图论算法基础（修订版）

Original labuladong labuladong 2021-12-19 16:30

读完本文，可以去力扣解决如下题目：

797. 所有可能的路径（Medium）

PS：这篇文章是之前 为什么我没写过「图」相关的算法？的修订版，主要是因为旧文中缺少 `visited` 数组和 `onPath` 数组的讨论，这里补上，同时将一些表述改得更准确，文末附带图论进阶算法。

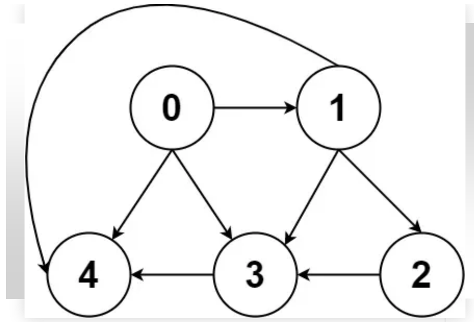
经常有读者问我「图」这种数据结构，其实我在 学习数据结构和算法的框架思维 中说过，虽然图可以玩出更多的算法，解决更复杂的问题，但本质上图可以认为是多叉树的延伸。

面试笔试很少出现图相关的问题，就算有，大多也是简单的遍历问题，基本上可以完全照搬多叉树的遍历。

那么，本文依然秉持我们号的风格，只讲「图」最实用的，离我们最近的部分，让你心里对图有个直观的认识，文末我给出了其他经典图论算法，理解本文后应该都可以拿下的。

图的逻辑结构和具体实现

一幅图是由**节点**和**边**构成的，逻辑结构如下：



什么叫「逻辑结构」？就是说为了方便研究，我们把图抽象成这个样子。

根据这个逻辑结构，我们可以认为每个节点的实现如下：

```
/* 图节点的逻辑结构 */
class Vertex {
    int id;
    Vertex[] neighbors;
}
```

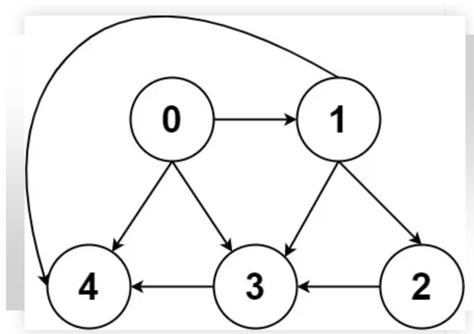
看到这个实现，你有没有很熟悉？它和我们之前说的多叉树节点几乎完全一样：

```
/* 基本的 N 叉树节点 */
class TreeNode {
    int val;
    TreeNode[] children;
}
```

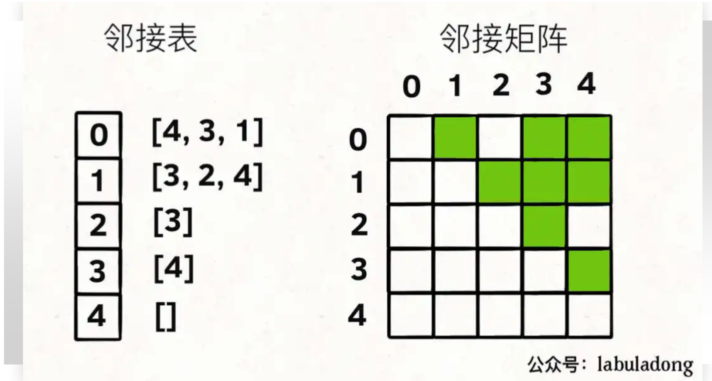
所以说，图真的没啥高深的，就是高级点的多叉树而已。

不过呢，上面的这种实现是「逻辑上的」，实际上我们很少用这个 `Vertex` 类实现图，而是用常说的**邻接表和邻接矩阵**来实现。

比如还是刚才那幅图：



用邻接表和邻接矩阵的存储方式如下：



邻接表很直观，我把每个节点 `x` 的邻居都存到一个列表里，然后把 `x` 和这个列表关联起来，这样就可以通过一个节点 `x` 找到它的所有相邻节点。

邻接矩阵则是一个二维布尔数组，我们权且称为 `matrix`，如果节点 `x` 和 `y` 是相连的，那么就把 `matrix[x][y]` 设为 `true`（上图中绿色的方格代表 `true`）。如果想找节点 `x` 的邻居，去扫一圈 `matrix[x][..]` 就行了。

如果用代码的形式来表现，邻接表和邻接矩阵大概长这样：

```
// 邻接矩阵
// graph[x] 存储 x 的所有邻居节点
List<Integer>[] graph;

// 邻接矩阵
// matrix[x][y] 记录 x 是否有一条指向 y 的边
boolean[][] matrix;
```

那么，为什么有这两种存储图的方式呢？肯定是因为他们各有优劣。

对于邻接表，好处是占用的空间少。

你看邻接矩阵里面空着那么多位置，肯定需要更多的存储空间。

但是，邻接表无法快速判断两个节点是否相邻。

比如说我想判断节点 `1` 是否和节点 `3` 相邻，我要去邻接表里 `1` 对应的邻居列表里查找 `3` 是否存在。但对于邻接矩阵就简单了，只要看看 `matrix[1][3]` 就知道了，效率高。

