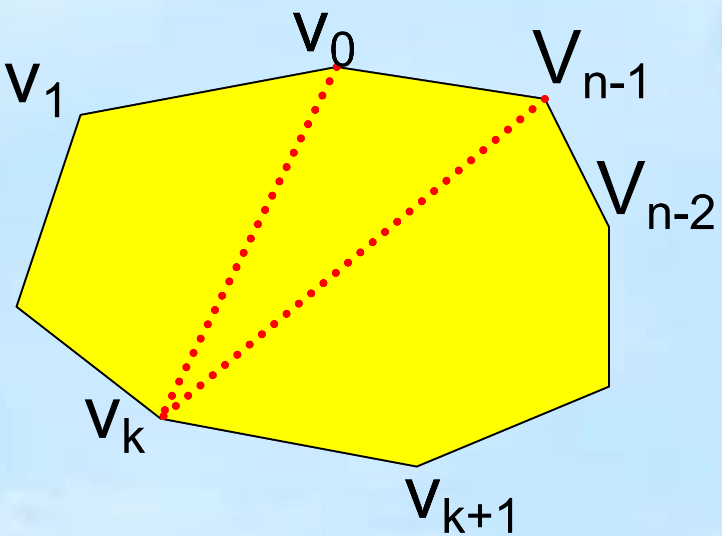
第3章 动态规划
Part 2

3.5　凸多边形最优三角剖分

凸多边形最优三角剖分

- 凸多边形：用多边形顶点的逆时针序列表示凸多边形，即**P={v_0,v_1,…,v_{n-1}}**表示具有**n**条边的凸多边形。

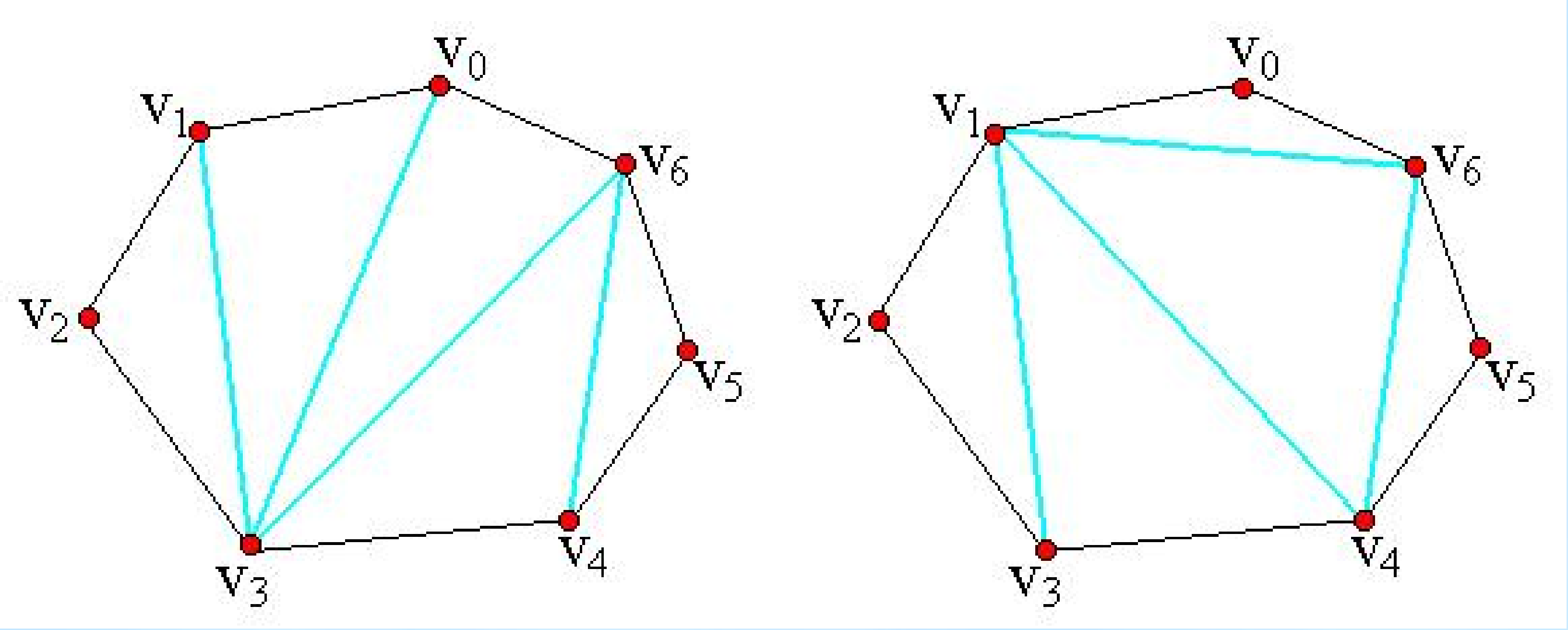
•弦：若**v_i**与**v_j**是多边形上不相邻的**2**个顶点，则线段**v_iv_j**称为多边形的一条弦。弦将多边形分割成**2**个多边形**{v_i,v_{i+1},…,v_j}**和**{v_j,v_{j+1},…v_i}**。



