01 硬币找零问题：从贪心算法说起

你好，我是卢誉声。

作为“初识动态规划”模块的第一节课，我会带着你一起从贪心算法开始了解整个知识体系的脉络。现实中，我们往往不愿意承认自己贪婪。事实上，贪婪是渴望而不知满足，它是人的一种基本驱动力。既然是基本驱动力，那它自然就不会太难。

所以你可能会说贪心算法很简单啊，但其实不然，这里面还真有不少门道值得我们说说。而且，它还跟动态规划问题有着千丝万缕的联系，能够帮助我们理解真正的动归问题。

接下来我们就从一个简单的算法问题开始探讨，那就是硬币找零。在开始前，我先提出一个问题：**任何算法都有它的局限性，贪心算法也如此，那么贪心算法能解决哪些问题呢？**

你不妨带着这个问题来学习下面的内容。

硬币找零问题

移动支付已经成为了我们日常生活当中的主流支付方式，无论是在便利店购买一瓶水，还是在超市或菜市场购买瓜果蔬菜等生活用品，无处不在的二维码让我们的支付操作变得异常便捷。

但在移动支付成为主流支付方式之前，我们常常需要面对一个简单问题，就是找零的问题。

虽然说硬币找零在日常生活中越来越少，但它仍然活跃在编程领域和面试问题当中，主要还是因为它极具代表性，也能多方面考察一个开发人员或面试者解决问题的能力。

既然如此，我们就先来看看这个算法问题的具体描述。

问题：给定n种不同面值的硬币，分别记为c[0], c[1], c[2], … c[n]，同时还有一个总金额k，编写一个函数计算出**最少**需要几枚硬币凑出这个金额k？每种硬币的个数不限，且如果没有任何一种硬币组合能组成总金额时，返回 -1。

```
示例 1：

输入：c[0]=1, c[1]=2, c[2]=5, k=12
```

```
输出：3
解释：12 = 5 + 5 + 2
```

```
示例 2：

输入：c[0]=5, k=7
输出：-1
解释：只有一种面值为5的硬币，怎么都无法凑出总价值为7的零钱。
```

题目中有一个醒目的提示词，那就是“最少”。嗯，看起来这是一个求最值的问题，其实也好理解，如果题目不在这里设定这一条件，那么所求结果就不唯一了。

举个简单的例子，按照示例1的题设，有三种不同面值的硬币，分别为c1=1, c2=2, c3=5，在没有“最少”这一前提条件下你能罗列出几种不同的答案？我在这里随意列出几个：

```
解1：输出：5，因为 5 + 2 + 2 + 2 + 1 = 12。
解2：输出：6，因为 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12。
解3：输出：12，因为 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 12。
```

所以，这是一个求最值的问题。那么求最值的核心问题是什么呢？嗯，无非就是**穷举**，显然，就是把所有可能的凑硬币方法都穷举出来，然后找找看最少需要多少枚硬币，那么最少的凑法，就是这道题目的答案。

在面试中，一般来说穷举从来都不是一个好方法。除非你要的结果就是所有的不同组合，而不是一个最值。但即便是求所有的不同组合，在计算的过程中也仍然会出现重复计算的问题，我们将这种现象称之为**重叠子问题**。

请你记住这个关键概念，它是动态规划当中的一个重要概念。但现在你只需要知道所谓重叠子问题就是：我们在罗列所有可能答案的过程中，可能存在重复计算的情况。我会在后续课程中与你深入探讨这个概念。

在尝试解决硬币找零问题前，我们先用较为严谨的定义来回顾一下贪心算法的概念。

贪心算法

所谓贪心算法，就是指它的每一步计算作出的都是在当前看起来最好的选择，也就是说它所作出的选择只是在某种意义上的局部最优选择，并不从整体最优考虑。在这里，我把这两种选择的思路称作**局部最优解**和**整体最优解**。

