МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КПІ»

Кафедра інформаційних систем та технологій

Звіт

з лабораторної роботи № 7

«Чисельне інтегрування функцій»

з дисципліни

«Спеціальні розділи математики-2. Чисельні методи»

Варіант № 23

Перевірила:

доц. Рибачук Людмила Віталіївна

Виконала: Павлова Софія

Студентка гр. ІС-12 , ФІОТ

1 курс,

залікова книжка № ІС-1224

Київ 2022

ХІД РОБОТИ

Завдання 1:

1. Реалізувати програму, яка обчислює інтеграл за допомогою формули трапеції або Сімпсона, в залежності від варіанту. Точність обчислень має бути 0,0001. Мінімальну кількість кроків визначити за формулою (1.7). Оцінити похибку результату.
2. Реалізувати програму, яка обчислює інтеграл за допомогою квадратурної формули Гауса (для всіх варіантів). Оцінити похибку результату.
3. Обчислити визначений інтеграл у Mathcad та порівняти реальну похибку кожного метода (це різниця між розрахованим значенням інтегралу і значенням у MathCad) з аналітичною похибкою кожного методу. Реальна похибка має бути не більша ніж аналітична.

Для формули Симпсона:

$$\boxed{\Delta_n = |R_n| \le \Delta_n^* = ((b-a)^5/(180n^4))M_4} \qquad (1.7)$$

Для квадратурної формули Гауса:

$$|R_n(f)| \le \frac{(n!)^4(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)[(2n)!]^3} \max_{\xi\in[a,b]} \left|f^{(2n)}(\xi)\right| \qquad (1.7)$$

Варіант 23:

$$f(x) = \frac{\lg(x^2+1)}{x}$$

№ вар.	Границі інтегрування	
	a	b
3,13,23	0.8	1.6

Скріни з Mathcad:

Лабораторна робота №7
Варіант №23
Виконала: Павлова Софія, ІС-12

1. Задамо підінтегральну функцію і межі інтегрування для методу Симпсона:

$a := 0.8 \qquad b := 1.6 \qquad e := 0.0001$

$f(x) := \dfrac{\log(x^2+1)}{x} \qquad F(x) := \int_a^b f(x)\,dx = 0.25397$ - визначений інтеграл

2. Знайдемо крок інтегрування h та кількість кроків n для методу Симпсона:

За умовою треба знайти значення інтеграла до четвертого знаку після коми. Тому обчислення буде проводитись з округленням до п'ятого, запасного знаку після коми.

Застосуємо формулу:

$$\boxed{\Delta_n = |R_n| \le \Delta_n^* = ((b-a)^5/(180n^4))M_4}$$

Для цього продиференціюємо підінтегральну функцію та знайдемо її 4 похідну:

$$f1(x) := \frac{2\cdot x^2 - \ln(x^2+1)\cdot(x^2+1)}{\ln(10)\cdot x^2\cdot(x^2+1)}$$

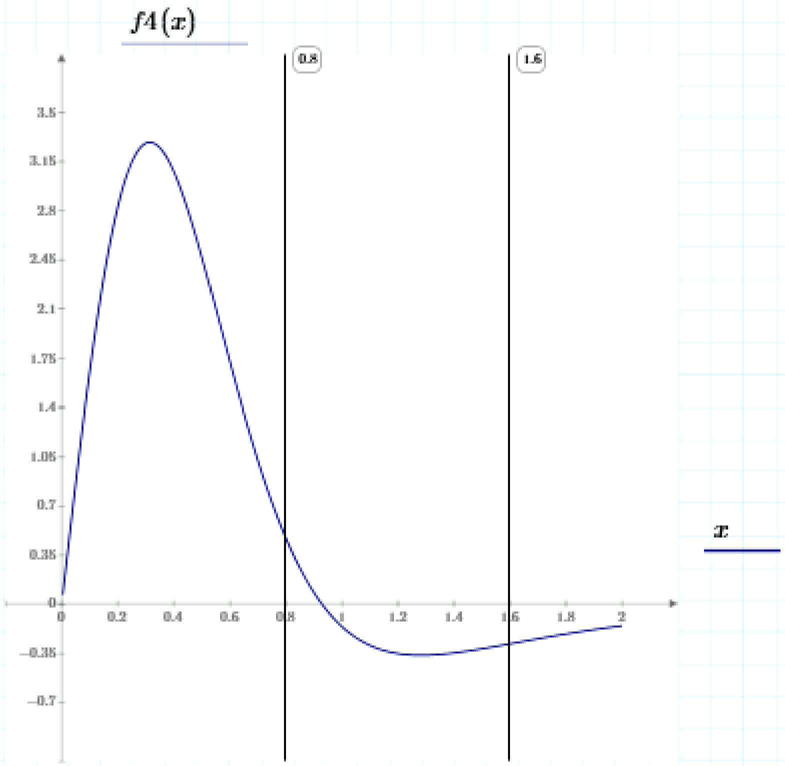
$$f2(x) := \frac{2\cdot\left(x^4\cdot\ln(x^2+1) - 3\cdot x^4 + 2\cdot x^2\cdot\ln(x^2+1) - x^2 + \ln(x^2+1)\right)}{\ln(10)\cdot x^3\cdot(x^2+1)^2}$$

