# 云某人的string

```
云某人的string
  基础概念
     border
     周期和循环节
     border 性质
     border 树
     广义border
     失配指针
  字符串Hash
     概念
     多项式取模哈希
        多项式 Hash
        多项式取模 Hash (模哈)
        Hash 模数
          快速求子串 hash
        回文串hash性质
        code
  KMP
     模板
     题目
        串合并去重
        反复删除子串
        求最长真周期
        求不重叠border数目
  trie
     模板
     题目
        字符串子串插入
  ac自动机
     模板
     题目
        子串删除问题
        模式串出现次数
        acam dp
           P3041 [USACO12JAN] Video Game G
           P4052 [JSOI2007] 文本生成器
        模式串互相匹配
```

# 基础概念

## border

如果字符串 S 的同长度的前后缀完全相同,则称此前后缀为一个 Border,也可以指这个 Border 的长度

### 周期和循环节

如果一个字符串 Z 在 S 中循环出现

- 如果可能不完整出现,则为循环周期
- 如果完整出现,则为循环节

### border 性质

**周期定理:** 若 p, q 为 S 的周期,则 gcd(p,q) 也为 S 的周期。

等差数列: 一个串的 border 数量是 (n) 个,但他们组成了  $O(\log n)$  个等差数列

## border 树

i 的父亲为  $nxt_i$  构成的一棵树 (包括 0, 0 为根节点)

#### 性质:

- 每个前缀  $pre_i$  的所有 border 为节点 i 到根的链
- x 的子树有长度为 x 的 border
- 求两个前缀的公共 border 等价于求 lca

### 广义border

对于字典 D 和串 S ,相等长度的 S 后缀和任意一个字典串 T 的前缀称为一个border

### 失配指针

类似 KMP的border,任意节点的 border长度减一,一点是父节点的border。银川可以通过遍历父节点的失配指针链求解。

因此在求失配指针的时候,一定要按长度从小到大求,即bfs

复杂度线性,用类似势能分析来求。

# 字符串Hash

# 概念

哈希:一种单射函数,可以将**万物**映射为一个整数值。

字符串哈希: 将一个字符串映射为一个整数值的方法,通常用来比较两个字符串是否相等

#### 性质:

• 必要性: 若字符串 S = T, 则 H(S) = H(T)

• 非充分性: 若H(S) = H(T), **不一定**S = T(可以实现, 但不要求)

**Hash检测:** 通过检测 H(S) 和 H(T) 是否相等,来判断 S 和 T 是否相等的方法。

**Hash冲突:** H(S)=H(T) 时,但  $S\neq T$ ,则称发生了Hash冲突

Hash 检测时 Hash 冲突的概率是衡量 Hash 算法好坏的重要指标

比如冲突概率  $< 10^{-4}$ 

### 多项式取模哈希

#### 多项式 Hash

将字符串看作某个进制 (Base) 下的数字串(类似直接 stoi(), 只是进制不同)

$$H(S) = \sum s_i \times Base^{1+n-i} = \mathbf{H}(\mathbf{S[1,|S|-1]}) \times \mathbf{Base} + \mathbf{S[|H|]} = S_1 \times Bash^{n-1} + S_2 \times Base^{n-2} + \cdots + S_n \times Base^0$$

优点: 字符串和 Hash 值——对应,不会产生Hash冲突,且利用率高

缺点: 数字范围过大,难以用原始数据存储和比较

### 多项式取模 Hash (模哈)

为了解决多项式 Hash 值域过大的问题,在效率和冲突率中的折中。

将 Hash 值对一个较大的质数取模

$$H'(S) = H(S)\% mod$$

优点: 使得Hash值可以用 uint / ulong 存储和比较

缺点: 小概率 Hash 冲突

因为当检验次数  $\geq \sqrt{mod}$ ,有较大概率发生错误。

为了保证冲突率低,模哈使用的 mod 最好超过 Hash 检测次数的平方

### Hash 模数

优秀的 Hash 模数首先应满足: 足够大

**自然溢出:** 使用 ULL 保存Hash值,溢出 ULL,等同于  $\%2^{64}$ (很容易卡)

优秀的模数还一个是一个 质数

**质数单模**: 选取**一个** $10^9 \sim 10^{10}$  的大质数,但是有 **广为人知** 的方法构造冲突。

如果在int内更多, 会更有优势 (在32位计算机上)

