



Modul Bahan Ajar

Matematika Teknik I

S1 Teknik Mesin UM

January 2023



Oleh

Avita Ayu Permanasari, S.T., M.T.

**Program Studi S1 Teknik Mesin
Departemen Teknik Mesin dan Industri
Fakultas Teknik
Universitas Negeri Malang**

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT karena atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, kami dapat menyelesaikan penyusunan “Modul Matematika Teknik 1”. Modul ini disusun dengan tujuan sebagai bahan pembelajaran matematika teknik bagi mahasiswa teknik mesin. Adapun modul bahan ajar ini disusun dengan semaksimal mungkin oleh penulis dan tentunya dengan bantuan berbagai pihak. Pada kesempatan ini penyusun juga menyampaikan terima kasih kepada.

1. Prof. Dr. Andoko, S.T., M.T. selaku Dekan Fakultas Teknik Universitas Negeri Malang.
2. Rr. Poppy Puspitasari, S.Pd., M.T., Ph.D. selaku Wakil Dekan II Fakultas Teknik Universitas Negeri Malang.
3. Dr. Retno Wulandari, S.T., M.T. selaku Ketua Departemen Teknik Mesin dan Industri.
4. Prof. Dr. Sukarni, S.T., M.T. selaku Ketua Kelompok Bidang Keahlian Energi Program Studi S1 Teknik Mesin.
5. Bapak Ibu Dosen Program Studi S1 Teknik Mesin.
6. Teman-teman penyusun modul bahan ajar, serta semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan Modul Matematika Teknik 1.

Demi kesempurnaan modul ini, segala kritik dan saran akan sangat penulis perhatikan dan semoga modul ini bermanfaat bagi pembaca khususnya mahasiswa mata kuliah Matematika Teknik 1. Akhir kata penulis mengharapkan semoga dari modul ini dapat bermanfaat dan dapat memberikan inspirasi bagi pembaca.

Malang, 30 Januari 2023

Penyusun

DAFTAR ISI

| | Hal |
|----------------------------------------------------------|-----|
| Kata Pengantar | i |
| Daftar Isi | iii |
| 1. PENDAHULUAN | 1 |
| 1.1 Sistem Bilangan Real | 1 |
| 1.2 Operasi Bilangan | 3 |
| 1.3 Urutan | 3 |
| 1.4 Pertidaksamaan | 4 |
| 1.5 Nilai Mutlak | 7 |
| 2. FUNGSI dan LIMIT | 12 |
| 2.1 Fungsi dan Grafik | 12 |
| 2.2 Operasi pada Fungsi | 15 |
| 2.3 Pengertian Limit | 16 |
| 2.4 Teorema Limit | 23 |
| 2.5 Limit Kiri dan Limit Kanan | 31 |
| 2.6 Limit Tak Hingga | 32 |
| 2.7 Kekontinuan Fungsi | 34 |
| 3. TURUNAN FUNGSI | 38 |
| 3.1 Pengertian Turunan Fungsi | 38 |
| 3.2 Turunan Fungsi Konstan dan Fungsi Pangkat | 39 |
| 3.3 Sifat - Sifat Turunan | 40 |
| 3.4 Aturan Rantai (untuk Turunan Fungsi Komposisi) | 41 |
| 3.5 Turunan Fungsi Invers | 42 |
| 3.6 Turunan Fungsi Implisit | 42 |
| 3.7 Turunan Tingkat Tinggi | 43 |
| 3.8 Turunan Fungsi Aljabar dan Fungsi Transenden | 44 |
| 3.8.1 Turunan Fungsi Rasional | 44 |
| 3.8.2 Turunan Fungsi Irrasional | 44 |
| 3.8.3 Turunan Fungsi Trigonometri | 45 |
| 3.8.4 Turunan Fungsi Siklometri | 46 |
| 3.8.5 Turunan Fungsi Logaritma | 47 |
| 3.8.6 Turunan Fungsi Eksponensial | 49 |
| 3.8.7 Turunan Fungsi Hiperbolik | 50 |

| | | |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.9 | Turunan Fungsi Parameter | 50 |
| 4. | INTEGRAL | 53 |
| 4.1 | Rumus Dasar | 54 |
| 4.2 | Integral dengan Substitusi | 55 |
| 4.3 | Integral Parsial | 57 |
| 4.4 | Integral yang Menghasilkan Arcus Tangen dan Logaritma | 59 |
| 4.5 | Integral Fungsi Pecah Rasional | 62 |
| | 4.5.1 Keadaan $N(x) = D'(x)$ | 62 |
| | 4.5.2 Keadaan derajat $N(x) \geq$ derajat $D(x)$ | 62 |
| | 4.5.3 Keadaan Derajat $N(x) <$ Derajat $D(x)$ | 63 |
| 4.6 | Integral Fungsi Trigonometri..... | 70 |
| | 4.6.1 Rumus-rumus Sederhana | 70 |
| | 4.6.2 Bentuk $\int R(\sin x) \cos x \, dx$ dan $\int R(\cos x) \sin x \, dx$ | 70 |
| | 4.6.3 Integral dengan memperhatikan rumus-rumus | 71 |
| | 4.6.4 Substitusi $y = \tan (x/2)$ | 71 |
| | 4.6.5 Integral $R(\tan x)$ | 73 |
| | 4.6.6 Rumus Reduksi untuk Integral Fungsi Trigonometri | 73 |
| 4.7 | Integral Fungsi Irrasional | 74 |
| | 4.7.1 Rumus yang perlu dihafal | 74 |
| | 4.7.2 Bentuk Irrasional Satu Suku | 75 |
| | 4.7.3 Satu-satunya Bentuk Irrasional | 75 |
| | 4.7.4 Substitusi Trigonometri | 75 |
| 5. | INTEGRAL TERTENTU | 77 |
| 5.1 | Pengertian Integral Tertentu | 77 |
| 5.2 | Aplikasi Integral | 83 |
| | 5.2.1 Luas Daerah | 83 |
| | 5.2.2 Volume Benda Putar | 86 |
| | 5.2.3 Panjang Kurva | 93 |
| | 5.2.4 Luas Permukaan Benda Putar | 87 |
| | 5.2.5 Usaha atau Kerja | 101 |
| | 5.2.6 Momen dan Pusat Massa (Titik Berat) | 104 |

1.1 Sistem Bilangan Real

Untuk mempelajari kalkulus perlu memahami bahasan tentang system bilangan real, karena kalkulus didasarkan pada system bilangan real dan sifat-sifatnya.

Sistem bilangan yang paling sederhana adalah **bilangan asli**, yaitu 1, 2, 3, ... Dengan menggunakan bilangan asli kita dapat menghitung banyaknya buku yang kita miliki, kendaraan yang melalui suatu jalan, orang-orang yang berada dalam suatu ruang dan lain-lainnya. Himpunan semua bilangan asli biasa dinotasikan dengan N. Jadi

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Jika di dalam himpunan semua bilangan asli kita tambahkan semua negatifnya dan nol, maka diperoleh **bilangan-bilangan bulat**, yaitu ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... Himpunan semua bilangan bulat biasa disimbolkan dengan Z. Jadi

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Selanjutnya untuk mengukur besaran-besaran seperti panjang, berat dan arus listrik maka bilangan bulat tidak memadai. Dalam hal ini bilangan bulat tidak dapat memberikan ketelitian yang cukup. Untuk keperluan ini maka dapat digunakan

bilangan-bilangan rasional, seperti $\frac{3}{4}, \frac{-2}{5}, \frac{19}{2}$, dan $\frac{7}{8}$. Bilangan rasional

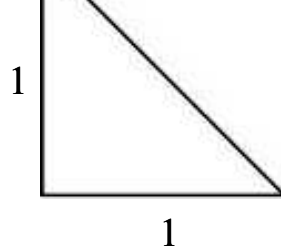
didefinisikan sebagai *bilangan yang dapat ditulis dengan $\frac{a}{b}$ dengan a dan b*

keduanya bilangan bulat dan $b \neq 0$. Dengan demikian bilangan-bilangan bulat termasuk bilangan rasional juga. Bilangan bulat 3 merupakan bilangan rasional sebab 3 dapat ditulis sebagai $\frac{6}{2}$. Himpunan semua bilangan rasional biasa

dinotasikan dengan Q. Jadi

$$Q = \{\frac{a}{b} \mid a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$$

Bilangan rasional yang dapat menjadi ukuran dengan ketelitian yang cukup ternyata masih tidak dapat menjadi ukuran semua besaran misalnya panjang sisi miring segitiga siku-siku berikut.



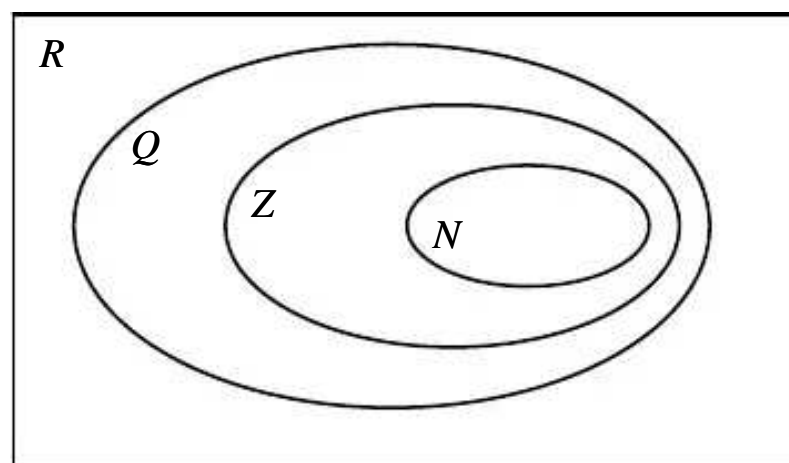
Gambar 1

Dengan menggunakan **bilangan irrasional** maka hal tersebut di atas tidak menjadi masalah. Panjang sisi miring segitiga siku-siku tersebut adalah $\sqrt{2}$. Bilangan irrasional yang lain antara lain $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, e dan π .

Sekumpulan bilangan rasional dan irrasional beserta negatifnya dan nol **bilangan-bilangan real** (bilangan nyata). Himpunan semua bilangan real dinotasikan dengan R .

Hubungan keempat himpunan N , Z , Q , dan R dapat dinyatakan dengan

dan digambarkan dengan diagram venn berikut.

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$


Gambar 2

Masih terdapat sistem bilangan yang lebih luas dari system bilangan real yaitu bilangan yang secara umum dapat dinyatakan dalam bentuk $a + b\sqrt{-1}$ dengan a dan b keduanya bilangan bulat, atau $a + bi$ dengan $i = \sqrt{-1}$. Bilangan demikian dinamakan **bilangan kompleks** dan himpunan semua bilangan kompleks dinotasikan dengan C .

dimaksudkan adalah bilangan real.

1.2 Operasi Bilangan

Pada R telah dikenal operasi *penjumlahan* dan *perkalian*. Misalkan x dan y bilangan real maka penjumlahan x dan y ditulis $x + y$ dan perkalian x dan y ditulis $x \cdot y$ atau secara singkat ditulis xy . Sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian pada R adalah sebagai berikut.

- 1) Hukum komutatif: $x + y = y + x$ dan $xy = yx$.
- 2) Hukum asosiatif: $x + (y + z) = (x + y) + z$ dan $x(yz) = (xy)z$.
- 3) Hukum distributif: $x(y + z) = xy + xz$.
- 4) Elemen-elemen identitas:

Terhadap penjumlahan: 0 sebab $x + 0 = x$.

Terhadap perkalian: 1 sebab $x \cdot 1 = x$.

- 5) Invers (balikan):

Setiap bilangan real x mempunyai *invers aditif* (disebut juga *negatif*) $-x$ yang memenuhi $x + -x = 0$ dan setiap bilangan real x yang tidak nol mempunyai *invers multiplikatif* (disebut juga balikan) yaitu x^{-1} yang memenuhi $x \cdot x^{-1} = 1$.

Pengurangan dan *pembagian* didefinisikan dengan

$$x - y = x + (-y)$$

dan

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$$

1.3 Urutan

Bilangan-bilangan real bukan nol dibedakan menjadi dua himpunan terpisah yaitu bilangan-bilangan real positif dan bilangan-bilangan real negatif. Berdasarkan fakta ini diperkenalkan relasi *urutan* $<$ (dibaca “kurang dari”) yang didefinisikan dengan:

$$x < y \text{ jika dan hanya jika } y - x \text{ positif.}$$

$x < y$ mempunyai arti yang sama dengan $y > x$.

Sifat-sifat urutan:

- 1) Trikotomi: Jika x dan y bilangan-bilangan real maka pasti berlaku salah satu di

antara yang berikut:

$$x < y \text{ atau } x = y \text{ atau } x > y.$$

2) Transitif: jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$.

3) Penambahan: $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$

4) Perkalian:

Jika z positif maka $x < y \Leftrightarrow xz < yz$

Jika z negatif maka $x < y \Leftrightarrow xz > yz$

Relasi $urutan \leq$ (dibaca “kurang dari atau sama dengan”) didefinisikan dengan:

$x \leq y$ jika dan hanya jika $y - x$ positif atau nol.

Sifat-sifat ini adalah:

1) Transitif: jika $x \leq y$ dan $y \leq z$ maka $x \leq z$.

2) Penambahan: $x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$

3) Perkalian:

Jika z positif maka $x \leq y \Leftrightarrow xz \leq yz$

Jika z negatif maka $x \leq y \Leftrightarrow xz \geq yz$

1.4. Pertidaksamaan

Pertidaksamaan merupakan kalimat terbuka yang menggunakan relasi $<$, $>$, \leq atau \geq . Penyelesaian suatu pertidaksamaan adalah semua bilangan yang memenuhi pertidaksamaan tersebut yang biasanya merupakan interval atau gabungan interval-interval. Mengenai interval dapat dijelaskan sebagai berikut.

Interval terbuka (a,b) adalah himpunan semua bilangan real yang lebih besar dari a dan kurang dari b . Jadi $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$. Sedangkan interval tertutup $[a,b]$ adalah himpunan semua bilangan real yang lebih besar atau sama dengan a dan kurang atau sama dengan b . Jadi $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$. Beberapa interval ditunjukkan dalam daftar berikut.

| | | |
|---------------------|------------------------------|--|
| (a, b) | $\{x \mid a < x < b\}$ | |
| $[a, b]$ | $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ | |
| $[a, b)$ | $\{x \mid a \leq x < b\}$ | |
| $(a, b]$ | $\{x \mid a < x \leq b\}$ | |
| $(-\infty, b)$ | $\{x \mid x < b\}$ | |
| $(-\infty, b]$ | $\{x \mid x \leq b\}$ | |
| (a, ∞) | $\{x \mid x > a\}$ | |
| $[a, \infty)$ | $\{x \mid x \geq a\}$ | |
| $(-\infty, \infty)$ | \mathbb{R} | |

Contoh Pertidaksamaan

- 1) $2x - 7 < 4x - 2$
- 2) $-5 \leq 2x + 6 < 4$
- 3) $x^2 - x - 6 < 0$
- 4) $3x^2 - x - 2 > 0$
- 5) $\frac{2x - 5}{x - 2} \leq 1$

Contoh 1

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $2x - 7 < 4x - 2$.

Penyelesaian: $2x - 7 < 4x - 2$

$$\Leftrightarrow 2x < 4x + 5$$

$$\Leftrightarrow -2x < 5$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$$

Hp: interval $(-\frac{5}{2}, \infty) = \{x \mid x > -\frac{5}{2}\}$

Contoh 2

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $-5 \leq 2x + 6 < 4$.

Penyelesaian: $-5 \leq 2x + 6 < 4$

$$\Leftrightarrow -11 \leq 2x < -2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{11}{2} \leq x < -1$$

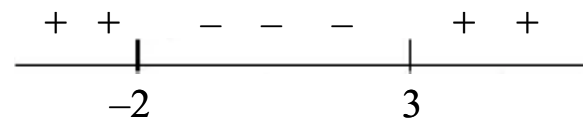
Hp: interval $[-\frac{11}{2}, -1) = \{x \mid -\frac{11}{2} \leq x < -1\}$

Contoh 3

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $x^2 - x - 6 < 0$.

Penyelesaian: $x^2 - x - 6 < 0$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) < 0$$



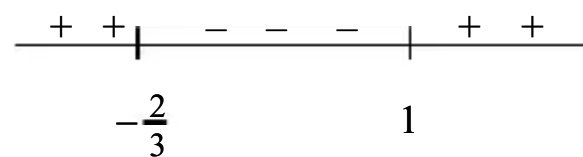
Hp: interval $(-2, 3) = \{x \mid -2 < x < 3\}$

Contoh 4

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $3x^2 - x - 2 > 0$

Penyelesaian: $3x^2 - x - 2 > 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(3x + 2) > 0$$



Hp: interval $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (1, \infty) = \{x \mid x < -\frac{2}{3} \text{ atau } x > 1\}$

Contoh 5

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\frac{2x-5}{x-2} \leq 1$

Penyelesaian: $\frac{2x-5}{x-2} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-5}{x-2} - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-5-(x-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-2) \leq 0 \text{ dengan syarat } x \neq 2 \text{ (mengapa?)}$$



Hp: interval $(2, 3] = \{x \mid 2 < x \leq 3\}$

1.5 Nilai Mutlak

Konsep nilai mutlak sangat diperlukan untuk mempelajari kalkulus. Oleh karena pembaca yang ingin memahami betul konsep-konsep dalam kalkulus disarankan mempunyai ketrampilan dalam bekerja menggunakan nilai mutlak.

Definisi:

Nilai mutlak bilangan real x , ditulis $|x|$ didefinisikan dengan

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Misal: $|5| = 5$, $|-5| = -(-5) = 5$, $|0| = 0$

Sifat-sifat nilai mutlak

$$1) \quad |ab| = |a||b|$$

$$2) \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$3) \quad |a+b| \leq |a| + |b| \text{ (ketidaksamaan segitiga)}$$

$$4) \quad |a-b| \geq ||a| - |b||$$

Pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak dapat digunakan teorema berikut.

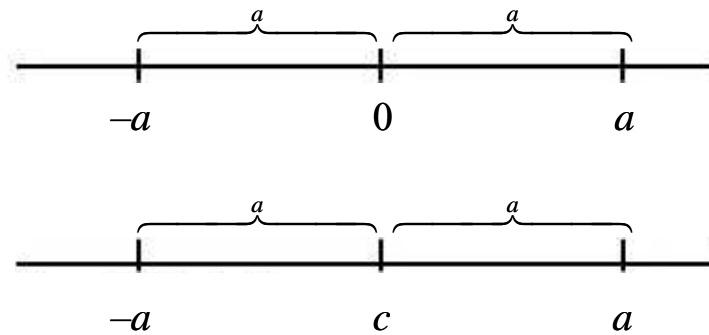
Teorema:

$$1. |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$2. |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ atau } x > a.$$

Secara fisis $|x|$ dapat menyatakan jarak x ke 0, sehingga x yang memenuhi $|x| < a$ menyatakan x yang jaraknya ke 0 kurang dari a .

Secara fisis $|x - c|$ dapat menyatakan jarak x ke c , sehingga x yang memenuhi $|x - c| < a$ menyatakan x yang jaraknya ke c kurang dari a .



Contoh 1

Tentukan penyelesaian $|x| < 3$.

Penyelesaian:

Nilai x yang memenuhi $-3 < x < 3$ merupakan penyelesaian pertidaksamaan $|x| < 3$.

Gambarkan penyelesaian pertidaksamaan tersebut pada garis bilangan.

Contoh 2

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $|x - 2| < 3$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} |x - 2| < 3 &\Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \\ &\Leftrightarrow -3 + 2 < x < 3 + 2 \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 5 \end{aligned}$$

Jadi, penyelesaiannya adalah x yang memenuhi $-1 < x < 5$. Gambarkan pada garis bilangan penyelesaian pertidaksamaan ini.

Contoh 3

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $|3x - 5| \geq 1$.

Penyelesaian:

$$|3x - 5| \geq 1 \Leftrightarrow 3x - 5 \leq -1 \text{ atau } 3x - 5 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 3x \leq 4 \text{ atau } 3x \geq 6$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3} \text{ atau } x \geq 2$$

Jadi, penyelesaiannya adalah x yang memenuhi $x \leq \frac{4}{3}$ atau $x \geq 2$. Gambarkan pada garis bilangan penyelesaian pertidaksamaan ini.

Contoh 4

Andaikan ε (epsilon) adalah bilangan positif.

Tunjukkan bahwa $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow |5x - 10| < \varepsilon$.

Penyelesaian:

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow 5|x - 2| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |5||x - 2| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |5(x - 2)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |5x - 10| < \varepsilon$$

Contoh 5

Andaikan ε (epsilon) adalah bilangan positif, carilah bilangan positif δ sedemikian sehingga $|x - 3| < \delta \Rightarrow |6x - 18| < \varepsilon$

Penyelesaian:

$$|6x - 18| < \varepsilon \Leftrightarrow |6(x - 3)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |6||x - 3| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 6|x - 3| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{6}$$

Oleh karena itu dapat dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$.