$$f3(x) := \frac{2\cdot\left(-3\cdot x^8\cdot\ln(x^2+1) + 11\cdot x^8 - 12\cdot x^6\cdot\ln(x^2+1) + 17\cdot x^6 - 18\cdot x^4\cdot\ln(x^2+1) + 9\cdot x^4 - 12\cdot x^2\cdot\ln(x^2+1) + 3\cdot x^2 - 3\cdot\ln(x^2+1)\right)}{\ln(10)\cdot x^4\cdot(x^2+1)^4}$$

$$f4(x) := \frac{4\cdot\left(6\cdot x^{10}\cdot\ln(x^2+1) - 25\cdot x^{10} + 30\cdot x^8\cdot\ln(x^2+1) - 41\cdot x^8 + 60\cdot x^6\cdot\ln(x^2+1) - 37\cdot x^6 + 60\cdot x^4\cdot\ln(x^2+1) - 27\cdot x^4 + 30\cdot x^2\cdot\ln(x^2+1) - 6\,x^2 + 6\cdot\ln(x^2+1)\right)}{\ln(10)\cdot x^5\cdot(x^2+1)^5}$$

Знайдемо найбільше значення 4-ї похідної на відрізку інтегрування:

Для цього побудуємо графік 4-ї похідної, щоб визначити, як вона себе поводить на цьому проміжку:



Бачимо, що найбільшого значення на проміжку інтегрування 4-а похідна набуває в т. x = a = 0.8:

$M4 := f4(a) = 0.47$

Отже гранична абсолютна похибка:

$\Delta n1(n) := \frac{(b-a)^5}{180 \cdot n^4} \cdot M4 \qquad \varphi := \frac{(b-a)^5}{180} \cdot M4 = 8.558 \cdot 10^{-4}$

Отримуємо нерівність: $\frac{\varphi}{n^4} \le e$, розв'яжемо її підбором:

$n := 1 \qquad \frac{\varphi}{n^4} \le e = 0$

$n := 2 \qquad \frac{\varphi}{n^4} \le e = 1$ - бачимо, що для n = 2 нерівність виконується.
Отже нам підходить будь-яке $n \ge 2$.

Отже мінімальна кількість кроків для метода Симпсона = 2.

Використаємо $n := 8$ - кількість кроків

Тоді $h := \frac{b-a}{n} = 0.1$ - крок

3. Задамо X та Y відповідно до знайденої кількості кроків для методу Симпсона:

$x := a, a+h..b$ - значення x

$$x = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 1 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \\ 1.5 \\ 1.6 \end{bmatrix} \qquad f(x) = \begin{bmatrix} 0.26855 \\ 0.28631 \\ 0.30103 \\ 0.31308 \\ 0.32282 \\ 0.33058 \\ 0.33664 \\ 0.34126 \\ 0.34466 \end{bmatrix}$$

4. Застосуємо формулу Симпсона для наближеного обчислення інтегралу:

$$In1 := \left(\frac{b-a}{3 \cdot n} \cdot (f(0.8)+f(1.6)+4 \cdot (f(0.9)+f(1.1)+f(1.3)+f(1.5))+2 \cdot (f(1)+f(1.2)+f(1.4)))\right) = 0.25397$$

Отже $In1 := 0.2540$

5. Знайдемо похибку наближеного обчислення інтегралу методом Симпсона:

$\Delta n1(n) = 2.089 \cdot 10^{-7}$ - аналітична

$e1 := |F(x) - In1| = 2.973 \cdot 10^{-5}$ - реальна похибка

$e1 \le \Delta n1(n) = 0$ - бачимо, що реальна похибка не більша за аналітичну, а отже розрахунки було виконано правильно.

