МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КПІ»

Кафедра інформаційних систем та технологій

Звіт

з лабораторної роботи № 8

«Розв'язання задачі Коші»

з дисципліни

«Спеціальні розділи математики-2. Чисельні методи»

Варіант № 23

Перевірила:

доц. Рибачук Людмила Віталіївна

Виконала: Павлова Софія

Студентка гр. ІС-12 , ФІОТ

1 курс,

залікова книжка № ІС-1224

Київ 2022

ХІД РОБОТИ

Завдання 1:

Методами Рунге-Кутта та Адамса розв'язати задачу Коші. На початку інтервалу у необхідній кількості точок значення для методу Адамса визначити методом Рунге-Кутта четвертого порядку.

Для фіксованого h потрібно навести:

- значення наближеного розв'язку $y(x)$ у тих самих точках, одержані обома методами;
- значення функції помилки $\varepsilon(x)$ для обох методів;
- графіки:
  - обох наближених - на одному малюнку;
  - обох помилок - на другому малюнку.

Розв'язати задане рівняння за допомогою Matchad, порівняти із власними результатами.

Розв'язати за допомогою Matchad систему рівнянь, побудувати графік y_0 та фазовий портрет системи $u^{<2>}(u^{<1>})$, зробити висновки щодо стійкості системи.

Варіант 23:

21 - 25	$y' = \dfrac{\cos y}{a+x} + y^2,\ a = 1{,}0 + 0{,}4k,\ k = №вар - 20.$	[0; 2]

Взяти крок h = 0,1. Якщо вимоги на величину τ (див. метод Рунге-Кутта) для даного кроку не виконано, подрібнити крок. Початкові умови $y(0)=0$. Відрізок, що розглядається: [0; 1].

Розв'язати за допомогою Matchad систему рівнянь

$$y_0' = y_1$$

$$y_1' = -y_0 + \frac{(k-10)}{10}\cdot y_1,$$

де $y_0(0) = 0.1$, $y_1(0) = 0$, k – № варіанту, тобто № у списку групи.

<u>*Скріни з Mathcad:*</u>

Лабораторна робота №8
Варіант №23
Виконала: Павлова Софія, ІС-12

1. Задамо вхідні дані:

$a:=0$ $\quad b:=2$ - початок і кінець інтервалу

$M:=20$ - кількість кроків

2. Використаємо метод Рунге-Кутта для розв'язання рівняння Коші засобами Mathcad:

$D0(x,y):=\left[\dfrac{\cos(y_0)}{2.2+x}+{y_0}^2\right]$ $\quad y0:=[0]$ - вектор початкового значення функції

Для цього застосуємо програмні засоби Mathcad, а саме функцію
rkfixed(y0, t0, t1, M, D)*, де*
y0 — вектор початкових значень в точці t0 розміру NXI;
t0 — початкова точка розрахунку,
t1 — кінцева точка розрахунку,
M — число кроків, на яких чисельний метод знаходить рішення;
*D — векторна функція розміру N*1 двох аргументів — скалярного t та векторного y . При цьому y — шукана векторна функція аргументу t того ж розміру N*1.*

$$u0:=\mathrm{rkfixed}(y0,a,b,M,D0)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0.1 & 0.044504\\ 0.2 & 0.08742\\ 0.3 & 0.129189\\ 0.4 & 0.170225\\ 0.5 & 0.210927\\ 0.6 & 0.251688\\ 0.7 & 0.292911\\ 0.8 & 0.335022\\ 0.9 & 0.378481\\ 1 & 0.423805\\ 1.1 & 0.471587\\ 1.2 & 0.52253\\ 1.3 & 0.577482\\ 1.4 & 0.637496\\ 1.5 & 0.703909\\ 1.6 & 0.778462\\ 1.7 & 0.863479\\ 1.8 & 0.962152\\ 1.9 & 1.079012\\ 2 & 1.22074\end{bmatrix}$$

