集合划分问题：排列组合中的回溯思想（修订版）

Original labuladong labuladong 2022-02-16 16:20

PS：本文是前文 回溯算法牛逼！ 的修订版，首先添加了两种回溯思想的来源，即排列公式的两种推导思路；另外，有读者反映力扣添加了测试用例，以前的解法代码现在会超时，所以我进一步优化了代码实现，使之能够通过力扣的测试用例。

以下是正文。

我经常说回溯算法是笔试中最好用的算法，只要你没什么思路，就用回溯算法暴力求解，即便不能通过所有测试用例，多少能过一点。

回溯算法的技巧也不难，前文 回溯算法框架套路 说过，回溯算法就是穷举一棵决策树的过程，只要在递归之前「做选择」，在递归之后「撤销选择」就行了。

但是，就算暴力穷举，不同的思路也有优劣之分。

本文就来看一道非常经典的回溯算法问题：子集划分问题。这道题可以帮你更深刻理解回溯算法的思维，得心应手地写出回溯函数。

题目非常简单：

给你输入一个数组 `nums` 和一个正整数 `k`，请你判断 `nums` 是否能够被平分为元素和相同的 `k` 个子集。

函数签名如下：

```
boolean canPartitionKSubsets(int[] nums, int k);
```

我们之前 背包问题之子集划分 写过一次子集划分问题，不过那道题只需要我们把集合划分成两个相等的集合，可以转化成背包问题用动态规划技巧解决。

但是如果划分成多个相等的集合，解法一般只能通过暴力穷举，时间复杂度爆表，是练习回溯算法和递归思维的好机会。

一、思路分析

首先，我们回顾一下以前学过的排列组合知识：

1、`P(n, k)`（也有很多书写成 `A(n, k)`）表示从 `n` 个不同元素中拿出 `k` 个元素的排列（Permutation/Arrangement）总数；`C(n, k)` 表示从 `n` 个不同元素中拿出 `k` 个元素的组合（Combination）总数。

2、「排列」和「组合」的主要区别在于是否考虑顺序的差异。

3、排列、组合总数的计算公式：

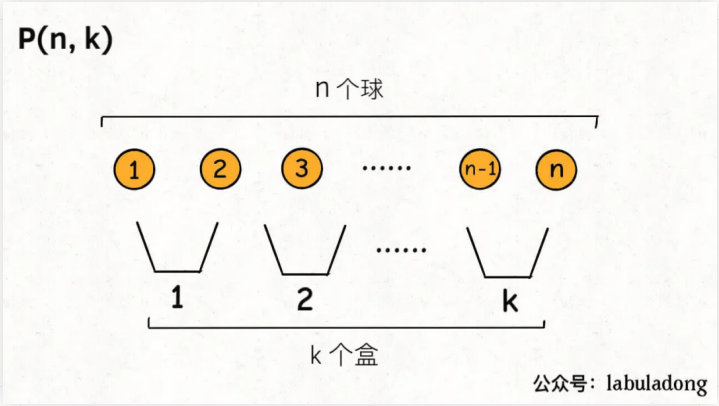
$$P(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

好，现在我问一个问题，这个排列公式 `P(n, k)` 是如何推导出来的？为了搞清楚这个问题，我需要讲一点组合数学的知识。

排列组合问题的各种变体都可以抽象成「球盒模型」， `P(n, k)` 就可以抽象成下

面这个场景：

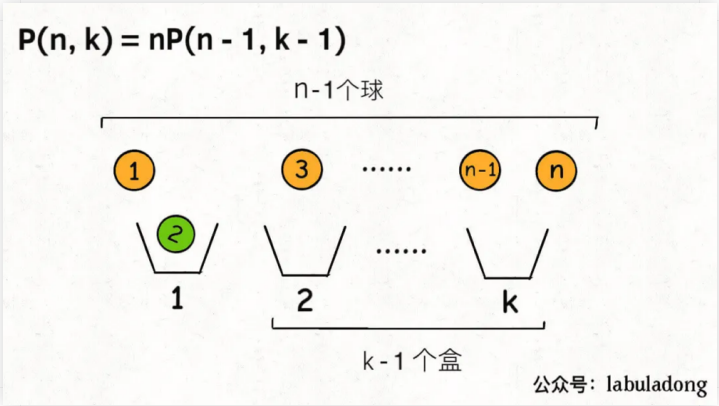


即，将 `n` 个标记了不同序号的球（标号为了体现顺序的差异），放入 `k` 个标记了不同序号的盒子中（其中 `n >= k`，每个盒子最终都装有恰好一个球），共有 `P(n, k)` 种不同的方法。

现在你来，往盒子里放球，你怎么放？其实有两种视角。

首先，你可以站在盒子的视角，每个盒子必然要选择一个球。

这样，第一个盒子可以选择 `n` 个球中的任意一个，然后你需要让剩下 `k - 1` 个盒子在 `n - 1` 个球中选择：

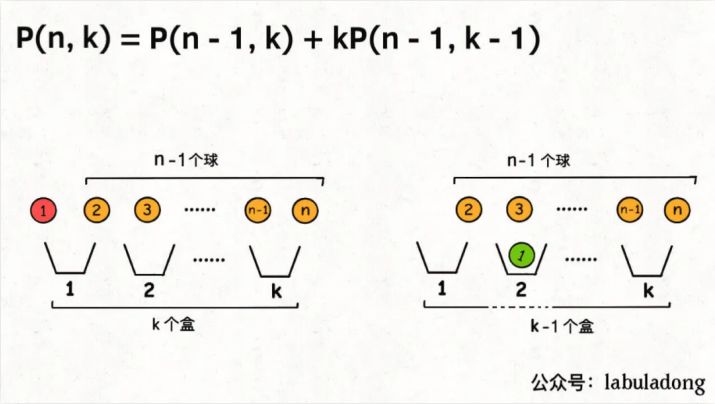


另外，你也可以站在球的视角，因为并不是每个球都会被装进盒子，所以球的视角分两种情况：

1、第一个球可以不装进任何一个盒子，这样的话你就需要将剩下 `n - 1` 个球放入 `k` 个盒子。

2、第一个球可以装进 `k` 个盒子中的任意一个，这样的话你就需要将剩下 `n - 1` 个球放入 `k - 1` 个盒子。

结合上述两种情况，可以得到：



你看，两种视角得到两个不同的递归式，但这两个递归式解开的结果都是我们熟知的阶乘形式：

$$
\begin{aligned}
& P(n, k) \\
= & \, nP(n-1, k-1) \\
= & \, P(n-1, k) + kP(n-1, k-1) \\
= & \, \frac{n!}{(n-k)!}
\end{aligned}
$$

至于如何解递归式，涉及数学的内容比较多，这里就不做深入探讨了，有兴趣的读者可以自行学习组合数学相关知识。

回到正题，这道算法题让我们求子集划分，子集问题和排列组合问题有所区别，但我们可以借鉴「球盒模型」的抽象，用两种不同的视角来解决这道子集划分问题。

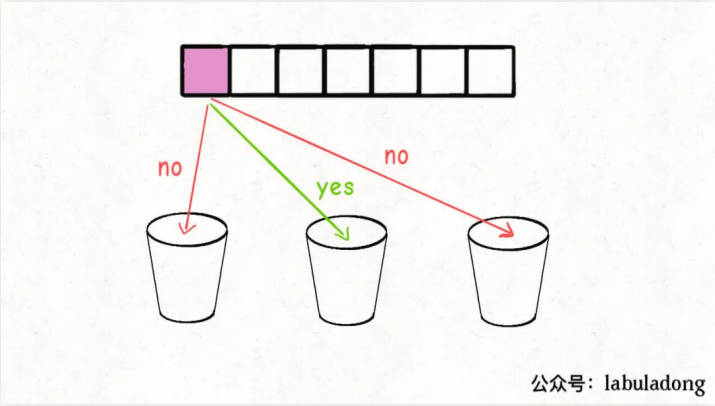
把装有 `n` 个数字的数组 `nums` 分成 `k` 个和相同的集合，你可以想象将 `n` 个数字分配到 `k` 个「桶」里，最后这 `k` 个「桶」里的数字之和要相同。

前文 回溯算法框架套路 说过，回溯算法的关键在哪里？

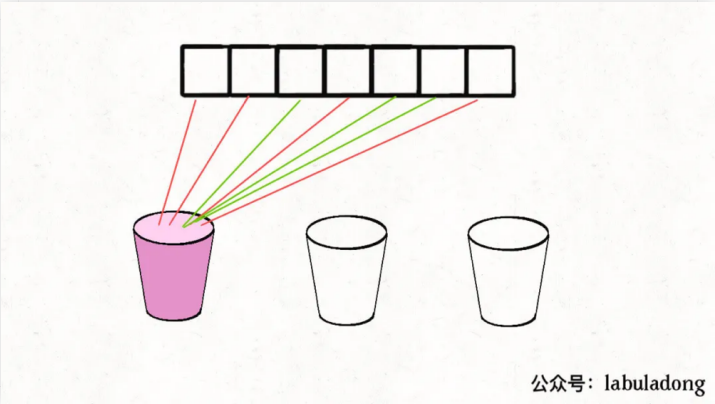
关键是要知道怎么「做选择」，这样才能利用递归函数进行穷举。

那么模仿排列公式的推导思路，将 `n` 个数字分配到 `k` 个桶里，我们也可以有两种视角：

视角一，如果我们切换到这 `n` 个数字的视角，每个数字都要选择进入到 `k` 个桶中的某一个。



视角二，如果我们切换到这 `k` 个桶的视角，对于每个桶，都要遍历 `nums` 中的 `n` 个数字，然后选择是否将当前遍历到的数字装进自己这个桶里。



你可能问，这两种视角有什么不同？

用不同的视角进行穷举，虽然结果相同，但是解法代码的逻辑完全不同，进而算法的效率也会不同；对比不同的穷举视角，可以帮你更深刻地理解回溯算法，我们慢慢道来。

二、以数字的视角

用 for 循环迭代遍历 `nums` 数组大家肯定都会：

```
for (int index = 0; index < nums.length; index++) {
    System.out.println(nums[index]);
}
```

递归遍历数组你会不会？其实也很简单：

```
void traverse(int[] nums, int index) {
    if (index == nums.length) {
        return;
    }
    System.out.println(nums[index]);
    traverse(nums, index + 1);
}
```

只要调用 `traverse(nums, 0)`，和 for 循环的效果是完全一样的。

那么回到这道题，以数字的视角，选择 `k` 个桶，用 for 循环写出来是下面这样：

```
// k 个桶（集合），记录每个桶装的数字之和
int[] bucket = new int[k];

// 穷举 nums 中的每个数字
for (int index = 0; index < nums.length; index++) {
    // 穷举每个桶
    for (int i = 0; i < k; i++) {
        // nums[index] 选择是否要进入第 i 个桶
        // ...
    }
}
```

如果改成递归的形式，就是下面这段代码逻辑：

```
// k 个桶（集合），记录每个桶装的数字之和
int[] bucket = new int[k];

// 穷举 nums 中的每个数字
void backtrack(int[] nums, int index) {
    // base case
    if (index == nums.length) {
        return;
    }
    // 穷举每个桶
```

```
    for (int i = 0; i < bucket.length; i++) {
        // 选择装进第 i 个桶
        bucket[i] += nums[index];
        // 递归穷举下一个数字的选择
        backtrack(nums, index + 1);
        // 撤销选择
        bucket[i] -= nums[index];
    }
}
```

虽然上述代码仅仅是穷举逻辑，还不能解决我们的问题，但是只要略加完善即可：

```
// 主函数
boolean canPartitionKSubsets(int[] nums, int k) {
    // 排除一些基本情况
    if (k > nums.length) return false;
    int sum = 0;
    for (int v : nums) sum += v;
    if (sum % k != 0) return false;

    // k 个桶（集合），记录每个桶装的数字之和
    int[] bucket = new int[k];
    // 理论上每个桶（集合）中数字的和
    int target = sum / k;
    // 穷举，看看 nums 是否能划分成 k 个和为 target 的子集
    return backtrack(nums, 0, bucket, target);
}

// 递归穷举 nums 中的每个数字
boolean backtrack(
    int[] nums, int index, int[] bucket, int target) {

    if (index == nums.length) {
        // 检查所有桶的数字之和是否都是 target
        for (int i = 0; i < bucket.length; i++) {
            if (bucket[i] != target) {
                return false;
            }
        }
        // nums 成功平分成 k 个子集
        return true;
    }

    // 穷举 nums[index] 可能装入的桶
    for (int i = 0; i < bucket.length; i++) {
        // 剪枝，桶装装满了
        if (bucket[i] + nums[index] > target) {
            continue;
```

```
            }
            // 将 nums[index] 装入 bucket[i]
            bucket[i] += nums[index];
            // 递归穷举下一个数字的选择
            if (backtrack(nums, index + 1, bucket, target)) {
                return true;
            }
            // 撤销选择
            bucket[i] -= nums[index];
        }

        // nums[index] 装入哪个桶都不行
        return false;
    }
```

