# 动态规划之最小路径和

Stars 108k | B站 @labuladong | 配套PDF和插件 下载 | 打卡挑战 报名 | 精品课程 查看

微信搜一搜 labuladong公众号

**通知： 数据结构精品课 V1.6 持续更新中， 第八期打卡挑战 开始报名， 算法私教课 开始预约。**

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

| 牛客 | LeetCode | 力扣 | 难度 |
| --- | --- | --- | --- |
| - | 64. Minimum Path Sum | 64. 最小路径和 | 🟠 |
| - | - | 剑指 Offer II 099. 最小路径之和 | 🟠 |

————

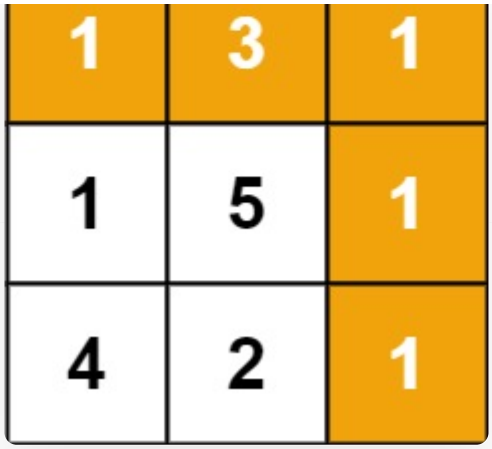
今天聊一道经典的动态规划题目，它是力扣第 64 题「最小路径和」，我来简单描述一下题目：

现在给你输入一个二维数组 `grid`，其中的元素都是**非负整数**，现在你站在左上角，**只能向右或者向下移动**，需要到达右下角。现在请你计算，经过的路径和最小是多少？

函数签名如下：

```java
int minPathSum(int[][] grid);
```

比如题目举的例子，输入如下的 `grid` 数组：

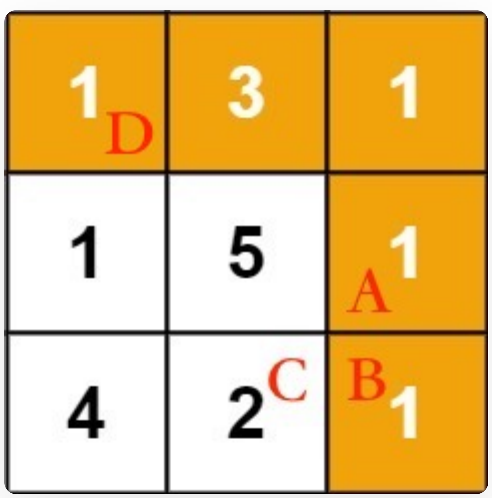



算法应该返回 7，最小路径和为 7，就是上图黄色的路径。

其实这道题难度不算大，但我们刷题群里很多朋友讨论，而且这个问题还有一些难度比较大的变体，所以讲一下这种问题的通用思路。

**一般来说，让你在二维矩阵中求最优化问题（最大值或者最小值），肯定需要递归 + 备忘录，也就是动态规划技巧。**

就拿题目举的例子来说，我给图中的几个格子编个号方便描述：




我们想计算从起点 `D` 到达 `B` 的最小路径和，那你说怎么才能到达 `B` 呢？

题目说了只能向右或者向下走，所以只有从 `A` 或者 `C` 走到 `B`。

那么算法怎么知道从 `A` 走到 `B` 才能使路径和最小，而不是从 `C` 走到 `B` 呢？

难道是因为位置 `A` 的元素大小是 1，位置 `C` 的元素是 2，1 小于 2，所以一定要从 `A` 走到 `B` 才能

使路径和最小吗?

