Аналитическая часть

1. Тригонометрический ряд Фурье

Для функции $f(x)$, определенной на отрезке $[0, 4]$:

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & x \in [0, 2), \\ 1, & x \in [2, 4]. \end{cases}$$

Формула для вычисления суммы ряда Фурье общего вида

$$f(x) \, = \, a_0 \, + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \, cos(\frac{\pi n x}{2}) \, + \, b_n \, sin(\frac{\pi n x}{2}))$$

Определение коэффициентов ряда Фурье

Функция $f(x)$ периодична с периодом $T = 4$. Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье a_0, a_n и b_n определяются как:

$$a_0 = \frac{1}{4} \int\limits_0^4 f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int\limits_0^4 f(x) \, \cos(\frac{2\pi n x}{4}) \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int\limits_0^4 f(x) \, \sin(\frac{2\pi n x}{4}) \, dx$$

Вычисление коэффициента a_0

$$a_0 = \frac{1}{4} \int\limits_0^2 \frac{x}{2} \, dx \, + \, \frac{1}{4} \int\limits_2^4 1 \, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^2 \, + \, \frac{1}{4} \, [x]_2^4$$

$$a_0 = \frac{1}{4} \, + \, \frac{1}{4} \cdot 2 \, = \, \frac{3}{4}$$

Вычисление коэффициента a_n

$$a_n = \frac{1}{2} \int\limits_0^2 \frac{x}{2} \, cos(\frac{\pi n x}{2}) \, dx \, + \, \frac{1}{2} \int\limits_2^4 \, cos(\frac{\pi n x}{2}) dx$$

$$a_n = \frac{1}{4} \int\limits_0^2 x \, cos(\frac{\pi n x}{2}) \, dx \, + \, \frac{1}{2} \int\limits_2^4 \, cos(\frac{\pi n x}{2}) dx$$

Замена переменной:

$$t \, = \, \frac{x}{2} \qquad dt \, = \, \frac{1}{2} \, dx$$

$$a_n \, = \int\limits_0^2 \, t \, cos(\pi n t) \, dt \, + \, \frac{1}{2} \int\limits_2^4 \, cos(\frac{\pi n x}{2}) dx$$

Интегрирование по частям:

$$u \,=\, t \qquad\qquad du \,=\, dt$$

$$dV \,=\, cos(\pi nt)\, dt \qquad\qquad V \,=\, \frac{sin(\pi nt)}{\pi n}$$

$$a_n \,=\, (\left[\frac{t\, sin(\pi nt)}{\pi n}\right]_0^2 - \int\limits_0^2 sin(\frac{\pi nt}{\pi n})\, dt) \,+\, \frac{1}{2}\int\limits_2^4 cos(\frac{\pi nx}{2})dx$$

Замена переменной:

$$m \,=\, \pi nt \qquad dm \,=\, \pi n\, dt$$

$$a_n \,=\, (\left[\frac{t\, sin(\pi nt)}{\pi n}\right]_0^2 - \frac{1}{\pi^2 n^2}\int\limits_0^2 sin(m)\, dm) \,+\, \frac{1}{2}\int\limits_2^4 cos(\frac{\pi nx}{2})\, dx$$

$$a_n \,=\, \left[\frac{t\, sin(\pi nt)}{\pi n} \,+\, \frac{cos(m)}{\pi^2 n^2}\right]_0^2 \,+\, \frac{1}{2}\int\limits_2^4 cos(\frac{\pi nx}{2})\, dx$$

Замена переменной:

$$u \,=\, \frac{\pi nx}{2} \qquad\qquad du \,=\, \frac{\pi n}{2}\, dx$$

$$a_n \,=\, \left[\frac{t\, sin(\pi nt)}{\pi n} \,+\, \frac{cos(m)}{\pi^2 n^2}\right]_0^2 \,+\, \frac{1}{2} \,\cdot\, \frac{2}{\pi n}\int\limits_2^4 cos(u)\, du$$

$$a_n \,=\, \left[\frac{t\, sin(\pi nt)}{\pi n} \,+\, \frac{cos(m)}{\pi^2 n^2}\right]_0^2 \,+\, \left[\frac{sin(u)}{\pi n}\right]_2^4$$

Обратная замена:

$$a_n \,=\, \left[\frac{\frac{x}{2}\, sin(\pi n\frac{x}{2})}{\pi n} \,+\, \frac{cos(\pi n\frac{x}{2})}{\pi^2 n^2}\right]_0^2 \,+\, \left[\frac{sin(\frac{\pi nx}{2})}{\pi n}\right]_2^4$$

$$a_n \,=\, \frac{cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} \,-\, \frac{1}{\pi^2 n^2} \,+\, \frac{sin(2\pi n)}{\pi n}$$

Для четных n:

$$a_n \,=\, 0$$

Для нечетных n:

$$a_n \,=\, -\frac{2}{\pi^2 n^2}$$

Вычисление коэффициента b_n

$$b_n = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \frac{x}{2}\, sin(\frac{\pi nx}{2})\, dx \,+\, \frac{1}{2}\int\limits_2^4 sin(\frac{\pi nx}{2})dx$$

$$b_n = \frac{1}{4}\int\limits_0^2 x\, sin(\frac{\pi nx}{2})\, dx \,+\, \frac{1}{2}\int\limits_2^4 sin(\frac{\pi nx}{2})dx$$

Замена переменной:

$$t \;=\; \frac{x}{2} \qquad dt \;=\; \frac{1}{2}\,dx$$

$$b_n \;=\; \int\limits_0^2 t\,sin(\pi nt)\,dt \;+\; \frac{1}{2}\int\limits_2^4 sin(\frac{\pi nx}{2})dx$$

Интегрирование по частям:

$$u \;=\; t \qquad\qquad du \;=\; dt$$

$$dV \;=\; sin(\pi nt)\,dt \qquad\qquad V \;=\; -\frac{cos(\pi nt)}{\pi n}$$

$$b_n \;=\; (\left[-\frac{t\,cos(\pi nt)}{\pi n}\right]_0^2 \;+\; \int\limits_0^2 cos(\frac{\pi nt}{\pi n})\,dt) \;+\; \frac{1}{2}\int\limits_2^4 sin(\frac{\pi nx}{2})dx$$

Замена переменной:

$$m \;=\; \pi nt \qquad dm \;=\; \pi n\,dt$$

$$b_n \;=\; (\left[-\frac{t\,cos(\pi nt)}{\pi n}\right]_0^2 \;+\; \frac{1}{\pi^2 n^2}\int\limits_0^2 cos(m)\,dm) \;+\; \frac{1}{2}\int\limits_2^4 sin(\frac{\pi nx}{2})\,dx$$

$$b_n \;=\; \left[-\frac{t\,cos(\pi nt)}{\pi n} \;+\; \frac{sin(m)}{\pi^2 n^2}\right]_0^2 \;+\; \frac{1}{2}\int\limits_2^4 sin(\frac{\pi nx}{2})\,dx$$

Замена переменной:

$$u \;=\; \frac{\pi nx}{2} \qquad\qquad du \;=\; \frac{\pi n}{2}\,dx$$

$$b_n \;=\; \left[-\frac{t\,cos(\pi nt)}{\pi n} \;+\; \frac{sin(m)}{\pi^2 n^2}\right]_0^2 \;+\; \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi n}\int\limits_2^4 sin(u)\,du$$

$$b_n \;=\; \left[-\frac{t\,cos(\pi nt)}{\pi n} \;+\; \frac{sin(m)}{\pi^2 n^2}\right]_0^2 \;-\; \left[\frac{cos(u)}{\pi n}\right]_2^4$$

Обратная замена:

$$b_n \;=\; \left[-\frac{\frac{x}{2}\,cos(\pi n\frac{x}{2})}{\pi n} \;+\; \frac{sin(\pi n\frac{x}{2})}{\pi^2 n^2}\right]_0^2 \;-\; \left[\frac{cos(\frac{\pi nx}{2})}{\pi n}\right]_2^4$$

$$b_n \;=\; \frac{sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} \;-\; \frac{cos(2\pi n)}{\pi n}$$

Для четных n:

$$b_n \;=\; -\frac{1}{n\pi}$$

Для нечетных n:

$$b_n \;=\; -\frac{1}{n\pi}$$

Таким образом, ряд Фурье для функции $f(x)$ будет выглядеть следующим образом

Для четных n:

$$f(x) \;=\; \frac{3}{4} + \sum_{n=2}^{\infty}(-\frac{1}{\pi n}\,sin(\frac{\pi nx}{2}))$$

Для нечетных n:

$$f(x) \;=\; \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{2}{\pi^2 n^2}\,cos(\frac{\pi n x}{2}) \;-\; \frac{1}{\pi n}\,sin(\frac{\pi n x}{2}))$$

Можно объединить для всех n:

$$f(x) \;=\; \frac{3}{4} \;+\; \sum_{n=1}^{\infty}(((-1)^n \cdot \frac{1}{\pi^2 n^2} \;-\; \frac{1}{\pi^2 n^2})\,cos(\frac{\pi n x}{2}) \;-\; \frac{1}{\pi n}\,sin(\frac{\pi n x}{2}))$$

График суммы ряда

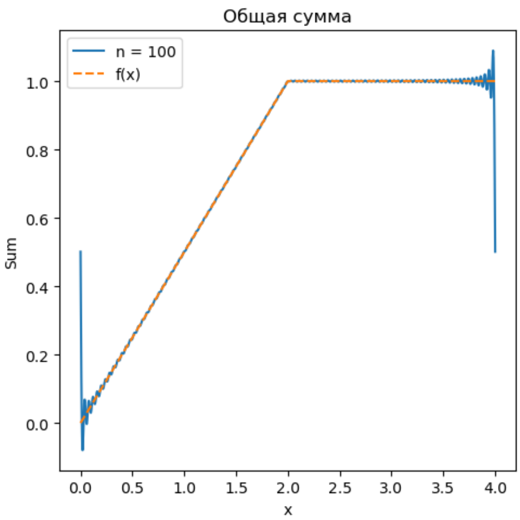

Рис. 1: Enter Caption

2. Четное продолжение функции и ряд Фурье по косинусам

Четное продолжение функции $f(x)$:

$$f_c(x) = \begin{cases} x/2, & x \in [0,2), \\ 1, & x \in [2,4], \\ -x/2, & x \in [-2,0), \\ 1, & x \in [-4,-2). \end{cases}$$

Формула для вычисления суммы четного ряда Фурье по косинусам

$$f(x) \;=\; \frac{a_0}{2} \;+\; \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,cos(\frac{\pi n x}{2}))$$

Функция $f_c(x)$ теперь четная и ее ряд Фурье содержит только косинусные члены:

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f_c(x)\,dx$$

$$a_0 \;=\; \frac{1}{4}(\int_{-4}^{-2} 1\,dx \;+\; \int_{-2}^{0}(-\frac{x}{2})\,dx \;+\; \int_{0}^{2} 1\,dx \;+\; \int_{2}^{4}\frac{x}{2}\,dx)$$

$$a_0 \;=\; \frac{1}{4}\,([x]_{-4}^{-2} + \left[-\frac{x^2}{4}\right]_{-2}^{0} \;+\; [x]_0^2 \;+\; \left[\frac{x^2}{4}\right]_2^4) \quad = \quad 2$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-4}^{4} f_c(x)\,\cos(\frac{\pi n x}{2})\,dx$$

$$a_n \;=\; \frac{1}{2}\,(\int_{-4}^{-2} cos(\frac{\pi n x}{2})\,dx \,+\, \int_{-2}^{0} -\frac{x}{2}\,cos(\frac{\pi n x}{2})\,dx \,+\, \int_{0}^{2} cos(\frac{\pi n x}{2})\,dx \,+\, \int_{2}^{4} \frac{x}{2}\,cos(\frac{\pi n x}{2})\,dx)$$

$$a_n \;=\; \frac{1}{2}\,(\left[\frac{2sin(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n}\right]_{-4}^{-2} + \left[\frac{2sin(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n}\right]_{0}^{2} + \left[-\frac{\pi n x sin(\frac{\pi n x}{2}) + 2cos(\frac{\pi n x}{2})}{\pi^2 n^2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{\pi n x sin(\frac{\pi n x}{2}) + 2cos(\frac{\pi n x}{2})}{\pi^2 n^2}\right]_{2}^{4})$$

$$a_n \;=\; \frac{2cos(\pi n - 2)}{\pi^2 n^2}$$

Таким образом, четный ряд Фурье по косинусам для функции $f_c(x)$ будет выглядеть следующим образом

Для любых n:

$$f(x) \;=\; 1 \,+\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2cos(\pi n - 2)}{\pi^2 n^2} cos\frac{\pi n x}{2}$$

