详解最长公共子序列问题，秒杀三道动态规划题目

Original labuladong labuladong 2020-10-27 17:45

读完本文，可以去力扣解决如下题目：

1143.最长公共子序列（**Medium**）

583. 两个字符串的删除操作（**Medium**）

712.两个字符串的最小ASCII删除和（**Medium**）

好久没写动态规划算法相关的文章了，今天来搞一把。

不知道大家做算法题有什么感觉，**我总结出来做算法题的技巧就是，把大的问题细化到一个点，先研究在这个小的点上如何解决问题，然后再通过递归/迭代的方式扩展到整个问题。**

比如说我们前文 手把手带你刷二叉树第三期，解决二叉树的题目，我们就会把整个问题细化到某一个节点上，想象自己站在某个节点上，需要做什么，然后套二叉树递归框架就行了。

动态规划系列问题也是一样，尤其是子序列相关的问题。**本文从「最长公共子序列问题」展开，总结三道子序列问题**，解这道题仔细讲讲这种子序列问题的套路，你就能感受到这种思维方式了。

最长公共子序列

计算最长公共子序列（Longest Common Subsequence，简称 LCS）是一道经典的动态规划题目，大家应该都见过：

给你输入两个字符串 `s1` 和 `s2`，请你找出他们俩的最长公共子序列，返回这个子序列的长度。

力扣第 1143 题就是这道题，函数签名如下：

```
int longestCommonSubsequence(String s1, String s2);
```

比如说输入 `s1 = "zabcde", s2 = "acez"`，它俩的最长公共子序列是 `lcs = "ace"`，长度为 3，所以算法返回 3。

如果没有做过这道题，一个最简单的暴力算法就是，把 `s1` 和 `s2` 的所有子序列都穷举出来，然后看看有没有公共的，然后在所有公共子序列里面再寻找一个长度最大的。

显然，这种思路的复杂度非常高，你要穷举出所有子序列，这个复杂度就是指数级的，肯定不实际。

正确的思路是不要考虑整个字符串，而是细化到 `s1` 和 `s2` 的每个字符。前文 子序列解题模板 中总结的一个规律：

对于两个字符串求子序列的问题，都是用两个指针 `i` 和 `j` 分别在两个字符串上移动，大概率是动态规划思路。

最长公共子序列的问题也可以遵循这个规律，我们可以先写一个 `dp` 函数：

```
// 定义：计算 s1[i..] 和 s2[j..] 的最长公共子序列长度
int dp(String s1, int i, String s2, int j)
```

这个 `dp` 函数的定义是：**`dp(s1, i, s2, j)` 计算 `s1[i..]` 和 `s2[j..]` 的最长公共子序列长度。**

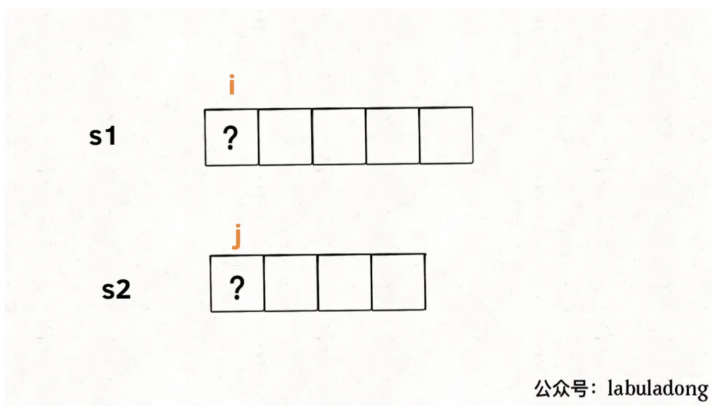
根据这个定义，那么我们想要的答案就是 `dp(s1, 0, s2, 0)`，且 base case 就是 `i == len(s1)` 或 `j == len(s2)` 时，因为这时候 `s1[i..]` 或 `s2[j..]` 就相当于空串了，最长公共子序列的长度显然是 0：

```
int longestCommonSubsequence(String s1, String s2) {
```

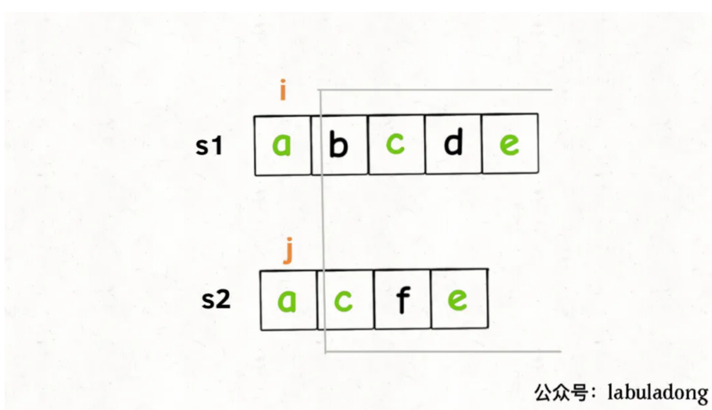
```java
    return dp(s1, 0, s2, 0);
}

/* 主函数 */
int dp(String s1, int i, String s2, int j) {
    // base case
    if (i == s1.length() || j == s2.length()) {
        return 0;
    }
    // ...
```

