2.7 为什么 0.1 + 0.2 不等于 0.3 ?

我们来思考几个问题：

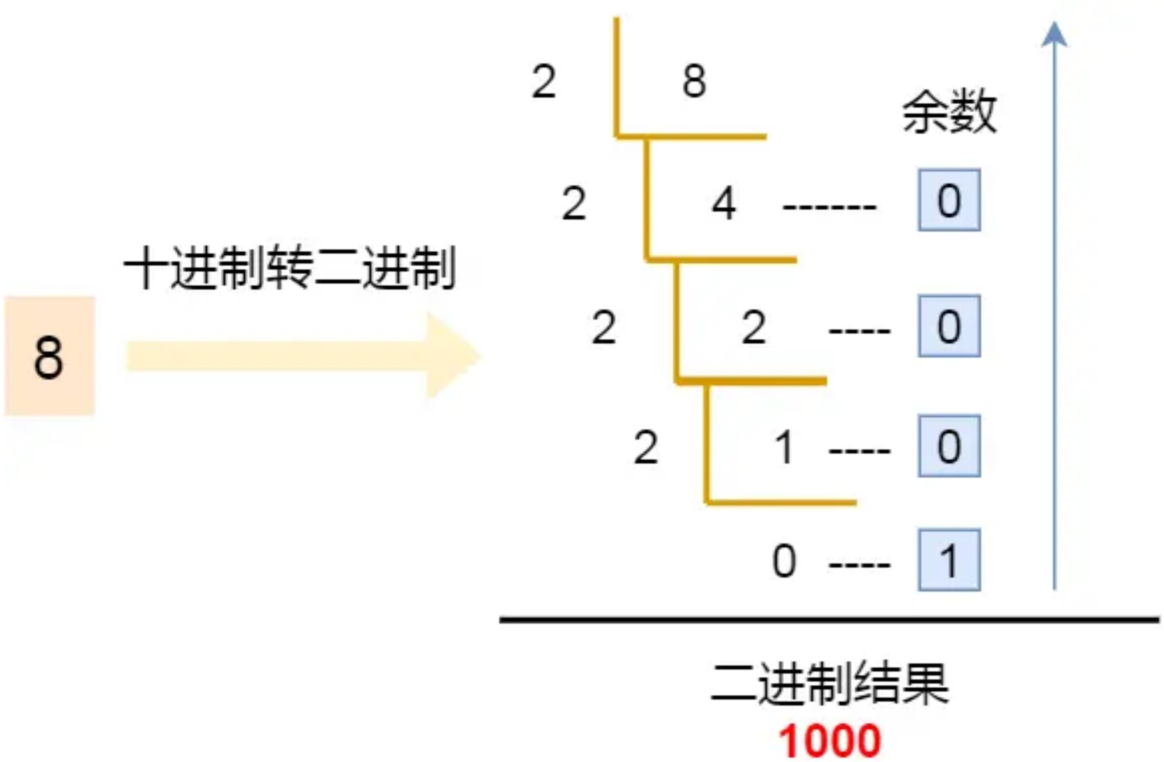
- 为什么负数要用补码表示?
- 十进制小数怎么转成二进制?
- 计算机是怎么存小数的?
- 0.1 + 0.2 == 0.3 吗?
- ...

别看这些问题都看似简单，但是其实还是有点东西的这些问题。

为什么负数要用补码表示?

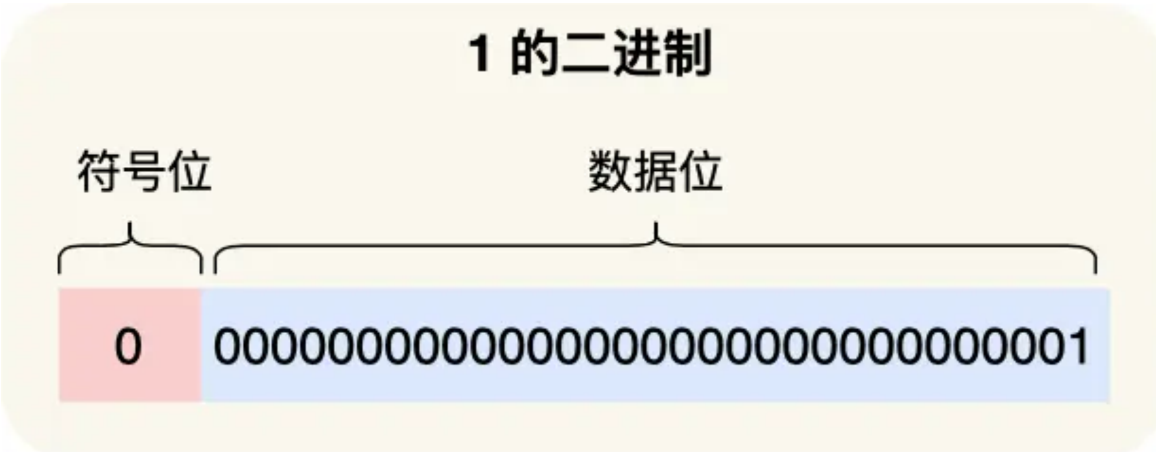
十进制转换二进制的方法相信大家都熟能生巧了，如果你说你还不知道，我觉得你还是太谦虚，可能你只是忘记了，即使你真的忘记了，不怕，贴心的小林在和你一起回忆一下。