Secara mundur dapat dilihat bahwa $|x - 3| < \delta \Rightarrow |6x - 18| < \varepsilon$.

Terkait dengan bilangan akar pangkat dua dapat dinyatakan bahwa

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

SOAL 1

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan berikut dan gambarkan himpunan penyelesaiannya pada garis bilangan.

1. $4x - 7 < 3x - 5$

2. $2x + 16 < x + 25$

3. $7x - 1 \leq 10x + 4$

4. $6x - 10 \geq 5x - 16$

5. $10x + 1 > 8x + 5$

6. $-6 < 2x + 3 < -1$

7. $-3 < 4x - 9 < 11$

8. $3x + 2 < 5x + 1 < 16$

9. $2x - 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$

10. $x^2 + x - 12 < 0$

11. $x^2 - 5x + 6 > 0$

12. $3x^2 - 11x - 4 \leq 0$

13. $2x^2 + 7x - 15 \geq 0$

14. $\frac{x+5}{2x-1} \leq 0$

15. $\frac{2x-3}{x+1} > 0$

16. $(x+2)(2x-1)(3x+7) \geq 0$

17. $x^3 - 5x^2 - 6x < 0$

18. $(x+5)(x+2)^2(2x-1) > 0$

19. $\frac{x-2}{x+4} < 2$

20. $\frac{2x-1}{x-3} \geq 1$

21. $|x+1| < 4$

22. $|3x+4| < 8$

23. $\left| \frac{x}{3} - 2 \right| \leq 6$

24. $|4x+2| \geq 10$

25. $|2-4x| \geq 10$

26. $\left| \frac{3x}{5} + 1 \right| \leq 4$

27. $\left| \frac{x}{2} + 7 \right| > 2$

28. $\left| 1 - \frac{3x}{5} \right| \leq 4$

29. $\left| 2 + \frac{5}{x} \right| > 1$

30. $\left| \frac{1}{x} - 3 \right| > 6.$

$$31. |x-3| < 0,5 \Rightarrow |5x-15| < 2,5.$$

$$32. |x-2| < \frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow |6x-12| < \varepsilon.$$

$$33. |x+4| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x+8| < \varepsilon.$$

Dalam soal berikut, jika ε bilangan positif, carilah bilangan positif δ sedemikian sehingga implikasi yang diberikan benar.

$$34. |x-5| < \delta \Rightarrow |3x-15| < \varepsilon$$

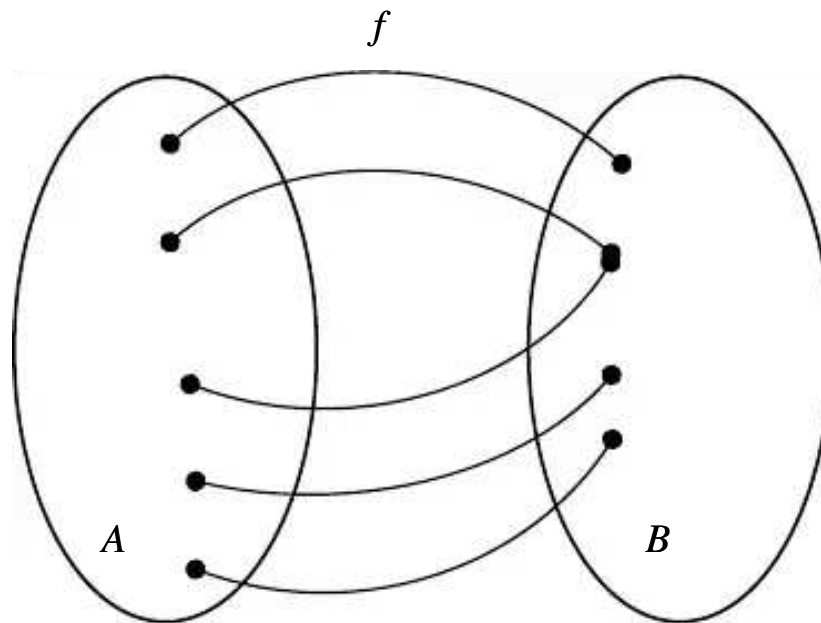
$$35. |x-2| < \delta \Rightarrow |(4x-5)-3| < \varepsilon$$

2.1 Fungsi dan Grafiknya

Definisi

Sebuah fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang memasangkan setiap x anggota A dengan tepat satu y anggota B .

A disebut **domain** (daerah asal) fungsi f dan B disebut **kodomain** (daerah kawan). Sedangkan himpunan semua anggota B yang mempunyai pasangan disebut **range** (daerah hasil).



Gambar 2.1 Fungsi

Definisi di atas tidak memberikan pembatasan pada domain dan kodomain. Domain dapat berupa himpunan yang beranggotakan orang atau yang lain, demikian pula kodomain.

Dalam uraian selanjutnya domain dan kodomain dibatasi pada himpunan-himpunan bilangan real.

Untuk memberi nama fungsi digunakan huruf tunggal seperti f (atau g , atau F), maka $f(x)$ menunjukkan nilai yang diberikan oleh f kepada x . Jadi jika $f(x) = x^3 - 4$, maka

$$f(2) = 2^3 - 4 = 4$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 4 = -5$$

$$f(0) = 0^3 - 4 = -4$$

$$f(a) = a^3 - 4$$

$$f(a + h) = (a + h)^3 - 4 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4$$

Contoh 1

Untuk $f(x) = x^2 - 2x$, carilah dan sederhanakan:

- $f(4)$
- $f(4 + h)$
- $f(4 + h) - f(4)$
- $\frac{f(4 + h) - f(4)}{h}$ dengan $h \neq 0$.

Penyelesaian:

Contoh 2

Untuk $f(x) = x^2 - 2x$ dengan daerah asal $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$, carilah daerah hasil fungsi f .

Penyelesaian:

bermakna dan memberikan nilai bilangan real.

Contoh 3

- a. Daerah asal $f(x) = \frac{1}{x-3}$ adalah $\{x \in R \mid x \neq 3\}$.
- b. Daerah asal $g(t) = \sqrt{9-t^2}$ adalah $\{t \in R \mid 9-t^2 \geq 0\}$.

Apabila daerah asal dan daerah hasil sebuah fungsi merupakan himpunan bilangan real, kita dapat membayangkan fungsi itu dengan menggambarkan grafiknya pada suatu bidang koordinat, dan grafik fungsi f adalah grafik dari persamaan $y = f(x)$.

Contoh 4

Buatlah sketsa grafik dari: (a) $f(x) = x^2 - 4$

(b) $g(x) = \frac{1}{x}$

(c) $h(x) = |x|$

Penyelesaian:

2.2 Operasi pada Fungsi

Jika f dan g dua fungsi maka jumlah $f + g$, selisih $f - g$, hasil kali fg , hasil bagi

f/g dan perpangkatan f^n adalah fungsi-fungsi dengan daerah asal berupa irisan dari daerah asal f dan daerah asal g , dan dirumuskan sebagai berikut.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f / g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ asalkan } g(x) \neq 0$$

Contoh 5

Jika $f(x) = x^2 - 2x$ dan $g(x) = x - 1$, tentukan $f + g$, $f - g$, fg , f/g dan f^3 . Selanjutnya gambarlah sketsa grafiknya.

Penyelesaian:

Selanjutnya didefinisikan komposisi fungsi sebagai berikut.

Jika f dan g dua fungsi dengan daerah asal g merupakan daerah hasil f maka komposisi $g \circ f$ memenuhi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Contoh 6

Jika $f(x) = x^2 - 2x$ dan $g(x) = x - 1$, tentukan $g \circ f$ dan $f \circ g$. Selanjutnya gambarlah sketsa grafiknya.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 - 2x) \\ &= x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x - 1) \\ &= (x - 1)^2 - 2(x - 1) \\ &= x^2 - 2x + 1 - 2x + 2 \\ &= x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

Gambar grrafik dibiarkan untuk latihan.

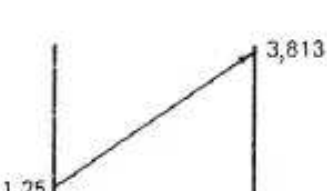
2.3 Pengertian Limit

Perkataan limit berarti mendekati, seperti “Saya sudah menahan sampai mendekati batas kesabaran saya,” atau “Janganlah kamu mendekati zina.” Untuk memahami pengertian limit fungsi kita awali dengan fungsi berikut.

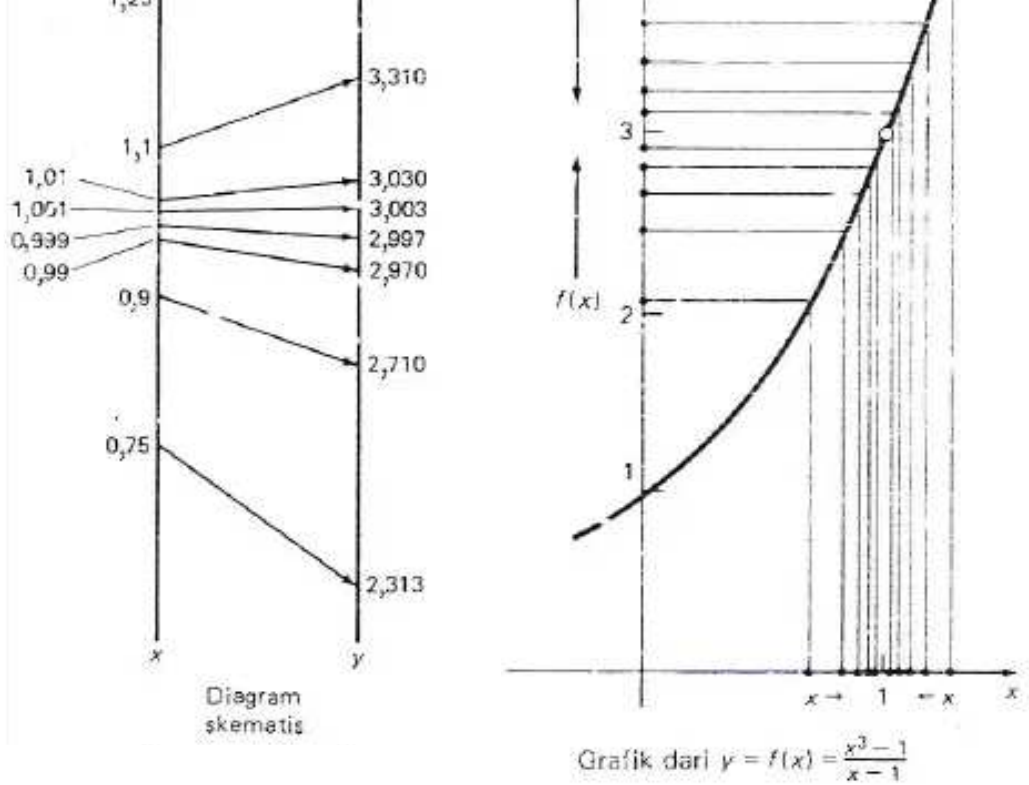
$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Fungsi tersebut tidak terdefinisi di $x = 1$ sebab di titik ini $f(x)$ berbentuk $\frac{0}{0}$. Tetapi dapat diselidiki mengenai nilai $f(x)$ di titik-titik yang dekat dengan 1 (x mendekati 1). Perhatikan nilai $f(x)$ untuk beberapa x seperti terlihat pada daftar dan grafik $y = f(x)$ dapat dilihat pada gambar berikut.

| x | $y = f(x)$ |
|------|------------|
| 1.25 | 3.813 |



| | |
|-------|-------|
| 1,25 | 3,813 |
| 1,1 | 3,310 |
| 1,01 | 3,030 |
| 1,001 | 3,003 |
| ↓ | ↓ |
| 1 | ? |
| ↑ | ↑ |
| 0,999 | 2,997 |
| 0,99 | 2,970 |
| 0,9 | 2,710 |
| 0,75 | 2,313 |



Gambar 2.2

Berdasarkan informasi pada tabel dan pada grafik menunjukkan bahwa $f(x)$ mendekati 3 apabila x mendekati 1. Secara matematis hal tersebut dituliskan dengan

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

dan ini dibaca “limit $(x^3 - 1)/ (x - 1)$ untuk x mendekati 1 adalah 3.” Dalam contoh ini kita menghubungkan limit dengan perilaku fungsi dekat dengan 1, bukannya di 1.

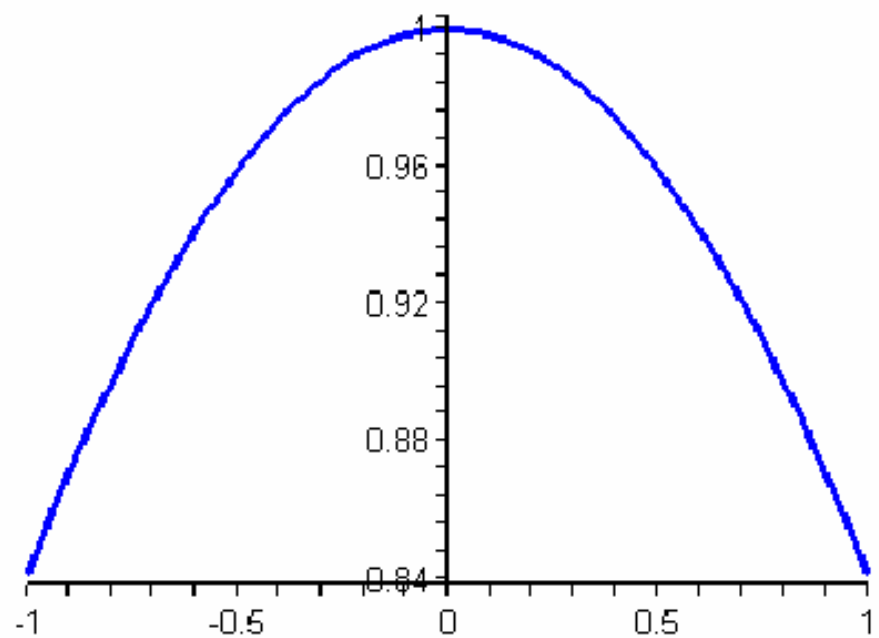
Contoh 1

Dengan menggunakan beberapa nilai pendekatan x tentukan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Penyelesaian:

| x | $\sin x$ |
|-----|----------|
|-----|----------|

| x | $y = \frac{\sin x}{x}$ |
|-------|------------------------|
| 1 | 0,84147 |
| 0,5 | 0,95885 |
| 0,1 | 0,99833 |
| 0,01 | 0,99998 |
| ↓ | ↓ |
| 0 | ? |
| ↑ | ↑ |
| -0,01 | 0,99998 |
| -0,1 | 0,99833 |
| -0,5 | 0,95885 |
| -1 | 0,84147 |



Jadi, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Ingat kembali mengenai nilai mutlak. Jika ε adalah sembarang bilangan positif, maka jarak $f(x)$ ke bilangan L kurang dari ε dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

dan ini ekuivalen dengan

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

yang menunjukkan bahwa $f(x)$ terletak pada interval terbuka $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ seperti terlihat pada gambar 2.3 (a).

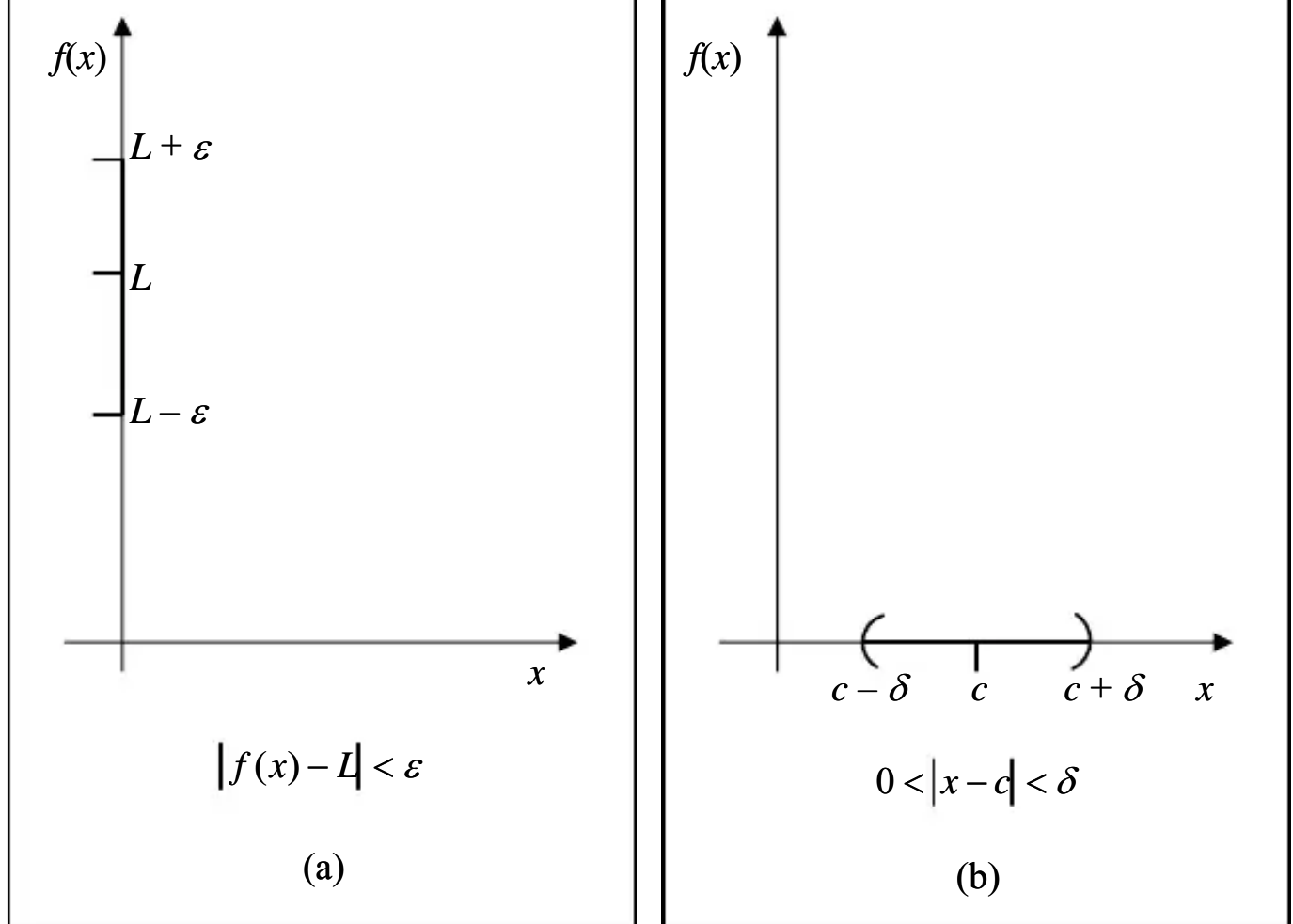
Selanjutnya misalkan δ adalah suatu bilangan positif dan x cukup dekat dengan c sehingga jarak x ke c kurang dari δ , tetapi $x \neq c$ maka

$$0 < |x - c| < \delta$$

dan ini ekuivalen dengan

$$c - \delta < x < c + \delta$$

yang berarti x terletak dalam interval terbuka $(c - \delta, c + \delta)$ dan dapat digambarkan seperti terlihat pada gambar 2.3 (b).



Gambar 2.3

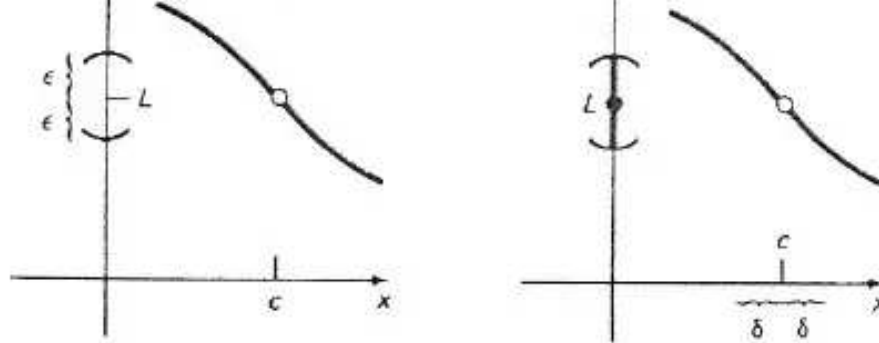
Gambar-gambar dalam Gambar 2.2 dan Gambar 2.3 diharapkan dapat memudahkan kita untuk memahami definisi formal dari limit sebagai berikut.

