$data = ([1, 2], [-1, 0], [0, -1], [-2, -1], [2, 1], [1, 0], [0, 1] [-1, -2])$

となる。各データ点の第1成分をx、第2成分をyとすると、

$E(x) = 0 \quad E(y) = 0 \quad V(x) = 1.5 \quad V(y) = 1.5, \quad Cov(x, y) = 1.0$ となる。

この時、分散共分散行列 $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$ となる。

ここで、主成分分析は

各データ点xをある直線方向uに写像した先の分散が最大になるように

uを定義する。写像先の分散は

$$((x - \bar{x})^T u)^2$$

$$= u^T (x - \bar{x})^T (x - \bar{x}) u$$

$$= \underline{u^T A u} \ \text{と表わせる。}$$

これを$|u| = 1$の元で最大化する。この時、ラグランジュの未定乗数法を用いて、

$$f(u) = u^T A u$$

$$\mathcal{L}(\lambda, u) = u^T A u - \lambda(\|u\|^2 - 1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 2Au - 2\lambda u = 0$$

$$\underline{\underline{Au = \lambda u}}$$

つまり、Aの最大の固有値をもつ固有ベクトルを求めればよい。

上記の固有ベクトルは$(1, 1)$であり、

この方向が分散最大になる。