

Аналитическая часть

1. Тригонометрический ряд Фурье

Для функции $f(x)$, определенной на отрезке $[0, 4]$:

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & x \in [0, 2), \\ 1, & x \in [2, 4]. \end{cases}$$

Формула для вычисления суммы ряда Фурье общего вида

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\frac{\pi n x}{2}) + b_n \sin(\frac{\pi n x}{2}))$$

Определение коэффициентов ряда Фурье

Функция $f(x)$ периодична с периодом $T = 4$. Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье a_0, a_n и b_n определяются как:

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_0^4 f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \cos(\frac{2\pi n x}{4}) dx$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \sin(\frac{2\pi n x}{4}) dx$$

Вычисление коэффициента a_0

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{x}{2} dx + \frac{1}{4} \int_2^4 1 dx$$

$$a_0 = \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^2 + \frac{1}{4} [x]_2^4$$

$$a_0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{3}{4}$$

Вычисление коэффициента a_n

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x}{2} \cos(\frac{\pi n x}{2}) dx + \frac{1}{2} \int_2^4 \cos(\frac{\pi n x}{2}) dx$$

$$a_n = \frac{1}{4} \int_0^2 x \cos(\frac{\pi n x}{2}) dx + \frac{1}{2} \int_2^4 \cos(\frac{\pi n x}{2}) dx$$

Замена переменной:

$$t = \frac{x}{2} \quad dt = \frac{1}{2} dx$$

$$a_n = \int_0^2 t \cos(\pi n t) dt + \frac{1}{2} \int_2^4 \cos(\frac{\pi n x}{2}) dx$$

Интегрирование по частям:

$$u = t \quad du = dt$$

$$dV = \cos(\pi nt) dt \quad V = \frac{\sin(\pi nt)}{\pi n}$$

$$a_n = \left(\left[\frac{t \sin(\pi nt)}{\pi n} \right]_0^2 - \int_0^2 \sin\left(\frac{\pi nt}{\pi n}\right) dt \right) + \frac{1}{2} \int_2^4 \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) dx$$

Замена переменной:

$$m = \pi nt \quad dm = \pi n dt$$

$$a_n = \left(\left[\frac{t \sin(\pi nt)}{\pi n} \right]_0^2 - \frac{1}{\pi^2 n^2} \int_0^2 \sin(m) dm \right) + \frac{1}{2} \int_2^4 \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) dx$$

$$a_n = \left[\frac{t \sin(\pi nt)}{\pi n} + \frac{\cos(m)}{\pi^2 n^2} \right]_0^2 + \frac{1}{2} \int_2^4 \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) dx$$

Замена переменной:

$$u = \frac{\pi nx}{2} \quad du = \frac{\pi n}{2} dx$$

$$a_n = \left[\frac{t \sin(\pi nt)}{\pi n} + \frac{\cos(m)}{\pi^2 n^2} \right]_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi n} \int_2^4 \cos(u) du$$

$$a_n = \left[\frac{t \sin(\pi nt)}{\pi n} + \frac{\cos(m)}{\pi^2 n^2} \right]_0^2 + \left[\frac{\sin(u)}{\pi n} \right]_2^4$$

Обратная замена:

$$a_n = \left[\frac{\frac{x}{2} \sin(\pi n \frac{x}{2})}{\pi n} + \frac{\cos(\pi n \frac{x}{2})}{\pi^2 n^2} \right]_0^2 + \left[\frac{\sin(\frac{\pi nx}{2})}{\pi n} \right]_2^4$$

$$a_n = \frac{\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{\sin(2\pi n)}{\pi n}$$

Для четных n :

$$a_n = 0$$

Для нечетных n :

$$a_n = -\frac{2}{\pi^2 n^2}$$

Вычисление коэффициента b_n

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x}{2} \sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_2^4 \sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{4} \int_0^2 x \sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_2^4 \sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right) dx$$

Замена переменной:

$$t = \frac{x}{2} \quad dt = \frac{1}{2} dx$$

$$b_n = \int_0^2 t \sin(\pi n t) dt + \frac{1}{2} \int_2^4 \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx$$

Интегрирование по частям:

$$u = t \quad du = dt$$

$$dV = \sin(\pi n t) dt \quad V = -\frac{\cos(\pi n t)}{\pi n}$$

$$b_n = \left(\left[-\frac{t \cos(\pi n t)}{\pi n} \right]_0^2 + \int_0^2 \cos\left(\frac{\pi n t}{\pi n}\right) dt \right) + \frac{1}{2} \int_2^4 \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx$$