- отримаємо наближені значення рівняння Коші на заданому проміжку методом Рунге-Кутта

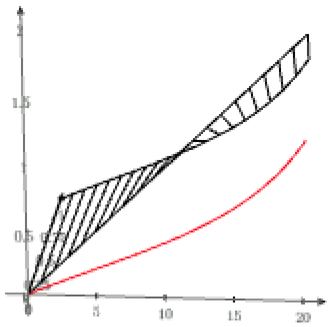
3. Використаємо метод Адамса для розв'язання рівняння Коші засобами Mathcad:

Для цього застосуємо програмні засоби Mathcad, а саме функцію ***Adams(y0, t0, t1, M, D)****, де*
y0 — вектор початкових значень в точці t0 розміру NXI;
t0 — початкова точка розрахунку,
t1 — кінцева точка розрахунку,
M — число кроків, на яких чисельний метод знаходить рішення;
*D — векторна функція розміру N*1 двох аргументів — скалярного t та векторного y . При цьому y — шукана векторна функція аргументу t того ж розміру N*1.*

$$u1 := \mathrm{Adams}(y0, a, b, M, D0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.044504 \\ 0.2 & 0.08742 \\ 0.3 & 0.129189 \\ 0.4 & 0.170226 \\ 0.5 & 0.210927 \\ 0.6 & 0.251689 \\ 0.7 & 0.292912 \\ 0.8 & 0.335022 \\ 0.9 & 0.378482 \\ 1 & 0.423806 \\ 1.1 & 0.471589 \\ 1.2 & 0.522532 \\ 1.3 & 0.577484 \\ 1.4 & 0.637498 \\ 1.5 & 0.703912 \\ 1.6 & 0.778466 \\ 1.7 & 0.863483 \\ 1.8 & 0.962155 \\ 1.9 & 1.079017 \\ 2 & 1.220745 \end{bmatrix}$$

- отримаємо наближені значення рівняння Коші на заданому проміжку методом Адамса

4. Побудуємо графіки порівняння наближення, отриманого методом Рунге-Кутта та Адамса за допомогою засобів Mathcad:



- такого вигляду набуває поверхня Коші

$u0$

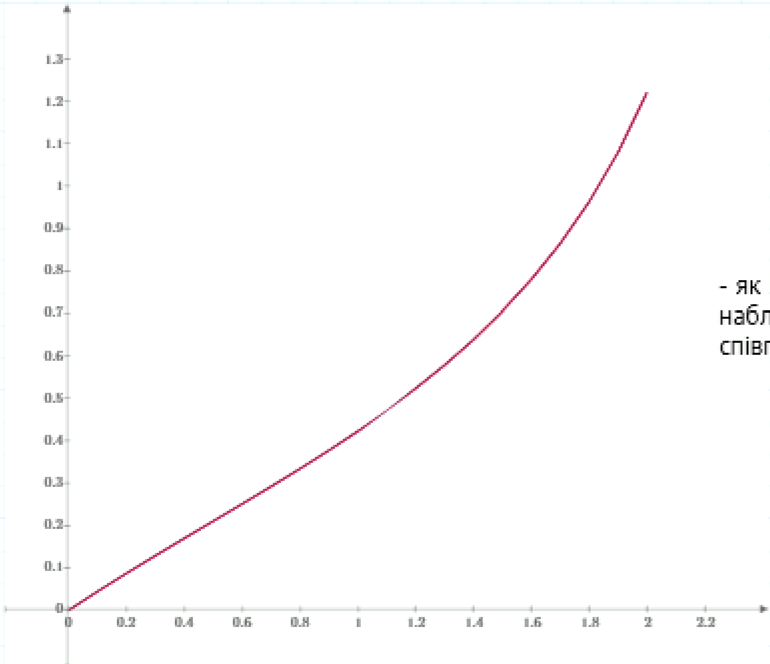
$u1$

$u0^{\langle 1 \rangle}$

Для того, щоб побудувати графік наближеного рішення потрібно відокремити одну з двох обмежуючих прямих з попереднього графіка, позначену червоним.

