CHAPTER 09

수치해석을 이용한 미분

Differentiation with the Use of Numerical Analysis

방성완

중앙대학교 전자전기공학부

2012. 12. 31

Contents

학습목표

- 수치해석적으로 적분과 상호보완 관계인 미분의 기초를 살펴볼 수 있다.
- 테일러 급수에서 유도된 오일러 방법을 이용하여 미분값을 근사시킬 수 있다.
- 룬게쿠타 방법을 이용하여 어려운 고차 도함수를 계산하지 않고 미분값을 근사시킬 수 있다.
- 매트랩에서 제공하는 미분방정식 함수를 이용할 수 있다.

9.1 수치해석을 이용한 미분의 기초

수치해석을 응용한 미분

: **복잡한 미분방정식을 직접 푸는 대신에 미분의 근삿값을 구해서 푼다.**

- 수치적으로 계산하기 위한 함수 $f(x)$의 미분 정의

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f'(x)$: 함수 $f(x)$ 미분 표시

h: 아주 작은 값으로 촘촘하게 놓인 x축에 있는 점들 사이의 간격

- 적분과 상호보완 작용
  - ✓ 적분의 기능은 미분과 반대이므로 반미분이라고 부름
- 연속적이고 지속적인 변화량에 대한 순간 변화율
- 그래프에서 특정 지점에서 나타나는 접선의 기울기
- 원래 함수를 미분하여 생성되는 함수를 도함수라 부름

9.1 수치해석을 이용한 미분의 기초

- **차분 방법**

  : 복잡한 미분방정식을 간단한 계차방정식으로 변환하여 도함수 계산을 실행

- **세 가지 차분 방법**

  - 후향 차분(backward difference), 전향 차분(forward difference), 중심 차분(central difference)
  - 구간 [*a*, *b*]에서 적분한 피적분함수 $g(x)$

$$f(x) = \int_a^b g(x)dx \qquad (9.1)$$

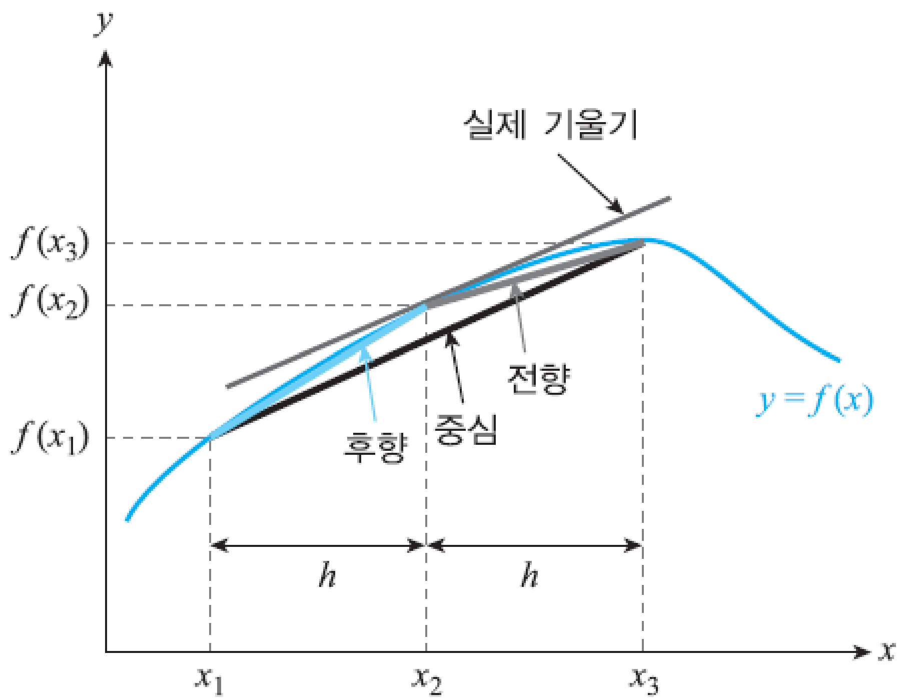
  - $g(x)$는 x에 대한 $f(x)$의 도함수

$$g(x) = f'(x) \qquad (9.2)$$

9.1 수치해석을 이용한 미분의 기초

[그림 9-1] 도함수 $f'(x)$를 추정하기 위한 세 가지 차분 방법

- 자료점 x_1, x_2, x_3에 상응하는 함수 $f(x)$
  - ✓ $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$



