动态规划算法帮我通关了魔塔！

Original labuladong labuladong 2020-12-30 16:30

后台回复**进群**一起刷力扣😏

点击卡片可搜索关键词👇

labuladong推荐搜索

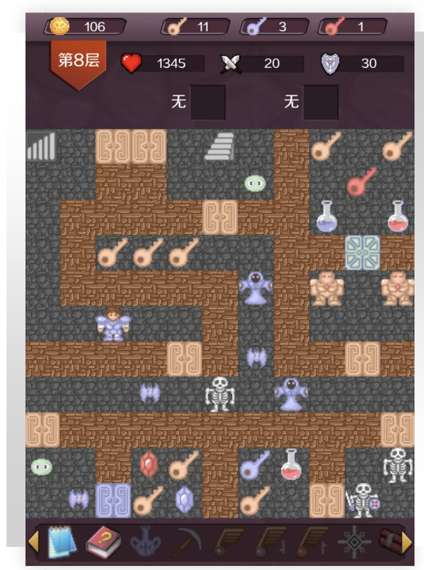
二叉树 | 动态规划 | 回溯算法

读完本文，可以去力扣解决如下题目：

174.地下城游戏（**Hard**）

「魔塔」是一款经典的地牢类游戏，碰怪物要掉血，吃血瓶能加血，你要收集钥匙，一层一层上楼，最后救出美丽的公主。

现在手机上仍然可以玩这个游戏：



嗯，相信这款游戏承包了不少人的童年回忆，记得小时候，一个人拿着游戏机玩，两三个人围在左右指手画脚，这导致玩游戏的人体验极差，而左右的人异常快乐 😂

力扣第 174 题是一道类似的题目，我简单描述一下：

输入一个存储着整数的二维数组 `grid`，如果 `grid[i][j] > 0`，说明这个格子装着血瓶，经过它可以增加对应的生命值；如果 `grid[i][j] == 0`，则这是一个空格子，经过它不会发生任何事情；如果 `grid[i][j] < 0`，说明这个格子有怪物，经过它会损失对应的生命值。

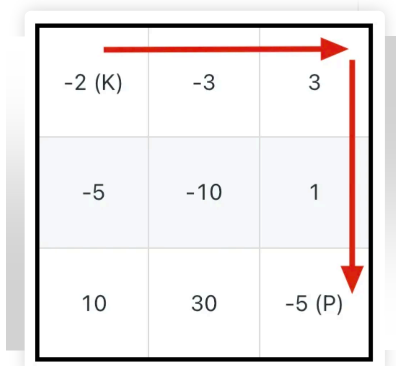
现在你是一名骑士，将会出现在最上角，公主被困在最右下角，你只能向右和向下移动，请问骑士的初始生命值至少为多少，才能成功救出公主?

换句话说，就是问你至少需要多少初始生命值，能够让骑士从最左上角移动到最右下角，且任何时候生命值都要大于 0。

函数签名如下：

```
int calculateMinimumHP(int[][] grid);
```

比如题目给我们举的例子，输入如下一个二维数组 `grid`，用 `K` 表示骑士，用 `P` 表示公主：



算法应该返回 7，也就是说骑士的初始生命值**至少**为 7 时才能成功救出公主，行进路线如图中的箭头所示。

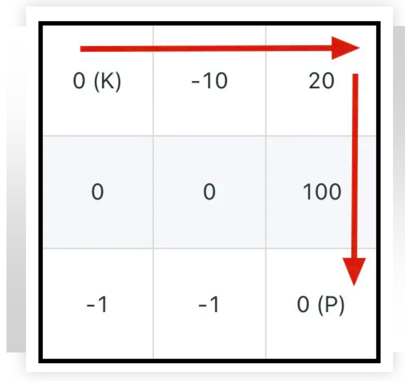
上篇文章 [最小路径和] 写过类似的问题，问你从左上角到右下角的最小路径和是多少。

我们做算法题一定要尝试举一反三，感觉今天这道题和最小路径和有点关系对吧?

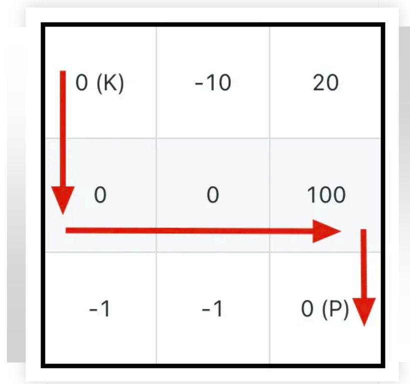
想要最小化骑士的初始生命值，是不是意味着要最大化骑士行进路线上的血瓶? 是不是相当于求「最大路径和」? 是不是可以直接套用计算「最小路径和」的思路?