因此，我们可以得到贪心算法的基本思路：

1. 根据问题来建立数学模型，一般面试题会定义一个简单模型；

2. 把待求解问题划分成若干个子问题，对每个子问题进行求解，得到子问题的局部最优解；
3. 把子问题的局部最优解进行合并，得到最后基于局部最优解的一个解，即原问题的答案。

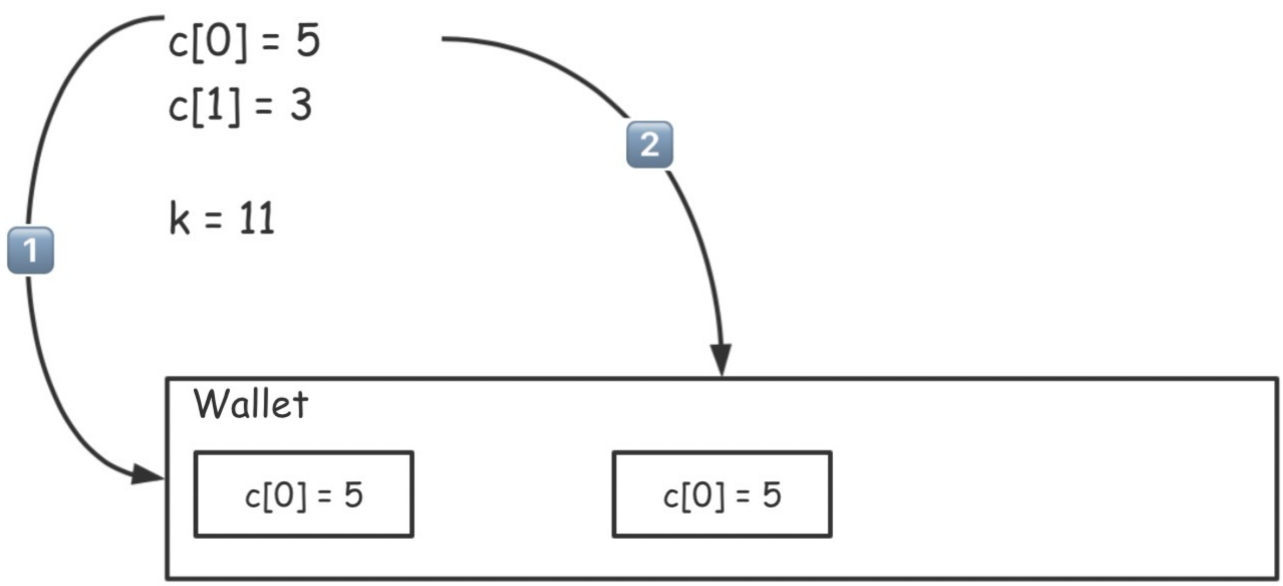
解题思路

现在让我们回到这个问题上来。

既然这道题问的是**最少**需要几枚硬币凑出金额k，那么是否可以尝试使用贪心的思想来解这个问题呢？从面值最大的硬币开始兑换，最后得出的硬币总数很有可能就是最少的。

这个想法不错，让我们一起来试一试。

我用一个例子，带你看下整个贪心算法求解的过程，我们从 c[0]=5, c[1]=3 且k=11 的情况下寻求最少硬币数。按照“贪心原则”，我们先挑选面值最大的，即为5的硬币放入钱包。接着，还有6元待解（即11-5 = 6）。这时，我们再次“贪心”，放入5元面值的硬币。



这样来看，贪心算法其实不难吧。我在这里把代码贴出来，你可以结合代码再理解一下算法的执行步骤。

Java 实现：

```
int getMinCoinCountHelper(int total, int[] values, int valueCount) {
    int rest = total;
    int count = 0;

    // 从大到小遍历所有面值
    for (int i = 0; i < valueCount; ++ i) {
        int currentCount = rest / values[i]; // 计算当前面值最多能用多少个
```

```
        rest -= currentCount * values[i]; // 计算使用完当前面值后的余额
        count += currentCount; // 增加当前面额用量

        if (rest == 0) {
            return count;
        }
    }

    return -1; // 如果到这里说明无法凑出总价，返回-1
}

int getMinCoinCount() {
    int[] values = { 5, 3 }; // 硬币面值
    int total = 11; // 总价
    return getMinCoinCountHelper(total, values, 2); // 输出结果
}
```