9.1 수치해석을 이용한 미분의 기초

후향 차분을 이용한 도함수 추정치

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_2 - h)}{h} \qquad (9.3)$$

✓ $x_1 = x_2 - h$

➢ 함수 $f(x)$의 도함수 추정치

✓ $x = x_2$보다 $x = x_1 + \frac{h}{2}$ (x_1과 x_2 사이의 평균값을 이용)에서 더욱 정확

전향 차분을 이용한 도함수 추정치

$$f'(x) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{f(x_2 + h) - f(x_2)}{h} \qquad (9.4)$$

✓ $x_3 = x_2 + h$

➢ 함수 $f(x)$의 도함수 추정치

✓ $x = x_2$보다 $x = x_2 + \frac{h}{2}$에서 더욱 정확

9.1 수치해석을 이용한 미분의 기초

중심 차분을 이용한 도함수 추정치

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{h} + \frac{f(x_3)-f(x_2)}{h}\right) = \frac{f(x_3)-f(x_1)}{2h} = \frac{f(x_2+h)-f(x_2-h)}{2h} \quad (9.5)$$

- 후향 차분 추정치와 전향 차분 추정치에 대한 평균
- 평균값은 측정 오차를 상쇄
  - ✓ 첫 번째 자료점 x_1과 세 번째 자료점 x_3를 연결시킨 기울기 $x = x_2$에서 직접 구한 도함수의 추정치보다 더 좋은 추정치를 보임

9.1 수치해석을 이용한 미분의 기초

MATLAB 9-1 매트랩의 심볼릭 도구 상자를 이용한 미분 계산

매트랩에서 미분을 할 수 있도록 심볼릭 도구 상자에서 제공하는 **diff** 함수를 사용하여 함수 $f(x) = \sinh(3x)\cosh(5x)$의 1차 미분 함수를 구하고 $x = 0.2$를 대입한 미분값을 계산하라.

Tip !

- ✓ **diff** 함수: 매트랩 심볼릭 도구 상자에서 제공하는 함수
- ✓ **diff** 함수 기본 구문

```
diff(fx, n)
```

- ✓ **subs** 함수: 매트랩 심볼릭 도구 상자에서 제공하는 함수
  주어진 상수값을 x에 대입하여 실제 미분값 계산
- ✓ **subs** 함수 기본 구문

```
subs(dfx, x, a)
```

9.2 오일러 방법

오일러(Euler) 방법

:테일러 급수에서 유도된 방법으로 미분 가능한 함수를 다항식의 형태로 근사

- 방법: 복잡한 미분방정식을 계차방정식으로 변환
- 장점: 미분을 푸는 방법 중에 가장 간단한 알고리즘 제시
- 단점: 작은 시간상수의 변화에 비교적 큰 오차 발생
  - ✓ 미분 풀이의 정확성에 미치는 간격의 영향을 이해가 매우 중요
- 목적: 초기값 조건이 주어진 함수 $f(x)$의 값을 추정

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad (a \le t \le b, \ \ y(t_0) = y_0) \qquad (9.6)$$

  - ✓ 함수의 정확한 형태를 구하는 것이 아니다
  - ✓ 구간 [a, b] 자료점의 집합에서 함수의 값을 푼다

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_N \le b \qquad (9.7)$$

9.2 오일러 방법

- 간단하게 표현된 근삿값

$$y_1 \approx y(t_1), \cdots, y(t_N) \approx y_N \qquad (9.8)$$

- 식 (9.8)의 다른 표현

$$y(t_i) \equiv y_i \qquad (i = 0,\ 1,\ \cdots,\ N) \qquad (9.9)$$

- 시간의 증분량은 h로 나타낸다 (매트랩 응용 표시와 동일)
  - ✓ 수학에서 시간 증분량 Δt와 같은 개념

$$t_i = t_0 + ih \qquad (i = 0,\ 1, \cdots,\ N) \qquad (9.10)$$

  - ✓ t_i는 처음 t_0에서 시간이 h만큼 증가한 새로운 시간을 표시

- 오일러 방법으로 정의된 식 (9.6)

