Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Zusammenfassung für die Klausurvorbereitung

Christian Rupp

20. Mai 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Dieses Dokument orientiert sich an den Inhalten der Vorlesung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie der Fakultät für Informatik der Technischen Universität München aus dem Sommersemester 2014. Es erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.

2 Hilfreiche Formeln

- Allgemeine Binomische Formel: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^n b^{n-i}$
- $\sum_{x=0}^{r} \binom{a}{x}\binom{b}{r-x} = \binom{a+b}{r}$
- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

2.1 Kombinatorik

Anzahl der Verteilungen von v Bällen auf m Urnen.

	beliebig viele Bälle pro Urne (beliebig)	höchstens ein Ball pro Urne (injektiv)	mindestens ein Ball pro Urne (surjektiv)	genau ein Ball pro Urne (bijektiv)
Bälle unterscheidbar Urnen unterscheidbar	m^n	$m^{\underline{n}}$	$m! * S_{n,m}$	$n!$
Bälle gleich Urnen unterscheidbar	$\binom{n+m-1}{n}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$	1
Bälle unterscheidbar Urnen gleich	$\sum_{k=0}^{m} S_{n,k}$	1	$S_{n,m}$	1
Bälle gleich Urnen gleich	$\sum_{k=0}^{m} P_{n,k}$	1	$P_{n,m}$	1

3 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

3.1 Grundlagen

- diskreter Wahrscheinlichkeitsraum: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \mid n \in \mathbb{N}$
- Elementarereignis:
  - $0 \leq \Pr[\omega_i] \leq 1$
  - $\sum_{i=1}^{n} \Pr[\omega_i] = 1$
  - $\Pr[\omega_i] := \frac{1}{|\Omega|}$
- Ereignis:
  - $E \subseteq \Omega$
  - $\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega]$
  - $\Pr[E] := \frac{|E|}{|\Omega|}$
- $\Pr[\emptyset] = 0$,$\Pr[\Omega] = 1$
- $0 \leq \Pr[A] \leq 1$
- $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$
- $A \subseteq B \Rightarrow \Pr[A] \leq \Pr[B]$

Laplace verteilt heißt, das jedes Elementarereignis gleich wahrscheinlich ist.

3.1.1 disjunkte Ereignisse

$\forall(i,j) \in \mathbb{N} : i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$

- $\Pr[\cup_{i=1}^{n} A_i] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]$
- $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B]$
- $\Pr[\cup_{i=1}^{\infty}] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]$

3.1.2 Siebformel,Prinzip der Inklusion/Exklusion

- Zwei Ereignisse: $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$
- Drei Ereignisse: $\Pr[A_1 \cup A_2 \cup A_3] = \Pr[A_1] + \Pr[A_2] + \Pr[A_3] \ldots$
  $- \Pr[A_1 \cap A_2] - \Pr[A_1 \cap A_3] - \Pr[A_2 \cap A_3] \ldots$
  $+ \Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]$
- Allgemeiner Fall: $\Pr[\cup_{i=1}^{n} A_i] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] \pm \ldots$
  $+(-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_2}] \pm \ldots$
  $+(-1)^{l-1} \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]$

Anmerkung: Üblicherweise benötigt man den Allgemeinen Fall während dieser Vorlesung nicht!

3.1.3 Boolsche Ungleichung

- Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$: $\Pr[\cup_{i=1}^{n} A_i] \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]$
- unendliche Ereignisse:$\Pr[\cup_{i=1}^{\infty} A_i] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]$

Anmerkung: Hiermit kann man den Allgemeinen Fall der Siebformel abschätzen.

3.1.4 Wahl der Wahrscheinlichkeiten

Sofern nichts anderes gegeben ist, gilt das Prinzip von Laplace und alle Elementarereignisse sind gleichwahrscheinlich.
$\Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$

3.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- $\Pr[B|B] = 1$
- $\Pr[A|\Omega] = \Pr[A]$
- $\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$

Anmerkung: $\Pr[\emptyset|B] = 0$ und $\Pr[\bar{A}|B] = 1 - \Pr[A|B]$
Andere Schreibweise: $\Pr[A \cap B] = \Pr[B|A] * \Pr[A] = \Pr[A|B] * \Pr[B]$

3.2.1 Multiplikationssatz

$\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] > 0 \Rightarrow \Pr[A_1] * \Pr[A_2|A_1] * \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] * \ldots$
$\cdots * \Pr[A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]$