МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КПІ»

Кафедра інформаційних систем та технологій

Звіт

з лабораторної роботи № 6

«Розв’язання нелінійних рівнянь»

з дисципліни

«Спеціальні розділи математики-2. Чисельні методи»

Варіант № 23

Перевірила:

доц. Рибачук Людмила Віталіївна

Виконала: Павлова Софія

Студентка гр. ІС-12 , ФІОТ

1 курс,

залікова книжка № ІС-1224

Київ 2022

ХІД РОБОТИ

Завдання 1:

1. Допрограмовий етап: визначити кількість дійсних коренів рівняння, відокремити корені рівняння (письмово) (див. теореми про верхню та нижню границі, Гюа, метод поліномів Штурма). Результатом є висновок: перший корінь належить проміжку […], другий корінь належить проміжку […] і т.д.
2. Програмний етап: уточнити корені рівняння:
   2.1. методом бісекції;
   2.2. методом хорд;
   2.3. методом Ньютона (дотичних).

Критерієм закінчення ітераційного процесу мають бути нерівності:

- для методу бісекції (інтервальний метод; a та b - кінці інтервалу)

$$|\mathbf{b - a}| < \boldsymbol{\varepsilon} \text{ та } |\mathbf{f(x_k)}| < \boldsymbol{\varepsilon}$$

- для методів хорд та дотичних

$$|\mathbf{x_k - x_{k-1}}| < \boldsymbol{\varepsilon} \text{ та } |\mathbf{f(x_k)}| < \boldsymbol{\varepsilon}.$$

3. Порівняти отримані результати, зробити висновки, який метод приводить до меншої кількості ітерацій і чим це зумовлено.

Варіант 23:

$$a_5(1+\alpha)\, x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + k\, a_0 = 0.$$

№ вар.	Коефіцієнти поліному					
	A5	a4	a3	a2	a1	a0
3	0	1	-3	1	-2	-2

Скріни з Mathcad:

Лабораторна робота №6
Варіант №23
Виконала: Павлова Софія, ІС-12

1. Допрограмний етап: визначення кількості дійсних коренів рівняння

Відповідно до свого варіанту отримуємо наступне рівняння:

$f(x) := x^4 - 3\ x^3 + x^2 - 2\ x - 2$

За *теоремою про число коренів алгебраїчного рівняння* маємо:

Задане рів-ня 4 степеню, отже воно має рівно 4 дійсних або комплексних корені.

Перевіримо на дійсність усі корені нашого рівняння за *наслідком з теореми Гюа про наявність комплексних коренів*:

$(-3)^2 \le 1 \cdot 1 = 0$

$(1)^2 \le (-3) \cdot (-2) = 1$ - на цьому кроці виконується нерівність.

$(-2)^2 \le 1 \cdot (-2) = 0$

Отже початкове рівняння має принаймні одну пару комплексних коренів, та відповідно, кількість його дійсних коренів не більше двох.

2. Допрограмний етап: відокремлення коренів рівняння

Використаємо *теорему Штурма:*

1) $f(x) := x^4 - 3\ x^3 + x^2 - 2\ x - 2$

2) $f1(x) := 4\ x^3 - 9\ x^2 + 2\ x - 2$ - похідна функції

3)

$f(x)$ Делимое
$x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 2$

$f1(x)$ Делитель
$4x^3 - 9x^2 + 2x - 2$

Результат
$\frac{1}{4}x - \frac{3}{16}$

$f2(x)$ Остаток
$-\frac{19}{16}x^2 - \frac{9}{8}x - \frac{19}{8}$

Остача від ділення f(x) на f1(x):

$f2(x) := \frac{-19}{16} \cdot x^2 - \frac{9}{8} \cdot x - \frac{19}{8}$

Домножимо залишок на 16 і візьмемо його з протилежним знаком:

$f2(x) := 19\ x^2 + 18\ x + 38$

4)

