NTNU

# Designnotat 7	
Tittel: Anti-Aliasing Filter	
Forfattere: Sindre Danielsen	
Versjon: 1.4	Dato: 11.12.21

Innhold

1 Problembeskrivelse

Når et analogt signal skal filtreres, så brukes vanligvis digital signalbehandling. For å unngå at ADC omformeren skal få alvorlige *aliasing-feil*, så burde båndbredden B begrenses. Dette kan gjøres ved et *anti-aliasing filter* slik vist i figur 1.

Figur 1: Filtrerer vekk uønskede frekvenser på signalet $v_1(t)$, som gir signalet $v_2(t)$.

Anti-alias filtreringen skal brukes ved en punktprøvingsfrekvens f_s, som er gitt ved $f_s = 2B$. En fullstendig båndbegrensning er derimot ikke mulig i praksis. Det er heller ikke nødvendig, så lenge frekvensene større enn B blir svekket betydelig og frekvensene innenfor B ikke blir vesentlig påvirket. Ved bruk av analoge filter, så er det mulig å oppnå ved en knekkfrekvens f_c slik ønskelig.

Krav til $v_2(t)$:

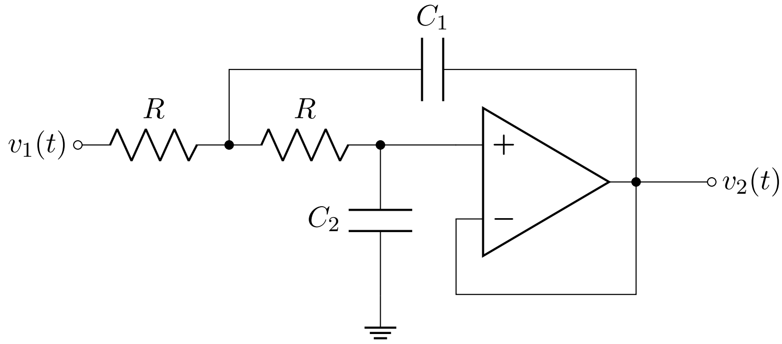
- Dempning $A_{min} \leq -10\text{db}$ ved B.
- Knekkfrevkensen (-3db fra maksimum amplituderespons.):

$$f_c \geq 0.75 \frac{f_s}{2} \tag{1}$$

2 Prinsipiell løsning

Et anti-aliasing filter kan utvikles ved bruk av et lavpass filter. Enten det er bruk av RC filter, RCL filter eller andre muligheter som Butterworth- eller Chebeschev filter. Merk at spolen i et RCL filter vil i virkeligheten ha litt motstand, spesielt for større spoler.

Et aktivt lavpass filter, som holder passbandet maksimalt flatt, samt en valgbar dempning ved B er Butterworth filteret. Det har flatere knekkfrekvens enn Chebeschev filter, men til gjengjeld, så er det neglisjerbare forstyrrelser for amplituderesponen i og utenfor B. Filter design på analoge signal går ut ifra et system som er sensitivt for forstyrrelse i amplituderesponsen og derfor velges et Butterworth filter, slik vist i figur 2.



Figur 2: 2.ordens Butterworth filter med Sallen-Key kretstopologi [2].

Filteret filtrerer ut de høye frekvensene fra $v_1(t)$ og sender ut et signal $v_2(t)$ som har de lave frekvensene påtrykket. Det er vanlig at motstandene R i kretsen er like hverandre, som gjør analysen lettere. Dersom et 1. ordens filter ønskes, så kan kondensatoren C_1 fjernes. Kondensatoren C_2 i samband med C_1 skaper et 2. ordens filter.

For å utvikle filteret som nevnes i seksjon 1, så er likningen for et Butterworth filter gitt ved:

$$A_{min} = |H(j2\pi)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{B}\right)^{2n}}}, \tag{2}$$

Den generelle formelen har en ϵ^2 fremfor $\left(\frac{f_c}{B}\right)^{2n}$, men vanligvis er $f_c = -3\text{db} \implies \epsilon^2 = 1$. For mer informasjon om Butterworth filter, se [1].