十进制数转二进制采用的是**除 2 取余法**，比如数字 8 转二进制的过程如下图：

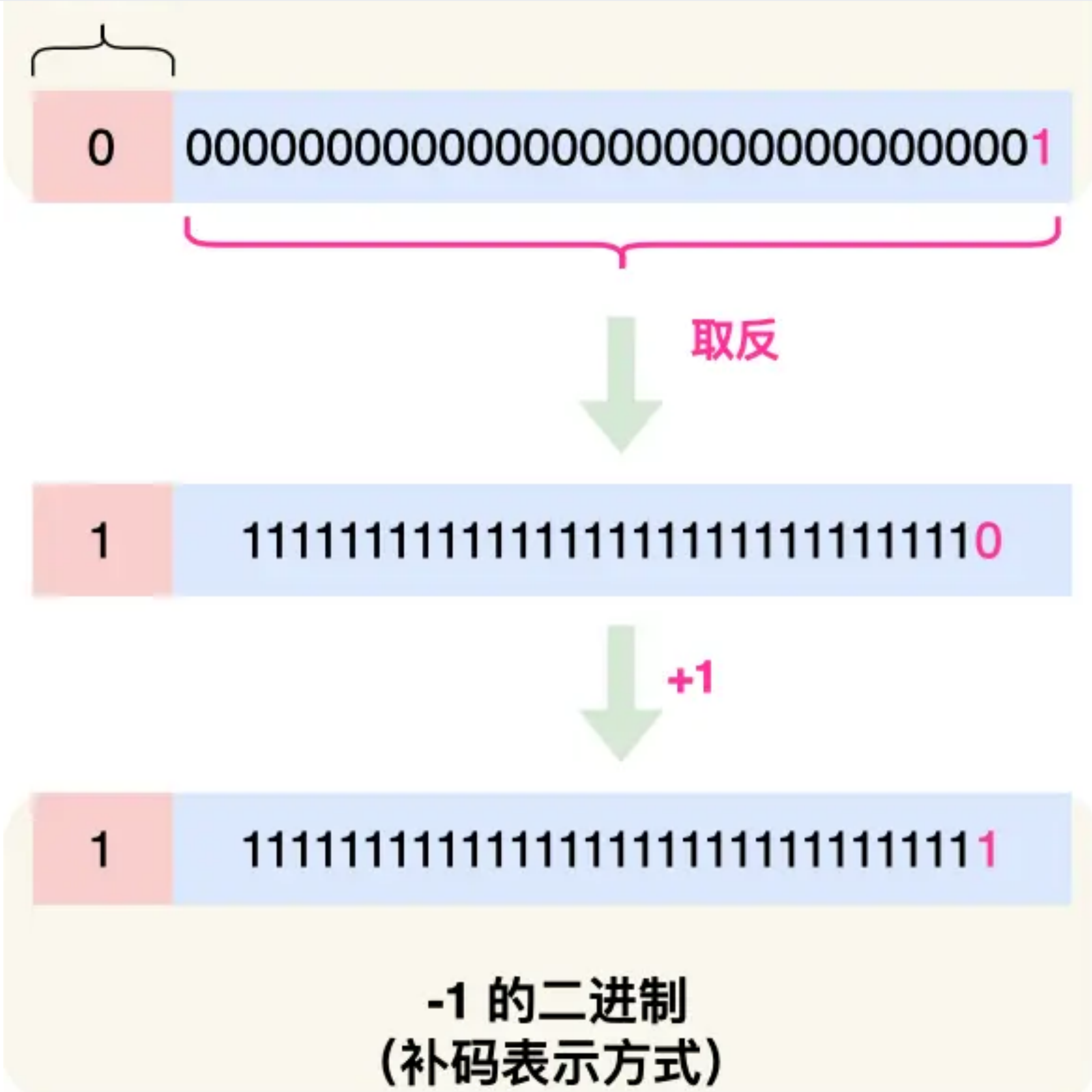


我们以 `int` 类型的数字作为例子，int 类型是 `32` 位的，其中**最高位是作为「符号标志位」**，正数的符号位是 `0` ，负数的符号位是 `1` ，**剩余的 31 位则表示二进制数据。**

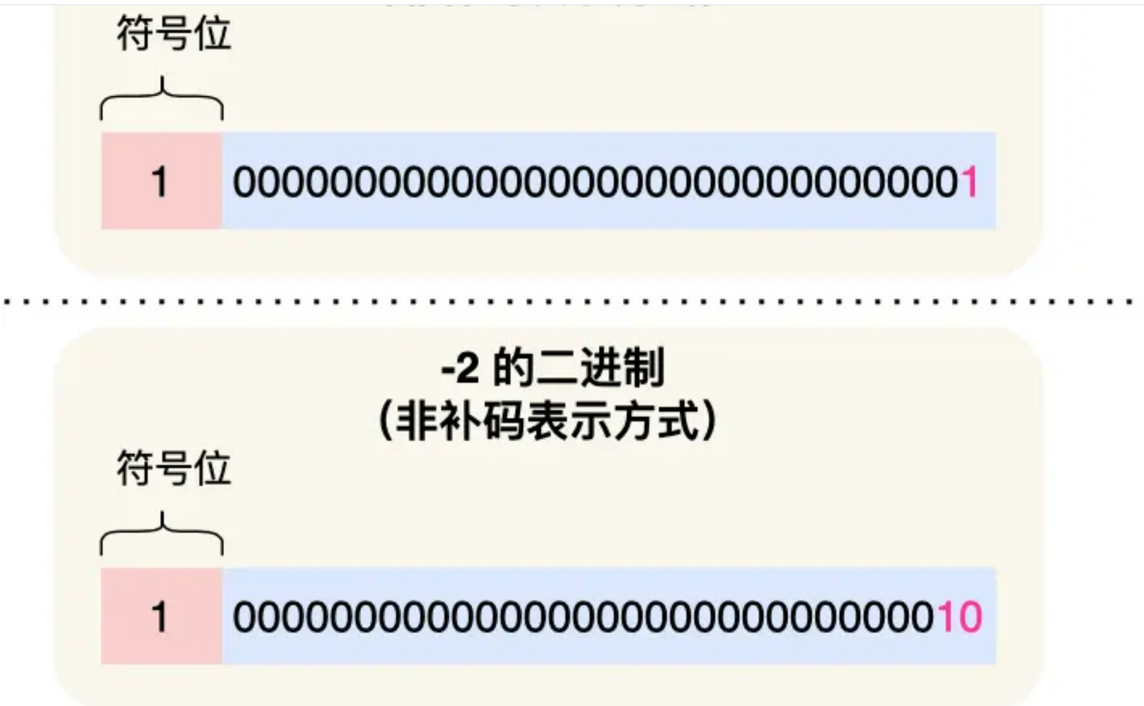
那么，对于 int 类型的数字 1 的二进制数表示如下：



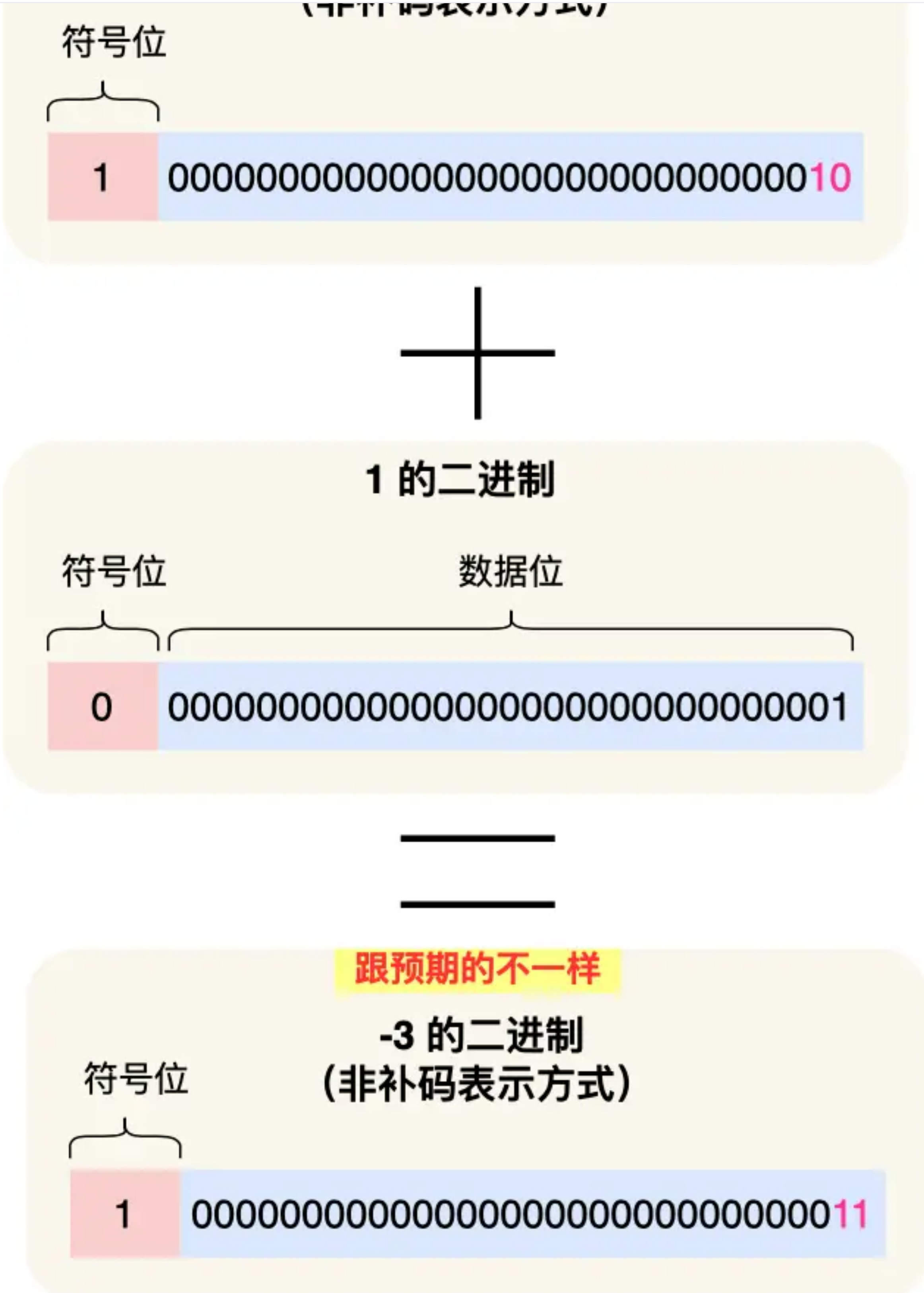
而负数就比较特殊了点，负数在计算机中是以「补码」表示的，**所谓的补码就是把正数的二进制全部取反再加 1**，比如 -1 的二进制是把数字 1 的二进制取反后再加 1，如下图：



