Phương trình Diophantine $8x + 5y = 36$ sẽ có họ nghiệm

$$x = 72 + 5p$$
$$y = -108 - 8p$$

với p là số nguyên.

Ta hãy nhìn nhận các nghiệm từ khía cạnh thực tế. Nếu cả x và y đều dương thì ta chỉ cần vận chuyển đúng 36 lít. Nếu có một trong hai giá trị x và y âm thì ta phải đổ nhiều hơn 36 lít vào bể 2 và đổ lại phần thừa ra vào bể 1. Khi đó tổng lượng nước phải vận chuyển sẽ nhiều hơn 36 lít. Do đó, nếu muốn tiết kiệm công sức, ta chỉ nên xét các nghiệm x, y dương.

Giải hệ

$$72 + 5p \geq 0$$
$$-108 - 8p \geq 0$$

ta thấy chỉ có $p = -14$ thỏa mãn. Khi đó $x = 2$; $y = 4$. Ta cần đổ 2 lần can 8 lít và 4 lần can 5 lít từ bể 1 vào bể 2. Với các giá trị a, b, k khác, có thể có nhiều hơn một giá trị p để cho x, y dương.

Mặt khác, nếu khoảng cách giữa hai bể là tương đối xa, thì tổng số lượt đi lại có thể quan trọng hơn tổng lượng nước phải vận chuyển do mỗi một lượt ta chỉ có thể vận chuyển một can (giả sử chỉ có một người thao tác). Xét ví dụ $a = 9$, $b = 2$, $k = 34$. Các nghiệm x, y dương của trường hợp này bao gồm: $9 \cdot 0 + 2 \cdot 17 = 34$ và $9 \cdot 2 + 2 \cdot 16 = 34$.

Trong khi đó, nếu ta chấp nhận nghiệm âm, số lượt phải đi ít nhất khi một trong hai giá trị x, y âm sẽ ứng với nghiệm $9 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 34$. Tuy ta phải vận chuyển tổng cộng 38 lít nước trong trường hợp này, số lượt di chuyển chỉ có 5 lượt, ít hơn nhiều so với hai nghiệm nêu trên.

Bài tập 3. Hãy giải các bài toán sau và tìm phương án với số lần di chuyển hai can ít nhất:

$a)$ Dùng hai can 6 lít và 11 lít đong 51 lít vào bể 2.

$b)$ Dùng hai can 7 lít và 10 lít đong 43 lít vào bể 2.

Ta còn có thể mở rộng bài toán ra trường hợp có nhiều can. Để cho đơn giản, ta hãy xét trường hợp sử dụng 3 can dung tích a, b, c để đong k lít nước từ bể 1 sang bể 2, phương trình Diophantine tuyến tính lúc này có dạng:

$$ax + by + cz = k.$$

Về điều kiện tồn tại nghiệm của phương trình này, ta cần mở rộng định lý Bézout cho trường hợp 3 số.

Gọi d là ước chung lớn nhất của a và b. Ta sử dụng thuật toán Euclid mở rộng hai lần:

- Biểu diễn d theo a và b.
- Biểu diễn ước chung lớn nhất g của c và d theo hai số này. Hãy nhớ rằng ước chung lớn nhất g của c và d cũng là ước chung lớn nhất của ba số a, b, c.

Thế biểu diễn của d theo a, b vào biểu diễn của g theo c, d để cho ra biểu diễn cuối cùng của g theo a, b, c.

Theo cách này, ta luôn có thể tìm được biểu diễn của ước chung lớn nhất của ba số theo một tổ hợp tuyến tính của chúng.

Bài tập 4. $a)$ Chứng minh rằng $\text{ƯCLN}(a,b,c) = \text{ƯCLN}(\text{ƯCLN}(a,b),c)$

$b)$ Dùng nhận định trên để tìm ước chung lớn nhất của 48, 72 và 81.

Điều kiện tồn tại nghiệm vẫn là k phải chia hết cho ước chung của cả ba số a, b, c. Cách chứng minh tương tự như trường hợp bổ đề Bézout cho hai số.

Để giải phương trình Diophantine cho 3 số, ta cần tiến hành theo hai bước, mỗi bước giải một phương trình Diophantine cho 2 số. Cách làm được minh họa cho ví dụ sau:

$$8x + 6y + 7z = 20. \tag{6}$$

Trước hết, vì ước chung lớn nhất của 8 và 6 là 2 nên $8x + 6y$ sẽ luôn chia hết cho 2 theo bổ đề Bézout. Do đó, ta đặt $8x + 6y = 2u$. Thế vào (6), ta được:

$$2u + 7z = 20.$$

Thuật toán Euclid mở rộng cho ta $1 = 2 \cdot (-3) + 7 \cdot 1$. Do đó $20 = 2 \cdot (-60) + 7 \cdot 20$. Kết hợp với phương trình thuần nhất ta được:

$$u = -60 + 7p$$
$$z = 20 - 2p$$

với p là số nguyên.

Ta có:

$$8x + 6y = 2u = -120 + 14p.$$

Thuật toán Euclid mở rộng cho ta: $2 = 8 \cdot 1 + 6 \cdot (-1)$. Do đó

$$\begin{aligned} -120 + 14p &= 2\cdot(-60+7p) \\ &= 8\cdot(-60+7p) + 6\cdot(60-7p). \end{aligned}$$

Kết hợp với phương trình thuần nhất, ta được:

$$x = -60 + 7p + 6q$$
$$y = 60 - 7p - 8q$$

với q là số nguyên.

Nghiệm cuối cùng của bài toán có dạng:

$$x = -60 + 7p + 6q$$
$$y = 60 - 7p - 8q$$
$$z = 20 - 2p$$

với $p, q \in \mathbb{Z}$.

Đến đây ta đã hoàn toàn có thể giải được bài toán cho trường hợp 3 cái can.

Cho trường hợp $n > 3$ cái can, các chứng minh lý thuyết cùng việc giải phương trình cũng tương tự trường hợp 3 cái can. Chú ý rằng khi giải phương trình Diophantine tuyến tính cho n ẩn số, ta cần thế từng bước, hai ẩn số một lần.

Bài tập 5. Hãy giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$5x + 9y + 12z = 136.$$

6. Kết luận

Bài toán hai cái can là một bài toán quen thuộc ở bậc tiểu học nhưng đồng thời cũng có những liên hệ thú vị đến các kiến thức phép chia hết và số nguyên tố ở lớp 6. Tác giả hy vọng bài viết có thể giúp cho việc giảng dạy về lý thuyết số ở bậc trung học cơ sở cho những học sinh muốn tìm hiểu sâu hơn về toán học trở nên dễ dàng hơn.

Tài liệu tham khảo

[1] Apostol, T.M. (2010). *Introduction to analytic number theory*. New York: Springer.

[2] Titu Andreescu, D Andrica and Ion Cucurezeanu (2010). *An introduction to diophantine equations : a problem-based approach*. New York: Birkhäuser.

GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày lời giải của các bài toán trong kỳ thi Olympic Toán thành phố Kiev (Ukraina), năm 2022, đăng trong số báo 8/2022.

OC19. Viết phân số $\frac{1}{2021}$ thành hiệu của hai phân số tối giản có mẫu số nhỏ hơn.

Lời giải. Chú ý rằng 2021 là tích của hai số nguyên tố: $2021 = 43 \times 47$.

Ta cần tìm a, b để $\frac{a}{43} - \frac{b}{47} = \frac{1}{2021}$. Điều này tương đương với $47a - 43b = 1$. Như vậy $47a \equiv 1 \pmod{43}$, hay $4a \equiv 1 \pmod{43}$. Dễ thấy ngay rằng giá trị $a = 11$ thỏa mãn. Giá trị tương ứng của b là 12. Ta có

$$\frac{11}{43} - \frac{12}{47} = \frac{1}{2021}.$$

Bằng cách tương tự ta cũng tìm được một cách viết khác

$$\frac{35}{47} - \frac{32}{43} = \frac{1}{2021}.$$

OC20. Có n tấm thẻ, trên đó viết lần lượt các số thực (không nhất thiết phân biệt): $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Xét tất cả $2^n - 1$ cách chọn ra một tập khác rỗng các tấm thẻ và tính tổng các số trên mỗi tập thẻ đã chọn. Hỏi trong số $2^n - 1$ tổng nhận được có thể có nhiều nhất bao nhiêu số bằng 1?

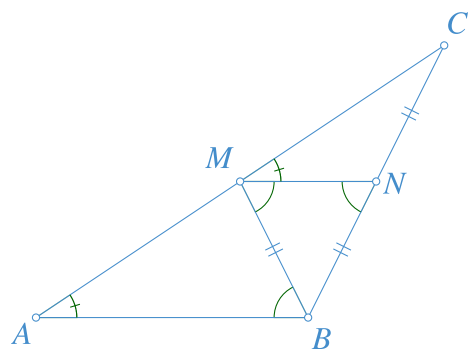
Ví dụ: với 3 tấm thẻ có số -1, 2, 2, thì các tổng thu được là 4, 3, 2, 2, 1, 1, -1. Do đó có hai tổng bằng 1.

Lời giải. Trường hợp cả n số trên thẻ đều bằng 0 thì không có tổng nào bằng 1. Ta chỉ cần xét trường hợp có một số, giả sử là a_1 khác 0. Ta có thể chia tất cả 2^n tập con của tập n tấm thẻ thành 2^{n-1} cặp bằng cách ghép một tập A không chứa thẻ a_1 với tập $A \cup \{\text{ thẻ chứa } a_1\}$. Do trong mỗi cặp hai tổng nhận được có chênh lệch bằng a_1 nên chỉ có nhiều nhất một tập có tổng bằng 1 (quy ước tập rỗng có tổng bằng 0).

Như vậy trong mọi trường hợp đều có không quá 2^{n-1} tổng bằng 1. Ta dễ dàng chỉ ra ví dụ có đúng 2^{n-1} tổng bằng 1: có 1 tấm thẻ ghi số 1, các tấm thẻ khác đều ghi số 0. Như vậy có thể có nhiều nhất là 2^{n-1} tổng bằng 1.

OC21. Trong tam giác ABC, đường trung tuyến BM bằng một nửa cạnh BC. Chứng minh rằng $\angle ABM = \angle BCA + \angle BAC$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm BC, ta nối đường trung bình MN. Khi đó ta có hai góc so le trong bằng nhau:

$$\angle ABM = \angle BMN. \quad (1)$$

Từ giả thiết ta có $BM = BN$ nên tam giác BMN cân tại B.