$u0^{\langle 1 \rangle}$

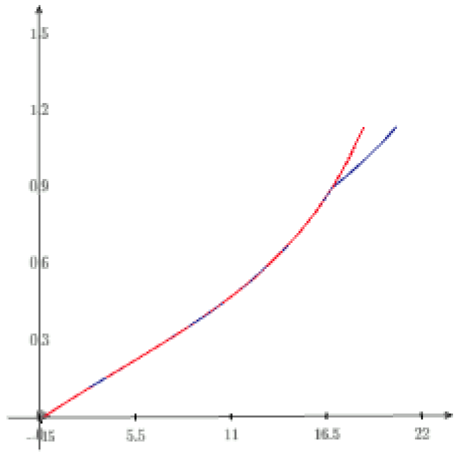
$u1^{\langle 1 \rangle}$



- як видно з графіків, наближення майже співпадають

$u0^{\langle 0 \rangle}$

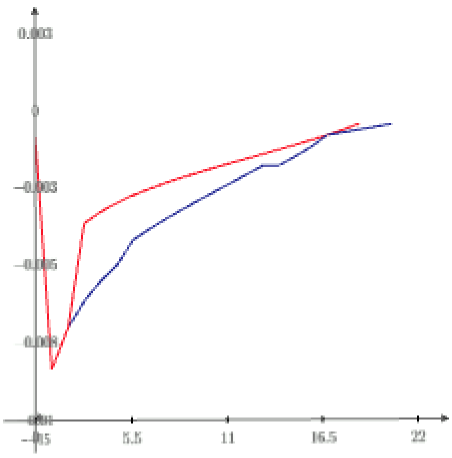
$u1^{\langle 0 \rangle}$



- на даному графіку зображено порівняння наближень, отриманих обома методами програмно

$\boldsymbol{u0\_p}$

$\boldsymbol{u1\_p}$



- на даному графіку зображено порівняння похибок, отриманих обома методами програмно

$\boldsymbol{e0\_p}$

$\boldsymbol{e1\_p}$

6. Розв'яжемо за допомогою засобів Mathcad систему диференціальних рівнянь:

$$D(x,y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ -y_0 + 0.3 \cdot y_1 \end{bmatrix} \qquad y0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$ - вектор початкових значень

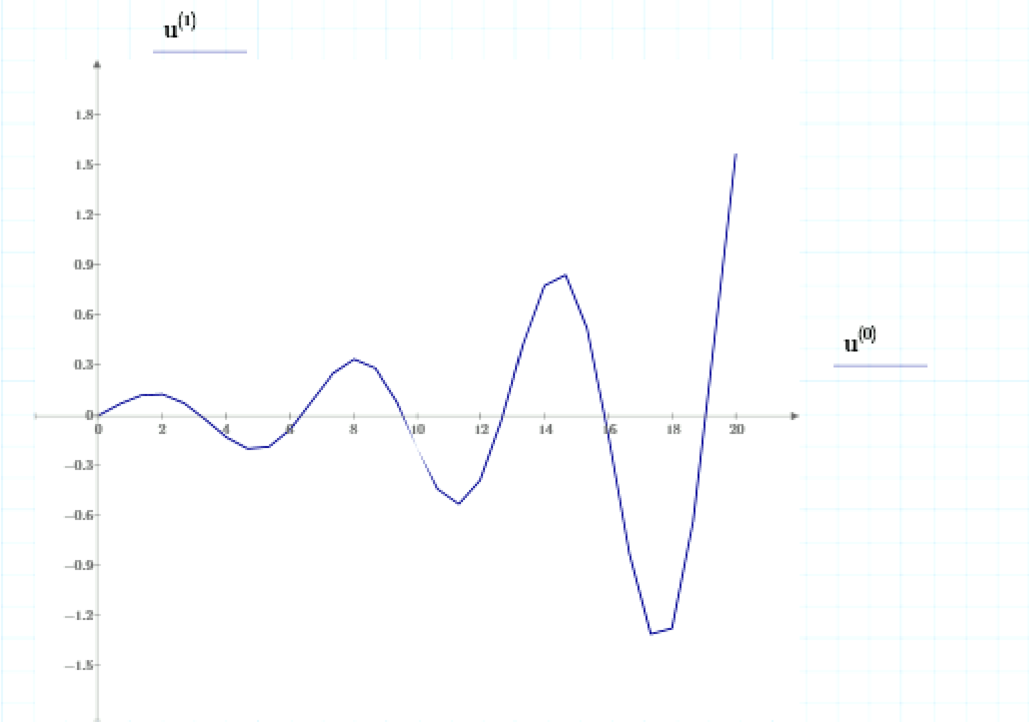
$a := 0$ $\quad b := 20$ - початок і кінець інтервалу