不知道你有没有想过，为什么计算机要用补码的方式来表示负数？在回答这个问题前，我们假设不用补码的方式来表示负数，而只是把最高位的符号标志位变为 1 表示负数，如下图过程：



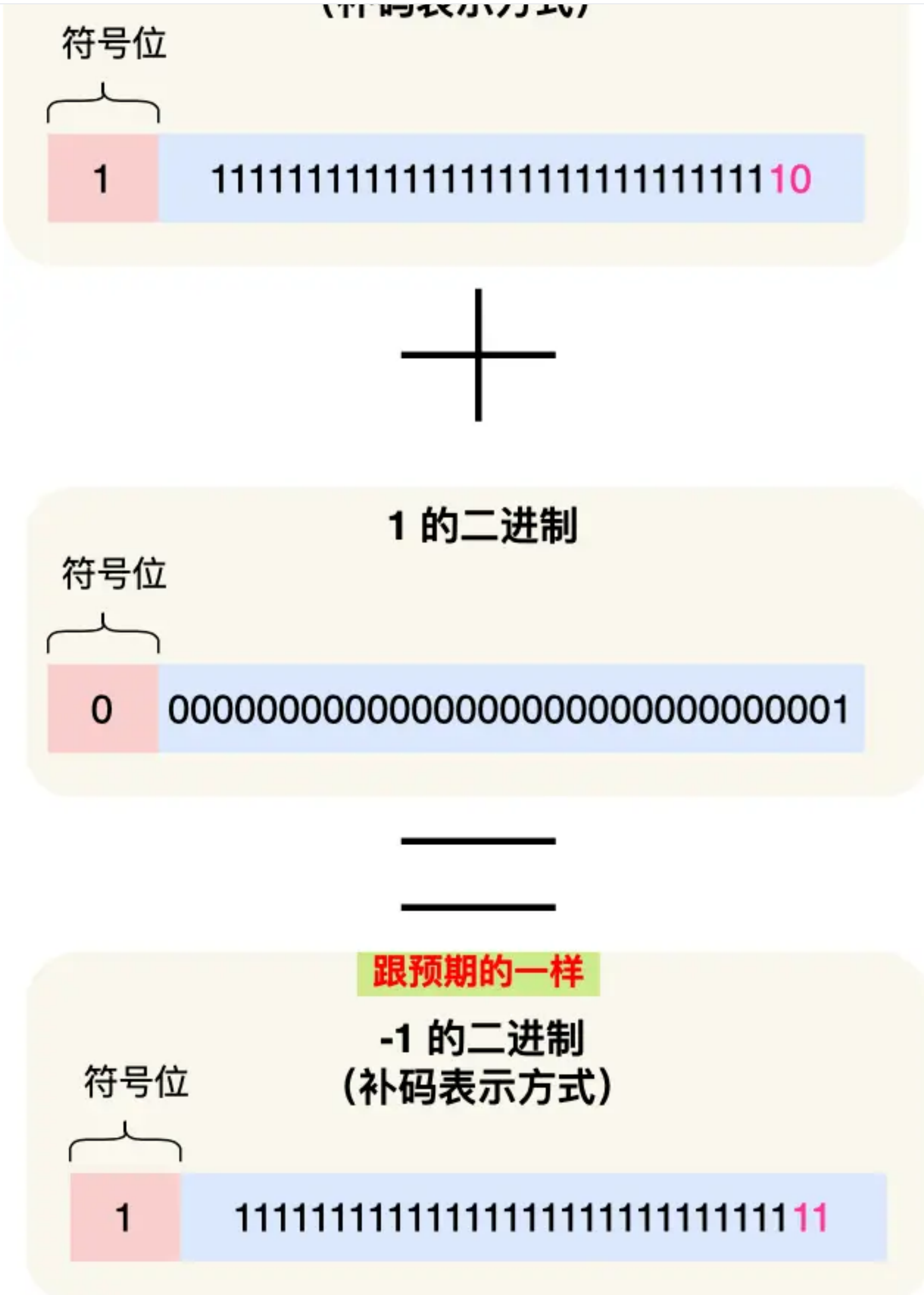
如果采用这种方式来表示负数的二进制的话，试想一下 `-2 + 1` 的运算过程，如下图：



按道理， `-2 + 1 = -1` ，但是上面的运算过程中得到结果却是 `-3` ，所以可以发现，这种负数的表示方式是不能用常规的加法来计算了，就需要特殊处理，要先判断数字是否为负数，

如果负数不是使用补码的方式表示，则在做基本对加减法运算的时候，**还需要多一步操作来判断是否为负数，如果为负数，还得把加法反转成减法，或者把减法反转成加法**，这就非常不好了，毕竟加减法运算在计算机里是很常使用的，所以为了性能考虑，应该要尽量简化这个运算过程。

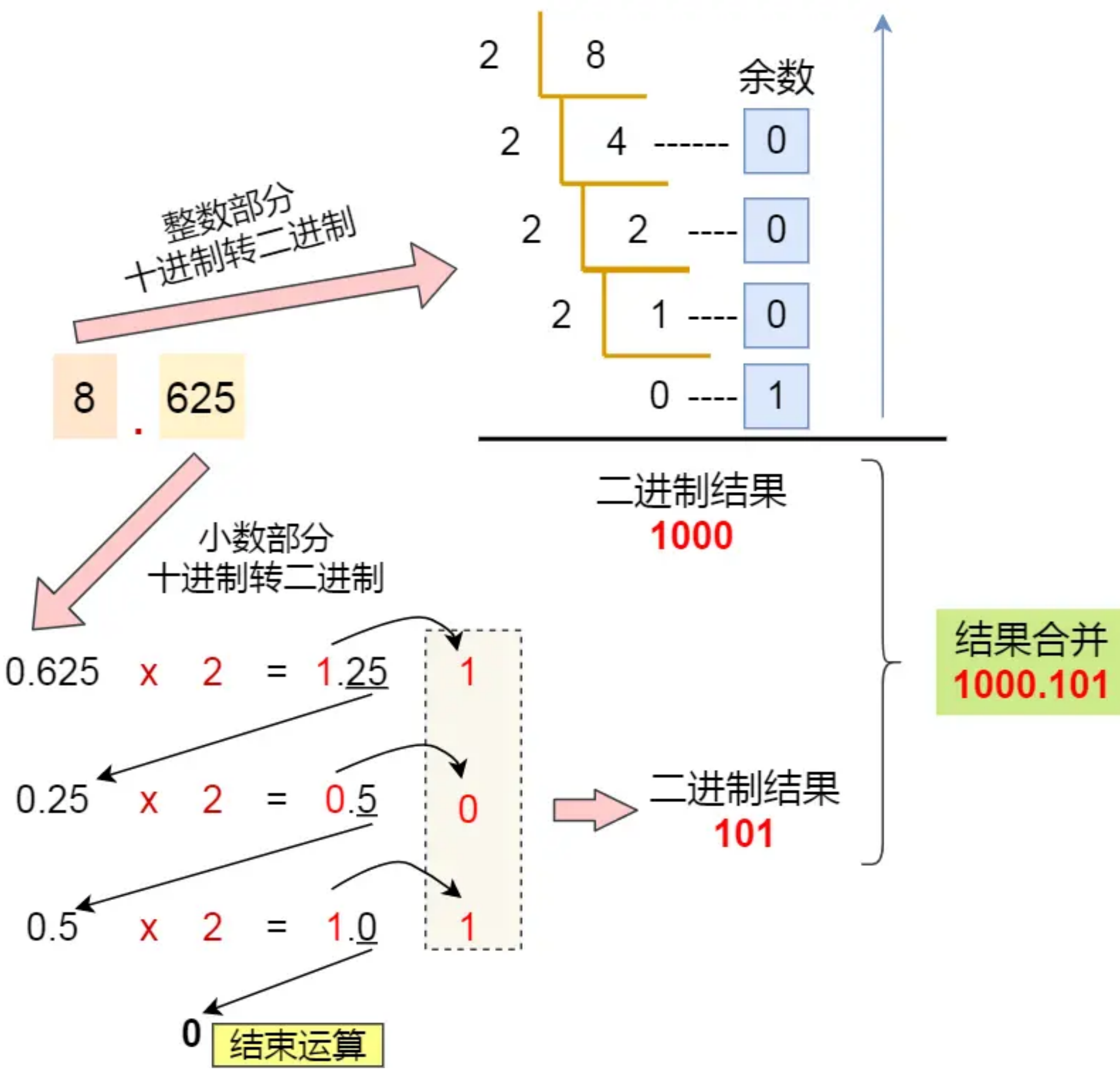
而用了补码的表示方式，对于负数的加减法操作，实际上是和正数加减法操作一样的。你可以看到下图，用补码表示的负数在运算 `-2 + 1` 过程的时候，其结果是正确的：