其实不是的，**真正的原因是，从 `D` 走到 `A` 的最小路径和是 6，而从 `D` 走到 `C` 的最小路径和是 8，6 小于 8，所以一定要从 `A` 走到 `B` 才能使路径和最小**。

换句话说，我们把「从 `D` 走到 `B` 的最小路径和」这个问题转化成了「从 `D` 走到 `A` 的最小路径和」和 「从 `D` 走到 `C` 的最小路径和」这两个问题。

理解了上面的分析，这不就是状态转移方程吗?所以这个问题肯定会用到动态规划技巧来解决。

比如我们定义如下一个 `dp` 函数:

```
int dp(int[][] grid, int i, int j);
```

这个 `dp` 函数的定义如下:

**从左上角位置 `(0, 0)` 走到位置 `(i, j)` 的最小路径和为 `dp(grid, i, j)`**。

根据这个定义，我们想求的最小路径和就可以通过调用这个 `dp` 函数计算出来:

```
int minPathSum(int[][] grid) {
    int m = grid.length;
    int n = grid[0].length;
    // 计算从左上角走到右下角的最小路径和
    return dp(grid, m - 1, n - 1);
}
```

再根据刚才的分析，很容易发现，`dp(grid, i, j)` 的值取决于 `dp(grid, i - 1, j)` 和 `dp(grid, i, j - 1)` 返回的值。

我们可以直接写代码了:

```
int dp(int[][] grid, int i, int j) {
    // base case
    if (i == 0 && j == 0) {
        return grid[0][0];
    }
```

```java
    // 如果索引出界，返回一个很大的值，
    // 保证在取 min 的时候不会被取到
    if (i < 0 || j < 0) {
        return Integer.MAX_VALUE;
    }

    // 左边和上面的最小路径和加上 grid[i][j]
    // 就是到达 (i, j) 的最小路径和
    return Math.min(
            dp(grid, i - 1, j),
            dp(grid, i, j - 1)
        ) + grid[i][j];
}
```

上述代码逻辑已经完整了，接下来就分析一下，这个递归算法是否存在重叠子问题？是否需要用备忘录优化一下执行效率？

**前文多次说过判断重叠子问题的技巧，首先抽象出上述代码的递归框架**：

```java
int dp(int i, int j) {
    dp(i - 1, j); // #1
    dp(i, j - 1); // #2
}
```

如果我想从 `dp(i, j)` 递归到 `dp(i-1, j-1)`，有几种不同的递归调用路径？

可以是 `dp(i, j) -> #1 -> #2` 或者 `dp(i, j) -> #2 -> #1`，不止一种，说明 `dp(i-1, j-1)` 会被多次计算，所以一定存在重叠子问题。

那么我们可以使用备忘录技巧进行优化：

```java
int[][] memo;

int minPathSum(int[][] grid) {
    int m = grid.length;
    int n = grid[0].length;
    // 构造备忘录，初始值全部设为 -1
    memo = new int[m][n];
    for (int[] row : memo)
        Arrays.fill(row, -1);
```

```java
        return dp(grid, m - 1, n - 1);
    }

    int dp(int[][] grid, int i, int j) {
        // base case
        if (i == 0 && j == 0) {
            return grid[0][0];
        }
        if (i < 0 || j < 0) {
            return Integer.MAX_VALUE;
        }
        // 避免重复计算
        if (memo[i][j] != -1) {
            return memo[i][j];
        }
        // 将计算结果记入备忘录
        memo[i][j] = Math.min(
            dp(grid, i - 1, j),
            dp(grid, i, j - 1)
        ) + grid[i][j];

        return memo[i][j];
    }
```

至此，本题就算是解决了，时间复杂度和空间复杂度都是 `O(MN)`，标准的自顶向下动态规划解法。

有的读者可能问，能不能用自底向上的迭代解法来做这道题呢？完全可以的。

首先，类似刚才的 `dp` 函数，我们需要一个二维 `dp` 数组，定义如下：

**从左上角位置 `(0, 0)` 走到位置 `(i, j)` 的最小路径和为 `dp[i][j]`。**

状态转移方程当然不会变的，`dp[i][j]` 依然取决于 `dp[i-1][j]` 和 `dp[i][j-1]`，直接看代码吧：

```java
    int minPathSum(int[][] grid) {
        int m = grid.length;
        int n = grid[0].length;
        int[][] dp = new int[m][n];

        /**** base case ****/
        dp[0][0] = grid[0][0];
```

```java
        for (int i = 1; i < m; i++)
            dp[i][0] = dp[i - 1][0] + grid[i][0];

        for (int j = 1; j < n; j++)
            dp[0][j] = dp[0][j - 1] + grid[0][j];
        /*******************/

        // 状态转移
        for (int i = 1; i < m; i++) {
            for (int j = 1; j < n; j++) {
                dp[i][j] = Math.min(
                    dp[i - 1][j],
                    dp[i][j - 1]
                ) + grid[i][j];
            }
        }

        return dp[m - 1][n - 1];
    }
```

