МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КПІ»

Кафедра інформаційних систем та технологій

Звіт

з лабораторної роботи № 4

«Обчислення власних значень та власних векторів матриць»

з дисципліни

«Спеціальні розділи математики-2. Чисельні методи»

Варіант № 23

Перевірила:

доц. Рибачук Людмила Віталіївна

Виконала: Павлова Софія

Студентка гр. ІС-12 , ФІОТ

1 курс,

залікова книжка № ІС-1224

Київ 2022

ВСТУП

Тема: Обчислення власних значень та власних векторів матриць**.**

Мета: Розв'язати за допомогою Mathcad СЛАР, перевірити розрахунки програмно та порівняти отримані результати.

Обладнання: Персональні комп'ютери.

ХІД РОБОТИ

Завдання 1:

Створити програму, для зведення матриці А до нормальної форми Фробеніуса Р. Отримане характеристичне рівняння розв'язати довільним способом у Mathcad і отримати всі власні числа λi, i = 1,…,m з точністю 5 знаків після коми.

Для кожного власного числа знайти по одному власному вектору через власні вектори матриці Р.

Перевірити точність знайдених результатів, підставляючи у рівняння (1) знайдені власні числа та власні вектори.

Знайти власні числа матриці А виключно за допомогою Mathcad і порівняти з отриманими раніше результатами.

Варіант 23:

$$A = \begin{pmatrix} 6{,}26 + a & 1{,}10 - b & 0{,}97 + g & 1{,}24 - d \\ 1{,}10 - b & 4{,}16 - a & 1{,}30 & 0{,}16 \\ 0{,}97 + g & 1{,}30 & 5{,}44 + a & 2{,}10 \\ 1{,}24 - d & 0{,}16 & 2{,}10 & 6{,}10 - a \end{pmatrix},$$

де $a = 0{,}11 \times t$; $b = 0{,}02 \times k$; $g = 0{,}02 \times k$; $d = 0{,}015 \times t$; t = остання цифра № у списку групі; $k = 3\times$ (молодша цифра № групи – 4) + перша цифра № у списку групи (наприклад, для номеру 15 у списку ІС-62 t=5, k=3×(2 – 4) + 1 = –5).

Скріни з Mathcad:

Лабораторна робота №4
Варіант №23
Виконала: Павлова Софія, ІС-12

1. Позначимо матрицю системи А:

$t := 3 \qquad d := 0.015 \cdot t = 0.045$

$k := 3 \cdot (2-4) + 2 = -4 \qquad a := 0.11 \cdot t = 0.33 \qquad b := 0.02 \cdot k = -0.08 \qquad g := b = -0.08$

$$A := \begin{bmatrix} 6.26+a & 1.1-b & 0.97+g & 1.24-d \\ 1.1-b & 4.16-a & 1.3 & 0.16 \\ 0.97+g & 1.3 & 5.44+a & 2.1 \\ 1.24-d & 0.16 & 2.1 & 6.1-a \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 6.59 & 1.18 & 0.89 & 1.195 \\ 1.18 & 3.83 & 1.3 & 0.16 \\ 0.89 & 1.3 & 5.77 & 2.1 \\ 1.195 & 0.16 & 2.1 & 5.77 \end{bmatrix}$$

2. Зведемо матрицю А до нормальної форми Форбеніуса:

Етап 1:

$$M3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{A_{4,1}}{-A_{4,3}} & \dfrac{A_{4,2}}{-A_{4,3}} & \dfrac{1}{A_{4,3}} & \dfrac{A_{4,4}}{-A_{4,3}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.569 & -0.076 & 0.476 & -2.748 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A1 := M3^{-1} \cdot A \cdot M3$

$$M3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1.195 & 0.16 & 2.1 & 5.77 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A1 = \begin{bmatrix} 6.084 & 1.112 & 0.424 & -1.25 \\ 0.44 & 3.731 & 0.619 & -3.412 \\ 2.314 & 3.733 & 12.146 & -30.923 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Етап 2:

$$M2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{A1_{3,1}}{-A1_{3,2}} & \dfrac{1}{A1_{3,2}} & \dfrac{A1_{3,3}}{-A1_{3,2}} & \dfrac{A1_{3,4}}{-A1_{3,2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.62 & 0.268 & -3.254 & 8.284 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A2 := M2^{-1} \cdot A1 \cdot M2$