但是稍加思考，发现这个推论并不成立，吃到最多的血瓶，并不一定就能获得最小的初始生命值。

比如如下这种情况，如果想要吃到最多的血瓶获得「最大路径和」，应该按照下图箭头所示的路径，初始生命值需要 11：



但也很容易看到，正确的答案应该是下图箭头所示的路径，初始生命值只需要 1：



所以，关键不在于吃最多的血瓶，而是在于如何损失最少的生命值。

这类求最值的问题，肯定要借助动态规划技巧，要合理设计 `dp` 数组/函数的定义。类比前文 [最小路径和问题](), `dp` 函数签名肯定长这样：

```
int dp(int[][] grid, int i, int j);
```

但是这道题对 `dp` 函数的定义比较有意思，按照常理，这个 `dp` 函数的定义应该是：

从左上角（ `grid[0][0]` ）走到 `grid[i][j]` 至少需要 `dp(grid, i, j)` 的生命值。

这样定义的话，base case 就是 i， j 都等于 0 的时候，我们可以这样写代码：

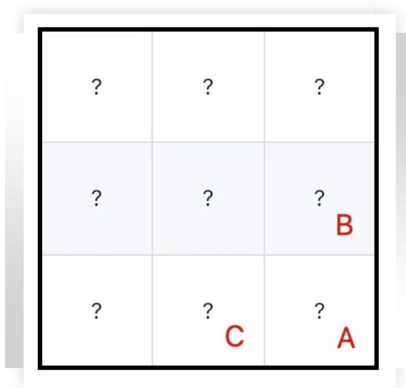
```
int calculateMinimumHP(int[][] grid) {
    int m = grid.length;
    int n = grid[0].length;
    // 我们想计算左上角到右下角所需的最小生命值
    return dp(grid, m - 1, n - 1);
}

int dp(int[][] grid, int i, int j) {
    // base case
    if (i == 0 && j == 0) {
        // 保证骑士落地不死就行了
        return gird[i][j] > 0 ? 1 : -grid[i][j] + 1;
    }
    ...
}
```

PS：为了简洁，之后 dp(grid, i, j) 就简写为 dp(i, j)，大家理解就好。

接下来我们需要找状态转移了，还记得如何找状态转移方程吗？我们这样定义 dp 函数能否正确进行状态转移呢？

我们希望 dp(i, j) 能够通过 dp(i-1, j) 和 dp(i, j-1) 推导出来，这样就能不断逼近 base case，也就能够正确进行状态转移。

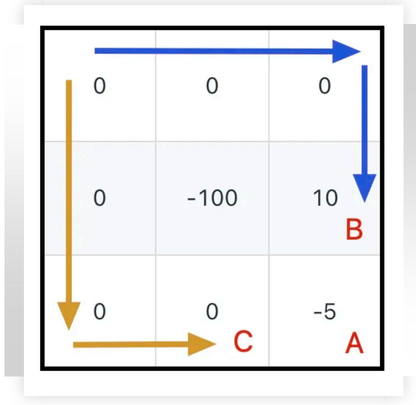
具体来说，「到达 A 的最小生命值」应该能够由「到达 B 的最小生命值」和「到达 C 的最小生命值」推导出来：



但问题是，能推出来么？实际上是不能的。

因为按照 `dp` 函数的定义，你只知道「能够从左上角到达 `B` 的最小生命值」，但并不知道「到达 `B` 时的生命值」。

「到达 `B` 时的生命值」是进行状态转移的必要参考，我给你举个例子你就明白了，假设下图这种情况：



你说这种情况下，骑士救公主的最优路线是什么？

显然是按照图中蓝色的线走到 `B`，最后走到 `A` 对吧，这样初始血量只需要 1 就可以；如果走黄色箭头这条路，先走到 `C` 然后走到 `A`，初始血量至少需要 6。

为什么会这样呢？骑士走到 `B` 和 `C` 的最少初始血量都是 1，为什么最后是从 `B` 走到 `A`，而不是从 `C` 走到 `A` 呢？

因为骑士走到 `B` 的时候生命值为 11，而走到 `C` 的时候生命值依然是 1。

如果骑士执意要通过 `C` 走到 `A`，那么初始血量必须加到 6 点才行；而如果通过 `B` 走到 `A`，初始血量为 1 就够了，因为路上吃到血瓶了，生命值足够抗 `A` 上面怪物的伤害。

这下应该说的很清楚了，再回顾我们对 `dp` 函数的定义，上图的情况，算法只知道 `dp(1, 2) = dp(2, 1) = 1`，都是一样的，怎么做出正确的决策，计算出 `dp(2, 2)` 呢？

