1349. 参加考试的最大学生数

ITCharge 大约 5 分钟

- 标签：位运算、数组、动态规划、状态压缩、矩阵
- 难度：困难

题目链接

- 1349. 参加考试的最大学生数 - 力扣

题目大意

描述：给定一个 $m \times n$ 大小的矩阵 $seats$ 表示教室中的座位分布，其中如果座位是坏的（不可用），就用 `'#'` 表示，如果座位是好的，就用 `'.'` 表示。

学生可以看到左侧、右侧、左上方、右上方这四个方向上紧邻他的学生答卷，但是看不到直接坐在他前面或者后面的学生答卷。

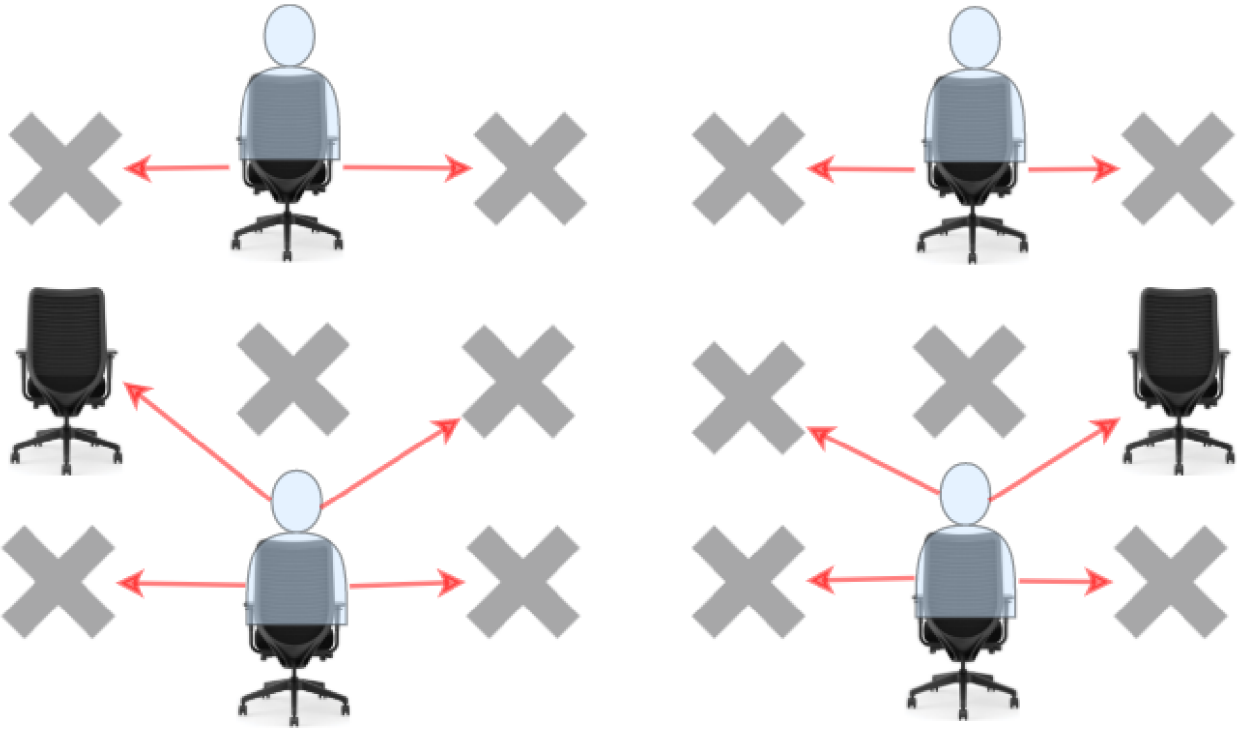
要求：计算并返回该考场可以容纳的　　参加考试且无法作弊的最大学生人数。

说明：

- 学生必须坐在状况良好的座位上。
- $seats$ 只包含字符 `'.'` 和 `'#'`。
- $m == seats.length$。
- $n == seats[i].length$。
- $1 \le m \le 8$。
- $1 \le n \le 8$。

示例：

- 示例 1：



```py
输入：seats = [["#",".","#","#",".","#"],
              [".","#","#","#","#","."],
              ["#",".","#","#",".","#"]]
输出：4
解释：教师可以让 4 个学生坐在可用的座位上，这样他们就无法在考试中作弊。
```