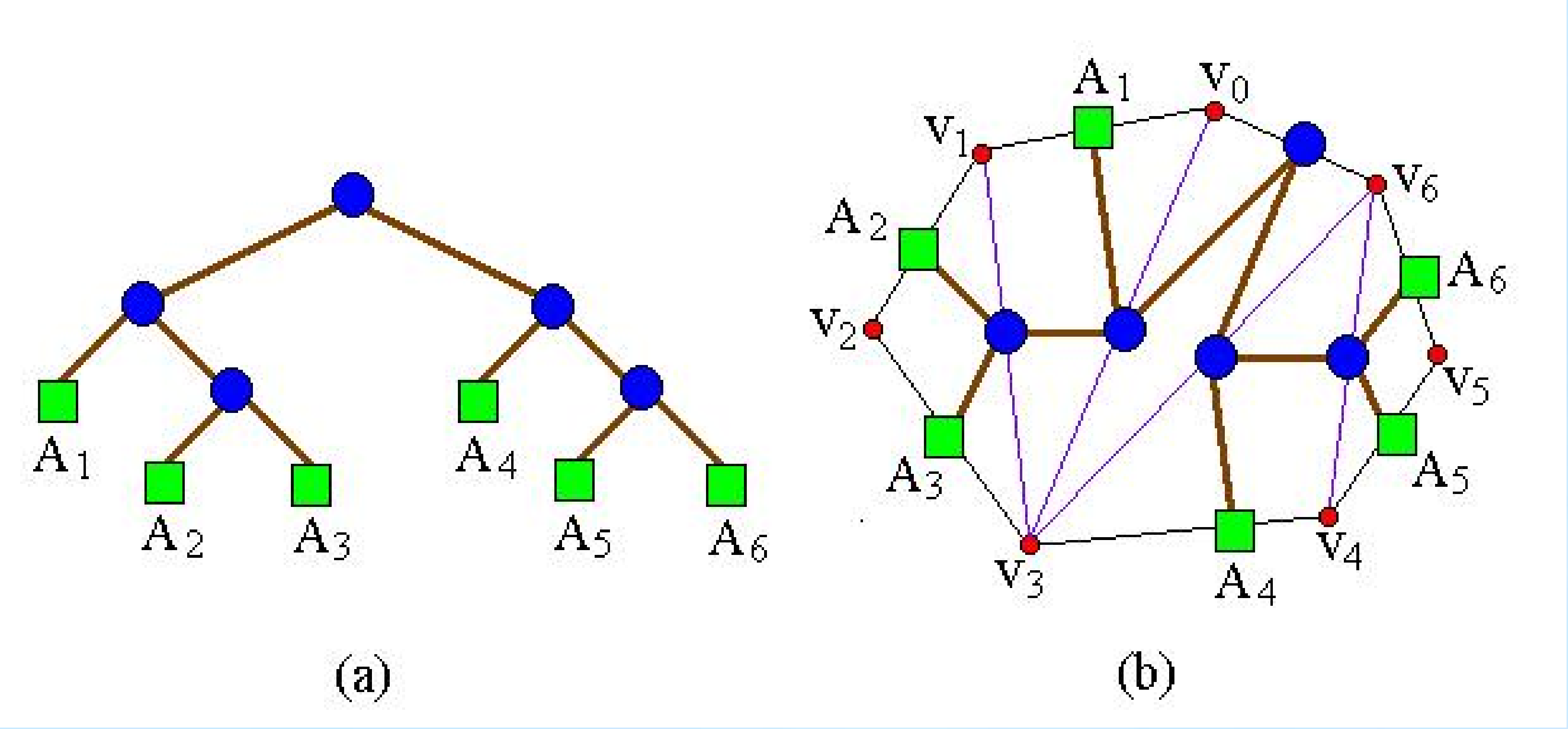
概念

- **多边形的三角剖分：**将多边形分割成互不相交的三角形的弦的集合T。
- **凸多边形最优三角剖分：**给定凸多边形P，以及定义在由多边形的边和弦组成的三角形上的权函数w。要求确定该凸多边形的三角剖分，使得该三角剖分中诸三角形上权之和为最小。

凸多边形三角剖分举例

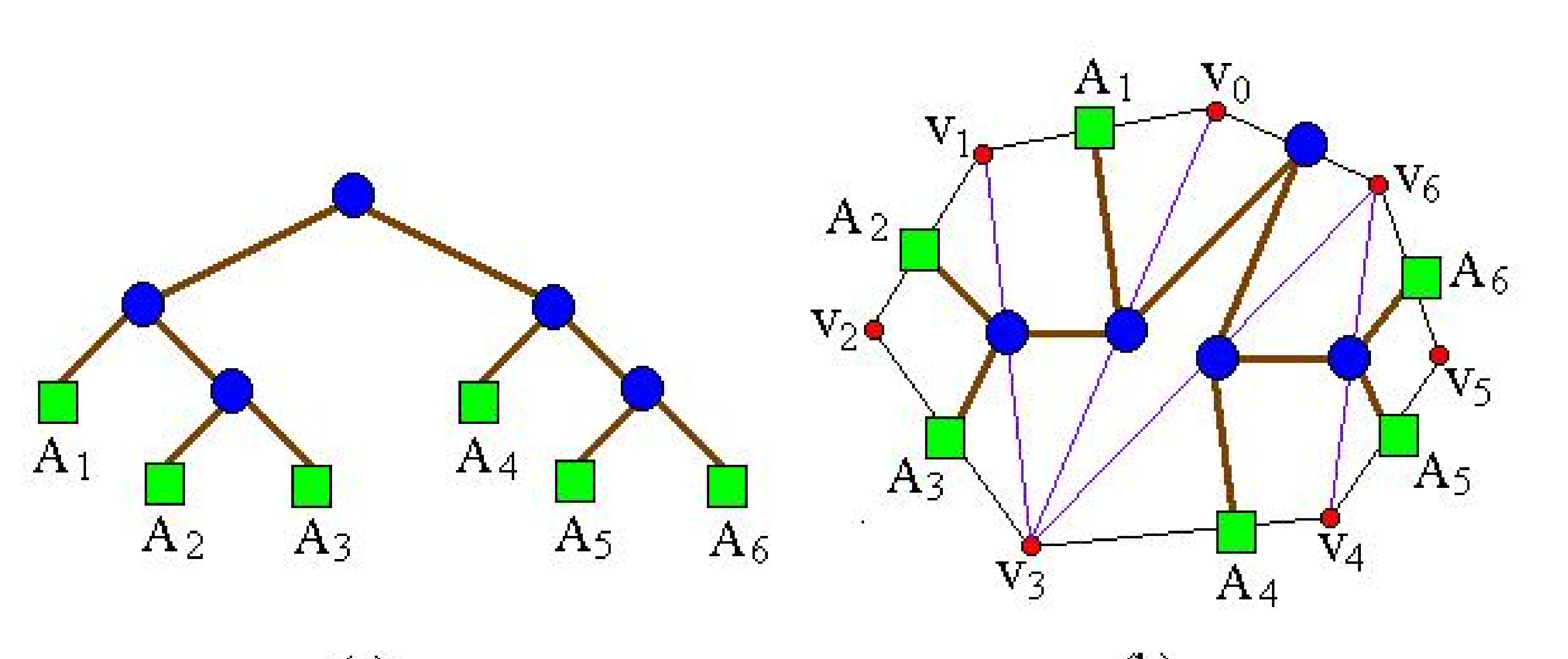


三角剖分的结构及其相关问题



•一个表达式的完全加括号方式相应于一棵完全二叉树，称为表达式的语法树。例如，完全加括号的矩阵连乘积 $((A_1(A_2A_3))(A_4(A_5A_6)))$所相应的语法树如图 (a)所示。