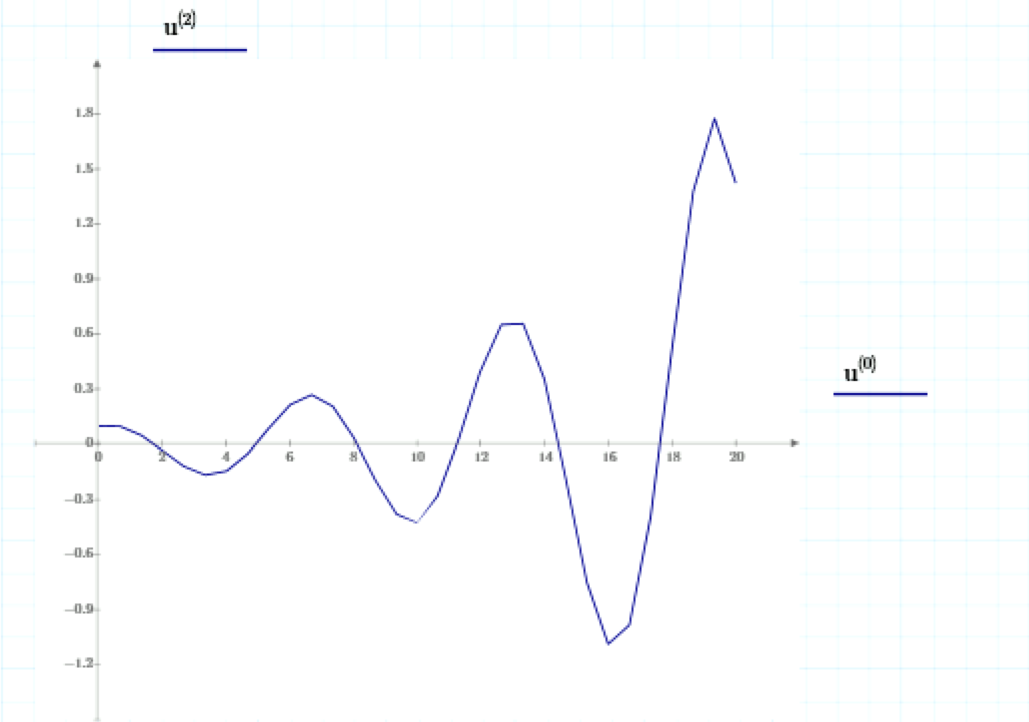
$M := 30$ - кількість кроків

Використаємо для цього метод Рунге-Кутта:

$$u := \mathrm{rkfixed}(y0, a, b, M, D) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 \\ 0.666667 & 0.068368 & 0.097556 \\ 1.333333 & 0.119371 & 0.048429 \\ 2 & 0.12508 & -0.034366 \\ 2.666667 & 0.072873 & -0.11904 \\ 3.333333 & -0.02524 & -0.165952 \\ 4 & -0.132904 & -0.144639 \\ 4.666667 & -0.201284 & -0.05024 \\ 5.333333 & -0.189427 & 0.088601 \\ 6 & -0.08537 & 0.215943 \\ 6.666667 & 0.081862 & 0.26903 \\ 7.333333 & 0.247002 & 0.206487 \\ 8 & 0.331474 & 0.03257 \\ 8.666667 & 0.277652 & -0.194848 \\ 9.333333 & 0.080704 & -0.37991 \\ 10 & -0.197558 & -0.425799 \\ 10.666667 & -0.443319 & -0.280325 \\ 11.333333 & -0.533209 & 0.029615 \\ 12 & -0.390565 & 0.393435 \\ 12.666667 & -0.031929 & 0.650839 \\ 13.333333 & 0.420365 & 0.656759 \\ 14 & 0.772884 & 0.353311 \\ 14.666667 & 0.837022 & -0.18373 \\ 15.333333 & 0.519273 & -0.751493 \\ 16 & -0.113704 & -1.08814 \\ 16.666667 & -0.831542 & -0.983805 \\ 17.333333 & -1.313271 & -0.391249 \\ 18 & -1.279301 & 0.51617 \\ 18.666667 & -0.632746 & 1.378185 \\ 19.333333 & 0.454735 & 1.777092 \\ 20 & 1.565313 & 1.422761 \end{bmatrix}$$

За отриманими даними побудуємо графіки y0 та фазовий портрет системи:





