МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КПІ»

Кафедра інформаційних систем та технологій

Звіт

з лабораторної роботи № 5

«Інтерполяційні поліноми»

з дисципліни

«Спеціальні розділи математики-2. Чисельні методи»

Варіант № 23

Перевірила:

доц. Рибачук Людмила Віталіївна

Виконала: Павлова Софія

Студентка гр. ІС-12 , ФІОТ

1 курс,

залікова книжка № ІС-1224

Київ 2022

ХІД РОБОТИ

Завдання 1:

Створити програму, яка для заданої функції по заданим точкам будує інтерполяційний поліном $P_n(x)$ у формі Лагранжа або Ньютона, а також здійснює інтерполяцію кубічними сплайнами.

Програма має розрахувавати значення похибки $\varepsilon = |P_n(x) - y(x)|$, для чого потрібно вивести на графік із кроком (графік можна будувати допоміжними засобами, наприклад, у Mathcad), меншим у 5-6 разів, ніж крок інтерполяції, відповідні значення поліному та точної функції. Якщо похибка дуже мала, застосувати масштабування.

Знайти кубічний інтерполяційний сплайн для заданої функції у Mathcad. Вивести графік результатів.

Варіант 23:

21-25	$\frac{x^2}{15} + \cos(x+\alpha)$	-6+k, -4+k, -2+k, 0+k, 2+k; $k = 2*(№\textit{вар} - 21)$

α – остання цифра номеру групи. Якщо номер варіанту кратний 2, то потрібно робити інтерполяцію методом Ньютона, інакше – методом Лагранжа.

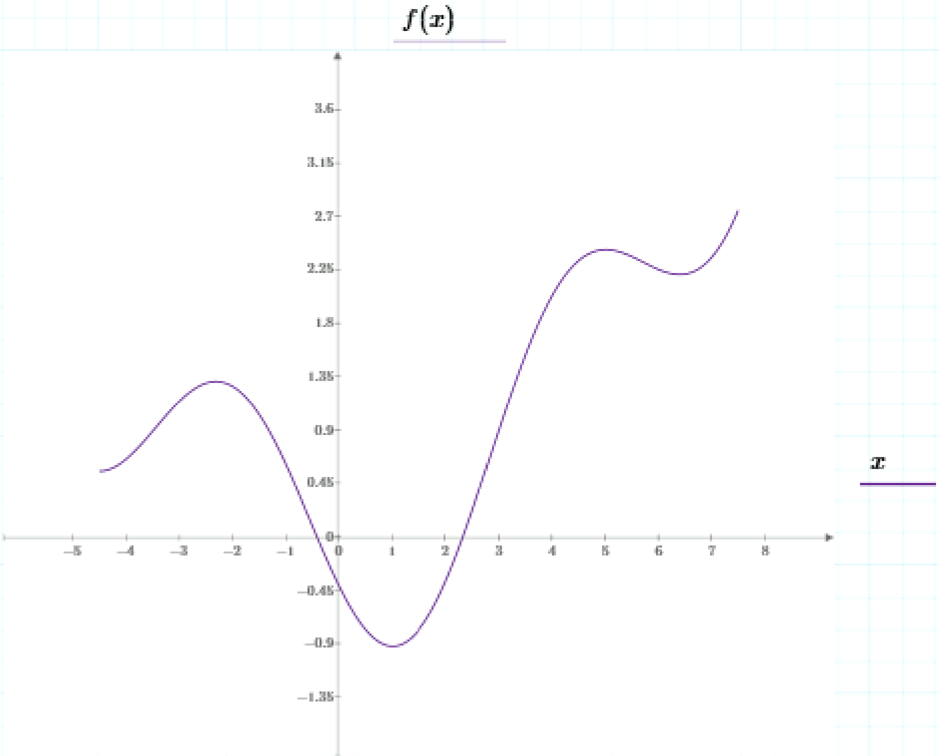
Скріни з Mathcad:

Лабораторна робота №5
Варіант №23
Виконала: Павлова Софія, ІС-12

1. Задамо функцію і її графік:

$a := 2 \qquad k := 4$

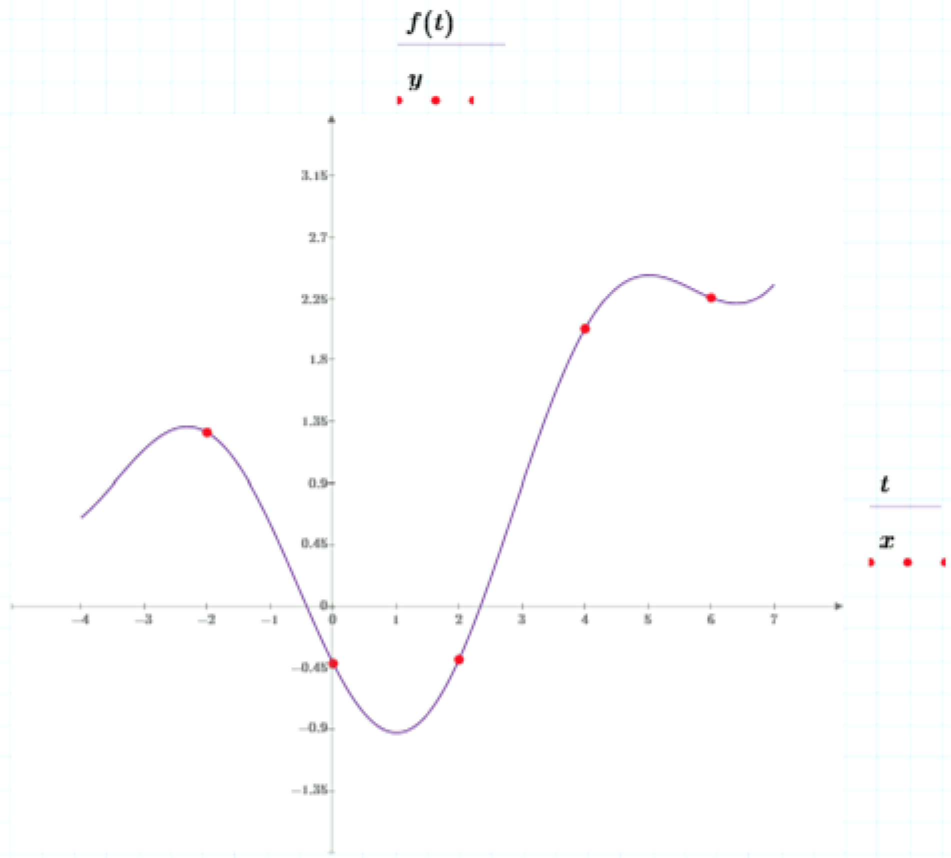
$$f(x) := \frac{x^2}{15} + \cos(x + a)$$



2. Задамо значення функції у вузлах інтерполяції:

$$x := \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$ - вузли інтерполяції

$$y := f(x) = \begin{bmatrix} 1.26667 \\ -0.41615 \\ -0.38698 \\ 2.02684 \\ 2.2545 \end{bmatrix}$$ - значення функції у вузлах інтерполяції



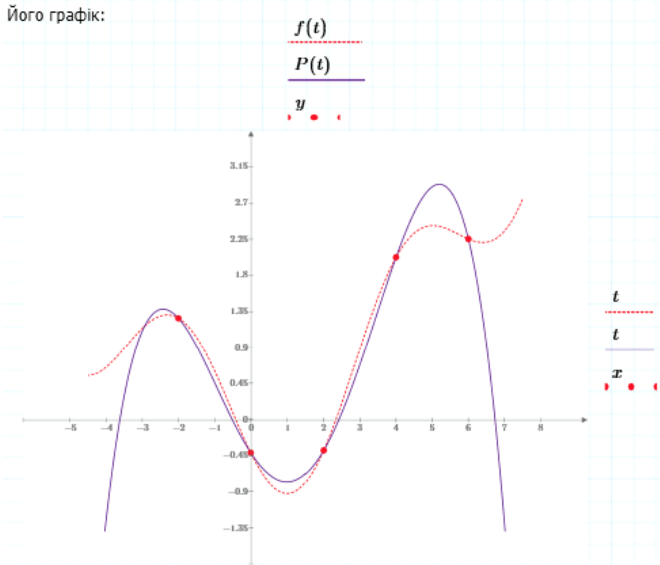
3. Порівняємо графік функції та графік інтерполяційного поліному, отриманий з програми:

$$f(x) := \frac{x^2}{15} + \cos(x+a)$$

Інтерполяційний поліном отриманий програмно:

$$P(x) := f(-2)\cdot\frac{x\cdot(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-6)}{(-2)\cdot(-4)\cdot(-6)\cdot(-8)} + f(0)\cdot\frac{(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-6)}{2\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot(-6)} + f(2)\cdot\frac{(x+2)\cdot x\cdot(x-4)\cdot(x-6)}{4\cdot 2\cdot(-2)\cdot(-4)} + f(4)\cdot\frac{(x+2)\cdot x\cdot(x-2)\cdot(x-6)}{6\cdot 4\cdot 2\cdot(-2)} + f(6)\cdot\frac{(x+2)\cdot x\cdot(x-2)\cdot(x-4)}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}$$

Його графік:



4. Розрахуємо похибку отримання інтерполяційного поліному відносно точок інтерполяції:

$e1 := |f(-2) - P(-2)| = 0$

$e2 := |f(0) - P(0)| = 0$

$e3 := |f(2) - P(2)| = 0$

$e4 := |f(4) - P(4)| = 0$

$e5 := |f(6) - P(6)| = 0$

5. За допомогою засобів Mathcad знайдемо сплайн інтерполяції:

$$x=\begin{bmatrix}-2\\0\\2\\4\\6\end{bmatrix}$$ - інтервали інтерполювання

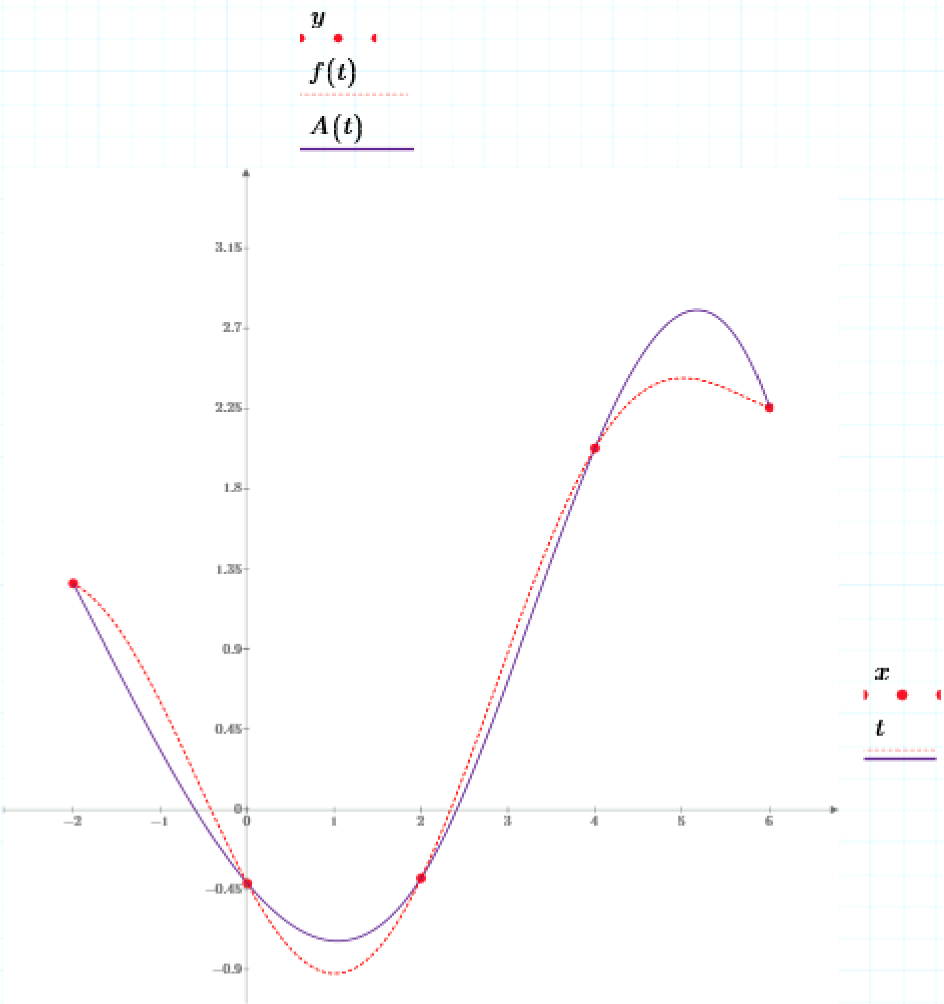
$$y=\begin{bmatrix}1.26667\\-0.41615\\-0.38698\\2.02684\\2.2545\end{bmatrix}$$ - значення функцій у точках інтерполяції