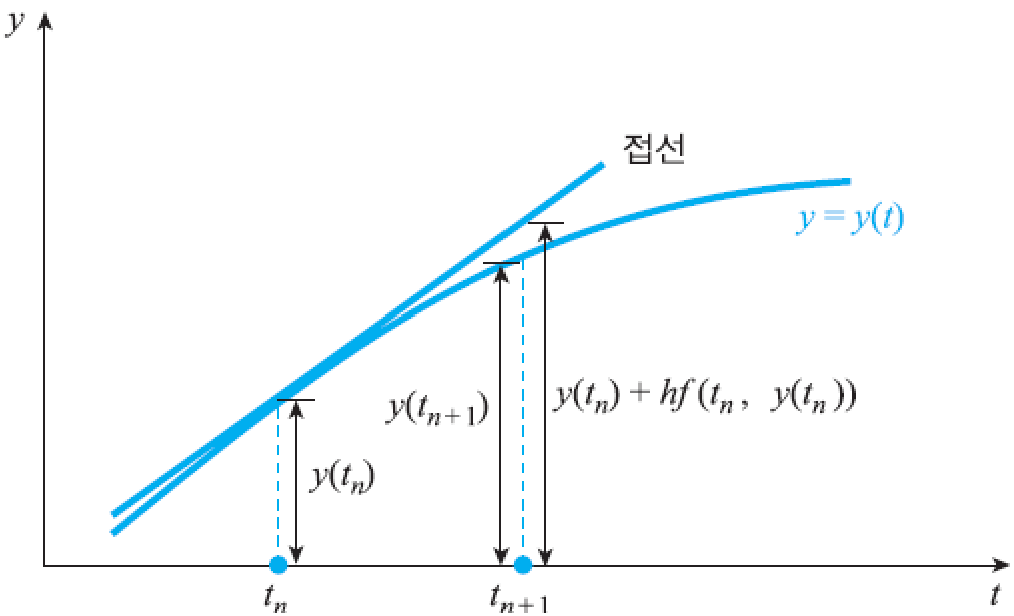
$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) \qquad (n = 0,\ 1, \cdots,\ N-1) \qquad (9.11)$$

9.2 오일러 방법

➢ 식 (9.11)의 다른 표현

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \qquad (n = 0,\ 1, \cdots, N-1) \tag{9.12}$$

[그림 9-3] 오일러 방법의 기하학적 표현



9.2 오일러 방법

수정된 오일러 방법

: 오일러 방법에서 크게 발생한 오차를 줄이기 위해서 오일러 방법을 수정

- 시간 간격 t_n과 t_{n+1}에서 식 (9.11)의 오른쪽에 평균을 치환 사용

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1}) \qquad (9.13)$$

- $f_n = f(t_n, y(t_n))$를 표시

9.2 오일러 방법

예제 9-1 오일러 방법을 이용한 미분 계산

초기 조건이 $y(0) = 1$인 미분방정식 $y'(t) = 1 - t + y$에 대해서 오일러 공식을 이용하여 $y(0.1)$의 근삿값을 구하라. 주어진 미분방정식에 대한 풀이는 $y = t + e^t$이고, 간격은 $h = 0.1$을 사용한다.

Tip !

✓ $n = 0$인 경우를 식 (9.12)에 대입

9.2 오일러 방법

MATLAB 9-2 오일러 방법을 이용한 매트랩 스크립트 파일

0~12.5초까지 0.25초씩 시간이 증가하고, 초깃값이 0인 1차 미분방정식 $\frac{dy}{dt} = \sin t$의 해답을 오일러 방법으로 찾으려고 한다. 미분방정식의 실제 풀이는 $y = 1 - \cos t$이다. 실제 결과와 오일러 방법을 이용한 결과를 그래프로 비교할 수 있는 스크립트 파일을 작성하고 그래프도 보여라.

Tip !

- ✓ 초깃값 $y(1) = 0$, 매트랩에서 첫 번째 원소의 자리 표시는 0으로 표시할 수 없음
- ✓ 식 (9.11)의 매트랩 코드

```
y(n+1) = y(n) + h*sin(t1-h);
```

9.2 오일러 방법

MATLAB 9-3 수정된 오일러 방법을 이용한 매트랩 스크립트 파일

[MATLAB 9-2]에서 제시한 조건을 그대로 사용하여, 수정된 오일러 방법을 이용한 결과를 그래프로 비교할 수 있는 스크립트 파일을 작성하고 그래프도 보여라.

Tip !

✓ 수정된 오일러 방법의 식 (9.13)의 매트랩 코드

```
y(n+1) = y(n) + (h/2)*(sin(t1-h)+sin(t1));
```

9.3 룬게쿠타 방법

룬게쿠타(Runge-Kutta) 방법

: 함수 $f(t, y)$의 다양한 계산에 테일러 급수를 근사시키는 방법

- 테일러 급수를 기초로 미분방정식을 푸는 방법
- 수정된 오일러 방법에 남아있는 오차를 가능한 더 줄이는 방법
- $y(t)$와 $y(t)$의 도함수에 대한 테일러 급수의 풀이 $y(t+h)$

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{1}{2}h^2 y''(t) + \cdots \qquad (9.14)$$

- 테일러 급수에서 전개되어 있는 몇 개의 고차 도함수의 항들을 무시
  - ✓ 수정된 오일러 공식으로 고차 도함수 항들의 계산은 어렵다

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$

- 더욱 정확한 결과 얻음

9.3 룬게쿠타 방법

예제 9-2 테일러 급수를 이용한 미분 계산

초기 조건이 $y(0) = 1$인 미분방정식 $y'(t) = 1 - t + y$에 대해서 2차 테일러 공식을 이용하여 $y(0.1)$의 근삿값을 구하라. 주어진 미분방정식에 대한 풀이는 $y = t + e^t$이고, 간격은 $h = 0.1$을 사용한다.

Tip !

- ✓ 식 (9.6) 이용

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad (a \le t \le b,\ y(t_0) = y_0)$$

- ✓ 식 (9.14) 수정

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} f(t_0, y_0)\right]$$

9.3 룬게쿠타 방법

2차 룬게쿠타 방법

: 룬게쿠타 방법의 순서는 중복되는 테일러 급수항들의 수로 결정

- 2차 룬게쿠타 공식

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[K_1^{(2)} + K_2^{(2)}] \quad (n = 0,\ 1,\ \cdots,\ N-1) \qquad (9.15)$$

  - ✓ 윗첨자 (2)는 룬게쿠타 차수 2를 표시

- 식 (9.15)의 괄호 속 변수

$$K_1^{(2)} = f(t_n, y_n) \qquad (9.16)$$

$$K_2^{(2)} = f(t_n + h,\ y_n + hK_1^{(2)}) \qquad (9.17)$$

9.3 룬게쿠타 방법

예제 9-3 2차 룬게쿠타 공식을 이용한 미분 계산

초기 조건이 $y(0) = 1$인 미분방정식 $y'(t) = 1 - t + y$에 대해서 2차 룬게쿠타 공식을 이용하여 $y(0.1)$의 근삿값을 구하라. 주어진 미분방정식에 대한 풀이는 $y = t + e^t$이고, 간격은 $h = 0.1$을 사용한다.

Tip !

✓ 식 (9.16)과 식 (9.17) 계산

$$K_1^{(2)} = f(t_0, y_0)$$

$$K_2^{(2)} = f(t_0 + h, y_0 + hK_1^{(2)})$$

9.3 룬게쿠타 방법

4차 룬게쿠타 방법

: **2차 룬게쿠타 방법보다 많이 활용되는 방법**

- 2차 룬게쿠타 방법보다 실제 구하는 미분값이 훨씬 정확
  - ✓ 2차 룬게쿠타보다 변수 K의 계산이 두 개 더 필요
- 4차 룬게쿠타 공식

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[K_1^{(4)} + 2K_2^{(4)} + 2K_3^{(4)} + K_4^{(4)}] \qquad (n = 0,\ 1,\ \cdots,\ N-1) \qquad (9.18)$$

