如何计算完全二叉树的节点数

通知： **数据结构精品课 V1.6 持续更新中，** **第八期打卡挑战 开始报名。**

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

牛客	LeetCode	力扣	难度
-	222. Count Complete Tree Nodes	222. 完全二叉树的节点个数	🟠

——————

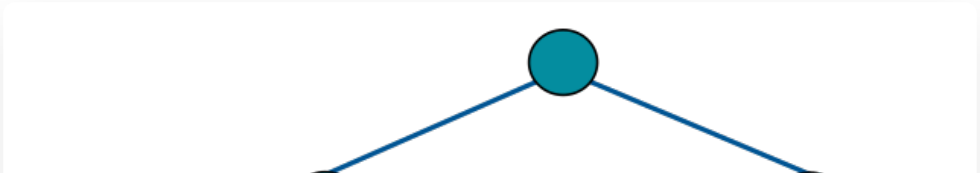
如果让你数一下一棵普通二叉树有多少个节点，这很简单，只要在二叉树的遍历框架上加一点代码就行了。

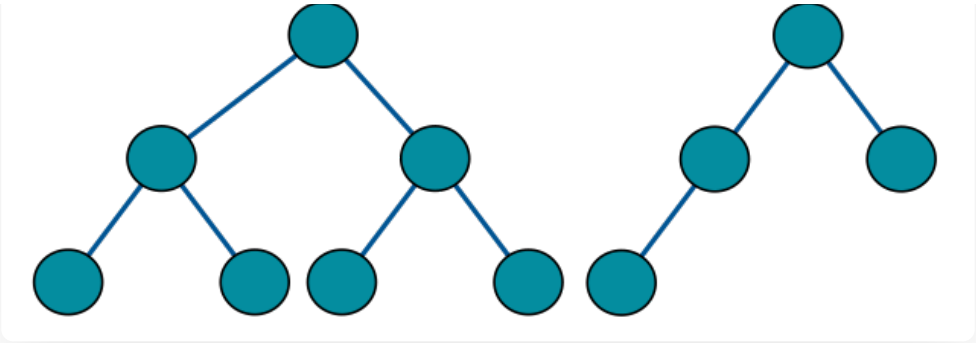
但是，力扣第第 222 题「完全二叉树的节点个数」给你一棵完全二叉树，让你计算它的节点个数，你会不会？算法的时间复杂度是多少？

这个算法的时间复杂度应该是 O(logN*logN)，如果你心中的算法没有达到这么高效，那么本文就是给你写的。

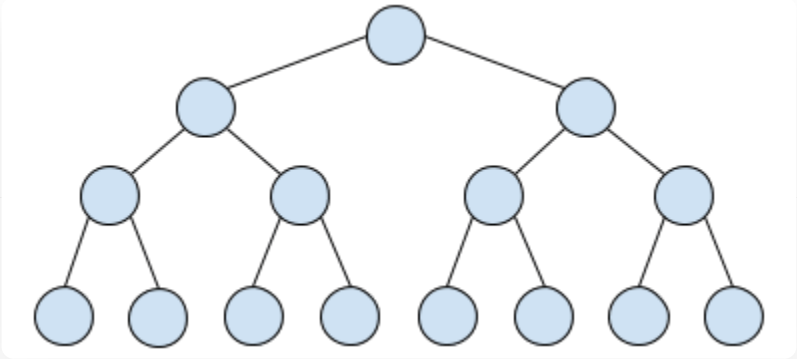
首先要明确一下两个关于二叉树的名词「完全二叉树」和「满二叉树」。

我们说的**完全二叉树**如下图，每一层都是紧凑靠左排列的：

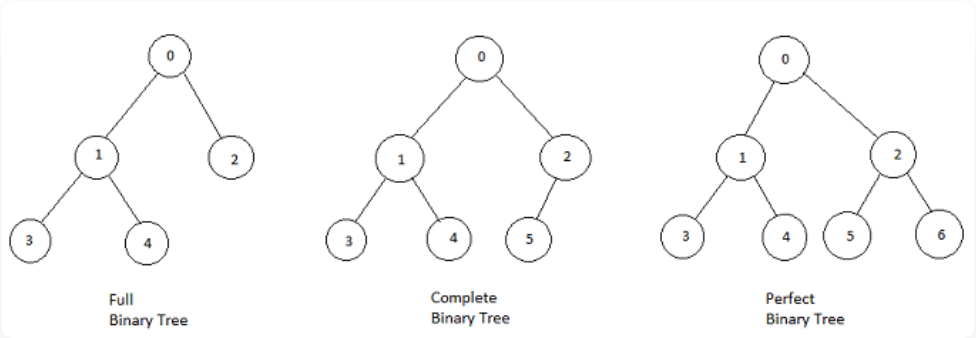




我们说的**满二叉树**如下图，是一种特殊的完全二叉树，每层都是是满的，像一个稳定的三角形：



说句题外话，关于这两个定义，中文语境和英文语境似乎有点区别，我们说的完全二叉树对应英文 Complete Binary Tree，没有问题。但是我们说的满二叉树对应英文 Perfect Binary Tree，而英文中的 Full Binary Tree 是指一棵二叉树的所有节点要么没有孩子节点，要么有两个孩子节点。如下：



