最长递增子序列教你推导状态转移方程

Original labuladong labuladong 2022-05-09 08:21 四川

学算法认准 labuladong

后台回复**打卡**参与刷题挑战

点击卡片可搜索文章👇

labuladong推荐搜索

动态规划详解 | 回溯算法详解 | 图论算法 | 学习指南 | 框架思维 | 二叉树

读完本文，可以去力扣解决如下题目：

300. 最长递增子序列（中等）

354. 俄罗斯套娃信封问题（困难）

也许有读者看了前文 动态规划详解，学会了动态规划的套路：找到了问题的「状态」，明确了 `dp` 数组/函数的含义，定义了 base case；但是不知道如何确定「选择」，也就是找不到状态转移的关系，依然写不出动态规划解法，怎么办？

不要担心，动态规划的难点本来就在于寻找正确的状态转移方程，本文就借助经典的「最长递增子序列问题」来讲一讲设计动态规划的通用技巧：**数学归纳思想**。

最长递增子序列（Longest Increasing Subsequence，简写 LIS）是非常经典的一个算法问题，比较容易想到的是动态规划解法，时间复杂度 O(N^2)，我们借这个问题来由浅入深讲解如何找状态转移方程，如何写出动态规划解法。比较难想到的是利用二分查找，时间复杂度是 O(NlogN)，我们通过一种简单的纸牌游戏来辅助理解这种巧妙的解法。

力扣第 300 题「最长递增子序列」就是这个问题：

输入一个无序的整数数组，请你找到其中最长的严格递增子序列的长度，函数签名如下：

```
int lengthOfLIS(int[] nums);
```

比如说输入 `nums=[10,9,2,5,3,7,101,18]`，其中最长的递增子序列是 `[2,3,7,101]`，所以算法的输出应该是 4。

注意「子序列」和「子串」这两个名词的区别，子串一定是连续的，而子序列不一定是连续的。下面先来设计动态规划算法解决这个问题。

一、动态规划解法

动态规划的核心设计思想是数学归纳法。

相信大家对数学归纳法都不陌生，高中就学过，而且思路很简单。比如我们想证明一个数学结论，那么**我们先假设这个结论在 `k < n` 时成立，然后根据这个假设，想办法推导证明出 `k = n` 的时候此结论也成立**。如果能够证明出来，那么就说明这个结论对于 `k` 等于任何数都成立。

类似的，我们设计动态规划算法，不是需要一个 dp 数组吗？我们可以假设 `dp[0...i-1]` 都已经被算出来了，然后问自己：怎么通过这些结果算出 `dp[i]`？

直接拿最长递增子序列这个问题举例你就明白了。不过，首先要定义清楚 dp 数组的含义，即 `dp[i]` 的值到底代表着什么？

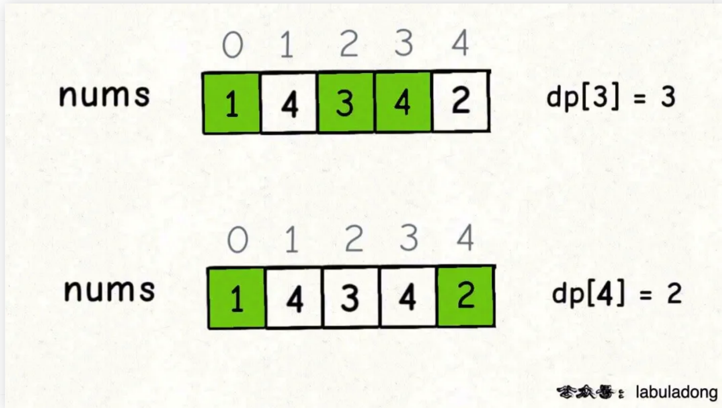
我们的定义是这样的：`dp[i]` 表示以 `nums[i]` 这个数结尾的最长递增子序列的长度。

> PS：为什么这样定义呢？这是解决子序列问题的一个套路，后文动态规划之子序列问题解题模板 总结了几种常见套路。你读完本章所有的动态规划问题，就会发现 `dp` 数组的定义方法也就那几种。