Оскільки на всіх вказаних проміжках застосовується одна й та ж функція, то знайдемо сплайни на єдиному проміжку t, заданому з кроком 0.05:

$t:=-2,-1.95..6$

$s:=\text{cspline}(x,y)$ $\qquad A(t):=\text{interp}(s,x,y,t)$

6. За допомогою засобів Mathcad побудуємо порівняльний графік функції та сплайн інтерполяції у вузлах інтерполяції:



7. Порівняємо графік функції та графік кубічних сплайнів, отриманий з програми:

З програми було отримано наступні коефіцієнти:

$$a := \begin{bmatrix} 1.26667 \\ -0.41615 \\ -0.38698 \\ 2.02684 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} -0.99018 \\ -0.54385 \\ 0.68513 \\ 0.11383 \end{bmatrix} \quad c := \begin{bmatrix} 0 \\ 0.22316 \\ 0.39133 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d := \begin{bmatrix} 0.03719 \\ 0.02803 \\ -0.06522 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Кубічна сплайн інтерполяція набуде вигляду:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,$$

, де a, b, c, d - коефіцієнти, отримані з програми

Тоді маємо:

1) $x1 := -2, -1.95 .. 0$

$$S1(x1) := a_1 + b_1 \cdot (x1 - x_1) + c_1 \cdot (x1 - x_1)^2 + d_1 \cdot (x1 - x_1)^3$$

2) $x2 := 0, 0.05 .. 2$

$$S2(x2) := a_2 + b_2 \cdot (x2 - x_2) + c_2 \cdot (x2 - x_2)^2 + d_2 \cdot (x2 - x_2)^3$$