双模: 进行多次不同质数的单模哈希, 冲突概率为各次单模的概率乘积

在不泄露模数的情况下,没有已知方法可以构造冲突

#### 快速求子串 hash

$$H(S) = (S_l \times Bash^{r-l} + S_{l+1} + 1 \times Base^{r-l-1} + \dots + S_r)\%mod$$
  
 $\Leftrightarrow F(i) = H(prefix[i])$ 

$$F(l-1) = (S_1 \times Bash^{l-2} + S_2 \times Base^{l-3} + \dots + S_{l-1})\%mod$$
  
 $F(r) = (S_1 \times Bash^{r-1} + S_2 \times Base^{r-2} + \dots + S_r)\%mod$ 

$$\therefore H(S[l,r]) = F(r) - F(l-1) imes Base^{r-l+1}$$

### 回文串hash性质

对于回文串,正向Hash和反向Hash值是一样的

```
const int base = 26;
PII mod = {1000000321,1000000711};// 模数,随便塞两个素数也行
string st;// 哈希字符串
vector<PII> s(N);// 前缀和
void init(string &st,vector<PII> &s)
    int L = st.size();
    for(int i=1;i<=L;++i)</pre>
        s[i].X = (s[i-1].X * base) % mod.X;
        s[i].X = (s[i].X + st[i]-'a') mod.X;
        s[i].Y = (s[i-1].Y * base) % mod.Y;
        s[i].Y = (s[i].Y + st[i]-'a')%mod.X;
    }
}
PII query(int 1,int r)
    PII res = \{0,0\};
    res.X = (s[r].X - s[1-1].X*qpow(base,r-1+1,mod.X));
    res.Y = (s[r].Y - s[1-1].Y*qpow(base,r-1+1,mod.Y));
    return res;
}
```

### **KMP**

# 模板

求 border + kmp查找

```
// 从 2 开始
string st;// 模式串
string s;// 查找串
int nxt[N];
void get_next(string &st)// 求border
    for(int i=2;i<=st.size();++i)</pre>
    {
        nxt[i] = nxt[i-1];
        while(nxt[i] && st[nxt[i]+1] != st[i]) nxt[i] = nxt[nxt[i]];
        nxt[i] += st[nxt[i]+1] == st[i];
    }
}
int kmp(int 1, int r, string& s)// 求第一个匹配的位置
{
    for(int i=1,j=0;i<=r;++i)
    {
        while(j>0 \&\& st[j+1] != s[i]) j = nxt[j];
        j += (st[j+1] == s[i]);
```

### 题目

#### 串合并去重

需要合并 a 和 b, 并去除两者间公共部分。

只需要对 b 新建border数组,然后用 a 最后长度等于 b 的部分进行匹配,匹配的最大长度及公共部分对于 n 个串首尾相接

```
int n;
int nxt[N];
string s0,st;
void func(void)
   cin >> n;
   cin >> s0;
   for(int i=2;i<=n;++i)</pre>
   {
       cin >> st;
       st = '_' + st;
       for(int j=2;j<st.size();++j)</pre>
           nxt[j] = nxt[j-1];
           nxt[j] += (st[j] == st[nxt[j]+1]);
       }
       int p = 0;
       int be = (s0.size() >= st.size()-1 ? s0.size()-st.size()+1 : 0);
       for(int j=be;j<s0.size();++j)</pre>
           while(p>0 && st[p+1] != s0[j]) p = nxt[p];
           if(st[p+1] == s0[j]) p ++;
       for(int j=p+1; j < st.size(); ++j) s0 += st[j];
   }
```

```
cout << s0 << '\n';
}</pre>
```