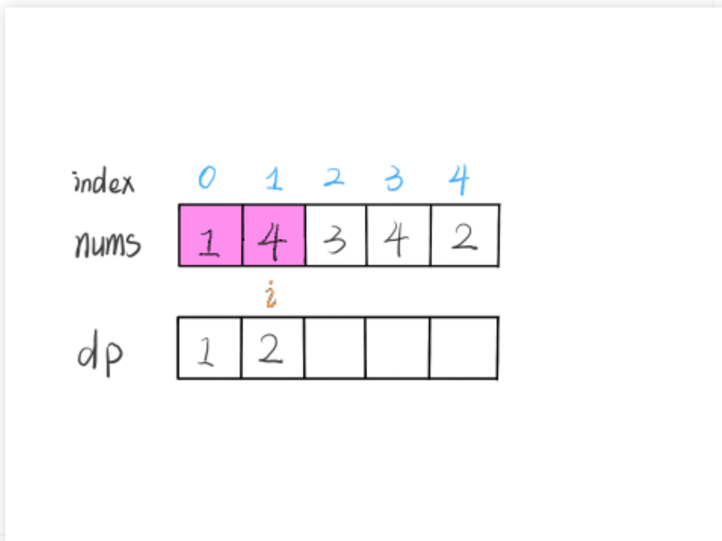
根据这个定义，我们就可以推出 base case：`dp[i]` 初始值为 1，因为以

nums[i] 结尾的最长递增子序列起码要包含它自己。

举两个例子：



这个 GIF 展示了算法演进的过程：



根据这个定义，我们的最终结果（子序列的最大长度）应该是 dp 数组中的最大值。

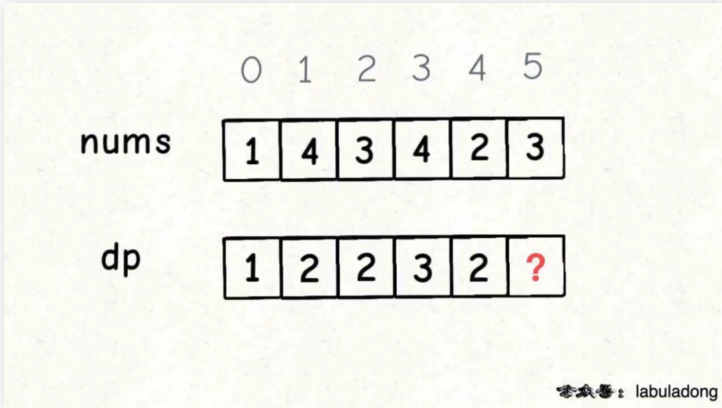
```
int res = 0;
for (int i = 0; i < dp.length; i++) {
    res = Math.max(res, dp[i]);
}
return res;
```

读者也许会问，刚才的算法演进过程中每个 dp[i] 的结果是我们肉眼看出来的，我们应该怎么设计算法逻辑来正确计算每个 dp[i] 呢？

这就是动态规划的重头戏，如何设计算法逻辑进行状态转移，才能正确运行呢？这里

需要使用数学归纳的思想：

假设我们已经知道了 `dp[0..4]` 的所有结果，我们如何通过这些已知结果推出 `dp[5]` 呢？



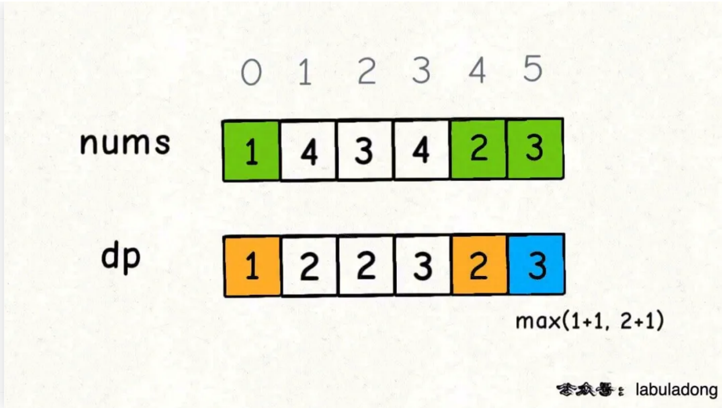
根据刚才我们对 `dp` 数组的定义，现在想求 `dp[5]` 的值，也就是想求以 `nums[5]` 为结尾的最长递增子序列。

`nums[5] = 3`，既然是递增子序列，我们只要找到前面那些结尾比 3 小的子序列，然后把 3 接到这些子序列末尾，就可以形成一个新的递增子序列，而且这个新的子序列长度加一。

`nums[5]` 前面有哪些元素小于 `nums[5]`？这个好算，用 for 循环比较一波就能把这些元素找出来。

以这些元素为结尾的最长递增子序列的长度是多少？回顾一下我们对 `dp` 数组的定义，它记录的正是以每个元素为末尾的最长递增子序列的长度。

以我们举的例子来说，`nums[0]` 和 `nums[4]` 都是小于 `nums[5]` 的，然后对比 `dp[0]` 和 `dp[4]` 的值，我们让 `nums[5]` 和更长的递增子序列结合，得出 `dp[5] = 3`：




```
for (int j = 0; j < i; j++) {
    if (nums[i] > nums[j]) {
        dp[i] = Math.max(dp[i], dp[j] + 1);
    }
}
```