Như vậy $\angle BMN = \angle BNM$. (2)

Từ (1) và (2) ta nhận được

$$\angle ABM = \angle BNM. \quad (3)$$

Mặt khác ta cũng có hai góc đồng vị bằng nhau: $\angle BAC = \angle NMC$. Do đó

$$\begin{aligned}\angle BNM &= \angle NCM + \angle NMC \\ &= \angle BCA + \angle BAC. \quad (4)\end{aligned}$$

Từ (3) và (4) ta có đẳng thức cần chứng minh.

Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc các bài toán trong kỳ thi Olympic Toán học vùng Cáp–ca năm 2022 (Caucasus Math Olympiad). Các bài toán này phù hợp với trình độ học sinh lớp $8-9$.

OC28. Cho trước các số nguyên dương a, b, c. Biết rằng $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$, và $b^2 - a - c + 1$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng $\frac{a}{2}$ và $\frac{c}{2}$ là các số chính phương.

OC29. Cho hình bình hành $ABCD$, các điểm E và F lần lượt nằm trên các đoạn AD và CD sao cho $\angle BCE = \angle BAF$. Các điểm K và L lần lượt nằm trên các đoạn AD và CD sao cho $AK = ED$ và $CL = FD$. Chứng minh rằng $\angle BKD = \angle BLD$.

OC30. Peter viết ra 21 số nguyên dương đôi một phân biệt, mỗi số không lớn hơn 10^6. Đối với mỗi cặp số (a, b) được Peter viết ra, Nick viết số

$$F(a,b) = a + b - \gcd(a,b)$$

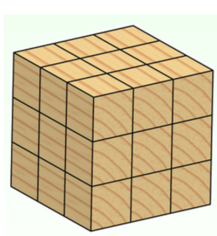
trên mảnh giấy của mình (ở đây gcd ký hiệu ước chung lớn nhất).

Chứng minh rằng một trong những số mà Nick viết khác với tất cả những số mà Peter viết.

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Đố vui

Khối pho mát $1 \times 1 \times 1$ ở giữa có tất cả sáu mặt và mỗi mặt phải được tạo ra từ một lần cắt nào đó. Hơn nữa, chú ý rằng không thể dùng một lần cắt để làm lộ ra hai hay nhiều hơn những mặt này. Vì vậy, cần ít nhất 6 lần cắt. Cuối cùng, với 6 lần cắt, ta có thể tạo ra 27 miếng pho mát như yêu cầu bằng cách cắt song song với các mặt của khối lập phương.



Đáp số: 6 lần cắt.

Hòn đảo kỳ lạ

Xuân Phong luôn có cách để biết chính xác tuổi của mỗi người ngồi xung quanh bàn, từ đó biết được người ngồi cạnh anh ta nói thật (đến từ tộc Tutu) hay nói dối (đến từ tộc Titi). Cách xác định tuổi như sau.

Ta chọn ra người dân cần xác định tuổi. Đặt tên anh ta, giả sử là Toto. Ta sẽ gán cho mỗi người ngồi xung quanh bàn một trong hai màu: xanh và đỏ (một cách tưởng tượng) như sau: bắt đầu gán cho Toto màu đỏ, sau đó cứ cách một người ta lại gán cho màu đỏ, những người còn lại gán cho màu xanh. Như vậy các màu xanh đỏ được ngồi xen kế quanh bàn, còn bản thân Toto được gán màu đỏ.

(Xem tiếp trang 25.)

IBN AL-HAYTHAM: ÁNH SÁNG VÀ THỊ GIÁC

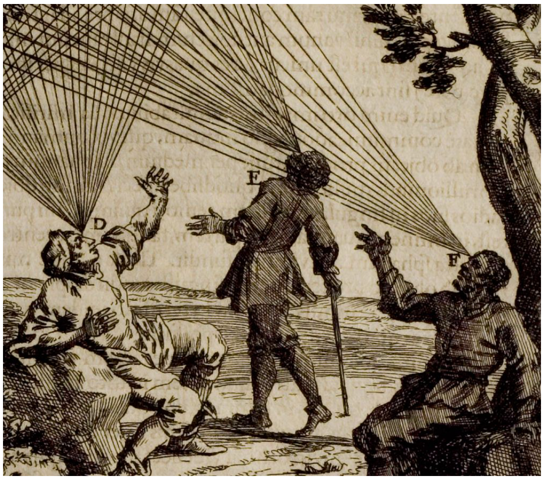
NGUYỄN HOÀNG VŨ[1]

Tại sao mắt người lại có thể nhìn thấy sự vật, hiện tượng? Nhân loại đã mất đến hơn 1000 năm cho đến khi Ibn al–Haytham, một học giả ở Cairo tìm ra câu trả lời cho vấn đề này. Trong bài viết này, chúng ta hãy cùng tìm hiểu về cuộc đời cùng những cống hiến cho khoa học của ông.

1. Quang học thời Hy Lạp cổ đại

Vào thời Hy Lạp cổ đại, cùng với sự phát triển của toán học thì việc xây dựng những lý thuyết về các hiện tượng tự nhiên cũng bắt đầu nảy sinh. Nhiều giả thuyết khác nhau được đưa ra trong giai đoạn này để giải thích một trong những vấn đề cơ bản nhất của quang học: tại sao các sự vật lại xuất hiện trong mắt của người nhìn.

Leucippus và Democritus, các nhà triết học của thuyết nguyên tử, đề xuất rằng các eidolon, những bản sao mỏng cỡ nguyên tử của một vật thể, sẽ liên tục bay ra khỏi vật, đi qua không khí đến mắt người, nơi thị giác xảy ra. Trong khi đó, Aristotle cho rằng các loại vật chất phát ra từ mắt, kết hợp với ánh sáng từ ngọn lửa hoặc mặt trời, sẽ làm cho môi trường trở nên trong suốt và cho phép màu sắc từ vật đến mắt (màu sắc được Aristotle coi là một loại vật chất khác biệt với ánh sáng).



Hình 1. Một minh họa hình nón thị giác cho sách Quang học của Euclid phiên bản châu Âu.

Mặt khác, nhà toán học Euclid của chúng ta, từ các quan sát rằng mắt của động vật sáng lên trong bóng tối, lại cho rằng các tia thị giác được phát ra từ mắt, theo dạng một hình nón hình học với đỉnh là mắt và đáy hình nón nằm ở vật thể. Các tia này sẽ quét vật thể giống như radar ngày nay. Ông giải thích rằng các vật thể giao cắt với nhiều tia hơn sẽ trông lớn hơn và ngược lại. Những vật quá nhỏ sẽ nằm lọt giữa các tia và do đó sẽ không bị nhìn thấy.

Một dạng giả thuyết thứ ba cho rằng có một loại "khí thị giác" thoát ra từ não bộ vào mắt

[1] *Hà Nội.*

và đi ra thế giới bên ngoài. Giả thuyết này được ủng hộ bởi Galen, một thầy thuốc và nhà giải phẫu học Hy Lạp sống ở thế kỷ I sau Công nguyên.

Các nhà toán học cho rằng thuyết eidolon không đúng do eidolon từ các ngôi nhà lớn hoặc ngọn núi không thể nào chui vừa vào con ngươi của mắt. Ngược lại, nhiều người cho rằng Euclid sai bởi nếu các tia phát ra từ mắt thì tại sao con người lại không nhìn thấy trong bóng tối. Nhà toán học Ptolemy thì cho rằng các tia thị giác của Euclid được phát ra liên tục trong toàn bộ hình nón chứ không rời rạc và các vật kích thích lên mắt người giống như việc sờ nắm kích thích xúc giác vậy. Cuộc tranh luận về cơ chế mắt người nhìn thấy vật kéo dài suốt vài trăm năm mà không có kết quả.

2. Quang học của al–Haytham

Phải hơn một nghìn năm sau Euclid, vấn đề cơ bản nêu trên về thị giác mới được Hasan Ibn al–Haytham, một học giả Ả Rập giải quyết.

Hasan Ibn al–Haytham (965 – 1040).

Al–Haytham sinh năm 965 ở Basra, nay thuộc Iraq. Ông theo học ở đây cũng như ở Baghdad, trung tâm văn hóa và tri thức của thế giới Hồi giáo lúc đó. Do cảm thấy chán nản với những xung đột tôn giáo của xã hội lúc bấy giờ, ông không theo đuổi các lĩnh vực triết học tôn giáo và thần học như nhiều học giả Ả Rập khác mà dành toàn bộ thời gian cho toán học và vật lý.

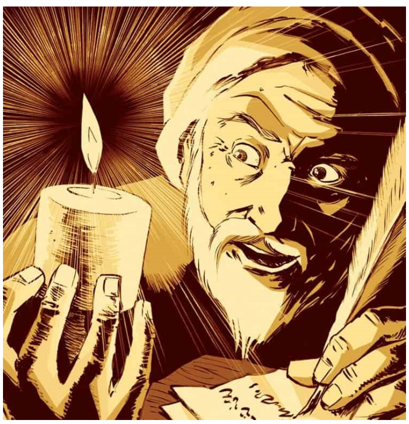
Nhờ sự nổi tiếng về học thuật của mình, al–Haytham được al–Hakim, Caliph (một chức tước tương tự như vua Hồi giáo) của khu vực Ai Cập lúc đó, mời sang giúp trị thủy sông Nile với tham vọng đưa vị thế của Ai Cập, dưới sự lãnh đạo của những người dòng Hồi giáo Shiite, vượt lên trên các thế lực Hồi giáo khác.

Hình 2. Thư viện ở Cairo do al–Hakim thành lập theo mô hình của thư viện ở Baghdad. Nhiều học giả được thu hút đến đây, trong đó có cả al–Haytham.

Phương án xây một con đập tại Aswan thượng nguồn sông Nile của al–Haytham được al–Hakim chấp thuận. Tuy nhiên, sau một thời gian, al–Haytham nhận thấy dự án này là bất khả thi với những tài nguyên mà ông có. Phải biết rằng, ngay cả với những phương pháp xây dựng và trang thiết bị hiện đại, con đập đầu tiên trên sông Nile cũng chỉ được hoàn thành vào năm 1902, cao 36 mét và dài 2000 mét. Lo sợ bị trừng phạt bởi al–Hakim, một nhà lãnh đạo nổi tiếng về tính khí thất thường, al–Haytham đã nghĩ ra một biện pháp: giả điên. Ông bị giam lỏng trong nhà ở Cairo trong suốt 10 năm cho đến khi vị Caliph bị ám sát. Sau khi được trả tự do, al–Haytham quay trở lại cuộc sống dạy học và viết sách. Trong giai đoạn bị trói buộc cũng như thời gian sau đó, gần như toàn bộ thời gian của al–Haytham được dùng để khám phá lĩnh vực quang học.