$$M2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.314 & 3.733 & 12.146 & -30.923 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A2 = \begin{bmatrix} 5.394 & 0.298 & -3.195 & 7.963 \\ 5.492 & 16.566 & -81.32 & 121.064 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Етап 3:

$$M1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{A2_{2,1}} & \frac{A2_{2,2}}{-A2_{2,1}} & \frac{A2_{2,3}}{-A2_{2,1}} & \frac{A2_{2,4}}{-A2_{2,1}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M1 = \begin{bmatrix} 0.182 & -3.016 & 14.807 & -22.044 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A3 := M1^{-1} \cdot A2 \cdot M1$$

$$M1^{-1} = \begin{bmatrix} 5.492 & 16.566 & -81.32 & 121.064 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A3 = \begin{bmatrix} 21.96 & -169.041 & 542.162 & -609.292 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Отримали матрицю P, що має нормальну форму Форбеніуса. Матриця P подібна до матриці A.

$$P := A3 = \begin{bmatrix} 21.96 & -169.04128 & 542.16191 & -609.29225 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Перевіримо правильність знаходження матриці P.
Відповідні значення матриці P мають збігатися зі значеннями добутку матриць:

$$M1^{-1} \cdot M2^{-1} \cdot M3^{-1} \cdot A \cdot M3 \cdot M2 \cdot M1 = \begin{bmatrix} 21.96 & -169.041 & 542.162 & -609.292 \\ 1 & -8.527 \cdot 10^{-14} & 4.547 \cdot 10^{-13} & -6.253 \cdot 10^{-13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Бачимо, що значення сходяться, проте присутня допустима похибка.
Отже матрицю P знайдено правильно.

3. Знайдемо власні значення як корені характеристичного рівняння(з даних Mathcad):

Перший рядок матриці P визначає коефіцієнти при степенях λ характеристичного рівняння

$$\lambda^4 - 21.96 \cdot \lambda^3 + 169.041 \cdot \lambda^2 - 542.162 \cdot \lambda + 609.292$$

$$v := \begin{bmatrix} 609.29225 \\ -542.16191 \\ 169.04128 \\ -21.96 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda := \text{polyroots}(v) \qquad \lambda = \begin{bmatrix} 2.6589 \\ 4.34625 \\ 5.69198 \\ 9.26287 \end{bmatrix}$$

- власні значення, знайдені методом Данилевського

4. Знайдемо власні значення (з програми):

Задамо характеристичне рівняння на основі матриці, отриманої програмно:

$$\lambda^4 - 21.96 \cdot \lambda^3 + 169.04128 \cdot \lambda^2 - 542.16191 \cdot \lambda + 609.29226$$

$$v0 := \begin{bmatrix} 609.29226 \\ -542.16191 \\ 169.04128 \\ -21.96 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda 0 := \mathrm{polyroots}(v) \qquad \lambda 0 = \begin{bmatrix} 2.6589 \\ 4.34625 \\ 5.69198 \\ 9.26287 \end{bmatrix}$$

- власні значення (за даними з програми), знайдені методом Данилевського

5. Перевіримо правильність знаходження власних значень матриці А:

Порівняємо значення $\lambda 0$ та λ

$$\lambda = \lambda 0 = 1$$

Бачимо, що вони співпадають, отже власні значення було знайдено правильно.

5. Знайдемо власні вектори матриці А (з програми):

Для початку знайдемо власні вектори матриці, отриманої програмно:

$$\lambda 1 := 2.658901 \qquad y1 := \begin{bmatrix} \lambda 1^3 \\ \lambda 1^2 \\ \lambda 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y1 = \begin{bmatrix} 18.79778 \\ 7.06975 \\ 2.6589 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda 2 := 4.346248 \qquad y2 := \begin{bmatrix} \lambda 2^3 \\ \lambda 2^2 \\ \lambda 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y2 = \begin{bmatrix} 82.10007 \\ 18.88987 \\ 4.34625 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda 3 := 5.69198 \qquad y3 := \begin{bmatrix} \lambda 3^3 \\ \lambda 3^2 \\ \lambda 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y3 = \begin{bmatrix} 184.41239 \\ 32.39864 \\ 5.69198 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda 4 := 9.262871 \qquad y4 := \begin{bmatrix} \lambda 4^3 \\ \lambda 4^2 \\ \lambda 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y4 = \begin{bmatrix} 794.76155 \\ 85.80078 \\ 9.26287 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Знайдемо матриці подібності S:

$$S := M3 \cdot M2 \cdot M1 \qquad S = \begin{bmatrix} 0.182 & -3.016 & 14.807 & -22.044 \\ -0.113 & 2.138 & -12.433 & 21.95 \\ -0.095 & 1.554 & -7.002 & 8.124 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Знайдемо власні вектори матриці А та перевіримо правильність отриманих результатів. Знайдені власні вектори повинні задовольняти наступній рівності: A*x1=λ1*x1

$$x1 := S \cdot y1 = \begin{bmatrix} -0.57566 \\ 1.88362 \\ -1.29741 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A \cdot x1 = \begin{bmatrix} -1.531 \\ 5.008 \\ -3.45 \\ 2.659 \end{bmatrix} \qquad \lambda 1 \cdot x1 = \begin{bmatrix} -1.531 \\ 5.008 \\ -3.45 \\ 2.659 \end{bmatrix}$$

$$x2 := S \cdot y2 = \begin{bmatrix} 0.28121 \\ -0.97118 \\ -0.76401 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A \cdot x2 = \begin{bmatrix} 1.222 \\ -4.221 \\ -3.321 \\ 4.346 \end{bmatrix} \qquad \lambda 2 \cdot x2 = \begin{bmatrix} 1.222 \\ -4.221 \\ -3.321 \\ 4.346 \end{bmatrix}$$

$$x3 := S \cdot y3 = \begin{bmatrix} -1.91076 \\ -0.37198 \\ 1.0785 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A \cdot x3 = \begin{bmatrix} -10.876 \\ -2.117 \\ 6.139 \\ 5.692 \end{bmatrix} \qquad \lambda 3 \cdot x3 = \begin{bmatrix} -10.876 \\ -2.117 \\ 6.139 \\ 5.692 \end{bmatrix}$$

$$x4 := S \cdot y4 = \begin{bmatrix} 1.01661 \\ 0.5007 \\ 1.04663 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A \cdot x4 = \begin{bmatrix} 9.417 \\ 4.638 \\ 9.695 \\ 9.263 \end{bmatrix} \qquad \lambda 4 \cdot x4 = \begin{bmatrix} 9.417 \\ 4.638 \\ 9.695 \\ 9.263 \end{bmatrix}$$

Бачимо, що знайдені власні вектори задовольняють умову. Отже власні вектори матриці А знайдено правильно.

Рис. 1. Результат виконання завдання 1 у Mathcad

Код:

```
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS
#include <iostream>
#include <windows.h>
using namespace std;

#define ICHAR 80  // Довжина рядку опису системи

void matrixPrint(double a[10][10], int n)
{
	int i, j;

	for (i = 1; i <= n; i++)
	{
		for (j = 1; j <= n; j++)
			printf("%9.5f  ", a[i][j]);
```

```
                cout << endl;
        }
}
void forbenius(double a[10][10], int n)
{
        int i, j, k;
        double m[10][10], m1[10][10], m1a[10][10];
        for (i = 1; i <= n - 1; i++)
        {
                // m
                for (j = 1; j <= n; j++)
                        for (k = 1; k <= n; k++)
                        {
                                if (j == n - i)
                                {
                                        if (k == j)
                                                m[j][k] = 1 / (a[j + 1][j]);
                                        else
                                                m[j][k] = a[j + 1][k] / (-a[j + 1][j]);
                                }
                                else if (k == j)
                                        m[j][k] = 1;
                                else
                                        m[j][k] = 0;
                        }
                cout << "\nКРОК " << i << " ------------------------------------";
                cout << "\nM" << n - i << ":" << endl << endl;
                matrixPrint(m, n);
                cout << "\nM" << n - i << "^(-1):" << endl << endl;
                // m^-1
                for (j = 1; j <= n; j++)
                        for (k = 1; k <= n; k++)
                        {
                                if (j == n - i)
                                        m1[j][k] = a[j + 1][k];
                                else if (j == k)
                                        m1[j][k] = 1;
                                else
                                        m1[j][k] = 0;
                        }
                matrixPrint(m1, n);
                // m^-1*a
                for (j = 1; j <= n; j++)
                        for (k = 1; k <= n; k++)
                        {
                                m1a[j][k] = 0;
                                for (int p = 1; p <= n; p++)
```

```
                        m1a[j][k] += m1[j][p] * a[p][k];
                }
            // a= m^-1*a*m
            for (j = 1; j <= n; j++)
                for (k = 1; k <= n; k++)
                {
                    a[j][k] = 0;
                    for (int p = 1; p <= n; p++)
                        a[j][k] += m1a[j][p] * m[p][k];
                }
            cout << "\nA" << i << ":" << endl << endl;
            matrixPrint(a, n);
        }
}
int main()
{
        SetConsoleCP(1251);
        SetConsoleOutputCP(1251);

        double a[10][10];
        float read;
        int n, i, j = 0;
        char   desc[ICHAR];
        FILE* finput;
        finput = fopen("Forbenius.TXT", "r");
        if (finput == NULL)
        {
            cout << "Текстовий файл \"Forbenius.TXT\" НЕ знайдено!\n";
            return(-1);
        }
        // Відсканувати перший рядок файлу до 80 знаків
        fgets(desc, ICHAR, finput);
        // Зчитування кількості рівнянь системи
        fscanf(finput, "%d", &n);
        cout << "Кількість рівнянь системи: " << n << endl;
        // Зчитування матриці А
        cout << "\nМатриця А:\n\n";
        for (i = 1; i <= n; i++)
            for (j = 1; j <= n; j++)
            {
                fscanf(finput, "%f ", &read);
                a[i][j] = read;
            }
        matrixPrint(a, n);
        fclose(finput);
        forbenius(a, n);
}
```