6. Застосуємо заміну змінної, щоб звести межі інтегрування для методу Гауса:

Для того, щоб отримати межі a = -1, b = 1, застосуємо формулу:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$$

Отримуємо:

$$xi(t) := \frac{2.4}{2} + \frac{0.8}{2} \cdot t$$

Тоді інтеграл набуває вигляду:

$a := -1 \qquad b := 1$

$$f(t) := \frac{2}{5} \cdot \frac{5 \cdot \log(4 \cdot t^2 + 24 \cdot t + 61) - 10 \cdot \log(5)}{6 + 2 \cdot t}$$

$$F(t) := \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = 0.25397$$ - визначений інтеграл

6. Знайдемо кількість кроків n для методу Гауса:

Для цього оцінимо похибку за даною нерівністю:

$$|R_n(f)| \le \frac{(n!)^4 (b-a)^{2n+1}}{(2n+1)[(2n)!]^3} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(2n)}(\xi)|$$

Нехай $n := 2$

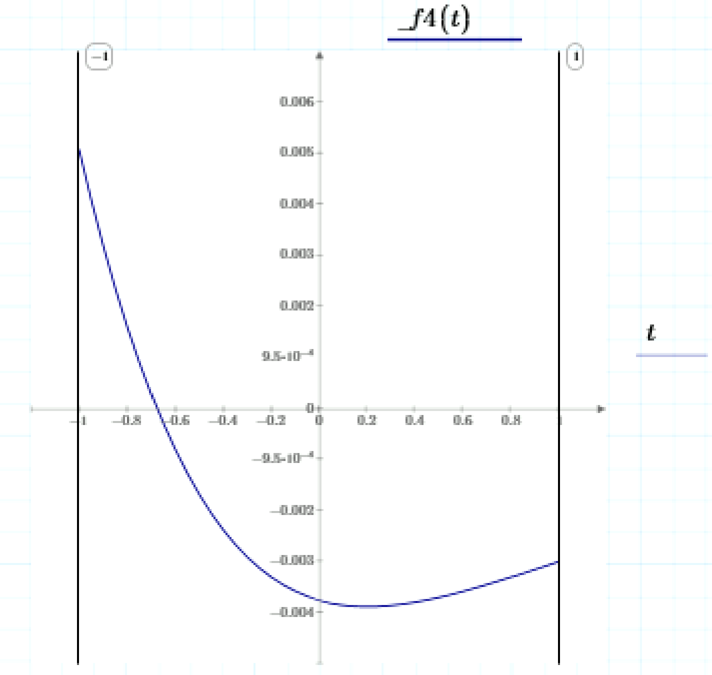
Знайдемо 4-ту похідну нової функції на новому проміжку інтегрування:

$t := -1, -0.95 .. 1$ - межі інтегрування

$$\_f4(t) := \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4} f(t)$$

Визначимо поведінку 4-ї похідної на проміжку інтегрування:

Для цього побудуємо графік:



Бачимо, що найбільшого значення на проміжку інтегрування 4-та похідна набуває при x = a = -1.

$M2 := \_f4(a) = 0.005$

Тоді аналітична похибка набуде вигляду:

$$\Delta n2 := \frac{(n!)^4 \cdot (b-a)^{(2 \cdot n+1)}}{(2 \cdot n+1) \cdot (2 \cdot n)!^3} \cdot M2$$

$\Delta n2 = 3.566 \cdot 10^{-5}$

$\Delta n2 \leq e = 1$ - бачимо, при n = 2 нерівність виконується

Отже мінімальна кількість кроків для метода Гауса = 2.

8. Знайдемо значення X, Y, C для квадратурної формули Гауса:

Для нашої кількості кроків n = 2 з таблиці квадратурних коефіцієнтів Гауса, отримуємо:

$t1 := -0.57735$
$t2 := -t1 = 0.57735$ - значення вузлів ti

$c1 := 1$
$c2 := c1 = 1$ - коефіцієнти $Ai = ci$

$t := t1, t2 .. t2$ $\quad t = \begin{bmatrix} -0.57735 \\ 0.57735 \end{bmatrix}$ - зазначимо межі t

$y1 := f(t1) = 0.11871$
$y2 := f(t2) = 0.13528$ - значення функції у вузлах

9. Застосуємо квадратурну формулу Гауса для наближеного обчислення інтегралу:

Підставляємо знайдені значення в формулу:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

$In2 := c1 \cdot y1 + c2 \cdot y2 = 0.25399$

Отже $In2 := 0.2540$

10. Знайдемо похибку наближеного обчислення інтегралу методом Гауса:

$\Delta n2 = 3.566 \cdot 10^{-5}$ - аналітична

$e2 := |F(t) - In2| = 2.973 \cdot 10^{-5}$ - реальна похибка

$e2 \le \Delta n2 = 1$ - бачимо, що реальна похибка не більша за аналітичну, а отже розрахунки було виконано правильно.