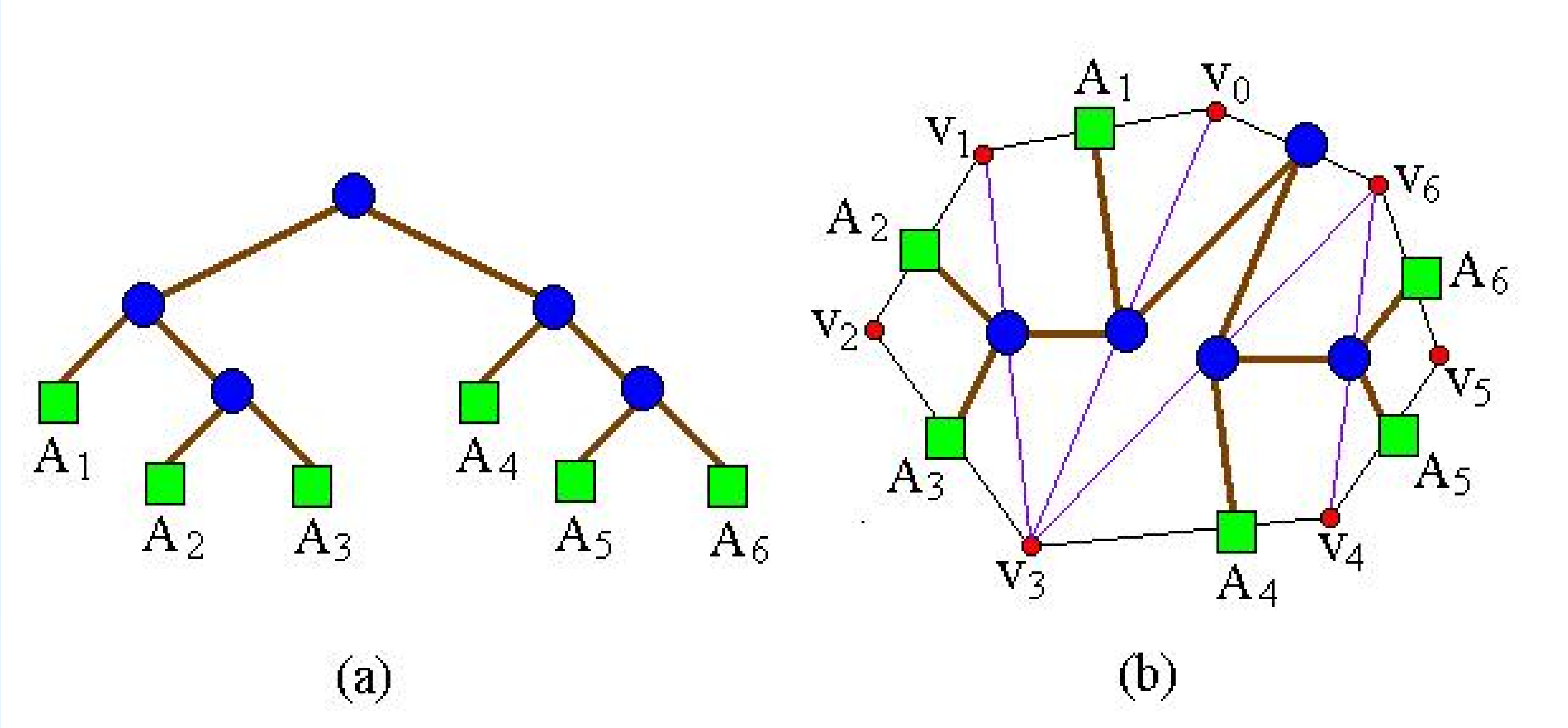
三角剖分的结构及其相关问题



(a) (b)

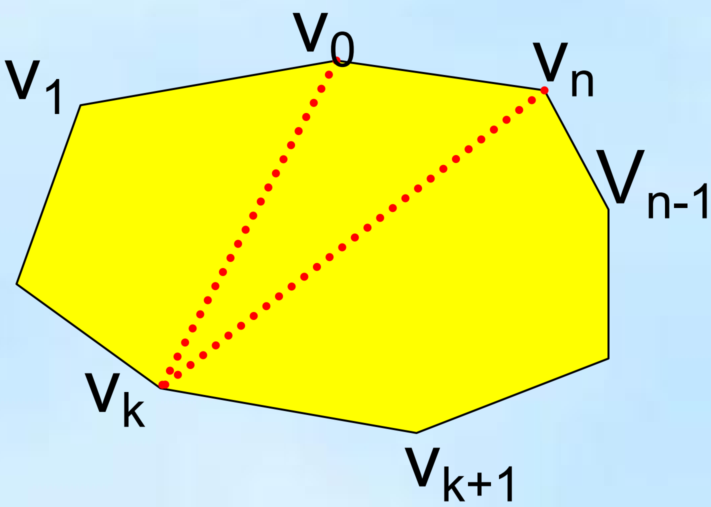
•凸多边形$\{v_0,v_1,\ldots v_{n-1}\}$的三角剖分也可以用语法树表示。例如，图 (b)中凸多边形的三角剖分可用图 (a)所示的语法树表示。