所以说，使用哪一种方式实现图，要看具体情况。

好了，对于「图」这种数据结构，能看懂上面这些就绰绰够用了。

那你可能会问，我们这个图的模型仅仅是「有向无权图」，不是还有什么加权图，无向图，等等……

其实，这些更复杂的模型都是基于这个最简单的图衍生出来的。

有向加权图怎么实现？很简单呀：

如果是邻接表，我们不仅仅存储某个节点 `x` 的所有邻居节点，还存储 `x` 到每个邻居的权重，不就实现加权有向图了吗？

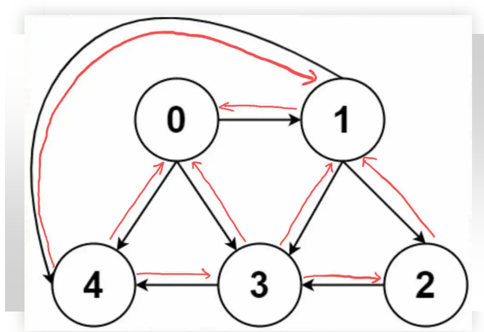
如果是邻接矩阵， `matrix[x][y]` 不再是布尔值，而是一个 int 值，0 表示没有连接，其他值表示权重，不就变成加权有向图了吗？

如果用代码的形式来表现，大概长这样：

```
// 邻接矩阵
// graph[x] 存储 x 的所有邻居节点以及对应的权重
List<int[]>[] graph;

// 邻接矩阵
// matrix[x][y] 记录 x 指向 y 的边的权重，0 表示不相邻
int[][] matrix;
```

无向图怎么实现？也很简单，所谓的「无向」，是不是等同于「双向」？



如果连接无向图中的节点 `x` 和 `y` ，把 `matrix[x][y]` 和 `matrix[y][x]` 都变成 `true` 不就行了；邻接表也是类似的操作，在 `x` 的邻居列表里添加 `y` ，同时在 `y` 的邻居列表里添加 `x` 。

把上面的技巧合起来，就变成了无向加权图……

好了，关于图的基本介绍就到这里，现在不管来什么乱七八糟的图，你心里应该都有底了。

下面来看看所有数据结构都逃不过的问题：遍历。

图的遍历

学习数据结构和算法的框架思维 说过，各种数据结构被发明出来无非就是为了遍历和访问，所以「遍历」是所有数据结构的基础。

图怎么遍历？还是那句话，参考多叉树，多叉树的遍历框架如下：

```
/* 多叉树遍历框架 */
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return;

    for (TreeNode child : root.children) {
        traverse(child);
    }
}
```

图和多叉树最大的区别是，图是可能包含环的，你从图的某一个节点开始遍历，有可能走了一圈又回到这个节点。

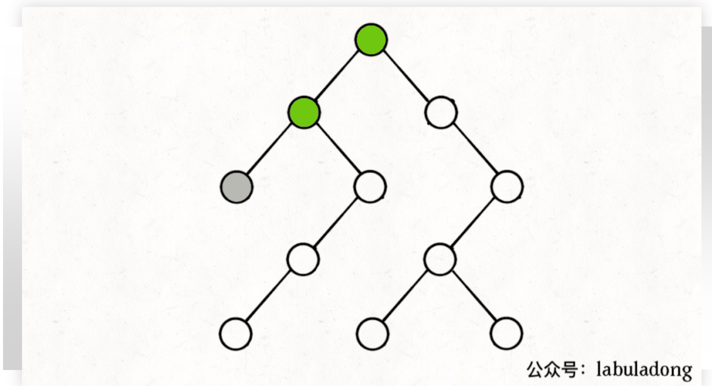
所以，如果图包含环，遍历框架就要一个 `visited` 数组进行辅助：

```
// 记录被遍历过的节点
boolean[] visited;
// 记录从起点到当前节点的路径
boolean[] onPath;

/* 图遍历框架 */
void traverse(Graph graph, int s) {
    if (visited[s]) return;
    // 经过节点 s，标记为已遍历
    visited[s] = true;
    // 做选择：标记节点 s 在路径上
```

```
        onPath[s] = true;
        for (int neighbor : graph.neighbors(s)) {
            traverse(graph, neighbor);
        }
        // 撤销选择：节点 s 离开路径
        onPath[s] = false;
    }
```

注意 visited 数组和 onPath 数组的区别，因为二叉树算是特殊的图，所以用遍历二叉树的过程来理解下这两个数组的区别：



上述 GIF 描述了递归遍历二叉树的过程，在 visited 中被标记为 true 的节点用灰色表示，在 onPath 中被标记为 true 的节点用绿色表示，这下你可以理解它们二者的区别了吧。