当 `i = 5` 时，这段代码的逻辑就可以算出 `dp[5]` 。其实到这里，这道算法题我们就基本做完了。

读者也许会问，我们刚才只是算了 `dp[5]` 呀， `dp[4]` , `dp[3]` 这些怎么算呢？类似数学归纳法，你已经可以算出 `dp[5]` 了，其他的就都可以算出来：

```
for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
    for (int j = 0; j < i; j++) {
        // 寻找 nums[0..j-1] 中比 nums[i] 小的元素
        if (nums[i] > nums[j]) {
            // 把 nums[i] 接在后面，即可形成长度为 dp[j] + 1，
            // 且以 nums[i] 为结尾的递增子序列
            dp[i] = Math.max(dp[i], dp[j] + 1);
        }
    }
}
```

结合我们刚才说的 base case，下面我们看一下完整代码：

```
int lengthOfLIS(int[] nums) {
    // 定义：dp[i] 表示以 nums[i] 这个数结尾的最长递增子序列的长度
    int[] dp = new int[nums.length];
    // base case：dp 数组全都初始化为 1
    Arrays.fill(dp, 1);
    for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
        for (int j = 0; j < i; j++) {
            if (nums[i] > nums[j])
                dp[i] = Math.max(dp[i], dp[j] + 1);
```

```
        }
    }

    int res = 0;
    for (int i = 0; i < dp.length; i++) {
        res = Math.max(res, dp[i]);
    }
    return res;
}
```

至此，这道题就解决了，时间复杂度 `O(N^2)` 。总结一下如何找到动态规划的状态转移关系：

1、明确 `dp` 数组的定义。这一步对于任何动态规划问题都很重要，如果不得当或者不够清晰，会阻碍之后的步骤。

2、根据 `dp` 数组的定义，运用数学归纳法的思想，假设 `dp[0...i-1]` 都已知，想办法求出 `dp[i]` ，一旦这一步完成，整个题目基本就解决了。

但如果无法完成这一步，很可能就是 `dp` 数组的定义不够恰当，需要重新定义 `dp` 数组的含义；或者可能是 `dp` 数组存储的信息还不够，不足以推出下一步的答案，需要把 `dp` 数组扩大成二维数组甚至三维数组。

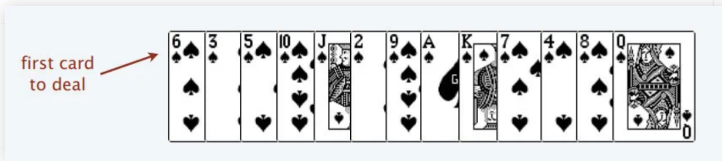
二、二分查找解法

这个解法的时间复杂度为 `O(NlogN)` ，但是说实话，正常人基本想不到这种解法（也许玩过某些纸牌游戏的人可以想出来）。所以大家了解一下就好，正常情况下能够给出动态规划解法就已经很不错了。

根据题目的意思，我都很难想象这个问题竟然能和二分查找扯上关系。其实最长递增子序列和一种叫做 patience game 的纸牌游戏有关，甚至有一种排序方法就叫做 patience sorting（耐心排序）。

为了简单起见，后文跳过所有数学证明，通过一个简化的例子来理解一下算法思路。

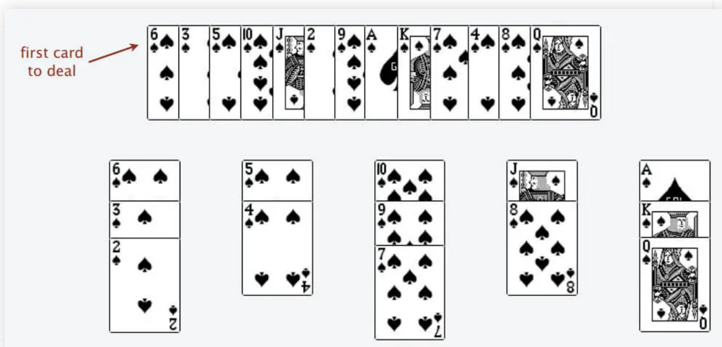
首先，给你一排扑克牌，我们像遍历数组那样从左到右一张一张处理这些扑克牌，最终要把这些牌分成若干堆。