三角剖分的结构及其相关问题



- 矩阵连乘积中每个矩阵A_i对应于凸(n+1)边形中的一条边$v_{i-1}v_i$。三角剖分中的一条弦v_iv_j，$i<j$，对应于矩阵连乘积A[i+1:j]。

最优子结构性质



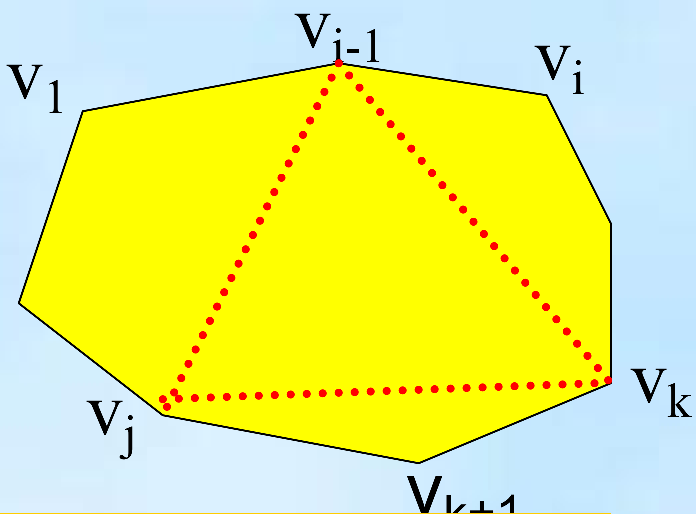
- **凸多边形的最优三角剖分问题有最优子结构性质。**

- 理由：若凸(n+1)边形$P=\{v_0,v_1,\ldots,v_n\}$的最优三角剖分T包含三角形$v_0v_kv_n$，$1\le k\le n-1$，则T的权为3个部分权的和：三角形$v_0v_kv_n$的权，子多边形$\{v_0,v_1,\ldots,v_k\}$和$\{v_k,v_{k+1},\ldots,v_n\}$的权之和。
- 可以断言，由T所确定的这2个子多边形的三角剖分也是最优的。
- 因为若有$\{v_0,v_1,\ldots,v_k\}$或$\{v_k,v_{k+1},\ldots,v_n\}$的更小权的三角剖分将导致T不是最优三角剖分的矛盾。

最优三角剖分的递归结构

- 定义t[i][j]，1≤i<j≤n为凸子多边形$\{v_{i-1},v_i,\ldots,v_j\}$的最优三角剖分所对应的权函数值，即其最优值。
- **约定：两个顶点的退化多边形$\{v_{i-1},v_i\}$具有权值0。**
- **问题转化为：计算的凸(n+1)边形P的最优权值为t[1][n]。**

递归关系



当$j-i \ge 1$时，凸子多边形$\{v_{i-1}, v_i, \ldots, v_j\}$至少有3个顶点。对$i \le k \le j-1$。

$$t[i][j] = \begin{cases} 0 & i = j \\ \min\limits_{i \le k < j} \{t[i][k] + t[k+1][j] + w(v_{i-1}v_kv_j)\} & i < j \end{cases}$$

$t[i][j]=t[i][k]+t[k+1][j]+(\Delta v_{i-1}v_kv_j$的权值$)$

k的确切位置待定，但k的所有可能位置只有j-i个，从中可选出使t[i][j]值达到最小的位置。

代码实现

```
template<class Type>
void MinWeightTriangulation(int n, Type **t, int **s) {
  for (int i=1; i <= n; i++)
    t[i][i] = 0;
  for (int r=2; r <= n; r++) {
    for (int i=1; i <= n-r+1; i++) {
      int  j = i+r-1;
      t[i][j] = t[i+1][j] + w(i-1, i, j);
      s[i][j] = i;
      for (int k=i+1; k < i+r-1; k++) {
        int  u = t[i][k] + t[k+1][j] + w(i-1, k, j);
        if (u<t[i][j]) {
          t[i][j] = u;
          s[i][j] = k;
        }
      }
    }
  }
}
```

最优三角剖分最优值计算

- 仿矩阵连乘积问题
- 复杂性：时间$O(n^3)$，空间$O(n^2)$

最优三角剖分构造：略

3.9 流水作业调度

流水作业调度

- **问题描述：**n个作业{1，2，…，n}要在由2台机器M1和M2组成的流水线上完成加工。每个作业加工的顺序都是先在M1上加工，然后在M2上加工。M1和M2加工作业i所需的时间分别为a_i和b_i。
- **流水作业调度问题：**要求确定这n个作业的最优加工顺序，使得从第一个作业在机器M1上开始加工，到最后一个作业在机器M2上加工完成所需的时间最少。

- **一般流水作业调度问题：** n个作业{1，2，…，n}要在由m台机器M1、M2、…、Mm组成的流水线上完成加工。要求确定这n个作业的最优加工顺序，使m台机器上作业所需的时间最少。

加工时间矩阵

- n个作业{1，2，…，n}，m台机器M1、M2、…、Mm，设Mi加工作业j所需的时间分别为t_{ij}。
- 加工时间矩阵：T=（t_{ij}）$_{m\times n}$。
- n个作业{1，2，…，n}，2台机器M1、M2的时间矩阵