Замена переменной:

$$m = \pi n t \quad dm = \pi n dt$$

$$b_n = \left(\left[-\frac{t \cos(\pi n t)}{\pi n} \right]_0^2 + \frac{1}{\pi^2 n^2} \int_0^2 \cos(m) dm \right) + \frac{1}{2} \int_2^4 \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx$$

$$b_n = \left[-\frac{t \cos(\pi n t)}{\pi n} + \frac{\sin(m)}{\pi^2 n^2} \right]_0^2 + \frac{1}{2} \int_2^4 \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx$$

Замена переменной:

$$u = \frac{\pi n x}{2} \quad du = \frac{\pi n}{2} dx$$

$$b_n = \left[-\frac{t \cos(\pi n t)}{\pi n} + \frac{\sin(m)}{\pi^2 n^2} \right]_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi n} \int_2^4 \sin(u) du$$

$$b_n = \left[-\frac{t \cos(\pi n t)}{\pi n} + \frac{\sin(m)}{\pi^2 n^2} \right]_0^2 - \left[\frac{\cos(u)}{\pi n} \right]_2^4$$

Обратная замена:

$$b_n = \left[-\frac{\frac{x}{2} \cos(\pi n \frac{x}{2})}{\pi n} + \frac{\sin(\pi n \frac{x}{2})}{\pi^2 n^2} \right]_0^2 - \left[\frac{\cos(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n} \right]_2^4$$

$$b_n = \frac{\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{\cos(2\pi n)}{\pi n}$$

Для четных n :

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

Для нечетных n :

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

Таким образом, ряд Фурье для функции $f(x)$ будет выглядеть следующим образом

Для четных n :

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \right)$$

Для нечетных n :

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) - \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \right)$$

Можно объединить для всех n :

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(((-1)^n \cdot \frac{1}{\pi^2 n^2} - \frac{1}{\pi^2 n^2}) \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) - \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \right)$$

График суммы ряда

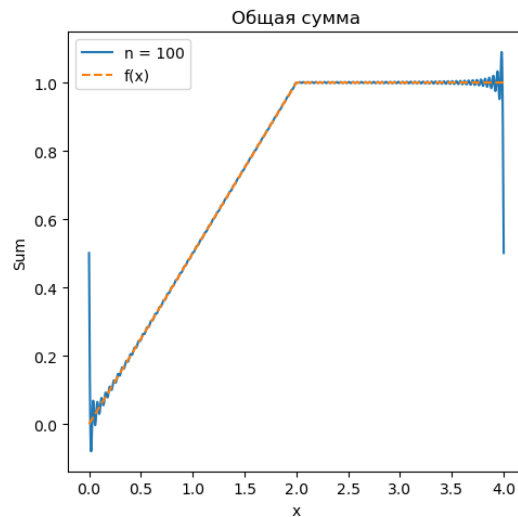


Рис. 1: Enter Caption

2. Четное продолжение функции и ряд Фурье по косинусам

Четное продолжение функции $f(x)$:

$$f_c(x) = \begin{cases} x/2, & x \in [0, 2), \\ 1, & x \in [2, 4], \\ -x/2, & x \in [-2, 0), \\ 1, & x \in [-4, -2). \end{cases}$$

Формула для вычисления суммы четного ряда Фурье по косинусам

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \right)$$

Функция $f_c(x)$ теперь четная и ее ряд Фурье содержит только косинусные члены:

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f_c(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{4} \left(\int_{-4}^{-2} 1 dx + \int_{-2}^0 \left(-\frac{x}{2}\right) dx + \int_0^2 1 dx + \int_2^4 \frac{x}{2} dx \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{4} \left([x]_{-4}^{-2} + \left[-\frac{x^2}{4} \right]_{-2}^0 + [x]_0^2 + \left[\frac{x^2}{4} \right]_2^4 \right) = 2$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-4}^4 f_c(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\int_{-4}^{-2} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx + \int_{-2}^0 -\frac{x}{2} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx + \int_0^2 \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx + \int_2^4 \frac{x}{2} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx \right)$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{2 \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi n} \right]_{-4}^{-2} + \left[\frac{2 \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi n} \right]_0^2 + \left[-\frac{\pi n x \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi^2 n^2} \right]_0^2 + \left[\frac{\pi n x \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi^2 n^2} \right]_2^4 \right)$$

$$a_n = 0$$

Таким образом, четный ряд Фурье по косинусам для функции $f_c(x)$ будет выглядеть следующим образом

Для любых n :

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0$$

График четной суммы ряда Фурье по косинусам

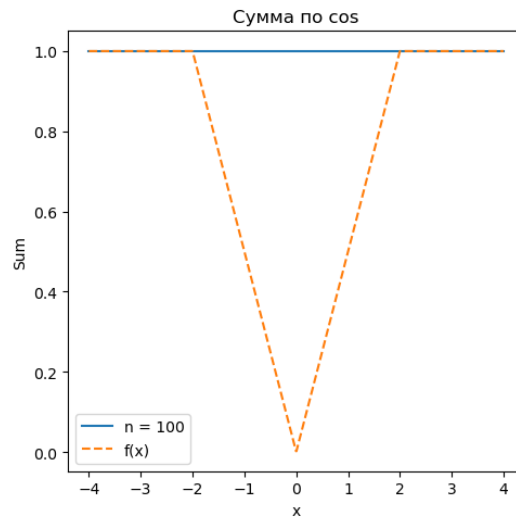


Рис. 2: Enter Caption

3. Нечетное продолжение функции и ряд Фурье по синусам

Нечетное продолжение функции $f(x)$:

$$f_s(x) = \begin{cases} x/2, & x \in [-2, 2), \\ 1, & x \in [2, 4], \\ -1, & x \in [-4, -2). \end{cases}$$

Формула для вычисления суммы нечетного ряда Фурье по синусам

$$f_s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right))$$

Функция $f_s(x)$ теперь нечетная и ее ряд Фурье содержит только синусные члены:

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f_s(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{4} \left(\int_{-4}^{-2} -1 dx + \int_{-2}^2 \frac{x}{2} dx + \int_2^4 1 dx \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{4} \left([-x]_{-4}^{-2} + \left[\frac{x^2}{4} \right]_{-2}^2 + [x]_2^4 \right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-4}^4 f_s(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{2} \left(\int_{-4}^{-2} -\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx + \int_{-2}^2 \frac{x}{2} \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx + \int_2^4 \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx \right)$$

$$b_n = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{2 \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi n} \right]_{-4}^{-2} + \left[\frac{2 \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) - \pi n x \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi^2 n^2} \right]_{-2}^2 + \left[-\frac{2 \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi n} \right]_2^4 \right)$$

Для любых n :

$$b_n = -\frac{2}{n\pi}$$

Таким образом, нечетный ряд Фурье по синусам для функции $f_s(x)$ будет выглядеть следующим образом