#### 反复删除子串

每次删除第一次出现的要求子串

存储各个位置匹配的最大长度,匹配满后跳跃到对应位置可直接从border中匹配

string.erase()貌似很慢,但是好像都不会tle,为防万一可以用栈存储。

```
void func(void)
{
   string s,t;
   cin >> s >> t;
   int ls = s.size(), lt = t.size();
   t = '_' + t;
   vector<int> nxt(lt+1),p(ls+1);
   for(int i=2;i<=lt;++i)</pre>
   {
       nxt[i] = nxt[i-1];
       nxt[i] += (t[i] == t[nxt[i]+1]);
   for(int i=0,j=0;i<s.size();++i)</pre>
       while(j>0 && t[j+1] != s[i]) j = nxt[j];
       if(t[j+1] == s[i]) j ++;
       p[i] = j;
       if(j == 1t)
          j = (i >= lt ? p[i-lt] : 0);
          i -= lt;
          s.erase(i+1,lt);
       if(i \ge 0) p[i] = j;
   }
   cout << s << '\n';
}
```

#### 求最长真周期

根据性质:周期 =|S|-border 最长**真**周期则用最短 broder,用dfs传递最短border即可。

```
> 这道题求最长真周期和
int n,nxt[N];
string st;
vector<int> v[N];
int ans;

void dfs(int p,int t)
{
    if(!t) t = nxt[p];
    ans += (t ? p-t : 0);
```

```
for(auto &i : v[p])
   {
      dfs(i,t);
   }
}
void func(void)
   cin >> n >> st;
   st = '_' + st;
   v[0].push_back(1);
   for(int i=2;i<=n;++i)</pre>
      nxt[i] = nxt[i-1];
      nxt[i] += (st[i] == st[nxt[i]+1]);
      v[nxt[i]].push_back(i);
   dfs(0,nxt[0]);
   cout << ans << '\n';</pre>
```

### 求不重叠border数目

求各个前缀长度  $\leq S/2$  的border数目

用dp存储各个串的border数目,每次将前方  $T \leq S/2$  的dp加入答案

```
int n,ans;
string st;
int nxt[N],dp[N];
void func(void)
   cin >> st;
   n = st.size(), ans = 1;
   st = '_' + st;
   memset(dp,0,sizeof dp);
   for(int i=2;i<=n;++i)
      nxt[i] = nxt[i-1];
      nxt[i] += (st[i] == st[nxt[i]+1]);
      if(nxt[i]) dp[i] = dp[nxt[i]] + 1;
      // cout << i << ' ' << dp[i] << '\n';
   for(int i=n;i>=1;--i)
      int p = nxt[i];
      vector<int> tmp;
      while(p*2 > i)
          tmp.push_back(p);
          p = nxt[p];
      }
```

### trie

## 模板

```
int idx,nxt[N],ext[N];
void insert(string &st,int id)
    int p = 0;
    for(int i=0;i<st.size();++i)</pre>
    {
        int c = st[i]-'a';
        if(!nxt[p][c]) nxt[p][c] = ++ idx;
        p = nxt[p][c];
    ext[p] = id;
}
bool find(string &st)
    int p = 0;
    for(int i=0;i<st.size();++i)</pre>
        int c = st[i]-'a';
        if(!nxt[p][c]) return false;
        p = nxt[p][c];
   return ext[p];
}
```

# 题目

### 字符串子串插入

需要插入反复插入一个字符串的子串或者部分,每次不能新建整个串,而是从上次插入地方继续加入节点

# ac自动机

### 模板

trie树+fail (失配) 指针 每个串保存trie树中最长相同前缀,这样失配的时候可以直接跳转匹配。

```
int n,idx;
int nxt[N][26],fail[N];
bitset<N> ext;
// trie
void insert(string &st,int id)
    int p = 0;
    for(int i=0;i<st.size();++i)</pre>
        int c = st[i] - 'a';
        if(!nxt[p][c]) nxt[p][c] = ++ idx;
        p = nxt[p][c];
    }
    ext[p] = id;
}
// acam
void build_acam(void)
    queue<int> q;
    for(int i=0;i<D;++i)
        if(nxt[0][i]) q.push(nxt[0][i]);
    while(q.size())
    {
        int p = q.front(); q.pop();
        for(int i=0; i<26;++i)
            if(!nxt[p][i]) nxt[p][i] = nxt[fail[p]][i];
            else
            {
                int ps = nxt[p][i]; q.push(ps);
                fail[ps] = nxt[fail[p]][i];
            }
        }
    }
```

```
void query_acam(string &st)
{
    for(int i=0,p=0;i<st.size();++i)
    {
        int c = st[i]-'a';
        // 因为trie树的节点被重构了,所以可以直接跑
        p = nxt[p][c];
        // do...
    }
}
</pre>
```