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \end{pmatrix}$$

记为：

$$T=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

算法分析：m=2的情况

- 为叙述方便起见，以下设
- 作业集合为$J=\{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$

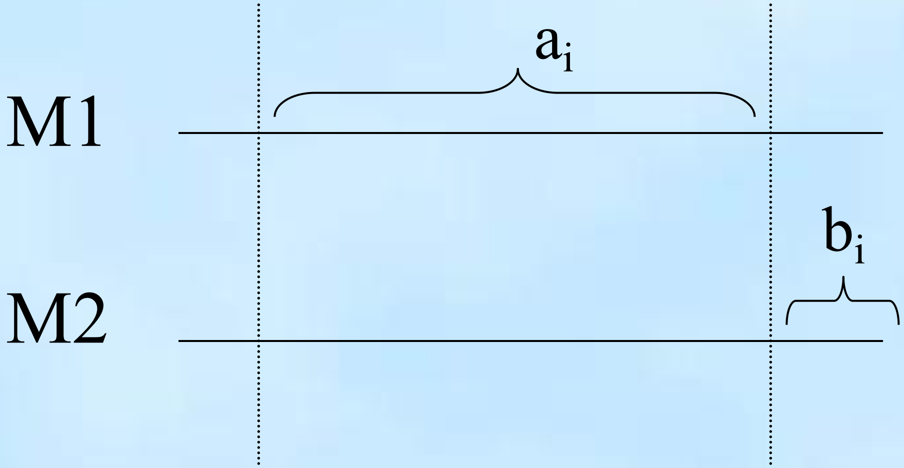
又设 $S \subseteq J$，$S_0=J$

约定：为叙述方便。有时将作业集J仍用{1，2，3，…，n}表示

分析

- 一个最优调度应使机器**M1**没有空闲时间，且机器**M2**的空闲时间最少。
- 在一般情况下，机器**M2**上会有机器空闲和作业积压**2**种情况

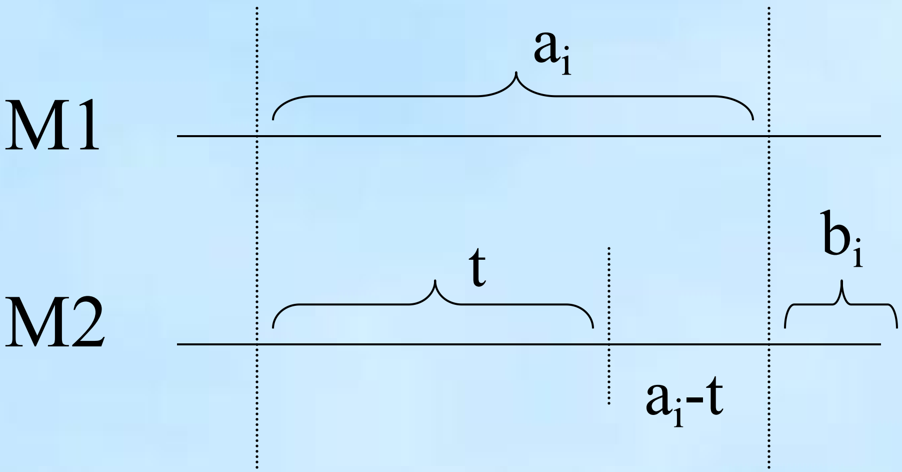
  - 情况



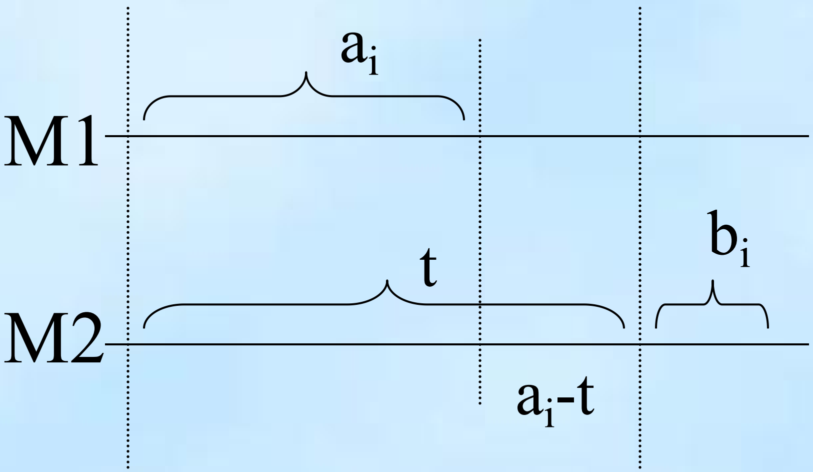
一般情况-在M1做作业i的情况

在M2上未完成前面作业时，M1上做作业i的情况

- 情况1



- 情况2



算法分析

- 一般情况
  - 设机器**M1**开始加工**S**中作业时，机器**M2**还在加工其他作业，要等时间 **t** 后才可使用,完成**S**中作业（两道工序）所需的最短时间记为**T(S,t)**。
- 流水作业调度问题变为：求最优值为**T(J,0)**。

开始时的情况

- 设π是所给n个流水作业的一个最优调度，即已排好作业调度：

  $\pi(1)$， $\pi(2)$， …，$\pi(n)$，其中$\pi(k)\in\{1,2,\ldots,n\}$，记$i=\pi(1)$

最优子结构性质

- 设π是所给n个流水作业的一个最优调度，即已排好作业调度：

  $\pi(1)$， $\pi(2)$， …， $\pi(n)$，其中$\pi(i) \in \{1,2,\ldots,n\}$
- 设机器M1开始加工J中第一个作业$J_{\pi(1)}$时，机器M2可能在等待，它所需的加工时间为 $a_{\pi(1)}+T'$，其中T’是在机器M2的等待时间为$b_{\pi(1)}$时、安排作业$J_{\pi(2)}$， …， $J_{\pi(n)}$所需的时间，这是最好的时间。
- 记$S=J-\{J_{\pi(1)}\}$，则可证明：

$$T'=T(S,b_{\pi(1)})$$ 。

$T'=T(S,b_{\pi(1)})$的证明

- 注：$T(S,b_{\pi(1)})$是完成S中所有作业的最少时间
- 证明：由T '的定义知对特定安排π，$T' \geq T(S, b_{\pi(1)})$。
- 若真$T' > T(S, b_{\pi(1)})$，设π'是作业集$S=J-\{J_{\pi(1)}\}$在机器M2的等待时间为$b_{\pi(1)}$情况下的一个最优调度。则π(1)，π' (2)，…，π' (n)是J的一个调度π'，且该调度π'所需的时间为$a_{\pi(1)}+T(S, b_{\pi(1)}) < a_{\pi(1)}+T'$。
- 这与π是J的最优调度矛盾。故$T' \leq T(S, b_{\pi(1)})$。从而$T'=T(S, b_{\pi(1)})$。
- 这就证明了流水作业调度问题具有最优子结构的性质。