- графіки розв'язку системи

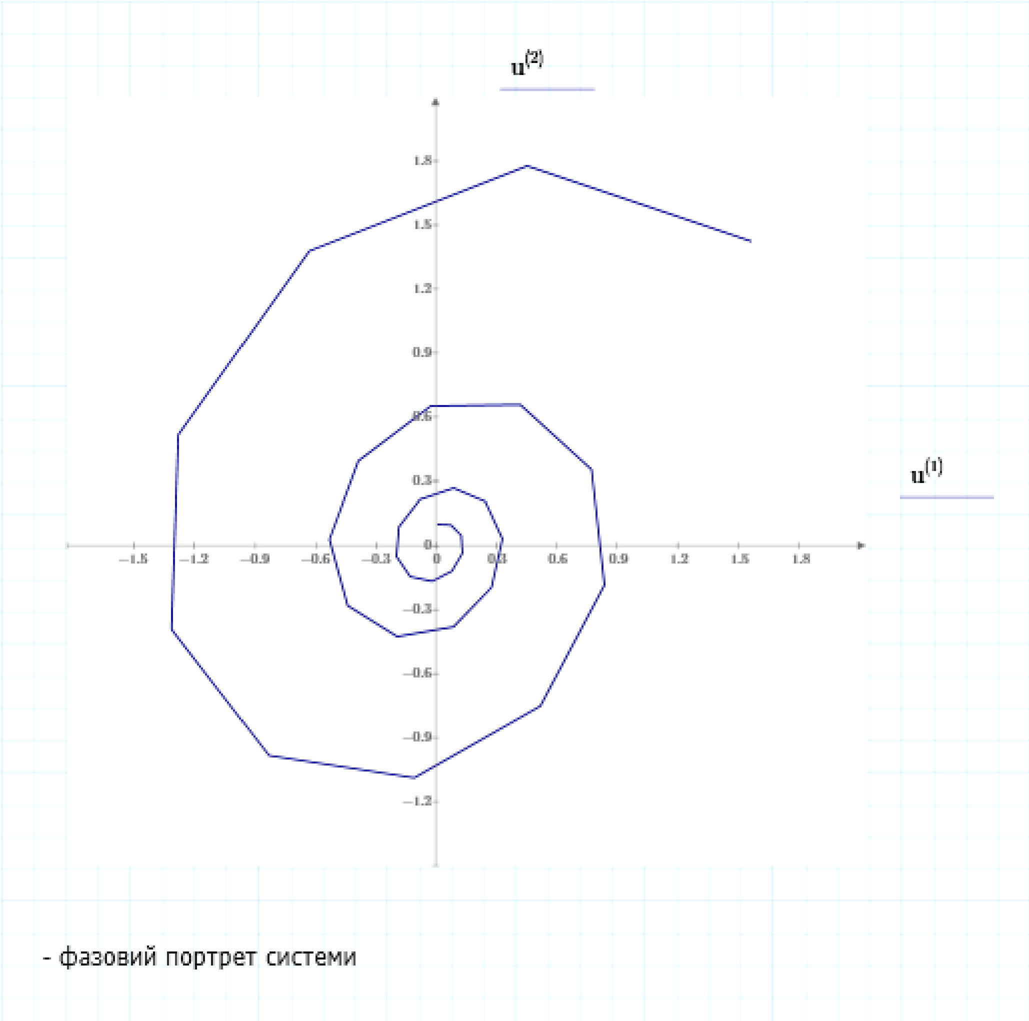


Рис. 1. Результат виконання завдання 1 у Mathcad

Код:

```
using System;

namespace chm2_lab_8
{
    class Program
    {
        static void Main(string[] args)
        {
            Console.WriteLine("y' = f(x,y)\nf(x,y) = y^2 + cos(y) / (2.2 + x), [0;2]");
            RungeKutte();
            Adams();
        }

        static double Function(double x, double y)
        {
            return Math.Pow(y, 2) + Math.Cos(y) / (2.2 + x);
        }

        static void RungeKutte()
        {
            double k1, k2, k3, k4, h = 0.1, e;
            int n = 300;
            double[] x = new double[n + 2];
            double[] y = new double[n + 2];
```

```
            int i = 0;
            Console.WriteLine("\nМЕТОД \"Рунге-Кутта\":");
            Console.WriteLine("x\ty\t\tПохибка");
            do
            {
                do
                {
                    x[i + 1] = x[i] + h;
                    k1 = Function(x[i], y[i]);
                    k2 = Function(x[i] + (h / 2), y[i] + (h * k1 / 2));
                    k3 = Function(x[i] + (h / 2), y[i] + (h * k2 / 2));
                    k4 = Function(x[i] + h, y[i] + (h * k3));
                    e = (Math.Pow(y[i], h) - Math.Pow(y[i], h / 2)) / (Math.Pow(2, 4) - 1);

                    if (Math.Abs((k2 - k3) / (k1 - k2)) > 0.09) h /= 2;
                } while (Math.Abs((k2 - k3) / (k1 - k2)) > 0.09);

                y[i + 1] = y[i] + (h / 6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
                Console.WriteLine($"{x[i]:f1}\t{y[i]:f6}\t{e:f6}");
                i++;
            } while (x[i] < 2 + h);
        }
        static void Adams()
        {
            double k1, k2, k3, k4, h = 0.1, e, y_inter;
            int n = 100;
            double[] x = new double[n + 1];
            double[] y = new double[n + 1];
            Console.WriteLine("\nМЕТОД \"Адамса\":");

            Console.WriteLine("x\ty\t\tПохибка");
            int i = 0;
            do
            {
                do
                {
                    x[i + 1] = x[i] + h;
                    k1 = Function(x[i], y[i]);
                    k2 = Function(x[i] + (h / 2), y[i] + (h * k1 / 2));
                    k3 = Function(x[i] + (h / 2), y[i] + (h * k2 / 2));
                    k4 = Function(x[i] + h, y[i] + (h * k3));
                    e = (Math.Pow(y[i], h) - Math.Pow(y[i], h / 2)) / (Math.Pow(2, 4) - 1);

                    if (Math.Abs((k2 - k3) / (k1 - k2)) > 0.09) h /= 2;
                } while (Math.Abs((k2 - k3) / (k1 - k2)) > 0.09);
                Console.WriteLine($"{x[i]:f1}\t{y[i]:f6}\t{e:f6}");
                y[i + 1] = y[i] + (h / 6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
                i++;
            } while (i < 3);
            h /= 2;
            int j = 3;
            do
            {
                do
                {
                    x[j + 1] = x[j] + h;
                    y[j + 1] = y[j] + (h / 24) * (55 * Function(x[j], y[j]) - 59 * Function(x[j -
1], y[j - 1]) + 37 * Function(x[j - 2], y[j - 2]) - 9 * Function(x[j - 3], y[j - 3]));
                    y_inter = y[j] + (h / 24) * (9 * Function(x[j + 1], y[j + 1]) + 19 *
Function(x[j], y[j]) - 5 * Function(x[j - 1], y[j - 1]) + Function(x[j - 2], y[j - 2]));
                    if (Math.Abs(y_inter - y[j + 1]) > 0.09) h /= 2;
                }
                while (Math.Abs(y_inter - y[j + 1]) > 0.01);
                e = (Math.Pow(y[j], h) - Math.Pow(y[j], h / 2)) / (Math.Pow(2, 4) - 1);
                if (j % 2 != 0) Console.WriteLine($"{x[j]:f1}\t{y[j]:f6}\t{e:f6}");
                j++;
            }
            while (x[j] < 2 + h);
        }
```

```
    }
}
```

