

計算量を学ぼう！



計算量を学ぼう！

ぱうえる（けんた）

2022/12/20 @nu_zero_one

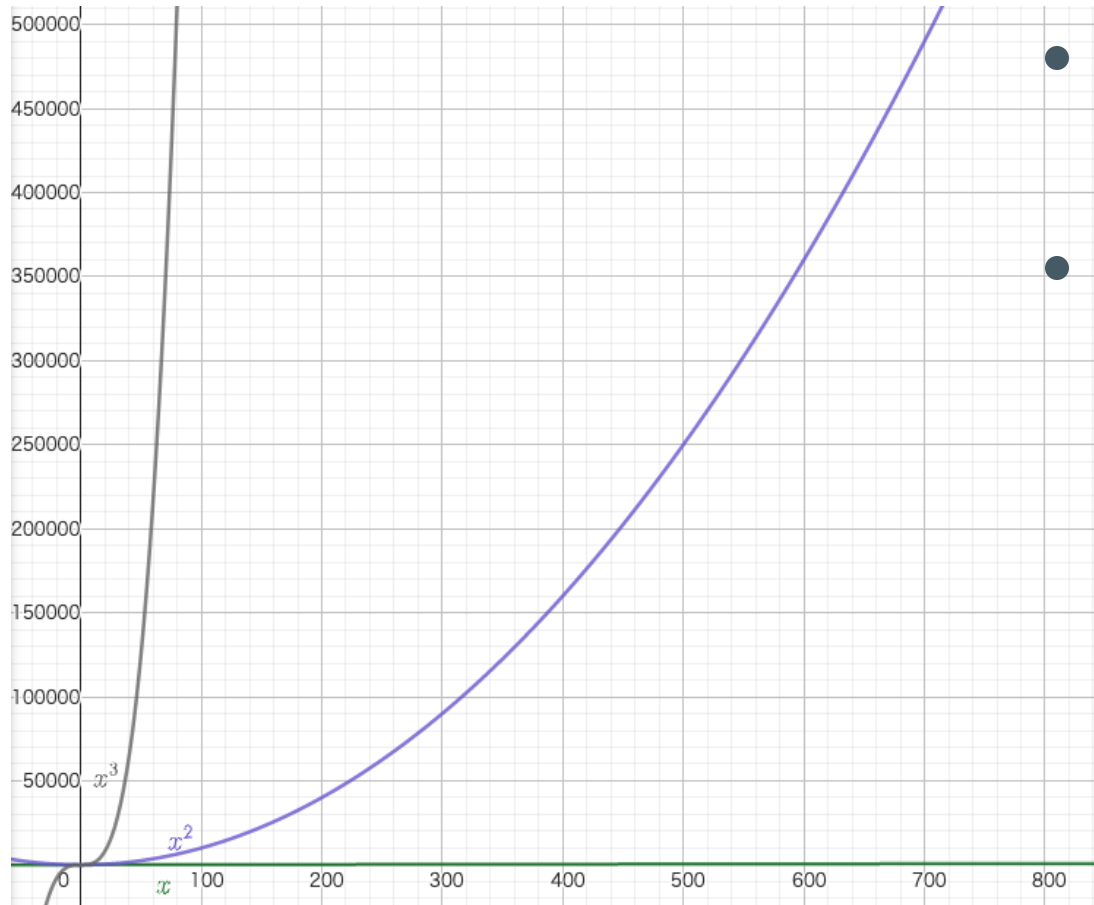
速いコードが書きたい！

でも速いコードってどうやって評価する??

- 「1,000,000個のデータに対して5秒で終了しました！」
 - データの個数が変わったらどうなる??
 - そもそもPythonで実行するかC言語で実行するかでも変わりそう

「データの大きさ」や「実行する環境」に依存しない評価方法が必要
→ 計算量の出番

オーダー記法 (1/2)



- n, n^2, n^3 では n が大きくなったとき値が大きく変化する
- 定数倍を考えないで、 n の項だけに注目すればいいのでは??

→ O (ランダウの記号) を用いる

オーダー記法 (2/2)

- 計算量は基本的にオーダー記法で書く
 1. 一番大きい項のみ残して表記する
$$c < \log n < n^c < c^n < n! \quad (c \text{ は定数})$$
 2. 定数倍は無視する

オーダー記法の例)

$$5n^3 + 4n^2 + 100n \longrightarrow O(n^3)$$

$$2^n + n^{100} + 10^9 n \longrightarrow O(2^n)$$

コードの計算量の調べ方

- n 回のループをする $\rightarrow O(n)$
- n 回のループの中で n 回のループをする（二重ループ）
 $\rightarrow O(n^2)$
- bit全探索（ n 個の要素についてある/ないの2通りを考える）
 $\rightarrow O(2^n)$
- n 個の順列を全て調べる $\rightarrow O(n!)$

ここまでの復習

このコードの計算量は？？

```
## 1~n までの数の和を求める
n = int(input())

ans = 0
for i in range(1, n+1):
    ans += i

print(ans)
```

ここまでの復習（答え）

このコードの計算量は？？

```
## 1~n までの数の和を求める
n = int(input())

ans = 0
for i in range(1, n+1):
    ans += i

print(ans)
```

→ $O(n)$ (n までのループを1回している)