Các nghiên cứu của al–Haytham được ghi lại chủ yếu trong cuốn sách *Kitab al–Manazi*

(Sách về Quang học) của ông. Trong đó, al–Haytham trình bày một giải thích đơn giản hơn về thị giác, thoát khỏi sự rắm rối của các lý thuyết từ thời Hy Lạp cổ đại. Theo ông, các tia sáng xuất phát từ các sự vật thay vì xuất phát từ mắt người như quan điểm của Euclid. Ánh sáng có thể được vật thể phát ra trực tiếp (nguồn sáng sơ cấp như mặt trời, ngọn lửa) hoặc cũng có thể là ánh sáng được vật phản xạ lại (nguồn sáng thứ cấp). Tia sáng truyền đi theo đường thẳng đến mắt nếu không có vật khác chắn ở giữa. Những lý thuyết trên đều được al–Haytham xây dựng trên cơ sở các lập luận và thí nghiệm thực tế.

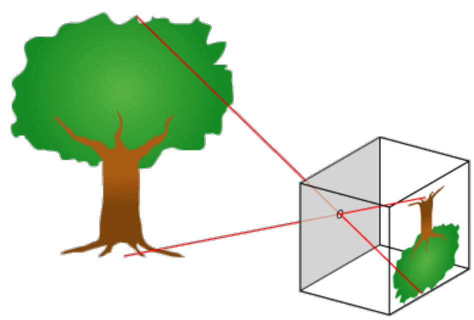


Hình 3. Minh họa al–Haytham nghiên cứu về các nguồn sáng.

Một sự thật đơn giản là khi một người nhìn thẳng vào mặt trời thì mắt sẽ bị đau. Vậy rõ ràng là ánh sáng từ mặt trời có tác động đến mắt chứ không phải tia sáng từ mắt đến mặt trời bởi nếu các tia sáng phát ra từ mắt thì chúng không thể lại gây tổn thương cho mắt được. Đồng thời, nếu ta nhìn thấy vật thể bởi vì mắt phát ra các tia đến vật đó thì khi ta nhìn thấy các vì sao, các tia vật chất này cũng lấp đầy không gian giữa ta và các ngôi sao ở rất xa?

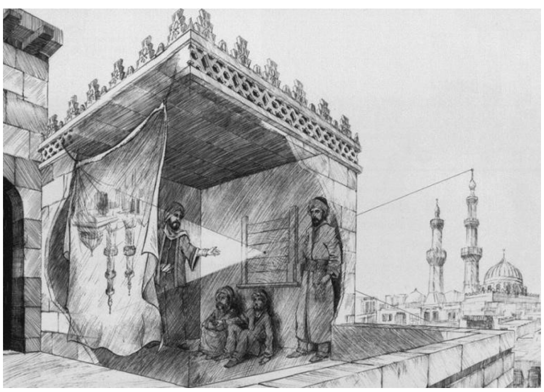
Mặt khác, nếu tia sáng đi từ mắt đến vật như Euclid nói thì vật có gửi lại tín hiệu về mắt không? Nếu không, thì làm sao mắt có thể biết các tia của mình chạm vào vật nào? Nếu có, thì có nghĩa là ta cần có tia sáng đi từ vật đến mắt để có thể nhìn thấy. Như vậy thì giải thích rằng vật thể là nguồn sáng sẽ thích hợp hơn bởi ta đã biết mắt không thể nhìn thấy trong bóng tối khi không có nguồn sáng nào.

Al–Haytham cũng đã tiến hành các thí nghiệm công phu để khẳng định rằng ánh sáng truyền đi theo đường thẳng. Với ánh sáng từ mặt trời (thuộc dạng nguồn sáng sơ cấp), ông tiến hành đục một lỗ ở trên bức tường ngăn cách hai ngôi nhà, một ở phía đông và một ở phía tây. Vào lúc bình minh, ánh sáng chiếu từ một lỗ khác trên tường phía đông của ngôi nhà phía đông sẽ xuyên qua lỗ ở tường ngăn cách và điểm được chiếu sáng ở ngôi nhà phía tây sẽ thẳng hàng với hai lỗ này. Khi đặt một vật chắn thì ánh sáng sẽ không chiếu vào tường nữa mà vệt sáng sẽ xuất hiện trên vật. Ông cũng lặp lại các thí nghiệm này với ánh sáng từ Mặt Trăng và sao Kim. Đồng thời, khi các nguồn sáng trên chuyển động thì vệt sáng do ánh sáng xuyên qua lỗ trên tường tạo thành cũng sẽ chuyển động tương ứng sao cho các lỗ và vệt sáng luôn thẳng hàng.Thí nghiệm tương tự với ánh sáng từ ngọn nến cũng cho thấy sự thẳng hàng này. Tính truyền thẳng của ánh sáng phản xạ còn được khẳng định bằng việc quan sát một bức tường trắng từ hai lỗ trên bức tường đối diện. Hai lỗ này được khoan sao cho đường kéo dài của chúng cùng hội tụ tại một điểm ở trên bức tường trắng. Khi quan sát từ bất kỳ lỗ nào cũng đều thấy điểm hội tụ này.



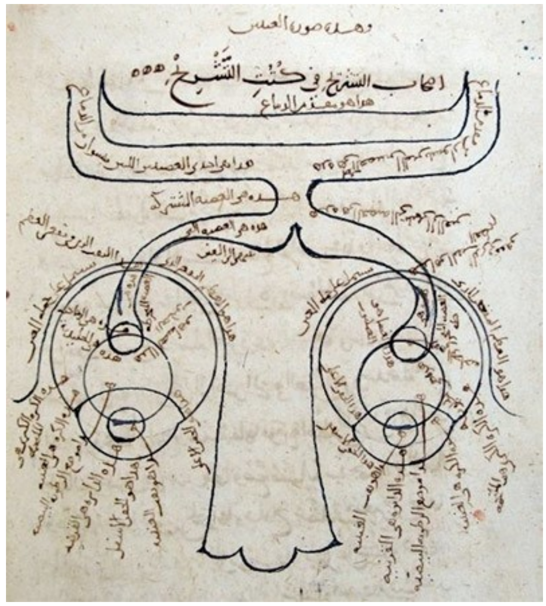
Hình 4. Minh họa cơ chế tạo ảnh của camera obscura. Buồng tối có thể là một căn phòng hay một hộp giấy.

Al–Haytham rất chú trọng đến các dụng cụ làm thí nghiệm và mô tả chi tiết trong cuốn sách cách chế tạo cũng như sử dụng chúng. Một dụng cụ thí nghiệm tương đối nổi tiếng mà al–Haytham sử dụng là thiết bị mà sau này các học giả phương Tây gọi là camera obscura. Nó gồm một buồng tối có đục một lỗ rất nhỏ. Ở trên một tấm màn đối diện, sẽ xuất hiện ảnh của vật bên ngoài theo chiều ngược lại. Hiện tượng này thể hiện rõ rệt sự truyền thẳng của ánh sáng. Trong trường hợp lỗ quá to thì ảnh sẽ bị mờ hoặc biến mất do mỗi điểm trên màn nhận được tia sáng từ rất nhiều điểm khác nhau ở bên ngoài. Tuy al–Haytham không phải là người đầu tiên phát minh ra camera obscura, ông là người đầu tiên đưa ra giải thích bằng mô hình hình học về cơ chế hoạt động của nó. Các bạn học sinh cũng có thể tự làm một camera obscura ở nhà bằng cách đục lỗ trên một hộp giấy và thay phần bìa ở phía đối diện lỗ bằng giấy can làm màn quan sát.



Hình 5. al–Haytham và camera obscura.

Không chỉ thiết lập lại đúng chiều và phương thức truyền đi của ánh sáng, al–Haytham cũng đưa ra một mô hình mới về thị giác. Ông đã xác định được rằng thủy tinh thể đóng vai trò của một thấu kính mà ảnh qua nó sẽ được hệ thần kinh tiếp nhận. Sau đó, thông tin từ cả hai mắt sẽ được bộ não xử lý để cho ra hình ảnh. Các chi tiết trong mô hình của ông còn có nhiều điểm thiếu sót mà sau này khoa học mới dần khám phá hết nhưng về cơ bản, al–Haytham đã có một mô hình đầu tiên giải thích một cách khoa học cách thức mà con người có thể nhìn thấy thế giới này. Ông cũng nghiên cứu các thông số của mắt như điểm cực cận, điểm cực viễn và độ phân giải của thị giác.



Hình 6. Mô tả của al–Haytham về vai trò của mắt trong thị giác.

Al–Haytham còn nghiên cứu nhiều vấn đề khác của quang học như các hiện tượng phản xạ, khúc xạ ánh sáng, cầu vồng và các hiện tượng quang học khác trong tự nhiên. Một hiện tượng mà ông rất quan tâm là việc Mặt Trăng khi ở gần đường chân trời sẽ trông lớn hơn so với khi nó ở trên cao. Hiện tượng này đã được ghi chép lại từ thời cổ đại ở nhiều nền văn minh khác nhau. Bản thân Ptolemy cũng như nhiều học giả Hy Lạp cho rằng nguyên nhân của việc này là do khúc xạ ánh sáng trong khí quyển. Tuy nhiên thực tế không phải như vậy. Tính toán hiện đại cho thấy khúc xạ chỉ thay đổi kích thước Mặt Trăng có $1,5\%$ mà thôi. Nếu ta chụp hai tấm ảnh của Mặt Trăng ở hai vị trí trên và đo thì có thể thấy kích thước Mặt Trăng thật sự không thay đổi. Al–Haytham là người đầu tiên kiểm chứng từ đo đạc thực nghiệm rằng hiện tượng này là do ảo giác chứ không phải một hiện tượng vật lý. Khi Mặt Trăng ở trên cao, mắt ta không có vật thể nào để làm tham chiếu nhưng khi nó ở gần chân trời, những vật thể xung quanh như ngọn núi, cây cối, ngôi nhà có thể gây ra cảm nhận thị giác khác biệt về mặt kích thước.

Hình 7. Khi ở gần đường chân trời, Mặt Trăng trông có vẻ to hơn nhiều so với khi nó ở trên cao.