График четной суммы ряда Фурье по косинусам

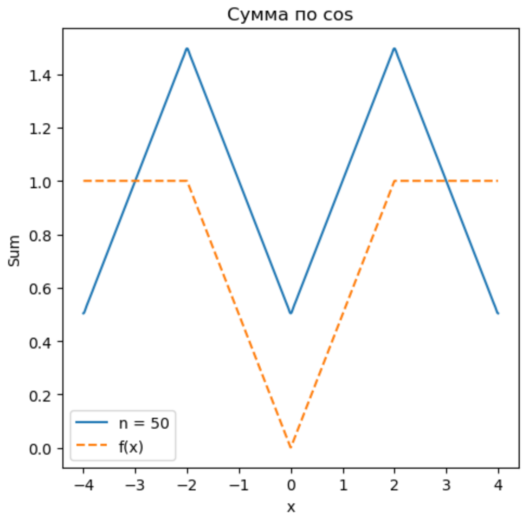

Рис. 2: Enter Caption

3. Нечетное продолжение функции и ряд Фурье по синусам

Нечетное продолжение функции $f(x)$:

$$f_s(x) = \begin{cases} x/2, & x \in [-2, 2), \\ 1, & x \in [2, 4], \\ -1, & x \in [-4, -2). \end{cases}$$

Формула для вычисления суммы нечетного ряда Фурье по синусам

$$f_s(x) \;=\; \frac{a_0}{2} \,+\, \sum_{n=1}^{\infty} (b_n\, sin(\frac{\pi n x}{2}))$$

Функция $f_s(x)$ теперь нечетная и ее ряд Фурье содержит только синусные члены:

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f_s(x)\,dx$$

$$a_0 \; = \; \frac{1}{4}\,(\int_{-4}^{-2} -1\,dx \; + \; \int_{-2}^{2} \frac{x}{2}\,dx \; + \; \int_{2}^{4} 1\,dx)$$

$$a_0 \; = \; \frac{1}{4}\,([-x]_{-4}^{-2} \; + \; \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-2}^{2} \; + \; [x]_2^4) \quad = \quad 0$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-4}^{4} f_s(x)\,\sin(\frac{\pi n x}{2})\,dx$$

$$b_n \; = \; \frac{1}{2}\,(\int_{-4}^{-2} -sin(\frac{\pi n x}{2})\,dx \; + \; \int_{-2}^{2} \frac{x}{2} sin(\frac{\pi n x}{2})\,dx \; + \; \int_{2}^{4} sin(\frac{\pi n x}{2})\,dx)$$

$$b_n \; = \; \frac{1}{2}(\left[\frac{2cos(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n}\right]_{-4}^{-2} \; + \; \left[\frac{2sin(\frac{\pi n x}{2}) \; - \; \pi n x cos(\frac{\pi n x}{2})}{\pi^2 n^2}\right]_{-2}^{2} \; + \; \left[-\frac{2cos(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n}\right]_2^4)$$

Для любых n:

$$b_n \; = \; -\frac{2}{n\pi}$$

Таким образом, нечетный ряд Фурье по синусам для функции $f_s(x)$ будет выглядеть следующим образом

Для любых n:

$$f(x) \; = \; \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{2}{n\pi}\,sin(\frac{\pi n x}{2}))$$