有之前的铺垫，相信这段代码是比较容易理解的。这个解法虽然能够通过，但是耗时比较多，其实我们可以再做一个优化。

主要看 `backtrack` 函数的递归部分：

```
    for (int i = 0; i < bucket.length; i++) {
        // 剪枝
        if (bucket[i] + nums[index] > target) {
            continue;
        }

        if (backtrack(nums, index + 1, bucket, target)) {
            return true;
        }
    }
```

如果我们让尽可能多的情况命中剪枝的那个 if 分支，就可以减少递归调用的次数，一定程度上减少时间复杂度。

如何尽可能多的命中这个 if 分支呢？要知道我们的 `index` 参数是从 0 开始递增的，也就是递归地从 0 开始遍历 `nums` 数组。

如果我们提前对 `nums` 数组排序，把大的数字排在前面，那么大的数字会先被分配到 `bucket` 中，对于之后的数字，`bucket[i] + nums[index]` 会更大，更容易触发剪枝的 if 条件。

所以可以在之前的代码中再添加一些代码：

```
boolean canPartitionKSubsets(int[] nums, int k) {
    // 其他代码不变
    // ...
    /* 降序排序 nums 数组 */
    Arrays.sort(nums);
    for (i = 0, j = nums.length - 1; i < j; i++, j--) {
        // 交换 nums[i] 和 nums[j]
        int temp = nums[i];
        nums[i] = nums[j];
        nums[j] = temp;
    }
    /*******************/
    return backtrack(nums, 0, bucket, target);
}
```

由于 Java 的语言特性，这段代码通过先升序排序再反转，达到降序排列的目的。

三、以桶的视角

文章开头说了，**以桶的视角进行穷举，每个桶需要遍历 `nums` 中的所有数字，决定是否把当前数字装进桶中；当装满一个桶之后，还要装下一个桶，直到所有桶都装满为止**。

这个思路可以用下面这段代码表示出来：

```
// 装满所有桶为止
while (k > 0) {
    // 记录当前桶中的数字之和
    int bucket = 0;
    for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
        // 决定是否将 nums[i] 放入当前桶中
        bucket += nums[i] or 0;
        if (bucket == target) {
            // 装满了一个桶，装下一个桶
            k--;
            break;
        }
    }
}
```

那么我们也可以把这个 while 循环改写成递归函数，不过比刚才略微复杂一些，首先写一个 `backtrack` 递归函数出来：

```
boolean backtrack(int k, int bucket,
    int[] nums, int start, boolean[] used, int target);
```

不要被这么多参数吓到，我会一个个解释这些参数。**如果你能够透彻理解本文，也能得心应手地写出这样的回溯函数**。

这个 `backtrack` 函数的参数可以这样解释：

现在 `k` 号桶正在思考是否应该把 `nums[start]` 这个元素装进来；目前 `k` 号桶里面已经装的数字之和为 `bucket`；`used` 标志某一个元素是否已经被装到桶中；`target` 是每个桶需要达成的目标和。

根据这个函数定义，可以这样调用 `backtrack` 函数：

```
boolean canPartitionKSubsets(int[] nums, int k) {
    // 排除一些基本情况
    if (k > nums.length) return false;
    int sum = 0;
    for (int v : nums) sum += v;
    if (sum % k != 0) return false;

    boolean[] used = new boolean[nums.length];
    int target = sum / k;
    // k 号桶初始什么都没装，从 nums[0] 开始做选择
    return backtrack(k, 0, nums, 0, used, target);
}
```