符号位
1
1111111111111111111111111111110
1 的二进制
符号位
0
0000000000000000000000000000001
跟预期的一样
-1 的二进制
(补码表示方式)
符号位
1
1111111111111111111111111111111

十进制小数与二进制的转换

好了，整数十进制转二进制我们知道了，接下来看看小数是怎么转二进制的，小数部分的转换不同于整数部分，它采用的是**乘 2 取整法**，将十进制中的小数部分乘以 2 作为二进制的一位，然后继续取小数部分乘以 2 作为下一位，直到不存在小数为止。

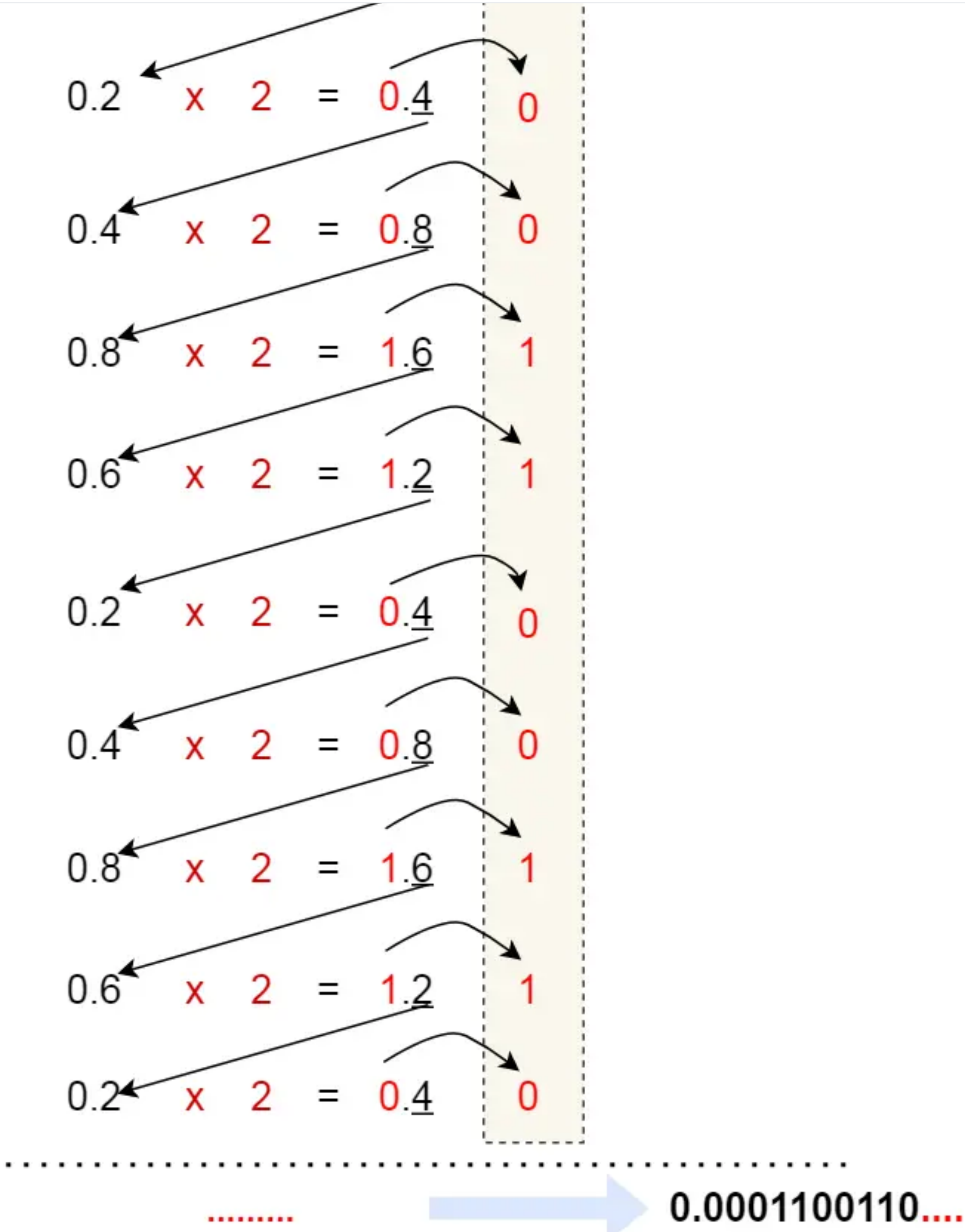
话不多说，我们就以 `8.625` 转二进制作为例子，直接上图：



最后把「整数部分 + 小数部分」结合在一起后，其结果就是 `1000.101` 。

但是，并不是所有小数都可以用二进制表示，前面提到的 0.625 小数是一个特例，刚好通过乘 2 取整法的方式完整的转换成二进制。

如果我们用相同的方式，来把 `0.1` 转换成二进制，过程如下：

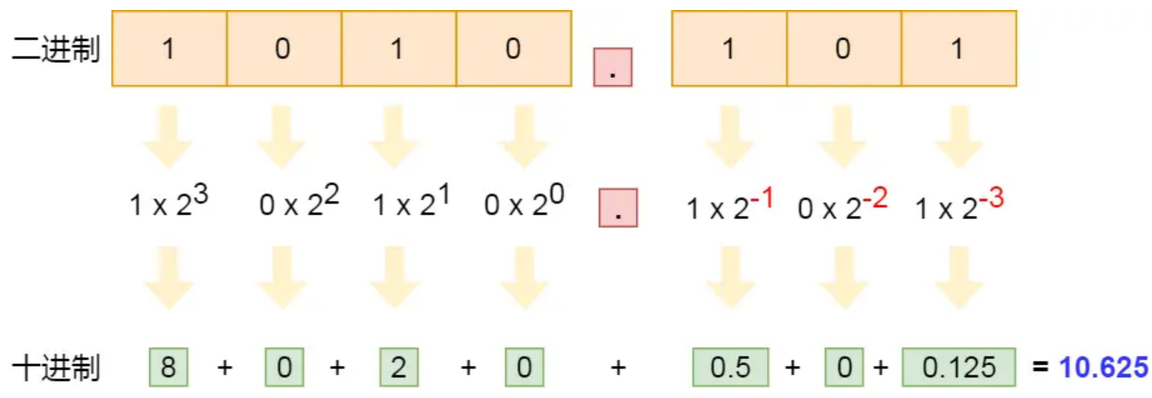


可以发现， `0.1` 的二进制表示是无限循环的。

由于计算机的资源是有限的，所以是没办法用二进制精确的表示 0.1，只能用「近似值」来表示，就是在有限的精度情况下，最大化接近 0.1 的二进制数，于是就会造成精度缺失的情况。