Скріншот виконання програми:

Microsoft Visual Studio Debug Console

```
y' = f(x,y)
f(x,y) = y^2 + cos(y) / (2.2 + x), [0;2]

МЕТОД "Рунге-Кутта":
x       y               Похибка
0,0     0,000000        0,000000
0,1     0,044504        -0,008223
0,2     0,087420        -0,006771
0,3     0,129189        -0,005854
0,4     0,170225        -0,005170
0,5     0,210927        -0,004617
0,6     0,251688        -0,004147
0,7     0,292911        -0,003733
0,8     0,335022        -0,003359
0,9     0,378481        -0,003011
1,0     0,423805        -0,002683
1,1     0,471587        -0,002368
1,2     0,522530        -0,002061
1,3     0,577482        -0,001756
1,4     0,637496        -0,001451
1,5     0,703909        -0,001140
1,6     0,778462        -0,000819
1,7     0,863479        -0,000484
1,8     0,962152        -0,000064
1,9     1,017955        0,000030
1,9     1,079013        0,000127
2,0     1,146233        0,000229
2,0     1,220741        0,000335

МЕТОД "Адамса":
x       y               Похибка
0,0     0,000000        0,000000
0,1     0,044504        -0,008223
0,2     0,087420        -0,006771
0,3     0,129189        -0,003159
0,4     0,170300        -0,002761
0,5     0,210904        -0,002447
0,6     0,251665        -0,002184
0,7     0,292887        -0,001955
0,8     0,334996        -0,001750
0,9     0,378453        -0,001562
1,0     0,423775        -0,001386
1,1     0,471554        -0,001218
1,2     0,522493        -0,001056
1,3     0,577439        -0,000897
1,4     0,637447        -0,000738
1,5     0,703851        -0,000578
1,6     0,778392        -0,000414
1,7     0,863390        -0,000243
1,8     0,962036        -0,000064
1,9     1,078853        0,000127
2,0     1,220506        0,000335
```

Рис. 2. Результат виконання завдання 1 програмно

ВИСНОВОК

У ході виконання лабораторної роботи я дізналася про методи розв’язання звичайних диференціальних рівнянь та систем таких рівнянь, а саме про методи Рунге-Кутта та Адамса.

У результаті виконання завдання лабораторної роботи було отримано значення наближеного розв’язку поставлених задач за допомогою обох методів і побудовано відповідні графіки. Отримані двома розглянутими методами значення майже співпадають, що свідчить про правильність виконання завдання.

Метод Рунге-Кутта має порядок точності h^4. Оцінити похибку даного методу досить важко. Наближену оцінку похибки можна отримати за допомогою методу Рунге, який було використано в лабораторній роботі.

Екстраполяційна та інтерполяційна формули Адамса мають достатньо велику точність. Вони дають похибку порядку h^4, але самі формули оцінки похибки достатньо складні.