Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Zusammenfassung für die Klausurvorbereitung

Christian Rupp

12. Juni 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Dieses Dokument orientiert sich an den Inhalten der Vorlesung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie der Fakultät für Informatik der Technischen Universität München aus dem Sommersemester 2014. Es erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.

2 Hilfreiche Formeln

- Allgemeine Binomische Formel: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^n b^{n-i}$
- $\sum_{x=0}^{r} \binom{a}{x}\binom{b}{r-x} = \binom{a+b}{r}$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^k}{k!} = e^x$

2.1 Kombinatorik

Anzahl der Verteilungen von v Bällen auf m Urnen.

	beliebig viele Bälle pro Urne (beliebig)	höchstens ein Ball pro Urne (injektiv)	mindestens ein Ball pro Urne (surjektiv)	genau ein Ball pro Urne (bijektiv)
Bälle unterscheidbar Urnen unterscheidbar	m^n	$m^{\underline{n}}$	$m! * S_{n,m}$	$n!$
Bälle gleich Urnen unterscheidbar	$\binom{n+m-1}{n}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$	1
Bälle unterscheidbar Urnen gleich	$\sum_{k=0}^{m} S_{n,k}$	1	$S_{n,m}$	1
Bälle gleich Urnen gleich	$\sum_{k=0}^{m} P_{n,k}$	1	$P_{n,m}$	1

3 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

3.1 Grundlagen

- diskreter Wahrscheinlichkeitsraum: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\} \mid n \in \mathbb{N}$
- Elementarereignis:
  - $0 \leq \Pr[\omega_i] \leq 1$
  - $\sum_{i=1}^{\infty} \Pr[\omega_i] = 1$ oder $\sum_{w \in \Omega} \Pr[\omega] = 1$
  - $\Pr[\omega_i] := \frac{1}{|\Omega|}$
- Ereignis:
  - $E \subseteq \Omega$
  - $\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega]$
  - $\Pr[E] := \frac{|E|}{|\Omega|}$
- $\Pr[\emptyset] = 0$,$\Pr[\Omega] = 1$
- $0 \leq \Pr[A] \leq 1$
- $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$
- $A \subseteq B \Rightarrow \Pr[A] \leq \Pr[B]$

Laplace verteilt heißt, das jedes Elementarereignis gleich wahrscheinlich ist.

3.1.1 disjunkte Ereignisse

$\forall (i,j) \in \mathbb{N} : i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$

- $\Pr[\cup_{i=1}^{n} A_i] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]$
- $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B]$
- $\Pr[\cup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]$

3.1.2 Siebformel,Prinzip der Inklusion/Exklusion

- Zwei Ereignisse: $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$
- Drei Ereignisse: $\Pr[A_1 \cup A_2 \cup A_3] = \Pr[A_1] + \Pr[A_2] + \Pr[A_3]$
  $- \Pr[A_1 \cap A_2] - \Pr[A_1 \cap A_3] - \Pr[A_2 \cap A_3]$
  $+ \Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]$
- Allgemeiner Fall: $\Pr[\cup_{i=1}^{n} A_i] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] \pm \ldots$
  $+(-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}] \pm \ldots$
  $+(-1)^{n-1} \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]$

Anmerkung: Üblicherweise benötigt man den Allgemeinen Fall während dieser Vorlesung nicht!

3.1.3 Boolsche Ungleichung

- Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$: $\Pr[\cup_{i=1}^{n} A_i] \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]$
- unendlich viele Ereignisse:$\Pr[\cup_{i=1}^{\infty} A_i] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]$

Anmerkung: Hiermit kann man den Allgemeinen Fall der Siebformel abschätzen.

3.1.4 Wahl der Wahrscheinlichkeiten

Sofern nichts anderes gegeben ist, gilt das Prinzip von Laplace und alle Elementarereignisse sind gleichwahrscheinlich. Kann man auch an Aussagen wie er wählt zufällig eines aus X aus erkennen.
$\Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$

3.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- $\Pr[B|B] = 1$
- $\Pr[A|\Omega] = \Pr[A]$
- $\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$

Anmerkung: $\Pr[\emptyset|B] = 0$ und $\Pr[\bar{A}|B] = 1 - \Pr[A|B]$
Andere Schreibweise: $\Pr[A \cap B] = \Pr[B|A] * \Pr[A] = \Pr[A|B] * \Pr[B]$

3.2.1 Multiplikationssatz

$\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] > 0 \Rightarrow \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \Pr[A_1] * \Pr[A_2|A_1] * \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] * \ldots \cdots * \Pr[A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]$

3.2.2 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Es gilt das alle Ereignisse A_i paarweise disjunkt sind und B ist ein Ereignis, das eine Teilmenge von dem Ereignis $\cup_i A_i$ ist.