Для любых n :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \right)$$

График нечетной суммы ряда Фурье по синусам

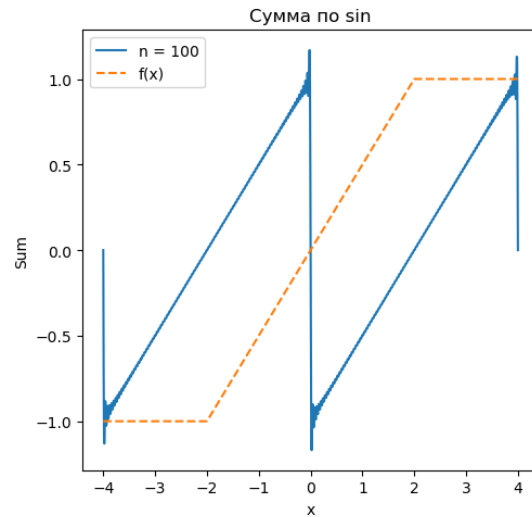


Рис. 3: Enter Caption

Графическая часть

График для каждой частичной суммы при разном количестве слагаемых

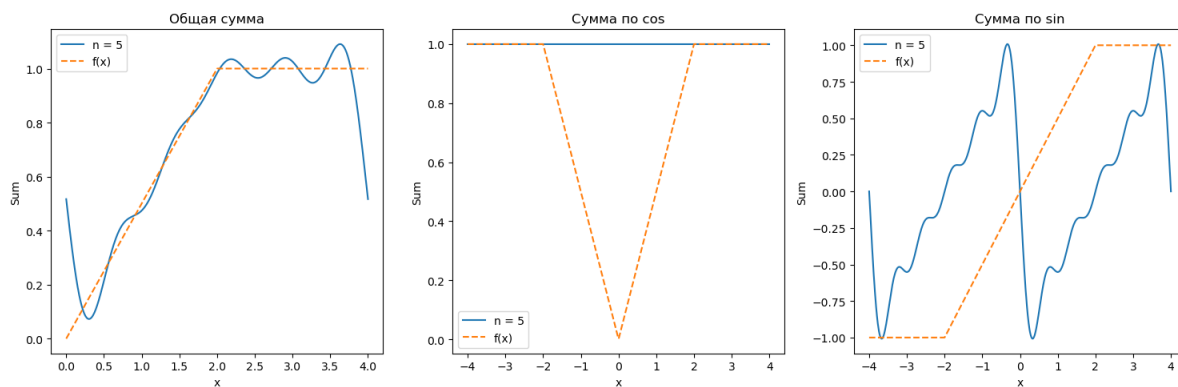


Рис. 4: При $n = 5$

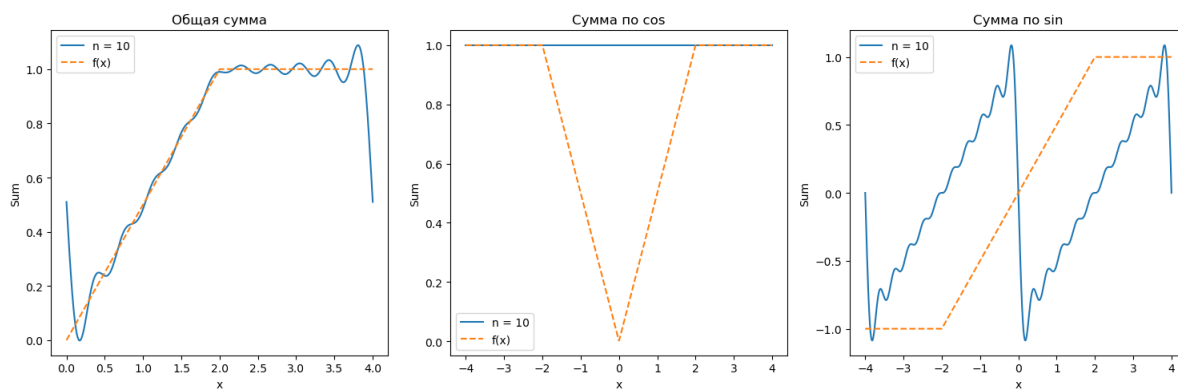


Рис. 5: При $n = 10$

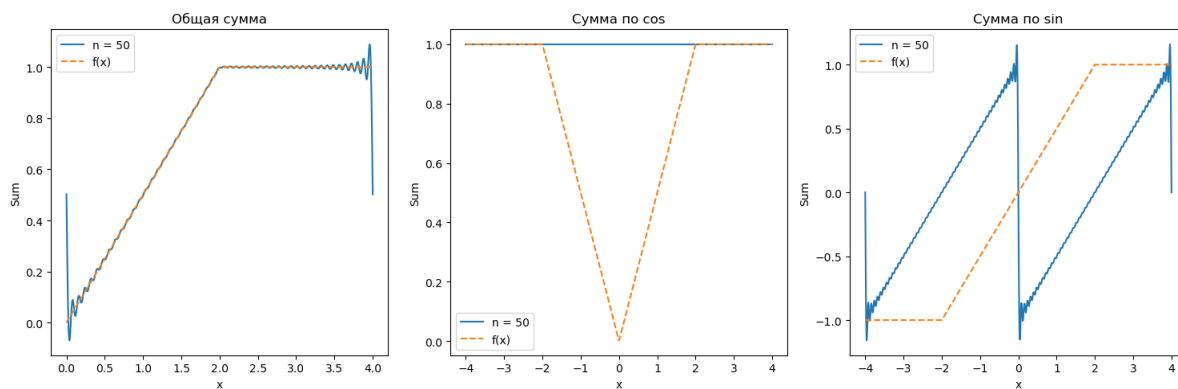


Рис. 6: При $n = 50$

Отчет

В аналитической части, используя теоритические знания, были вычислены ряды Фурье общего вида, ряды Фурье по косинусам и ряды Фурье по синусам. Были построены соответствующие графики с помощью языка программирования python и библиотек numpy и matplotlib. В графической части были построены графики рядов Фурье с разным числом слагаемых. По построенным графикам видно, что, чем больше количество слагаемых используется в рядах Фурье, тем точнее получается график.