**这个解法的 base case 看起来和递归解法略有不同，但实际上是一样的。**

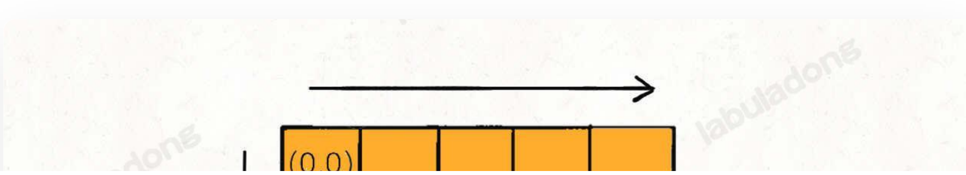
因为状态转移为下面这段代码：

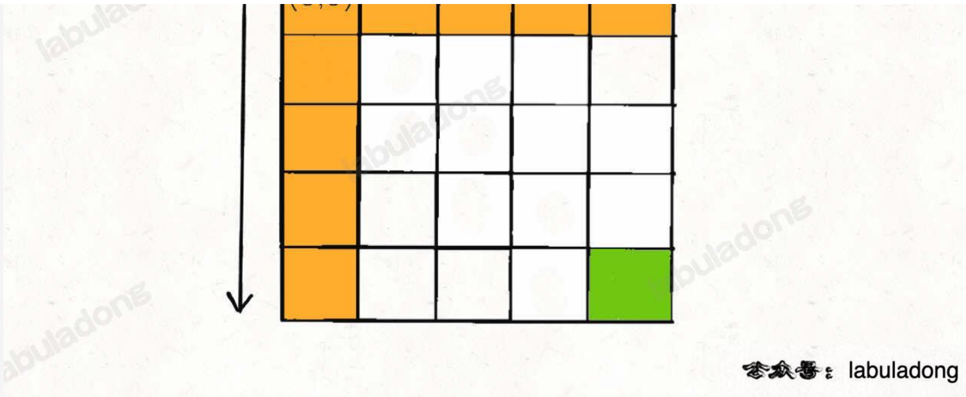
```java
dp[i][j] = Math.min(
    dp[i - 1][j],
    dp[i][j - 1]
) + grid[i][j];
```

那如果 `i` 或者 `j` 等于 0 的时候，就会出现索引越界的错误。

所以我们需要提前计算出 `dp[0][..]` 和 `dp[..][0]`，然后让 `i` 和 `j` 的值从 1 开始迭代。

`dp[0][..]` 和 `dp[..][0]` 的值怎么算呢？其实很简单，第一行和第一列的路径和只有下面这一种情况嘛：





那么按照 `dp` 数组的定义，`dp[i][0] = sum(grid[0..i][0]), dp[0][j] = sum(grid[0][0..j])`，也就是如下代码：

```
/**** base case ****/
dp[0][0] = grid[0][0];

for (int i = 1; i < m; i++)
    dp[i][0] = dp[i - 1][0] + grid[i][0];

for (int j = 1; j < n; j++)
    dp[0][j] = dp[0][j - 1] + grid[0][j];
/*******************/
```

到这里，自底向上的迭代解法也搞定了，那有的读者可能又要问了，能不能优化一下算法的空间复杂度呢？

前文 动态规划的降维打击：空间压缩 说过降低 `dp` 数组的技巧，这里也是适用的，不过略微复杂些，本文由于篇幅所限就不写了，有兴趣的读者可以自己尝试一下。

本文到此结束，下篇文章写一道进阶题目，更加巧妙和有趣，敬请期待~

▸ **引用本文的题目**

▸ **引用本文的文章**

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _