計算量を学ぼう！

ぱうえる（けんた）

2022/12/20 @nu_zero_one

速いコードが書きたい！

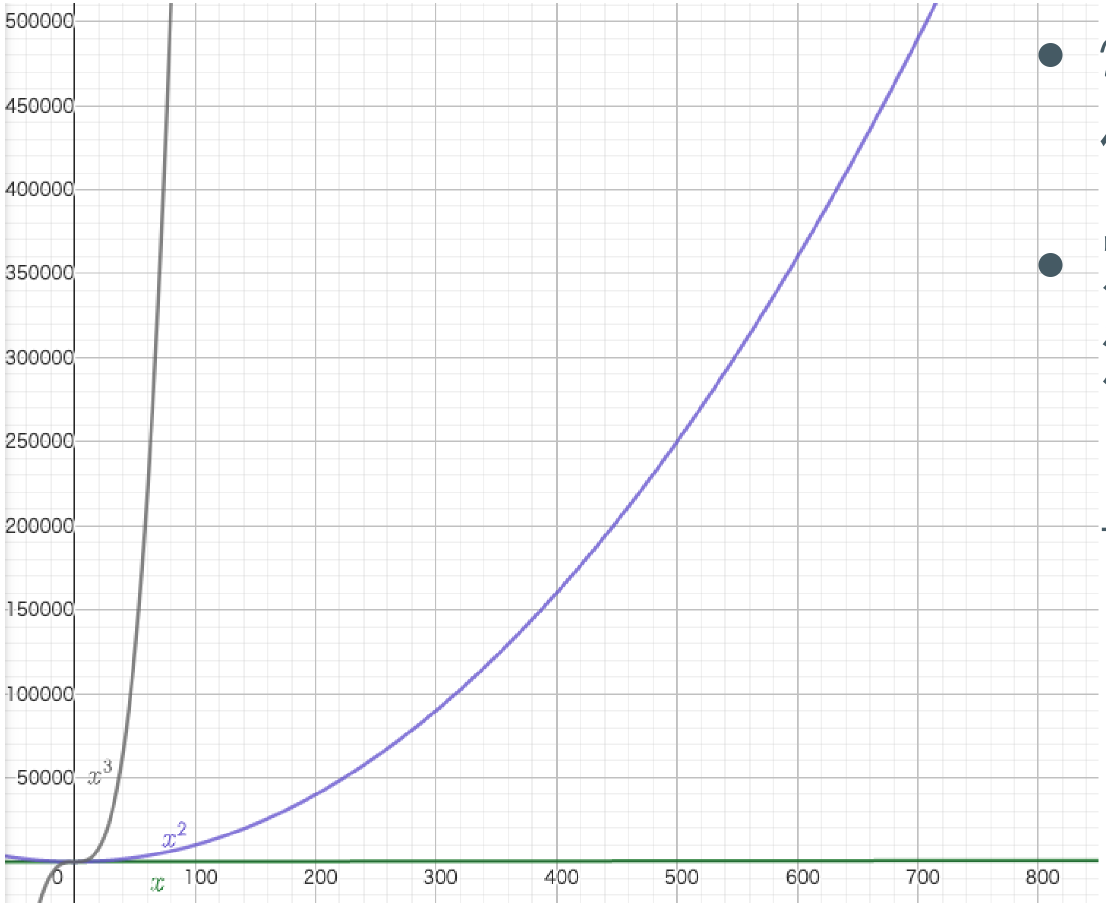
でも**速いコード**ってどうやって評価する？？

- 「$1,000,000$個のデータに対して5秒で終了しました！」
  - データの個数が変わったらどうなる？？
  - そもそもPythonで実行するかC言語で実行するかでも変わりそう

「データの大きさ」や「実行する環境」に依存しない評価方法が必要

→計算量の出番

オーダー記法 (1/2)



- n, n^2, n^3ではnが大きくなったとき値が大きく変化する
- 定数倍を考えないで、n の項だけに注目すればいいのでは？？

→ O (ランダウの記号)を用いる

オーダー記法 (2/2)

- 計算量は基本的にオーダー記法で書く
  1. 一番大きい項のみ残して表記する
     $c < \log n < n^c < c^n < n!$ （c は定数）
  2. 定数倍は無視する

オーダー記法の例）

$$5n^3 + 4n^2 + 100n \longrightarrow O(n^3)$$
$$2^n + n^{100} + 10^9 n \longrightarrow O(2^n)$$

コードの計算量の調べ方

- n 回のループをする $\rightarrow O(n)$
- n 回のループの中で n 回のループをする（二重ループ）
  $\rightarrow O(n^2)$
- bit全探索（n 個の要素について**ある/ない**の2通りを考える）
  $\rightarrow O(2^n)$
- n 個の順列を全て調べる $\rightarrow O(n!)$

ここまでの復習

このコードの計算量は？？

```
# 1~n までの数の和を求める
n = int(input())

ans = 0
for i in range(1, n+1):
    ans += i

print(ans)
```

ここまでの復習（答え）

このコードの計算量は？？

```python
# 1~n までの数の和を求める
n = int(input())

ans = 0
for i in range(1, n+1):
    ans += i

print(ans)
```

$\rightarrow O(n)$ （n までのループを1回している）

計算量の使い方

- 一般的なコンピュータが1秒間に計算できる回数は**約 $\mathbf{10^8}$ 回**
- 競プロの実行時間制限は大体 $1 \sim 3$ 秒
- 各計算量ごとの、制限時間に間に合う N

$$
\begin{aligned}
&O(N) &&: N \leqslant 10^7 \\
&O(N \log N) &&: N \leqslant 10^6 \\
&O(N^2) &&: N \leqslant 10^4 \\
&O(N^3) &&: N \leqslant 300
\end{aligned}
$$

↓ n の大きさと実際の値は次ページの表のようになります

$\log n$	n	$n \log n$	n^2	n^3	2^n	$n!$
2	**5**	12	25	130	30	120
3	**10**	33	100	1000	1024	3628800
4	**15**	59	225	3375	32768	—
4	**20**	86	400	8000	1048576	—
5	**25**	116	625	15625	—	—
5	**30**	147	900	27000	—	—
7	**100**	664	10000	1000000	—	—
8	**300**	2468	90000	27000000	—	—
10	**1000**	9966	1000000	—	—	—
13	**10000**	132877	100000000	—	—	—
16	**100000**	1660964	—	—	—	—
20	**1000000**	19931568	—	—	—	—

参考：https://qiita.com/drken/items/872ebc3a2b5caaa4a0d0#1-3-計算量の使い方

計算量を落とすテクニック

今回は代表的なものを3つ紹介します。

- **公式を使う**
  比較的単純な手法
- **累積和**
  数列の区間の和を高速に求めるアルゴリズム
- **二分探索**
  条件を満たす値があるかを高速に調べるアルゴリズム

公式を使う

先ほどの $1 \sim n$ までの数の和を求めるプログラムを高速化してみよう

```python
# 1~n までの数の和を求める
n = int(input())

ans = 0
for i in range(1, n+1):
    ans += i

print(ans)
```

公式を使う

このコードは、$1 \sim n$ の和を求めるために $O(n)$ の計算をしています（$n = 100,000,000$ で2.6秒くらい必要）→間に合わない！

```
In [6]: %%timeit
   ...: # 1~n までの数の和を求める
   ...: n = 100_000_000
   ...:
   ...: ans = 0
   ...: for i in range(1, n+1):
   ...:     ans += i
   ...:
2.61 s ± 3.82 ms per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 1 loop each)
```

公式を使う

等差数列の和の公式を使えば...

$$\sum_{i=1}^{n} = \frac{1}{2}n(n+1)$$

```
# 1~n までの数の和を求める
n = int(input())
ans = n * (n + 1) // 2

print(ans)
```

公式を使う

```
In [9]: %%timeit
   ...: # 1~n までの数の和を求める
   ...: n = 100_000_000
   ...: ans = n * (n + 1) // 2
   ...:
   ...:
53.7 ns ± 3.87 ns per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 10,000,000 loops each)
```

なんと、53.7**ナノ**秒で終了！！

→ 約**5億倍**の高速化（ちょっと極端な例ではあるけど）
→ もちろん余裕で間に合う

累積和

あるたい焼き屋さんでは 毎日、売れた個数を記録しています。
営業開始から 7 日目までの売り上げは以下の通りでした。

1日目	2日目	3日目	4日目	5日目	6日目	7日目
20	50	30	10	30	0	40

2 日目から 5 日目までの売り上げの合計はいくらでしょうか？

$\rightarrow 50 + 30 + 10 + 30 = 120$（個）

累積和

あるたい焼き屋さんでは、N 日間毎日売り上げを記録しています。
営業開始から i 日目の売り上げは A_i 円でした。
このとき、以下の Q 個のクエリ（質問）に答えて下さい。
a 日目から b 日目までの売り上げの合計はいくらでしょうか？

- $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant N \leqslant 10^5$
- $0 \leqslant A_i \leqslant 10^9$
- $1 \leqslant Q \leqslant 10^5$

累積和

各項を毎回足していくと、毎回のクエリで $A_a + A_{a+1} + \cdots + A_b$ という足し算をすることになる。→最大で $O(N)$ 回
よって、 Q 個のクエリを処理すると、計算量は $O(NQ)$ ！！
→間に合わない！

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
20	50	30	10	30	0	40

累積和

そこで、$S_k = \sum_{i=0}^{k} A_i$ を満たす S_i を考える。（**累積和**）
このとき、$S_b - S_{a-1}$ が求める区間の和になる。

証明）

$$
\begin{array}{ll}
S_b & = A_1 + A_2 + \cdots + A_{a-1} + \boxed{A_a + \cdots + A_b} \\
-)\ S_{a-1} & = A_1 + A_2 + \cdots + A_{a-1} \\
\hline
S_b - S_{a-1} & = \boxed{A_a + \cdots + A_b}
\end{array}
$$

累積和

つまり？？

$$\boxed{50} + \boxed{30} + \boxed{10} + \boxed{30} = \boxed{140} - \boxed{20} = 120$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7
A_i	$-$	20	50	30	10	30	0	40
S_i	0	20	70	100	110	140	140	180

累積和

累積和配列の計算方法

$$
\begin{aligned}
S_0 &= 0 \\
S_i &= A_i + S_{i-1} \quad (1 \leqslant i \leqslant N)
\end{aligned}
$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7
A_i	$-$	20	50	30	10	30	0	40
S_i	0	20	70	100	110	140	140	180

累積和

累積和の計算量は？

- S を求めるのに $O(N)$: S_0 から S_N まで N 回計算する
- クエリの計算に $O(1)$
  A_a から A_b までの和は $S_b - S_{a-1}$ という引き算1回で求まる
- このクエリを Q 回繰り返す

$\rightarrow O(N+Q)$

よって $N = 10^5, Q = 10^5$ 程度なら、余裕で間に合います。

二分探索

参考

- 計算量オーダーの求め方を総整理！ 〜どこからlogが出て来るか〜
  https://qiita.com/drken/items/872ebc3a2b5caaa4a0d0