Definisi

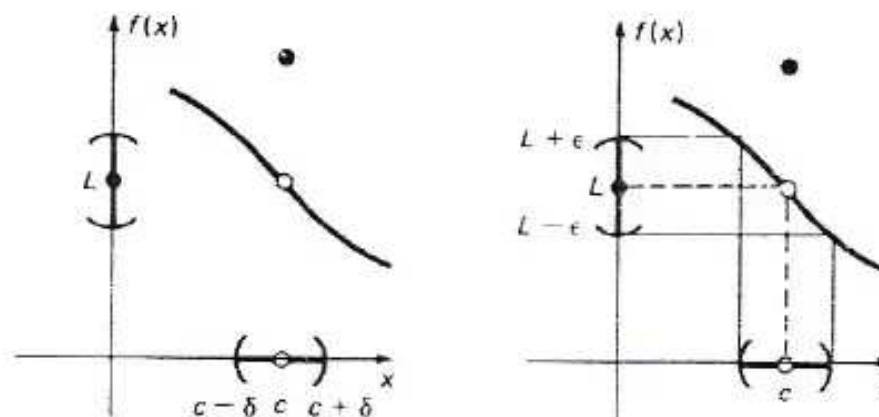
Limit $f(x)$ untuk x mendekati c adalah L , ditulis

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (betapapun kecilnya), terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga apabila $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga



apabila $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$

Gambar 2.4

Contoh 2

Buktikan bahwa $\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 7) = 5$

Analisis pendahuluan:

Misalkan $\varepsilon > 0$ sembarang, kita harus dapat menemukan bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga apabila $0 < |x - 4| < \delta$ berlaku $|(3x - 7) - 5| < \varepsilon$.

Perhatikan $|(3x - 7) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 12| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow |3(x - 4)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |3||x - 4| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Oleh karena itu dapat dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Tentu saja dapat dipilih bilangan δ yang kurang

dari $\frac{\varepsilon}{3}$.

Bukti:

Ambil sembarang bilangan $\varepsilon > 0$. Kita pilih $\delta > 0$, yaitu $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Apabila $0 < |x - 4| < \delta$

$$\begin{aligned} \text{maka berlaku } |(3x - 7) - 5| &= |3x - 12| \\ &= |3(x - 4)| \\ &= 3|x - 4| \\ &= 3|x - 4| \\ &< 3\delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti $\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 7) = 5$. \square

Contoh 3

Buktikan bahwa $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$

Analisis pendahuluan:

Misalkan $\varepsilon > 0$ sembarang, kita harus dapat menemukan bilangan $\delta > 0$ sedemikian

sehingga apabila $0 < |x - 2| < \delta$ berlaku $\left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \text{Perhatikan } \left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon &\Leftrightarrow \left| \frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |(2x + 1) - 5| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |2(x - 2)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow 2|x - 2| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Oleh karena itu dapat dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ atau yang lebih kecil dari $\frac{\varepsilon}{2}$.

Bukti:

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$ dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ sehingga $0 < |x - 2| < \delta$ berlaku

$$\begin{aligned}
\left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| &= \left| \frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2} - 5 \right| \\
&= |(2x + 1) - 5| \\
&= |2(x - 2)| \\
&= 2|x - 2| \\
&= |x - 2| \\
&< \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Berarti terbukti bahwa $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$. \square

Contoh 4

Buktikan $\lim_{x \rightarrow c} (mx + b) = mc + b$

Analisis Pendahuluan:

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, akan dicari bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga apabila $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $|(mx + b) - (mc + b)| < \varepsilon$.

Perhatikan:

$$\begin{aligned}
|(mx + b) - (mc + b)| < \varepsilon &\Leftrightarrow |mx - mc| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |m| |x - c| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |x - c| < \frac{\varepsilon}{|m|} \text{ asalkan } m \neq 0
\end{aligned}$$

Dapat dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$.

Bukti:

Untuk $m = 0$, bukti cukup jelas.

Misal $m \neq 0$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$. Oleh karenanya jika $0 < |x - c| < \delta$

$$\begin{aligned}
\text{maka berlaku } |(mx + b) - (mc + b)| &= |(mx + b) - (mc + b)| \\
&= |mx - mc|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |m| |x - c| \\
&< |m| \frac{\varepsilon}{|m|} = \varepsilon. \square
\end{aligned}$$

Contoh 5

Buktikan, jika $c > 0$, maka $\lim \sqrt{x} = \sqrt{c}$

Analisis Pendahuluan

Akan dicari bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga apabila $0 < |x - c| < \delta$ berlaku

$|\sqrt{x} - \sqrt{c}| < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$.

Perhatikan:

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{c}| &= \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{c})(\sqrt{x} + \sqrt{c})}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \right| \\ &= \left| \frac{x - c}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \right| \\ &= \frac{|x - c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \\ &\leq \frac{|x - c|}{\sqrt{c}} \end{aligned}$$

Dapat dipilih $\delta = \varepsilon\sqrt{c}$

Bukti:

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$ dipilih $\delta = \varepsilon\sqrt{c}$. Oleh karenanya jika $0 < |x - c| < \delta$ maka

berlaku $|\sqrt{x} - \sqrt{c}| \leq \frac{|x - c|}{\sqrt{c}} < \frac{\varepsilon\sqrt{c}}{\sqrt{c}} < \varepsilon$. \square

2.4 Teorema Limit

Teorema 2.4.1

Misalkan n bilangan bulat positif, k konstanta, serta f dan g fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c , maka:

- 1) $\lim_{x \rightarrow c} k = k$
- 2) $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
- 3) $\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$

$$4) \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}, \text{ asalkan } \lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$$

$$8) \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$$

$$9) \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}, \text{ asalkan } \lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0 \text{ untuk } n \text{ bilangan genap.}$$

Bukti teorema 2.4.1 ini dibiarkan untuk latihan.

Dengan menggunakan teorema ini maka penentuan nilai limit suatu fungsi akan menjadi lebih mudah.

Contoh 6

Carilah $\lim_{x \rightarrow 3} 5x^2$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} 5x^2 &= 5 \lim_{x \rightarrow 3} x^2 && \text{teorema 2.2.1 3)} \\ &= 5 \left[\lim_{x \rightarrow 3} x \right]^2 && \text{teorema 2.2.1 8)} \\ &= 5(3)^2 && \text{teorema 2.2.1 2)} \\ &= 45. \end{aligned}$$

Contoh 7

Carilah $\lim_{x \rightarrow 3} (5x^2 - 20)$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (5x^2 - 20) &= \lim_{x \rightarrow 3} 5x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 20 && \text{teorema 2.2.1 5)} \\ &= 45 - 20 && \text{teorema 2.2.1 1)} \\ &= 25. \end{aligned}$$

Contoh 8

$$\sqrt{5x^2 - 20}$$

Carilah $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x^2 - 20}}{x}$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x^2 - 20}}{x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{5x^2 - 20}}{\lim_{x \rightarrow 3} x} && \text{teorema 2.2.1 7)} \\ &= \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} 5x^2 - 20}}{3} && \text{teorema 2.2.1 2) dan 9)} \\ &= \frac{\sqrt{25}}{3} && \text{dari contoh 7.} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Ingat, bentuk $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ disebut polinom dan hasil bagi polinom disebut fungsi rasional, $\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$.

Teorema 2.4.2

- 1) Jika f fungsi polinom maka $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$
- 2) Jika f fungsi rasional maka $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ asalkan nilai penyebut di c tidak nol.

Teorema 2.4.2 ini dapat dibuktikan dengan menggunakan teorema 2.4.1.

Dengan adanya teorma 2.4.2 maka penentuan nilai limit fungsi polinom atau fungsi rasional menjadi sangat mudah, tentunya asalkan syarat perlu pada teorema tersebut untuk fungsi rasional dipenuhi.

Contoh 9

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 2} 7x^5 - 10x^4 - 13x + 6$

Penyelesaian: $\lim_{x \rightarrow 2} 7x^5 - 10x^4 - 13x + 6 = 7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6 = 44$

Contoh 10

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$

Penyelesaian: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8} = \frac{7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6}{3(2)^2 - 6(2) - 8} = \frac{44}{-8} = -\frac{11}{2}$.

Contoh 11

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x + 7}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x + 7}{(x-1)^2}$

Penyelesaian:

Teorema 2.4.2 tidak dapat digunakan karena nilai penyebut di $x = 1$ adalah nol dan teorema 2.4.1 bagian 7) juga tidak dapat digunakan karena limit penyebut nol. Tetapi, karena limit pembilang 11, maka selama x mendekati 1 terjadi pembagian bilangan yang dekat 11 dengan bilangan positif dekat 0. Hasilnya adalah sebuah bilangan positif yang besar dan dapat dibuat besar sekehendak kita dengan membiarkan x cukup dekat dengan 1. Dalam hal ini dikatakan limitnya tidak ada. Contoh seperti ini akan diuraikan lebih lanjut pada bagian lain.

Contoh 12

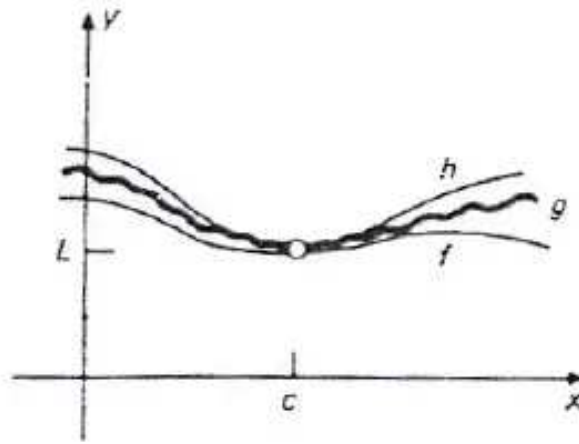
Tentukan $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6}$

Penyelesaian:

Sebelum mencoba mengambil limitnya terlebih dahulu diadakan penyederhanaan pecahan dengan faktorisasi.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{x+3} \\ &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

sekitar c , kecuali mungkin di c . Jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$,
maka $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$.



Bukti:

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$

Karena $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, berarti terdapat bilangan $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Karena $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$, berarti terdapat bilangan $\delta_2 > 0$ sedemikian hingga

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Dipilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Apabila $0 < |x - c| < \delta$ maka berlaku

$$\begin{aligned} L - \varepsilon &< f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon \\ \Rightarrow L - \varepsilon &< g(x) < L + \varepsilon \\ \Leftrightarrow |g(x) - L| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$.

Contoh 13

Dapat diselidiki bahwa $1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ untuk semua x yang mendekati tetapi

tidak 0. Tunjukkan bahwa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Fungsi dan Limit Fungsi 27

Penyelesaian:

Misalkan $f(x) = 1 - \frac{x^2}{6}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, dan $h(x) = 1$, maka $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x^2}{6} = 1$

dan $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$, sehingga diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x^2}{6} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Berdasarkan teorema 2.4.3 maka dapat disimpulkan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

SOAL 2

1. Untuk fungsi $f(x) = 3x^3 + x$, hitunglah masing-masing nilai

a. $f(1)$

c. $f(\frac{1}{2})$

b. $f(-6)$

d. $f(\frac{1}{x})$

2. Untuk fungsi $g(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$, hitunglah masing-masing nilai

a. $f(1)$

c. $f(\frac{1}{4})$

b. $f(9)$

d. $f(\frac{1}{x^4})$

3. Gambarlah grafik fungsi

a. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & , \quad x \leq 1 \\ 3x & , \quad x > 1 \end{cases}$

b. $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad x \leq 0 \\ 1 & , \quad 0 < x < 2 \\ x + 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$

4. Jika $f(x) = x^2 + x$ dan $g(x) = \frac{2}{x+3}$, tentukan:

a. $(f+g)(2)$

d. $(f/g)(1)$

b. $(f-g)(2)$

e. $(g \circ f)(1)$

c. $(fg)(1)$

f. $(f \circ g)(1)$

5. Jika $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ dan $g(x) = \frac{2}{x}$, tentukan:

a. $(fg)(x)$

d. $(f \circ g)(x)$

b. $(f/g)(x)$

e. $f^4(x) + g^4(x)$

c. $(g \circ f)(x)$

$$c. (8 - 5j)(x)$$

Dalam soal nomor 6 – 10, buktikan limit-limit tersebut.

$$6. \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 7) = 2$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -2} (2x - 4) = -8$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 7$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x} = 2$$

11. Buktikan bahwa jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = M$, maka $L = M$.

12. Misalkan F dan G adalah fungsi-fungsi sedemikian sehingga $0 \leq F(x) \leq G(x)$ untuk semua x dekat dengan c , kecuali mungkin di c , buktikan bahwa jika $\lim_{x \rightarrow c} G(x) = 0$ maka $\lim_{x \rightarrow c} F(x) = 0$.

Untuk soal-soal berikut (no. 13 s.d. 20), tentukan nilai limit fungsi berikut

$$13. \lim_{x \rightarrow 3} (7x - 4)$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - 5x)$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} (4x^2 - 3)(7x^3 + 2x)$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^4 - 8}{x^3 + 24}$$

$$17. \lim_{u \rightarrow 2} \frac{u^2 - 2u}{u^2 - 4}$$

$$18. \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2 + 7t + 7}{t^2 - 4t - 5}$$

$$19. \lim_{w \rightarrow -2} \frac{(w + 2)(w^2 - w - 6)}{w^2 + 4w + 4}$$

20. $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)(y^2+2y-3)}{y^2-2y+1}$

Definisi

Limit $f(x)$ untuk x mendekati c dari **kiri** adalah L , ditulis

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (betapapun kecilnya), terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga apabila $0 < c - x < \delta$, maka berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Limit $f(x)$ untuk x mendekati c dari **kanan** adalah L , ditulis

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (betapapun kecilnya), terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga apabila $0 < x - c < \delta$, maka berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Teorema 2.5.1

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ jika dan hanya jika } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

Contoh 14

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$$

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, dan $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, selanjutnya gambarkan grafik fungsi f .

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2 - x = 1$$

Karena $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ maka $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

Contoh 15

$$g(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$, dan $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2, \quad x < 1 \\ x^2, \quad x > 1 \end{array} \right.$$

selanjutnya gambarkan grafik fungsi g

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$, dan $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, selanjutnya gambarkan grafik fungsi f .

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3 - x = 2$$

Karena $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ maka $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ tidak ada.

2.6 Limit Tak Hingga

Contoh 16

Carilah $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ jika ada.

Penyelesaian:

| x | $\frac{1}{x^2}$ |
|-------------|-----------------|
| ± 1 | 1 |
| $\pm 0,5$ | 4 |
| $\pm 0,2$ | 25 |
| $\pm 0,1$ | 100 |
| $\pm 0,05$ | 400 |
| $\pm 0,01$ | 10.000 |
| $\pm 0,001$ | 1.000.000 |

Semakin x mendekati 0, x^2 juga semakin dekat dengan 0, dan nilai $\frac{1}{x^2}$ menjadi sangat besar

(lihat tabel di samping). Nampak dari grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$ yang diperlihatkan pada gambar 2.4 bahwa nilai $f(x)$ dapat dibuat sangat besar dengan mengambil x cukup dekat ke 0. dengan demikian nilai $f(x)$ tidak mendekati suatu

bilangan, sehingga $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ tidak ada.

Untuk menunjukkan jenis perilaku seperti yang ditunjukkan dalam contoh ini kita gunakan notasi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Hal ini tidak berarti bahwa kita menganggap ∞ sebagai suatu bilangan. Tidak juga

bermakna bahwa limit tersebut ada. Notasi tersebut hanyalah menyatakan cara khusus untuk menunjukkan bahwa limit tersebut tidak ada.

Secara umum kita tuliskan

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

untuk menunjukkan nilai $f(x)$ menjadi semakin besar ketika x semakin mendekati c .

Limit jenis serupa, untuk fungsi yang menjadi negatif tak berhingga ketika x mendekati c dituliskan dengan

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

Contoh 17

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

Hal ini juga dapat diberlakukan untuk limit kiri dan limit kanan

| | |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$ | $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$ | $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$ |

Sebuah garis $x = c$ disebut asimtot tegak kurva $y = f(x)$ jika paling sedikit salah satu dari pernyataan berikut benar:

| | | |
|-----------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ | $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$ | $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$ | $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$ | $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$ |

Sebagai contoh, sumbu Y atau $x = 0$ merupakan asimtot tegak kurva $y = \frac{1}{x^2}$ karena

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Contoh 18

Hitunglah $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x$ dan $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \sin x}{\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \cos x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \sin x}{\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \cos x} = \frac{1}{0} = -\infty$$

2.7 Kekontinuan Fungsi

Definisi

Misalkan $f: A \rightarrow R$ suatu fungsi, maka

- Fungsi f dikatakan kontinu di $c \in A$ jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$
- Fungsi f dikatakan kontinu pada himpunan A jika f kontinu disetiap anggota A .

Definisi a mengandung arti bahwa f dikatakan kontinu di $c \in A$ jika dipenuhi ketiga syarat berikut:

- $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ada
- Nilai $f(c)$ ada
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Contoh 19

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

$$1. f(x) = \begin{cases} & \\ 1 & , \quad x = 2 \end{cases}$$

Apakah f kontinu di $x = 2$?

Gambarkan grafik fungsi f .

Penyelesaian:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4 \quad (\text{ada})$$

$$2) f(2) = 1 \quad (\text{ada})$$

3) Karena $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ maka f tidak kontinu di $x = 2$.

Gambarkan grafik fungsi f diserahkan kepada pembaca.

$$2. f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Apakah f kontinu di $x = 2$?

Gambarkan grafik fungsi f .

Penyelesaian:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4 \quad (\text{ada})$$

$$2) f(2) \text{ tidak ada}$$

3) Karena $f(2)$ tidak ada, maka f tidak kontinu di $x = 2$.

Gambarkan grafik fungsi f diserahkan kepada pembaca.

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & , \quad x \neq 2 \\ 4 & , \quad x = 2 \end{cases}$$

Apakah f kontinu di $x = 2$?

Gambarkan grafik fungsi f .

Penyelesaian:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4 \quad (\text{ada})$$

$$2) f(2) = 4 \quad (\text{ada})$$

3) Karena $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ maka f kontinu di $x = 2$.

Gambarkan grafik fungsi f diserahkan kepada mahasiswa.

$$4. f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$$

Apakah f kontinu di $x = 1$?

Gambarkan grafik fungsi f .

Penyelesaian:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 - x = 1$$

$$\text{Karena } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \text{ maka } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad (\text{ada})$$

Lihat kembali contoh 14.

$$2) f(1) = 2 - 1 = 1 \quad (\text{ada})$$

3) Karena $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, maka f kontinu di $x = 1$.

Gambarkan grafik fungsi f diserahkan kepada mahasiswa.

$$5. g(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$$

Apakah g kontinu di $x = 1$?

Gambarkan grafik fungsi g .

Penyelesaian:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 - x = 2$$

Karena $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ maka $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ tidak ada.

(lihat kembali contoh 15)

Karena $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ tidak ada, maka g tidak kontinu di $x = 1$.

Teorema 2.7.1

1. Fungsi polinom (fungsi suku banyak) kontinu pada R .
2. Jika fungsi-fungsi f dan g keduanya kontinu di c dan k sembarang konstanta maka fungsi $f + g$, $f - g$, kf , f/g (asal $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$) juga kontinu di c .
3. Jika g fungsi yang kontinu di c dan f fungsi kontinu di $g(c)$ maka $f \circ g$ kontinu di c .

SOAL 2

1. Tentukan limit (sepihak) berikut:

a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$

c. $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, dan $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

2. Apakah fungsi-fungsi berikut kontinu di 2?

a. $h(t) = \begin{cases} \frac{t^3 - 8}{t - 2}, & t \neq 2 \\ 12, & t = 2 \end{cases}$

b. $h(t) = \begin{cases} \frac{4t - 8}{t - 2}, & t \neq 2 \\ 2, & t = 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{ll} x+3, & x < 2 \\ x^2+1, & x \geq 2 \end{array} \right. \\ \text{c. } g(x) &= \left\{ \begin{array}{ll} x+3, & x < 2 \\ x^2+1, & x \geq 2 \end{array} \right. \\ \text{d. } f(x) &= \left\{ \begin{array}{ll} -3x+4, & x \leq 2 \\ -2, & x > 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$3. f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right.$$

- a. Apakah f kontinu di 0?
b. Apakah f kontinu di 1?

$$4. g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2, & x < 0 \\ -x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{array} \right.$$

- a. Apakah g kontinu di 0?
b. Apakah g kontinu di 1?

3.1 Pengertian Turunan Fungsi

Definisi

Turunan fungsi f adalah fungsi f' yang nilainya di c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limit ini ada.