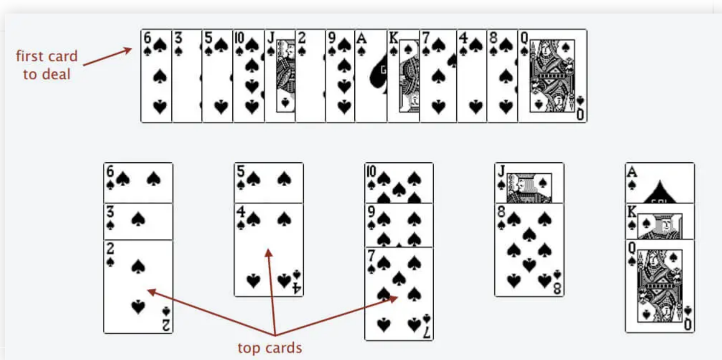
处理这些扑克牌要遵循以下规则：

只能把点数小的牌压到点数比它大的牌上；如果当前牌点数较大没有可以放置的堆，则新建一个堆，把这张牌放进去；如果当前牌有多个堆可供选择，则选择最左边的那一堆放置。

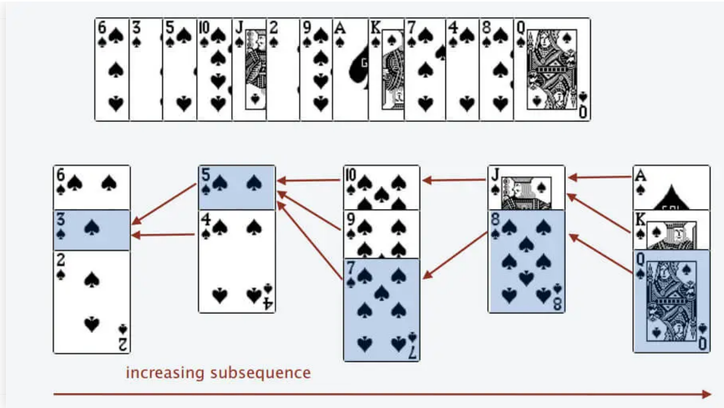
比如说上述的扑克牌最终会被分成这样 5 堆（我们认为纸牌 A 的牌面是最大的，纸牌 2 的牌面是最小的）。



为什么遇到多个可选择堆的时候要放到最左边的堆上呢？因为这样可以保证牌堆顶的牌有序（2，4，7，8，Q），证明略。



按照上述规则执行，可以算出最长递增子序列，牌的堆数就是最长递增子序列的长度，证明略。



我们只要把处理扑克牌的过程编程写出来即可。每次处理一张扑克牌不是要找一个合适的牌堆顶来放吗，牌堆顶的牌不是**有序**吗，这就能用到二分查找了：用二分查找来搜索当前牌应放置的位置。

> PS：旧文二分查找算法详解详细介绍了二分查找的细节及变体，这里就完美应用上了，如果没读过强烈建议阅读。

```
int lengthOfLIS(int[] nums) {
    int[] top = new int[nums.length];
    // 牌堆数初始化为 0
    int piles = 0;
    for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
        // 要处理的扑克牌
        int poker = nums[i];

        /***** 搜索左侧边界的二分查找 *****/
        int left = 0, right = piles;
        while (left < right) {
            int mid = (left + right) / 2;
            if (top[mid] > poker) {
                right = mid;
            } else if (top[mid] < poker) {
                left = mid + 1;
            } else {
                right = mid;
            }
        }
        /*********************************/

        // 没找到合适的牌堆，新建一堆
        if (left == piles) piles++;
        // 把这张牌放到牌堆顶
        top[left] = poker;
```

```
    }
    // 牌堆数就是 LIS 长度
    return piles;
}
```

至此，二分查找的解法也讲解完毕。

这个解法确实很难想到。首先涉及数学证明，谁能想到按照这些规则执行，就能得到最长递增子序列呢？其次还有二分查找的运用，要是对二分查找的细节不清楚，给了思路也很难写对。