Vào thế kỷ 12 và thế kỷ 13, khi nhiều cuốn sách khoa học được dịch từ tiếng Ả Rập sang tiếng Latin, al–Haytham được biết đến với tên Latin là al–Hazen. Tác phẩm của al–Hazen trở thành cơ sở kiến thức quang học cho các nghiên cứu của những nhà khoa học phương Tây thế kỷ 13 như Roger Bacon và Witelo. Hơn thế nữa, việc sử dụng thí nghiệm để kiểm chứng mô hình lý thuyết mà al–Hazen chú trọng có ảnh hưởng lớn đến sự phát triển của vật lý, trong cả cơ học của Galileo lẫn quang học của Kepler và Newton sau này. Có thể nói, al–Hazen là một nhà khoa học đầu tiên trong lịch sử, theo đúng quy trình của phương pháp khoa học: ông sử dụng lý thuyết để giải thích kết quả thực nghiệm và sử dụng thí nghiệm để kiểm chứng mô hình lý thuyết. Ông đã đưa khoa học thoát khỏi tính siêu hình và trừu tượng của các lập luận Hy Lạp để đưa nó đến gần với thực tế tự nhiên hơn. Một chi tiết đáng chú ý là đến tận đầu thế kỷ 20, từ những bản thảo tiếng Ả Rập phát hiện được, người ta mới biết al–Hazen và al–Haytham là cùng một người.

Hình 8. al–Hazen (trái) và Galileo (phải) trên bìa một cuốn sách thế kỷ 17. Trước khi có các phát hiện của Kepler và Newton, các cuốn sách của al–Hazen và Galileo được coi là những tài liệu kinh điển của lĩnh vực vật lý ở châu Âu.

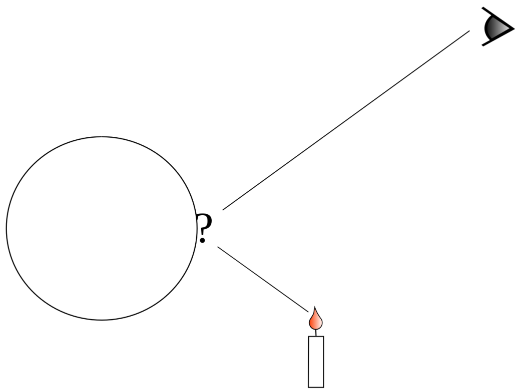
3. Bài toán al–Hazen

Toán học của Al–Haytham về cơ bản thừa kế từ các tác giả Hy Lạp cổ đại như Euclid, Ptolemy và Apollonius. Ông sử dụng những kiến thức toán học này để giải quyết các vấn đề liên quan đến quang học. Đặc biệt, các đường conic được dùng để giải các bài toán quang học phức tạp.

Bài toán nổi tiếng nhất của al–Haytham, được đặt tên là bài toán al-Hazen, có nội dung như sau:

"Một vật thể và một người quan sát có các vị trí cho trước trong mặt phẳng. Hãy xác định các điểm trên một vành gương tròn sao cho tia sáng từ vật thể phản xạ tại điểm này sẽ đến người quan sát".

Bài toán trên được Ptolemy phát biểu từ trước đó nhưng al–Haytham là người tìm ra cách giải. Ông đã sử dụng các đường conic để giải bài toán này cũng như trường hợp mở rộng cho mặt cầu và mặt nón trong không gian ba chiều. Những lời giải bằng hình học này rất phức tạp và dài. Đến thế kỷ 17, với sự ra đời của hình học giải tích, nhiều nhà toán học đã đi tìm cách giải khác sử dụng các phương pháp tọa độ của Descartes. Trong khi nhà toán học Sluse dùng đường parabola thì Huygens cho ra lời giải sử dụng đường hyperbola. Một cách giải bằng số phức được trình bày trongphần phụ lục.



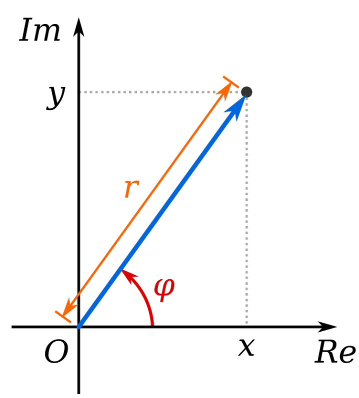
Hình 9. Bài toán al–Hazen.

Bài toán al–Hazen cùng trường hợp mở rộng cho hình cầu của nó vẫn đang là đề tài của nhiều nghiên cứu trong toán học và các ngành khoa học khác như đồ họa máy tính, phản xạ trong khí quyển, ...

4. Lời kết

Ngay từ thế kỷ thứ 10, al–Haytham và các học giả cùng thời khác như Ibn Sina và al–Biruni đã thảo luận những vấn đề rất hiện đại như ánh sáng là liên tục hay rời rạc; hoặc vận tốc ánh sáng có hữu hạn hay không. Họ gần với chúng ta hơn nhiều so với những gì chúng ta vẫn tưởng. Tuy nhiên, do sự thắng thế của các tư tưởng bảo thủ cũng như những cuộc xâm lược bên ngoài từ người Mông Cổ, sự phát triển của khoa học trong thế giới Hồi giáo đã bị dừng lại. Trong khi đó, những tư tưởng mà al–Haytham cùng nhiều học giả Trung đông khác xây dựng trên cơ sở toán học Hy Lạp lại được châu Âu tiếp thu trong giai đoạn trước và trong thời Phục Hưng, làm tiền đề cho cuộc cách mạng khoa học thế kỷ 17 với các tên tuổi như Galileo, Kepler và Newton. Lịch sử của quang học nói riêng và khoa học nói chung còn nhiều đề tài rất thú vị mà Pi sẽ chuyển tải đến độc giả trong các số sau.

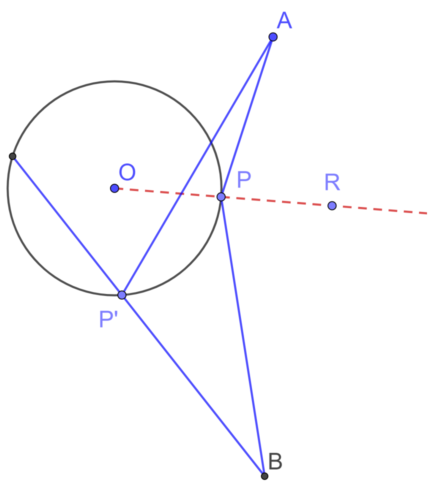
Phụ lục: Bài toán al–Hazen giải bằng số phức



Số phức biểu diễn theo dạng cực.

Trước khi giải bài toán al–Hazen, ta hãy tìm hiểu một số khái niệm liên đến số phức. Argument (viết tắt là arg) của một số phức z là góc ϕ mà vector từ gốc tọa độ của mặt phẳng phức đến điểm biểu diễn z tạo với trục thực. Số thực $x+i\cdot y$ sẽ có argument là $\tan^{-1}\frac{y}{x}$. Khi viết số thực dưới dạng cực, ta có: $x+i\cdot y = r(\cos\phi + i\cdot\sin\phi) = re^{i\phi}$.

Có thể dễ dàng chứng minh rằng khi nhân hai số phức viết theo dạng cực, $r_1e^{i\phi_1}$ và $r_2e^{i\phi_2}$ thì tích sẽ có độ lớn $r_1\cdot r_2$ và argument bằng $\phi_1 + \phi_2$. Cách biểu diễn dạng cực rất tiện lợi khi chứng minh hình học do bán kính và góc là các khái niệm cơ bản sẵn có của lĩnh vực này. Thay vì biểu diễn một điểm theo dạng (x, y) trong tọa độ Descartes, ta biểu diễn nó bằng một số phức $z = x + i \cdot y$ có bán kính $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$. Số phức z và số phức liên hợp $\overline{z}$ của nó sẽ biểu diễn hai điểm đối xứng qua trục x. Góc cũng có thể được tính qua phép chia số phức: $\arg \frac{a}{b}$ sẽ là góc tạo bởi hai đường thẳng từ gốc tọa độ đến các điểm ứng với hai số phức a, b trong mặt phẳng.



Bài toán al–Hazen.

Trở lại bài toán toán al–Hazen, gọi A là vị trí vật, B là vị trí người quan sát. Vành tròn phản xạ có tâm ở O. PR là pháp tuyến tại P. Tia sáng từ A đến P sẽ phản xạ sang B. Ta biểu diễn tọa độ của A, B và P bằng các số phức a, b và z (gốc và các trục tọa độ sẽ được chọn sau).

Góc tới APR và góc phản xạ RPB có độ lớn bằng nhau và ngược chiều quay từ pháp tuyến nên:

$$\arg\left(\frac{a-z}{z}\right) = -\arg\left(\frac{b-z}{z}\right).$$

Do đó:

$$\arg\left(\frac{(a-z)(b-z)}{z^2}\right) = 0. \qquad (1)$$

Hệ thức (1) có nghĩa rằng biểu thức trong ngoặc ở trên là một số thực (argument bằng 0 nên không có phần ảo). Do đó:

$$\frac{(a-z)(b-z)}{z^2} = \frac{(\overline{a}-\overline{z})(\overline{b}-\overline{z})}{\overline{z}^2} \qquad (2)$$

với $\overline{z}$ là liên hợp phức của z.

Phương trình trên thỏa mãn khi hai góc APR và RPB bằng nhau hoặc khác nhau π. Như trong hình, tia AP' có tia sáng phản xạ nằm trên đường thẳng $P'B$. Ta coi cả P và P' đều là điểm phản xạ cần tìm.

Lấy các trục tọa độ của mặt phẳng là đường phân giác của góc AOB và đường thẳng vuông góc với đường phân giác này, gốc tọa độ ở O, thì tích ab sẽ là một số thực. Nhân chéo hai vế của (2) rồi chia cho ab ta được:

$$z^2 - \overline{z}^2 = \left[(a^* + b^*)z - \overline{(a^* + b^*)}\overline{z}\right] z\overline{z}$$

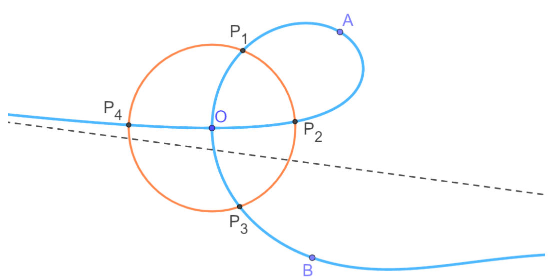
với $a^* = \frac{1}{a}$ và $b^* = \frac{1}{b}$. Đặt $c = \frac{1}{2}(a^* + b^*)$ ta được:

$$z^2 - \overline{z}^2 = 2(cz - \overline{cz})z\overline{z}.$$

Viết các số phức theo dạng $c = |c|e^{i\delta}$ và $z = re^{i\theta}$ ta được một đường cong phức dạng cực như sau:

$$r = \frac{\sin 2\theta}{2|c|\sin(\theta + \delta)}. \qquad (3)$$

Đây là đường cong mà nhà toán học Isaac Barrow tìm ra năm 1669.



Đường cong Barrow.