如果让你处理路径相关的问题，这个 onPath 变量是肯定会被用到的，比如 拓扑排序 中就有运用。

另外，你应该注意到了，这个 onPath 数组的操作很像 回溯算法核心套路 中做「做选择」和「撤销选择」，区别在于位置：回溯算法的「做选择」和「撤销选择」在 for 循环里面，而对 onPath 数组的操作在 for 循环外面。

在 for 循环里面和外面唯一的区别就是对根节点的处理。

比如下面两种多叉树的遍历：

```
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return;
    System.out.println("enter: " + root.val);
    for (TreeNode child : root.children) {
        traverse(child);
```

```java
    }
    System.out.println("leave: " + root.val);
}

void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return;
    for (TreeNode child : root.children) {
        System.out.println("enter: " + child.val);
        traverse(child);
        System.out.println("leave: " + child.val);
    }
}
```

前者会正确打印所有节点的进入和离开信息，而后者唯独会少打印整棵树根节点的进入和离开信息。

为什么回溯算法框架会用后者？因为回溯算法关注的不是节点，而是树枝，不信你看 回溯算法核心套路 里面的图。

显然，对于这里「图」的遍历，我们应该把 `onPath` 的操作放到 for 循环外面，否则会漏掉记录起始点的遍历。

说了这么多 `onPath` 数组，再说下 `visited` 数组，其目的很明显了，由于图可能含有环， `visited` 数组就是防止递归重复遍历同一个节点进入死循环的。

当然，如果题目告诉你图中不含环，可以把 `visited` 数组都省掉，基本就是多叉树的遍历。

题目实践

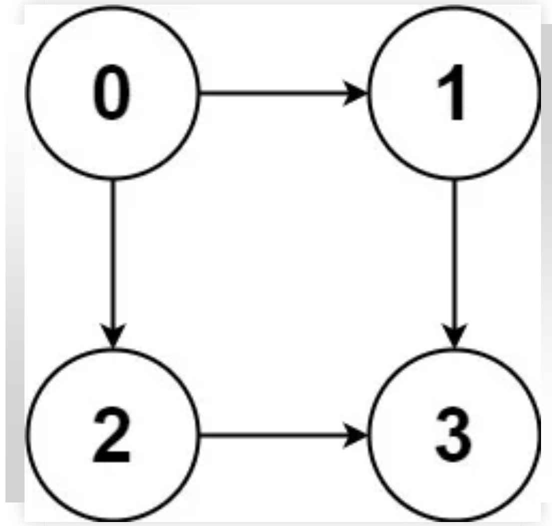
下面我们来看力扣第 797 题「所有可能路径」，函数签名如下：

```java
List<List<Integer>> allPathsSourceTarget(int[][] graph);
```

题目输入一幅**有向无环图**，这个图包含 `n` 个节点，标号为 `0, 1, 2,..., n - 1`，请你计算所有从节点 `0` 到节点 `n - 1` 的路径。

输入的这个 graph 其实就是「邻接表」表示的一幅图，graph[i] 存储这节点 i 的所有邻居节点。

比如输入 graph = [[1,2],[3],[3],[]]，就代表下面这幅图：



算法应该返回 [[0,1,3],[0,2,3]]，即 0 到 3 的所有路径。

解法很简单，以 0 为起点遍历图，同时记录遍历过的路径，当遍历到终点时将路径记录下来即可。

既然输入的图是无环的，我们就不需要 visited 数组辅助了，直接套用图的遍历框架：

```java
// 记录所有路径
List<List<Integer>> res = new LinkedList<>();

public List<List<Integer>> allPathsSourceTarget(int[][] graph) {
    // 维护递归过程中经过的路径
    LinkedList<Integer> path = new LinkedList<>();
    traverse(graph, 0, path);
    return res;
}

/* 图的遍历框架 */
void traverse(int[][] graph, int s, LinkedList<Integer> path) {

    // 添加节点 s 到路径
    path.addLast(s);

    int n = graph.length;
```

```java
    if (s == n - 1) {
        // 到达终点
        res.add(new LinkedList<>(path));
        path.removeLast();
        return;
    }

    // 递归每个相邻节点
    for (int v : graph[s]) {
        traverse(graph, v, path);
    }

    // 从路径移出节点 s
    path.removeLast();
}
```

这道题就这样解决了，注意 Java 的语言特性，向 `res` 中添加 `path` 时需要拷贝一个新的列表，否则最终 `res` 中的列表都是空的。

最后总结一下，图的存储方式主要有邻接表和邻接矩阵，无论什么花里胡哨的图，都可以用这两种方式存储。

在笔试中，最常考的算法是图的遍历，和多叉树的遍历框架是非常类似的。

当然，图还会有很多其他的有趣算法，比如 二分图判定，环检测和拓扑排序（编译器循环引用检测就是类似的算法），最小生成树，Dijkstra 最短路径算法 等等，有兴趣的读者可以去看看，本文就到这了。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

公众号后台回复关键词「**目录**」查看精选历史文章，回复「**插件**」下载刷题辅助插件。另外没关注我视频号的读者赶紧关注下，周末有空直播：