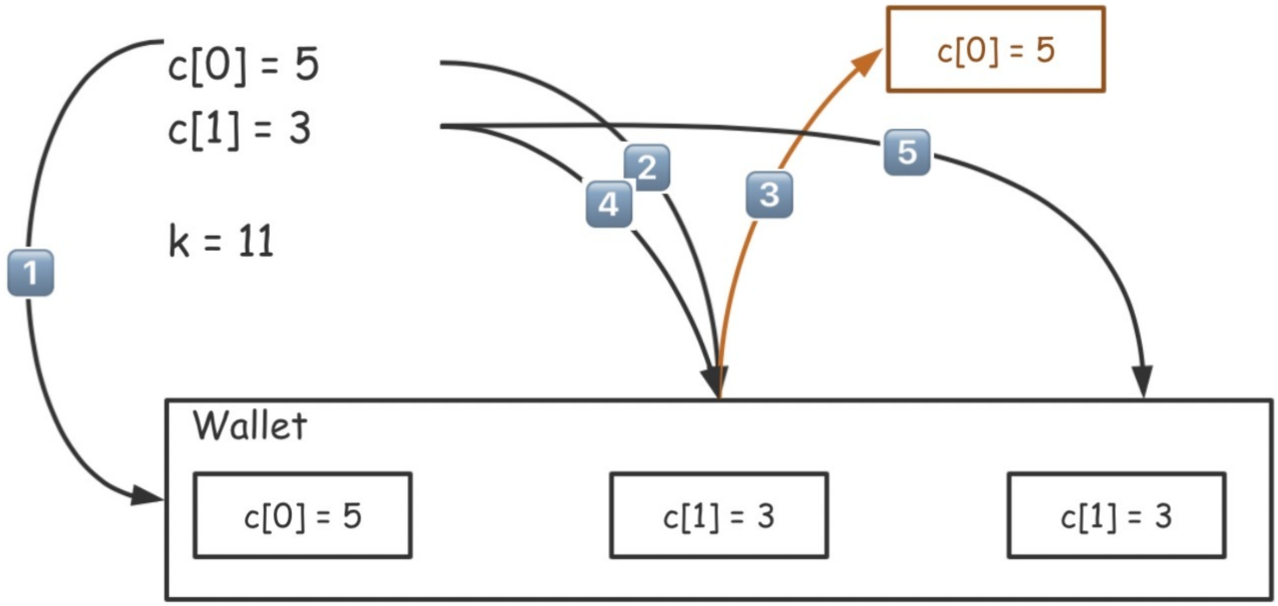
C++ 实现：

```
int GetMinCoinCountHelper(int total, int* values, int valueCount) {
    int rest = total;
    int count = 0;

    // 从大到小遍历所有面值
    for (int i = 0; i < valueCount; ++ i) {
        int currentCount = rest / values[i]; // 计算当前面值最多能用多少个
        rest -= currentCount * values[i]; // 计算使用完当前面值后的余额
        count += currentCount; // 增加当前面额用量

        if (rest == 0) {
            return count;
        }
    }

    return -1; // 如果到这里说明无法凑出总价，返回-1
}

int GetMinCoinCount() {
    int values[] = { 5, 3 }; // 硬币面值
    int total = 11; // 总价
    return GetMinCoinCountHelper(total, values, 2); // 输出结果
}
```