11. Знайдемо похибки розрахунків, виконаних програмно відносно розрахунків у Mathcad:

З програми отримано:

Інтеграл за методом Симпсона: $Ip1 := 0.2540$

Інтеграл за методом Гауса: $Ip2 := 0.2540$

Отримані у Mathcad результати:

$In1 = 0.254$ $\quad$ $In2 = 0.254$

Похибка:

$E1 := |Ip1 - In1| = 0$ $\quad$ $E2 := |Ip2 - In2| = 0$

Рис. 1. Результат виконання завдання 1 у Mathcad

<u>Код:</u>

```
using System;

namespace chm2_lab_7
{
    class Program
    {
        static double Func(double x)
        {
            return Math.Log10(Math.Pow(x, 2) + 1) / x;
        }

        static double NewFunc(double x)
        {
            return 2 * (5 * Math.Log10(4 * Math.Pow(x, 2) + 24 * x + 61) - 10 * Math.Log10(5)) / (5
* (6 + 2 * x));
        }

        static double Simpson(Func<double, double> f, double a, double b, int n)
        {
            var h = (b - a) / n;
            var sum1 = 0d;
            var sum2 = 0d;
            for (var i = 1; i <= n; i++)
            {
                var xi = a + i * h;
                if (i <= n - 1) sum1 += f(xi);

                var xi_1 = a + (i - 1) * h;
```

```
                sum2 += f((xi + xi_1) / 2);
            }
            var result = h / 3d * (1d / 2d * f(a) + sum1 + 2 * sum2 + 1d / 2d * f(b));
            return result;
        }

        static double Gaus(double a, double b)
        {
            double x, rez = 0;
            double[] X = { -0.57735, 0.57735 };
            double[] A = { 1, 1 };
            for (int i = 0; i < 2; i++)
            {
                x = (a + b) / 2 + X[i] * (b - a) / 2;
                rez += A[i] * NewFunc(x);
            }
            return rez * (b - a) / 2;
        }

        static void Main(string[] args)
        {
            Console.OutputEncoding = System.Text.Encoding.Default;
            double a = 0.8, b = 1.6, e = 0.0001;

            //локальна функція
            double f(double x) => Math.Log10(Math.Pow(x, 2) + 1) / x;

            Console.WriteLine("ЛІМІТ:\n\nlg(x^2+1)\n----------\n    x\n\nвід {0} до {1} з точністю до {2}\n\n", a, b, e);
            Console.WriteLine("МЕТОД СИМПСОНА:\n{0:f4}\n", Simpson(f, a, b, 8));
            Console.WriteLine("МЕТОД ГАУСА:\n{0:f4}", Gaus(-1, 1));
        }
    }
}
```

Скріншот виконання програми:

Select Microsoft Visual Studio Debug Console

```
ЛІМІТ:

lg(x^2+1)
----------
    x

від 0,8 до 1,6 з точністю до 0,0001


МЕТОД СИМПСОНА:
0,2540

МЕТОД ГАУСА:
0,2540
```

Рис. 2. Результат виконання завдання 1 програмно

ВИСНОВОК

У ході виконання лабораторної роботи я дізналася про методи чисельного інтегрування функцій, а саме формулу Симпсона та квадратурну формулу Гауса.

Було помічено, що обидва методи для даної функції збігаються з однакову кількість кроків, утім у загальному метод Гауса виконує це за меншу кількість ітерацій.

Для методу Гауса характерний пошук наближеного значення визначеного інтегралу лише в межах від -1 до 1. Тому при використанні метода Гауса потрібно робити перетворення функції заміною змінної.

У результаті використання методу Гауса було створено функцію подібну до заданої згідно формули (1.8). Оскільки остаточне значення визначеного інтегралу обома розглянутими методами зійшлось, можна зробити висновок, що заміну змінної було виконано правильно.

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i \tag{1.8}$$