如何判定完美矩形

通知： **数据结构精品课 V1.7 持续更新中；第九期打卡挑战 开始报名；B 站可查看核心算法框架系列视频。**

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

牛客	LeetCode	力扣	难度
-	391. Perfect Rectangle	391. 完美矩形	🔴

——————

今天讲一道非常有意思，而且比较有难度的题目。

我们知道一个矩形有四个顶点，但是只要两个顶点的坐标就可以确定一个矩形了（比如左下角和右上角两个顶点坐标）。

今天来看看力扣第 391 题「完美矩形」，题目会给我们输入一个数组 `rectangles`，里面装着若干四元组 `(x1,y1,x2,y2)`，每个四元组就是记录一个矩形的左下角和右上角坐标。

也就是说，输入的 `rectangles` 数组实际上就是很多小矩形，题目要求我们输出一个布尔值，判断这些小矩形能否构成一个「完美矩形」。函数签名如下：

```
def isRectangleCover(rectangles: List[List[int]]) -> bool
```

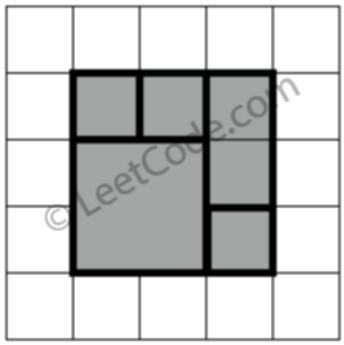
所谓「完美矩形」，就是说 `rectangles` 中的小矩形拼成图形必须是一个大矩形，且大矩形中不能有重叠和空缺。

比如说题目给我们举了几个例子：

Example 1:

```
rectangles = [
  [1,1,3,3],
  [3,1,4,2],
  [3,2,4,4],
  [1,3,2,4],
  [2,3,3,4]
]
```

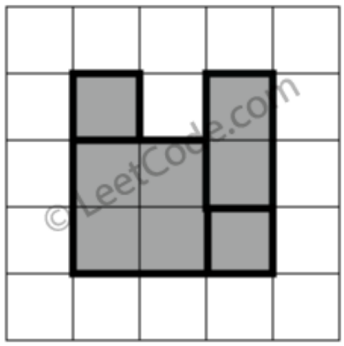
返回 `true`，因为最终形成的图形中没有空缺和重叠。



Example 2:

```
rectangles = [
  [1,1,3,3],
  [3,1,4,2],
  [1,3,2,4],
  [3,2,4,4]
]
```

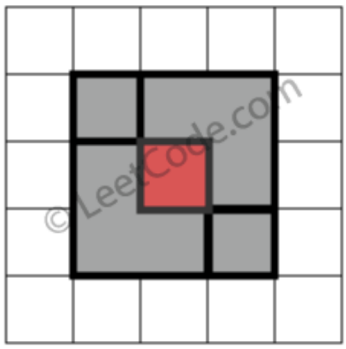
返回 `false`，因为最终形成的图形中有空缺。



Example 3:

```
rectangles = [
  [1,1,3,3],
  [3,1,4,2],
  [1,3,2,4],
  [2,2,4,4]
]
```

返回 `false`，因为最终形成的图形存在重叠。



这个题目难度是 Hard，如果没有做过类似的题目，还真做不出来。

常规的思路，起码要把最终形成的图形表示出来吧，而且你要有方法去判断两个矩形是否有重叠，

是否有空隙，虽然可以做到，不过感觉异常复杂。

其实，想判断最终形成的图形是否是完美矩形，需要从「面积」和「顶点」两个角度来处理。

先说说什么叫从「面积」的角度。

`rectangles` 数组中每个元素都是一个四元组 `(x1, y1, x2, y2)`，表示一个小矩形的左下角顶点坐标和右上角顶点坐标。

那么假设这些小矩形最终形成了一个「完美矩形」，你会不会求这个完美矩形的左下角顶点坐标 `(X1, Y1)` 和右上角顶点的坐标 `(X2, Y2)`？

这个很简单吧，左下角顶点 `(X1, Y1)` 就是 `rectangles` 中所有小矩形中最靠左下角的那个小矩形的左下角顶点；右上角顶点 `(X2, Y2)` 就是所有小矩形中最靠右上角的那个小矩形的右上角顶点。