接下来，咱不要看 s1 和 s2 两个字符串，而是要具体到每一个字符，思考每个字符该做什么。



我们只看 s1[i] 和 s2[j]，**如果 s1[i] == s2[j]，说明这个字符一定在 lcs 中**：



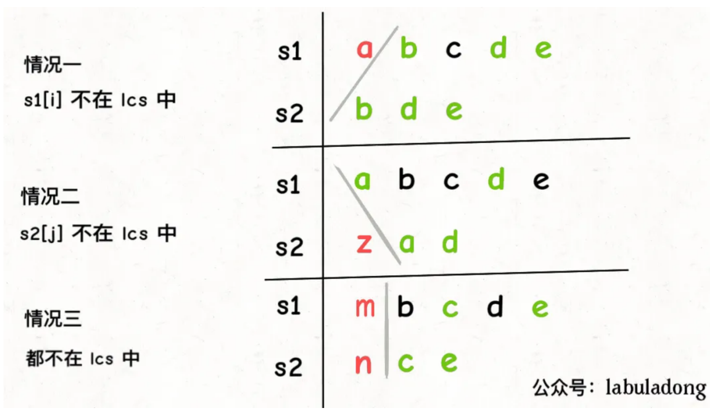
这样，就找到了一个 lcs 中的字符，根据 dp 函数的定义，我们可以完善一下代码：

```java
// 定义：计算 s1[i..] 和 s2[j..] 的最长公共子序列长度
int dp(String s1, int i, String s2, int j) {
```

```
    if (s1.charAt(i) == s2.charAt(j)) {
        // s1[i] 和 s2[j] 必然在 lcs 中,
        // 加上 s1[i+1..] 和 s2[j+1..] 中的 lcs 长度，就是答案
        return 1 + dp(s1, i + 1, s2, j + 1)
    } else {
        // ...
    }
}
```

刚才说的 `s1[i] == s2[j]` 的情况，但如果 `s1[i] != s2[j]`，应该怎么办呢？

`s1[i] != s2[j]` 意味着，`s1[i]` 和 `s2[j]` 中至少有一个字符不在 `lcs` 中：



如上图，总共可能有三种情况，我怎么知道具体是那种情况呢？

其实我们也不知道，那就把这三种情况的答案都算出来，取其中结果最大的那个呗，因为题目让我们算「最长」公共子序列的长度嘛。

这三种情况的答案怎么算？回想一下我们的 `dp` 函数定义，不就是专门为了计算它们而设计的嘛！

代码可以再进一步：

```
// 定义：计算 s1[i..] 和 s2[j..] 的最长公共子序列长度
int dp(String s1, int i, String s2, int j) {
    if (s1.charAt(i) == s2.charAt(j)) {
        return 1 + dp(s1, i + 1, s2, j + 1)
    } else {
        // s1[i] 和 s2[j] 中至少有一个字符不在 lcs 中,
        // 穷举三种情况的结果，取其中的最大结果
```

```java
        return max(
            // 情况一、s1[i] 不在 lcs 中
            dp(s1, i + 1, s2, j),
            // 情况二、s2[j] 不在 lcs 中
            dp(s1, i, s2, j + 1),
            // 情况三、都不在 lcs 中
            dp(s1, i + 1, s2, j + 1)
        );
    }
}
```

这里就已经非常接近我们的最终答案了，**还有一个小的优化，情况三「`s1[i]` 和 `s2[j]` 都不在 lcs 中」其实可以直接忽略**。

因为我们在求最大值嘛，情况三在计算 `s1[i+1..]` 和 `s2[j+1..]` 的 `lcs` 长度，这个长度肯定是小于等于情况二 `s1[i..]` 和 `s2[j+1..]` 中的 `lcs` 长度的，因为 `s1[i+1..]` 比 `s1[i..]` 短嘛，那从这里面算出的 `lcs` 当然也不可能更长嘛。