十进制就是 `2^-2` ，也就是十进制 `0.25` ，以此类推。

举个例子，二进制 `1010.101` 转十进制的过程，如下图：



计算机是怎么存小数的？

`1000.101` 这种二进制小数是「定点数」形式，代表着小数点是定死的，不能移动，如果你移动了它的小数点，这个数就变了， 就不再是它原来的值了。

然而，计算机并不是这样存储的小数的，计算机存储小数的采用的是**浮点数**，名字里的「浮点」表示小数点是可以浮动的。

比如 `1000.101` 这个二进制数，可以表示成 `1.000101 x 2^3` ，类似于数学上的科学记数法。

既然提到了科学计数法，我再帮大家复习一下。

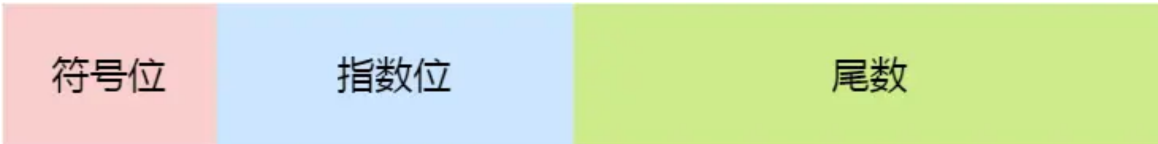
比如有个很大的十进制数 1230000，我们可以也可以表示成 `1.23 x 10^6` ，这种方式就称为科学记数法。

该方法在小数点左边只有一个数字，而且把这种整数部分没有前导 0 的数字称为**规格化**，比如 `1.0 x 10^(-9)` 是规格化的科学记数法，而 `0.1 x 10^(-9)` 和 `10.0 x 10^(-9)` 就不是了。

因此，如果二进制要用到科学记数法，同时要规范化，那么不仅要保证基数为 2，还要保证小数点左侧只有 1 位，而且必须为 1。

所以通常将 `1000.101` 这种二进制数，规格化表示成 `1.000101 x 2^3` ，其中，最为关键的是 000101 和 3 这两个东西，它就可以包含了这个二进制小数的所有信息：

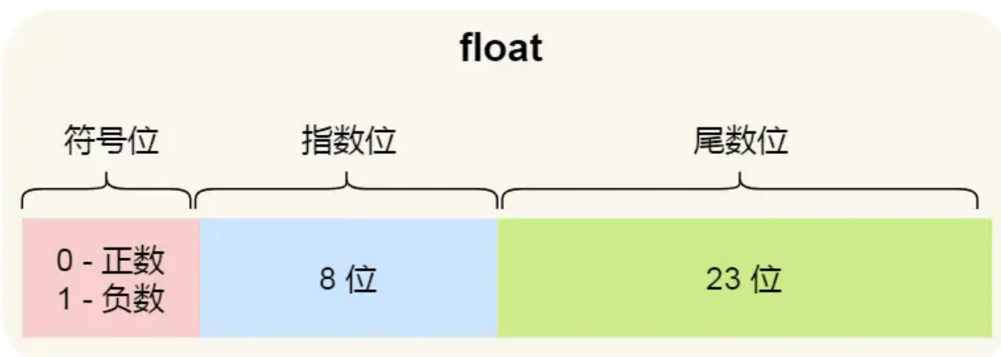
现在绝大多数计算机使用的浮点数，一般采用的是 IEEE 制定的国际标准，这种标准形式如下图：

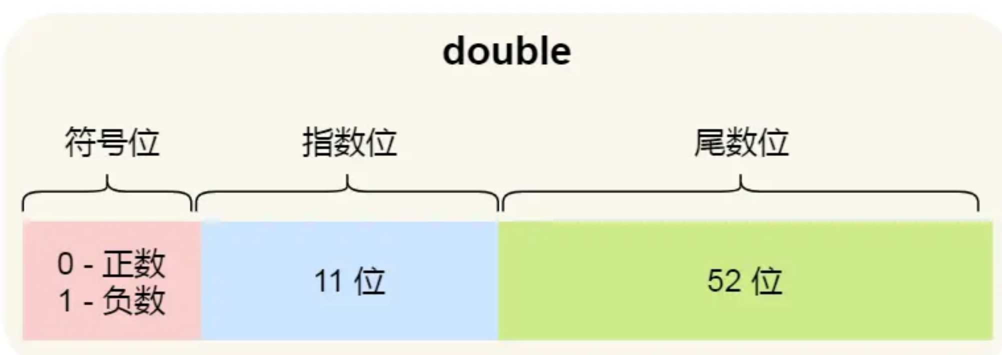


这三个重要部分的意义如下：

- *符号位*：表示数字是正数还是负数，为 0 表示正数，为 1 表示负数；
- *指数位*：指定了小数点在数据中的位置，指数可以是负数，也可以是正数，**指数位的长度越长则数值的表达范围就越大**；
- *尾数位*：小数点右侧的数字，也就是小数部分，比如二进制 1.0011 x 2^(-2)，尾数部分就是 0011，而且**尾数的长度决定了这个数的精度**，因此如果要表示精度更高的小数，则就要提高尾数位的长度；

用 `32` 位来表示的浮点数，则称为**单精度浮点数**，也就是我们编程语言中的 `float` 变量，而用 `64` 位来表示的浮点数，称为**双精度浮点数**，也就是 `double` 变量，它们的结构如下：





可以看到：

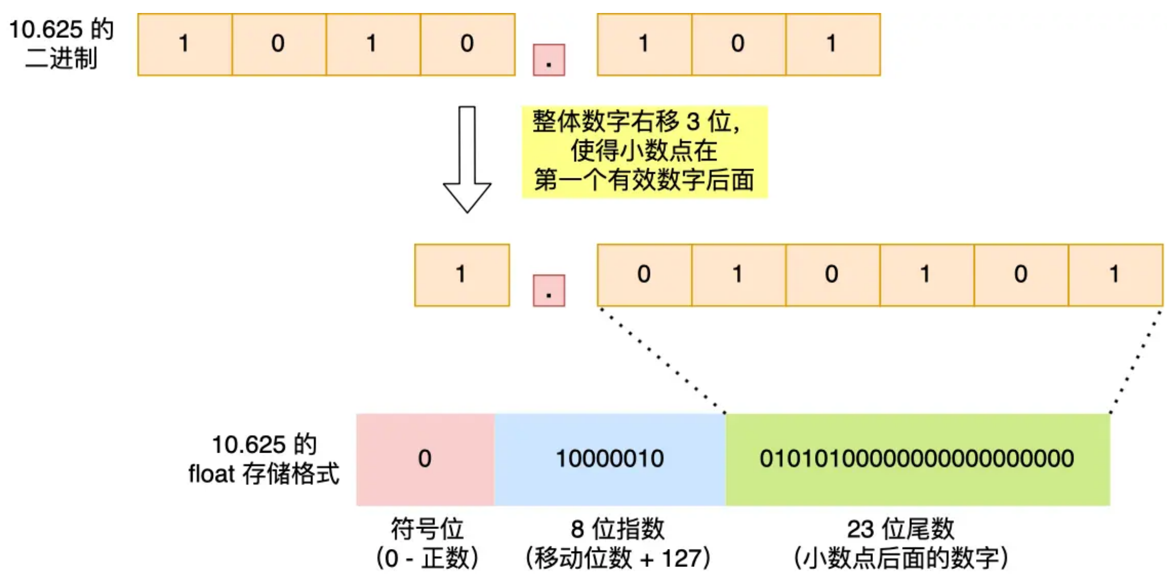
目录
侧边栏
夜间
技术群
资料
支持我
上一篇
下一篇

以所以它们的精度在十进制中分别是 `log10(2^53)` 约等于 `15.95` 和 `log10(2^24)` 约等于 `7.22` 位，因此 double 的有效数字是 `15~16` 位，float 的有效数字是 `7~8` 位，这些有效位是包含整数部分和小数部分；