以上定义出自 wikipedia，这里就是顺便一提，其实名词叫什么都无所谓，重要的是算法操作。**本文就按我们中文的语境，记住「满二叉树」和「完全二叉树」的区别，等会会用到。**

一、思路分析

现在回归正题，如何求一棵完全二叉树的节点个数呢？

```
// 输入一棵完全二叉树，返回节点总数
int countNodes(TreeNode root);
```

如果是一个**普通**二叉树，显然只要向下面这样遍历一边即可，时间复杂度 O(N)：

```
public int countNodes(TreeNode root) {
    if (root == null) return 0;
    return 1 + countNodes(root.left) + countNodes(root.right);
}
```

那如果是一棵**满**二叉树，节点总数就和树的高度呈指数关系：

```
public int countNodes(TreeNode root) {
    int h = 0;
    // 计算树的高度
    while (root != null) {
        root = root.left;
        h++;
    }
    // 节点总数就是 2^h - 1
    return (int)Math.pow(2, h) - 1;
}
```

完全二叉树比普通二叉树特殊，但又没有满二叉树那么特殊，计算它的节点总数，可以说是普通二叉树和完全二叉树的结合版，先看代码：

```
public int countNodes(TreeNode root) {
    TreeNode l = root, r = root;
```

```
        // 沿最左侧和最右侧分别计算高度
        int hl = 0, hr = 0;
        while (l != null) {
            l = l.left;
            hl++;
        }
        while (r != null) {
            r = r.right;
            hr++;
        }
        // 如果左右侧计算的高度相同，则是一棵满二叉树
        if (hl == hr) {
            return (int)Math.pow(2, hl) - 1;
        }
        // 如果左右侧的高度不同，则按照普通二叉树的逻辑计算
        return 1 + countNodes(root.left) + countNodes(root.right);
    }
```

结合刚才针对满二叉树和普通二叉树的算法，上面这段代码应该不难理解，就是一个结合版，但是**其中降低时间复杂度的技巧是非常微妙的**。

二、复杂度分析

开头说了，这个算法的时间复杂度是 O(logN*logN)，这是怎么算出来的呢？

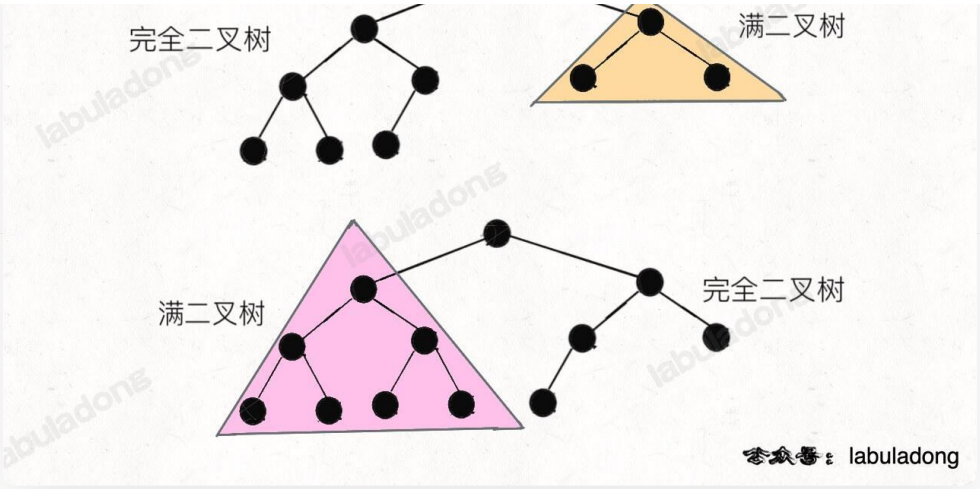
直觉感觉好像最坏情况下是 O(N*logN) 吧，因为之前的 while 需要 logN 的时间，最后要 O(N) 的时间向左右子树递归：

```
return 1 + countNodes(root.left) + countNodes(root.right);
```

关键点在于，这两个递归只有一个会真的递归下去，另一个一定会触发 `hl == hr` 而立即返回，不会递归下去。

为什么呢？原因如下：

一棵完全二叉树的两棵子树，至少有一棵是满二叉树：



看图就明显了吧，由于完全二叉树的性质，其子树一定有一棵是满的，所以一定会触发 `hl == hr`，只消耗 O(logN) 的复杂度而不会继续递归。

综上，算法的递归深度就是树的高度 O(logN)，每次递归所花费的时间就是 while 循环，需要 O(logN)，所以总体的时间复杂度是 O(logN*logN)。

所以说，「完全二叉树」这个概念还是有它存在的原因的，不仅适用于数组实现二叉堆，而且连计算节点总数这种看起来简单的操作都有高效的算法实现。

- - - - - - - - - - - - - -

《labuladong 的算法小抄》已经出版，关注公众号查看详情；后台回复关键词「进群」可加入算法群；回复「PDF」可获取精华文章 PDF:

共同维护高质量学习环境，评论礼仪见这里，违者直接拉黑不解释

12 Comments - *powered by utteranc.es*

Gipbear commented on Jan 4, 2022

牛啊牛啊，学到了！