同理，情况三的结果肯定也小于等于情况一。**说白了，情况三被情况一和情况二包含了**，所以我们可以直接忽略掉情况三，完整代码如下：

```java
// 备忘录，消除重叠子问题
int[][] memo;

/* 主函数 */
int longestCommonSubsequence(String s1, String s2) {
    int m = s1.length(), n = s2.length();
    // 备忘录值为 -1 代表未曾计算
    memo = new int[m][n];
    for (int[] row : memo)
        Arrays.fill(row, -1);
    // 计算 s1[0..] 和 s2[0..] 的 lcs 长度
    return dp(s1, 0, s2, 0);
}

// 定义：计算 s1[i..] 和 s2[j..] 的最长公共子序列长度
int dp(String s1, int i, String s2, int j) {
    // base case
    if (i == s1.length() || j == s2.length()) {
        return 0;
    }
    // 如果之前计算过，则直接返回备忘录中的答案
    if (memo[i][j] != -1) {
```

```java
            return memo[i][j];
        }
        // 根据 s1[i] 和 s2[j] 的情况做选择
        if (s1.charAt(i) == s2.charAt(j)) {
            // s1[i] 和 s2[j] 必然在 lcs 中
            memo[i][j] = 1 + dp(s1, i + 1, s2, j + 1);
        } else {
            // s1[i] 和 s2[j] 至少有一个不在 lcs 中
            memo[i][j] = Math.max(
                dp(s1, i + 1, s2, j),
                dp(s1, i, s2, j + 1)
            );
        }
        return memo[i][j];
    }
```

以上思路完全就是按照我们之前的爆文 动态规划套路框架 来的，应该是很容易理解的。至于为什么要加 `memo` 备忘录，我们之前写过很多次，为了照顾新来的读者，这里再简单重复一下，首先抽象出我们核心 `dp` 函数的递归框架：

```java
int dp(int i, int j) {
    dp(i + 1, j + 1); // #1
    dp(i, j + 1);     // #2
    dp(i + 1, j);     // #3
}
```

你看，假设我想从 `dp(i, j)` 转移到 `dp(i+1, j+1)`，有不止一种方式，可以直接走 `#1`，也可以走 `#2 -> #3`，也可以走 `#3 -> #2`。

这就是重叠子问题，如果我们不用 `memo` 备忘录消除子问题，那么 `dp(i+1, j+1)` 就会被多次计算，这是没有必要的。

至此，最长公共子序列问题就完全解决了，用的是自顶向下带备忘录的动态规划思路，我们当然也可以使用自底向上的迭代的动态规划思路，和我们的递归思路一样，关键是如何定义 `dp` 数组，我这里也写一下自底向上的解法吧：

```java
int longestCommonSubsequence(String s1, String s2) {
    int m = s1.length(), n = s2.length();
    int[][] dp = new int[m + 1][n + 1];
    // 定义：s1[0..i-1] 和 s2[0..j-1] 的 lcs 长度为 dp[i][j]
    // 目标：s1[0..m-1] 和 s2[0..n-1] 的 lcs 长度，即 dp[m][n]
    // base case: dp[0][..] = dp[..][0] = 0
```

```java
    for (int i = 1; i <= m; i++) {
        for (int j = 1; j <= n; j++) {
            // 现在 i 和 j 从 1 开始，所以要减一
            if (s1.charAt(i - 1) == s2.charAt(j - 1)) {
                // s1[i-1] 和 s2[j-1] 必然在 lcs 中
                dp[i][j] = 1 + dp[i - 1][j - 1];
            } else {
                // s1[i-1] 和 s2[j-1] 至少有一个不在 lcs 中
                dp[i][j] = Math.max(dp[i][j - 1], dp[i - 1][j]);
            }
        }
    }

    return dp[m][n];
}
```

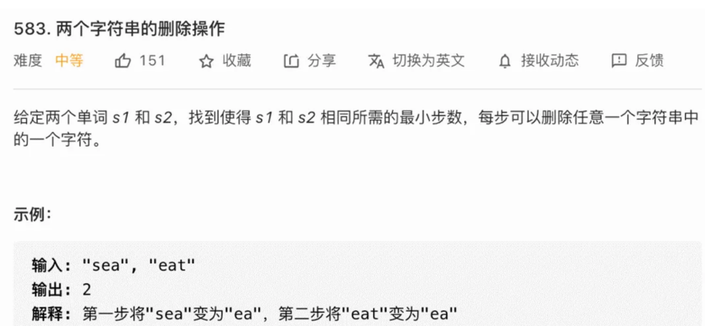
自底向上的解法中 `dp` 数组定义的方式和我们的递归解法有一点差异，而且由于数组索引从 0 开始，有索引偏移，不过思路和我们的递归解法完全相同，如果你看懂了递归解法，这个解法应该不难理解。