这段代码就是简单地从最大的面值开始尝试，每次都会把当前面值的硬币尽量用光，然后才会尝试下一种面值的货币。

嗯。。。你有没有发现问题？那就是还剩1元零钱待找，但是我们只有c[0]=5, c[1]=3两种面值的硬币，怎么办？这个问题无解了，该返回-1了吗？显然不是。

我们把第2步放入的5元硬币取出，放入面值为3元的硬币试试看。这时，你就会发现，我们还剩3元零钱待找。



正好我们还有c[1]=3的硬币可以使用，因此解是c[0]=5, c[1]=3, c[1]=3，即**最少**使用三枚硬币凑出了k=11这个金额。

我们对贪心算法做了改进，引入了回溯来解决前面碰到的“过于贪心”的问题。同样地，我把改进后的代码贴在这，你可以再看看跟之前算法实现的区别。

Java 实现：

```
int getMinCoinCountOfValue(int total, int[] values, int valueIndex) {
    int valueCount = values.length;
    if (valueIndex == valueCount) { return Integer.MAX_VALUE; }

    int minResult = Integer.MAX_VALUE;
    int currentValue = values[valueIndex];
    int maxCount = total / currentValue;

    for (int count = maxCount; count >= 0; count --) {
        int rest = total - count * currentValue;

        // 如果rest为0，表示余额已除尽，组合完成
        if (rest == 0) {
            minResult = Math.min(minResult, count);
            break;
        }

        // 否则尝试用剩余面值求当前余额的硬币总数
        int restCount = getMinCoinCountOfValue(rest, values, valueIndex + 1);

        // 如果后续没有可用组合
        if (restCount == Integer.MAX_VALUE) {
            // 如果当前面值已经为0，返回-1表示尝试失败
            if (count == 0) { break; }
```

```
            // 否则尝试把当前面值-1
            continue;
        }

        minResult = Math.min(minResult, count + restCount);
    }

    return minResult;
}

int getMinCoinCountLoop(int total, int[] values, int k) {
    int minCount = Integer.MAX_VALUE;
    int valueCount = values.length;

    if (k == valueCount) {
        return Math.min(minCount, getMinCoinCountOfValue(total, values, 0));
    }

    for (int i = k; i <= valueCount - 1; i++) {
        // k位置已经排列好
        int t = values[k];
        values[k] = values[i];
        values[i]=t;
        minCount = Math.min(minCount, getMinCoinCountLoop(total, values, k + 1)); // 考

        // 回溯
        t = values[k];
        values[k] = values[i];
        values[i]=t;
    }

    return minCount;
}

int getMinCoinCountOfValue() {
    int[] values = { 5, 3 }; // 硬币面值
    int total = 11; // 总价
    int minCoin = getMinCoinCountLoop(total, values, 0);

    return (minCoin == Integer.MAX_VALUE) ? -1 : minCoin;  // 输出答案
}
```

C++ 实现:

```
int GetMinCoinCountOfValue(int total, int* values, int valueIndex, int valueCount) {
    if (valueIndex == valueCount) { return INT_MAX; }

    int minResult = INT_MAX;
    int currentValue = values[valueIndex];
    int maxCount = total / currentValue;

    for (int count = maxCount; count >= 0; count --) {
        int rest = total - count * currentValue;
```

```
        // 如果rest为0，表示余额已除尽，组合完成
        if (rest == 0) {
            minResult = min(minResult, count);
            break;
        }

        // 否则尝试用剩余面值求当前余额的硬币总数
        int restCount = GetMinCoinCountOfValue(rest, values, valueIndex + 1, valueCount

        // 如果后续没有可用组合
        if (restCount == INT_MAX) {
            // 如果当前面值已经为0，返回-1表示尝试失败
            if (count == 0) { break; }
            // 否则尝试把当前面值-1
            continue;
        }

        minResult = min(minResult, count + restCount);
    }

    return minResult;
}

int GetMinCoinCountLoop(int total, int* values, int valueCount, int k) {
    int minCount = INT_MAX;
    if (k == valueCount) {
        return min(minCount, GetMinCoinCountOfValue(total, values, 0, valueCount));
    }

    for (int i = k; i <= valueCount - 1; i++) {
        // k位置已经排列好
        int t = values[k];
        values[k] = values[i];
        values[i]=t;
        minCount = min(minCount, GetMinCoinCountOfValue(total, values, 0, valueCount));
        minCount = min(minCount, GetMinCoinCountLoop(total, values, valueCount, k + 1))

        // 回溯
        t = values[k];
        values[k] = values[i];
        values[i]=t;
    }

    return minCount;
}

int GetMinCoinCountOfValue() {
    int values[] = { 5, 3 }; // 硬币面值
    int total = 11; // 总价
    int minCoin = GetMinCoinCountLoop(total, values, 2, 0);

    return (minCoin == INT_MAX) ? -1 : minCoin;
}
```