Делимое

$f1(x)$ $4x^3 - 9x^2 + 2x - 2$

Делитель

$f2(x)$ $19x^2 + 18x + 38$

Результат

$\frac{4}{19}x - \frac{243}{361}$

Остаток

$f3(x)$ $\frac{2208}{361}x + \frac{448}{19}$

Остача від ділення f1(x) на f2(x):

$$f3(x) := \frac{2208}{361} \cdot x + \frac{448}{19}$$

Домножимо залишок на 361:

$$f3(x) := 2208\ x + 8512$$

5)

Делимое

$f2(x)$ $19x^2 + 18x + 38$

Делитель

$f3(x)$ $2208x + 8512$

Результат

$\frac{19}{2208}x - \frac{953}{38088}$

Остаток

$f4(x)$ $\frac{1194910}{4761}$

Остача від ділення f2(x) на f3(x):

$$f4(x) := \frac{1194910}{4761}$$

Домножимо залишок на обернену величину:

$$f4(x) := 1$$

Отримали наступну систему многочленів Штурма:

$$f(x) := x^4 - 3\ x^3 + x^2 - 2\ x - 2$$

$$f1(x) := 4\ x^3 - 9\ x^2 + 2\ x - 2$$

$$f2(x) := 19\ x^2 + 18\ x + 38$$

$$f3(x) := 2208\ x + 8512$$

$$f4(x) := 1$$

Визначимо знаки цих многочленів при x = $-\infty$ та при x = ∞:
При цьому достатньо подивитись на коефіцієнти при найстарших степенях і чи є ці степені парними чи непарними.

Многочлен	-∞	+∞
$x^4-3x^3+x^2-2x-2$	+	+
$4x^3-9x^2+2x-2$	-	+
$\frac{19}{16}x^2+\frac{9}{8}x+\frac{19}{8}$	+	+
$-\frac{2208}{361}x-\frac{448}{19}$	+	-
$-\frac{597455}{38088}$	-	-

n - кількість змін знаків $n1:=3$ $n2:=1$

Висновок: многочлен має рівно $n1-n2=2$ дійсні корені

Локалізуємо корені:
Для цього продовжимо таблиці, обираючи довільним чином точки для перевірки знаків многочленів системи. Першу точку необхідно взяти такою, щоб набір плюсів та мінусів був однаковим з $-\infty$. Наступні точки доцільно обирати такими, щоб кількість змін знаків змінювалась, причому таких змін має бути рівно стільки, скільки коренів має многочлен.

Многочлен	-1	0	2	3
$x^4-3x^3+x^2-2x-2$	+	-	-	+
$4x^3-9x^2+2x-2$	-	-	-	+
$\frac{19}{16}x^2+\frac{9}{8}x+\frac{19}{8}$	+	+	+	+
$-\frac{2208}{361}x-\frac{448}{19}$	-	-	-	-
$-\frac{597455}{38088}$	-	-	-	-
	3	2	2	1

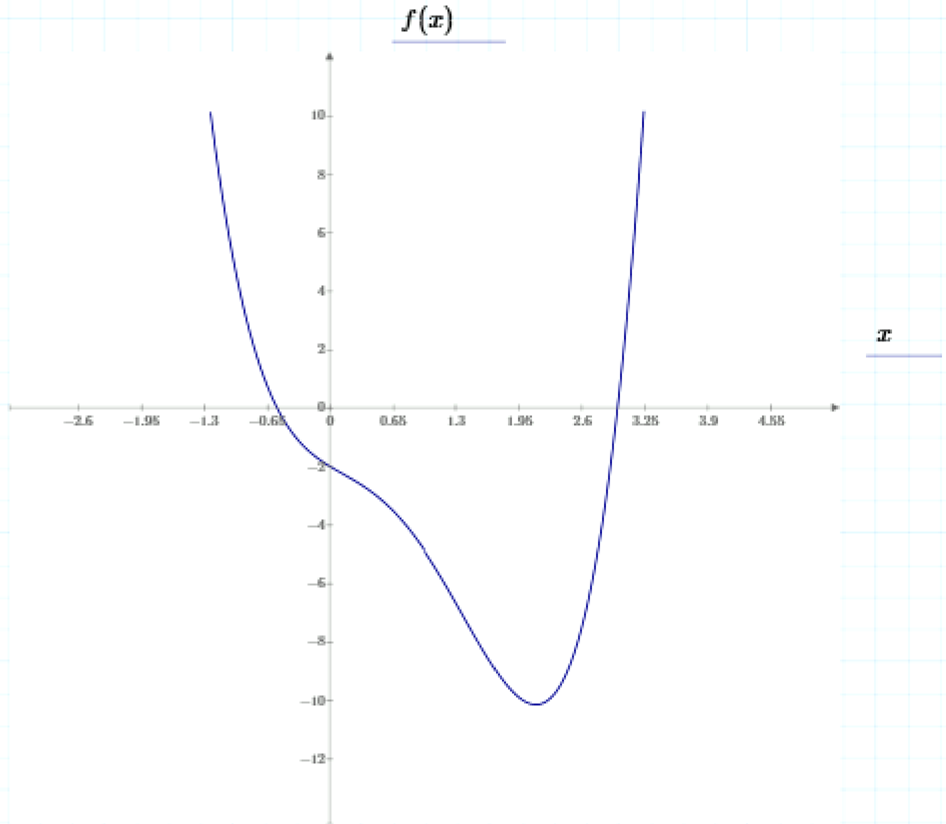
Бачимо, що на проміжку від -1 до 0 кількість змін знаків зменшилась на 1, отже на цьому проміжку лежить 1 корінь. На проміжку від 2 до 3 така сама ситуація, отже другий дійсний корінь знаходиться там.