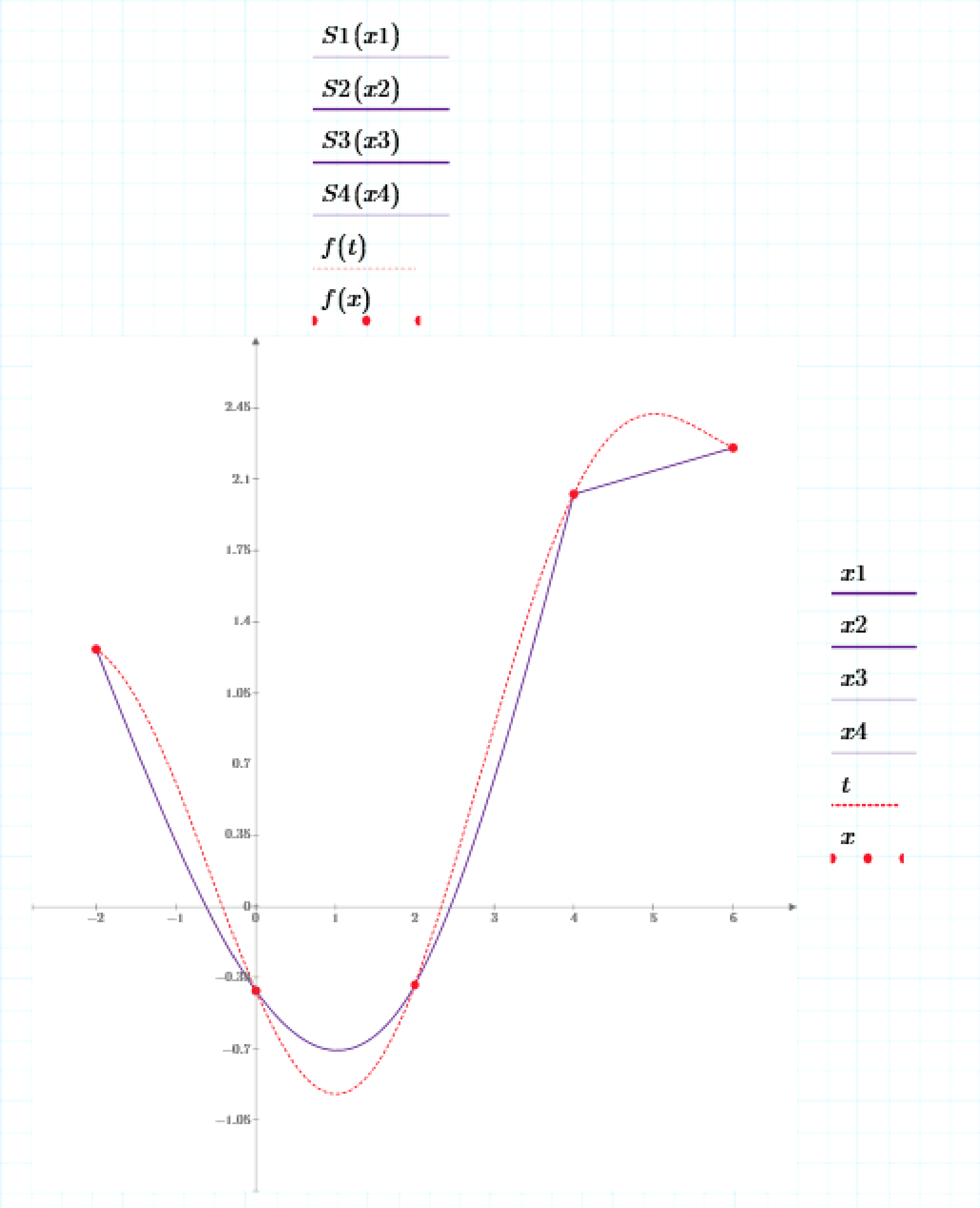
3) $x3 := 2, 2.05 .. 4$

$$S3(x3) := a_3 + b_3 \cdot (x3 - x_3) + c_3 \cdot (x3 - x_3)^2 + d_3 \cdot (x3 - x_3)^3$$

4) $x4 := 4, 4.05 .. 6$

$$S4(x4) := a_4 + b_4 \cdot (x4 - x_4) + c_4 \cdot (x4 - x_4)^2 + d_4 \cdot (x4 - x_4)^3$$

Побудуємо графік:



8. За допомогою засобів Mathcad знайдемо кубічні сплайн інтерполяції:

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 1.26667 \\ -0.41615 \\ -0.38698 \\ 2.02684 \\ 2.2545 \end{bmatrix}$$

Для цього використаємо наступні вбудовані функції Mathcad:

$s1 := \mathrm{lspline}(x, y) \qquad A1(t) := \mathrm{interp}(s1, x, y, t)$

$s2 := \mathrm{pspline}(x, y) \qquad A2(t) := \mathrm{interp}(s2, x, y, t)$

$s3 := \mathrm{cspline}(x, y) \qquad A3(t) := \mathrm{interp}(s3, x, y, t)$

9. За допомогою засобів Mathcad побудуємо порівняльний графік функції та кубічних сплайн інтерполяцій у вузлах інтерполювання:

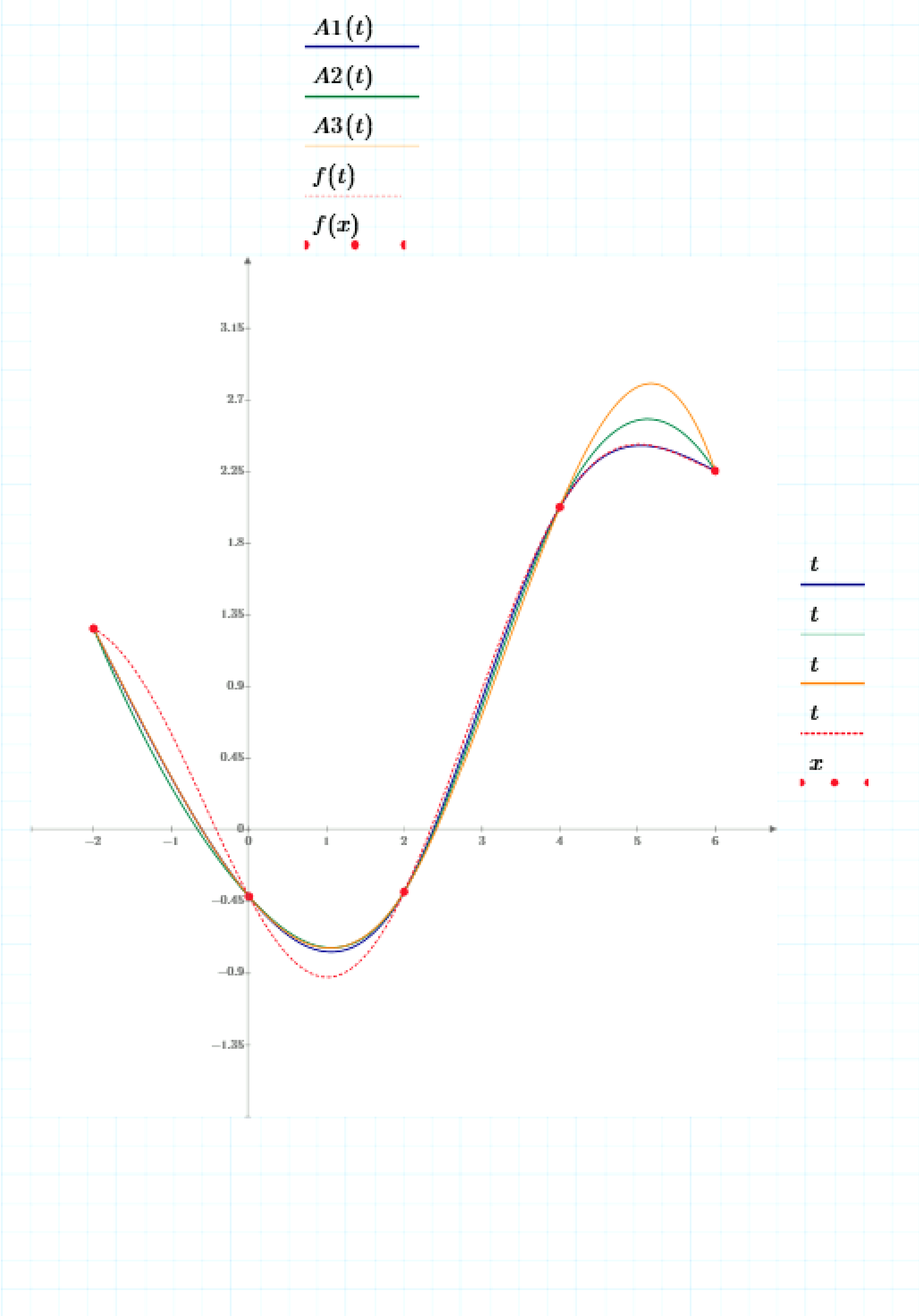


Рис. 1. Результат виконання завдання 1 у Mathcad

Код:

```
using System;

namespace chm2_lab_5
{
    class Program
    {
        static void Main(string[] args)
        {
            const int n = 5;
            double[] x = { -2, 0, 2, 4, 6 };
            double[] y = new double[n];

            Console.WriteLine("Значення функції в точках інтерполяції:\n");
            for (int i = 0; i < n; i++)
            {
                y[i] = Function(x[i]);
                Console.WriteLine("x[{0}] = {1} \t y[{2}] = {3:f5}", i, x[i], i, y[i]);
            }

            Console.WriteLine("\nІнтерполяційний многочлен Лагранжа:");
            Lagrange(x, y, n);

            Console.WriteLine("\n\nІнтерполяція кубічними сплайнами:\n");
            for (int i = 0; i < n; i++)
                Spline(x, y, n, x[i]);

        }

        static double Function(double x)
        {
            return Math.Pow(x, 2) / 15 + Math.Cos(x + 2);
        }

        static void Lagrange(double[] x, double[] y, int n)
        {
            Console.WriteLine();
            Console.Write("\t    (x - " + x[1] + ")(x - " + x[2] + ")(x - " + x[3] + ")(x - " + x[4]
+ ")   ");
            Console.Write("\t      (x + " + -x[0] + ")(x - " + x[2] + ")(x - " + x[3] + ")(x - " +
x[4] + ")   ");
            Console.Write("\t      (x + " + -x[0] + ")(x - " + x[1] + ")(x - " + x[3] + ")(x - " +
x[4] + ")   ");
            Console.Write("\t       (x + " + -x[0] + ")(x - " + x[1] + ")(x - " + x[2] + ")(x - " +
x[4] + ")   ");
            Console.WriteLine("\t        (x + " + -x[0] + ")(x - " + x[1] + ")(x - " + x[2] + ")(x -
" + x[3] + ")");
            Console.Write($"{y[0]:f5}"+" * -------------------------------- ");
            Console.Write($"{y[1]:f5}" + " * ---------------------------- ");
            Console.Write($"{y[2]:f5}"+" * ---------------------------- + ");
            Console.Write($"{y[3]:f5}" + " * ---------------------------- + ");
            Console.WriteLine($"{y[4]:f5}" + " * ---------------------------- ");
            Console.Write("\t  (" + x[0] + " - " + x[1] + ")(" + x[0] + " - " + x[2] + ")(" + x[0] +
" - " + x[3] + ")(" + x[0] + " - " + x[4] + ")");
            Console.Write("\t      (" + x[1] + " + " + -x[0] + ")(" + x[1] + " - " + x[2] + ")(" +
x[1] + " - " + x[3] + ")(" + x[1] + " - " + x[4] + ")");
            Console.Write("\t      (" + x[2] + " + " + -x[0] + ")(" + x[2] + " - " + x[1] + ")(" +
x[2] + " - " + x[3] + ")(" + x[2] + " - " + x[4] + ")");
            Console.Write("\t       (" + x[3] + " + " + -x[0] + ")(" + x[3] + " - " + x[1] + ")(" +
x[3] + " - " + x[2] + ")(" + x[3] + " - " + x[4] + ")");