- double 的指数部分是 11 位，而 float 的指数位是 8 位，意味着 double 相比 float 能表示更大的数值范围；

那二进制小数，是如何转换成二进制浮点数的呢？

我们就以 `10.625` 作为例子，看看这个数字在 float 里是如何存储的。



首先，我们计算出 10.625 的二进制小数为 1010.101。

然后**把小数点，移动到第一个有效数字后面**，即将 1010.101 右移 `3` 位成 `1.010101` ，右移 3 位就代表 +3，左移 3 位就是 -3。

float 中的「指数位」就跟这里移动的位数有关系，把移动的位数再加上「偏移量」，float 的话偏移量是 127，相加后就是指数位的值了，即指数位这 8 位存的是 `10000010` （十进制 130），因此你可以认为「指数位」相当于指明了小数点在数据中的位置。

`1.010101` 这个数的**小数点右侧的数字就是 float 里的「尾数位」**，由于尾数位是 23 位，则后面要补充 0，所以最终尾数位存储的数字是 `01010100000000000000000` 。

在算指数的时候，你可能会有疑问为什么要加上偏移量呢？

前面也提到，指数可能是正数，也可能是负数，即指数是有符号的整数，而有符号整数的计算是比无符号整数麻烦的，所以为了减少不必要的麻烦，在实际存储指数的时候，需要把指数转换成**无符号整数**。

数就不会出现负数了。

比如，指数如果是 8，则实际存储的指数是 8 + 127（偏移量）= 135，即把 135 转换为二进制之后再存储，而当我们需要计算实际的十进制数的时候，再把指数减去「偏移量」即可。

细心的朋友肯定发现，移动后的小数点左侧的有效位（即 1）消失了，它并没有存储到 float 里。

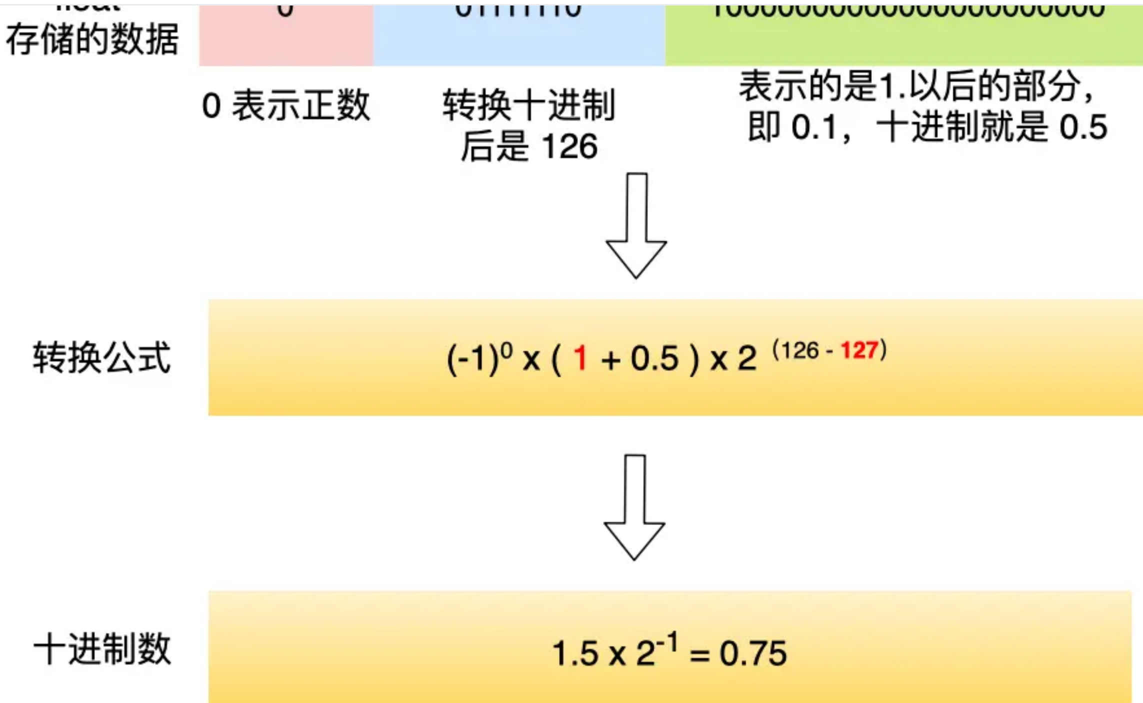
这是因为 IEEE 标准规定，二进制浮点数的小数点左侧只能有 1 位，并且还只能是 1，**既然这一位永远都是 1，那就可以不用存起来了。**

于是就让 23 位尾数只存储小数部分，然后在计算时会**自动把这个 1 加上，这样就可以节约 1 位的空间，尾数就能多存一位小数，相应的精度就更高了一点。**

那么，对于我们在从 float 的二进制浮点数转换成十进制时，要考虑到这个隐含的 1，转换公式如下：

$$(-1)^{符号位} \times (1 + 尾数位) \times 2^{(指数 - 127)}$$

举个例子，我们把下图这个 float 的数据转换成十进制，过程如下：



目录
侧边栏
夜间
技术群
资料
支持我
上一篇
下一篇

0.1 + 0.2 == 0.3 ?

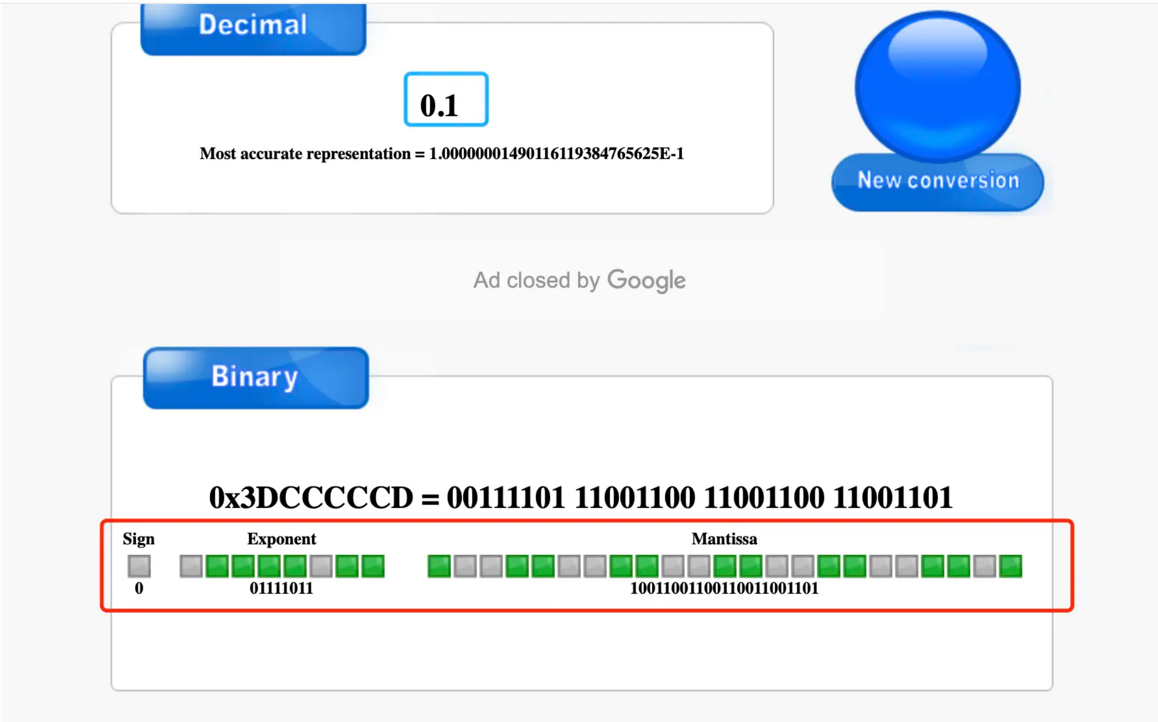
前面提到过，并不是所有小数都可以用「完整」的二进制来表示的，比如十进制 0.1 在转换成二进制小数的时候，是一串无限循环的二进制数，计算机是无法表达无限循环的二进制数的，毕竟计算机的资源是有限。