Отже -1<x1<0, 2<x2<3

3. Допрограмний етап: перевірка правильності відокремлення коренів рівняння графічним методом:

Використаємо *графічний метод відокремлення коренів*:

$f(x) := x^4 - 3 \cdot x^3 + x^2 - 2 \cdot x - 2$



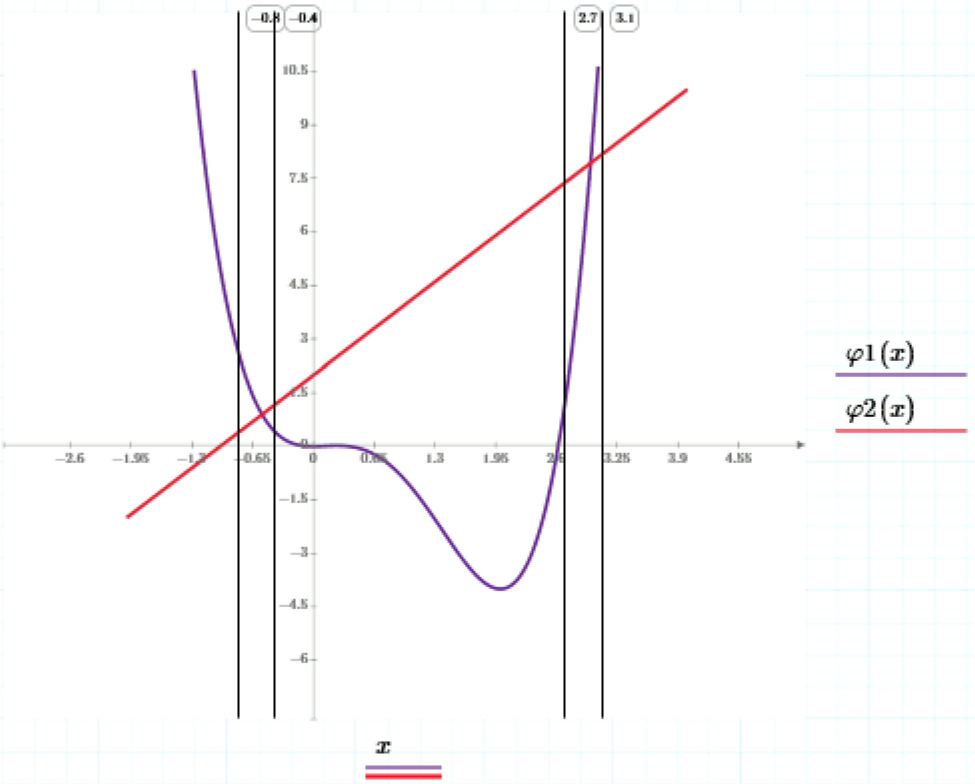
Задамо еквівалентне рівняння типу $\varphi 1(x) - \varphi 2(x) = 0$