注意我们用小写字母表示小矩形的坐标，大写字母表示最终形成的完美矩形的坐标，可以这样写代码：

```
# 左下角顶点，初始化为正无穷，以便记录最小值
X1, Y1 = float('inf'), float('inf')
# 右上角顶点，初始化为负无穷，以便记录最大值
X2, Y2 = -float('inf'), -float('inf')

for x1, y1, x2, y2 in rectangles:
    # 取小矩形左下角顶点的最小值
    X1, Y1 = min(X1, x1), min(Y1, y1)
    # 取小矩形右上角顶点的最大值
    X2, Y2 = max(X2, x2), max(Y2, y2)
```

这样就能求出完美矩形的左下角顶点坐标 `(X1, Y1)` 和右上角顶点的坐标 `(X2, Y2)` 了。

计算出的 `X1,Y1,X2,Y2` 坐标是完美矩形的「理论坐标」，如果所有小矩形的面积之和不等于这个完美矩形的理论面积，那么说明最终形成的图形肯定存在空缺或者重叠，肯定不是完美矩形。

代码可以进一步：

```
def isRectangleCover(rectangles: List[List[int]]) -> bool:
    X1, Y1 = float('inf'), float('inf')
    X2, Y2 = -float('inf'), -float('inf')
```

```
        # 记录所有小矩形的面积之和
        actual_area = 0
        for x1, y1, x2, y2 in rectangles:
            # 计算完美矩形的理论坐标
            X1, Y1 = min(X1, x1), min(Y1, y1)
            X2, Y2 = max(X2, x2), max(Y2, y2)
            # 累加所有小矩形的面积
            actual_area += (x2 - x1) * (y2 - y1)

        # 计算完美矩形的理论面积
        expected_area = (X2 - X1) * (Y2 - Y1)
        # 面积应该相同
        if actual_area != expected_area:
            return False

        return True
```

这样，「面积」这个维度就完成了，思路其实不难，无非就是假设最终形成的图形是个完美矩形，然后比较面积是否相等，如果不相等的话说明最终形成的图形一定存在空缺或者重叠部分，不是完美矩形。

但是反过来说，如果面积相同，是否可以证明最终形成的图形是完美矩形，一定不存在空缺或者重叠？

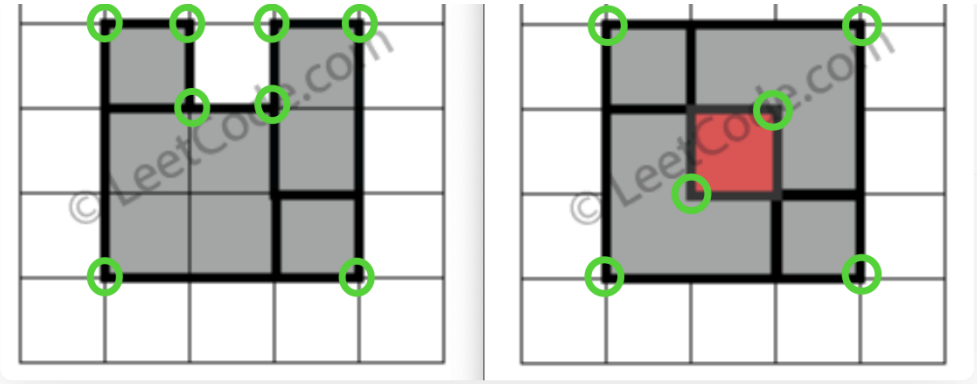
肯定是不行的，举个很简单的例子，你假想一个完美矩形，然后我在它中间挖掉一个小矩形，把这个小矩形向下平移一个单位。这样小矩形的面积之和没变，但是原来的完美矩形中就空缺了一部分，也重叠了一部分，已经不是完美矩形了。

综上，即便面积相同，并不能完全保证不存在空缺或者重叠，所以我们需要从「顶点」的维度来辅助判断。

记得小学的时候有一道智力题，给你一个矩形，切一刀，剩下的图形有几个顶点？答案是，如果沿着对角线切，就剩 3 个顶点；如果横着或者竖着切，剩 4 个顶点；如果只切掉一个小角，那么会出现 5 个顶点。