            Console.Write("\t        (" + x[4] + " + " + -x[0] + ")(" + x[4] + " - " + x[1] + ")(" +
x[4] + " - " + x[2] + ")(" + x[4] + " - " + x[3] + ")");
        }

        static double Spline(double[] X, double[] Y, int n, double x0)
        {
            double[] a = new double[n - 1];
```

```
        double[] b = new double[n - 1];
        double[] d = new double[n - 1];
        double[] h = new double[n - 1];

        double[,] A = new double[n - 1, n];

        double[] by = new double[n];

        for (int i = 0; i < n - 1; i++)
        {
            a[i] = Y[i];
            h[i] = X[i + 1] - X[i];
        }
        A[0, 0] = 1;
        A[n - 2, n - 2] = 1;
        for (int i = 1; i < n - 2; i++)
        {
            A[i, i - 1] = h[i - 1];
            A[i, i] = 2 * (h[i - 1] + h[i]);
            A[i, i + 1] = h[i];
            by[i] = 3 * (((Y[i + 1] - Y[i]) / h[i]) - ((Y[i] - Y[i - 1]) / h[i - 1]));
        }
        double[] c = Progon(A, by, n - 1);

        for (int i = 0; i < n - 1; i++)
        {
            if (i != n - 2)
            {
                d[i] = (c[i + 1] - c[i]) / (3 * h[i]);
                b[i] = ((Y[i + 1] - Y[i]) / h[i]) - h[i] * (c[i + 1] + 2 * c[i]) / 3;
            }
            else
            {
                d[i] = (-1) * (c[i] / (3 * h[i]));
                b[i] = ((Y[i] - Y[i - 1]) / h[i]) - ((2 * h[i] * c[i]) / 3);
            }
        }
        d[n - 2] = -c[n - 2] / (3 * h[n - 2]);
        b[n - 2] = ((Y[n - 1] - Y[n - 2]) / h[n - 2]) - 2 * h[n - 2] * c[n - 2] / 3;
        int m = 0;
        for (int i = 1; i < n; i++)
            if (x0 >= X[i - 1] && x0 <= X[i]) m = i - 1;

        double x = x0 - X[m];
        double y = a[m] + b[m] * x + c[m] * Math.Pow(x, 2) + d[m] * Math.Pow(x, 3);

        Console.WriteLine($"Коефіцієнти для {y:f5}");
        Console.WriteLine($"a = {a[m]:f5}");
        Console.WriteLine($"b = {b[m]:f5}");
        Console.WriteLine($"c = {c[m]:f5}");
        Console.WriteLine($"d = {d[m]:f5}\n");

        return y;
    }

    static double[] Progon(double[,] A, double[] b, int n)
    {
        double[] K = new double[n];
        int n1 = n - 1;

        double y = A[0, 0];
        double[] a = new double[n];
        double[] b1 = new double[n];
        a[0] = -A[0, 1] / y;
        b1[0] = b[0] / y;
        for (int i = 1; i < n1; i++)
        {
            y = A[i, i] + A[i, i - 1] * a[i - 1];
            a[i] = -A[i, i + 1] / y;
```

```
                b1[i] = (b[i] - A[i, i - 1] * b1[i - 1]) / y;
            }
            K[n1] = b1[n1];
            for (int i = n1 - 1; i >= 0; i--)
                K[i] = a[i] * K[i + 1] + b1[i];
            return K;
        }

    }
}
```