Запишемо дане рівняння у вигляді $x^4 - 3 \cdot x^3 + x^2 = 2 \cdot x + 2$

Розглянемо дві функції $\varphi 1(x) := x^4 - 3 \cdot x^3 + x^2$ та $\varphi 2(x) := 2 \cdot x + 2$

$\varphi 1(x) := x^4 - 3 \cdot x^3 + x^2 \qquad \varphi 2(x) := 2 \cdot x + 2$

Побудуємо графіки цих функцій і визначимо абсциси точок їх перетину:



Графіки перетинаються в 2 точках, а отже рівняння має 2 дійсні корені.
Причому один з коренів додатній, а один від'ємний.
Межі в яких вони лежать: -0.8<x1<-0.4, 2.7<x2<3.1

Отже перший корінь $x1 \in [-0.8\ ; -0.4]$,
другий корінь $x2 \in [2.7\ ; 3.1]$

4. Розв'язок уточнення коренів за методами бісекції, хорд, Ньютона:

$f(x) := x^4 - 3\ x^3 + x^2 - 2\ x - 2$

$f1(x) := 4\ x^3 - 9\ x^2 + 2\ x - 2$ - похідна функції

$e := 0.00001$ - точність обрахунків

Задамо функцію обчислення кореня на вказаному проміжку методом бісекції:

$$Bisectcia(a,b) := \left\| \begin{array}{l} \text{while } |a-b|>e \\ \quad \left\| \begin{array}{l} c \leftarrow \dfrac{a+b}{2} \\ \text{if } f(a)\cdot f(c)>0 \\ \quad \| a \leftarrow c \\ \text{else} \\ \quad \| b \leftarrow c \end{array} \right. \\ \text{return } \dfrac{a+b}{2} \end{array} \right.$$

Задамо функцію обчислення кореня на вказаному проміжку методом хорд:

$$Horda(a,b) := \left\| \begin{array}{l} \text{while } |a-b|>e \\ \quad \left\| \begin{array}{l} c \leftarrow b \\ b \leftarrow a \\ a \leftarrow b-(c-b)\cdot \dfrac{f(b)}{f(c)-f(b)} \end{array} \right. \\ \text{return } a \end{array} \right.$$

Задамо функцію обчислення кореня на вказаному проміжку методом Ньютона:

$$Nyuton(b,e) := \left\| \begin{array}{l} x1 \leftarrow b \\ x0 \leftarrow b+2\cdot e \\ \text{while } |x0-x1|>e \\ \quad \left\| \begin{array}{l} x0 \leftarrow x1 \\ x1 \leftarrow x0-\dfrac{f(x0)}{f1(x0)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Знайдемо перший корінь:

$a := -0.8$ $b := -0.4$ - початок та кінець проміжка

$f(a) = 2.186$ $f(b) = -0.822$ - значення функції на початку та в кінці проміжка

Результат знаходження першого кореня:

$bis\_x1 := Bisectcia(a,b) = -0.55106$

$hor\_x1 := Horda(a,b) = -0.55106$

$Nyu\_x1 := Nyuton(b,e) = -0.55106$

Знайдемо другий корінь:

$a := 2.7$ $\quad b := 3.1$ - початок та кінець проміжка

$f(a) = -6.015$ $\quad f(b) = 4.389$ - значення функції на початку та в кінці проміжка

Результат знаходження першого кореня:

$bis\_x2 := Bisectcia(a, b) = 2.96676$

$hor\_x2 := Horda(a, b) = 2.96675$

$Nyu\_x2 := Nyuton(b, e) = 2.96675$

3. Порівняємо результати отримані програмно з розв'язком у Mathcad і знайдемо похибку:

Значення першого кореня з програми:

$bis\_1 := -0.55106$

$hor\_1 := -0.55106$

$Nyu\_1 := -0.55106$

Значення другого кореня з програми:

$bis\_2 := 2.96675$

$hor\_2 := 2.96675$

$Nyu\_2 := 2.96675$

Розрахунок відносної похибки:

$e\_bis\_1 := |bis\_1 - bis\_x1| = 1.04 \cdot 10^{-6}$

$e\_hor\_1 := |hor\_1 - hor\_x1| = 2.659 \cdot 10^{-6}$

$e\_Nyu\_1 := |Nyu\_1 - Nyu\_x1| = 2.654 \cdot 10^{-6}$

$e\_bis\_2 := |bis\_2 - bis\_x2| = 7.202 \cdot 10^{-6}$

$e\_hor\_2 := |hor\_2 - hor\_x2| = 4.248 \cdot 10^{-6}$

$e\_Nyu\_2 := |Nyu\_2 - Nyu\_x2| = 4.247 \cdot 10^{-6}$

Рис. 1. Результат виконання завдання 1 у Mathcad

Код:

```
using System;

namespace cm2_lab_6
{
    class Program
    {
        static void Main(string[] args)
        {
            Console.OutputEncoding = System.Text.Encoding.Default;
            Console.WriteLine("ПОЛІНОМ:\nx^4-3*x^3+x^2-2x-2=0\n");
            double[] a = { -0.8, 2.7 };
            double[] b = { -0.4, 3.1 };

            Console.WriteLine("Уведіть точність розрахунків: ");
            double e = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
            Console.WriteLine();

            for (int i = 0; i < 2; i++)
            {
                if (i == 0) Console.WriteLine("ПЕРШИЙ КОРІНЬ:\n");
```

```
            else if (i == 1) Console.WriteLine("ДРУГИЙ КОРІНЬ:\n");
            Console.WriteLine("x{0} ∈ [{1}; {2}]", i + 1, a[i], b[i]);
            MethodBisection(a[i], b[i], e);
            MethodHord(a[i], b[i], e);
            MethodNewton(a[i], b[i], e);
            Console.WriteLine();
        }
    }

    static double Func(double x)
    {
        int n = 4;
        int[] A = { -2, -2, 1, -3, 1 };
        double result = 0;
        for (int i = n; i >= 0; i--)
            result += A[i] * Math.Pow(x, i);
        return result;
    }
    static double Func1(double x)
    {
        int n = 3;
        int[] A = { -2, 2, -9, 4 };
        double result = 0;
        for (int i = n; i >= 0; i--)
            result += A[i] * Math.Pow(x, i);
        return result;
    }
    static double Func2(double x)
    {
        int n = 2;
        int[] A = { 2, -18, 12 };
        double result = 0;
        for (int i = n; i >= 0; i--)
            result += A[i] * Math.Pow(x, i);
        return result;
    }
    static void MethodBisection(double a, double b, double e)
    {
        int iteracii = 0;
        double x;
        if (Func(a) == 0) x = a;
        else if (Func(b) == 0) x = b;
        else
        {
            double c = 0;
            while (Math.Abs(b - a) > e || Math.Abs(Func(c)) > e)
            {
                c = (a + b) / 2;
                if (Func(a) * Func(c) < 0) b = c;
                else a = c;
                iteracii++;
            }
            x = c;
        }
        Console.WriteLine("\nМетодом бісекції:\tx = {0:f5}\tІтерацій: {1}", x, iteracii);
    }

    static void MethodHord(double a, double b, double e)
    {
        int iteracii = 0;
        double x;
        x = a - (b - a) / (Func(b) - Func(a)) * Func(a);
        while (Math.Abs(Func(x)) > e || (Math.Abs(x - a) > e && Math.Abs(x - b) > e))
        {
            if (Func(a) * Func2(a) > 0)
            {
                b = x;
                x = x - (Func(x) * (x - a) / (Func(x) - Func(a)));
            }
```

```
                else
                {
                    a = x;
                    x = x - (Func(x)) / (Func(b) - Func(x)) * (b - x);
                }
                iteracii++;
            }
            Console.WriteLine("Методом хорд:\t\tx = {0:f5}\tІтерацій : {1}", x, iteracii);
        }

        static void MethodNewton(double a, double b, double e)
        {
            int iteracii = 1;
            double x, x0 = 0;
            if (Func(a) * Func2(a) > 0) x0 = a;
            else x0 = b;
            x = x0 - Func(x0) / Func1(x0);
            while (Math.Abs(x - x0) > e || Math.Abs(Func(x)) > e)
            {
                iteracii++;
                x0 = x;
                x = x0 - Func(x0) / Func1(x0);
            }
            Console.WriteLine("Методом Ньютона:\tx = {0:f5}\tІтерацій : {1}", x, iteracii);
        }
    }
}
```