  - ✓윗첨자 (4)는 룬게쿠타 차수 4를 표시

9.3 룬게쿠타 방법

- 식 (9.18)의 괄호 속 변수

$$K_1^{(4)} = f(t_n, y_n) \tag{9.19}$$

$$K_2^{(4)} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1^{(4)}\right) \tag{9.20}$$

$$K_3^{(4)} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2^{(4)}\right) \tag{9.21}$$

$$K_4^{(4)} = f\left(t_n + h, y_n + hK_3^{(4)}\right) \tag{9.22}$$

9.3 룬게쿠타 방법

예제 9-4 4차 룬게쿠타 공식을 이용한 미분 계산

초기 조건이 $y(0) = 1$인 미분방정식 $y'(t) = 1 - t + y$에 대해서 4차 룬게쿠타 공식을 이용하여 $y(0.1)$의 근삿값을 구하라. 주어진 미분방정식에 대한 풀이는 $y = t + e^t$이고, 간격은 $h = 0.1$을 사용한다.

Tip !

✓ 식 (9.19)부터 식 (9.22)까지 계산

$$K_1^{(4)} = f(t_0, y_0)$$

$$K_2^{(4)} = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}K_1^{(4)}\right)$$

$$K_3^{(4)} = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}K_2^{(4)}\right)$$

$$K_4^{(4)} = f\left(t_0 + h, y_0 + hK_3^{(4)}\right)$$

9.4 미분방정식을 위한 매트랩 함수

- **dsolve 함수**

: **매트랩의 심볼릭 도구 상자에서 제공하는 미분방정식을 풀기 위한 함수**

➢ 디폴트(default) 미분 변수는 항상 *t*를 사용

➢ 함수의 기본 구문

dsolve('equation', y(0))

✓ 1차 미분 방정식 $\frac{dy}{dt}$는 매트랩 코드 Dy로 표시

✓ 2차 미분 방정식 $\frac{d^2y}{dt^2}$ 는 매트랩 코드 D2y로 표시

✓ 미분 방정식 차수가 3차, 4차 증가하면 D3y와 D4y로 표시

✓ 나머지 상수와 변수는 매트랩 기본 표기로 표시

✓ y(0)은 함수의 초깃값 표시

9.4 미분방정식을 위한 매트랩 함수

MATLAB 9-4 매트랩 함수 **dsolve**를 이용한 미분 계산

초기 조건이 $y(0) = 1$인 미분방정식 $y'(t) = 1 - t + y$에 대해서 매트랩 함수 **dsolve**를 이용하여 $y(0.1)$의 값을 구하라.

Tip !

✓ **dsolve** 함수를 이용하여 푼 $y(t)$에 $t = 0.1$ 값을 대입

9.4 미분방정식을 위한 매트랩 함수

- **ode23 함수와 ode45 함수**

  : **룬게쿠타 공식의 구현을 돕기 위한 'solvers'라고 부르는 함수**

  - **ode23**: 2차와 3차 룬게쿠타 공식의 조합에 이용
  - **ode45**: 4차와 5차 룬게쿠타 공식의 조합에 이용
    - ✓ **ode23** 함수보다 더 빠르고 정확한 결과
    - ✓ **ode23** 함수보다 간격이 더 크기에 그래프의 곡선은 덜 매끄러움
  - 기본 구문

```
[t, y] = ode23('ydot', tspan, y(0))
[t, y] = ode45('ydot', tspan, y(0))
```

    - ✓ ydot은 주어진 1차 미분방정식 표시
    - ✓ 벡터 **tspan**은 미분 변수 t의 시작과 끝나는 시간의 범위 표시
    - ✓ y(0)은 함수의 초깃값 표시

9.4 미분방정식을 위한 매트랩 함수

MATLAB 9-5 매트랩 함수 **ode23**과 **ode45**를 이용한 미분방정식 풀이

초기 조건이 $y(0) = 1$인 미분방정식 $y'(t) = \sin t$에 대해서 **ode23** 함수와 **ode45** 이용하여 그래프를 비교하라. 이때 1차 미분방정식의 실제 풀이는 $y(t) = 1 - \cos t$ 이다.

Tip !

- ✓ 1차 미분방정식 **ydot**을 구성하는 사용자정의함수 작성
- ✓ **ydot**을 불러와서 **ode23**과 **ode45**를 실행하는 사용자정의함수 작성

Thank you!