另外，自底向上的解法可以通过我们前文讲过的 动态规划状态压缩技巧 来进行优化，把空间复杂度压缩为 O(N)，这里由于篇幅所限，就不展开了。

下面，来看两道和最长公共子序列相似的两道题目。

字符串的删除操作

这是力扣第 583 题「两个字符串的删除操作」，看下题目：


583. 两个字符串的删除操作

难度 中等 151 收藏 分享 切换为英文 接收动态 反馈

给定两个单词 *s1* 和 *s2*，找到使得 *s1* 和 *s2* 相同所需的最小步数，每步可以删除任意一个字符串中的一个字符。

示例：

```
输入: "sea", "eat"
输出: 2
解释: 第一步将"sea"变为"ea"，第二步将"eat"变为"ea"
```

函数签名如下：

```java
int minDistance(String s1, String s2);
```

题目让我们计算将两个字符串变得相同的最少删除次数，那我们可以思考一下，最后这两个字符串会被删成什么样子？

删除的结果不就是它俩的最长公共子序列嘛！

那么，要计算删除的次数，就可以通过最长公共子序列的长度推导出来：

```java
int minDistance(String s1, String s2) {
    int m = s1.length(), n = s2.length();
    // 复用前文计算 lcs 长度的函数
    int lcs = longestCommonSubsequence(s1, s2);
    return m - lcs + n - lcs;
}
```

这道题就解决了！

最小 ASCII 删除和

这是力扣第 712 题，看下题目：

712. 两个字符串的最小ASCII删除和

难度 中等　159　收藏　分享　切换为英文　接收动态

给定两个字符串 `s1`, `s2`，找到使两个字符串相等所需删除字符的ASCII值的最小和。

示例 1:

```
输入: s1 = "sea", s2 = "eat"
输出: 231
解释: 在 "sea" 中删除 "s" 并将 "s" 的值(115)加入总和。
在 "eat" 中删除 "t" 并将 116 加入总和。
结束时，两个字符串相等，115 + 116 = 231 就是符合条件的最小和。
```

这道题，和上一道题非常类似，这回不问我们删除的字符个数了，问我们删除的字符的 ASCII 码加起来是多少。

那就不能直接复用计算最长公共子序列的函数了，但是可以依照之前的思路，**稍微修改 base case 和状态转移部分即可直接写出解法代码**：

```java
// 备忘录
```

```java
// 备忘录
int memo[][];
/* 主函数 */
int minimumDeleteSum(String s1, String s2) {
    int m = s1.length(), n = s2.length();
    // 备忘录值为 -1 代表未曾计算
    memo = new int[m][n];
    for (int[] row : memo)
        Arrays.fill(row, -1);

    return dp(s1, 0, s2, 0);
}

// 定义：将 s1[i..] 和 s2[j..] 删除成相同字符串，
// 最小的 ASCII 码之和为 dp(s1, i, s2, j)。
int dp(String s1, int i, String s2, int j) {
    int res = 0;
    // base case
    if (i == s1.length()) {
        // 如果 s1 到头了，那么 s2 剩下的都得删除
        for (; j < s2.length(); j++)
            res += s2.charAt(j);
        return res;
    }
    if (j == s2.length()) {
        // 如果 s2 到头了，那么 s1 剩下的都得删除
        for (; i < s1.length(); i++)
            res += s1.charAt(i);
        return res;
    }

    if (memo[i][j] != -1) {
        return memo[i][j];
    }

    if (s1.charAt(i) == s2.charAt(j)) {
        // s1[i] 和 s2[j] 都是在 lcs 中的，不用删除
        memo[i][j] = dp(s1, i + 1, s2, j + 1);
    } else {
        // s1[i] 和 s2[j] 至少有一个不在 lcs 中，删一个
        memo[i][j] = Math.min(
            s1.charAt(i) + dp(s1, i + 1, s2, j),
            s2.charAt(j) + dp(s1, i, s2, j + 1)
        );
    }
    return memo[i][j];
}
```

base case 有一定区别，计算 `lcs` 长度时，如果一个字符串为空，那么 `lcs` 长度必然是 0；但是这道题如果一个字符串为空，另一个字符串必然要被全部删除，所以需要计算另一个字符串所有字符的 ASCII 码之和。

关于状态转移，当 `s1[i]` 和 `s2[j]` 相同时不需要删除，不同时需要删除，所以可以利用 `dp` 函数计算两种情况，得出最优的结果。其他的大同小异，就不具体展开了。

至此，三道子序列问题就解决完了，关键在于将问题细化到字符，根据每两个字符是否相同来判断他们是否在结果子序列中，从而避免了对所有子序列进行穷举。

这也算是在两个字符串中求子序列的常用思路吧，建议好好体会，多多联系~

往期推荐 🔗

东哥手把手带你套框架刷通二叉树|第一期

阶乘相关的算法题，东哥又整活儿了

东哥手写正则通配符算法，结构清晰，包教包会！

关于算法笔试，东哥又整出套路了🤔

原创 | 东哥教你几招常用的位运算技巧