График нечетной суммы ряда Фурье по синусам

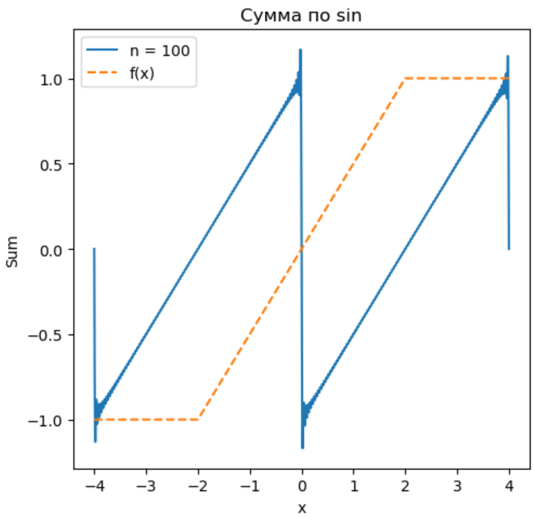

Рис. 3: Enter Caption

Графическая часть

График для каждой частичной суммы при разном количестве слагаемых

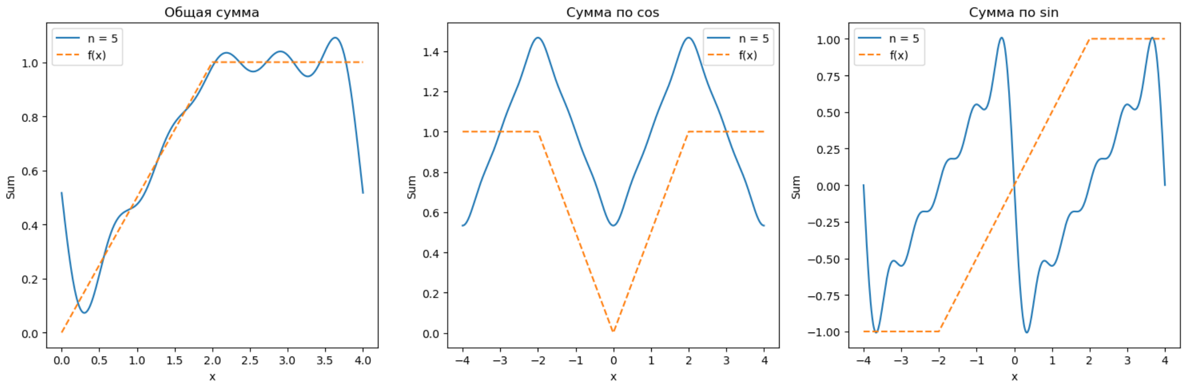

Рис. 4: При n = 5

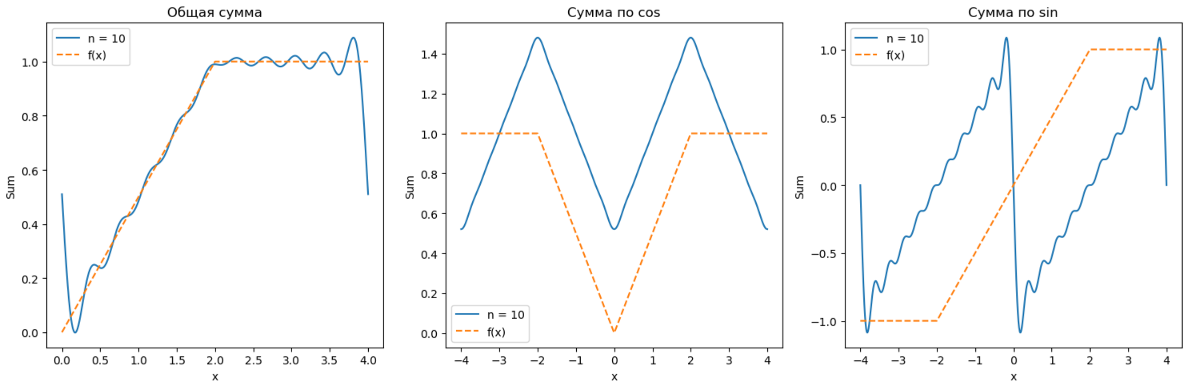

Рис. 5: При n = 10

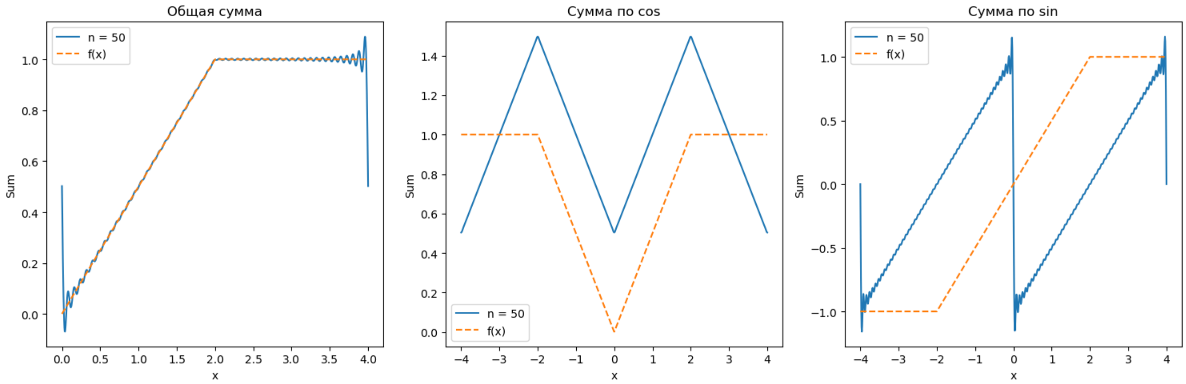

Рис. 6: При n = 50

Отчет

В аналитической части, используя теоритические знания, были вычислены ряды Фурье общего вида, ряды Фурье по косинусам и ряды Фурье по синусам. Были построены соответствующие графики с помощью языка программирования python и библиотек numpy и matplotlib. В графической части были построены графики рядов Фурье с разным числом слогаемых. По построенным графикам видно, что, чем больше количество слогаемых используется в рядах Фурье, тем точнее получается график.