### 题目

#### 子串删除问题

给定一个字符串 S 和一个字典,反复删除 S 在字典出现的第一个模式串

和前面那道kmp一样,只不过这题需要删除所有模式串的结果。

解法和那题差不多,只不过需要存储匹配的自动机节点,而非border串长度(其实本质是相同的)这里没有用erase,而是用了栈,刚好两道题可以互相对应 反复删除子串

```
string s0;
int n,idx,tmp[N];
int nxt[N][26],fail[N];
int ext[N];
void insert(string &st,int L)
{
    int p = 0;
    for(int i=0;i<st.size();++i)</pre>
    {
        int c = st[i]-'a';
        if(!nxt[p][c]) nxt[p][c] = ++ idx;
        p = nxt[p][c];
    ext[p] = L;
}
void build_acam(void)
{
    queue<int> q;
    q.push(0);
    while(q.size())
    {
        int p = q.front(); q.pop();
        for(int i=0; i<26;++i)
            if(!nxt[p][i]) nxt[p][i] = nxt[fail[p]][i];
            else
            {
                int ps = nxt[p][i];
                fail[ps] = fail[p];
```

```
while(fail[ps] && !nxt[fail[ps]][i]) fail[ps] =
fail[fail[ps]];
                if(p && nxt[fail[ps]][i]) fail[ps] = nxt[fail[ps]][i];
                q.push(ps);
            }
        }
   }
}
void func(void)
    cin >> s0 >> n;
    string st;
    for(int i=1;i<=n;++i)</pre>
        cin >> st;
        insert(st,st.size());
    vector<pair<char,int>> ans;
    build_acam();
    int p = 0;
    for(int i=0;i<s0.size();++i)</pre>
    {
        int c = s0[i]-'a';
        p = nxt[p][c];
        ans.push_back({s0[i],0});
        if(ext[p])
            for(int j=ext[p];j>0;--j) ans.pop_back();
            p = (ans.size() ? (ans.back()).Y : 0);
        if(ans.size()) ans.back().Y = p;
    for(auto &i : ans) cout << i.X;</pre>
}
```

#### 模式串出现次数

统计模式串在字典中的出现次数

求fail树上该节点的子树大小,其实也和kmp求出现次数一样。

```
int n,idx;
int nxt[N][26],fail[N];
int cnt[N],mp[N];
vector<int> ft[N];

void insert(string &st,int id)
{
   int p = 0;
   for(int i=0;i<st.size();++i)
   {
     int c = st[i]-'a';
}</pre>
```

```
if(!nxt[p][c]) nxt[p][c] = ++ idx;
        p = nxt[p][c];
        cnt[p] ++;
    }
    mp[id] = p;
}
void build_acam(void)
    queue<int> q; q.push(0);
    while(q.size())
    {
        int lp = q.front(); q.pop();
        for(int i=0; i<26;++i)
        {
            if(!nxt[lp][i]) nxt[lp][i] = nxt[fail[lp]][i];
            else
            {
                int p = nxt[lp][i];
                fail[p] = fail[lp];
                while(fail[p] && !nxt[fail[p]][i]) fail[p] = fail[fail[p]];
                if(lp && nxt[fail[p]][i]) fail[p] = nxt[fail[p]][i];
                ft[fail[p]].push_back(p);
                q.push(p);
            }
        }
    }
}
void dfs(int p)
{
    for(auto &i : ft[p])
        dfs(i);
        cnt[p] += cnt[i];
    }
}
void func(void)
{
    cin >> n;
    string st;
    for(int i=1;i<=n;++i)</pre>
        cin >> st;
        insert(st,i);
    build_acam();
    dfs(0);
    for(int i=1;i<=n;++i) cout << cnt[mp[i]] << '\n';</pre>
}
```

#### acam dp

#### P3041 [USACO12JAN] Video Game G

Bessie 在玩一款游戏,该游戏只有三个技能键  $\mathbf{A}$  ,  $\mathbf{B}$  ,  $\mathbf{C}$  可用,但这些键可用形成 n 种特定的组合技。第 i 个组合技用一个字符串  $s_i$  表示。

Bessie 会输入一个长度为 k 的字符串 t , 而一个组合技每在 t 中出现一次,Bessie 就会获得一分。 $s_i$  在 t 中出现一次指的是  $s_i$  是 t 从某个位置起的连续子串。如果  $s_i$  从 t 的多个位置起都是连续子串,那么算作  $s_i$  出现了多次。

若 Bessie 输入了恰好 k 个字符,则她最多能获得多少分?

#### solution

dp[i][j] 表示长度为 i 的以 acam节点j 为结尾字符串最大 dp 值

那么dp每次就可以从acam树上的父节点转移到子节点

```
int n,m,idx;
int nxt[N][3],fail[N],val[N];
int dp[M][M];
void insert(string &st)
    int p = 0;
    for(int i=0;i<st.size();++i)</pre>
        int c = st[i]-'A';
        if(!nxt[p][c]) nxt[p][c] = ++ idx;
        p = nxt[p][c];
    val[p] ++;
}
void build_acam(void)
{
    queue<int> q;
    for(int i=0;i<3;++i)
    {
        if(nxt[0][i]) q.push(nxt[0][i]);
    }
    while(q.size())
        int lp = q.front(); q.pop();
        for(int i=0;i<3;++i)
            if(!nxt[lp][i]) nxt[lp][i] = nxt[fail[lp]][i];
            else
            {
                int p = nxt[lp][i];
                fail[p] = nxt[fail[lp]][i];
                q.push(p);
                val[p] += val[fail[p]];
            }
        }
    }
```

```
}
void func(void)
{
    cin >> n >> m;
    for(int i=0;i<n;++i)</pre>
    {
        string st; cin >> st;
        insert(st);
    }
    build_acam();
    int ans = 0;
    memset(dp,0xaf,sizeof dp); // -inf
    dp[0][0] = 0;
    for(int i=1;i<=m;++i)</pre>
        for(int j=0; j <= idx; ++j)
             for(int k=0; k<3; ++k) dp[i][nxt[j][k]] = max(dp[i][nxt[j][k]], dp[i-k+k])
1][j]+val[nxt[j][k]]);
        }
    }
    for(int i=0; i \le idx; ++i) ans = max(ans, dp[m][i]);
    cout << ans << '\n';</pre>
}
```

#### P4052 [JSOI2007] 文本生成器

JSOI 交给队员 ZYX 一个任务,编制一个称之为"文本生成器"的电脑软件:该软件的使用者是一些低幼人群,他们现在使用的是 GW 文本生成器 v6 版。

该软件可以随机生成一些文章——总是生成一篇长度固定且完全随机的文章。 也就是说,生成的文章中每个字符都是完全随机的。如果一篇文章中至少包含使用者们了解的一个单词,那么我们说这篇文章是可读的(我们称文章 s 包含单词 t, 当且仅当单词 t 是文章 s 的子串)。但是,即使按照这样的标准,使用者现在使用的 GW 文本生成器 v6 版所生成的文章也是几乎完全不可读的。 ZYX 需要指出 GW 文本生成器 v6 生成的所有文本中,可读文本的数量,以便能够成功获得 v7 更新版。你能帮助他吗?