Скріншоти виконання програми:

Microsoft Visual Studio Debug Console

```
Кількість рівнянь системи: 4

Матриця А:

  6.59000    1.18000    0.89000    1.19500
  1.18000    3.83000    1.30000    0.16000
  0.89000    1.30000    5.77000    2.10000
  1.19500    0.16000    2.10000    5.77000

КРОК 1 ------------------------------------
M3:

  1.00000    0.00000    0.00000    0.00000
  0.00000    1.00000    0.00000    0.00000
 -0.56905   -0.07619    0.47619   -2.74762
  0.00000    0.00000    0.00000    1.00000

M3^(-1):

  1.00000    0.00000    0.00000    0.00000
  0.00000    1.00000    0.00000    0.00000
  1.19500    0.16000    2.10000    5.77000
  0.00000    0.00000    0.00000    1.00000

A1:

  6.08355    1.11219    0.42381   -1.25038
  0.44024    3.73095    0.61905   -3.41190
  2.31413    3.73282   12.14550  -30.92301
  0.00000   -0.00000    1.00000    0.00000

КРОК 2 ------------------------------------
M2:

  1.00000    0.00000    0.00000    0.00000
 -0.61994    0.26789   -3.25371    8.28409
  0.00000    0.00000    1.00000    0.00000
  0.00000    0.00000    0.00000    1.00000

M2^(-1):

  1.00000    0.00000    0.00000    0.00000
  2.31413    3.73282   12.14550  -30.92301
  0.00000    0.00000    1.00000    0.00000
  0.00000    0.00000    0.00000    1.00000

A2:

  5.39406    0.29795   -3.19493    7.96310
  5.49196   16.56594  -81.31998  121.06389
  0.00000    1.00000    0.00000    0.00000
  0.00000   -0.00000    1.00000    0.00000

КРОК 3 ------------------------------------
M1:

  0.18208   -3.01640   14.80709  -22.04383
  0.00000    1.00000    0.00000    0.00000
  0.00000    0.00000    1.00000    0.00000
  0.00000    0.00000    0.00000    1.00000
```

```
M1^(-1):

  5.49196   16.56594  -81.31998  121.06389
  0.00000    1.00000    0.00000    0.00000
  0.00000    0.00000    1.00000    0.00000
  0.00000    0.00000    0.00000    1.00000

A3:

 21.96000  -169.04128  542.16191  -609.29226
  1.00000    0.00000    0.00000    0.00000
  0.00000    1.00000    0.00000    0.00000
  0.00000   -0.00000    1.00000    0.00000
```

Рис. 2. Результат виконання завдання 1 програмно

ВИСНОВОК

У ході виконання лабораторної роботи я дізналася про методи обчислення власних значень та власних векторів матриць, а саме метод Данилевського. Дізналася про інструменти для знаходження власних значень матриці в програмі Mathcad. Я навчилась програмно реалізовувати метод Данилевського і зводити матриці до нормальної форми Форбеніуса та використовувати цей метод у середовищі Mathcad для знаходження власих значень та векторів представлених матриць.