cloud.tencent.com

子序列解题模板：最长回文子序列 - 腾讯云开发者社区-腾讯云

凝神长老

12-14 minutes

预计阅读时间：6 分钟

子序列问题是常见的算法问题，而且并不好解决。

首先，子序列问题本身就相对子串、子数组更困难一些，因为前者是不连续的序列，而后两者是连续的，就算穷举都不容易，更别说求解相关的算法问题了。

而且，子序列问题很可能涉及到两个字符串，比如让你求两个字符串的 最长公共子序列，如果没有一定的处理经验，真的不容易想出来。所以本文就来扒一扒子序列问题的套路，**其实就有两种模板，相关问题只要往这两种思路上想，十拿九稳。**

一般来说，这类问题都是让你求一个**最长**子序列，因为最短子序列就是一个字符嘛，没啥可问的。一旦涉及到子序列和最值，那几乎可以肯定，**考察的是动态规划技巧，时间复杂度一般都是 O(n^2)。**

原因很简单，你想想一个字符串，它的子序列有多少种可能？起码是指数级的吧，这种情况下，不用动态规划技巧，还想怎么着呢？

既然要用动态规划，那就要定义 dp 数组，找状态转移关系。我们说的两种思路模板，就是 dp 数组的定义思路。不同的问题可能需要不同的 dp 数组定义来解决。

一、两种思路

1、第一种思路模板是一个一维的 dp 数组：

```
int n = array.length;
int[] dp = new int[n];

for (int i = 1; i < n; i++) {
    for (int j = 0; j < i; j++) {
        dp[i] = 最值(dp[i], dp[j] + ...)
    }
}
```

举个我们写过的例子 最长递增子序列，在这个思路中 dp 数组的定义是：

在子数组`array[0..i]`中，以`array[i]`结尾的目标子序列（最长递增子序列）的长度是`dp[i]`。

为啥最长递增子序列需要这种思路呢？前文说得很清楚了，因为这样符合归纳法，可以找到状态转移的关系，这里就不具体展开了。

2、第二种思路模板是一个二维的 dp 数组：

```
int n = arr.length;
int[][] dp = new dp[n][n];

for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = 1; j < n; j++) {
        if (arr[i] == arr[j])
            dp[i][j] = dp[i][j] + ...
        else
            dp[i][j] = 最值(...)
    }
```

```
}
```

这种思路运用相对更多一些，尤其是涉及两个字符串/数组的子序列。本思路中 dp 数组含义又分为「只涉及一个字符串」和「涉及两个字符串」两种情况。

2.1 涉及两个字符串/数组时（比如最长公共子序列），dp 数组的含义如下：

在子数组`arr1[0..i]`和子数组`arr2[0..j]`中，我们要求的子序列（最长公共子序列）长度为`dp[i][j]`。

2.2 只涉及一个字符串/数组时（比如本文要讲的最长回文子序列），dp 数组的含义如下：

在子数组`array[i..j]`中，我们要求的子序列（最长回文子序列）的长度为`dp[i][j]`。

第一种情况可以参考这两篇旧文：详解编辑距离 和 最长公共子序列。

下面就借最长回文子序列这个问题，详解一下第二种情况下如何使用动态规划。

二、最长回文子序列

之前解决了 最长回文子串 的问题，这次提升难度，求最长回文子序列的长度：

> 给定一个字符串 `s` ，找到其中最长的回文子序列。可以假设 `s` 的最大长度为 `1000` 。
>
> **示例 1:**
> 输入:
>
> ```
> "bbbab"
> ```
>
> 输出:

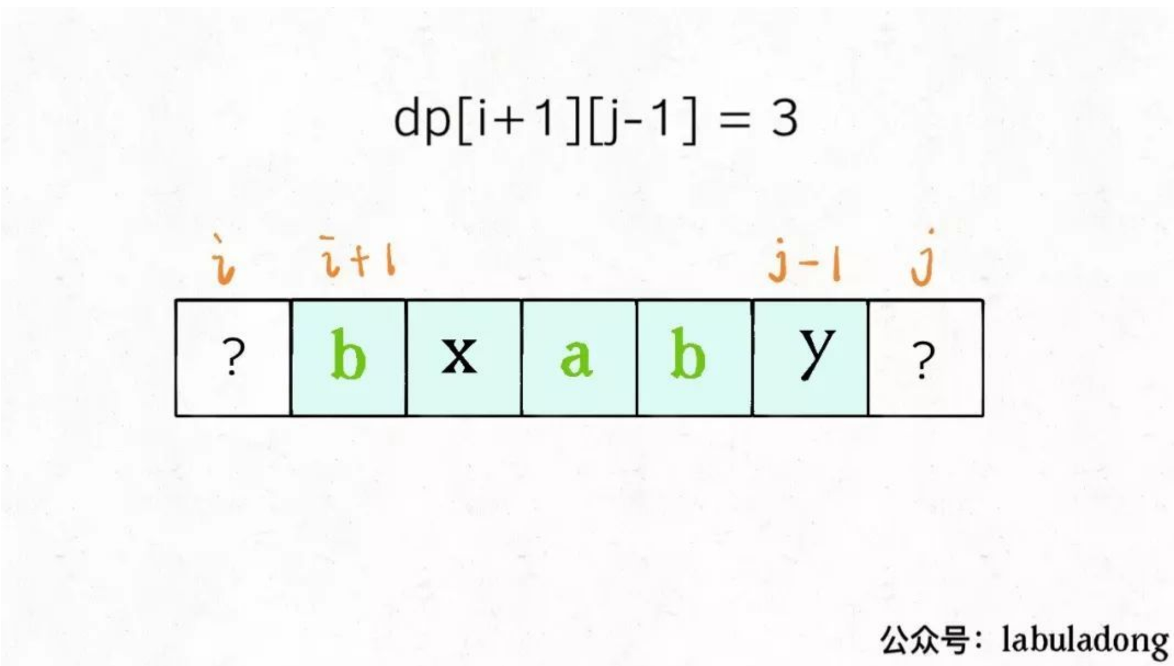
```
4
```

一个可能的最长回文子序列为 "bbbb"。

我们说这个问题对 dp 数组的定义是：**在子串s[i..j]中，最长回文子序列的长度为dp[i][j]**。一定要记住这个定义才能理解算法。

为啥这个问题要这样定义二维的 dp 数组呢？我们前文多次提到，**找状态转移需要归纳思维，说白了就是如何从已知的结果推出未知的部分**，这样定义容易归纳，容易发现状态转移关系。

具体来说，如果我们想求dp[i][j]，假设你知道了子问题dp[i+1][j-1]的结果（s[i+1..j-1]中最长回文子序列的长度），你是否能想办法算出dp[i][j]的值（s[i..j]中，最长回文子序列的长度）呢？



可以！**这取决于s[i]和s[j]的字符**：

如果它俩相等，那么它俩加上s[i+1..j-1]中的最长回文子序列就是s[i..j]的最长回文子序列：

如果它俩不相等，说明它俩**不可能同时**出现在s[i..j]的最长回文

子序列中，那么把它俩**分别**加入s[i+1..j-1]中，看看哪个子串产生的回文子序列更长即可：

以上两种情况写成代码就是这样：

```
if (s[i] == s[j])
    // 它俩一定在最长回文子序列中
    dp[i][j] = dp[i + 1][j - 1] + 2;
else
    // s[i+1..j] 和 s[i..j-1] 谁的回文子序列更长？
    dp[i][j] = max(dp[i + 1][j], dp[i][j - 1]);
```

至此，状态转移方程就写出来了，根据 dp 数组的定义，我们要求的就是dp[0][n - 1]，也就是整个s的最长回文子序列的长度。

三、代码实现

首先明确一下 base case，如果只有一个字符，显然最长回文子序列长度是 1，也就是dp[i][j] = 1,(i == j)。

因为i肯定小于等于j，所以对于那些i > j的位置，根本不存在什么子序列，应该初始化为 0。

另外，看看刚才写的状态转移方程，想求dp[i][j]需要知道dp[i+1][j-1]，dp[i+1][j]，dp[i][j-1]这三个位置；再看看我们确定的 base case，填入 dp 数组之后是这样：

为了保证每次计算dp[i][j]，左、下、左下三个方向的位置已经被计算出来，只能斜着遍历或者反着遍历：

我选择反着遍历，代码如下：

```
int longestPalindromeSubseq(string s) {
    int n = s.size();
    // dp 数组全部初始化为 0
    vector<vector<int>> dp(n, vector<int>(n, 0));
```

```
    // base case
    for (int i = 0; i < n; i++)
        dp[i][i] = 1;
    // 反着遍历保证正确的状态转移
    for (int i = n - 1; i >= 0; i--) {
        for (int j = i + 1; j < n; j++) {
            // 状态转移方程
            if (s[i] == s[j])
                dp[i][j] = dp[i + 1][j - 1] + 2;
            else
                dp[i][j] = max(dp[i + 1][j], dp[i][j - 1]);
        }
    }
    // 整个 s 的最长回文子串长度
    return dp[0][n - 1];
}
```

至此，最长回文子序列的问题就解决了。

主要还是正确定义 dp 数组的含义，遇到子序列问题，首先想到两种动态规划思路，然后根据实际问题看看哪种思路容易找到状态转移关系。

另外，找到状态转移和 base case 之后，**一定要观察 DP table**，看看怎么遍历才能保证通过已计算出来的结果解决新的问题

有了以上思路方向，子序列问题也不过如此嘛。

文章分享自微信公众号：