和上一题不同,求的是子串存在模式串的串总数

#### solution

求存在不方便, 所以求不存在

dp[i][j] 表示长度为 i 的以 acam节点 j 为结尾的字符串不存在字典串总数

最后再 sum - dp 即可

```
int n,m,idx;
int nxt[N][D],fail[N];
int dp[110][N];
bitset<N> ext;

void insert(string &st)
{
   int p = 0;
   for(int i=0;i<st.size();++i)
   {
     int c = st[i]-'A';
}</pre>
```

```
if(!nxt[p][c]) nxt[p][c] = ++ idx;
        p = nxt[p][c];
    ext[p] = true;
}
void build_acam(void)
    queue<int> q;
    for(int i=0;i<26;++i)
        if(nxt[0][i]) q.push(nxt[0][i]);
    while(q.size())
        int p = q.front(); q.pop();
        for(int i=0;i< D;++i)
            if(!nxt[p][i]) nxt[p][i] = nxt[fail[p]][i];
            else
            {
                 int ps = nxt[p][i]; q.push(ps);
                 fail[ps] = nxt[fail[p]][i];
                 ext[ps] = ext[fail[ps]];
            }
        }
    }
}
void func(void)
    cin >> n >> m;
    for(int i=0;i<n;++i)</pre>
        string st; cin >> st;
        insert(st);
    build_acam();
    dp[0][0] = 1;
    for(int i=1;i<=m;++i)</pre>
    {
        for(int j=0; j \le idx; ++j)
            for(int k=0; k< D; ++k)
                if(!ext[nxt[j][k]]) dp[i][nxt[j][k]] = (dp[i][nxt[j][k]]+dp[i-1]
[j])%M;
            }
        }
    }
    int ans = 1;
    for(int i=1; i <= m; ++i) ans = (ans*26)\%M;
    for(int i=0; i <= idx; ++i) ans = (ans-dp[m][i]+M)%M;
    cout << ans << '\n';</pre>
}
```

#### 模式串互相匹配

求模式串在模式串的出现次数

等同于求有多少个属于Y的节点的fail指针直接或间接指向X的结束位置

那么我们对fail求dfn, 然后跑**trie树**, 离线询问并用树状数组维护出现次数

因为是模式串在模式串,所以只能跑原始trie树

```
int m,idx,tot;
int dfn[N],sz[N],t[N];
int nxt[N][D],trie[N][D],fail[N],ans[N],mp[N],fa[N];
vector<int> ft[N];
vector<PII> eq[N];
string st,s0;
void put(int p,int z)
{
    for(int i=p;i<=tot;i+=i&-i) t[i] += z;
}
int query(int 1,int r)
    int res = 0;
    for(int i=r;i>=1;i-=i&-i) res += t[i];
    for(int i=1-1;i>=1;i-=i&-i) res -= t[i];
    return res;
}
void dfs(int p)
    dfn[p] = ++ tot;
    sz[p] = 1;
    for(auto &i : ft[p])
        dfs(i);
        sz[p] += sz[i];
    }
}
void build_acam(void)
    queue<int> q;
    for(int i=0;i<D;++i)</pre>
    {
        if(nxt[0][i])
            q.push(nxt[0][i]);
            ft[0].push_back(nxt[0][i]);
        }
    }
    while(q.size())
        int p = q.front(); q.pop();
        for(int i=0;i<D;++i)</pre>
```

```
else
           {
               int ps = nxt[p][i]; q.push(ps);
               fail[ps] = nxt[fail[p]][i];
               ft[fail[ps]].push_back(ps);
           }
       }
   }
   dfs(0);
}
void dfs_trie(int p)
{
   put(dfn[p],1);
    for(auto \&[x,id] : eq[p]) ans[id] = query(dfn[x],dfn[x]+sz[x]-1);
   for(int i=0; i<26;++i)
    {
       if(trie[p][i]) dfs_trie(trie[p][i]);
   put(dfn[p],-1);
}
signed main(void)
{
   Start;
   string s0; cin >> s0;
   int cnt = 0, p=0;
   for(auto &i : s0)
    {
       if(i == 'B')
           if(st.size()) st.erase(st.end()-1);
           p = fa[p];
       }
       else if(i == 'P')
           for(auto &j : st)
           {
               int c = j-'a';
               if(!nxt[p][c]) nxt[p][c] = ++ idx;
               trie[p][c] = nxt[p][c];
               fa[nxt[p][c]] = p;
               p = nxt[p][c];
           mp[++ cnt] = p;
           st.clear();
       }
       else st += i;
   cin >> m;
    build_acam();
    for(int i=1;i<=m;++i)</pre>
    {
       int x,y; cin >> x >> y;
```