Thay $c = c_1 + i \cdot c_2$, ta thu được biểu diễn của đường cong (3) trong mặt phẳng tọa độ Descartes:

$$xy = (c_2 x + c_1 y)\left(x^2 + y^2\right).$$

Đường cong trên cho ta quỹ tích các điểm trong mặt phẳng sao cho các góc APR và BPR bằng nhau hoặc khác nhau π. Do a và b đều là nghiệm của (2) nên đường cong (3) đi qua A và B. Vẽ đường tròn tâm O, bán kính bằng với bán kính của gương thì các giao điểm của đường tròn với đường cong (3) là các điểm phản xạ cần tìm. Số điểm phản xạ này sẽ thay đổi từ 2 đến 4 tùy theo bán kính đường tròn.

Không làm mất tính tổng quát, giả sử gương là đường tròn đơn vị có $|z| = 1$. Khi đó,

$$xy = c_2x + c_1y$$

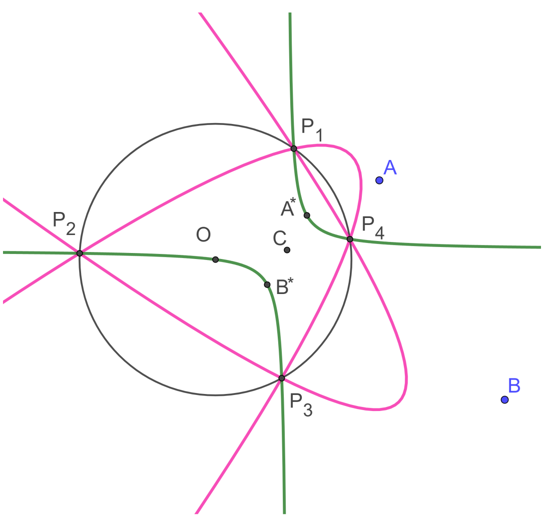
và ta có:

$$(x - c_1)(y - c_2) = c_1c_2$$

hay

$$y = \frac{c_1c_2}{x - c_1} + c_2.$$

Có nghĩa là, các điểm P ta cần tìm là giao điểm của đường tròn với hai nhánh hyperbola có các tiệm cận $x = c_1$ và $y = c_2$.



Tìm nghiệm của bài toán bằng cách dựng hyperbola (màu xanh) hoặc pẢ Rậpola (màu hồng) rồi lấy giao điểm với đường tròn tâm O.

Các điểm ứng với các số phức a^* và b^* được định nghĩa ở phần trên là các điểm A^* và B^* trong hình. Ta có O, A và A^* thẳng hàng, A và A^* ở cùng phía so với O, và $OA^* \cdot OA = 1$ (trong trường hợp bán kính đường tròn không bằng 1 thì tích này bằng R^2). Tương tự với B^*. Các điểm A^* và B^* còn gọi là ảnh của A và B qua phép nghịch đảo tâm O với phương tích 1. Do $c = \frac{a^*+b^*}{2}$ nên điểm $C(C_1, C_2)$ ứng với số phức c chính là trung điểm của A^*B^*. Các tiệm cận của hyperbola song song với các trục tọa độ (một trục sẽ song song với phân giác của góc AOB, trục còn lại vuông góc với phân giác này). Một nhánh của hyperbola cũng sẽ đi qua điểm O. Cách dựng hyperbola này chính là lời giải mà Huygens đã tìm ra. Hyperbola này cũng chính là ảnh của đường cong Barrow qua phép nghịch đảo đã nêu nên nó cũng đi qua cả A^* và B^*.

Nếu ta quay hệ trục tọa độ một góc $45°$ ngược chiều kim đồng hồ thì tích ab khi đó là một số ảo và phương trình mới của các số phức có dạng:

$$Z^2 + \overline{Z}^2 = 2(CZ + \overline{CZ})$$

với các chữ in hoa là tọa độ sau khi quay.

Do đó:

$$X^2 - Y^2 = 2(C_1X - C_2Y)$$

Để tìm giao điểm của đường cong này với đường tròn $X^2 + Y^2 = 1$, ta lần lượt cộng và trừ vế với vế của chúng lại với nhau. Bằng cách đó, ta thu được hai parabola với các trục chính vuông góc nhau tại trung điểm của OC:

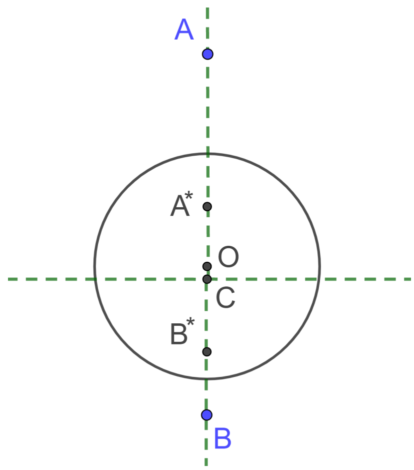
$$C_1X + \left(Y - \frac{1}{2}C_2^2\right)^2 = \frac{1}{4}\left(C_2^2 + 2\right)$$

$$\text{và } \left(X - \frac{1}{2}C_1^2\right)^2 + C_2Y = \frac{1}{4}\left(C_1^2 + 2\right).$$

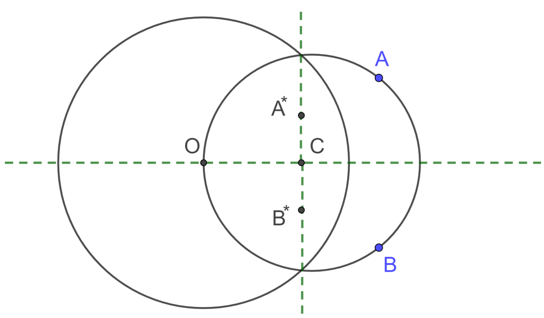
Các pẢ Rậpola này chính là lời giải của Sluse. Trục chính của chúng cắt nhau tại trung điểm của OC.

Trong một số trường hợp, lời giải của ta sẽ suy biến. Khi A, O và B thẳng hàng hoặc

$AO = BO$ thì hai nhánh hyperbola sẽ biến thành hai đường thẳng: $x = 0$ và $y = c_2$ trong trường hợp đầu tiên và $x = c_1$ và $y = 0$ trong trường hợp sau. Đường cong Barrow trở thành hình gồm đường thẳng $y = 0$ và một đường tròn đi qua O. Trong trường hợp $AO = BO$, đường tròn này đi qua A và B.



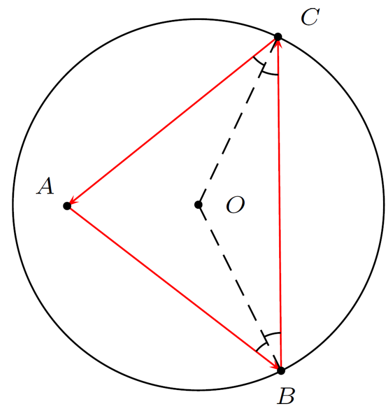
Trường hợp A, O, B thẳng hàng.



Trường hợp $AO = BO$.

Bài tập

1. Một bài toán khác của al–Haytham. Cho điểm A nằm trong đường tròn tâm O. Tìm các điểm B và C trên đường tròn sao cho tia sáng từ A đến B phản xạ đến C rồi quay về A. (Gợi ý: Đặt $OA = c$, $OB = OC = r$. Gọi x là khoảng cách từ O đến BC. Hãy chứng minh: $2cx^2 + r^2x = cr^2$).



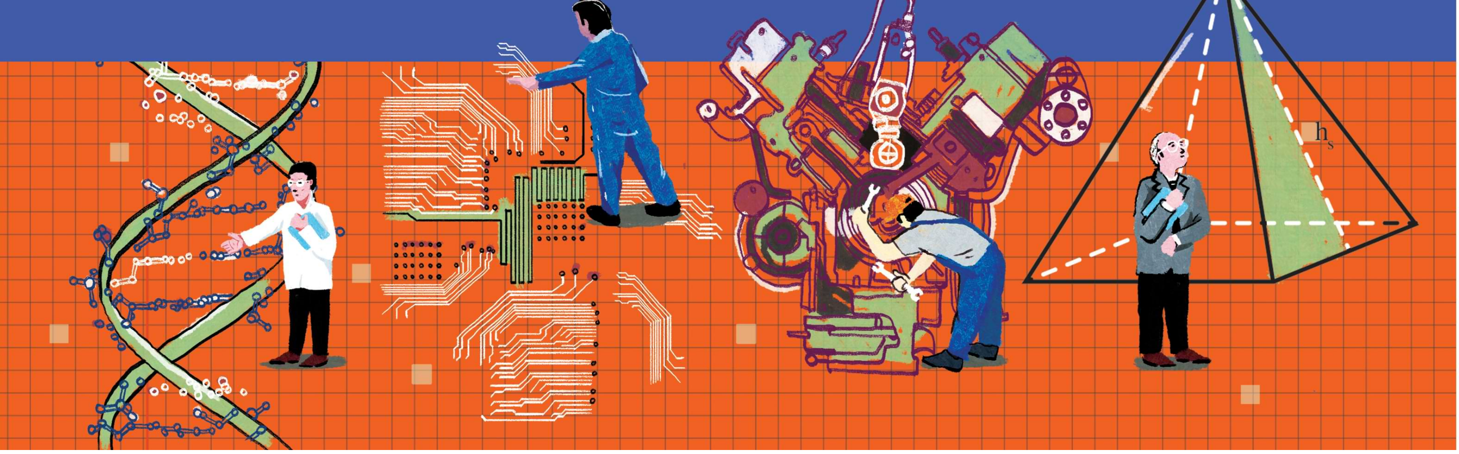
Tài liệu tham khảo

[1] Drexler, M. and Gander, M.J. (1998). Circular Billiard. *SIAM Review*, 40(2), pp.315 – 323. doi:10.1137/s0036144596310872.

[2] Smith, J.D. (1992). The remarkable Ibn al–Haytham. *The Mathematical Gazette*, [online] 76(475), pp.189 – 198. doi:10.2307/3620392.

[3] Wilk, S.R. (2015). Ibn al–Haytham: 1000 Years after the Kitāb al–Manāẓir. *Optics and Photonics News*, 26(10), p.42. doi:10.1364/opn.26.10.000042.

[4] Winter, H.J.J. (1953). THE OPTICAL RESEARCHES OF IBN AL–HAITHAM. Centaurus, 3(1), pp.190 – 210. doi:10.1111/j.1600 – 0498.1953.tb00529.x.