Contoh 1

Jika $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$, maka turunan f di $x = 2$ adalah

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h)^2 + 2(2+h) + 4 - (3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(4 + 4h + h^2) + 4 + 2h + 4 - (12 + 4 + 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 3h^2 + 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12 + 3h + 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 3h + 2) \\ &= 14 \end{aligned}$$

Jika f mempunyai turunan di setiap x anggota domain maka

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Jika $y = f(x)$ turunan y atau turunan f dinotasikan dengan y' , atau $\frac{dy}{dx}$, atau $f'(x)$, atau

$$\frac{df(x)}{dx}$$

Contoh 2

Jika $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$, maka turunan f di sembarang x adalah

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 + 2(x+h) + 4 - (3x^2 + 2x + 4)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) + 2x + 2h + 4 - (3x^2 + 2x + 4)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2 + 2h}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h + 2)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h + 2) \\
&= 6x + 2
\end{aligned}$$

3.2 Turunan Fungsi Konstan dan Fungsi Pangkat

1. Jika $f(x) = k$ dengan k konstan untuk setiap x (f fungsi konstan), maka $f'(x) = 0$.

Bukti:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} \\
&= 0
\end{aligned}$$

2. Jika $f(x) = x$ untuk setiap x (f fungsi identitas), maka $f'(x) = 1$.

Bukti:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

3. Jika $f(x) = x^n$ dengan n bilangan bulat positif, untuk setiap x , maka $f'(x) = nx^{n-1}$.

Bukti:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

Contoh 3

Jika $f(x) = x^5$, maka turunan f adalah $f'(x) = 5x^4$

3.3 Sifat-sifat Turunan

Jika k suatu konstanta, f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, u dan v fungsi-fungsi dalam x sehingga $u = f(x)$ dan $v = g(x)$ maka berlaku:

1. Jika $y = ku$ maka $y' = k(u')$
2. Jika $y = u + v$ maka $y' = u' + v'$
3. Jika $y = u - v$ maka $y' = u' - v'$
4. Jika $y = uv$ maka $y' = u'v + uv'$
5. Jika $y = \frac{u}{v}$ maka $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Contoh 4

1. Jika $f(x) = 3x^5$, maka $f'(x) = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$
2. Jika $f(x) = 3x^5 + 2x$, maka $f'(x) = 15x^4 + 2$
3. Jika $f(x) = 3x^5 - 2x$, maka $f'(x) = 15x^4 - 2$
4. Jika $f(x) = (3x^5 + 2x)(4x + 7)$, maka $f'(x) = (15x^4 + 2)(4x + 7) + (3x^5 + 2x)4$
5. Jika $f(x) = \frac{3x^5 + 2x}{4x + 7}$, maka $f'(x) = \frac{(15x^4 + 2)(4x + 7) - (3x^5 + 2x)4}{(4x + 7)^2}$

6. Jika $f(x) = x^p$ dengan p bilangan bulat negatif maka $f(x) = x^{-n}$ dengan $-n = p$,
sehingga $f(x) = \frac{1}{x^n}$. Dengan menggunakan turunan $y = \frac{u}{v}$ diperoleh

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} \\
 &= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} \\
 &= -nx^{n-1}x^{-2n} \\
 &= -nx^{-n-1} \\
 &= px^{p-1}
 \end{aligned}$$

3.4 Aturan Rantai (untuk Turunan Fungsi Komposisi)

Untuk menentukan turunan $y = (3x^4 + 7x - 8)^9$ dengan cara mengalikan bersama kesembilan faktor $(3x^4 + 7x - 8)$ kemudian mencari turunan polinom berderajat 36 tentulah sangat melelahkan. Cara yang mudah untuk menentukan turunan $y = (3x^4 + 7x - 8)^9$ adalah dengan menggunakan aturan rantai.

Aturan Rantai

Misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ menentukan fungsi komposisi yang dirumuskan dengan $y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$. Jika g terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di $u = g(x)$ maka $y = (f \circ g)(x)$ terdiferensialkan di x dan

$$\begin{aligned}
 y' &= (f \circ g)'(x) \\
 &= f'(g(x)) g'(x)
 \end{aligned}$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Fungsi komposisi dapat diperluas menjadi komposisi 3 fungsi, 4 fungsi dan seterusnya.

$$\begin{aligned}
 \text{Jika } y &= f(u) \\
 u &= g(v) \\
 v &= h(x)
 \end{aligned}$$

$$\text{yakni } y = (f \circ g \circ h)(x)$$

$$\text{maka } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$$

Contoh 5

Tentukan turunan $y = (3x^4 + 7x - 8)^9$

Penyelesaian:

$$\text{Misalkan } u = 3x^4 + 7x - 8 \quad \rightarrow \frac{du}{dx} = 12x^3 + 7$$

$$y = u^9 \quad \rightarrow \frac{dy}{du} = 9u^8.$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 9u^8(12x^3 + 7) \\ &= 9(3x^4 + 7x - 8)^8(12x^3 + 7) \end{aligned}$$

3.5 Turunan Fungsi Invers

Misalkan $y = f(x)$ dan f mempunyai invers f^{-1} sehingga $x = f^{-1}(y)$. Dengan menggunakan aturan rantai pada $x = f^{-1}(y)$ diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{df^{-1}(y)}{dy} \frac{dy}{dx} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dx} \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \end{aligned}$$

3.6 Turunan Fungsi Implisit

Fungsi implisit secara umum dapat ditulis sebagai $f(x, y) = 0$ dengan y sebagai fungsi dalam x .

Contoh fungsi implisit: 1) $y - 2x^3 - 8 = 0$

$$2) 2x^3y - 7y - x^2 + 1 = 0$$

Contoh 6

1. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi yang dirumuskan dengan $y - 2x^3 - 8 = 0$

Penyelesaian:

Apabila kedua ruas $y - 2x^3 - 8 = 0$ diturunkan terhadap x , maka diperoleh:

Turunan Fungsi

$$\frac{dy}{dx} - 6x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 6x^2$$

2. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi yang dirumuskan dengan $2x^3y - 7y - x^2 + 1 = 0$

2. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi yang dirumuskan dengan $2x^3y - 7y - x^2 + 1 = 0$

Penyelesaian:

Apabila kedua ruas $2x^3y - 7y - x^2 + 1 = 0$ diturunkan terhadap x , maka diperoleh:

$$6x^2y + 2x^3 \frac{dy}{dx} - 7 \frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} (2x^3 - 7) = 2x - 6x^2y$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 6x^2y}{2x^3 - 7}$$

3.7 Turunan Tingkat Tinggi

Jika fungsi diturunkan maka turunannya, yaitu f' juga berupa fungsi sehingga boleh jadi f' mempunyai turunan tersendiri yang dinyatakan oleh $(f')' = f''$. Fungsi yang f''

baru ini disebut turunan kedua dari f karena dia merupakan turunan dari turunan f . Dengan notasi Leibniz kita tuliskan turunan kedua dari $y = f(x)$ sebagai

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Notasi lain adalah $f''(x) = D^2f(x)$

Contoh 7

Jika $f(x) = 3x^4 + 7x - 8$, tentukan $f''(x)$.

Penyelesaian:

$$f'(x) = 12x^3 + 7$$

untuk mencari $f''(x)$ kita turunkan $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx} (12x^3 + 7) \\ &= 36x^2 \end{aligned}$$

Contoh 8

Jika $f(x) = (3x^5 + 2x)(4x + 7)$, tentukan $f''(x)$.

Penyelesaian:

$$f'(x) = \left(\frac{d}{dx} (3x^5 + 2x) \right) (4x + 7) + (3x^5 + 2x) \left(\frac{d}{dx} (4x + 7) \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= (15x^4 + 2)(4x + 7) + (3x^5 + 2x)4 \\
 f''(x) &= \frac{d}{dx} [(15x^4 + 2)(4x + 7) + (3x^5 + 2x)4] \\
 &= \frac{d}{dx} [(15x^4 + 2)(4x + 7)] + \frac{d}{dx} [(3x^5 + 2x)4] \\
 &= \left(\frac{d}{dx} (15x^4 + 2) \right) (4x + 7) + (15x^4 + 2) \left(\frac{d}{dx} (4x + 7) \right) + \\
 &\quad \left(\frac{d}{dx} (3x^5 + 2x) \right) 4 + (3x^5 + 2x) \left(\frac{d}{dx} 4 \right) \\
 &= 60x^3(4x + 7) + (15x^4 + 2) 4 + (15x^4 + 2) 4 + (3x^5 + 2x).0 \\
 &= 60x^3(4x + 7) + (15x^4 + 2) 4 + (15x^4 + 2) 4
 \end{aligned}$$

3.8 Turunan Fungsi Aljabar dan Fungsi Transenden



3.8.1 Turunan Fungsi Rasional

Contoh-contoh tentang turunan yang diuraikan sebelumnya (contoh 3) adalah contoh-contoh turunan fungsi rasional. Jadi turunan fungsi rasional ini tidak perlu dibahas kembali.

3.8.2 Turunan Fungsi Irrasional

Fungsi Irrasional adalah akar dari fungsi-fungsi rasional

Contoh 9

Tentukan turunan $y = \sqrt[n]{x}$ dengan n bilangan bulat positif

Penyelesaian: $y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n$ sehingga $\frac{dx}{dy} = ny^{n-1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{1-n} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{y^{1-n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}}$$

Contoh 10

Tentukan turunan $y = \sqrt{x^3 + 4x}$

Penyelesaian: $y = \sqrt{x^3 + 4x} = (x^3 + 4x)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \text{Dengan aturan rantai diperoleh: } y' &= \frac{1}{2} (x^3 + 4x)^{-\frac{1}{2}} (3x^2 + 4) \\ &= \frac{3x^2 + 4}{2\sqrt{x^3 + 4x}} \end{aligned}$$

3.8.3 Turunan Fungsi Trigonometri

Akan dicari turunan fungsi kosinus sebagai berikut.

Ingat: $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Jika $f(x) = \cos x$, maka

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

Jadi,

jika $f(x) = \cos x$, maka $f'(x) = -\sin x$

Analog:

$$\text{jika } f(x) = \sin x, \quad \text{maka } f'(x) = \cos x$$

$$\text{jika } f(x) = \operatorname{tg} x, \quad \text{maka } f'(x) = \sec^2 x$$

$$\text{jika } f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad \text{maka } f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

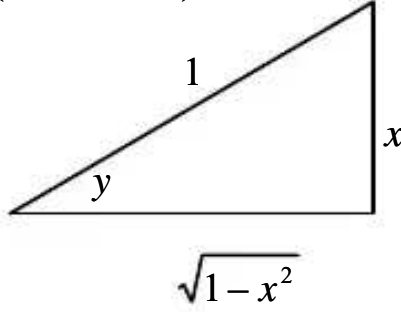
$$\text{jika } f(x) = \sec x, \quad \text{maka } f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$\text{jika } f(x) = \operatorname{cosec} x, \quad \text{maka } f'(x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$$

3.8.4 Turunan Fungsi Siklometri

Fungsi siklometri adalah invers fungsi trigonometri.

Akan dicari turunan invers fungsi sinus (arcus sinus) berikut.

$$y = \arcsin x \rightarrow x = \sin y \rightarrow$$


$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cos y = \sqrt{1-x^2}$$

Jadi,

$$\text{jika } y = \arcsin x, \quad \text{maka } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Analog:

$$\text{jika } y = \arccos x, \quad \text{maka } y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{jika } y = \arctan x, \quad \text{maka } y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{jika } y = \operatorname{arccot} x, \quad \text{maka } y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{jika } y = \operatorname{arcsec} x, \quad \text{maka } y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{jika } y = \operatorname{arccsc} x, \quad \text{maka } y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

3.8.5 Turunan Fungsi Logaritma

Akan dicari turunan $f(x) = \ln x$ berikut.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x} \cdot x}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}{x}$$

$$= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}}}{\lim_{h \rightarrow 0} x}$$

Mengingat (1) $\lim_{h \rightarrow 0} \ln f(x) = \ln \lim_{h \rightarrow 0} f(x)$ dan (2) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} = e$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}}}{\lim_{h \rightarrow 0} x} \\ &= \frac{\ln \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}}}{\lim_{h \rightarrow 0} x} \\ &= \frac{\ln e}{x} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Jadi,

$$\text{jika } f(x) = \ln x, \quad \text{maka } f'(x) = \frac{1}{x}$$

Selanjutnya jika $y = {}^a \log x$ maka turunannya dapat dicari sebagai berikut.

$$\begin{aligned} y = {}^a \log x &\Leftrightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a} \\ &= \frac{1}{\ln a} \ln x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } y' &= \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x \ln a} \end{aligned}$$

Jadi,

$$\text{jika } y = {}^a \log x, \quad \text{maka } y' = \frac{1}{x \ln a}$$

3.8.6 Turunan Fungsi Eksponensial

Akan dicari turunan $y = a^x$ sebagai berikut.
 $y = a^x \Leftrightarrow \ln y = \ln a^x$

$$\Leftrightarrow \ln y = x \ln a$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln a} \ln y$$

Sehingga $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{y}$

Diperoleh $\frac{dy}{dx} = y \ln a$
 $= a^x \ln a$

Jadi,

$$\text{jika } y = a^x, \text{ maka } y' = a^x \ln a$$

Khususnya untuk $a = e$, jika $y = e^x$, maka $y' = e^x \ln e$
 $= e^x$

Jadi,

$$\text{jika } y = e^x, \text{ maka } y' = e^x$$

3.8.7 Turunan Fungsi Hiperbolik

Definisi

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Jika $f(x) = \sinh x$, maka dengan menggunakan turunan fungsi eksponensial diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \\ &= \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh x. \end{aligned}$$

Jadi,

$$\text{jika } f(x) = \sinh x, \text{ maka } f'(x) = \cosh x$$

3.9 Turunan Fungsi Parameter

Apabila disajikan persamaan berbentuk:

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned}$$

maka persamaan ini disebut persamaan parameter dari x dan y , dan t disebut parameter. Dari bentuk parameter ini dapat dicari $\frac{dy}{dx}$ dengan cara sebagai

berikut. Dari $x = f(t)$ dibentuk $t = h(x)$ dengan h fungsi invers dari f . Nampak bahwa $y = g(t)$ merupakan bentuk fungsi komposisi

$$\begin{aligned} y &= g(t) \\ &= g(h(x)) \end{aligned}$$

Diperoleh $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$

sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

SOAL

Carilah $\frac{dy}{dx}$ untuk yang berikut

1. $y = (3x^4 + 2x^2 + x)(x^2 + 7)$

2. $y = (x^3 + 3x^2)(4x^2 + 2)$

3. $y = \frac{1}{3x^2 + 1}$

4. $y = \frac{2}{5x^2 - 1}$

5. $y = \frac{1}{4x^2 - 3x + 9}$

6. $y = \frac{x-1}{x+1}$

7. $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$

Dengan aturan rantai tentukan $\frac{dy}{dx}$ untuk yang berikut

8. $y = (2 - 9x)^{15}$

9. $y = (5x^2 + 2x - 8)^5$

10. $y = \frac{1}{(4x^2 - 3x + 9)^9}$

11. $y = \sin(3x^2 + 11x)$

12. $y = \cos(3x^4 - 11x)$

13. $y = \sin^3 x$

14. $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$

15. $y = \sin\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)$

16. $y = \cos\left(\frac{x^2-1}{x+4}\right)$

17. $y = \arcsin(3x^4 - 11x)$

18. $y = \arctg(3x^4 - 11x)^8$

19. $y = \ln(5x^2 + 2x - 8)$

20. $y = e^{(2-9x)}$

Tentukan turunan fungsi implisit berikut

21. $x^2 + y^2 = 9$

22. $4x^2 + 9y^2 = 36$

23. $xy = 4$

24. $xy^2 - x + 16 = 0$

25. $x^3 - 3x^2y + 19xy = 0$

26. $4x^3 + 11xy^2 - 2y^3 = 0$

27. $\sqrt{xy} + 3y = 10x$

28. $xy + \sin y = x^2$

29. $\cos(xy) = y^2 + 2x$

30. $6x - \sqrt{2xy} + xy^3 = y^2$

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ untuk fungsi parameter berikut

31. $y = 2 - 9t$
 $x = \sin t$

34. $x = \ln(2t - 9)$
 $y = (t^2 + 7)^3$

$$32. \ y = 2 - 9t^2$$

$$x = \arcsin (t - 1)$$

$$33. \ x = \ln (2 - 9t)$$

$$y = \sin t$$

$$35. \ x = e^{(2t-9)}$$

$$y = \operatorname{cosec} t$$

$$36. \ y = \sec (t - 1)$$

$$x = \operatorname{tg} (t - 1)$$

Definisi 4.0.1

Fungsi F disebut anti turunan (integral tak tentu) dari fungsi f pada himpunan D jika

$$F'(x) = f(x)$$

untuk setiap $x \in D$.

Fungsi integral tak tentu f dinotasikan dengan $\int f(x) dx$ dan $f(x)$ dinamakan integran.

Jadi $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$.

Contoh 1

$\sin x$, $\sin x + 5$, $\sin x - \sqrt{7}$ adalah fungsi-fungsi integral tak tentu dari $\cos x$ pada seluruh garis real, sebab derivatif mereka sama dengan $\cos x$ untuk semua x .

Sifat 4.0.2:

Misalkan f dan g mempunyai anti turunan dan k suatu konstanta, maka

1. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$
2. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Teorema 4.0.3

Jika F dan G keduanya integral tak tentu dari f pada interval I , maka $F(x)$ dan $G(x)$ berselisih suatu konstanta pada I

Jadi $F(x) - G(x) = C$ dengan C sembarang konstanta.

Akibat 4.0.4

Jika F suatu fungsi integral tak tentu dari f , maka

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

dengan C konstanta sembarang.



4.1 Rumus Dasar

$$1. \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1$$

$$2. \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, x \neq 0$$

$$3. \int e^x dx = e^x + C$$

$$4. \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, a \neq 1$$

$$a > 0$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7. \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$8. \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$9. \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$10. \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$11. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$= -\arccot x + C$$

$$12. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$= -\arccos x + C$$

$$13. \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec} x + C$$

$$= -\operatorname{arccsc} x + C$$

$$14. \int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$15. \int \cosh x dx = \sinh x + C$$

SOAL

Tentukan:

$$1. \int (x-2)^2 dx$$

$$2. \int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3} dx$$

$$3. \int \frac{1+\sqrt{x}}{x} dx$$

$$4. \int (\sin x - \sqrt{x}) dx$$

$$5. \int 2^x dx$$

4.2 Integral dengan Substitusi

Masalah: Tentukan $\int (2x+5)^{2006} dx$

Untuk menyelesaikan permasalahan seperti ini dapat digunakan aturan seperti pada teorema berikut.

Teorema 4.2.1

Jika $u = g(x)$ yang didefinisikan pada interval I mempunyai invers $x = g^{-1}(u)$ dan fungsi-fungsi g dan g^{-1} keduanya mempunyai derivatif yang kontinu pada intervalnya masing-masing, dan f kontinu pada interval di mana g^{-1} didefinisikan, maka

$$\int f\{g(x)\} g'(x) dx = \int f(u) du$$

Contoh 2

Tentukan $\int (2x + 5)^{2006} dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{Substitusikan } u = 2x + 5 & \rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \\ & du = 2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{maka } \int (2x + 5)^{2006} dx &= \int \frac{1}{2} (2x + 5)^{2006} 2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int u^{2006} du \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2007} u^{2007} + C \\ &= \frac{1}{4014} (2x + 5)^{2007} + C \end{aligned}$$

Contoh 3

Tentukan $\int x(3x^2 + 5)^{2006} dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{Substitusikan } u = 3x^2 + 5 & \rightarrow \frac{du}{dx} = 6x \\ & du = 6x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{maka } \int x(3x^2 + 5)^{2006} dx &= \int \frac{1}{6} (3x^2 + 5)^{2006} 6x dx \\ &= \frac{1}{6} \int u^{2006} du \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{1}{2007} u^{2007} + C$$

$$= \frac{1}{12042} (3x^2 + 5)^{2007} + C$$

Contoh 4

Tentukan $\int \cos \frac{1}{2} x \, dx$

Penyelesaian:

$$\text{Substitusikan } u = \frac{1}{2} x \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad du = \frac{1}{2} \, dx$$

$$\begin{aligned} \text{maka} \quad \int 2 \cos \frac{1}{2} x \, \frac{1}{2} dx &= 2 \int \cos u \, du \\ &= 2 \sin u + C \\ &= 2 \sin \frac{1}{2} x + C \end{aligned}$$

SOAL

Tentukan:

$$1. \int 3(x-2)^9 \, dx$$

$$6. \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$$

$$2. \int x(5x^2 + 2)^9 \, dx$$

$$7. \int \frac{dx}{4 + (x+1)^2}$$

$$3. \int \frac{8}{(x+3)^4} \, dx$$

$$8. \int x\sqrt{2x^2-1} \, dx$$

$$4. \int \frac{1}{x \ln x} \, dx$$

$$9. \int e^{\sin x} \cos x \, dx$$

$$5. \int \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx$$

$$10. \int e^{4x} \, dx$$

4.3 Integral Parsial

Masalah: Tentukan $\int x e^x \, dx$

$$\text{Misalkan: } u = f(x) \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx} = f'(x) \quad \rightarrow \quad du = f'(x) \, dx \rightarrow du = u' \, dx$$

$$v = g(x) \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = g'(x) \quad \rightarrow \quad dv = g'(x) dx \rightarrow dv = v' dx$$

$$uv = f(x) g(x) \rightarrow \frac{d(uv)}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$d(uv) = f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx$$

$$d(uv) = u'v dx + uv' dx$$

$$d(uv) = v du + u dv$$

Jika kedua ruas diintegrasikan, diperoleh

$$uv = \int v du + \int u dv$$

\Leftrightarrow

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Contoh 5

Tentukan $\int x e^x dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{Misalkan} \quad u &= x & \rightarrow du &= dx \\ dv &= e^x dx & \rightarrow v &= \int e^x dx = e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sehingga} \quad \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C \end{aligned}$$

Contoh 6

Tentukan $\int x^2 e^x dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{Misalkan} \quad u &= x^2 & \rightarrow du &= 2x dx \\ dv &= e^x dx & \rightarrow v &= \int e^x dx = e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sehingga} \quad \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int e^x 2x dx \\ &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C \end{aligned}$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + e^x + C$$

Contoh 7

Tentukan $\int x \cos x \, dx$ 5.