改进后的算法实现在之前的基础上增加上了一个**回溯**过程。简单地说就是多了一个**递归**，不断尝试用更少的当前面值来拼凑。只要有一个组合成功，我们就返回总数，如果所有组合都尝试失败，就返回-1。

嗯，这样就没问题了，对硬币找零问题来说，我们得到了理想的结果。

贪心算法的局限性

从上面这个例子我们可以看出，如果只是简单采用贪心的思路，那么到用完2个5元硬币的时候我们就已经黔驴技穷了——因为剩下的1元无论如何都没法用现在的硬币凑出来。这是什么问题导致的呢？

这就是贪心算法所谓的**局部最优**导致的问题，因为我们每一步都尽量多地使用面值最大的硬币，因为这样数量肯定最小，但是有的时候我们就进入了死胡同，就好比上面这个例子。

所谓**局部最优**，就是只考虑“当前”的最大利益，既不向前多看一步，也不向后多看一步，导致每次都只用当前阶段的最优解。

那么如果纯粹采用这种策略我们就永远无法达到**整体最优**，也就无法求得题目的答案了。至于能得到答案的情况那就是我们走狗屎运了。

虽然纯粹的贪心算法作用有限，但是这种求解**局部最优**的思路在方向上肯定是对的，毕竟所谓的**整体最优**肯定是从很多个**局部最优**中选择出来的，因此所有最优化问题的基础都是贪心算法。

回到前面的例子，我只不过是在贪心的基础上加入了失败后的回溯，稍微牺牲一点当前利益，仅仅是希望通过下一个硬币面值的**局部最优**达到最终可行的**整体最优**。

所有贪心的思路就是我们最优化求解的根本思想，所有的方法只不过是针对贪心思路的改进和优化而已。回溯解决的是正确性问题，而动态规划则是解决时间复杂度的问题。

贪心算法是求解整体最优的真正思路源头，这就是为什么我们要在课程的一开始就从贪心算法讲起。

课程总结

硬币找零问题本质上是求最值问题。事实上，动态规划问题的一般形式就是求最值，而求最值的核心思想是**穷举**。这是因为只要我们能够找到所有可能的答案，从中挑选出最优的解就是算法问题的结果。

在没有优化的情况下，穷举从来就不算是一个好方法。所以我带你使用了贪心算法来解题，它是一种使用**局部最优**思想解题的算法（即从问题的某一个初始解出发逐步逼近给定的目标，以尽可能快的速度去求得更好的解，当达到算法中的某一步不能再继续前进时，算法停止）。

但是通过硬币找零问题，我们也发现了贪心算法本身的局限性：

1. 不能保证求得的最后解是最佳的；
2. 不能用来求最大或最小解问题；
3. 只能求满足某些约束条件的可行解的范围。

我们往往需要使用**回溯**来优化贪心算法，否则就会导致算法失效。因此，在求解最值问题时，我们需要更好的方法来解。在后面课程讲到递归和穷举优化问题的时候，我会讲到解决最值问题的正确思路和方法：考虑**整体最优**的问题。

课后思考

在递归问题中，回溯是一种经典的优化算法性能的方法。递归对动态规划来说也十分重要。你能否举出使用回溯算法来解的面试问题？并给出你的解。希望你能在课后提出问题，进行练习。

最后，欢迎留言和我分享你的思考，我会第一时间给你反馈。如果今天的内容对你有所启发，也欢迎把它分享给你身边的朋友，邀请他一起学习！

上一页 下一页