- endlicher Fall: $\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i] * \Pr[A_i]$
- unendlicher Fall: $\Pr[B] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[B|A_i] * \Pr[A_i]$

Nützliche Erkenntnisse:Seien $B \subseteq A \cup \bar{A}$ und $A \cap \bar{A} = \emptyset$ dann gilt $\Pr[B] = \Pr[B|A] * \Pr[A] + \Pr[B|\bar{A}] * \Pr[\bar{A}]$

3.2.3 Satz von Bayes

Es gilt alle Ereignisse sind paarweise disjunkt und größer Null und B ist ein Ereignis, das eine Teilmenge von dem Ereignis $\cup_i A_i$ ist und größer Null.

- Dann gilt für $i = 1, \ldots, n$: $\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i]*\Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B|A_j]*\Pr[A_j]}$
- Dann gilt für $i = 1, \ldots$: $\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i]*\Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} \Pr[B|A_j]*\Pr[A_j]}$

3.3 Unabhängigkeit

Unabhängigkeit heißt das A und B sich nicht gegenseitig beeinflussen, d.h. es gilt $\Pr[A|B] = \Pr[A]$ oder $\Pr[B|A] = \Pr[B]$.

- $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] * \Pr[B]$
- Falls $\Pr[B] \neq 0$: $\Pr[A] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \Pr[A|B]$
- $A_1, \ldots, A_n$ heißen unabhängig, wenn für alle Teilmengen $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 < \ldots < i_k$ gilt:
  $\Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] * \ldots * \Pr[A_{i_k}]$
- $A_1, \ldots, A_n$ genau dann unabhängig, wenn $\forall (s_1, \ldots, s_n) \in \{0, 1\}^n$ gilt, dass $\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_1^{s_1}] * \ldots * \Pr[A_1^{s_n}]$ mit $A_i^0 = \bar{A}_i$ und $A_i^1 = A_i$.

3.4 Zufallsvariablen

3.4.1 Grundlagen

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$
- $W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}; \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$
- $\Pr[X \leq x_i] = \sum_{x \in W_x : x \leq x_i} \Pr[X = x] = \Pr[\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x_i\}]$
- diskrete Dichte(funktion): $f_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto \Pr[X = x] \in [0, 1]$
- Verteilung(sfunktion): $F_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto \Pr[X \leq x] = \sum_{x' \in W_x : x' \leq x} \Pr[X = x'] \in [0, 1]$

3.4.2 Erwartungswert und Varianz

- Sofern $\sum_{x \in W_x} |x| * \Pr[X = x]$ konvergiert gilt:
  $\mathbb{E} := \sum_{x \in W_x} x * \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_x} x * f_X(x)$
- Monotonie des Erwartungswertes: $X(\omega) \leq Y(\omega) \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{E}[a * X + b] = a * \mathbb{E}[X] + b$
- $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i] = \sum_{i=0}^{\infty} i * \Pr[X = i]$

4 Personen der Diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie

Hier ist eine Sammlung der Personen die das in diesem vorliegende Wissen erforscht und entwickelt haben. Sie werden hier mit Ihren Beiträgen aufgeführt. Zum Wirkungsraum muss angemerkt werden, dass mit der Zeit Kommunikations- und Reisetechnik immer besser wurden und somit Ihr Wirkungskreis nicht festgelegt werden kann, sondern nur abgeschätzt.

Name	*	†	Wirkungsraum	Werk
Pierre Fermat	1601	1665	Frankreich	
Blaise Pascal	1623	1662	Frankreich	
Christiaan Huygens	1629	1695	Niederlande	De ratiociniis in ludo aleae
Thomas Bayes	1702	1761	England	Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances
Pierre Simon Laplace	1749	1827		
James Joseph Sylvester	1814	1897	England	
George Boole	1815	1864		
Jules Henri Poincairé	1854	1912	Frankreich	