Penyelesaian:

Misalkan $u = x \rightarrow du = dx$

$$dv = \cos x \, dx \rightarrow v = \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\begin{aligned} \text{sehingga } \int x \cos x \, dx &= x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

Contoh 8

Tentukan $\int e^x \cos x \, dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = e^x \rightarrow du = e^x \, dx$

$$dv = \cos x \, dx \rightarrow v = \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\begin{aligned} \text{sehingga } \int e^x \cos x \, dx &= e^x \sin x - \int \sin x e^x \, dx \\ &= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \end{aligned}$$

$$\text{misal } u = e^x \rightarrow du = e^x \, dx$$

$$\begin{aligned} dv &= \sin x \, dx \rightarrow v = \int \sin x \, dx \\ &= -\cos x \end{aligned}$$

$$= e^x \sin x - \left\{ e^x (-\cos x) - \int -\cos x e^x \, dx \right\}$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int \cos x e^x \, dx$$

$$\text{Diperoleh } \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int \cos x e^x \, dx$$

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x \sin x + \frac{1}{2} e^x \cos x + C$$

SOAL

Tentukan:

1. $\int x \sin x \, dx$

6. $\int e^x \sin x \, dx$

2. $\int x \sin 2x \, dx$

7. $\int x \cos x \, dx$

2. $\int x \sin 2x \, dx$
3. $\int \ln x \, dx$
4. $\int x e^{-x} \, dx$
5. $\int x^2 e^{-x} \, dx$
7. $\int \arcsin x \, dx$
8. $\int \arctan x \, dx$
9. $\int x \ln x^2 \, dx$
10. $\int \frac{\ln \ln x}{x} \, dx$

4.4 Integral yang Menghasilkan Arcus Tangen dan Logaritma

Ingat:
$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$$

Berdasarkan rumus di atas dapat dibuktikan bahwa untuk konstanta $a \neq 0$, maka berlaku:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (4.4.1)$$

Perhatikan penyebut dalam integran.

Selanjutnya akan dicari $\int \frac{1}{x^2 + 2bx + c} \, dx$

Jika $f(x) = x^2 + 2bx + c$ dengan $D = 4b^2 - 4c < 0$, maka $f(x)$ **definit positif** dan selalu dapat dibawa ke bentuk

$$f(x) = (x + b)^2 + p^2$$

dengan $p^2 = c - b^2 > 0$

sehingga $\int \frac{1}{x^2 + 2bx + c} \, dx = \int \frac{1}{(x+b)^2 + p^2} \, dx$ dan dengan menggunakan (4.4.1)

dapat diperoleh

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2 + 2bx + c} \, dx = \frac{1}{p} \arctan \frac{x+b}{p} + C} \quad (4.4.2)$$

$$\text{dengan } p = \sqrt{c - b^2}$$

Contoh 9

Tentukan $\int \frac{1}{3+x^2} \, dx$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan rumus (4.4.1) diperoleh $\int \frac{1}{3+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + C$

Contoh 10

Tentukan $\int \frac{1}{x^2+9} dx$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan rumus (4.4.1) diperoleh $\int \frac{1}{3+x^2} dx = \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C$

Contoh 11

Tentukan $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$

Penyelesaian:

$$b = 1$$

$$c = 5$$

$$p = \sqrt{5-1^2} = \sqrt{4} = 2$$

Dengan rumus (4.4.2) diperoleh $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C$

Atau secara langsung dengan cara berikut:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C$$

Selanjutnya ingat: $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

Dengan rumus ini dapat ditunjukkan bahwa

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C$$

 (4.4.3)

Contoh 11

Tentukan $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4} dx$

Penyelesaian:

Dengan rumus (4.4.3) diperoleh $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4} dx = \ln|x^2+2x+4| + C$

Contoh 12

Tentukan $\int \frac{x+5}{x^2+6x+13} dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+5}{x^2+6x+13} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+6)+2}{x^2+6x+13} dx \\&= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+6)}{x^2+6x+13} dx + \int \frac{2}{x^2+6x+13} dx \\&= \frac{1}{2} \ln|x^2+6x+13| + 2 \int \frac{1}{(x+3)^2+4} dx \\&= \frac{1}{2} \ln|x^2+6x+13| + 2 \cdot \frac{1}{2} \arctan \frac{x+3}{2} + C \\&= \frac{1}{2} \ln|x^2+6x+13| + \arctan \frac{x+3}{2} + C\end{aligned}$$

SOAL

Tentukan:

1. $\int \frac{x+5}{x^2+10x+13} dx$

2. $\int \frac{x^2+5}{x^3+15x-1} dx$

3. $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

4. $\int \frac{5}{x^2+4x+7} dx$

5. $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+7} dx$

6. $\int \frac{5x+1}{x^2+6x+13} dx$

7. $\int \frac{4x+1}{x^2-6x+13} dx$

8. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+7} dx$

4.5 Integral Fungsi Pecah Rasional

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ dengan $a_n \neq 0$ dinamakan polinomial (fungsi

suku banyak) berderajat n .

Fungsi konstan $P_0(x) = a_0$ dapat dipandang sebagai polinomial berderajat nol.

Fungsi pecah rasional adalah fungsi berbentuk $\frac{N(x)}{D(x)}$ dengan $N(x)$ dan $D(x)$ polinomial-polinomial.

Uraian mengenai integral fungsi pecah rasional dapat diperinci untuk beberapa kasus sebagai berikut.

4.5.1 Keadaan $N(x) = D'(x)$

Jika $N(x) = D'(x)$ maka berdasarkan rumus (4.4.3) diperoleh:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \ln |D(x)| + C$$

dan ini sudah dibahas pada bagian 4.4 sehingga tidak perlu diulang.

4.5.2 Keadaan derajat $N(x) \geq$ derajat $D(x)$

Lakukan pembagian $N(x)$ oleh $D(x)$ sehingga diperoleh bentuk

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \text{ dengan derajat } R(x) < \text{derajat } D(x)$$

$Q(x)$ adalah polinom, sehingga integralnya sangat mudah.

Contoh 13

$$1. \int \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int \left\{ x - \frac{x}{x^2+1} \right\} dx = \dots$$

$$2. \int \frac{x^4 - 19x^2 - 48x + 60}{x^2 + 6x + 13} dx = \int \left\{ x^2 - 6x + 4 + \frac{6x + 8}{x^2 + 6x + 13} \right\} dx = \dots$$

Kepada pembaca dipersilakan untuk melanjutkan penyelesaian kedua contoh dalam contoh 13 di atas.

Dengan demikian yang perlu dipelajari lebih lanjut adalah keadaan dimana derajat $N(x) <$ derajat $D(x)$ dan $N(x) \neq D'(x)$

4.5.3 Keadaan Derajat $N(x) <$ Derajat $D(x)$

Pada pembahasan ini $N(x) \neq D'(x)$. Tanpa mengurangi umumnya pembicaraan, diambil koefisien suku pangkat tertinggi dari x dalam $D(x)$ adalah satu. Untuk

menghitung $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$, terlebih dahulu integran dipisah menjadi pecahan-pecahan parsialnya.

Contoh 14

$\frac{6x^2 + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$ dapat dipecah menjadi pecahan-pecahan parsial berikut

$$\frac{6x^2 + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = \frac{1}{x-1} - \frac{10}{x+2} + \frac{15}{x+3}$$

Jadi

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2 + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6} dx &= \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{10}{x+2} dx + \int \frac{15}{x+3} dx \\ &= \int \frac{1}{x-1} dx - 10 \int \frac{1}{x+2} dx + 15 \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= \ln|x-1| - 10 \ln|x+2| + 15 \ln|x+3| + C \end{aligned}$$

Karena sebelum melakukan pengintegralan terlebih dahulu diadakan pemisahan $\frac{N(x)}{D(x)}$ menjadi pecahan-pecahan parsialnya, maka sebelumnya perlu dipelajari

cara memisah $\frac{N(x)}{D(x)}$ menjadi pecahan-pecahan parsialnya tersebut.

Memisah Pecahan Menjadi Pecahan Parsial

Dalam pembicaraan ini tetap diasumsikan:

- 1) derajat $N(x) <$ derajat $D(x)$
- 2) koefisien suku pangkat tertinggi dari x dalam $D(x)$ adalah satu
- 3) $N(x)$ dan $D(x)$ tidak lagi mempunyai faktor persekutuan

Menurut keadaan faktor-faktor $D(x)$, dalam memisahkan $\frac{N(x)}{D(x)}$ menjadi pecahan-

pecahan parsialnya dapat dibedakan menjadi 4 keadaan, yaitu:

- a. Semua faktor $D(x)$ linear dan berlainan

- b. Semua faktor $D(x)$ linear tetapi ada yang sama (berulang)
- c. $D(x)$ mempunyai faktor kuadrat dan semua faktor kuadratnya berlainan
- d. $D(x)$ mempunyai faktor kuadrat yang sama.

a. Semua faktor $D(x)$ linear dan berlainan

Misalkan faktor-faktor $D(x)$ adalah $x - a$, $x - b$, $x - c$, dan $x - d$, maka

$$D(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d).$$

$$\text{Dibentuk} \quad \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d} \quad (1)$$

sebagai suatu identitas dalam x , sehingga untuk setiap nilai x yang diberikan maka nilai ruas kiri dan nilai ruas kanan dalam (1) sama. Konstanta A , B , C , dan D adalah konstanta-konstanta yang masih akan dicari nilainya.

Contoh 15

Pisahkan $\frac{6x^2 + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$ atas pecahan-pecahan parsialnya.

Penyelesaian:

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)(x + 2)(x + 3) = 0$$

Dibentuk

$$\frac{6x^2 + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^2 + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = \frac{A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 6 = A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)$$

$$\text{untuk } x = 1 \quad \rightarrow \quad 12 = A(3)(4) \quad \Leftrightarrow \quad A = 1$$

$$\text{untuk } x = -2 \quad \rightarrow \quad 30 = B(-3)(1) \quad \Leftrightarrow \quad B = -10$$

$$\text{untuk } x = -3 \quad \rightarrow \quad 60 = C(-4)(-1) \quad \Leftrightarrow \quad C = 15$$

Jika nilai A , B , dan C ini disubstitusikan ke dalam (2) maka diperoleh

$$\frac{6x^2 + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = \frac{1}{x-1} - \frac{10}{x+2} + \frac{15}{x+3}$$

sehingga

$$\int \frac{6x^2 + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{10}{x+2} dx + \int \frac{15}{x+3} dx$$

$$= \ln|x-1| - 10\ln|x+2| + 15\ln|x+3| + C$$

Pada bagian ini dijumpai bentuk $\int \frac{1}{x-a} dx$

b. Semua faktor $D(x)$ linear tetapi ada yang sama (berulang)

Misalkan faktor-faktor $D(x)$ adalah $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-c$, $x-d$, $x-d$, dan $x-d$, maka $D(x) = (x-a)(x-b)(x-c)^2(x-d)^3$.

Selanjutnya dibentuk

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{(x-c)^2} + \frac{E}{x-d} + \frac{F}{(x-d)^2} + \frac{G}{(x-d)^3} \quad (3)$$

Perhatikan suku-suku pecahan di ruas kanan terutama yang sesuai dengan akar sama c dan d .

Contoh 16

Pisahkan $\frac{x}{(x-2)(x+1)^3}$ atas pecahan-pecahan parsialnya.

Penyelesaian:

Dibentuk

$$\frac{x}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3} \quad (4)$$

$$x = A(x+1)^3 + B(x-2)(x+1)^2 + C(x-2)(x+1) + D(x-2)$$

$$\begin{array}{ll} \text{untuk } x = -1 & \longrightarrow -1 = 3D \\ \text{untuk } x = 2 & \longrightarrow 2 = 27A \\ \text{untuk } x = 0 & \longrightarrow 0 = A - 2B - 2C - 2D \\ \text{untuk } x = 1 & \longrightarrow 1 = 8A - 4B - 2C - D \end{array}$$

Dari keempat persamaan tersebut diperoleh:

$$A = \frac{2}{27}, \quad B = -\frac{2}{27}, \quad C = -\frac{6}{27}, \quad D = \frac{1}{3}$$

$$\text{Jadi } \frac{x}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{\frac{2}{27}}{x-2} + \frac{-\frac{2}{27}}{x+1} + \frac{-\frac{6}{27}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^3}$$

Selanjutnya dapat dicari integral $\int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3} dx$

$$\int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3} dx = \int \frac{\frac{2}{27}}{x-2} dx + \int \frac{-\frac{2}{27}}{x+1} dx + \int \frac{-\frac{6}{27}}{(x+1)^2} dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^3} dx$$

$$\int \frac{1}{(x-2)(x+1)^3} dx = \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{1}{(x+1)^2} dx + \int \frac{1}{(x+1)^3} dx$$

$$= \dots$$

Pada bagian ini dijumpai bentuk $\int \frac{1}{x-a} dx$ dan $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx$ $n = 2, 3, \dots$

c. $D(x)$ mempunyai faktor kuadrat dan semua faktor kuadratnya berlainan

Ingat teorema dalam aljabar berikut.

Teorema: Akar-akar tidak real persamaan derajat tinggi dengan koefisien real sepasang-sepasang bersekawan, artinya jika $a + bi$ suatu akar maka $a - bi$ juga akar persamaan itu

Berdasarkan teorema tersebut maka apabila $a + bi$ akar persamaan $D(x) = 0$ maka

demikian juga $a - bi$, sehingga salah satu faktor $D(x)$ adalah $\{x - (a + bi)\} \{x - (a - bi)\} = (x - a)^2 + b^2$ yang definit positif.

Misal $D(x) = (x - p)(x - q)^2 \{(x - a)^2 + b^2\} \{(x - c)^2 + d^2\}$ maka perlu dibentuk

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-p} + \frac{B}{x-q} + \frac{C}{(x-q)^2} + \frac{Dx+E}{(x-a)^2+b^2} + \frac{Fx+G}{(x-c)^2+d^2} \quad (5)$$

Contoh 17

Pisahkan $\frac{3x}{x^3-1}$ atas pecahan-pecahan parsialnya.

Penyelesaian:

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\text{Dibentuk } \frac{3x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$3x = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$$\text{untuk } x = 1 \quad \longrightarrow \quad 3 = 3A$$

$$\text{untuk } x = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 = A - C$$

$$\text{untuk } x = -1 \quad \longrightarrow \quad -3 = A + 2B - 2C$$

Setelah dicari nilai-nilai A , B , dan C diperoleh $A = 1$, $B = -1$, dan $C = 1$, sehingga

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1}$$

$$\text{Jadi } \int \frac{3x}{x^3-1} dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{-x+1}{x^2+x+1} dx$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

Pada bagian ini dijumpai bentuk $\int \frac{1}{x-a} dx$, $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx$ $n = 2, 3, \dots$, dan

$$\int \frac{AX + B}{(x-a)^2 + b^2} dx$$

d. $D(x)$ mempunyai faktor kuadrat yang sama

Berdasarkan teorema dalam bagian c di atas maka apabila $a + bi$ merupakan akar berlipat k dari persamaan $D(x) = 0$ maka demikian juga $a - bi$, dan faktor-faktor dari $D(x)$ yang sesuai dengan akar-akar ini adalah $\{(x-a)^2 + b^2\}^k$.

Misal $D(x) = (x-p)(x-q)^2\{(x-a)^2 + b^2\}\{(x-c)^2 + d^2\}^3$ maka perlu dibentuk

$$\begin{aligned} \frac{N(x)}{D(x)} &= \frac{A}{x-p} + \frac{B}{x-q} + \frac{C}{(x-q)^2} + \frac{Dx+E}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{Fx+G}{(x-c)^2 + d^2} + \frac{Hx+J}{\{(x-c)^2 + d^2\}^2} \\ &\quad + \frac{Kx+L}{\{(x-c)^2 + d^2\}^3} \end{aligned}$$

Contoh 18

Pisahkan $\frac{3x^3 - 2x^2 + 5x - 1}{(x-2)(x^2 + 1)^2}$ atas pecahan-pecahan parsialnya.

Penyelesaian:

Dengan cara seperti yang telah diberikan sebelumnya didapatkan

$$\frac{3x^3 - 2x^2 + 5x - 1}{(x-2)(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x-1}{x^2 + 1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{Jadi } \int \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x - 1}{(x-2)(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{x-1}{x^2 + 1} dx - \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Pada bagian ini dapat muncul bentuk $\int \frac{AX + B}{(x-a)^2 + b^2} dx$ $n = 2, 3, \dots$ dan

Pada bagian ini dapat muncul bentuk $\int \frac{1}{\{(x-a)^2 + b^2\}^n} dx$, $n = 2, 3, \dots$, dan

Dalam mencari $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$ kita dihadapkan kepada empat jenis integral yang berbentuk:

$$(1) \int \frac{1}{x-a} dx$$

$$(2) \int \frac{1}{(x-a)^n} dx \quad n = 2, 3, \dots$$

$$(3) \int \frac{AX + B}{(x-a)^2 + b^2} dx$$

$$(4) \int \frac{AX + B}{\{(x-a)^2 + b^2\}^n} dx, \quad n = 2, 3, \dots$$

Tiga bentuk yang pertama telah dapat diselesaikan menggunakan teori-teori yang sudah diberikan. Adapun integral bentuk keempat dapat diselesaikan dengan substitusi $y = x - a$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \int \frac{AX + B}{\{(x-a)^2 + b^2\}^n} dx &= \int \frac{Ay + aA + B}{\{y^2 + b^2\}^n} dy \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{d(y^2 + b^2)}{\{y^2 + b^2\}^n} + \int \frac{aA + B}{\{y^2 + b^2\}^n} dy \end{aligned}$$

Integral untuk suku pertama pada ruas terakhir bukan masalah karena berbentuk

$\int \frac{du}{u^n}$, $n = 2, 3, \dots$ Sedangkan integral pada suku keduanya dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned} \int \frac{aA + B}{\{y^2 + b^2\}^n} dy &= \frac{aA + B}{b^{2n}} \int \frac{dy}{\left\{1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right\}^n} \\ &= \frac{aA + B}{b^{2n-1}} \int \frac{dt}{\{1 + t^2\}^n} \quad \text{dengan } t = \frac{y}{b} \end{aligned}$$

Untuk menghitung integral $\int \frac{dt}{\{1 + t^2\}^n}$ dapat digunakan **rumus reduksi** berikut

$$\int \frac{dt}{\{1 + t^2\}^n} = \frac{t}{(2n-2)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dt}{\{1 + t^2\}^{n-1}}$$

Dalam tulisan ini tidak diberikan bukti rumus reduksi tersebut.