ÁNH SÁNG VÀ THỊ GIÁC

PHẠM HỒNG DƯƠNG[1]

Trái Đất nơi chúng ta sống bao gồm không gian, vật thể, năng lượng, tất cả đều tương tác với nhau và biến đổi theo thời gian. Để có thể sống sót, sinh vật nào cũng cần nhận thông tin về thế giới bên ngoài thông qua các giác quan, trong đó thị giác là phức tạp và tinh vi nhất. Mắt là cửa ngõ của hệ thống thị giác, mắt có chức năng thu nhận hình ảnh thế giới bên ngoài nhờ có ánh sáng.

Thật đáng ngạc nhiên và vô lý khi chúng ta hiểu biết quá ít về ánh sáng và mắt. Bạn thử nhớ lại xem, chúng ta đã học cách sử dụng ánh sáng, hệ thống thị giác và mắt được bao nhiêu?

1. Ánh sáng là gì?

Trong bài này, chúng ta hiểu ánh sáng là cảm thụ khi chùm photon với bước sóng thích hợp rơi vào võng mạc.

Hình 1. Bầu trời ban ngày có góc khối bằng 2π sr[2].

Ánh sáng từ nguồn sáng chiếu vào các vật thể, tương tác với chúng, sau đó đi vào mắt, đem thông tin về thế giới bên ngoài cho chúng ta. Não bộ tiếp nhận, xử lý và ghi nhận luồng thông tin thị giác này để đảm bảo cuộc sống của chúng ta. Thị giác của chúng ta đã tiến hóa qua hàng triệu năm trong môi trường chiếu sáng tự nhiên, nhưng chiếu sáng nhân tạo đang tạo ra các biến đổi sâu sắc đến hệ thống thị giác.

2. Môi trường chiếu sáng

Ánh sáng tự nhiên chủ yếu đi từ mặt trời, và được tán xạ trên bầu trời, tạo ra một quang cảnh đẹp lộng lẫy và một hệ sinh thái vô cùng hiếm hoi cho muôn loài phát triển.

Bầu trời trên trái đất có góc khối 2π sr, và có sự trùng hợp kỳ lạ, võng mạc của chúng ta cũng có góc thu sáng khoảng 2π sr. Mặc dù bầu trời không chói lóa, nhưng độ rọi xuống đất rất cao. Mặt trời rất chói, nhưng có góc phát sáng rất nhỏ. Tương tự như vậy, hốc mắt (*fovea*) rất nhạy sáng trong góc thu sáng rất nhỏ. Trái Đất tự quay nên ánh sáng thay đổi cường độ, màu sắc theo nhịp ngày đêm.

3. Mắt để làm gì?

Ai cũng biết mắt là để nhìn! Tuyệt đối đúng! Nhưng chưa đủ. Mắt có những ba chức năng.

Mắt nhìn là chức năng thị giác: phân biệt hình dạng, màu sắc, chất liệu, độ sáng, chuyển động và vị trí. Mắt còn điều chỉnh nhịp sinh học: ánh sáng gửi tín hiệu qua mắt

[1] *Viện Khoa học Vật liệu, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.*

[2] *sr (steradian) là đơn vị đo góc khối, toàn bộ mặt cầu có độ lớn là 4π sr.*

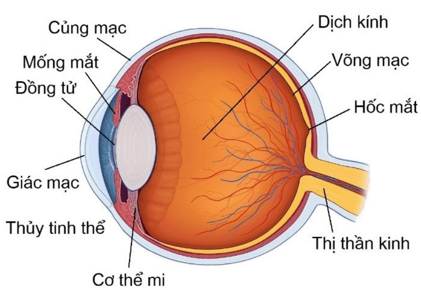
đến đồng hồ trung tâm trong não, rồi ra lệnh cho hệ thống hormone điều chỉnh tâm trạng, sinh lý và giấc ngủ của chúng ta. Lạc nhịp sinh học gây ra rất nhiều bệnh tật, từ trầm cảm đến ung thư, từ mất ngủ đến béo phì.

Hình 2. Mắt là cửa ngõ hệ thống thị giác.

Mắt còn là cửa sổ tâm hồn! Đó là chức năng trao đổi cảm xúc? Giống loài nào cũng cần chọn bạn tình để sinh sôi. Họ thường nhìn vào mắt nhau. Không thích ai thì đừng cho họ nhìn sâu vào mắt mình nhé!

4. Mắt tinh vì có cấu trúc buồng tối

Phần lớn các loài động vật sở hữu một trong hai loại mắt, đó là mắt kép và mắt đơn với cấu trúc buồng tối.

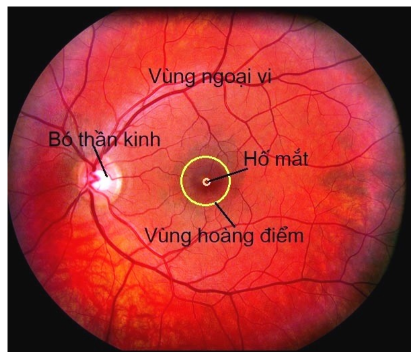


Hình 3. Mặt cắt nhãn cầu.

Mắt người có hai bộ phận quan trọng nhất, đó là nhãn cầu tạo ảnh và võng mạc thu ảnh. Nhãn cầu có đường kính khoảng 25 mm được bao bọc bởi lớp củng mạc chắn ánh sáng. Phần trong suốt hơi lồi phía trước của nhãn cầu là giác mạc (Hình 3). Lực khúc xạ của giác mạc là 40 D[3], còn thủy tinh thể là 20 D, nhỏ hơn lực khúc xạ của giác mạc nhưng lại đảm nhận vai trò điều tiết, tức là lấy nét. Phía trước thủy tinh thể là đồng tử, đồng tử điều chỉnh lượng ánh sáng rơi vào võng mạc.

5. Võng mạc

Võng mạc là lớp phủ bên trong nhãn cầu, được cấu tạo bởi nhiều lớp tế bào với nhiều chức năng khác nhau. Võng mạc thu ảnh nhờ các loại tế bào quang thụ chuyển đổi kích thích thành tín hiệu thần kinh, gửi về não bộ. Có 120 triệu tế bào que nhạy với ánh sáng yếu để nhìn ban đêm và 7 triệu tế bào nón, nhạy với 3 dải bước sóng khác nhau khi ánh sáng mạnh. Tế bào nón tập trung chủ yếu tại hố mắt, nằm giữa điểm vàng (Hình 4). Tế bào nón gửi thông tin qua bó thần kinh thị giác cho não sau khi đã được xử lý sơ bộ. Võng mạc thực hiện việc nén tín hiệu khoảng 1000 lần.



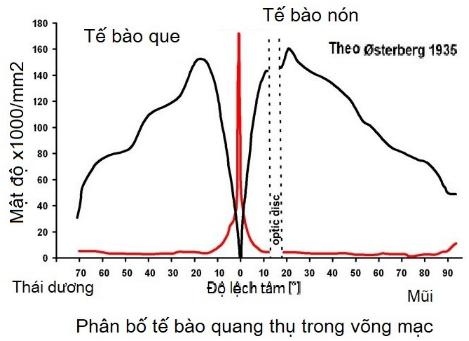
Hình 4. Ảnh chụp đáy mắt.

Bó thần kinh thị giác có hơn 1 triệu sợi, truyền tín hiệu vào não bộ. Số lượng lớn các sợi thần kinh là rào cản cho việc thay thế võng mạc bằng các cảm biến nhân tạo vì không ghép nối được hết các điện cực trong một không gian nhỏ hẹp.

Ban đêm, tín hiệu từ nhiều tế bào que tập hợp lại với nhau để tăng độ nhạy, nhưng giảm độ phân giải. Ta thấy trên Hình 5, mật độ tế bào que phân bố rộng trên toàn bộ võng mạc, nhưng không có trong hốc mắt. Vì vậy bạn muốn rõ trong đêm thì đừng nhìn thẳng vào đối tượng! Tế bào nón tập trung chủ yếu trong hốc mắt nằm trong vùng hoàng điểm, là nơi có độ phân giải cao nhất. Khi đọc chữ, mắt luôn điều chỉnh sao cho ảnh của các chi tiết nhỏ nhất rơi vào hố mắt.

---

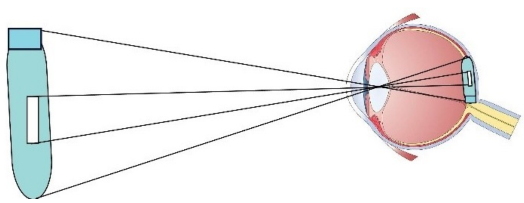
[3] *đi–ốp (dioptre)*



Hình 5. Phân bố tế bào quang thụ.

6. Mắt tạo ảnh thế nào?

Các tia sáng đi từ vật thể bên ngoài được khúc xạ bởi các bộ phận quang học của nhãn cầu, tạo hình ảnh lên võng mạc. Hình ảnh trên võng mạc là ảnh thực nhưng có chiều lộn ngược. Não sẽ làm nhiệm vụ đảo chiều.



Hình 6. Sơ đồ tạo ảnh lên võng mạc.

Phần ngoại vi rộng khắp võng mạc có phân giải thấp, nhưng lại đóng góp chủ yếu vào việc điều chỉnh nhịp sinh học và kích thước đồng tử.

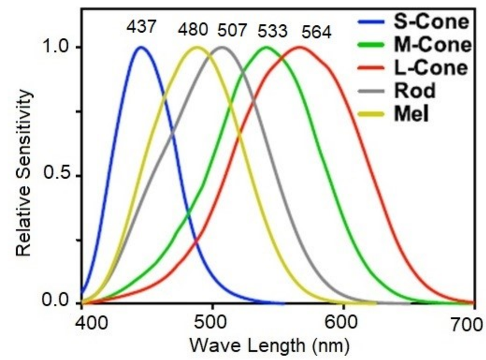
7. Thị lực

Khả năng phân giải theo góc của mắt được gọi là thị lực, được đo bằng bảng thử thị lực. Thị lực 10/10 có tương đương với khả năng phân biệt được 1 phút cung (1/60 độ).

Thị lực là thước đo chất lượng thị giác của mỗi cá nhân, nhưng thị lực phụ thuộc vào môi trường chiếu sáng. Chiếu sáng tốt không những nâng cao thị lực, mà còn có tác dụng bảo vệ hoàng điểm khỏi tác động có hại của ánh sáng xanh.