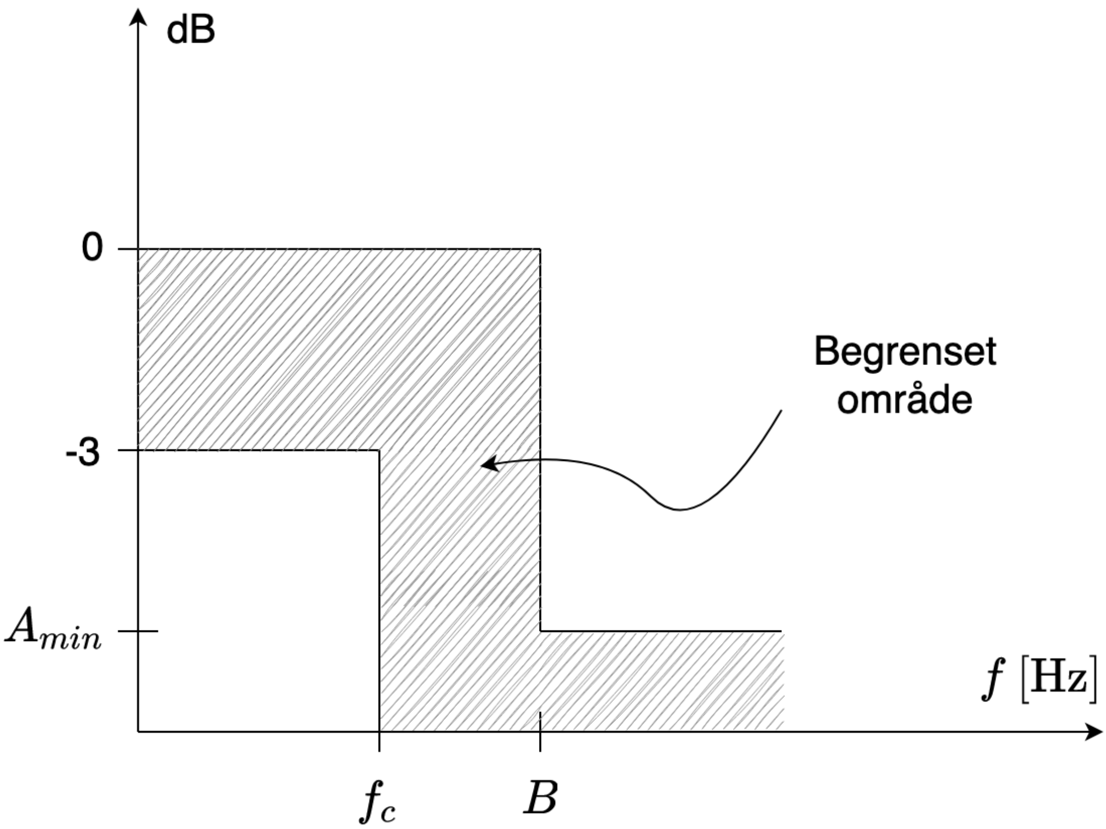
N-orden gir informasjon om hvor mange poler som eksisterer:

- $n = 1 \implies$ 1. ordens lavpass filter.
- $n = 2 \implies$ 2. ordens lavpass filter
- $n > 2 \implies$ 1. ordens- og 2. ordens-lavpass filter i seriekopling.

Det er derfor essensielt å finne n-orden på kretsen, som kan gjøres ved å omforme likning 2 til

$$n = \frac{1}{2}\frac{ln(A^{-2} - 1)}{ln\left(\frac{f_c}{B}\right)}. \tag{3}$$

Merk at n skal være et heltall. Ved desimaler, så rundes n opp til neste heltall. Å runde ned n impliserer at A_{min} vil øke. Da er det heller bedre å oppnå en større dempning enn ønsket ved å øke n. Ønskelig frekvensspekter av $v_2(t)$ for et Butterworth filter er vist ved det begrensede området i figur 3.