Contoh 19

Selesaikan $\int \frac{x+3}{(x^2+4x+13)^2} dx$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{(x^2+4x+13)^2} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+4)+1}{(x^2+4x+13)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{(x^2+4x+13)^2} dx + \int \frac{1}{(x^2+4x+13)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4x+13)}{(x^2+4x+13)^2} + \int \frac{1}{\{(x+2)^2+9\}^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4x+13)}{(x^2+4x+13)^2} + \int \frac{1}{\{(x+2)^2+9\}^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+4x+13} + \int \frac{1}{\{9[(x+2)/3]^2+1\}^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+4x+13} + \frac{1}{81} \int \frac{1}{\{(x+2)/3\}^2+1}^2 dx \end{aligned}$$

Untuk $\frac{1}{81} \int \frac{1}{\{(x+2)/3\}^2+1}^2 dx$ substitusikan $t = \frac{x+2}{3}$, $dt = \frac{1}{3} dx$ sehingga

$$\begin{aligned} \frac{1}{81} \int \frac{1}{\{(x+2)/3\}^2+1}^2 dx &= \frac{1}{27} \int \frac{1}{\{t^2+1\}^2} dt \\ &= \frac{1}{27} \left(\frac{t}{(2.2-2)(1+t)} + \frac{2.2-3}{2.2-2} \int \frac{1}{\{t^2+1\}} dt \right) \\ &= \frac{1}{27} \left(\frac{t}{2(1+t)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\{t^2+1\}} dt \right) \\ &= \frac{1}{27} \left(\frac{t}{2(1+t)} + \frac{1}{2} \arctan t \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{27} \left(\frac{x+2}{3.2(1+\frac{x+2}{3})} + \frac{1}{2} \arctan \frac{x+2}{3} \right) \\ &= \frac{1}{27} \left(\frac{x+2}{6+2(x+2)} + \frac{1}{2} \arctan \frac{x+2}{3} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{27} \frac{x+2}{2x+10} + \frac{1}{54} \arctan \frac{x+2}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi } \int \frac{x+3}{(x^2+4x+13)^2} dx &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+4x+13} + \frac{1}{81} \int \frac{1}{\left\{ \left[\frac{(x+2)}{3} \right]^2 + 1 \right\}^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+4x+13} + \frac{1}{27} \frac{x+2}{2x+10} + \frac{1}{54} \arctan \frac{x+2}{3} + C. \end{aligned}$$

LATIHAN

$$1. \int \frac{x}{x^2+3x-4} dx$$

$$4. \int \frac{x}{(x^2-1)^2(x^2+1)} dx$$

$$2. \int \frac{x+3}{(x-1)^2(x+4)} dx$$

$$5. \int \frac{2x^4-2x^3+3x^2-2}{x^2-x} dx$$

$$3. \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

$$6. \int \frac{4x^3+x^2+1}{(x^2-2)^3} dx$$

4.6 Integral Fungsi Trigonometri

4.6.1 Rumus-rumus Sederhana

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x \, dx = -\ln |\csc x + \cot x| + C$$

4.6.2 Bentuk $\int R(\sin x) \cos x \, dx$ dan $\int R(\cos x) \sin x \, dx$

$$\begin{aligned} \text{Jika } R \text{ fungsi rasional maka } \int R(\sin x) \cos x \, dx &= \int R(\sin x) \, d(\sin x) \\ &= \int R(y) \, dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int R(\cos x) \sin x \, dx &= -\int R(\cos x) \, d(\cos x) \\ &= -\int R(t) \, dt \end{aligned}$$

Dengan mengingat rumus $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, maka:

$$\int R(\sin x, \cos^2 x) \cos x \, dx = \int R(y, 1 - y^2) \, dy$$

$$\int R(\cos x, \sin^2 x) \sin x \, dx = -\int R(t, 1 - t^2) \, dt$$

Contoh 20

$$1. \int (2 \cos^2 x - \sin x + 7) \cos x \, dx$$

$$2. \int \sin^3 x \, dx$$

4.6.3 Integral dengan memperhatikan rumus-rumus

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} \{ \cos(x - y) - \cos(x + y) \}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} \{ \sin(x + y) + \sin(x - y) \}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \{ \cos(x + y) + \cos(x - y) \}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \{ 1 - \cos 2x \}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \{ 1 + \cos 2x \}$$

Contoh 21

Carilah

$$1. \int \sin 3x \sin 2x \, dx$$

$$2. \int \sin 3x \cos 2x \, dx$$

$$3. \int \cos 3x \cos 2x \, dx$$

$$4. \int \sin^2 x \, dx$$

$$5. \int \sin^4 x \, dx$$

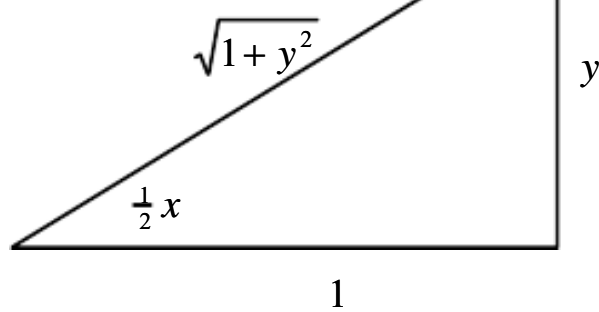
4.6.4 Substitusi $y = \tan \frac{1}{2} x$

Jika $R(\sin x, \cos x)$ fungsi rasional dalam $\sin x$ dan $\cos x$, maka $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$ dapat dibawa menjadi integral fungsi rasional dalam y dengan menggunakan substitusi $y = \tan \frac{1}{2} x$.

$$y = \tan \frac{1}{2} x \quad \rightarrow \quad x = 2 \arctan y \quad \rightarrow \quad dx = \frac{2}{1 + y^2} \, dy$$

Selanjutnya perhatikan





Memperhatikan gambar di atas dapat dipahami bahwa

$$\sin \frac{1}{2} x = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \quad \text{dan} \quad \cos \frac{1}{2} x = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\sin x = \sin(2 \cdot \frac{1}{2} x)$$

$$= 2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x = 2 \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{2y}{1+y^2}$$

$$\text{Jadi } \sin x = \frac{2y}{1+y^2}.$$

Dengan menggunakan rumus $\cos x = \cos(2 \cdot \frac{1}{2} x)$ diperoleh

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

$$\tan x = \frac{2y}{1-y^2}$$

$$\cot x = \frac{1-y^2}{2y}$$

Contoh 22

Carilah: 1. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ 2. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

3. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ 4. $\int \csc x \, dx$

4.6.5 Integral $R(\tan x)$

Jika integran fungsi rasional dalam $\tan x$ saja, maka dapat dijadikan integral fungsi rasional dalam y dengan substitusi $y = \tan x$, sehingga $x = \arctan y$ dan

$$dx = \frac{dy}{1+y^2}.$$

$$\text{Jadi } \int R(\tan x) dx = \int \frac{R(y)}{1+y^2} dy$$

Contoh 23

Carilah: 1. $\int \tan x dx$ 2. $\int \frac{dx}{1+\tan x}$

4.6.6 Rumus Reduksi untuk Integral Fungsi Trigonometri

Jika n bilangan bulat positif, maka:

$$\int \sin^{2n+1} x dx = -\int (1-y^2)^n dy \quad \text{dengan } y = \cos x$$

$$\int \cos^{2n+1} x dx = \int (1-t^2)^n dt \quad \text{dengan } t = \sin x$$

Untuk n bilangan genap positif dapat digunakan rumus:

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

$$\int \sin^n x dx = \frac{-\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} + \int \tan^{n-2} x dx$$

$$\int \cot^n x dx = \frac{-\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x dx$$

$$\int \sec^n x dx = \frac{\sin x \sec^{n-1} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$$

$$\int \csc^n x dx = \frac{-\cos x \csc^{n-1} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx$$

Bukti rumus-rumus di atas tidak diberikan dalam tulisan ini.

4.7 Integral Fungsi Irrasional

Dalam tulisan ini dibahas beberapa jenis integral fungsi irrasional. Pada dasarnya integral ini diselesaikan dengan mengubah integral irrasional menjadi integral rasional, baik rasional aljabar maupun trigonometri.

4.7.1 Rumus yang perlu dihafal

$$1) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$2) \int \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \operatorname{arc} \sec \frac{x}{a} + C$$

$$3) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$$

$$4) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

$$5) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$6) \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$$

$$7) \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

Dua rumus pertama mudah dibawa ke bentuk rumus integral dasar dengan substitusi $y = \frac{x}{a}$. Sedangkan rumus-rumus yang lain dapat dibuktikan dengan menggunakan metode yang akan diterangkan pada bagian 4.7.4.

4.7.2 Bentuk Irrasional Satu Suku

Jika integran hanya memuat bentuk irrasional dari satu macam suku, misalnya x , maka integral dapat dijadikan integral rasional dengan substitusi $y = \sqrt[n]{x}$ dimana n

kelipatan persekutuan terkecil dari pangkat-pangkat akar.

Contoh 24

$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}} dx$ diambil substitusi $y = \sqrt[6]{x}$, sehingga $x = y^6$ dan $dx = 6y^5 dy$

4.7.3 Satu-satunya Bentuk Irrasional $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

Dalam hal ini $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ sebagai satu-satunya bentuk irrasional di dalam integran, maka integran dapat dijadikan rasional dengan substitusi

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + y$, jika $a > 0$

atau

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xy + \sqrt{c}$, jika $c \geq 0$

Dengan substitusi yang pertama diperoleh $x = \frac{-(y^2 - c)}{2y\sqrt{a} - b}$ dan dx dapat dinyatakan

ke dalam bentuk rasional dalam y kali dy .

Contoh 25

$\int \frac{1}{(x-3)\sqrt{x^2 - 6x + 2}} dx$ diambil substitusi $\sqrt{x^2 - 6x + 2} = x + y$, sehingga

$x = \frac{-(y^2 - 2)}{2(y + 3)}$ dan $dx = -\frac{1}{2} \frac{y^2 + 6y + 2}{(y + 3)^2} dy$. Selanjutnya dapat diselesaikan seperti integral raasional

4.7.4 Substitusi Trigonometri

Dengan memperhatikan rumus trigonometri

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ dan $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

bentuk-bentuk irrasional berikut dapat dijadikan bentuk rasional fungsi trigonometri.

| Bentuk | Substitusi | Diferensial |
|--------------------|---------------------|------------------------------------------|
| $\sqrt{a^2 - x^2}$ | $x = a \sin \theta$ | $dx = a \cos \theta d\theta$ |
| $\sqrt{x^2 - a^2}$ | $x = a \sec \theta$ | $dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta$ |
| $\sqrt{a^2 + x^2}$ | $x = a \tan \theta$ | $dx = a \sec^2 \theta d\theta$ |

Contoh 26

1. Buktikan $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$
2. Gunakan substitusi $x = a \sin \theta$ untuk menentukan $\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} \, dx$
3. Carilah $\int \frac{1}{(x-3)\sqrt{x^2 - 6x + 2}} \, dx$

LATIHAN 4.7

1. $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} \, dx$
2. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$
3. $\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2 - 4x + 1}} \, dx$
4. $\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2 - 4x + 8}} \, dx$



INTEGRAL TERTENTU

5.1 Pengertian Integral Tertentu

Definisi 5.1.1

Partisi P pada interval $[a,b]$ adalah suatu subset berhingga $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dari $[a,b]$ dengan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Jika $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ partisi pada $[a,b]$ maka Norm P , ditulis $\|P\|$, didefinisikan sebagai $\|P\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid 1 = 1, 2, 3, \dots, n\}$.

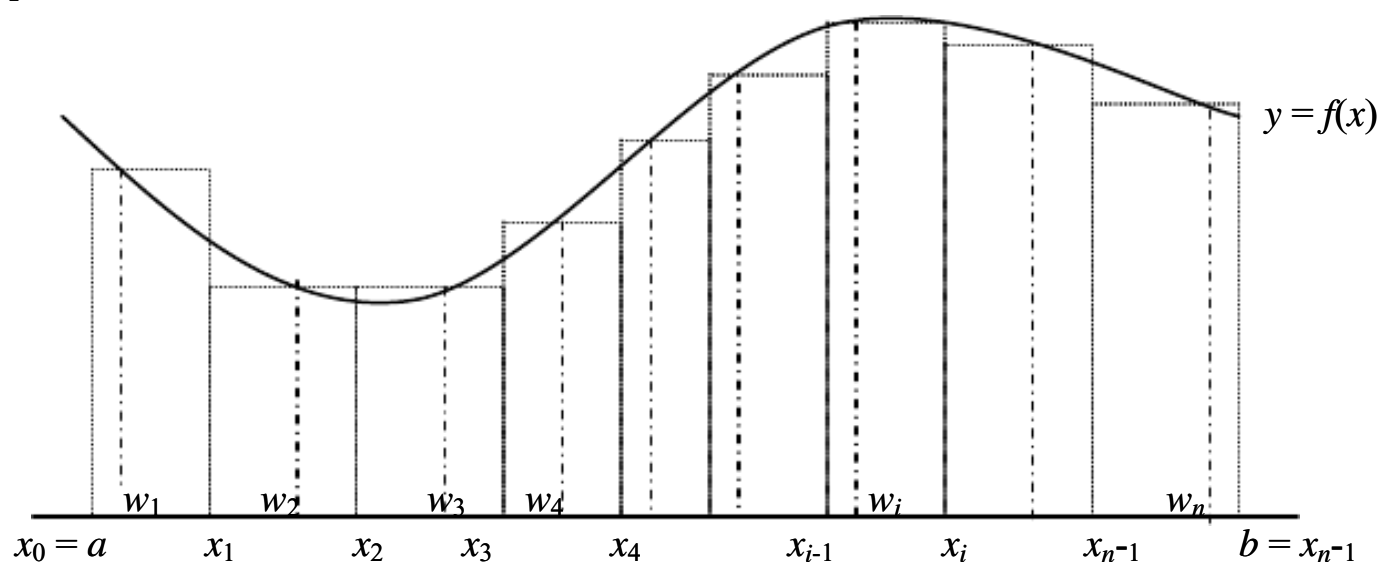


Contoh 1:

Pada interval $[-3, 3]$, suatu partisi $P = \{-3, -1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, 3\}$ mempunyai norm:

$$\begin{aligned}\|P\| &= \max\{-1\frac{1}{2} - (-3), -\frac{1}{2} - (-1\frac{1}{2}), \frac{1}{3} - (-\frac{1}{2}), 2 - \frac{1}{3}, 3 - 2\} \\ &= \max\{\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{6}, \frac{5}{3}, 1\} \\ &= \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

Jika f fungsi yang didefinisikan pada $[a,b]$, $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ suatu partisi pada $[a,b]$, $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$, dan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, maka $\sum_{i=1}^n f(w_i)\Delta x_i$ disebut **Jumlah Riemann f** pada $[a,b]$.



Contoh 2:

Fungsi f pada $[-3, 3]$ didefinisikan dengan $f(x) = x^2 - 1$ dan $P = \{-3, -1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, 3\}$ partisi pada $[-3, 3]$. Dipilih titik-titik: $w_1 = -2$, $w_2 = -\frac{1}{2}$, $w_3 = 0$, $w_4 = 1\frac{1}{2}$, $w_5 = 2\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}w_1 = -2 &\longrightarrow f(w_1) = 3 & \Delta x_1 = \frac{3}{2} &\longrightarrow f(w_1).\Delta x_1 = \frac{9}{2} \\ w_2 = -\frac{1}{2} &\longrightarrow f(w_2) = -\frac{3}{4} & \Delta x_2 = 1 &\longrightarrow f(w_2).\Delta x_2 = -\frac{3}{4} \\ w_3 = 0 &\longrightarrow f(w_3) = -1 & \Delta x_3 = \frac{5}{6} &\longrightarrow f(w_3).\Delta x_3 = -\frac{5}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_3 = 0 & \longrightarrow f(w_3) = \frac{1}{4} & \Delta x_3 = \frac{1}{6} & \longrightarrow f(w_3) \cdot \Delta x_3 = \frac{1}{24} \\
 w_4 = 1\frac{1}{2} & \longrightarrow f(w_4) = \frac{5}{4} & \Delta x_4 = \frac{5}{3} & \longrightarrow f(w_4) \cdot \Delta x_4 = \frac{25}{12} \\
 w_5 = 2\frac{2}{3} & \longrightarrow f(w_5) = \frac{55}{9} & \Delta x_5 = 1 & \longrightarrow f(w_5) \cdot \Delta x_5 = \frac{55}{9}
 \end{aligned}$$

Jumlah Riemann fungsi f tersebut pada interval $[-3, 3]$ bersesuaian dengan partisi P di atas adalah $\sum_{i=1}^5 f(w_i) \Delta x_i = \frac{100}{9}$.

Jika $P = \{-3, -1\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, 2\frac{1}{2}, 3\}$ partisi pada $[-3, 3]$ dan $w_1 = -2, w_2 = -1, w_3 = -\frac{1}{2}, w_4 = 0, w_5 = 1\frac{1}{2}, w_6 = 2\frac{1}{3},$ serta $w_7 = 2\frac{3}{4}$ tentukan jumlah Riemann fungsi f pada $[-3, 3]$ bersesuaian dengan partisi P ini.

Definisi 5.1.2

1. Jika f fungsi yang terdefinisi pada $[a, b]$ maka: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i = L$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan positif ε terdapat bilangan positif δ sehingga untuk setiap partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$, berlaku $\left| \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i - L \right| < \varepsilon$.
2. Jika f fungsi yang terdefinisi pada $[a, b]$ dan $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i$ ini ada, maka limit tersebut dinamakan **integral tertentu (Integral Riemann)** fungsi f pada $[a, b]$. Selanjutnya f dikatakan *integrable* pada $[a, b]$ dan integralnya ditulis $\int_a^b f(x) dx$.

$$\text{Jadi } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i$$

3. Jika f *integrable* pada $[a, b]$ maka:
 - a. $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$
 - b. Jika $a = b$ maka $\int_a^b f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = 0$

Integral Tertentu

Dari definisi 5.1.2 bagian 2 dapat dipahami bahwa jika $f(x) > 0$, maka $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i$ secara geometris menyatakan luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$, di atas sumbu X , di antara garis $x = a$ dan $x = b$.

Contoh 3:

Jika $f(x) = x + 3$, tentukan $\int_{-2}^3 (x + 3) dx$.

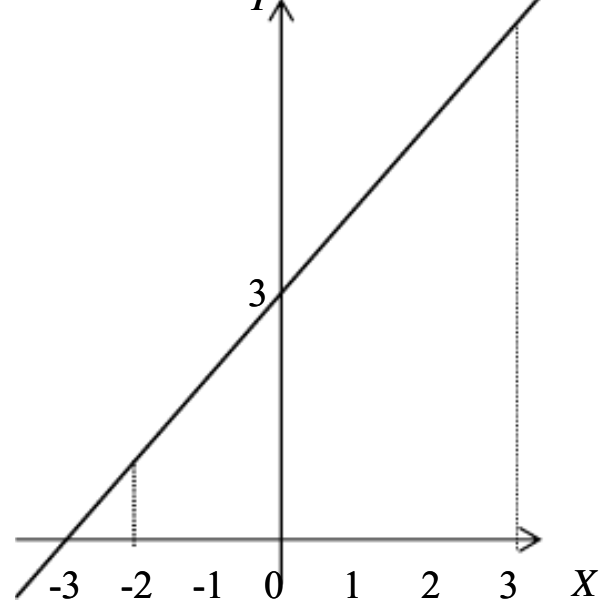
Penyelesaian:

$$f(x) = x + 3,$$

Buat partisi pada $[-2, 3]$ dengan menggunakan n interval bagian yang sama panjang. Jadi panjang setiap interval bagian adalah $\Delta x = \frac{5}{n}$.

Dalam setiap interval bagian $[x_{i-1}, x_i]$ partisi tersebut diambil $w_i = x_i$.

Akan dicari nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i$.



$$x_0 = -2$$

$$x_1 = -2 + \Delta x = -2 + \frac{5}{n}$$

$$x_2 = -2 + 2\Delta x = -2 + 2\left(\frac{5}{n}\right)$$

$$x_3 = -2 + 3\Delta x = -2 + 3\left(\frac{5}{n}\right)$$

.

:

$$x_i = -2 + i\Delta x = -2 + i\left(\frac{5}{n}\right)$$

:

$$x_n = -2 + n\Delta x = -2 + n\left(\frac{5}{n}\right) = 3$$

Karena untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dipilih $w_i = x_i$ maka $w_i = -2 + i\left(\frac{5}{n}\right) = -2 + \frac{5i}{n}$, sehingga

Kalkulus Integral 79

Integral Tertentu

$$\begin{aligned} f(w_i) &= w_i + 3 \\ &= \left(-2 + \frac{5i}{n}\right) + 3 \\ &= 1 + \frac{5i}{n} \end{aligned}$$

Jadi jumlah Riemann fungsi f pada $[-2, 3]$ bersesuaian dengan partisi P tersebut adalah

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{5i}{n}\right) \frac{5}{n} \\ &= \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{5i}{n}\right) \\ &= \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n \frac{5i}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{25}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\
&= \frac{5}{n}(n) + \frac{25}{n^2} \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\} \\
&= 5 + \frac{25}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)
\end{aligned}$$

Jika $\|P\| \rightarrow 0$ maka $n \rightarrow \infty$, sehingga:

$$\begin{aligned}
\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{25}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \\
&= 17\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Jadi $\int_{-2}^3 (x+3) dx = 17\frac{1}{2}.$

Contoh 4:

Tentukan $\int_a^b dx.$

Penyelesaian:

Dalam hal ini $f(x) = 1$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Ambil sembarang partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $[a, b]$ dan sembarang titik $w_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, 3, \dots, n$, maka

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i \text{ dan } \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\
&= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) \\
&= x_n - x_0 \\
&= b - a
\end{aligned}$$

Jadi $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} (b - a) = b - a$

Dengan demikian $\int_a^b dx = b - a.$

Teorema 5.1.3 (Teorema Fundamental Kalkulus)

Jika f integrable pada $[a,b]$ dan F suatu anti turunan dari f pada $[a,b]$

(atau $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$), maka : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$F(b) - F(a)$ biasa ditulis $[F(x)]_a^b$

Bukti:

Ambil sembarang partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $[a,b]$. Karena $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$ maka $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Berdasarkan *teorema nilai rata-rata* maka terdapat $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sehingga

$$\begin{aligned} F(x_i) - F(x_{i-1}) &= F'(w_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= f(w_i)(x_i - x_{i-1}) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(w_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^n f(w_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \{F(x_i) - F(x_{i-1})\} \\ &= \{F(x_1) - F(x_0)\} + \{F(x_2) - F(x_1)\} + \{F(x_3) - F(x_2)\} + \dots + \{F(x_n) - F(x_{n-1})\} \\ &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Kalkulus Integral 81

Integral Tertentu

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i)\Delta x_i = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \{F(b) - F(a)\} = F(b) - F(a).$$

$$\text{Jadi } \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Contoh 5

$$\int_{-2}^3 (x+3) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-2}^3 = \left\{ \frac{1}{2}(3)^2 + 3(3) \right\} - \left\{ \frac{1}{2}(-2)^2 + 3(-2) \right\} = 17\frac{1}{2}.$$

Contoh 6

Tentukan integral berikut.