实现 `backtrack` 函数的逻辑之前，再重复一遍，从桶的视角：

1、需要遍历 `nums` 中所有数字，决定哪些数字需要装到当前桶中。

2、如果当前桶装满了（桶内数字和达到 `target`），则让下一个桶开始执行第 1 步。

下面的代码就实现了这个逻辑：

```
boolean backtrack(int k, int bucket,
```

```
        int[] nums, int start, boolean[] used, int target) {
        // base case
        if (k == 0) {
            // 所有桶都被装满了，而且 nums 一定全部用完了
            // 因为 target == sum / k
            return true;
        }
        if (bucket == target) {
            // 装满了当前桶，递归穷举下一个桶的选择
            // 让下一个桶从 nums[0] 开始选数字
            return backtrack(k - 1, 0 ,nums, 0, used, target);
        }

        // 从 start 开始向后探查有效的 nums[i] 装入当前桶
        for (int i = start; i < nums.length; i++) {
            // 剪枝
            if (used[i]) {
                // nums[i] 已经被装入别的桶中
                continue;
            }
            if (nums[i] + bucket > target) {
                // 当前桶装不下 nums[i]
                continue;
            }
            // 做选择，将 nums[i] 装入当前桶中
            used[i] = true;
            bucket += nums[i];
            // 递归穷举下一个数字是否装入当前桶
            if (backtrack(k, bucket, nums, i + 1, used, target)) {
                return true;
            }
            // 撤销选择
            used[i] = false;
            bucket -= nums[i];
        }
        // 穷举了所有数字，都无法装满当前桶
        return false;
    }
```

这段代码是可以得出正确答案的，但是效率很低，我们可以思考一下是否还有优化的空间。

首先，在这个解法中每个桶都可以认为是没有差异的，但是我们的回溯算法却会对它们区别对待，这里就会出现重复计算的情况。

什么意思呢？我们的回溯算法，说到底就是穷举所有可能的组合，然后看是否能找

出和为 `target` 的 `k` 个桶（子集）。

那么，比如下面这种情况，`target = 5`，算法会在第一个桶里面装 `1, 4`：

现在第一个桶装满了，就开始装第二个桶，算法会装入 `2, 3`：

然后以此类推，对后面的元素进行穷举，凑出若干个和为 5 的桶（子集）。

但问题是，如果最后发现无法凑出和为 `target` 的 `k` 个子集，算法会怎么做？

回溯算法会回溯到第一个桶，重新开始穷举，现在它知道第一个桶里装 `1, 4` 是不可行的，它会尝试把 `2, 3` 装到第一个桶里：

现在第一个桶装满了，就开始装第二个桶，算法会装入 `1, 4`：

好，到这里你应该看出来问题了，这种情况其实和之前的那种情况是一样的。也就是说，到这里你其实已经知道不需要再穷举了，必然凑不出来和为 `target` 的 `k` 个子集。

但我们的算法还是会傻乎乎地继续穷举，因为在她看来，第一个桶和第二个桶里面装的元素不一样，那这就是两种不一样的情况呀。

那么我们怎么让算法的智商提高，识别出这种情况，避免冗余计算呢？

你注意这两种情况的 `used` 数组肯定长得一样，所以 `used` 数组可以认为是回溯过程中的「状态」。

所以，我们可以用一个 `memo` 备忘录，在装满一个桶时记录当前 `used` 的状态，如果当前 `used` 的状态是曾经出现过的，那就不用再继续穷举，从而起到剪枝避免冗余计算的作用。

有读者肯定会问，`used` 是一个布尔数组，怎么作为键进行存储呢？这其实是小问

题，比如我们可以把数组转化成字符串，这样就可以作为哈希表的键进行存储了。

看下代码实现，只要稍微改一下 `backtrack` 函数即可：

```
// 备忘录，存储 used 数组的状态
HashMap<String, Boolean> memo = new HashMap<>();

boolean backtrack(int k, int bucket, int[] nums, int start, boolean[] used, in
    // base case
    if (k == 0) {
        return true;
    }
    // 将 used 的状态转化成形如 [true, false, ...] 的字符串
    // 便于存入 HashMap
    String state = Arrays.toString(used);

    if (bucket == target) {
        // 装满了当前桶，递归穷举下一个桶的选择
        boolean res = backtrack(k - 1, 0, nums, 0, used, target);
        // 将当前状态和结果存入备忘录
        memo.put(state, res);
        return res;
    }

    if (memo.containsKey(state)) {
        // 如果当前状态曾今计算过，就直接返回，不要再递归穷举了
        return memo.get(state);
    }

    // 其他逻辑不变...
}
```