Figur 3: Frekvensresponsen til et Butterworth filter.

Filteret vil ha tidskonstantene gitt ved

$$\tau_1 = \frac{1}{2\pi f_c \zeta} \quad , \quad \tau_2 = \frac{1}{(2\pi f_c)^2 \tau_1} \, . \tag{4}$$

Et 1. ordens system vil kun ta i bruk τ_1.

Kondensatorene er gitt ved

$$C_1 = \frac{\tau_1}{R} \quad , \quad C_2 = \frac{\tau_2}{R} \, . \tag{5}$$

Vi mangler dempningsfaktoren ζ. Den kan eventuelt finnes grafisk ved å dele opp en halvsirkel for en reell- (x-aksen) og imagineær-akse (y-aksen). Det første komplekskonjugerte polparet $n = 2$ plasseres $\pm 45°$. Hvis $n = 4$, så plasseres to komplekskonjugerte polpar på $\pm \left(45° + \frac{45°}{2}\right)$ og $\pm \left(45° - \frac{45°}{2}\right)$. Slik kan man fortsette for høyere N-orden. Det er vanlig å lese av ζ for den reelle verdien. Dette kan være tungvint å gjenta seg, så legger ved en liste for $n \in [1, 10]$, som vist ved tabell 1. Merk at alle verdier ζ_1, ζ_1, ... ζ_n har samme f_c, siden systemet er lineært innenfor opampens virkeområde.

N-Orden n	Reelle Verdier ζ	N-Orden n	Reelle Verdier ζ
1	1.0000	6	0.9659 0.7071 0.2588
2	0.7071	7	0.9010 0.6235 0.2225 1.0000
3	0.5000 1.0000	8	0.9808 0.8315 0.5556 0.1951
4	0.9239 0.3827	9	0.9397 0.7660 0.5000 0.1737 1.0000
5	0.8090 0.3090 1.1000	10	0.9877 0.8910 0.7071 0.4540 0.1564

Tabell 1: Butterworth pol lokasjoner for ζ av $n \in [1, 10]$

En notasjon ved bruk av opamper er å velge $R \in [1\text{k}\Omega, 100\text{k}\Omega]$. Årsaken er at i dette området vil kretsen trekke minst mulig strøm og ha en neglisjerbar følsomhet for støy når det kommer til opamper. Det kalles *opampens gyldne regel*.

Generelt sett er det en enkel metodikk for utvikling av Butterworth filter:

1. Velg en R innenfor området gitt av den gylne regel for opamper.
2. Regn ut N-orden for å finne antall butterworth-filter.
3. Finn ζ verdiene.
4. Regn ut kondensatorverdiene.

3 Realisering og test

Oppkoblingen av kretsen bruker komponentverdiene gitt ved tabell 2.