结论

- $T(J,0)=a_{\pi(1)}+T(J-\{J_{\pi(1)}\},b_{\pi(1)})$

如未知作业$J_{\pi(1)}$是否应该排在第一位，则应考虑所有任务

- $T(J,0)=\min_{\{1\le i\le n\}}\{a_i+T(J-\{J_i\},b_i)\}$

递归关系

- $T(J,0)=\min_{\{1\le i\le n\}}\{a_i+T(\mathbf{J\text{-}\{J_i\}}\ ,b_i)\}$
- **需要计算：**$T(\mathbf{J\text{-}\{J_i\}}\ ,b_i)$

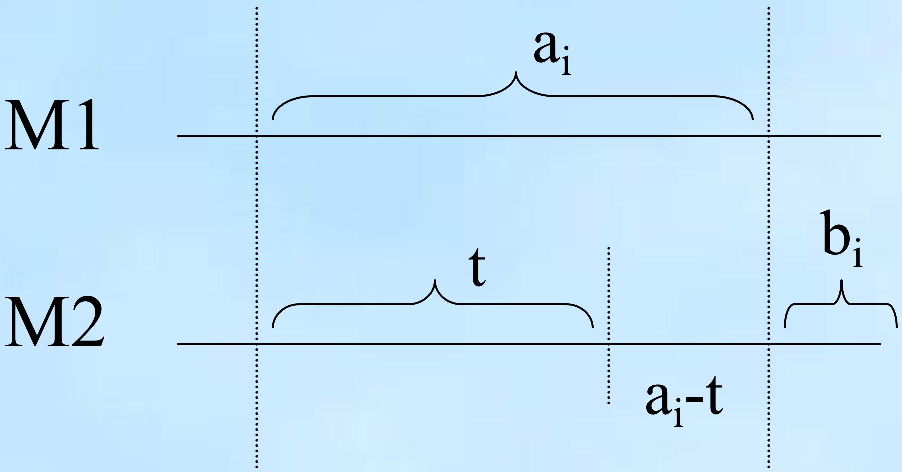
一般情况：设$S\subseteq J$，$S_0=J$，则可证

$$\mathbf{T(S,t)=\min_{J_i\in S}\{a_i+T(S\text{-}\{J_i\}\ ,b_i+\max(t-a_i,0))\}}$$

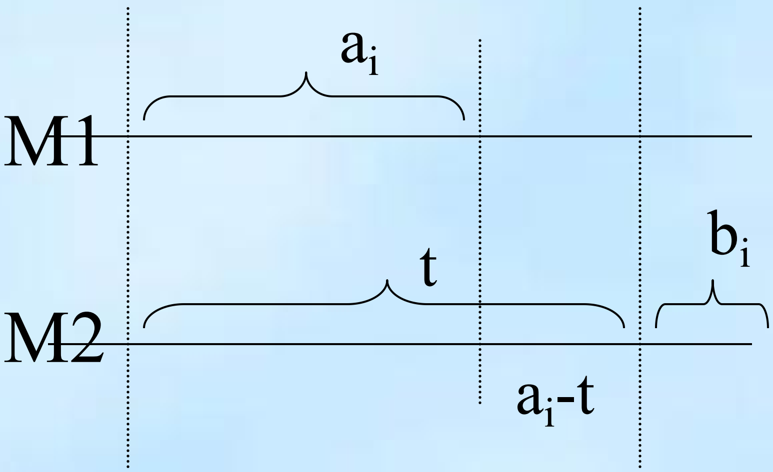
$T(S,t) = \min\{a_i + T(S-\{J_i\}, b_i + \max(t-a_i, 0))\}$

图例

- 情况1



- 情况2



Johnson不等式

对递归式的深入分析表明，算法可进一步得到简化。

设π是作业集S在机器M2的等待时间为t时的任一最优调度。若π(1)=i, π(2)=j。则由动态规划递归式可得:

$T(S,t)=a_i+T(S-\{J_i\},b_i+\max\{t-a_i,0\})=a_i+a_j+T(S-\{J_i,J_j\},t_{ij})$

其中，

$$
\begin{aligned}
t_{ij} &= b_j + \max\{b_i + \max\{t-a_i,0\} - a_j, 0\} \\
&= b_j + b_i - a_j + \max\{\max\{t-a_i,0\}, a_j - b_i\} \\
&= b_j + b_i - a_j + \max\{t-a_i, a_j - b_i, 0\} \\
&= b_j + b_i - a_j - a_i + \max\{t, a_i + a_j - b_i, a_i\}
\end{aligned}
$$

t_{ij}演算

$$t_{ij} = b_j + b_i - a_j - a_i + \max\{t, a_i + a_j - b_i, a_i\}$$

$$= \begin{cases} t + b_i + b_j - a_i - a_j & 若 max(t,a_i,a_i+a_j-b_i)=t \\ b_i + b_j - a_i & 若 max(t,a_i,a_i+a_j-b_i)= a_i \\ b_j & 若 max(t,a_i,a_i+a_j-b_i)= a_j+a_j-b_i \end{cases}$$

如果作业J_i和J_j满足$\min\{a_j, b_i\} \geq \min\{a_i, b_j\}$，则称作业$J_i$和$J_j$满足Johnson不等式。