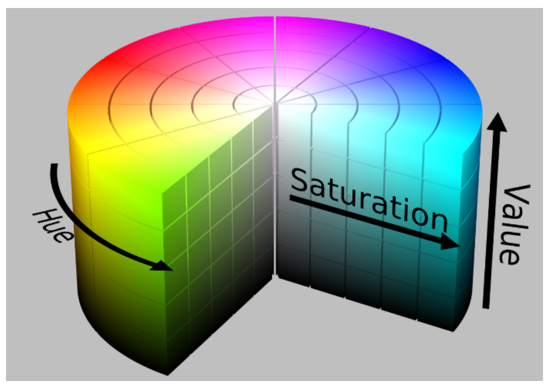
8. Màu sắc

Khả năng phân biệt màu sắc của thị giác được gọi là sắc giác. Nhờ có 3 loại tế bào nón mà não bộ cảm nhận và phân biệt được rất nhiều màu và sắc (Hình 7). Màu thay đổi chủ yếu do bước sóng đỉnh vùng thay đổi. Sắc độ tăng lên khi dải sóng kích thích hẹp lại.



Hình 7. Phổ hấp thụ tế bào quang thụ.

Khả năng phân biệt màu trong vùng tím cao hơn trong vùng xanh lá cây.



Hình 8. Không gian màu HSV.

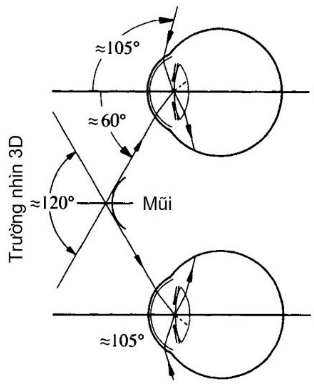
Để thuận tiện cho việc ghi nhận và xử lý màu sắc, người ta đã xây dựng các không gian màu số hóa dựa trên kết quả cảm nhận của những người quan sát chuẩn. Ví dụ về không gian màu HSV được thể hiện trên Hình 8.

Tương phản màu sắc cũng đóng góp vào việc nâng cao nhận biết hình ảnh.

9. Trường nhìn

Mắt bồ câu và mắt các động vật bị săn mồi nằm ở hai bên đầu, có trường nhìn 2D rất rộng, chủ yếu để phát hiện kẻ săn mồi. Mắt cú vọ tập trung ở phía trước, tạo ra trường nhìn lập thể 3D, hẹp nhưng xác định khoảng cách rất chính xác để vồ mồi.

Mắt người có trường nhìn ngang vừa rộng, vừa sâu (Hình 9), nhưng chỉ nhìn rõ ở khu vực trung tâm. Con người vừa là kẻ săn mồi, vừa là con mồi. Có nhiều người bị hỏng thị giác ngoại vi, trường nhìn thu hẹp, tham gia giao thông rất nguy hiểm.



Hình 9. Trường nhìn 2D và 3D của mắt.

10. Chộp hình tốc độ cao

Nhờ có cơ vận nhãn mắt người có thể chộp hình rất nhanh, tức là bắt lấy đối tượng cần chú ý. Tốc độ chộp hình mắt người là 700 độ/giây, mắt máy khó so được.

Mắt người và động vật có đặc tính hướng quang, tức là hướng tới nguồn sáng chói nhất xuất hiện, sau đó mới tránh đi.

11. Lưu ảnh võng mạc

Hiện tượng lưu ảnh trong võng mạc làm giảm khả năng quan sát những vật chuyển động nhanh, nhưng lại làm cho hình ảnh chuyển động rời rạc trở thành liên tục. Trong phòng tối, thời gian lưu ảnh lâu hơn, chỉ cần 24 hình/giây bạn thấy chuyển động là liên tục. Nhưng khi xem TV và nhìn màn vi tính, ít nhất màn hình phải chớp 50 hình/giây mới không thấy nhấp nháy.

12. Xử lý bậc cao

Mắt nhìn và truyền tín hiệu thị giác về cho não bộ để xử lý ở bậc cao hơn, thông qua các bước:

1. *Thấy* là cảm thụ, nhận biết.

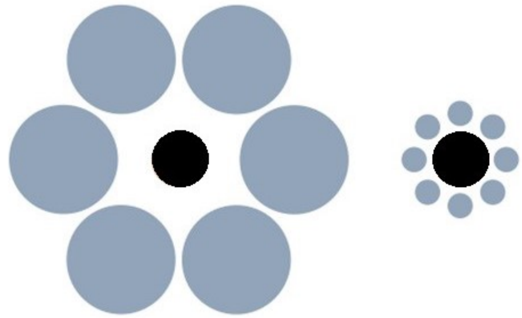
2. *Làm* là ra quyết định và đáp ứng.

3. *Biết* là trải nghiệm và hồi tưởng thị giác.

Thông thường, bạn chỉ thấy những cái bạn muốn thấy, và bỏ qua những cái khác.

13. Thấy to hay nhỏ

Hãy quan sát Hình 10, hình tròn đen nào to hơn?



Hình 10. So sánh kích thước hình tròn đen.

Bây giờ bạn hãy đo kiểm tra: chẳng hình tròn đen nào to hơn cả!

Cái thấy là so sánh thôi! để cạnh vật to thấy nhỏ, để cạnh vật nhỏ thấy to? Để cạnh vật tối thấy sáng, để cạnh vật sáng thấy tối. Màu sắc cũng bị ảnh hưởng tương tự bởi màu của các vật bên cạnh và xuất hiện trước đó.

14. Ô nhiễm ánh sáng

Ngày nay, các bệnh không lây nhiễm như đột quỵ, tai biến, ung thư, béo phì, tiểu đường, hiếm muộn được biết đến là nguyên nhân gây tử vong hàng đầu. Tất cả đều liên quan trực tiếp hoặc gián tiếp đến ô nhiễm môi trường ánh sáng.

Hình 11. Chiếu sáng nội thất ô nhiễm.

Sự khác biệt của môi trường chiếu sáng nhân tạo với chiếu sáng tự nhiên về lượng sáng, phân bố, cấu trúc phổ, chói lóa và nhịp điệu là tác nhân gây ô nhiễm. Giải pháp phù hợp nhất cho chiếu sáng nhân tạo, lấy con người làm trung tâm (HCL) là giả lập bầu trời tự nhiên.

15. Chiếu sáng SkyLighting

Là tên gọi giải pháp chiếu sáng nâng cao thị lực, bảo vệ mắt và sức khỏe. Bản chất của SkyLighting là giả lập ánh sáng bầu trời tự nhiên, sử dụng đèn SkyLED, lựa chọn màu trần, tường phù hợp và điều khiển thông minh.

Hình 12. Hình ảnh SkyLighting nội thất.

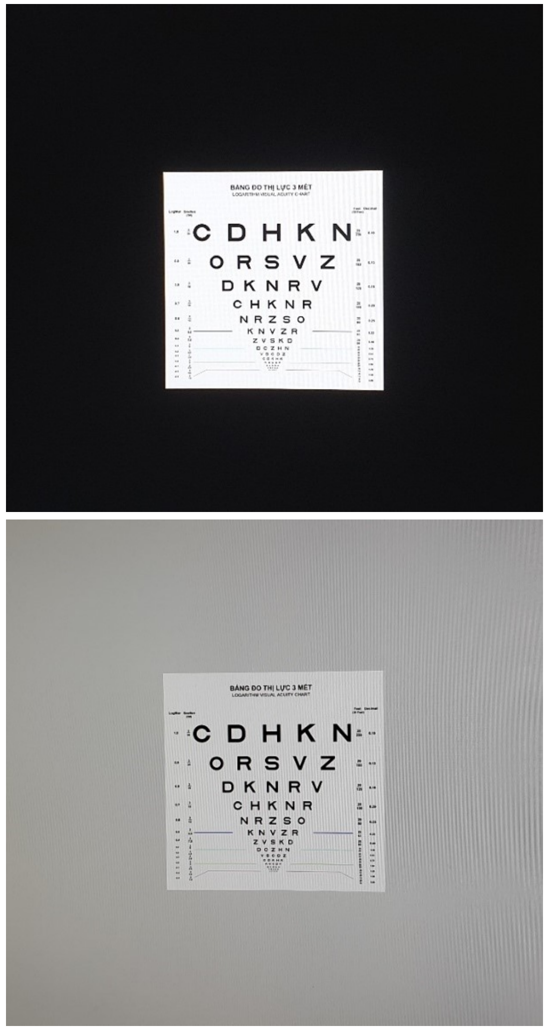
Một ví dụ SkyLighting trên Hình 12 sử dụng 8 đèn SkyLED giả lập bầu trời, 1 đèn ốp trần giả lập mặt trời và 1 đèn chiếu tranh giả lập cửa sổ. Ánh sáng thay đổi cường độ và nhiệt độ màu theo nhịp ngày đêm với độ rọi 900 lux vào buổi trưa.

16. Hạn chế nguy cơ ánh sáng xanh

Ngày nay, thời gian làm việc với màn hình công nghệ rất dài nên cần có giải pháp hạn chế ánh sáng xanh. Tuy nhiên, các nghiên cứu cho thấy, chỉ cần bảo vệ tế bào nón tập trung ở vùng hoàng điểm.

Giải pháp hạn chế ánh sáng xanh bằng cách chuyển sang chế độ ánh sáng vàng chỉ giảm bớt được khoảng 30% lượng ánh sáng xanh, nhưng lại gây buồn ngủ.

Nghiên cứu của chúng tôi cho thấy, bật đèn chiếu sáng xung quanh màn hình sẽ giảm độ chói của hình ảnh rơi vào vùng hoàng điểm 4 lần, như được minh họa trên Hình 13. Đó là vì đồng tử co lại khi chiếu sáng vùng ngoại vi. Hơn nữa khi bật đèn, thị lực tăng lên và người dùng còn tỉnh táo hơn.



Hình 13. Ảnh chụp bảng thử mắt dưới hai điều kiện chiếu sáng xung quanh.

18. Lời khuyên cho người dùng màn hình

Khi phải làm việc nhiều với màn hình công nghệ, để giảm lượng ánh sáng xanh rơi vào hoàng điểm, cần phải tăng lượng sáng xung quanh màn hình bằng cách tăng độ rọi, và/hoặc sử dụng các màu sáng cho nền tường phía sau màn hình.

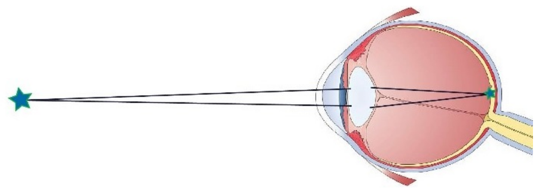
Không được tắt đèn khi xem TV, khi dùng màn hình điện tử, tránh dùng mặt bàn hoặc quần áo sẫm màu.

19. Bảo vệ mắt khi ra ngoài trời

Ánh sáng ngoài trời rất mạnh và chứa nhiều tia cực tím. Ra ngoài cần đeo kính râm cắt hết tia cực tím và giảm ít nhất 5 lần tia khả kiến. Các bạn cận thị không dùng kính cận râm sẽ bị đục thủy tinh thể và giác mạc do tia cực tím, hỏng võng mạc do ánh sáng xanh.