所以，这个方法作为思维拓展好了。但动态规划的设计方法应该完全理解：假设之前的答案已知，利用数学归纳的思想正确进行状态的推演转移，最终得到答案。

三、拓展到二维

我们看一个经常出现在生活中的有趣问题，力扣第 354 题「俄罗斯套娃信封问题」，先看下题目：

354. 俄罗斯套娃信封问题 labuladong 题解 思路

难度 困难 658

给你一个二维整数数组 `envelopes` ，其中 `envelopes[i] = [wi, hi]` ，表示第 `i` 个信封的宽度和高度。

当另一个信封的宽度和高度都比这个信封大的时候，这个信封就可以放进另一个信封里，如同俄罗斯套娃一样。

请计算 **最多能有多少个** 信封能组成一组“俄罗斯套娃”信封（即可以把一个信封放到另一个信封里面）。

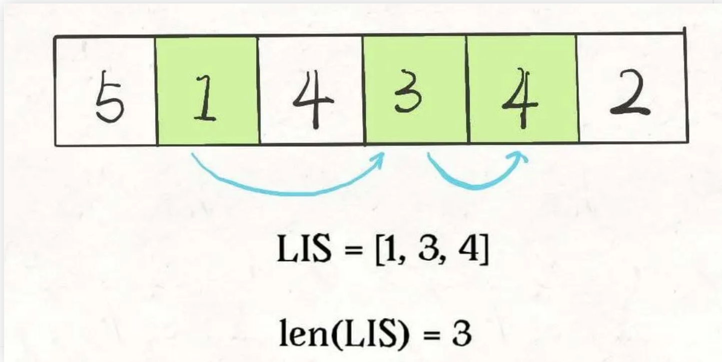
注意：不允许旋转信封。

示例 1：

```
输入：envelopes = [[5,4],[6,4],[6,7],[2,3]]
输出：3
解释：最多信封的个数为 3, 组合为: [2,3] => [5,4] => [6,7]。
```

这道题目其实是最长递增子序列的一个变种，因为每次合法的嵌套是大的套小的，相当于在二维平面中找一个最长递增的子序列，其长度就是最多能嵌套的信封个数。

前面说的标准 LIS 算法只能在一维数组中寻找最长子序列，而我们的信封是由 `(w,` h）这样的二维数对形式表示的，如何把 LIS 算法运用过来呢？



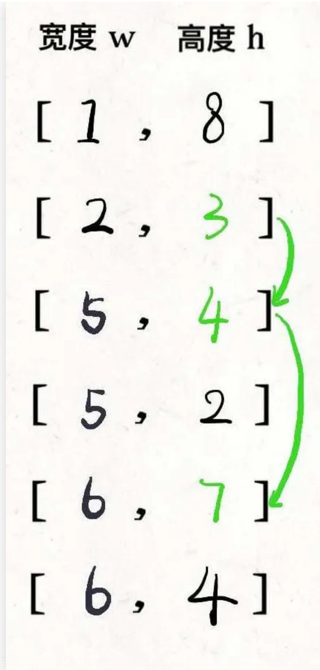
读者也许会想，通过 w × h 计算面积，然后对面积进行标准的 LIS 算法。但是稍加思考就会发现这样不行，比如 1 × 10 大于 3 × 3 ，但是显然这样的两个信封是无法互相嵌套的。

这道题的解法比较巧妙：

先对宽度 w 进行升序排序，如果遇到 w 相同的情况，则按照高度 h 降序排序；之后把所有的 h 作为一个数组，在这个数组上计算 LIS 的长度就是答案。

画个图理解一下，先对这些数对进行排序：

然后在 h 上寻找最长递增子序列，这个子序列就是最优的嵌套方案：



为什么呢？稍微思考一下就明白了：

首先，对宽度 `w` 从小到大排序，确保了 `w` 这个维度可以互相嵌套，所以我们只需要专注高度 `h` 这个维度能够互相嵌套即可。

其次，两个 `w` 相同的信封不能相互包含，所以对于宽度 `w` 相同的信封，对高度 `h` 进行降序排序，保证 LIS 中不存在多个 `w` 相同的信封（因为题目说了长宽相同也无法嵌套）。

下面看解法代码：

```
// envelopes = [[w, h], [w, h]...]
public int maxEnvelopes(int[][] envelopes) {
    int n = envelopes.length;
    // 按宽度升序排列，如果宽度一样，则按高度降序排列
    Arrays.sort(envelopes, new Comparator<int[]>()
    {
        public int compare(int[] a, int[] b) {
            return a[0] == b[0] ?
                b[1] - a[1] : a[0] - b[0];
        }
    });
    // 对高度数组寻找 LIS
    int[] height = new int[n];
    for (int i = 0; i < n; i++)
        height[i] = envelopes[i][1];
```

```
    return lengthOfLIS(height);
}

int lengthOfLIS(int[] nums) {
    // 见前文
}
```

为了清晰，我将代码分为了两个函数， 你也可以合并，这样可以节省下 `height` 数组的空间。

如果使用二分搜索版的 `lengthOfLIS` 函数，此算法的时间复杂度为 `O(NlogN)` ，因为排序和计算 LIS 各需要 `O(NlogN)` 的时间。空间复杂度为 `O(N)` ，因为计算 LIS 的函数中需要一个 `top` 数组。