当作业i和j满足Johnson不等式时

- 如交换作业J_i和作业J_j的加工顺序，得到作业集S的另一调度，它所需的加工时间为

$$T'(S,t)=a_i+a_j+T(S-\{J_i,J_j\},t_{ji})$$

其中，

$$t_{ji}=b_j+b_i-a_j-a_i+\max\{t,a_i+a_j-b_j,a_j\}$$

当作业J_i和J_j满足Johnson不等式时，有

$$\max\{-b_i,-a_j\}\le\max\{-b_j,-a_i\}$$

$$a_i+a_j+\max\{-b_i,-a_j\}\le a_i+a_j+\max\{-b_j,-a_i\}$$

$$\max\{a_i+a_j-b_i,a_i\}\le\max\{a_i+a_j-b_j,a_j\}$$

$$\max\{t,a_i+a_j-b_i,a_i\}\le\max\{t,a_i+a_j-b_j,a_j\}$$

当作业i和j满足Johnson不等式时

$$T\,(S,t) \le T'(S,t)$$

此时，作业J_i排在作业J_j的前面

即：当作业J_i和作业J_j不满足Johnson不等式时，

只要交换它们的加工顺序后，不增加加工时间。

流水作业调度的Johnson法则

- **结论：**对于流水作业调度问题，必存在最优调度π，使得作业$J_{\pi(i)}$和$J_{\pi(i+1)}$满足Johnson不等式。

Johnson法则：当调度π，对任何i，作业$J_{\pi(i)}$和$J_{\pi(i+1)}$满足Johnson不等式

$$\min\{b_{\pi(i)}, a_{\pi(i+1)}\} \geq \min\{b_{\pi(i+1)}, a_{\pi(i)}\}$$

称调度π满足Johnson法则

可证明：调度π满足Johnson法则，当且仅当，对任意i<j有

$$\min\{b_{\pi(i)}, a_{\pi(j)}\} \geq \min\{b_{\pi(j)}, a_{\pi(i)}\}$$

结论：所有满足Johnson法则的调度均为最优调度。

算法描述

流水作业调度问题的Johnson算法

(1)令 $N_1 = \{i \mid a_i < b_i\}, N_2 = \{i \mid a_i \geq b_i\};$

(2)将N_1中作业依a_i的升序排序；将N_2中作业依b_i的降序排序；

(3)N_1中作业接N_2中作业构成满足Johnson法则的最优调度。

算法举例

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
印刷	3	12	5	2	9	12
装订	8	10	9	6	3	1

- $N_1=\{1，3，4\}$， $N_2=\{2，5，6\}$
- **N_1按a_i升序：J_4， J_1， J_3，**
- **N_2按b_i降序：J_2， J_5， J_6**
- **合并：J_4， J_1， J_3，J_2， J_5， J_6**

算法复杂度分析

- 算法的主要计算时间花在对作业集的排序。因此，在最坏情况下算法所需的计算时间为**O(nlogn)**。所需的空间为**O(n)**。

3.10　0-1背包问题

0-1背包问题

- 假设给定n个物体和一个背包，物体i的重量为w_i，价值为v_i（i=1, 2, ……, n），背包能容纳的物体重量为c，要从这n个物体中选出若干件放入背包，使得放入物体的总重量小于等于c，而总价值达到最大
- 如果用$x_i=1$表示将第i件物体放入背包，用$x_i=0$表示未放入，则问题变为选择一组x_i（i=0, 1）使得

$$w_x = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq c, \quad v_x = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

，并且达到最大

0-1背包问题的数学表示

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le C \\ x_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le n \end{cases}$$

- **0-1背包问题是一个特殊的整数规划问题**

0-1背包问题的最优子结构性质

- 设 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ 是所给0-1背包问题的一个最优解，满足：

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le C \\ x_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le n \end{cases}$$

- 则 $(y_2, \ldots, y_n)$ 是下面相应子问题的一个最优解：

$$\max \sum_{i=2}^{n} v_i x_i$$

为什么？

$$\begin{cases} \sum_{i=2}^{n} w_i x_i \le c - w_1 y_1 \\ x_i \in \{0, 1\}, \quad 2 \le i \le n \end{cases}$$

递归关系

- **设所给0-1背包问题的子问题**

$$\max \sum_{k=i}^{n} v_k x_k \qquad \begin{cases} \sum_{k=i}^{n} w_k x_k \leq j \\ x_k \in \{0,1\}, i \leq k \leq n \end{cases}$$

的最优值为m(i，j)，即m(i，j)是背包容量为j，可选择物品为i，i+1，…，n时0-1背包问题的最优值。

由0-1背包问题的最优子结构性质，有计算m(i，j)的递归式：

$$m(i,j) = \begin{cases} \max\{m(i+1,j), m(i+1,j-w_i)+v_i\} & j \geq w_i \\ m(i+1,j) & 0 \leq j < w_i \end{cases}$$

$$m(n,j) = \begin{cases} v_n & j \geq w_n \\ 0 & 0 \leq j < w_n \end{cases}$$

-0-1背包问题

例：给定 n= 4 (物品种类)　c= 8 (最大容量)

物品 (weight, value) = { (1, 2), (4, 1), (2, 4), (3, 3) }

w[]={1, 4, 2, 3}, v[]={2, 1, 4, 3}

j / i	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8
i=4	0	0	3	3	3	3	3	3
i=3	0	4	4	4	7	7	7	7
i=2	0	4	4	4	7	7	7	7
i=1								9

绿色框为方法 Traceback 的回溯过程 x[]={1,0,1,1}

0-1背包问题的动态规划法

-0-1背包问题

```
void Knapsack(int v[], int w[], int c, int n, int m[][10])
{
    int jMax = min(w[n]-1,c); //背包剩余容量上限范围[0~w[n]-1]
    for(int j=0; j<=jMax;j++)
          m[n][j]=0;

    for(int j=w[n]; j<=c; j++) //限制范围[w[n]~c]
          m[n][j] = v[n];

     for(int i=n-1; i>1; i--)
    {
       jMax = min(w[i]-1,c);
       for(int j=0; j<=jMax; j++)//背包不同剩余容量j<=jMax<c
                 m[i][j] = m[i+1][j]; //没产生任何效益
```

-0-1背包问题

```
        for(int j=w[i]; j<=c; j++) //背包不同剩余容量j-wi >c
     {
       m[i][j] = max(m[i+1][j],m[i+1][j-w[i]]+v[i]);//效益值增长vi
     }
   }
   m[1][c] = m[2][c];
   if(c>=w[1])
   {
     m[1][c] = max(m[1][c],m[2][c-w[1]]+v[1]);
   }
}
```

构造最优解

- m(1, C)是最优解代价值，相应解计算如下

  If m(1, C)=m(2, C)

  Then x1=0

  Else x1=1;

- 如果x1=0, 由m(2, C)继续构造最优解；
- 如果x1=1, 由m(2, C-w1)继续构造最优解.