20. Tật cận thị với vòng xoáy bẩn

Tật cận thị ngày càng phổ biến với nguyên nhân trực tiếp là nhìn gần quá nhiều, trong môi trường ánh sáng yếu.



Hình 14. Nhãn cầu dài do áp lực nhìn gần.

Khi nhìn gần nhiều, hình ảnh hội tụ sau võng mạc tạo áp lực làm nhãn cầu dài ra, không hồi phục được nữa (Hình 14). Nếu bạn đeo kính cận -2 D (f=0,5 m), khi không đeo kính, bạn vẫn nhìn rõ trong khoảng cách nhỏ hơn 50 cm. Tuy nhiên, khi đeo kính để nhìn màn hình ở khoảng cách $O = 0{,}4$ m, hình ảnh sẽ thu gần lại theo công thức Gauss:

$$O = i \times O/(f+O)$$
$$= 0{,}4 \times 0{,}5/(0{,}4+0{,}5) = 0{,}22(m).$$

Khoảng cách 0,22 m là yếu tố kích thích độ cận lên tới $-4{,}5$ D, nếu bạn sử dụng màn hình thường xuyên. Đó là lý do tại sao từ ngày đeo kính thường xuyên, bạn tăng số liên tục.

Giải pháp phù hợp là, bạn phải bỏ kính ra khi làm việc gần. Bạn phải đeo kính giảm 2 số khi bạn đọc sách.

21. Chiếu sáng lớp học

Tiêu chuẩn TCVN–7118 của Việt nam quy định độ rọi mặt bàn học sinh 300 lux, mặt bảng 500 lux và hệ số chói lóa UGR < 19. Phần lớn các lớp học ở Việt nam không đạt được hai tiêu chuẩn sau và là một trong các nguyên nhân tăng nguy cơ mắc tật khúc xạ.

Hình 15. Chiếu sáng lớp học SkyLighting.

Mô hình do đề tài cấp Nhà nước ĐTĐLCN.30/18 xây dựng đã đáp ứng vượt mức tất cả các tiêu chuẩn quốc gia và quốc tế về chiếu sáng lớp học, sử dụng hệ thống SkyLED và đèn chiếu bảng, đã được cấp nhiều bằng sáng chế (Hình 15).

22. Bàn học ở nhà

Nguy cơ mắc tật khúc xạ của học sinh ở nhà còn cao hơn trên lớp, vì bạn không nhìn bảng. Hộp sáng SkyBox giả lập bầu trời trên Hình 16 tạo ra môi trường sáng gần với bầu trời, độ rọi cao, đồng đều, không chói lóa.

Hình 16. Bàn học với hộp sáng Skybox.

Ánh sáng tán xạ góc khối rộng hơn π sr sẽ xóa hết bóng đổ. Nền sáng phía sau không những làm tăng thị lực, mà còn bảo vệ vùng điểm vàng do đồng tử thu hẹp.

Kết luận

Môi trường chiếu sáng định hình hệ thống thị giác của chúng ta. Chúng ta cũng đang thay đổi môi trường chiếu sáng. Sử dụng giải pháp chiếu sáng SkyLighting và thay đổi hành vi sẽ nâng cao hiệu quả học tập và chất lượng cuộc sống.

XE CHỐNG TƯỢNG

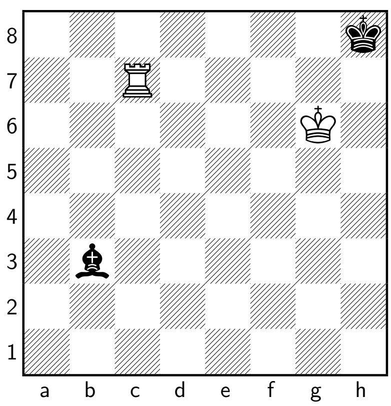
BÙI VINH[1]

Lý thuyết cờ tàn cơ bản đều cho rằng Xe chống tượng không có tốt đều được coi là hòa cờ cơ bản.

Trong bài học hôm nay, chúng tôi xin trình bày những kiến thức cờ cơ bản trong từng tinh huống cụ thể.

1. *Trường hợp Vua bên có tượng nằm ở ô trong góc có mầu ô khác mầu với Tượng của mình. Đây là thế cờ hòa cơ bản.*

Ví dụ 1:



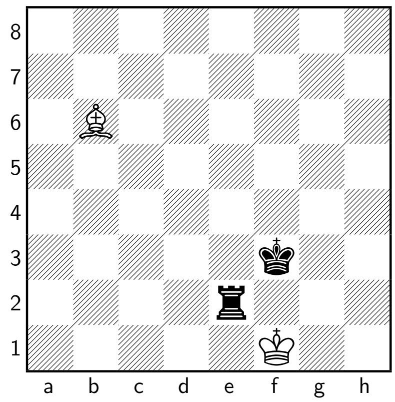
Hình 1.

1.Xc8+ Tg8 Đen dọa Pat **2.Xc7 Tb3 3.Xb7 Ta2 4.Xh7+ Vg8 5.Xa7 Tb1+ 6.Vf6 Vh8!**

Vua đen di chuyển vào ô trong góc h8 có mầu ô khác mầu với mầu ô của tượng a2.

Trắng không thể nào gianh chiến thắng vì đen có thể hòa cờ nhờ thế Pat.

Ví dụ 2:

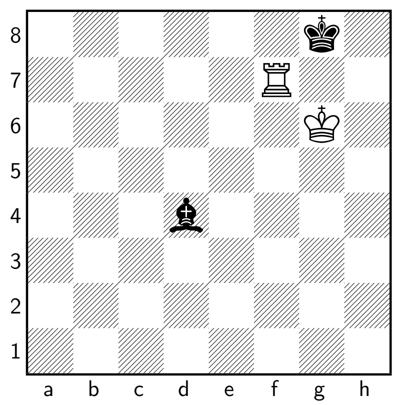


Hình 2.

1.Vg1! Vua trắng di chuyển vào ô h1 khác màu ô với Tượng trắng **1...Xb2 2.Tc5 Vg3 3.Vh1 Xh2+ 4.Vg1 Xc2 5.Td6+ Vf3 6.Vh1**

2. *Trong trường hợp Vua bên có tượng nằm ở ô trong góc có cùng màu với mầu ô của Tượng mình, bên có xe sẽ giành chiến thắng.*

Ví dụ 3:



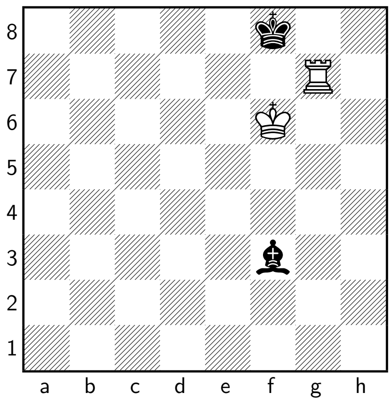
Hình 3.

[1] *Đại kiện tướng quốc tế.*

Vua đen nằm ở trong góc có cùng màu ô với Tượng của mình. Trắng sẽ giành chiến thắng dễ dàng.

1.Xd7 Tb6 2.Xb7 Tc5 3.Xb8+ Tf8 4.Xc8.

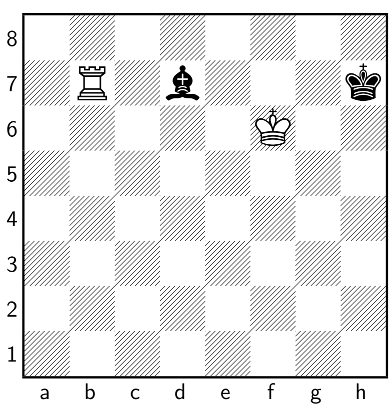
Ví dụ 4: Kling – B.Horwitz (1851)



Hình 4. Trắng đi trước.

1.Xg3 Te4 [Các phương án khác của đen cũng thua nếu 1...Te2 2.Xg2 Tf3 3.Xf2! Tc6 4.Xc2 Tb7 5.Xc7 Ta6 6.Xa7 Tb5 7.Xa8+ Te8 8.Xb8; 1...Td5 2.Xd3 Tc6 3.Xd8+ Te8 4.Xb8; 1...Th5 2.Xh3 Tf7 3.Xh8+ Tg8 4.Vg6; 1...Tc6 2.Xc3 Td7 3.Xb3! Vg8 4.Xb8+ Vh7 5.Xb7]

2.Xe3 Tg2 3.Xe2 Tf3 4.Xf2 Tc6 [Nếu 4...Te4 5.Ve5+; 4...Tg4 5.Vg5+; 4...Th5 5.Xh2 Tf7 6.Xh8+ Tg8 7.Vg6; 4...Tb7 5.Xb2 Tc6 6.Xb8+ Te8 7.Xd8 trắng thắng]



Hình 5.

5.Xc2 Td7 6.Xb2 Vg8 7.Xb8+ Vh7 8.Xb7 (Hình 5).

Ví dụ 5:

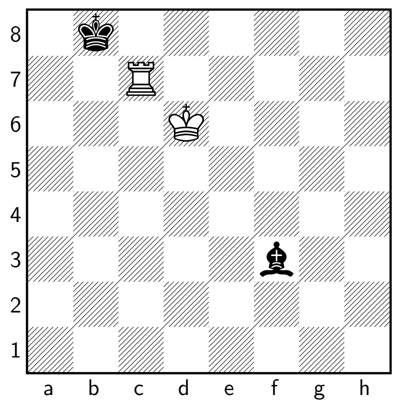
Cũng trong tình huống này (Hình 5) nếu Đen được đi trước, Đen sẽ nhanh chóng gỡ hòa nếu Vua đen di chuyển sang ô góc có màu ô trắng (a8).

NN – NN

Đen đi trước

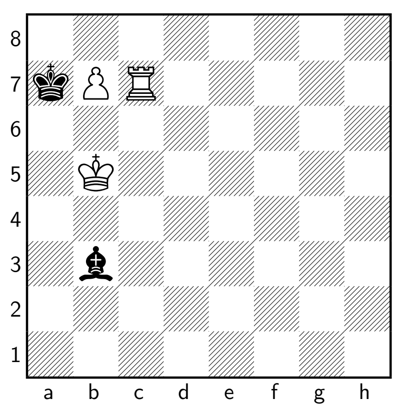
1...Ve8! 2.Ve6 Vd8 3.Vd6 Vc8 4.Xc7+ Vb8! (Hình 6).

1/2 – 1/2



Hình 6.

Bài tập 1: Trắng đi trước thắng.



Hình 7.