1. $\int_{-2}^2 x^3 dx$

$$2. \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx$$

Teorema 5.1.4

Jika f integrable pada $[a,b]$ dan $c \in (a,b)$ maka $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Teorema 5.1.5

$$1. \int_a^b kf(x) \, dx = k \int_a^b f(x) \, dx \quad k \text{ konstanta}$$

$$2. \int_a^b \{f(x) + g(x)\} \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$

$$3. \text{ Jika } f(x) \geq 0 \text{ untuk setiap } x \in [a,b] \text{ maka } \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

$$4. \text{ Jika } f(x) \leq g(x) \text{ untuk setiap } x \in [a,b] \text{ maka } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Kalkulus Integral 82

Integral Tertentu

5.2 Aplikasi Integral

5.2.1 Luas Daerah

Berdasarkan pengertian integral tertentu (Integral Riemann) pada definisi 5.1.2 dan uraian di atas dapat dipahami bahwa jika $f(x) > 0$, maka $\int_a^b f(x)dx$ secara geometris menyatakan luas daerah di antara kurva $y = f(x)$ dan sumbu X serta dibatasi oleh garis-garis $x = a$ dan $x = b$. Jadi

$$A = \int_a^b f(x) \, dx$$

Contoh 7

Tentukan luas daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = x + 3$, sumbu X , garis $x = -2$ dan garis $x = 3$.

Penyelesaian:

$$A = \int_{-2}^3 (x+3) \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-2}^3 = \left\{ \frac{1}{2}(3)^2 + 3(3) \right\} - \left\{ \frac{1}{2}(-2)^2 + 3(-2) \right\} = 17\frac{1}{2}.$$

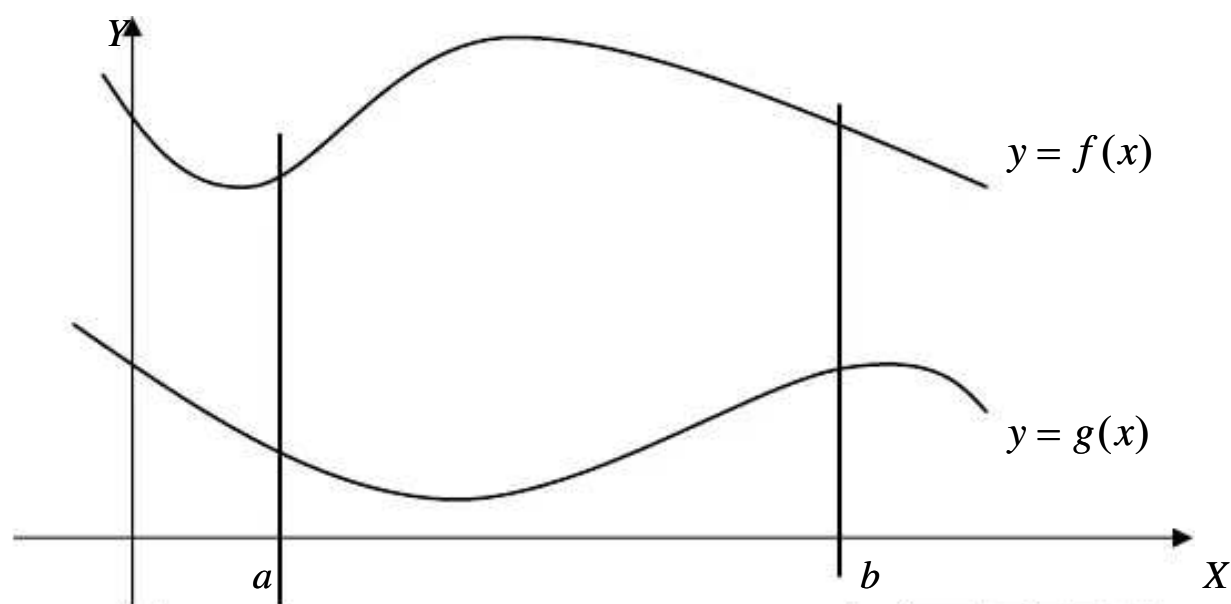
Contoh 8

Tentukan luas daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu X , garis $x = -2$ dan garis $x = 2$.

Penyelesaian:

Kalkulus Integral 83

Integral Tertentu



Selanjutnya jika suatu daerah dibatasi oleh dua kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ serta garis-garis $x = a$ dan $x = b$ seperti gambar di atas, maka luas daerahnya adalah sebagai berikut

$$A = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

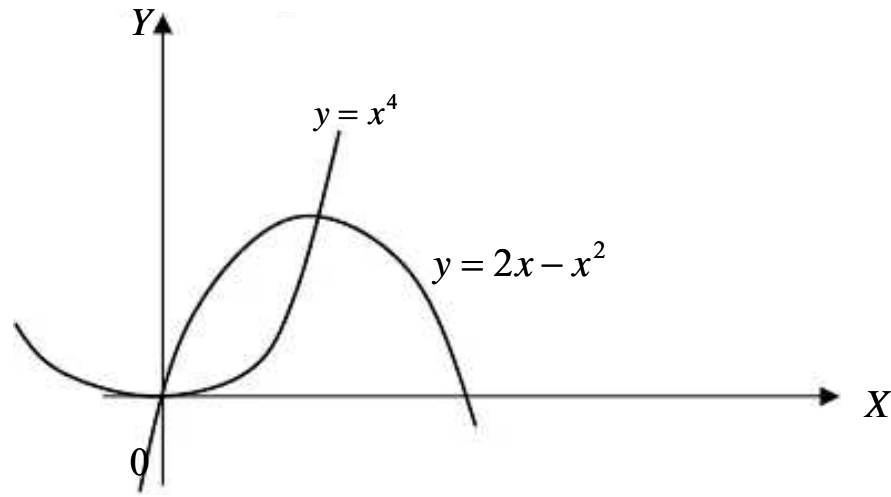
Contoh 9

Tentukan luas daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = x^4$ dan $y = 2x - x^2$.

Penyelesaian:

Penyelesaian:

Menentukan batas-batas dicari dengan menentukan akar-akar persamaan $x^4 = 2x - x^2$ yang dapat kita temukan akar-akarnya adalah $x = 0$ dan $x = 1$.

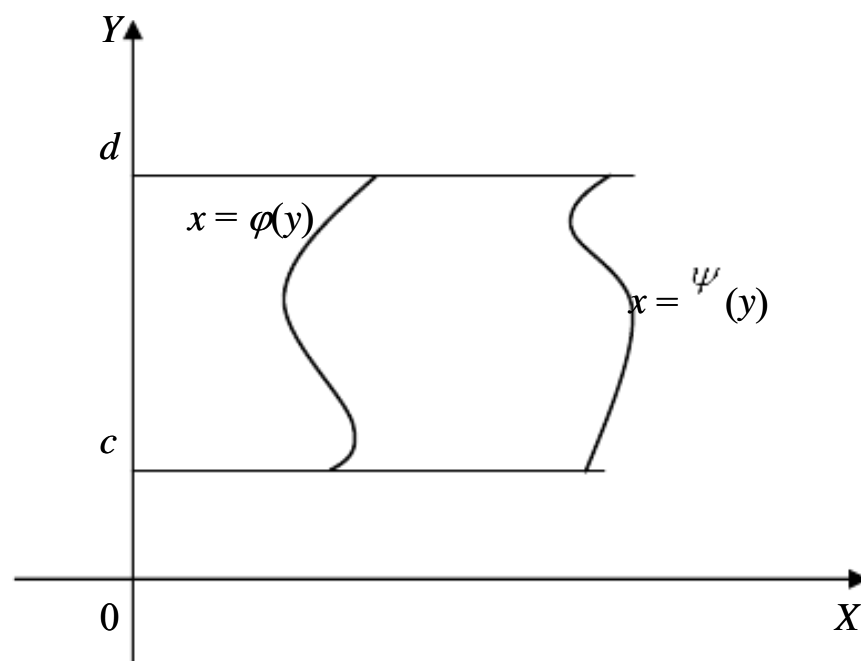


sehingga luasnya adalah
$$A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^4) dx = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}.$$

Integral Tertentu

Selanjutnya jika suatu daerah dibatasi oleh dua kurva $x = \varphi(y)$ dan $x = \psi(y)$ serta garis-garis $y = c$ dan $y = d$ seperti gambar di bawah ini, maka luas daerahnya adalah sebagai berikut

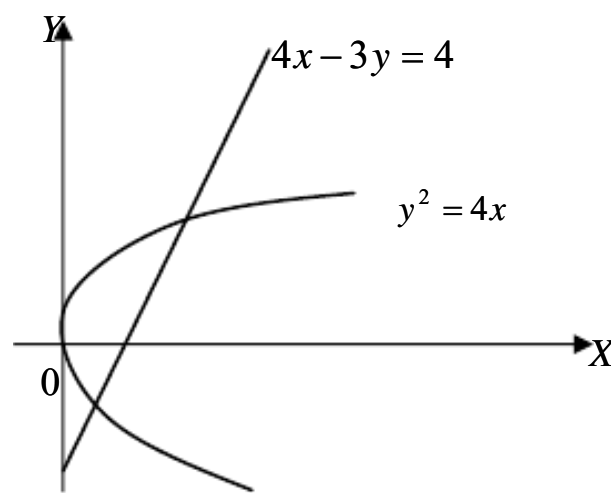
$$A = \int_c^d \{\psi(y) - \varphi(y)\} dy$$



Contoh 10

Tentukan luas daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y^2 = 4x$ dan $4x - 3y = 4$.

Penyelesaian:



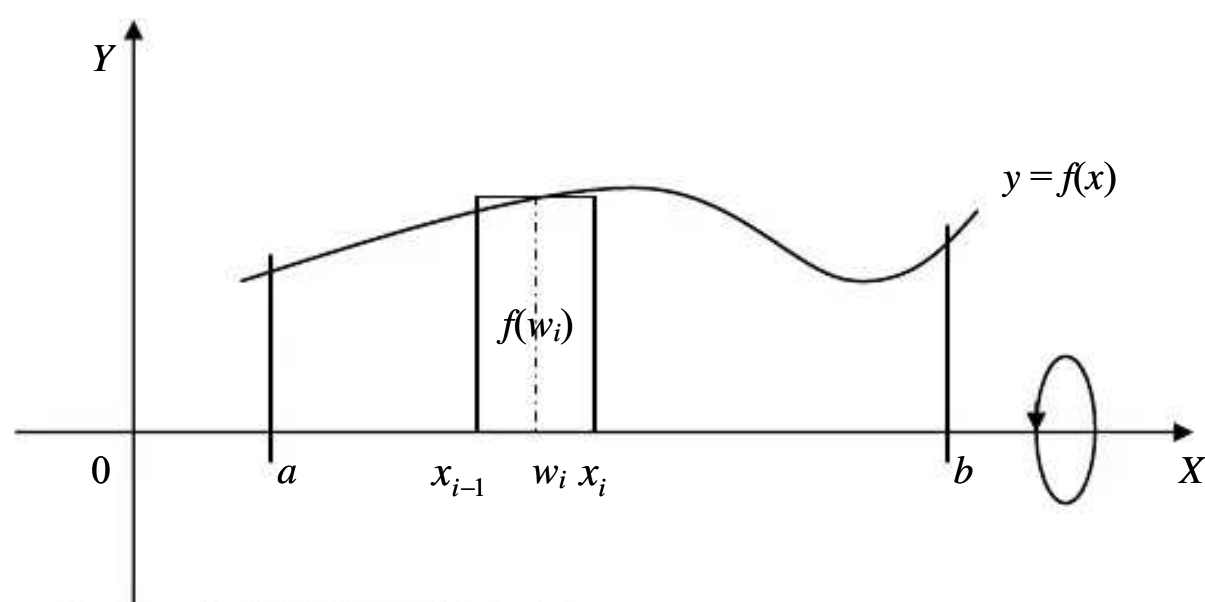
Menentukan batas-batas dengan mencari akar-akar persamaan $y^2 = 3y + 4$ yang diperoleh $y = -1$ dan $y = 4$.

$y^2 = 4x$ ekuivalen dengan $x = \frac{1}{4}y^2$ dan $4x - 3y = 4$ ekuivalen dengan $x = \frac{1}{4}(3y + 4)$

sehingga luasnya adalah $A = \int_{-1}^4 \left[\frac{1}{4}(3y + 4) - \frac{1}{4}y^2 \right] dy = \frac{1}{4} \int_{-1}^4 (3y + 4 - y^2) dy = \frac{125}{24}$.

5.2.2 Volume Benda Putar

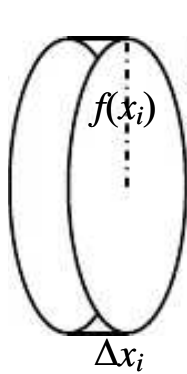
a. Metode Cincin



Jika daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$, sumbu X , garis-garis $x = a$ dan $x = b$ diputar mengelilingi sumbu X sebagai sumbu putar, maka volume benda putar yang terjadi dapat dicari sebagai berikut.

Dibuat partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $[a, b]$. Untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ dipilih satu titik $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$, selanjutnya dibuat persegi panjang dengan panjang $f(w_i)$ dan lebar

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Jika persegi panjang ini diputar terhadap sumbu X , maka diperoleh silinder hampiran dengan volume



$$\Delta V_i = \pi \{f(w_i)\}^2 \Delta x_i$$

Akibatnya diperoleh jumlahan Riemann

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi \{f(w_i)\}^2 \Delta x_i$$

Apabila $\|P\| \rightarrow 0$ maka diperoleh volume benda putar yang dimaksud, yaitu

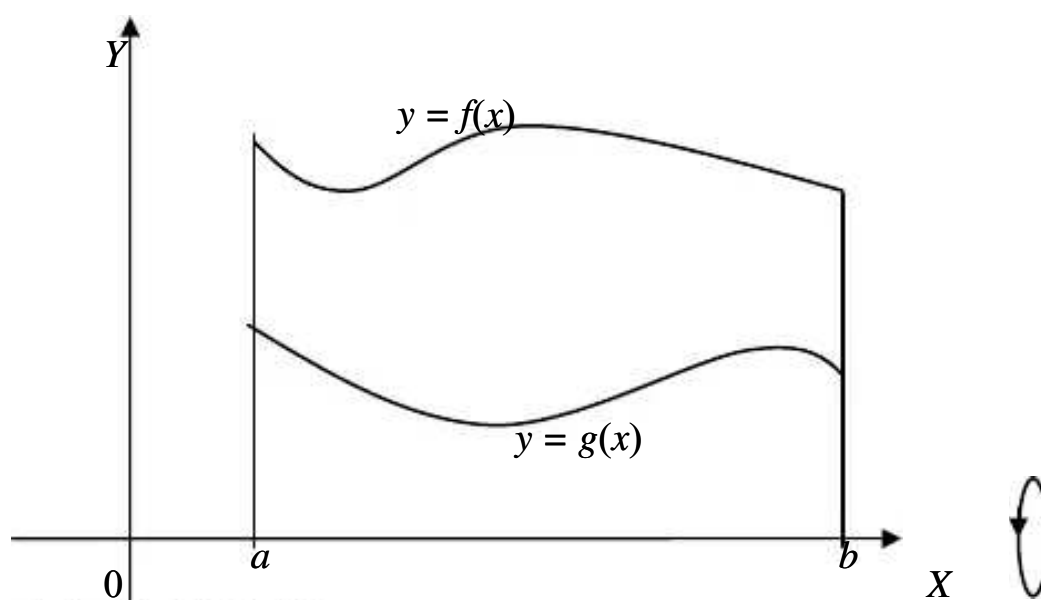
$$\begin{aligned} V_X &= \pi \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \{f(w_i)\}^2 \Delta x_i \\ &= \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \end{aligned}$$

Jadi

$$V_X = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

Selanjutnya apabila daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ serta garis-garis $x = a$ dan $x = b$ seperti gambar di bawah ini diputar mengelilingi sumbu X sebagai sumbu putar, maka volume benda yang terjadi adalah

$$V_X = \pi \int_a^b [\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2] dx$$



Dengan cara sama, jika daerah yang dibatasi kurva $x = \phi(y)$, sumbu Y , garis-garis $y = c$ dan $y = d$ diputar mengelilingi sumbu Y sebagai sumbu putar, maka volume benda putar yang terjadi adalah.

$$V_Y = \pi \int_c^d \{\phi(y)\}^2 dy$$

Demikian pula apabila daerah yang dibatasi oleh dua kurva $x = \psi(y)$ dan $x = \phi(y)$ serta garis-garis $y = c$ dan $y = d$ diputar mengelilingi sumbu Y sebagai sumbu putar, maka volume benda yang terjadi adalah

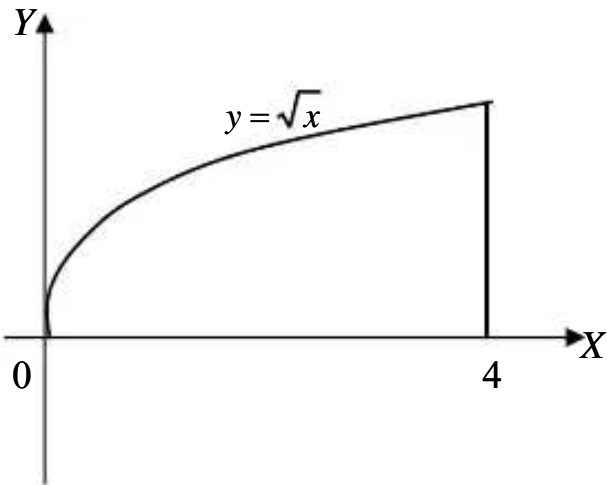


$$V_Y = \pi \int_c^d [\{\psi(y)\}^2 - \{\phi(y)\}^2] dy$$

Contoh 11

Tentukan volume benda putar yang terjadi apabila daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu X dan garis $x = 4$ diputar mengelilingi sumbu X .

Penyelesaian:



$$V_X = \pi \int_0^4 \{\sqrt{x}\}^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 = 8\pi$$

Contoh 12

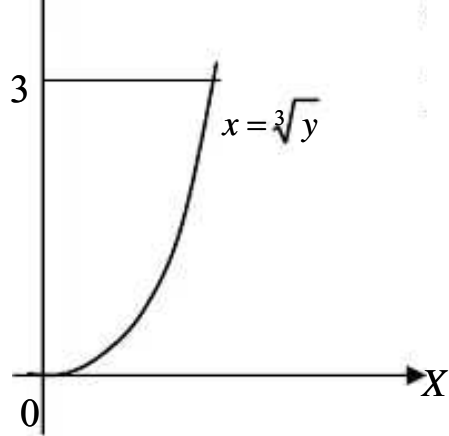
Tentukan volume benda putar yang terjadi apabila daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu Y dan garis $x = 3$ diputar mengelilingi sumbu Y .