<u>Скріншот виконання програми:</u>

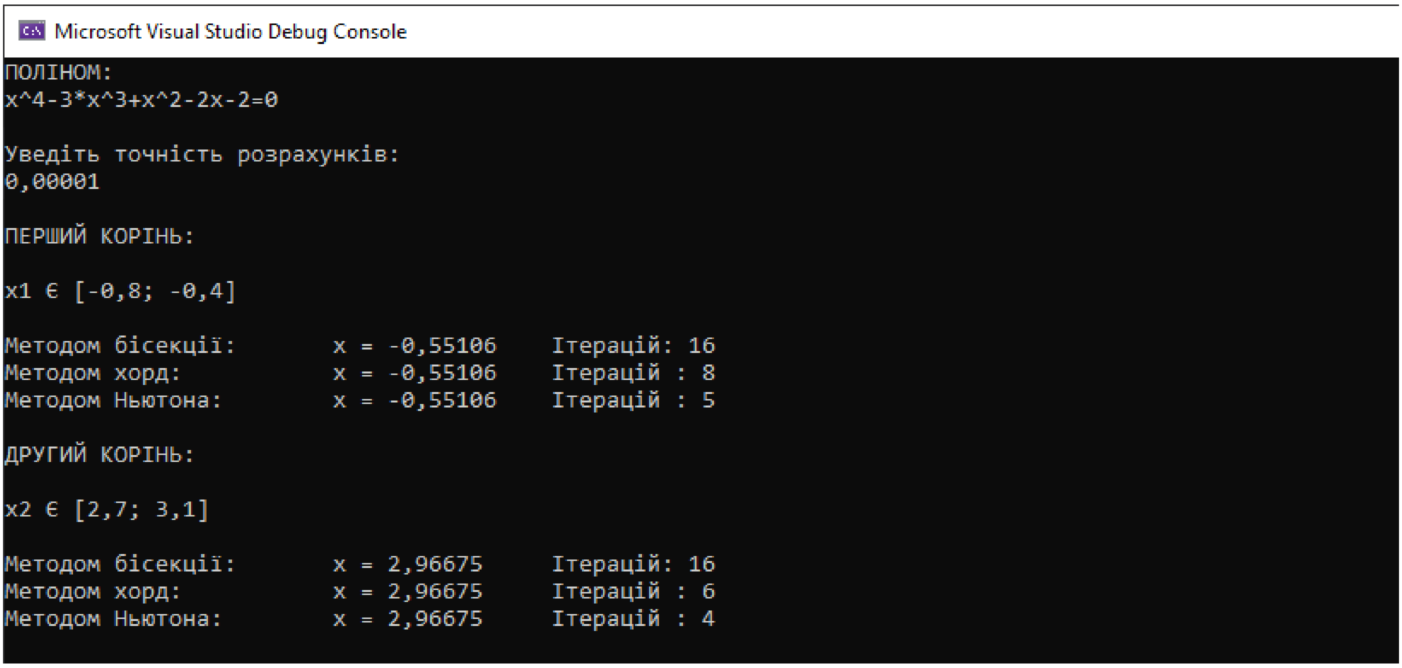


Рис. 2. Результат виконання завдання 1 програмно

ВИСНОВОК

У ході виконання лабораторної роботи було помічено, що метод хорд та метод бісекції схожі, але метод хорд дає швидше сходження до точки і тому у загальному випадку в нього менше ітерацій.

Кількість ітерацій при використанні методу Ньютона напряму залежить від вказаного початкового наближення. У кожному з випадків було перевірено чи однаковий знак у даного рівняння і другої похідної. Якщо знак співпадає, то початкове наближення дорівнює початку проміжку уточненого кореня, якщо ж ні, то його кінцю. При такому наближенні метод Ньютона виявився найшвидшим.