回到这道题，我们接下来的分析也有那么一点智力题的味道。

显然，完美矩形一定只有四个顶点。矩形嘛，按理说应该有四个顶点，如果存在空缺或者重叠的话，肯定不是四个顶点，比如说题目的这两个例子就有不止 4 个顶点：

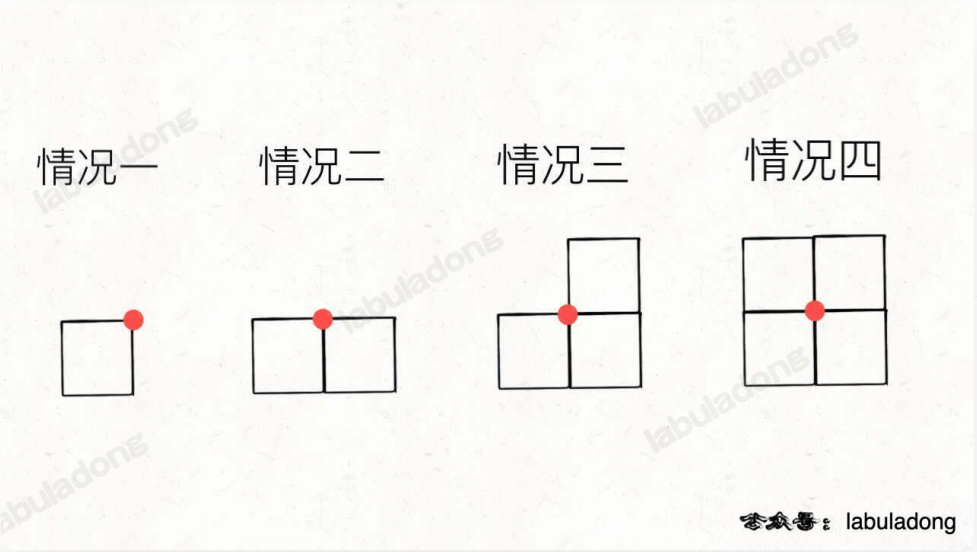


> PS：我也不知道应该用「顶点」还是「角」来形容，好像都不太准确，本文统一用「顶点」来形容，大家理解就好~

只要我们想办法计算 `rectangles` 中的小矩形最终形成的图形有几个顶点，就能判断最终的图形是不是一个完美矩形了。

那么顶点是如何形成的呢？我们倒是一眼就可以看出来顶点在哪里，问题是如何让计算机，让算法知道某一个点是不是顶点呢？这也是本题的难点所在。

看下图的四种情况：



图中画红点的地方，什么时候是顶点，什么时候不是顶点？显然，情况一和情况三的时候是顶点，而情况二和情况四的时候不是顶点。

也就是说，当某一个点同时是 2 个或者 4 个小矩形的顶点时，该点最终不是顶点；当某一个点同

时是 1 个或者 3 个小矩形的顶点时，该点最终是一个顶点。

注意，2 和 4 都是偶数，1 和 3 都是奇数，我们想计算最终形成的图形中有几个顶点，也就是要筛选出那些出现了奇数次的顶点，可以这样写代码：

```
def isRectangleCover(rectangles: List[List[int]]) -> bool:
    X1, Y1 = float('inf'), float('inf')
    X2, Y2 = -float('inf'), -float('inf')

    actual_area = 0
    # 哈希集合，记录最终图形的顶点
    points = set()
    for x1, y1, x2, y2 in rectangles:
        X1, Y1 = min(X1, x1), min(Y1, y1)
        X2, Y2 = max(X2, x2), max(Y2, y2)

        actual_area += (x2 - x1) * (y2 - y1)
        # 先算出小矩形每个点的坐标
        p1, p2 = (x1, y1), (x1, y2)
        p3, p4 = (x2, y1), (x2, y2)
        # 对于每个点，如果存在集合中，删除它；
        # 如果不存在集合中，添加它；
        # 在集合中剩下的点都是出现奇数次的点
        for p in [p1, p2, p3, p4]:
            if p in points: points.remove(p)
            else: points.add(p)

    expected_area = (X2 - X1) * (Y2 - Y1)
    if actual_area != expected_area:
        return False

    return True
```

这段代码中，我们用一个 `points` 集合记录 `rectangles` 中小矩形组成的最终图形的顶点坐标，关键逻辑在于如何向 `points` 中添加坐标：