Penyelesaian:



Karena $y = x^3$ maka $x = \sqrt[3]{y}$, sehingga

$$V_Y = \pi \int_0^3 \left\{ \sqrt[3]{y} \right\}^2 dy = \pi \int_0^3 y^{\frac{2}{3}} dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} \right]_0^3 = \frac{9\sqrt[3]{9}}{5} \pi$$



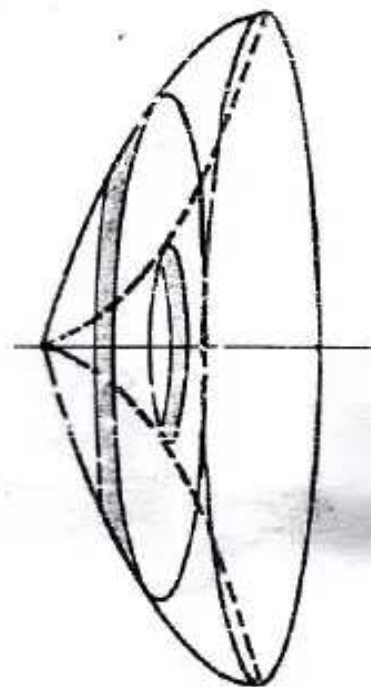
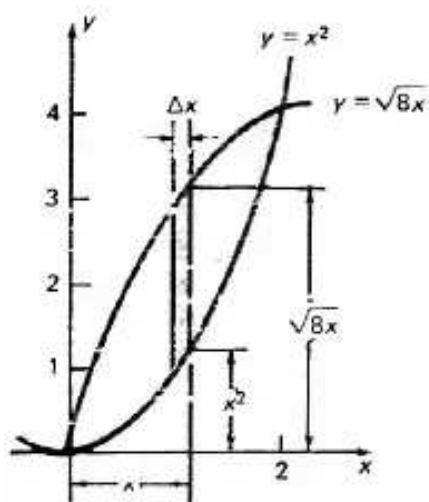
Integral Tertentu

Contoh 13

Tentukan volume benda putar yang terjadi apabila daerah tertutup yang dibatasi oleh dua kurva $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$ diputar mengelilingi sumbu X .

Penyelesaian:

Dapat dicari bahwa perpotongan kedua kurva adalah di $(0, 0)$ dan $(2, 4)$. Jika $y^2 = 8x$ maka $y = \sqrt{8x}$. Perhatikan gambar berikut.



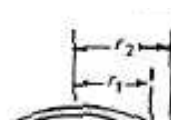
$$V_X = \pi \int_0^2 \left\{ \sqrt{8x} \right\}^2 - \left\{ x^2 \right\}^2 dx = \pi \int_0^2 [8x - x^4] dx = \pi \left[4x^2 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^2 = \frac{48}{5} \pi$$

Tentukan pula apabila daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu Y .

b. Metode Kulit Tabung

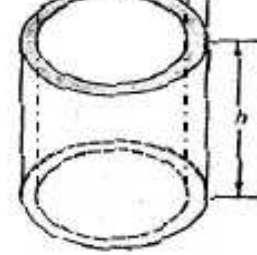
Perhatikan gambar di samping.

Volume benda pejal (ruang antara tabung besar dan kecil)



adalah

$$\begin{aligned} V &= (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)h \\ &= \pi(r_2^2 - r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \end{aligned}$$



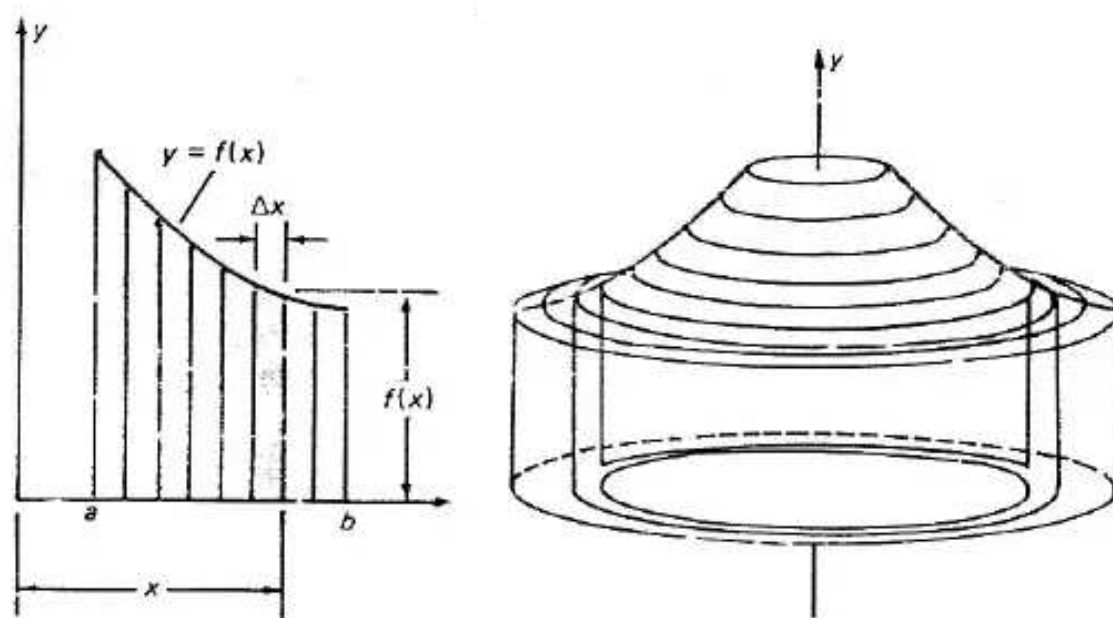
$$= 2\pi \left(\frac{r_2 + r_1}{2} \right) (r_2 - r_1)h$$

Rumusan ini dapat ditulis sebagai

$$V = 2\pi \bar{r} h \Delta r$$

dengan $\bar{r} = \frac{r_2 + r_1}{2}$ dan $\Delta r = r_2 - r_1$

Misalkan diketahui daerah dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu X serta garis-garis $x = a$ dan $x = b$. Apabila daerah tersebut diputar **mengelilingi sumbu Y** sebagai sumbu putarnya, maka volume benda putar yang terjadi dapat dicari sebagai berikut.



Dibuat partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $[a, b]$. Untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ dipilih satu titik $w_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \in [x_{i-1}, x_i]$, selanjutnya dibuat persegi panjang dengan panjang $f(w_i)$ dan lebar $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Jika persegi panjang ini diputar terhadap sumbu Y , maka diperoleh tabung hampiran dengan volume

$$\Delta V_i = 2\pi w_i f(w_i) \Delta x_i$$

Akibatnya diperoleh jumlahan Riemann

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n 2\pi w_i f(w_i) \Delta x_i$$

Apabila $\|P\| \rightarrow 0$ maka diperoleh volume benda putar yang dimaksud, yaitu

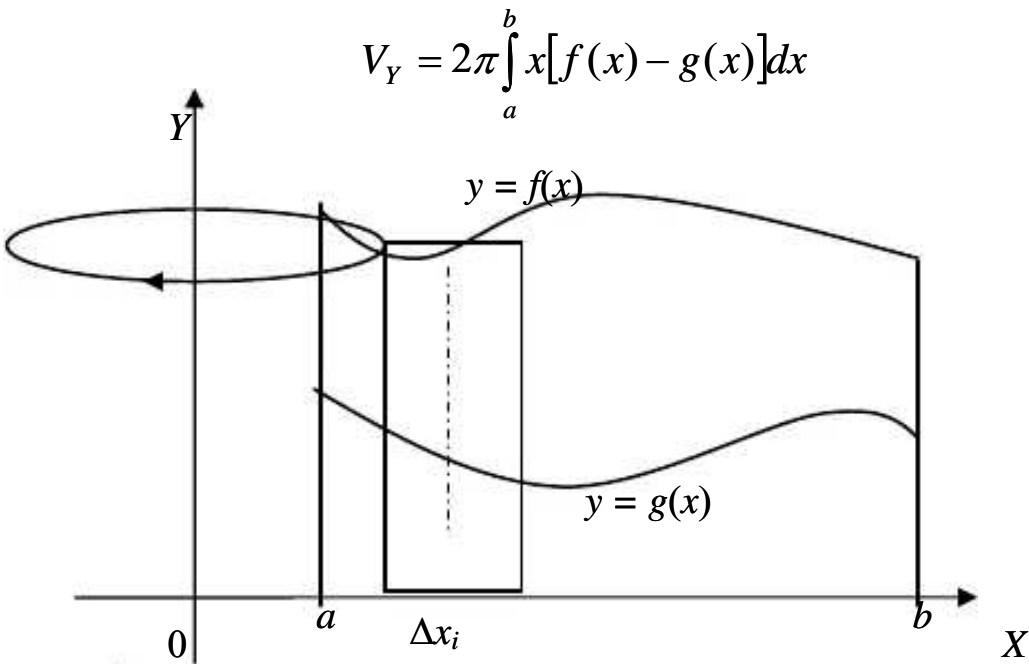
$$V_Y = 2\pi \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n w_i f(w_i) \Delta x_i$$

Integral Tertentu

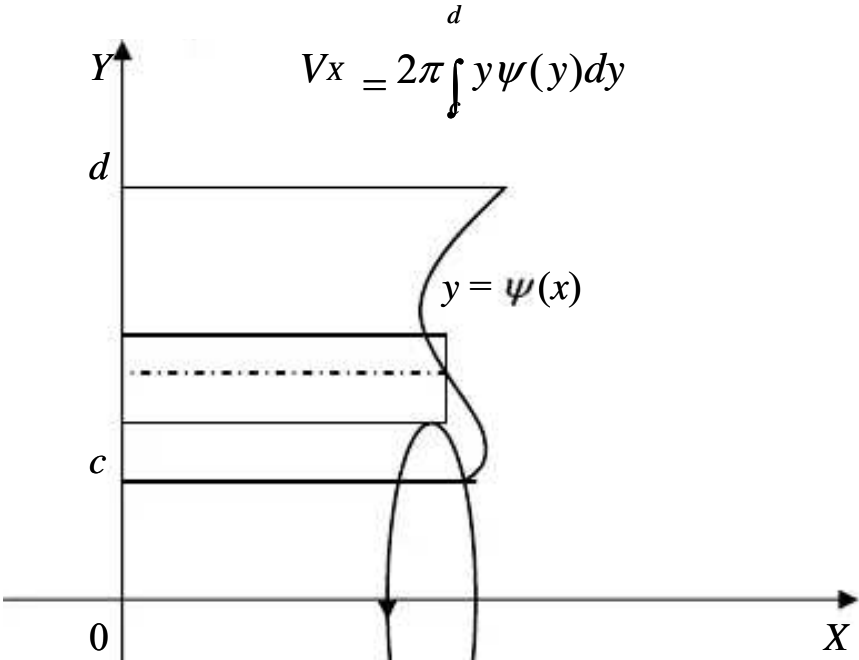
$$= 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Jadi $V^Y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$

Selanjutnya apabila daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ serta garis-garis $x = a$ dan $x = b$ seperti gambar di bawah ini diputar mengelilingi sumbu Y sebagai sumbu putar, maka volume benda yang terjadi adalah



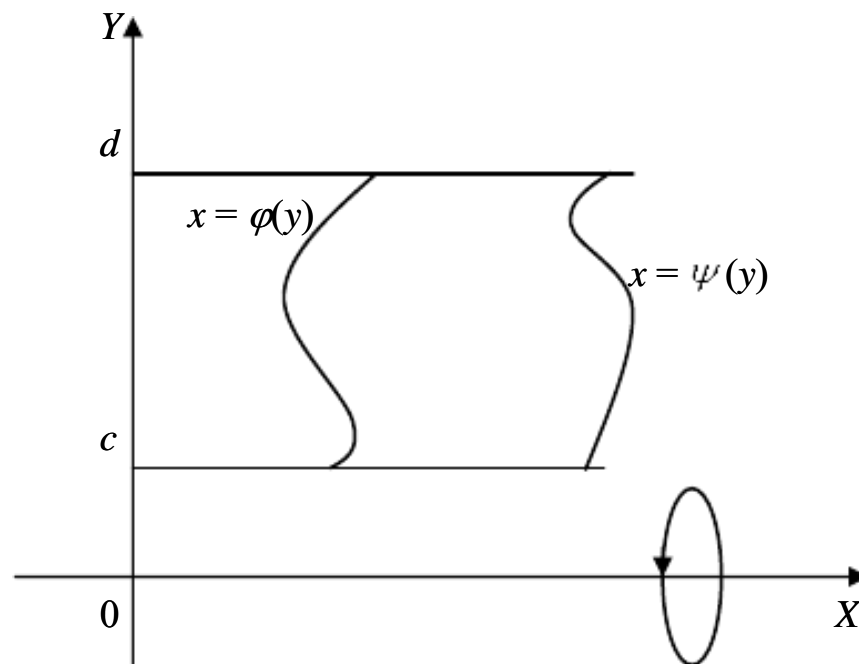
Dengan cara sama, misalkan diketahui daerah dibatasi oleh kurva $x = \psi(y)$, sumbu Y serta garis-garis $y = c$ dan $y = d$. Apabila daerah tersebut diputar **mengelilingi sumbu X** sebagai sumbu putarnya, maka volume benda putar yang terjadi adalah



Integral Tertentu

Demikian pula apabila daerah yang dibatasi oleh dua kurva $x = \psi(y)$ dan $x = \phi(y)$ serta garis-garis $y = c$ dan $y = d$ seperti gambar di bawah ini diputar mengelilingi sumbu X sebagai sumbu putar, maka volume benda yang terjadi adalah

$$V_X = 2\pi \int_c^d y[\psi(y) - \phi(y)]dy$$



Contoh 14

Tentukan volume benda putar yang terjadi apabila daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, sumbu X , dan garis $x = 1$ diputar mengelilingi sumbu Y .

Penyelesaian:

$$V_Y = 2\pi \int_1^4 x \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\pi \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = 2\pi \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{28}{3} \pi$$

Contoh 15

Diketahui suatu daerah tertutup dibatasi oleh kurva garis $y = \frac{r}{t}x$, sumbu X , dan garis $x = t$.

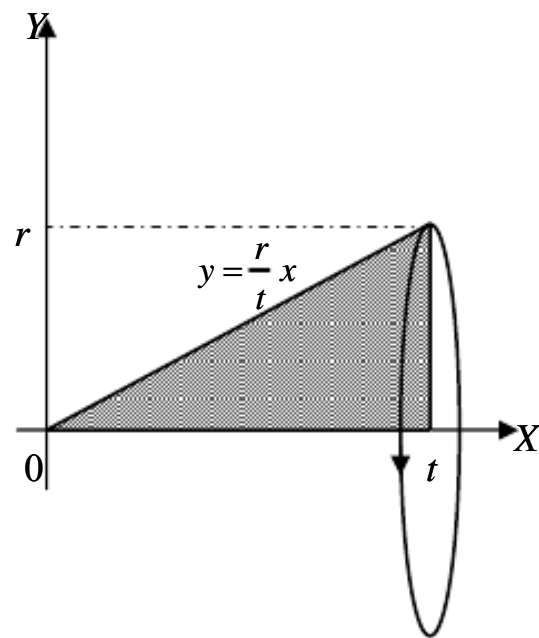
Dalam hal ini $r > 0$ dan $t > 0$. Jika daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu X , tentukan volume benda yang terjadi dengan dua cara.

Penyelesaian:

Cara I

Dengan metode cincin

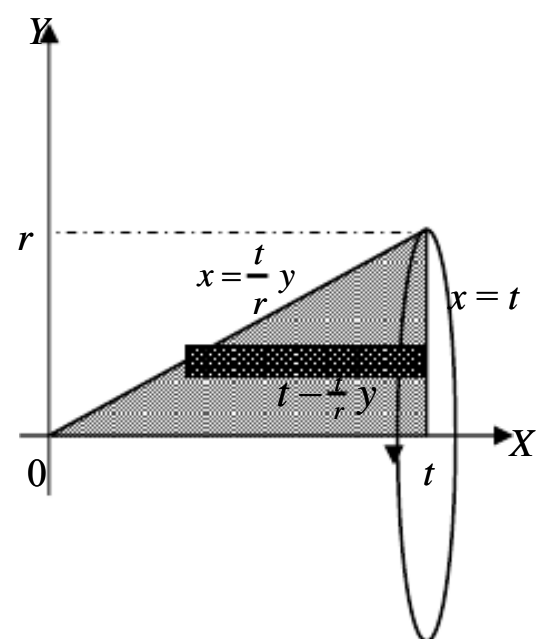
$$\begin{aligned}
 V_X &= \pi \int_0^t \left\{ \frac{r}{t} x \right\}^2 dx \\
 &= \pi \frac{r^2}{t^2} \int_0^t x^2 dx \\
 &= \pi \frac{r^2}{t^2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^t \\
 &= \frac{1}{3} \pi r^2 t
 \end{aligned}$$



Cara II

Dengan metode kulit tabung. Karena $y = \frac{r}{t} x$, maka $x = \frac{t}{r} y$

$$\begin{aligned}
 V_X &= 2\pi \int_0^r y \left(t - \frac{t}{r} y \right) dy \\
 &= 2\pi t \int_0^r \left(y - \frac{1}{r} y^2 \right) dy \\
 &= 2\pi t \left[\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3r} y^3 \right]_0^r \\
 &= 2\pi t \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^2 \right] \\
 &= \frac{1}{3} \pi r^2 t
 \end{aligned}$$

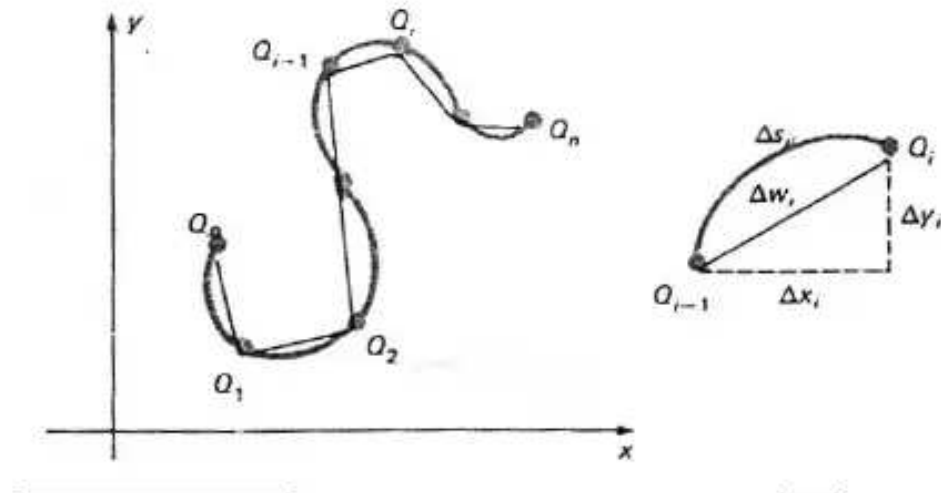


5.2.3 Panjang Kurva

Misalkan suatu kurva mulus diberikan oleh persamaan parameter $x = f(t)$, $y = g(t)$,

$a \leq t \leq b$. Panjang kurva tersebut dapat dicari sebagai berikut.

Dibuat partisi $P = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ pada $[a, b]$ dengan $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$, maka kurva akan terbagi menjadi n bagian oleh titik-titik $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, Q_n$. Perhatikan gambar berikut.



Pada bagian ke i , panjang busur $Q_{i-1}Q_i$, yaitu Δs_i dapat didekati oleh Δw_i . Dengan Pythagoras kita peroleh

$$\begin{aligned}\Delta w_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}\end{aligned}$$

Selanjutnya berdasarkan Teorema Nilai Rata-rata pada Derivatif tentu terdapat $\bar{t} \in (t_{i-1}, t_i)$ dan $\hat{t} \in (t_{i-1}, t_i)$ demikian sehingga

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\bar{t})(t_i - t_{i-1})$$

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\hat{t})(t_i - t_{i-1})$$

atau

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\bar{t})\Delta t_i$$

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\hat{t})\Delta t_i$$

dengan $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned}\Delta w_i &= \sqrt{[f'(\bar{t})\Delta t_i]^2 + [g'(\hat{t})\Delta t_i]^2} \\ &= \sqrt{[f'(\bar{t})]^2 + [g'(\hat{t})]^2} \Delta t_i\end{aligned}$$

dan panjang polygon dari segmen garis

$$\sum_{i=1}^n \Delta w_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2} \Delta t_i$$

Apabila $\|P\| \rightarrow 0$ maka diperoleh panjang kurva seluruhnya adalah

$$L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2} \Delta t_i = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

Jadi

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

atau

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Jika persamaan kurvana adalah $y = f(x)$ dengan $a \leq x \leq b$, maka

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

dan jika persamaan kurvana adalah $x = \psi(y)$ dengan $c \leq y \leq d$, maka

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

Contoh 16

Hitunglah keliling lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$.

Penyelesaian:

Lingkaran tersebut dapat ditulis dalam persamaan parameter sebagai

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t \quad \text{dengan } 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ sehingga } \frac{dx}{dt} = -r \sin t \quad \text{dan} \quad \frac{dy}{dt} = r \cos t.$$

$$\text{Akibatnya } L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} r dt = [rt]_0^{2\pi} = 2\pi r$$

Contoh 17

Menggunakan integral hitunglah panjang ruas garis yang menghubungkan titik $P(0, 1)$ dan $Q(5, 13)$.