因此，计算机只能用「近似值」来表示该二进制，那么意味着计算机存放的小数可能不是一个真实值。

现在基本都是用 IEEE 754 规范的「单精度浮点类型」或「双精度浮点类型」来存储小数的，根据精度的不同，近似值也会不同。

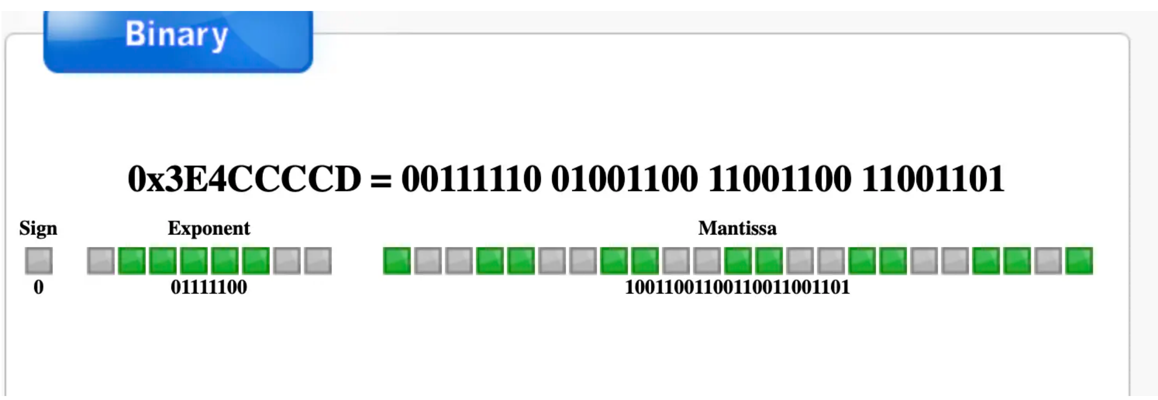
那计算机是存储 0.1 是一个怎么样的二进制浮点数呢？

偷个懒，我就不自己手动算了，可以使用 binaryconvert 这个工具，将十进制 0.1 小数转换成 float 浮点数：



可以看到，8 位指数部分是 `01111011` ，23 位的尾数部分是 `10011001100110011001101` ，可以看到尾数部分是 `0011` 是一直循环的，只不过尾数是有长度限制的，所以只会显示一部分，所以是一个近似值，精度十分有限。

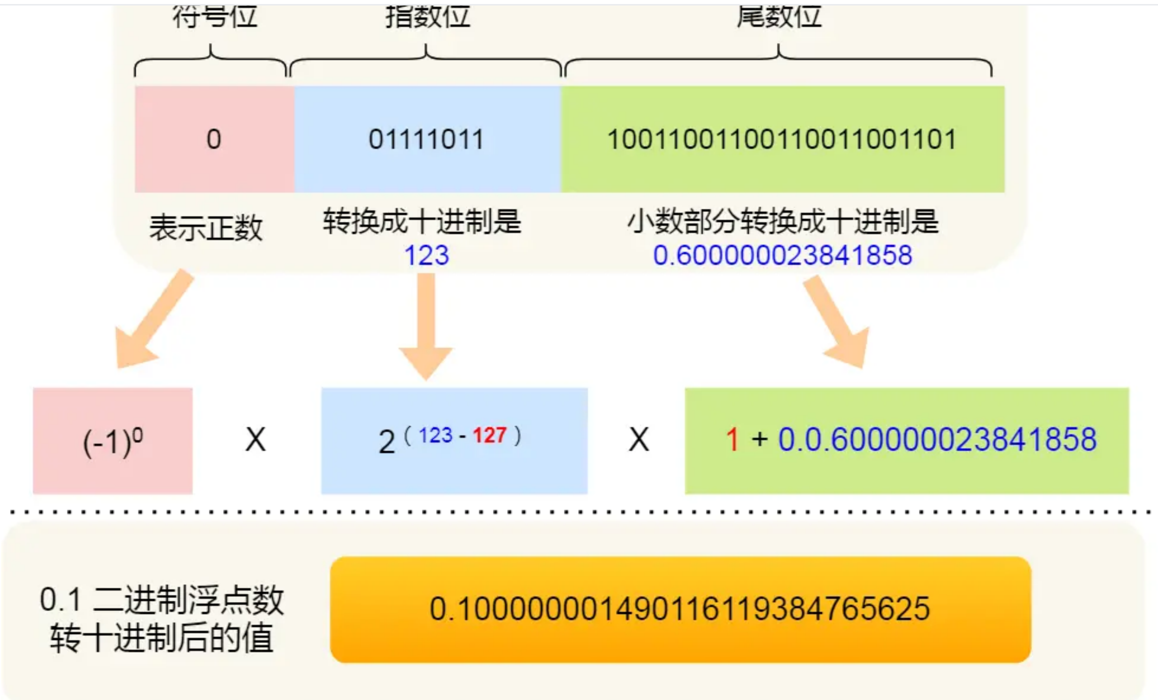
接下来，我们看看 0.2 的 float 浮点数：



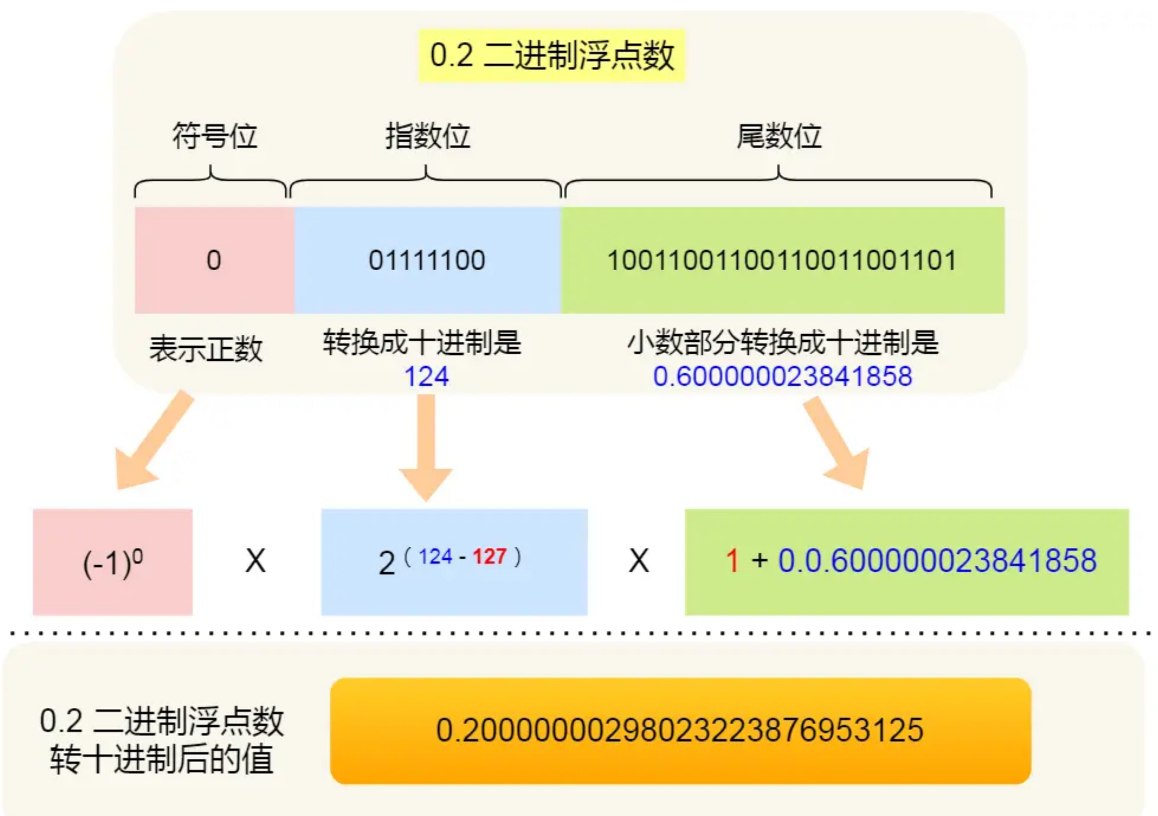
可以看到，8 位指数部分是 `01111100` ，稍微和 0.1 的指数不同，23 位的尾数部分是 `10011001100110011001101` 和 0.1 的尾数部分是相同的，也是一个近似值。