<u>Скріншот виконання програми:</u>

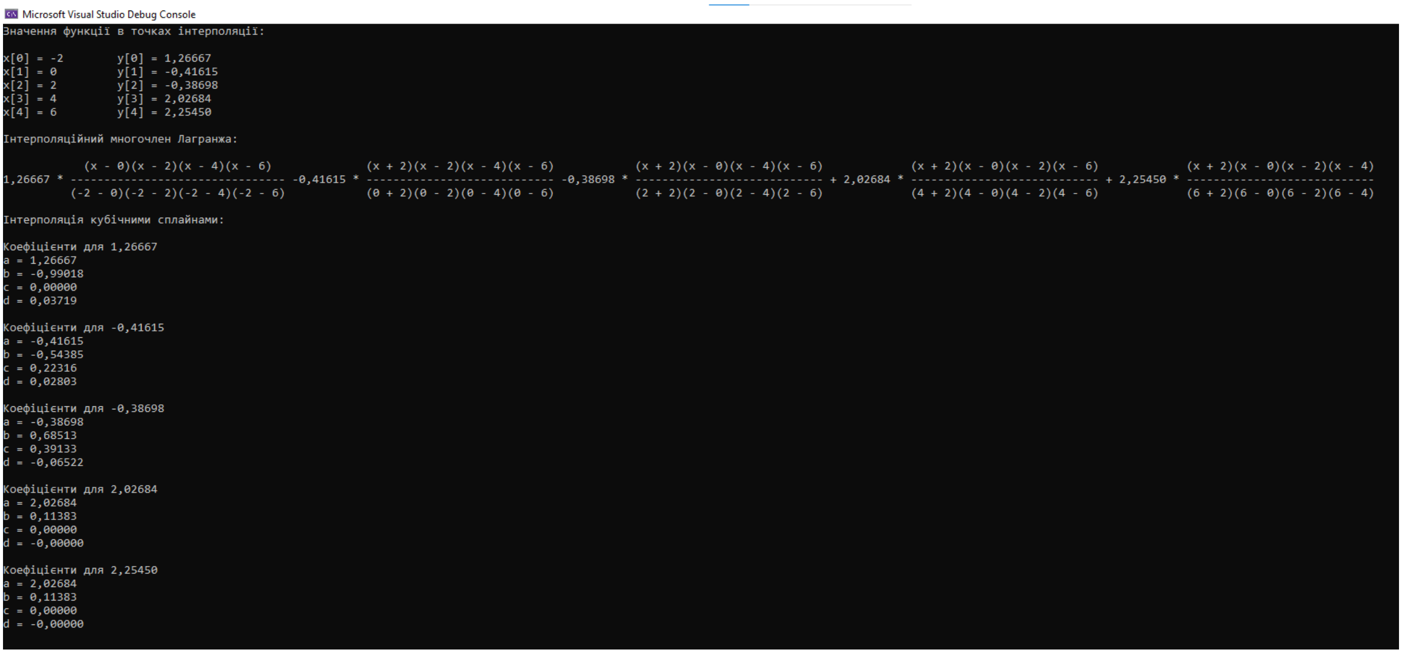


Рис. 2. Результат виконання завдання 1 програмно

ВИСНОВОК

У ході виконання лабораторної роботи я дізналася про інтерполювання функцій за допомогою інтерполяційних многочленів Лагранжа та Ньютона та метод інтерполювання сплайнами. Я навчилась програмно реалізовувати знаходження інтерполяційного многочлена Лагранжа і використовувати його та метод інтерполювання сплайнами у середовищі Mathcad для знаходження значень функції у вузлах інтерполяції.

У результаті виконання завдання було практично підтверджено, що знаходження кубічних сплайнів при великих степенях полінома спричиняє коливання полінома на проміжках між вузлами інтерполювання, проте на самих вузлах інтерполяції є досить точним.