这样提交解法，发现执行效率依然比较低，这次不是因为算法逻辑上的冗余计算，而是代码实现上的问题。

因为每次递归都要把 `used` 数组转化成字符串，这对于编程语言来说也是一个不小的消耗，所以我们还可以进一步优化。

注意题目给的数据规模 `nums.length <= 16`，也就是说 `used` 数组最多也不会超过 16，那么我们完全可以用「位图」的技巧，用一个 int 类型的 `used` 变量来替代 `used` 数组。

具体来说，我们可以用整数 `used` 的第 `i` 位（`(used >> i) & 1`）的 1/0

来表示 `used[i]` 的 true/false。

这样一来，不仅节约了空间，而且整数 `used` 也可以直接作为键存入 HashMap，省去数组转字符串的消耗。

看下最终的解法代码：

```
public boolean canPartitionKSubsets(int[] nums, int k) {
    // 排除一些基本情况
    if (k > nums.length) return false;
    int sum = 0;
    for (int v : nums) sum += v;
    if (sum % k != 0) return false;

    int used = 0; // 使用位图技巧
    int target = sum / k;
    // k 号桶初始什么都没装，从 nums[0] 开始做选择
    return backtrack(k, 0, nums, 0, used, target);
}

HashMap<Integer, Boolean> memo = new HashMap<>();

boolean backtrack(int k, int bucket,
                  int[] nums, int start, int used, int target) {
    // base case
    if (k == 0) {
        // 所有桶都被装满了，而且 nums 一定全部用完了
        return true;
    }
    if (bucket == target) {
        // 装满了当前桶，递归穷举下一个桶的选择
        // 让下一个桶从 nums[0] 开始选数字
        boolean res = backtrack(k - 1, 0, nums, 0, used, target);
        // 缓存结果
        memo.put(used, res);
        return res;
    }

    if (memo.containsKey(used)) {
        // 避免冗余计算
        return memo.get(used);
    }

    for (int i = start; i < nums.length; i++) {
        // 剪枝
        if (((used >> i) & 1) == 1) { // 判断第 i 位是否是 1
```

```
            // nums[i] 已经被装入别的桶中
            continue;
        }
        if (nums[i] + bucket > target) {
            continue;
        }
        // 做选择
        used |= 1 << i; // 将第 i 位置为 1
        bucket += nums[i];
        // 递归穷举下一个数字是否装入当前桶
        if (backtrack(k, bucket, nums, i + 1, used, target)) {
            return true;
        }
        // 撤销选择
        used ^= 1 << i; // 使用异或运算将第 i 位恢复 0
        bucket -= nums[i];
    }

    return false;
}
```

至此，这道题的第二种思路也完成了。

四、最后总结

本文写的这两种思路都可以算出正确答案，不过第一种解法即便经过了排序优化，也明显比第二种解法慢很多，这是为什么呢？

我们来分析一下这两个算法的时间复杂度，假设 `nums` 中的元素个数为 `n`。

先说第一个解法，也就是从数字的角度进行穷举，`n` 个数字，每个数字有 `k` 个桶可供选择，所以组合出的结果个数为 `k^n`，时间复杂度也就是 `O(k^n)`。

第二个解法，每个桶要遍历 `n` 个数字，对每个数字有「装入」或「不装入」两种选择，所以组合的结果有 `2^n` 种；而我们有 `k` 个桶，所以总的时间复杂度为 `O(k*2^n)`。

当然，这是对最坏复杂度上界的粗略估算，实际的复杂度肯定要好很多，毕竟我们

添加了这么多剪枝逻辑。不过，从复杂度的上界已经可以看出第一种思路要慢很多了。

所以，谁说回溯算法没有技巧性的？虽然回溯算法就是暴力穷举，但穷举也分聪明的穷举方式和低效的穷举方式，关键看你以谁的「视角」进行穷举。

通俗来说，我们应该尽量「少量多次」，就是说宁可多做几次选择，也不要给太大的选择空间；宁可「二选一」选 `k` 次，也不要「`k` 选一」选一次。

好了，这道题我们从两种视角进行穷举，虽然代码量看起来多，但核心逻辑都是类似的，相信你通过本文能够更深刻地理解回溯算法。

————————————

上一篇
小而美的算法技巧：前缀和数组

下一篇
一文秒杀排列组合问题的 9 种题型