0.1 的二进制浮点数转换成十进制的结果是 `0.100000001490116119384765625` ：

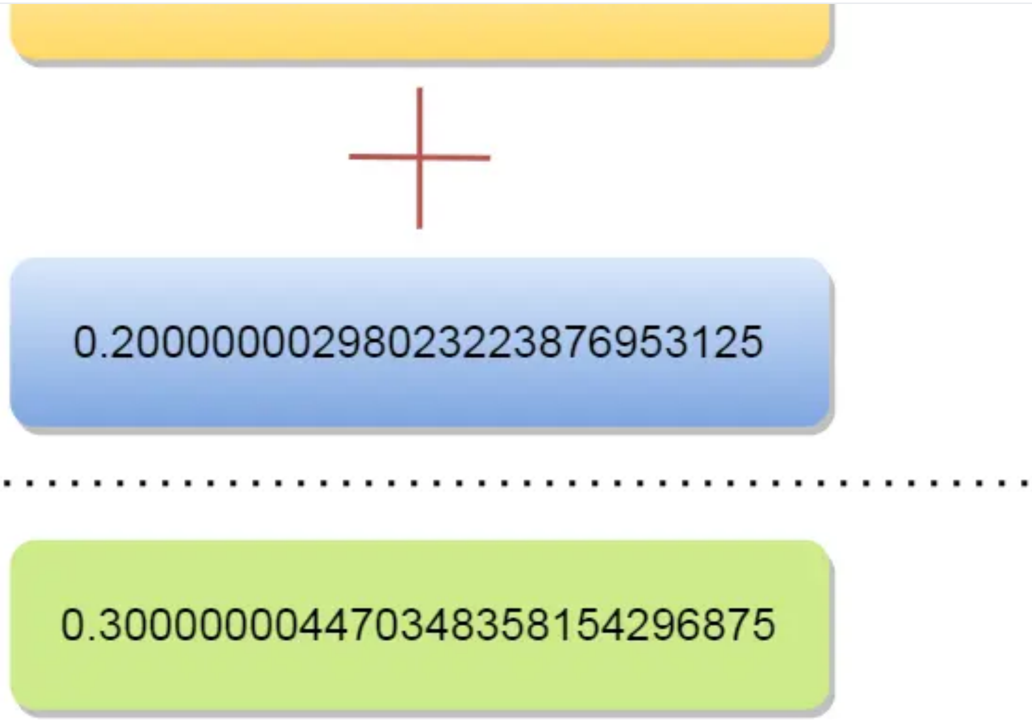
目录
侧边栏
夜间
技术群
资料
支持我
上一篇
下一篇



0.2 的二进制浮点数转换成十进制的结果是 `0.20000000298023223876953125` ：



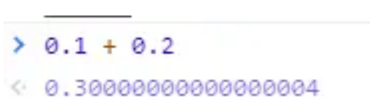
这两个结果相加就是 `0.300000004470348358154296875` ：



所以，你会看到**在计算机中 0.1 + 0.2 并不等于完整的 0.3**。

这主要是**因为有的小数无法可以用「完整」的二进制来表示，所以计算机里只能采用近似数的方式来保存，那两个近似数相加，得到的必然也是一个近似数**。

我们在 JavaScript 里执行 0.1 + 0.2，你会得到下面这个结果：



结果和我们前面推到的类似，因为 JavaScript 对于数字都是使用 IEEE 754 标准下的双精度浮点类型来存储的。

而我们二进制只能精准表达 2 除尽的数字 1/2, 1/4, 1/8，但是对于 0.1(1/10) 和 0.2(1/5)，在二进制中都无法精准表示时，需要根据精度舍入。

我们人类熟悉的十进制运算系统，可以精准表达 2 和 5 除尽的数字，例如 1/2, 1/4, 1/5(0.2), 1/8, 1/10(0.1)。

当然，十进制也有无法除尽的地方，例如 1/3, 1/7，也需要根据精度舍入。

总结

> 为什么负数要用补码表示?

负数之所以用补码的方式来表示，主要是为了统一和正数的加减法操作一样，毕竟数字的加减法是很常用的一个操作，就不要搞特殊化，尽量以统一的方式来运算。

> 十进制小数怎么转成二进制?

十进制整数转二进制使用的是「除 2 取余法」，十进制小数使用的是「乘 2 取整法」。

> 计算机是怎么存小数的?

计算机是以浮点数的形式存储小数的，大多数计算机都是 IEEE 754 标准定义的浮点数格式，包含三个部分：

- 符号位：表示数字是正数还是负数，为 0 表示正数，为 1 表示负数；
- 指数位：指定了小数点在数据中的位置，指数可以是负数，也可以是正数，指数位的长度越长则数值的表达范围就越大；
- 尾数位：小数点右侧的数字，也就是小数部分，比如二进制 1.0011 x 2^(-2)，尾数部分就是 0011，而且尾数的长度决定了这个数的精度，因此如果要表示精度更高的小数，则就要提高尾数位的长度；

用 32 位来表示的浮点数，则称为单精度浮点数，也就是我们编程语言中的 float 变量，而用 64 位来表示的浮点数，称为双精度浮点数，也就是 double 变量。

> 0.1 + 0.2 == 0.3 吗?

不是的，0.1 和 0.2 这两个数字用二进制表达会是一个一直循环的二进制数，比如 0.1 的二进制表示为 0.0 0011 0011 0011… （0011 无限循环)，对于计算机而言，0.1 无法精确表达，这是浮点数计算造成精度损失的根源。

因此，IEEE 754 标准定义的浮点数只能根据精度舍入，然后用「近似值」来表示该二进制，那么意味着计算机存放的小数可能不是一个真实值。

0.1 + 0.2 并不等于完整的 0.3，这主要是因为这两个小数无法用「完整」的二进制来表示，只能根据精度舍入，所以计算机里只能采用近似数的方式来保存，那两个近似数相加，得到的必然也是一个近似数。

上次更新: 5/4/2022, 1:08:49 PM

← 2.6 什么是软中断?

3.1 Linux 内核 vs Windows 内核 →

目录
侧边栏
夜间
技术群
资料
支持我
上一篇
下一篇