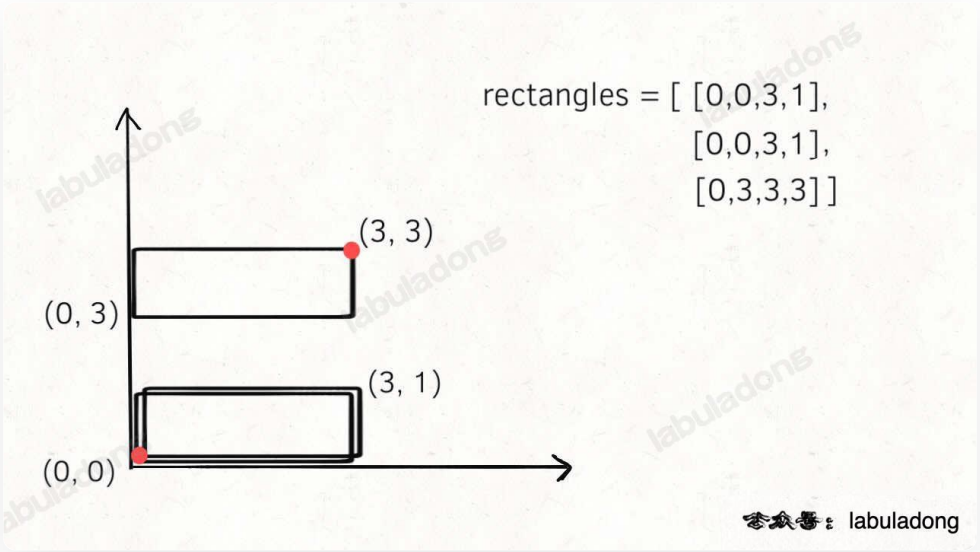
如果某一个顶点 `p` 存在于集合 `points` 中，则将它删除；如果不存在于集合 `points` 中，则将它插入。

这个简单的逻辑，让 `points` 集合最终只会留下那些出现了 1 次或者 3 次的顶点，那些出现了 2 次或者 4 次的顶点都被消掉了。

那么首先想到，`points` 集合中最后应该只有 4 个顶点对吧，如果 `len(points) != 4` 说明最终构

成的图形肯定不是完美矩形。

但是如果 `len(points) == 4` 是否能说明最终构成的图形肯定是完美矩形呢？也不行，因为题目并没有说 `rectangles` 中的小矩形不存在重复，比如下面这种情况：



下面两个矩形重复了，按照我们的算法逻辑，它们的顶点都被消掉了，最终是剩下了四个顶点；再看面积，完美矩形的理论坐标是图中红色的点，计算出的理论面积和实际面积也相同。但是显然这种情况不是题目要求完美矩形。

所以不仅要保证 `len(points) == 4`，而且要保证 `points` 中最终剩下的点坐标就是完美矩形的四个理论坐标，直接看代码吧：

```
def isRectangleCover(rectangles: List[List[int]]) -> bool:
    X1, Y1 = float('inf'), float('inf')
    X2, Y2 = -float('inf'), -float('inf')

    points = set()
    actual_area = 0
    for x1, y1, x2, y2 in rectangles:
        # 计算完美矩形的理论顶点坐标
        X1, Y1 = min(X1, x1), min(Y1, y1)
        X2, Y2 = max(X2, x2), max(Y2, y2)
        # 累加小矩形的面积
        actual_area += (x2 - x1) * (y2 - y1)
        # 记录最终形成的图形中的顶点
        p1, p2 = (x1, y1), (x1, y2)
        p3, p4 = (x2, y1), (x2, y2)
```

```
        for p in [p1, p2, p3, p4]:
            if p in points: points.remove(p)
            else:           points.add(p)
    # 判断面积是否相同
    expected_area = (X2 - X1) * (Y2 - Y1)
    if actual_area != expected_area:
        return False
    # 判断最终留下的顶点个数是否为 4
    if len(points) != 4:        return False
    # 判断留下的 4 个顶点是否是完美矩形的顶点
    if (X1, Y1) not in points: return False
    if (X1, Y2) not in points: return False
    if (X2, Y1) not in points: return False
    if (X2, Y2) not in points: return False
    # 面积和顶点都对应，说明矩形符合题意
    return True
```

这就是最终的解法代码，从「面积」和「顶点」两个维度来判断：

1、判断面积，通过完美矩形的理论坐标计算出一个理论面积，然后和 `rectangles` 中小矩形的实际面积和做对比。

2、判断顶点，`points` 集合中应该只剩下 4 个顶点且剩下的顶点必须都是完美矩形的理论顶点。

- - - - - - - - - - - - - -