所以说，我们之前对 `dp` 数组的定义是错误的，信息量不足，算法无法做出正确的状态转移。

正确的做法需要反向思考，依然是如下的 dp 函数：

```
int dp(int[][] grid, int i, int j);
```

但是我们要修改 dp 函数的定义：

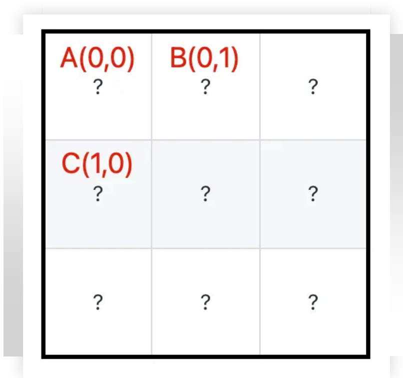
从 grid[i][j] 到达终点（右下角）所需的最少生命值是 dp(grid, i, j) 。

那么可以这样写代码：

```
int calculateMinimumHP(int[][] grid) {
    // 我们想计算左上角到右下角所需的最小生命值
    return dp(grid, 0, 0);
}

int dp(int[][] grid, int i, int j) {
    int m = grid.length;
    int n = grid[0].length;
    // base case
    if (i == m - 1 && j == n - 1) {
        return grid[i][j] >= 0 ? 1 : -grid[i][j] + 1;
    }
    ...
}
```

根据新的 dp 函数定义和 base case，我们想求 dp(0, 0) ，那就应该试图通过 dp(i, j+1) 和 dp(i+1, j) 推导出 dp(i, j) ，这样才能不断逼近 base case，正确进行状态转移。

具体来说，「从 A 到达右下角的最少生命值」应该由「从 B 到达右下角的最少生命值」和「从 C 到达右下角的最少生命值」推导出来：



能不能推导出来呢？这次是可以的，假设 `dp(0, 1) = 5, dp(1, 0) = 4`，那么可以肯定要从 `A` 走向 `C`，因为 4 小于 5 嘛。

那么怎么推出 `dp(0, 0)` 是多少呢？

假设 `A` 的值为 1，既然知道下一步要往 `C` 走，且 `dp(1, 0) = 4` 意味着走到 `grid[1][0]` 的时候至少要有 4 点生命值，那么就可以确定骑士出现在 `A` 点时需要 4 - 1 = 3 点初始生命值，对吧。

那如果 `A` 的值为 10，落地就能捡到一个大血瓶，超出了后续需求，4 - 10 = -6 意味着骑士的初始生命值为负数，这显然不可以，骑士的生命值小于 1 就挂了，所以这种情况下骑士的初始生命值应该是 1。

综上，状态转移方程已经推出来了：

```
int res = min(
    dp(i + 1, j),
    dp(i, j + 1)
) - grid[i][j];

dp(i, j) = res <= 0 ? 1 : res;
```

根据这个核心逻辑，加一个备忘录消除重叠子问题，就可以直接写出最终的代码了：

```
/* 主函数 */
int calculateMinimumHP(int[][] grid) {
    int m = grid.length;
    int n = grid[0].length;
    // 备忘录中都初始化为 -1
    memo = new int[m][n];
    for (int[] row : memo) {
        Arrays.fill(row, -1);
    }

    return dp(grid, 0, 0);
}

// 备忘录，消除重叠子问题
int[][] memo;
```

```java
/* 定义：从 (i, j) 到达右下角，需要的初始血量至少是多少 */
int dp(int[][] grid, int i, int j) {
    int m = grid.length;
    int n = grid[0].length;
    // base case
    if (i == m - 1 && j == n - 1) {
        return grid[i][j] >= 0 ? 1 : -grid[i][j] + 1;
    }
    if (i == m || j == n) {
        return Integer.MAX_VALUE;
    }
    // 避免重复计算
    if (memo[i][j] != -1) {
        return memo[i][j];
    }
    // 状态转移逻辑
    int res = Math.min(
            dp(grid, i, j + 1),
            dp(grid, i + 1, j)
        ) - grid[i][j];
    // 骑士的生命值至少为 1
    memo[i][j] = res <= 0 ? 1 : res;

    return memo[i][j];
}
```

这就是自顶向下带备忘录的动态规划解法，参考前文 动态规划套路详解 很容易就可以改写成 `dp` 数组的迭代解法，这里就不写了，读者可以尝试自己写一写。

这道题的核心是定义 `dp` 函数，找到正确的状态转移方程，从而计算出正确的答案。

精华文章目录点这里