得到解向量

```
void traceback(int w[],int c,int n,int x[])/*得到解向量x*/
{  int i=0;
   for(i=1;i<n;i++)
      if(m[i][c]==m[i+1][c])  x[i]=0;
      else{
           x[i]=1;   c-=w[i];
      }
      x[n]=m[n][c]?1:0;
}
```

算法复杂度分析

- 从m(i，j)的递归式容易看出，程序有两次循环，一次关于i (<=n)，一次关于j (<=c)。算法需要O(nc)计算时间。
- 当背包容量c很大时，算法需要的计算时间较多。例如，当$c>2^n$时，算法需要$\Omega(n2^n)$计算时间

- 实现：0-1背包问题（1732）

旅行推销员问题--补充

- 即旅行商问题
- 问题描述：设有n个城市，已知任意两城市间之距离。现有一推销员想从某一城市出发巡回经过每一城市（且每城市只经过一次），最后又回到出发点，问如何找一条最短路径。

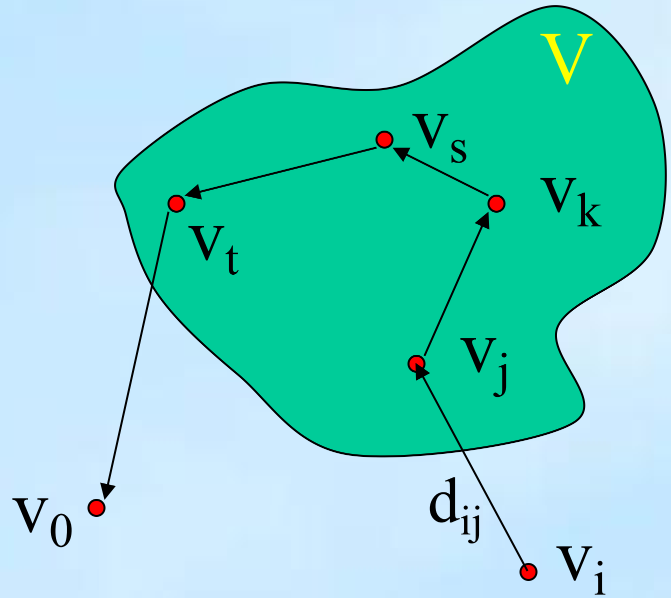
记号

- 设城市v_i与v_j城市的代价为d_{ij}。用d_{ij}=max（或∞）表示v_i与到v_j无通路。
- 用D记代价矩阵，
- $V_0=\{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，$V \subseteq V_0$

例：$D=\begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 5 \\ 7 & 9 & 0 & 5 \\ 9 & 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

算法分析

- 设$T(v_i,V)$表示从点v_i出发，经过V中点各一次，最后返回到起点v_0的最短路径长。



- 则 $$T(v_i,V)=\min_{v_j\in V}\{d_{ij}+T(v_j,V\setminus\{v_j\})\}$$

旅行推销员问题求法

- 要求：$T(v_0, \{v_1, v_2, \ldots, v_n\})$

利用：

$$T(v_0,V)=\min_{v_j,\in V}\{d_{ij} + T(v_j,V\setminus\{v_i\}\}$$

可采用自顶向下记忆式求解方法，用数组pos记录商人的走向。

伪代码

```
Function  T(k:integer;V:set of 1..n):real;
Var a,b:real;   i,j:integer;
      next[1..n,set of [1..n]]:integr;
Begin  if (V=[]) then a:=d[i,0]
         else  begin  a:=inf;
                  for i:=1 to n do
                    if (i in  V) then  do
                    begin
                      b:=d[k,I]+T(i,V\{i}));
                      if a>b then
                      begin   a:=b; next[k,V]:=i;  end;
                    end;
               end;
         return  a;
End;
```

Pos的确定

```
Procedure  route;
Begin  V:=[1..n];
         pos[0]:=0;  i:=0;
         while (V<>[]) do
         begin
            V:=V\[pos[i]];
            i:=i+1;
            pos[i]:=next[pos[i-1],V];
          end;
End;
```

复杂性

- **对i, 确定T(i,V)有多大?**
- **第1层 T(0,V)** **1个**
- **第2层 T(i,V\{i})** nC_{n-1}^{n-1} 个
- **第3层 T(i,V\{i,j})** nC_{n-1}^{n-2} 个
- **第k层 T(i,V\{i,j})** nC_{n-1}^{n-k+1} 个

- **总数=1+n2^{n-1}**

作业

1. 上机题 （1）**编程实现最长公共子序列问题（1612）**
2. **书面：（1）**分析题3-4（3维0-1背包），p.83, 3-10,3-13

- （2）作业调度：如下表，有7个作业，进行印刷余与装订。用流水作业调度问题的Johnson算法进行求解最少完成时间。

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
印刷	3	7	8	4	9	6
装订	8	5	9	6	3	7

- （3）根据所给条件求0-1背包问题，要求写出完整求解过程（自底向上）。

$$\begin{cases} F=\max\ \{3x_1 + 5x_2 + 4x\ \} \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le\ 10 \\ x_i \in \{0, 1\},\quad 1\le i\le 3 \end{cases}$$

补充：

- 最少钱币问题：设有n 种不同面值的硬币，各硬币的面值存于数组T［1:n］中。现要用这些面值的硬币来找钱。可以使用的各种面值的硬币个数存于数组c[1:n]中。对任意钱数m，用最少硬币找钱m的方法。请分析并列出动态规划方程。
- 多重幂问题：设给定n个变量$x_1,x_2,\ldots,x_n$。将这些变量依序作底和各层幂，可得n重幂如下

$$x_1^{x_2^{x_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}}}$$

- 这里将上述n重幂看作是不确定的，当在其中加入适当的括号后，才能成为一个确定的n重幂。不同的加括号方式导致不同的n重幂。例如，当n=4时，全部4重幂有5个。
- 对n个变量计算出有多少个不同的n重幂。