- 示例 2:

```py
输入：seats = [[".","#"],
              ["#","#"],
              ["#","."],
              ["#","#"],
              [".","#"]]
输出：3
解释：让所有学生坐在可用的座位上。
```

解题思路

思路 1：状态压缩 DP

题目中给定的 m、n 范围为 $1 \leq m, n \leq 8$，每一排最多有 8 个座位，那么我们可以使用一个 8 位长度的二进制数来表示当前排座位的选择情况（也就是「状态压缩」的方式）。

同时从题目中可以看出，当前排的座位与当前行左侧、右侧座位有关，并且也与上一排中左上方、右上方的座位有关，则我们可以使用一个二维数组来表示状态。其中第一维度为排数，第二维度为当前排的座位选择情况。

具体做法如下：

1. 划分阶段

按照排数、当前排的座位选择情况进行阶段划分。

2. 定义状态

定义状态 $dp[i][state]$ 表示为：前 i 排，并且最后一排座位选择状态为 $state$ 时，可以参加考试的最大学生数。

3. 状态转移方程

因为学生可以看到左侧、右侧、左上方、右上方这四个方向上紧邻他的学生答卷，所以对于当前排的某个座位来说，其左侧、右侧、左上方、右上方都不应有人坐。我们可以根据当前排的座位选取状态 cur_state，并通过枚举的方式，找出符合要求的上一排座位选取状态 pre_state，并计算出当前排座位选择个数，即 $f(cur\_state)$，则状态转移方程为：

$$dp[i][state] = \max\{dp[i-1][pre\_state]\} + f(state)$$

因为所给座位中还有坏座位（不可用）的情况，我们可以使用一个 8 位的二进制数 bad_seat 来表示当前排的坏座位情况，如果 $cur\_state \ \& \ bad\_seat == 1$，则说明当前状态下，选择了坏椅子，则可直接跳过这种状态。

我们还可以通过 $cur\_state \ \& \ (cur\_state << 1)$ 和 $cur\_state \& (cur\_state >> 1)$ 来判断当前排选择状态下，左右相邻座位上是否有人，如果有人，则可直接跳过这种状态。

同理，我们还可以通过 $cur\_state \ \& \ (pre\_state << 1)$ 和 $cur\_state \ \& \ (pre\_state >> 1)$ 来判断当前排选择状态下，上一行左上、右上相邻座位上是否有人，如果有人，则可直接跳过这种状态。

4. 初始条件

- 默认情况下，前 0 排所有选择状态下，可以参加考试的最大学生数为 0。

5. 最终结果

根据我们之前定义的状态，$dp[i][state]$ 表示为：前 i 排，并且最后一排座位选择状态为 $state$ 时，可以参加考试的最大学生数。 所以最终结果为最后一排 $dp[rows]$ 中的最大值。

思路 1：代码

```py
class Solution:
    def maxStudents(self, seats: List[List[str]]) -> int:
        rows, cols = len(seats), len(seats[0])
        states = 1 << cols
        dp = [[0 for _ in range(    es)] for _ in range(rows + 1)]

        for i in range(1, rows + 1):                    # 模拟 1 ~ rows 排分配座位
            bad_seat = 0                                # 当前排的坏座位情况
            for j in range(cols):
                if seats[i - 1][j] == '#':              # 记录坏座位情况
                    bad_seat |= 1 << j

            for cur_state in range(states):             # 枚举当前排的座位选取状态
                if cur_state & bad_seat:                # 当前排的座位选择了换座位，跳过
                    continue
                if cur_state & (cur_state << 1):        # 当前排左侧座位有人，跳过
                    continue
                if cur_state & (cur_state >> 1):        # 当前排右侧座位有人，跳过
                    continue

                count = bin(cur_state).count('1')       # 计算当前排最多可以坐多少人
                for pre_state in range(states):         # 枚举前一排情况
```

```
                    if cur_state & (pre_state << 1):    # 左上座位有人，跳过
                        continue
                    if cur_state & (pre_state >> 1):    # 右上座位有人，跳过
                        continue
                    # dp[i][cur_state] 取自上一排分配情况为 pre_state 的最大值 +
当前排最多可以坐的人数
                    dp[i][cur_state] = max(dp[i][cur_state], dp[i - 1]
[pre_state] + count)

        return max(dp[rows])
```

思路 1：复杂度分析

- **时间复杂度**：$O(m \times 2^{2n})$，其中 m、n 分别为所给矩阵的行数、列数。
- **空间复杂度**：$O(m \times 2^{n})$。