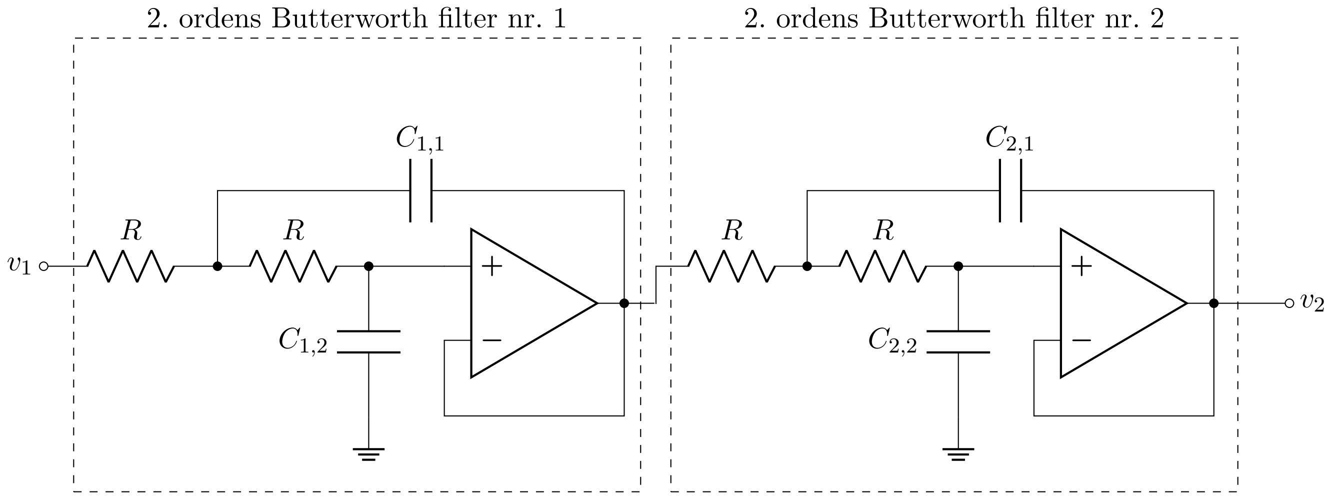
Navn	**Verdi**	**Beskrivelse**
opamp	LF353N	Tilgjengelige opamper.
R	1kΩ	Valgt motstand (innenfor opampens gyldne regel).
$C_{1,1}$	172nF	1. Kondensator for 1. filter (likning 5).
$C_{1,2}$	147nF	2. Kondensator for 1. filter.
$C_{2,1}$	416nF	1. Kondensator for 2. filter.
$C_{2,2}$	60.9nF	2. Kondensator for 2. filter.

Tabell 2: Reelle verdier basert på tabell 3

Navn	**Verdi**	**Beskrivelse**
f_s	7.6kHz	Valgt samplingsfrekvens.
B	3.8kHz	Gitt ved $f_s/2$.
f_c	$\geq$ 2.85kHz	Knekkfrekvens ved $\geq 0.75B$.
A_{min}	$-$10dB	Ønsket dempning ved B.
n	4	N-orden fra likning 3.
$\tau_{1,1}$	60.4μs	1. tidskonstant for 1. filter (likning 4).
$\tau_{1,2}$	51.6μs	2. tidskonstant for 1. filter.
$\tau_{2,1}$	145.9μs	1. tidskonstant for 2. filter.
$\tau_{2,2}$	21.4μs	2. tidskonstant for 2. filter.
R	1kΩ	Valgt motstand (innenfor opampens gyldne regel).
$C_{1,1}$	60.4nF	1. Kondensator for 1. filter (likning 5).
$C_{1,2}$	51.6nF	2. Kondensator for 1. filter.
$C_{2,1}$	145.9nF	1. Kondensator for 2. filter.
$C_{2,2}$	21.4nF	2. Kondensator for 2. filter.

Tabell 3: De teoretiske verdiene av komponentene i figur 4.

Endrer figur 2 for $n = 4$, som vist ved figur 4.



Figur 4: Anti-aliasing filter: 4. ordens Butterworth filter.

Verdiene på τ utreknes ved bruk av $n = 4$ i tabell 1, der $\zeta_1 = 0.9239$ for første filteret og $\zeta_2 = 0.3827$ for det andre.

Siden kondensatorverdiene og R er ulike fra tabell 3 til tabell 2, så kan det være lurt å rekne ut frekvensene B og f_c for de nye verdiene. Vi kan da få få en idé om det forventede resultatet ved frekvensanalysen. Isolering av f_c i likning 4 for τ_2 gir at