計算量の使い方

- 一般的なコンピュータが1秒間に計算できる回数は約 10^8 回
- 競プロの実行時間制限は大体 1～3 秒
- 各計算量ごとの、制限時間に間に合う N

$$O(N) \quad : N \leq 10^7$$

$$O(N \log N) \quad : N \leq 10^6$$

$$O(N^2) \quad : N \leq 10^4$$

$$O(N^3) \quad : N \leq 300$$

↓ n の大きさと実際の値は次ページの表のようになります

$\log n$	n	$n \log n$	n^2	n^3	2^n	$n!$
2	5	12	25	130	30	120
3	10	33	100	1000	1024	3628800
4	15	59	225	3375	32768	—
4	20	86	400	8000	1048576	—
5	25	116	625	15625	—	—
5	30	147	900	27000	—	—
7	100	664	10000	1000000	—	—
8	300	2468	90000	27000000	—	—
10	1000	9966	1000000	—	—	—
13	10000	132877	100000000	—	—	—
16	100000	1660964	—	—	—	—
20	1000000	19931568	—	—	—	—

参考：<https://qiita.com/drken/items/872ebc3a2b5caaa4a0d0#1-3-計算量の使い方>

計算量を落とすテクニック

今回は代表的なものを3つ紹介します。

- 公式を使う

比較的単純な手法

- 累積和

数列の区間の和を高速に求めるアルゴリズム

- 二分探索

条件を満たす値があるかを高速に調べるアルゴリズム

公式を使う

先ほどの $1 \sim n$ までの数の和を求めるプログラムを高速化してみよう

```
## 1~n までの数の和を求める
n = int(input())

ans = 0
for i in range(1, n+1):
    ans += i

print(ans)
```

公式を使う

このコードは、 $1 \sim n$ の和を求めるために $O(n)$ の計算をしています
($n = 100,000,000$ で2.6秒くらい必要) →間に合わない！

```
In [6]: %%timeit
...: # 1~n までの数の和を求める
...: n = 100_000_000
...:
...: ans = 0
...: for i in range(1, n+1):
...:     ans += i
...:
```

```
2.61 s ± 3.82 ms per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 1 loop each)
```

公式を使う

等差数列の和の公式を使えば...

$$\sum_{i=1}^n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

```
## 1~n までの数の和を求める  
n = int(input())  
ans = n * (n + 1) // 2  
  
print(ans)
```

公式を使う

```
In [9]: %timeit
...: # 1~n までの数の和を求める
...: n = 100_000_000
...: ans = n * (n + 1) // 2
...:
...:
53.7 ns ± 3.87 ns per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 10,000,000 loops each)
```

なんと、53.7ナノ秒で終了！！

- 約**5億倍**の高速化（ちょっと極端な例ではあるけど）
- もちろん余裕で間に合う

累積和

あるたい焼き屋さんでは 毎日、売れた個数を記録しています。
営業開始から 7 日目までの売り上げは以下の通りでした。

1日目	2日目	3日目	4日目	5日目	6日目	7日目
20	50	30	10	30	0	40

2 日目から 5 日目までの売り上げの合計はいくらでしょうか？

$$\rightarrow 50 + 30 + 10 + 30 = 120 \text{ (個)}$$

累積和

あるたい焼き屋さんでは、 N 日間毎日売り上げを記録しています。
営業開始から i 日目の売り上げは A_i 円でした。
このとき、以下の Q 個のクエリ（質問）に答えて下さい。
 a 日目から b 日目までの売り上げの合計はいくらでしょうか？

- $1 \leq a \leq b \leq N \leq 10^5$
- $0 \leq A_i \leq 10^9$
- $1 \leq Q \leq 10^5$

累積和

各項を毎回足していくと、毎回のクエリで $A_a + A_{a+1} + \dots + A_b$ という足し算をすることになる。→最大で $O(N)$ 回
よって、 Q 個のクエリを処理すると、計算量は $O(NQ)$ ！！

→間に合わない！

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
20	50	30	10	30	0	40

累積和

そこで、 $S_k = \sum_{i=0}^k A_i$ を満たす S_i を考える。（累積和）
このとき、 $S_b - S_{a-1}$ が求める区間の和になる。

証明)

$$\begin{array}{rcl} S_b & = & A_1 + A_2 + \cdots + A_{a-1} + A_a + \cdots + A_b \\ -) S_{a-1} & = & A_1 + A_2 + \cdots + A_{a-1} \\ \hline S_b - S_{a-1} & = & A_a + \cdots + A_b \end{array}$$

累積和

つまり??

$$50 + 30 + 10 + 30 = 140 - 20 = 120$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7
A_i	—	20	50	30	10	30	0	40
S_i	0	20	70	100	110	140	140	180

累積和

累積和配列の計算方法

$$S_0 = 0$$

$$S_i = A_i + S_{i-1} \quad (1 \leq i \leq N)$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7
A_i	—	20	50	30	10	30	0	40
S_i	0	20	70	100	110	140	140	180

Diagram illustrating the calculation of cumulative sums S_i from array A_i . Pink arrows show the flow of values: $A_1=20$ is added to $S_0=0$ to get $S_1=20$; $A_2=50$ is added to $S_1=20$ to get $S_2=70$; $A_3=30$ is added to $S_2=70$ to get $S_3=100$; $A_4=10$ is added to $S_3=100$ to get $S_4=110$; $A_5=30$ is added to $S_4=110$ to get $S_5=140$; $A_6=0$ is added to $S_5=140$ to get $S_6=140$; $A_7=40$ is added to $S_6=140$ to get $S_7=180$.

累積和

累積和の計算量は？

- S を求めるのに $O(N)$: S_0 から S_N まで N 回計算する
- クエリの計算に $O(1)$
 A_a から A_b までの和は $S_b - S_{a-1}$ という引き算1回で求まる
- このクエリを Q 回繰り返す

→ $O(N + Q)$

よって $N = 10^5, Q = 10^5$ 程度なら、余裕で間に合います。

二分探索

参考

- 計算量オーダーの求め方を総整理！ ～どこからlogが出て来るか～
<https://qiita.com/drken/items/872ebc3a2b5caaa4a0d0>