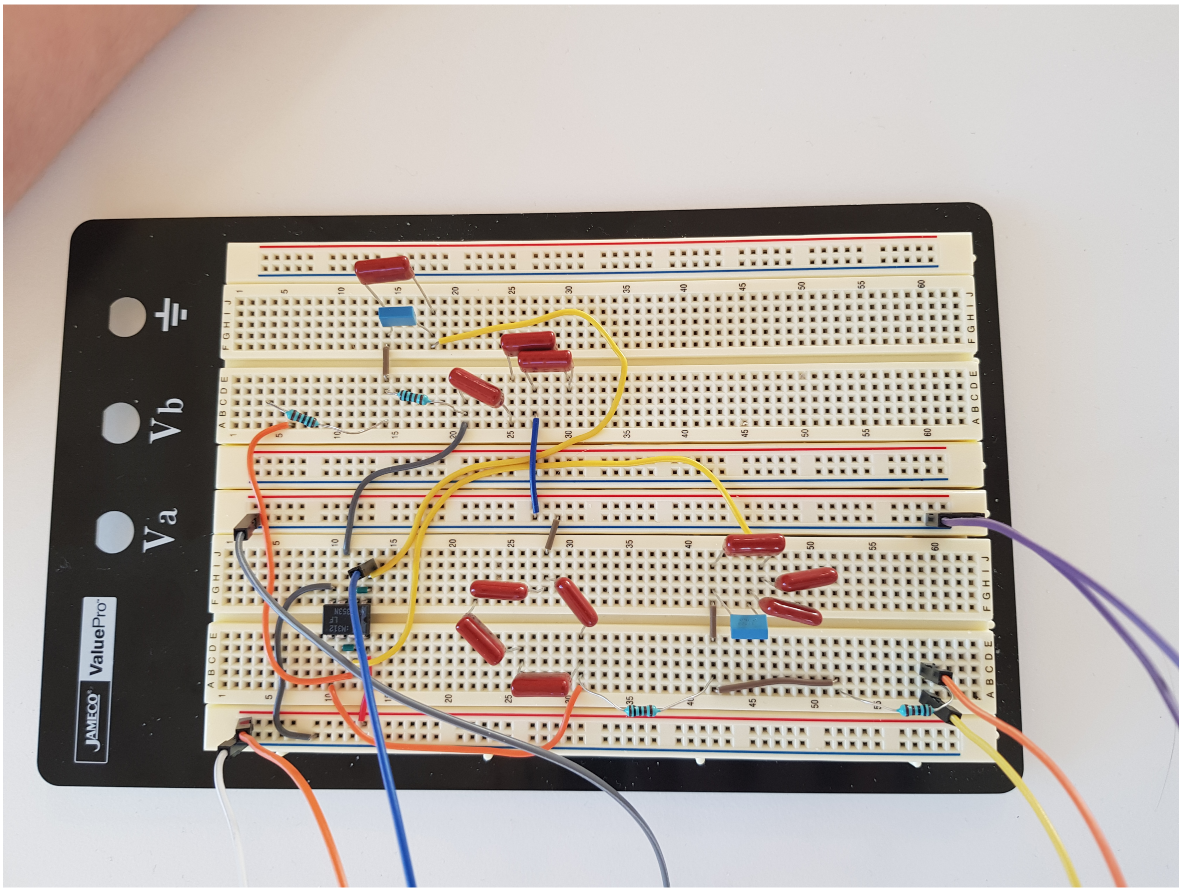
$$f_c^* = \frac{\zeta_1}{2\pi R C_{12}} = 2905.0\text{Hz}. \tag{6}$$

Merk at kondensatorer har toleranseområde på kapitansen, som varierer på komponentene, så det kan gi minimale avvik i resultatet.

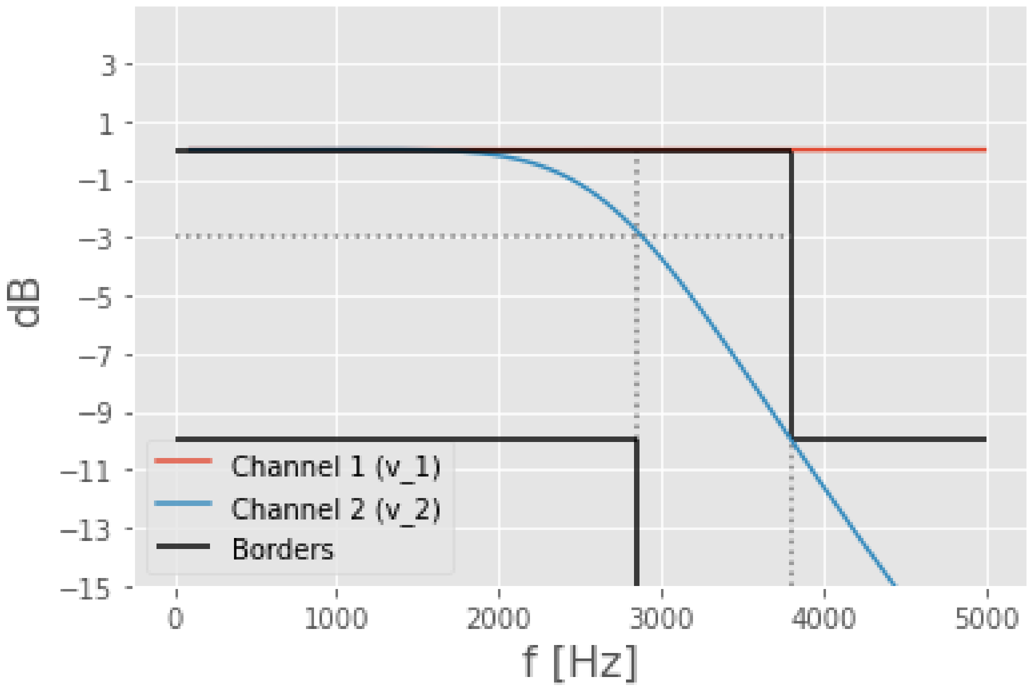
Forventer å få $A_{min} = -10$dB ved

$$B^* = \frac{f_c}{0.75} = 3873.4\text{Hz}. \tag{7}$$

Kobler opp kretsen som vist i figur 5 og sammenlikner tidligere utrekninger med figur 6.



Figur 5: Realiseringen av figur 4.



Figur 6: Frekvensspekter av figur 4 med grensene (borders) fra figur 3.

Fra figur 6 kan vi ved å observere nøye, se at amplituderesponsen til $v_2(t)$ ligger innenfor ønsket området for et Butterworth filter. Merk at der de stiplede linjene krysser hverandre gir en mindre frekvens enn der den horisontale stiplede linjen på $-3dB$ krysser $v_2(t)$. Det betyr at kravet om $f_c \geq 2.85$kHz er verifisert. For mer nøyaktige verdier, så kan det brukes markører (cursors) i oscilloskop. Verdiene for f_c, f_c^*, B og B^* er vist i figur 7.

	Name	Position	C2
1	f_c	2.85 kHz	-2.7851 dB
2	B	3.8 kHz	-9.9726 dB
3	f_c*	2.905 kHz	-3.1132 dB
4	B*	3.8734 kHz	-10.573 dB

Figur 7: Markører for f_c og B.

Verdiene for $C2$ gir at kravene satt i seksjon 1 ikke overholdes for A_{min} eller f_c, dersom det brukes f_c^* og B^*.

4 Konklusjon

For utvikling av et anti-aliasing filter ved bruk av Butterworth filter design, så kreves det nøyaktighet i komponentverdier, herunder kondensatorer og motstander.. I tillegg kan det også kreve flere lavpass filter for å oppnå ønskelig A_{min}. Flere kaskadekoblede Butterworth filter gir en brattere knekkfrekvens. Butterworth filter med Sallen-Key topologi oppnår oppførselen vi et ute etter dersom kondensatorverdiene og motstandene overholder likningene beskrevet i seksjon 2. De teoeretisk ønskede verdiene for f_c og B overholder kravene satt i seksjon 1.

Referanser

[1] ElectronicsTutorials. (Ukjent), Article
Butterworth Filter Design
Tilgjengelig ved: https://www.electronics-tutorials.ws/filter/filter$_8$*.html*
(Sist åpnet: 7. November 2021)

[2] ElectronicsTutorials (2021),
Sallen and Key Filter
Tilgjengelig ved:
https://www.electronics-tutorials.ws/filter/sallen-key-filter.html
(Sist åpnet: 7. November 2021)